

154374

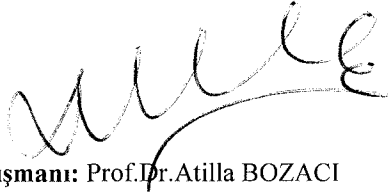
**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EĞİK (OMUZLU) BİLYALI RULMANLARDA  
DEĞME ANALİZİ VE  
ELASTOHİDRODİNAMİK YAĞ FİLMİNİN OLUŞUMU**

Makina Mühendisi İlknur KESKİN

**FBE Makina Mühendisliği Anabilim Dalı Konstrüksiyon Programında  
Hazırlanan**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**



**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Atilla BOZACI**

**İSTANBUL, 2004**

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ .....	iv
KISALTMA LİSTESİ .....	vi
ŞEKİL LİSTESİ .....	vii
ÖNSÖZ.....	viii
ÖZET .....	ix
ABSTRACT .....	10
1. GİRİŞ.....	11
2. EĞİK (OMUZLU) BİLYALI RULMAN.....	12
2.1 Eğik (Omuzlu) Bilyalı Rulmanın Geometrisi.....	13
2.1.1 Ortalama Çap(Do) .....	13
2.1.2 Eğrilik Merkezleri Arasındaki Uzaklık( $\ell_m$ ) .....	13
2.1.3 Yaslanma Ekseni, Yaslanma Açısı .....	13
2.1.4 Radyal Boşluk(c): .....	14
2.1.5 Eksenel Boşluk(e):.....	14
2.1.6 Yuvarlanma Yolu Uyumluluğu (f) .....	15
2.1.7 Eğrilik Toplamı ve Farkı : .....	15
2.2 Eğik (Omuzlu) Bilyalı Rulmanın Kinematığı .....	21
2.2.1 Çevre Hızları.....	21
2.2.1.1 İç Bilezikle Kafes Arasındaki Hız Farkı.....	23
2.2.1.2 Dış Bilezikle Kafes Arasındaki Hız Farkı .....	23
3. ELASTOHİDRODİNAMİK YAĞLAMA TEORİSİ.....	25
3.1 Uyumlu ve Uyumsuz Yüzeyleyler .....	25
3.2 Elastohidrodinamik Yağlama .....	26
3.2.1 Sert EHL .....	26
3.2.2 Esnek EHL.....	28
3.2.3 Değme Mekanığı .....	28
3.3 EHL Teorisine Yapılan Farklı Yaklaşımlar.....	32
3.3.1 Grubin'in EHD Değme Modeli .....	32
3.3.2 Cameron'un Yaklaşımı.....	36
3.3.3 Hamrock – Dowson Yaklaşımı.....	44
4. SAYISAL UYGULAMA .....	47
5. SONUÇLAR.....	54

KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ .....	56



## SİMGE LİSTESİ

$r_b$	Bilya yarıçapı , [mm]
$D_o$	Rulmanın ortalama çapı ,[mm]
$r_i$	İç bilezikteki yiv eğrilik yarıçapı , [mm]
$r_a$	Dış bilezikteki yiv eğrilik yarıçapı , [mm]
$M_i$	İç bileziğin eğrilik yarıçapı merkezi
$M_a$	Dış bileziğin eğrilik yarıçapı merkezi
$\ell_m$	Yiv eğrilik merkezleri arası uzaklık
$R_A$	Bilyanın dış bileziğe değdiği noktanın mil eksenine uzaklığı ,[mm]
$R_B$	Bilyanın iç bileziğe değdiği noktanın mil eksenine uzaklığı , [mm]
$\alpha$	Yaslanma açısı , [°]
$c$	Radyal boşluk ,[mm]
$e$	Eksenel boşluk , [mm]
$f_i$	İç bileziğin yiv eğrilik yarıçapının bilya çapına oranı
$f_a$	Dış bileziğin yiv eğrilik yarıçapının bilya çapına oranı
$\rho$	1/r
$\gamma$	$2r_b \cos \alpha / D_o$
$V_A$	Bilyanın dış bileziğe değdiği noktadaki çevre hızı , [m/sn]
$V_B$	Bilyanın iç bileziğe değdiği noktadaki çevre hızı , [m/sn]
$V_o$	Kafes sisteminin çevre hızı , [m/sn]
$\omega_a$	Dış bileziğin açısal hızı ,[rad/sn]
$\omega_b$	Bilyanın iç bileziğe değdiği noktadaki açısal hızı , [rad/sn]
$\omega_i$	İç bileziğin açısal hızı , [rad/sn]
$\omega_o$	Kafes sisteminin mil eksenine etrafındaki açısal hızı ,[rad/sn]
$\omega_k$	Bilyanın açısal hızı , [rad/sn]
$n_a$	Dış bileziğin devir sayısı , [1/dak]
$n_i$	İç bileziğin devir sayısı , [1/dak]
$n_o$	Kafes sisteminin devir sayısı ,[1/dak]
$n_k$	Bilyanın devir sayısı , [1/dak]
$p$	Basınç , [Pa]
$p_{max}$	Maksimum basınç , [Pa]
$E$	Elastisite modülü,[Pa]
$F$	Kuvvet , [N]
$E'$	Efektif elastisite modülü,[Pa]
$\nu$	Poisson oranı
$\bar{\mathcal{E}}$	İkinci türün tam eliptik integrali
$H$	Film kalınlığı parametresi
$W$	Yük parametresi
$U$	Hız parametresi
$G$	Malzeme parametresi
$g_H$	Film kalınlığını ifadesi
$g_V$	Viskozite ifadesi
$g_E$	Elastik deformasyonun öneminin ifadesi
$\bar{F}$	Birinci türün eliptik integrali
$H_{min}$	Boyutsuz minimum film kalınlığı
$h_{min}$	Minimum film kalınlığı,[m]
$\alpha_r$	Eliptik parametre , $R_y / R_x$
$\kappa$	Eliptik parametre , $\alpha_r^{2/3}$

$\delta$	Elastik deformasyon,[m]
a,b	Değme elipsinin her iki eksenindeki yarıçapları, [m]
$\Sigma\rho$	Eğrilik toplamı,[m <sup>-1</sup> ]
$F_\rho$	Eğrilik farkı,[m <sup>-1</sup> ]
$\eta_0$	Mutlak viskozite, [Pa-s]
$\alpha$	Viskozite-basınç katsayısı, [Pa <sup>-1</sup> ]



## KISALTMA LİSTESİ

EHL Elastohidrodinamik Yağlama



## ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Eğik (omuzlu) bilyalı rulman .....	12
Şekil 2.2 Eğik (omuzlu) bilyalı rulmanın geometrisi .....	13
Şekil 2.3 Radyal boşluk .....	14
Şekil 2.4 Noktasal değme .....	16
Şekil 2.7 Kafes ve bilyanın dönme hızlarının ifadesi .....	21
Şekil 3.1 a) Uyumlu ve, b) Uyumsuz yüzeyler.....	26
Şekil 3.2 Sert EHL.....	27
Şekil 3.3 Esnek EHL .....	28
Şekil 3.4 Değme sonucu oluşan elipsin eksenleri .....	29
Şekil 3.5 Eğik (omuzlu) bilyalı rulman .....	29
Şekil 3.6 Hertz tipi deforme olan yüzeyin geometrik temsili.....	36
Şekil 3.7 Polar koordinatlarda noktasal yükten dolayı oluşan deformasyon.....	37
Şekil 3.8 Dairesel temas alanı üzerindeki deformasyon.....	38
Şekil 3.9 Basınç dairesinin dışındaki bir noktada oluşan deformasyon .....	40
Şekil 3.10 Değen kürelerin geometrisi .....	42



## ÖNSÖZ

Bu çalışmanın,Eğik (Omuzlu) bilyalı rulmanların geometrisinin, kinematığının ve EHL yaklaşımlarının detaylı bir şekilde ele alındığı ilk Türkçe kaynak olarak literatürde yerini alacağı ve faydalı olacağı düşüncesindeyim.

Çalışmalarımı değerlendirip yönlendiren değerli hocam Prof.Dr.Atilla Bozacı'ya, fikir alışverişinde bulunduğum çalışma arkadaşlarımlarım Arş.Gör.Meral Barut'a, Arş.Gör. Coşkun Filiz'e, Arş. Gör. Seyfettin Bayraktar'a ve hayatımın her anında yanımda olan sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.



## ÖZET

Bu çalışmada eğik (omuzlu) bilyalı rulmanların geometrisi ve kinematiği ayrıntılı bir şekilde ele alınarak yuvarlanma elemanları ile bilezikler arasındaki bağıntılar belirtilmiş ve geometrik çizimler SolidWorks programı ile yapılmıştır. Yüksüz durumda iken eğik (omuzlu) bilyalı rulmanlarda yuvarlanma elemanının iç bilezik ve dış bilezikle teması noktasaldır. Yüklü durumda ise temas eliptiktir. Çalışma esnasında nokta ve çizgi temaslarda yüksek basınçlar söz konusu olduğu için yuvarlanma elemanlarında ve bileziklerde deformasyonlar meydana gelmektedir. Basınç yüksek olunca EHL olayı ortaya çıkar. EHL yağlama birbirlerine göre kayma ve yuvarlanma hareketi yapan nokta ya da çizgi temasında bulunan yüzeyler arasındaki yağlama olayını ifade eden bir mühendislik terimidir.

Çalışmada, bu konunun duayenlerinden Grubin'in, Cameron'un, Hamrock ve Dowson'ın EHL yaklaşımları derlenmiş ve sayısal bir örnekle uygulamaya konmuştur.

**Anahtar kelimeler:** Eğik (omuzlu) bilyalı rulman, değme mekaniği, elastohidrodinamik yağlama



**ABSTRACT**

In this study the geometry, and the kinematics of the angular contact ball bearings are investigated and then the relationships between the rollers and the rings are mentioned. When rollers and the rings come into contact under zero load, they touch in a point. On increasing the normal contact load from zero the shape of the finite contact zone is an ellipse. In running of the angular contact ball bearings, high pressure forms at the point and elliptical contact zone. That's why the bodies deform. Because of the high pressure, EHL occurs. EHL is the name given to hydrodynamic lubrication when it is applied to solid surfaces of low geometric conformity that are capable of and are subject to elastic deformation.

Through this study EHL approximations of Grubin, Cameron, Hamrock and Dowson who are the most successful researchers on this subject are gathered together.

**Keywords:** Angular contact ball bearings, contact mechanics, elastohydrodynamic lubrication



## 1. GİRİŞ

Rulmanlı yataklarda meydana gelen sürtünme, yuvarlanma olayından çok temas halinde bulunan malzemelerin elastik şekil değiştirmeleri, elastik histerizis, çeşitli kuvvetlerin şiddetleri ve doğrultuları, yuvarlanma elemanları ile kafes arasındaki sürtünme, yağın cinsi gibi etkenler tarafından tayin edilmektedir. Yuvarlanma elemanları ile temas yüzeyleri arasındaki sürtünme sadece yuvarlanma sürtünmesi olmayıp yuvarlanma-kayma sürtünmesidir. Yuvarlanma sürtünmesi, yuvarlanma hareketine karşı temas yüzeylerinde oluşan dirençtir (Akkurt,2000).

Yüksüz durumda, yuvarlanma elemanları ve yuvarlanma yolları arasında değme nokta ve çizgi değme olarak adlandırılır. Yüklenmemiş durumda, aksenal bir kesit konveks yuvarlanma elemanının eğriliğinin konkav yuvarlanma yolunun eğriliğinden daha büyük olduğunu gösterirse bu değme bir noktadır ve nokta değme olarak ifade edilir. Yük altında, nokta değme alanındaki yüzeyler arasında oluşan elastik deformasyonlar genellikle eliptiktir.

Yüksüz durumda aksenal bir kesitte konveks yuvarlanma elemanının eğriliği konkav yuvarlanma yolunun eğriliği ile aynı ise bu değme bir çizgidir ve çizgi değme olarak ifade edilir. Yük altında çizgi değme dikdörtgenseldir. Bütün bilyalı yataklar ile silindirik ve konik bilyalı yataklarda çizgi değme söz konusudur (Eschman,1985).

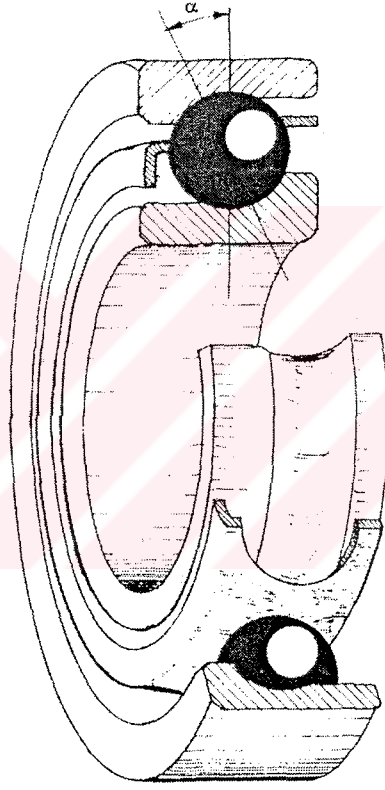
İlk olarak H.M.Martin 1916'da düzlem-silindir geometrisini analiz etmiştir. Martin yüksek gerilimli EHL değmelerde oluşan sürekli bir hidrodinamik filmin mevcudiyetiyle ilgili çalışmalarında elde ettiği sonuçlar deneysel sonuçlardan farklı olmuştur. Bu nedenle de yaklaşık yirmi yıl boyunca yağlanmış uyumlu yüzeyler üzerindeki teorik çalışmalardan olumlu sonuçlar elde edilememiştir. Martin analizini sınırlayan kabuller yapmıştır. Bunlar:

- 1- Sabit yağlayıcı viskozitesi
- 2- Katı sınırlı yüzeyler

Klasik hidrodinamik teoride ilk ilerleme 1936'da W.Peppler'in değmelerde elastik deformasyon oluşumunu farketmesiyle gerçekleşmiştir. Bu gelişme esnasında Peppler bir hata yapmıştır. Basıncın yağlamanın olmadığı değmelerdeki Hertz basıncını aşmaması gerekmektedir. İkinci ilerleme ise 1945'de Gatcombe'nin akışkan viskozitesinin basınçla değişimini çalışmalara dahil etmesiyle gerçekleşti. EHL yağlama üzerinde ilk çalışan Rus bilim adamı A.M.Ertel dir. Daha sonra onun çalışma arkadaşı Grubin devam etmiştir. Nihayet 1949 yılında A.N.Grubin hem elastik deformasyonun hem de basınca bağlı viskozitenin etkisini hesaplara dahil ederek ilk başarılı sonucu elde etmiştir (Szeri,1988).

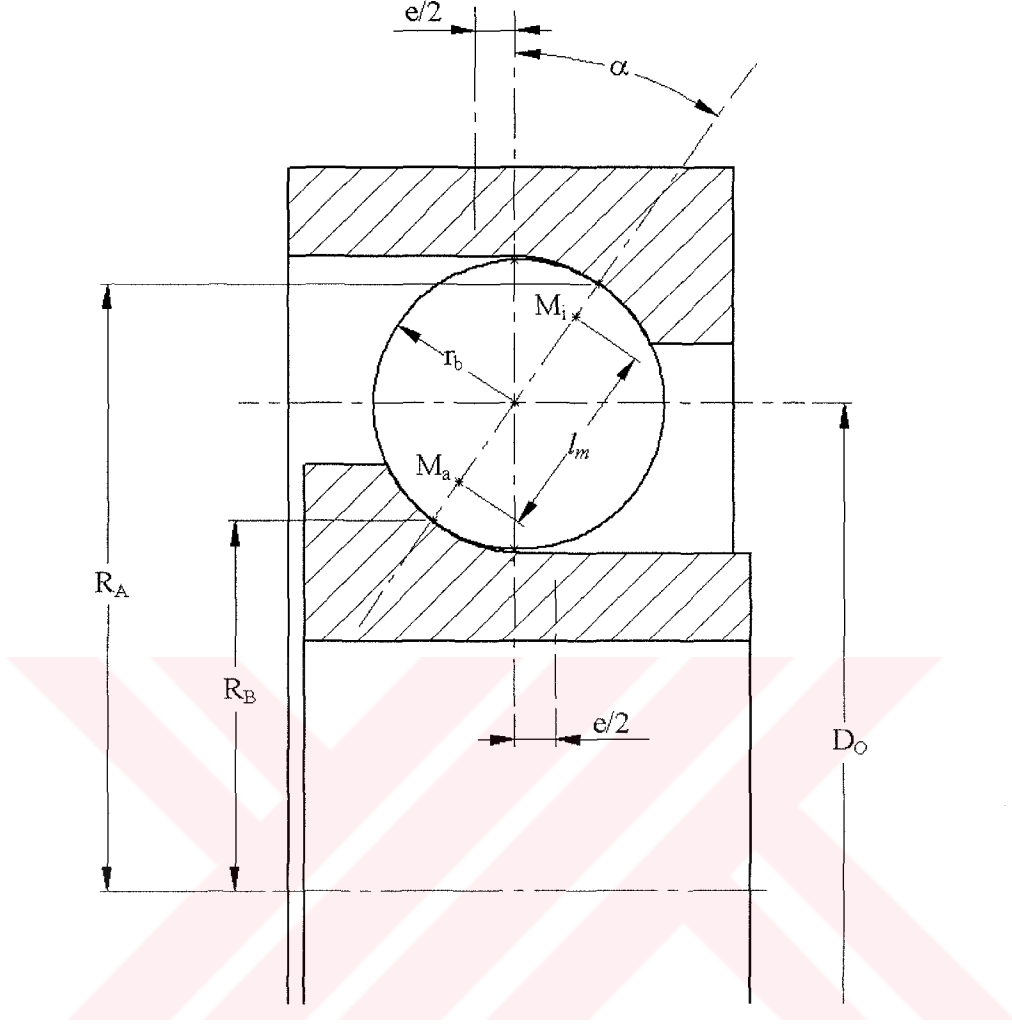
## 2. EĞİK (OMUZLU) BİLYALI RULMAN

Bilyalı eğik rulmanlarda bileziklerin yuvarlanma yüzeyi birbirine nazaran çarpık olduğundan bilyalara gelen kuvvetler radyal olmayıp eksene eğik durumdadırlar.Yani yaslanma eksenine eğik oluşur.Bu konstrüksiyon rulmana radyal yüklerle birlikte aksel yükler alabilme özelliği kazandırmaktadır.Her rulman yalnız bir yönden aksel yük alabileceğinden ve diğer yönde yaslanma olmadığı için aksel yük alamayacağından gerektiğinde her iki yönden gelecek aksel yükü alabilmek için ikinci bir rulmanla birlikte monte edilmesi uygun olur (Bozacı,2001).



Şekil 2.1 Eğik (Omuzlu) bilyalı rulman

## 2.1 Eğik (Omuzlu) Bilyalı Rulmanın Geometrisi



Şekil 2.2 Eğik (Omuzlu) bilyalı rulmanın geometrisi

### 2.1.1 Ortalama Çap( $D_0$ )

Bilyanın iç ve dış bileziğe değdiği noktalarda oluşturduğu çapların aritmetik ortalaması.

$$D_0 = R_A + R_B \quad (2.1)$$

### 2.1.2 Eğrilik Merkezleri Arasındaki Uzaklık( $l_m$ ):

$$l_m = r_i + r_a - 2r_b \quad (2.2)$$

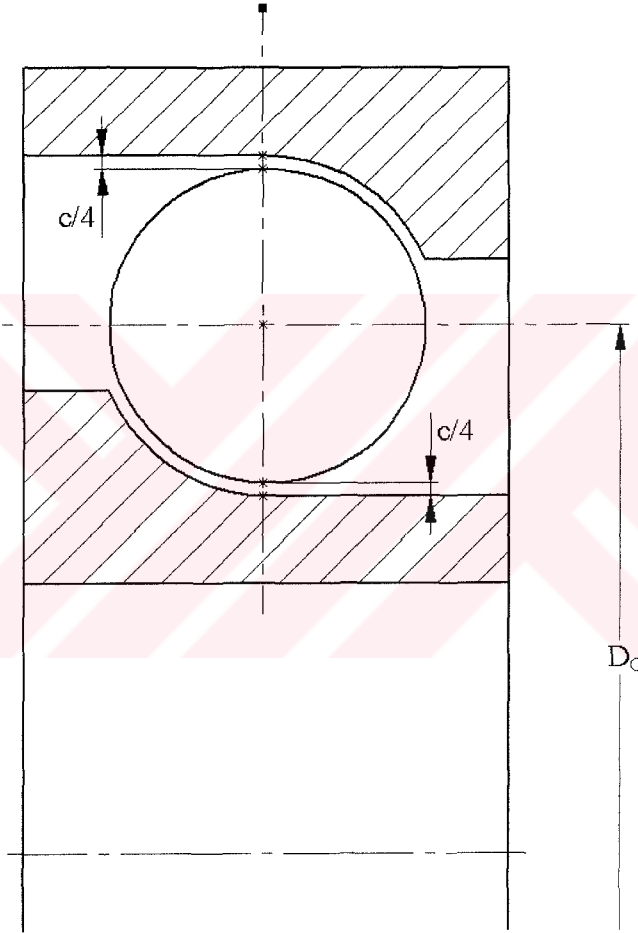
### 2.1.3 Yaslanma Eksenini, Yaslanma Açısı

Yaslanma (değme) eksenini, bilyanın iç bilezik ve dış bilezik yivlerine değdiği noktaları birleştiren ve bilya merkezinden geçen doğrudur. Bu eksenin düşeyle yaptığı  $\alpha$  açısı yaslanma

(değme) açısıdır.Bu durumda  $M_i$  ve  $M_a$  eğrilik merkezleri bu eksen üzerine düşer.

#### 2.1.4 Radyal Boşluk(c):

Radyal boşluk, bileziklerin aksenal doğrultuda birbirinden uzaklaşması sonucu bir yaslanma açısının doğmasına neden olur.Boşluk arttıkça açı büyür.Bu da aksenal yükü taşımayı kolaylaştırır.



Şekil 2.3 Radyal boşluk

#### 2.1.5 Aksenal Boşluk(e):

Her birinin ortadan  $e/2$  kadar aksi yönlerde gitmeleri sonucu, bilezikler aksenal doğrultuda birbirlerinden toplam  $e$  kadar uzaklaşırlar.Eğer radyal boşluk  $c$  çevresel olarak eşit dağıtılsa her bilya ile yiv arasında  $c/4$  kadar bir boşluk kalır demektir.

Bu durumda yaslanma (değme) açısı

$$\cos\alpha = (\ell_m - c/2) / \ell_m = 1 - c/(2\ell_m) \quad (2.3)$$

Bu ifade yaslanma açısının ( $\alpha$ ) radyal boşlukla ( $c$ ) doğru orantılı olduğunu gösterir. ( $c$  ,  $\cos\alpha \downarrow$  ,  $\alpha \uparrow$ ). Tek sıralı Eğik (Omuzlu) bilyalı rulmanlarda radyal boşluğa bağlı olarak, bileziklerin aksel yer değiştirmeleri sonucu,  $\alpha=15^0 \dots 40^0$  olabilmektedir. Çift sıralı Eğik (Omuzlu) bilyalı rulmanlarda ise  $\alpha=35^0 \dots 40^0$  olduğu görülmektedir. Çalışma esnasında, yük altında elastik deformasyonlardan ötürü yaslanma açıları bir miktar değişebilir.

Yüksek hızlarda bilyaları savuran merkezkaç etki dış bilezikte yaslanma açısını küçültürken iç bilezikte büyütülmektedir.

Eksenel boşluk, iç bileziğin dış bilezik içinde küçük bir devrilme açısı yapmasına da izin verir. Bu açı radyan olarak  $e/D_0$  kadardır.

### 2.1.6 Yuvarlanma Yolu Uyumluluğu ( $f$ ):

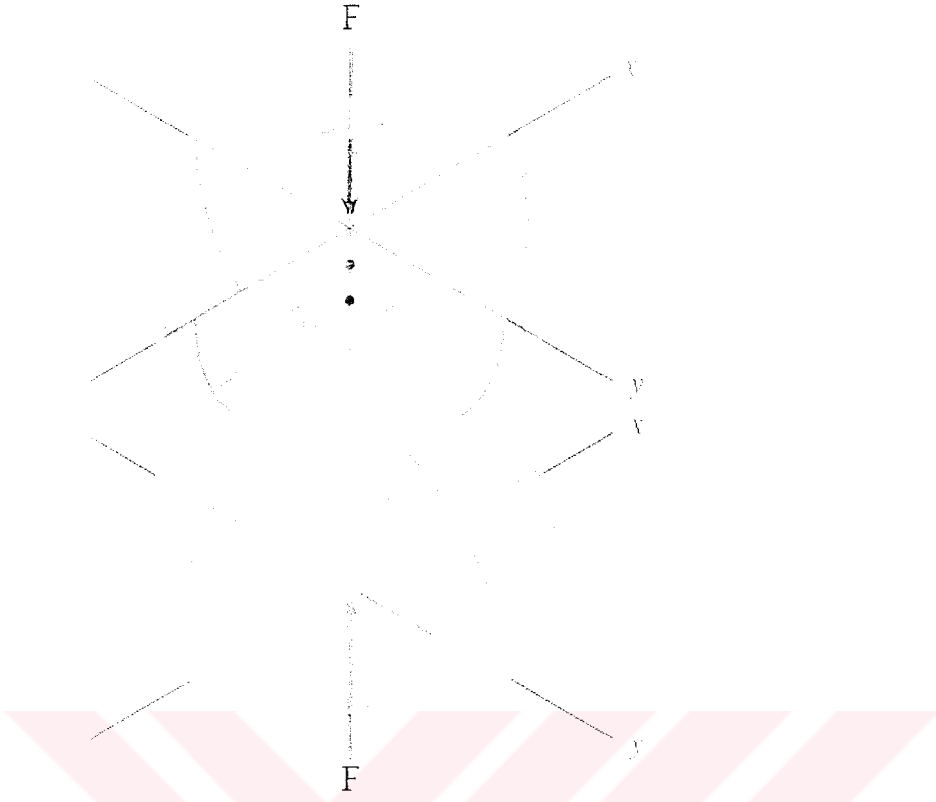
Yatak aksinden geçen bir düzlem içindeki bilya ve yuvarlanma yolunun geometrik uyumluluğunun ölçümüdür. Yuvarlanma yolunun eğrilik yarıçapının bilya çapına oranı şeklinde ifade edilir.

$$f = \frac{r}{2.r_b} \quad (2.4)$$

Yuvarlanma yolunun yarıçapının bilya yarıçapına eşit olduğu ( $f = 1/2$ ) durum mükemmel uyumluluğu ifade eder. Daha büyük oranlar değme bölgesinde sürtünme ısısının büyümesine ve bir de maksimum değme gerilmesinin artmasına sebep olur bu nedenle yatak ömrü azalır. Bu nedenle çoğu bilyalı yataklarda bu oran  $0,51 \leq f \leq 0,54$  arasındadır. En yaygın oran 0,52 dir. Dış ve iç bileziğin bilya ile arasındaki bu oranlar genelde eşittir. Aradaki fark 0,02 yi geçmez.

### 2.1.7 Eğrilik Toplamı ve Farkı :

Bilyalı yataklarda birbirine değen yüzeylerin deforme olmuş geometrisi iki elipsoid olarak ifade edilebilir. Bilyanın her iki eksenindeki eğrilik yarıçapı birbirine eşittir (Harris, 1991).



Şekil 2.4 Noktasal değme

İç bilezik bilya arasında ;

$$r_{11} = r_{12} = r_b \quad (2.5)$$

$$r_{21} = R_B = \frac{1}{2} \left( \frac{D_o}{\cos \alpha} - 2 \cdot r_b \right) \quad (2.6)$$

$$r_{22} = -f_i \cdot 2r_b \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{21}} \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{22}} \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \quad (2.10)$$

$$\Sigma \rho_i = \frac{1}{R_i} = \frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{22}} \quad (2.11)$$

$$\Sigma \rho_i = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_b} - \frac{1}{2r_b \cdot f_i} + \frac{2 \cdot \cos \alpha}{D_o - 2r_b \cdot \cos \alpha}$$

$$\gamma = \frac{2r_b \cdot \cos \alpha}{D_o} \quad (2.12)$$

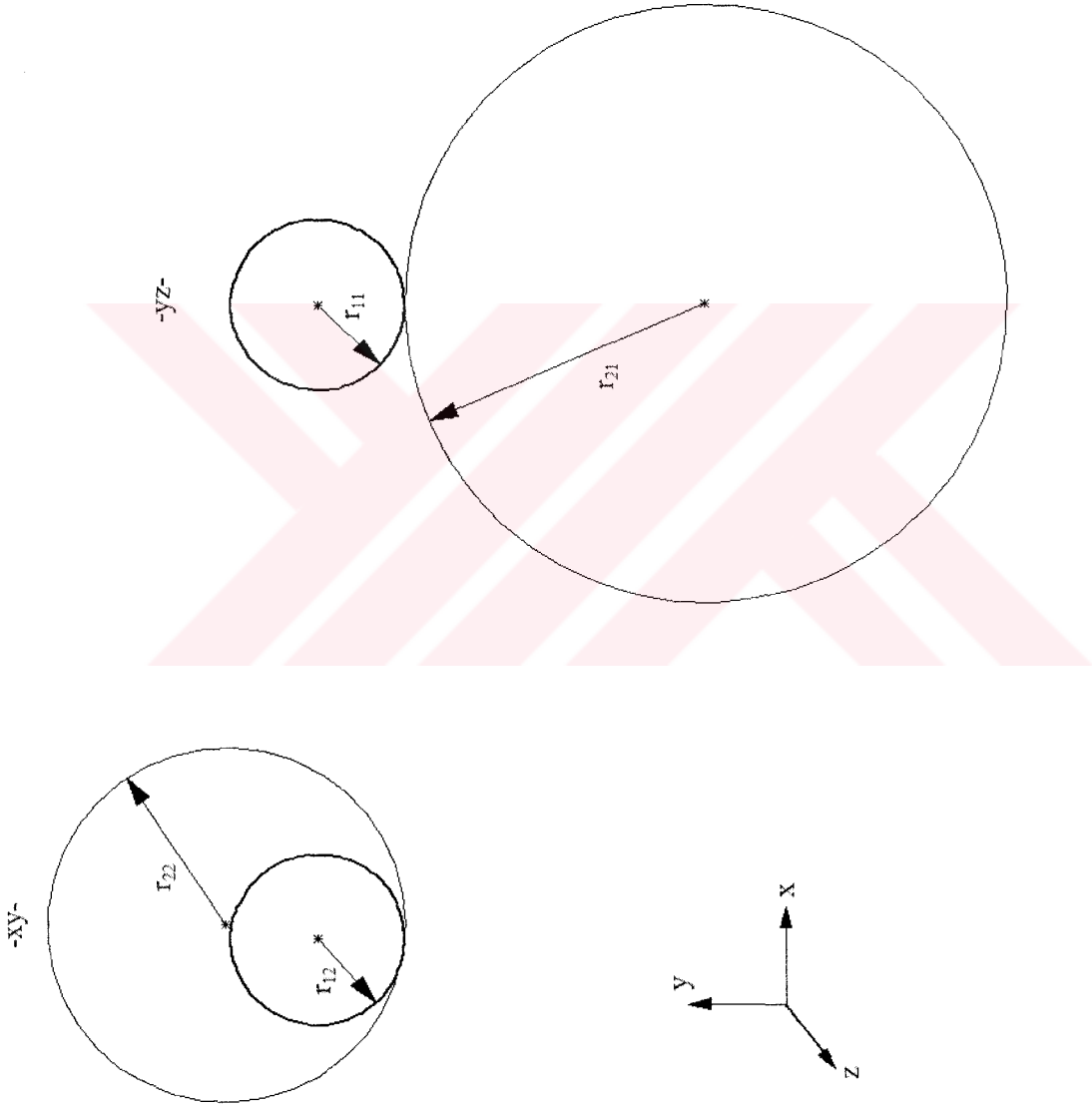
$$\Sigma \rho_i = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_b} - \frac{1}{2r_b \cdot f_i} + \frac{2}{2r_b} \left( \frac{\gamma}{1-\gamma} \right)$$

$$\Sigma \rho_i = \frac{2}{r_b} - \frac{1}{f_i \cdot 2r_b} + \frac{1}{r_b} \left( \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) = \frac{1}{2r_b} \left( 4 - \frac{1}{f_i} + \frac{2\gamma}{1-\gamma} \right) \text{ olarak bulunur.}$$

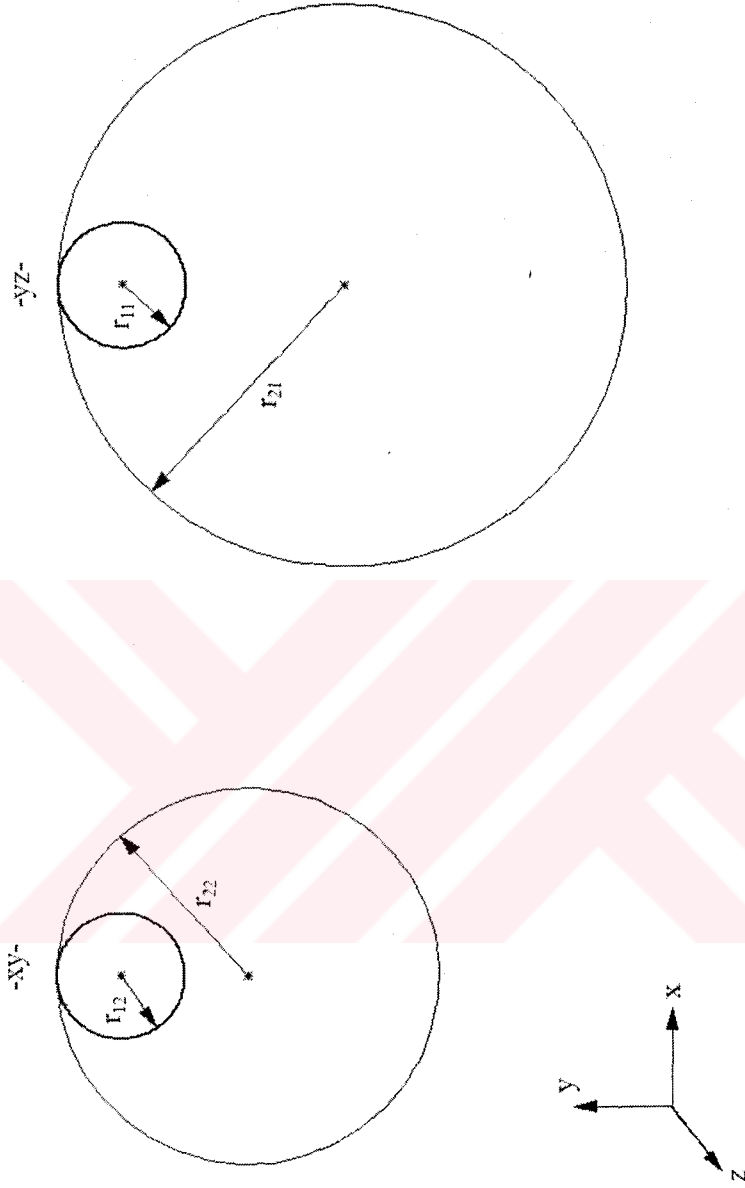
Eğrilik farkı ;

$$F_{\rho_i} = \frac{\left( \frac{1}{r_{11}} - \frac{1}{r_{12}} \right) + \left( \frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{22}} \right)}{\Sigma \rho_i} \quad (2.13)$$

$$F_{\rho_i} = \frac{\frac{1}{r_b} \left( \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) - \left( -\frac{1}{2r_b \cdot f_i} \right)}{\Sigma \rho_i} = \frac{\frac{1}{f_i} + \frac{2\gamma}{1-\gamma}}{4 - \frac{1}{f_i} + \frac{2\gamma}{1-\gamma}} \quad (2.14)$$



Şekil 2.5 İç bilezik ve bilyanın eğrilik yarıçapları



Şekil 2.6 Dış bilezik ve bilyanın eğrilik yarıçapları

Dış bilezik bilya arasında ;

$$r_{11} = r_{12} = r_b \quad (2.15)$$

$$r_{21} = -\frac{1}{2} \left( \frac{D_o}{\cos \alpha} + 2r_b \right) \quad (2.16)$$

$$r_{22} = -f_a \cdot 2r_b \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{21}} \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{22}} \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{R_a} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \quad (2.20)$$

$$\Sigma \rho_a = \frac{1}{R_a} = \frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{22}} \quad (2.21)$$

$$\Sigma \rho_a = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_b} - \frac{1}{2r_b \cdot f_a} - \frac{2 \cdot \cos \alpha}{D_o + 2r_b \cdot \cos \alpha}$$

$$\Sigma \rho_a = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_b} - \frac{1}{2r_b \cdot f_a} - \frac{2}{2r_b} \left( \frac{\gamma}{1+\gamma} \right)$$

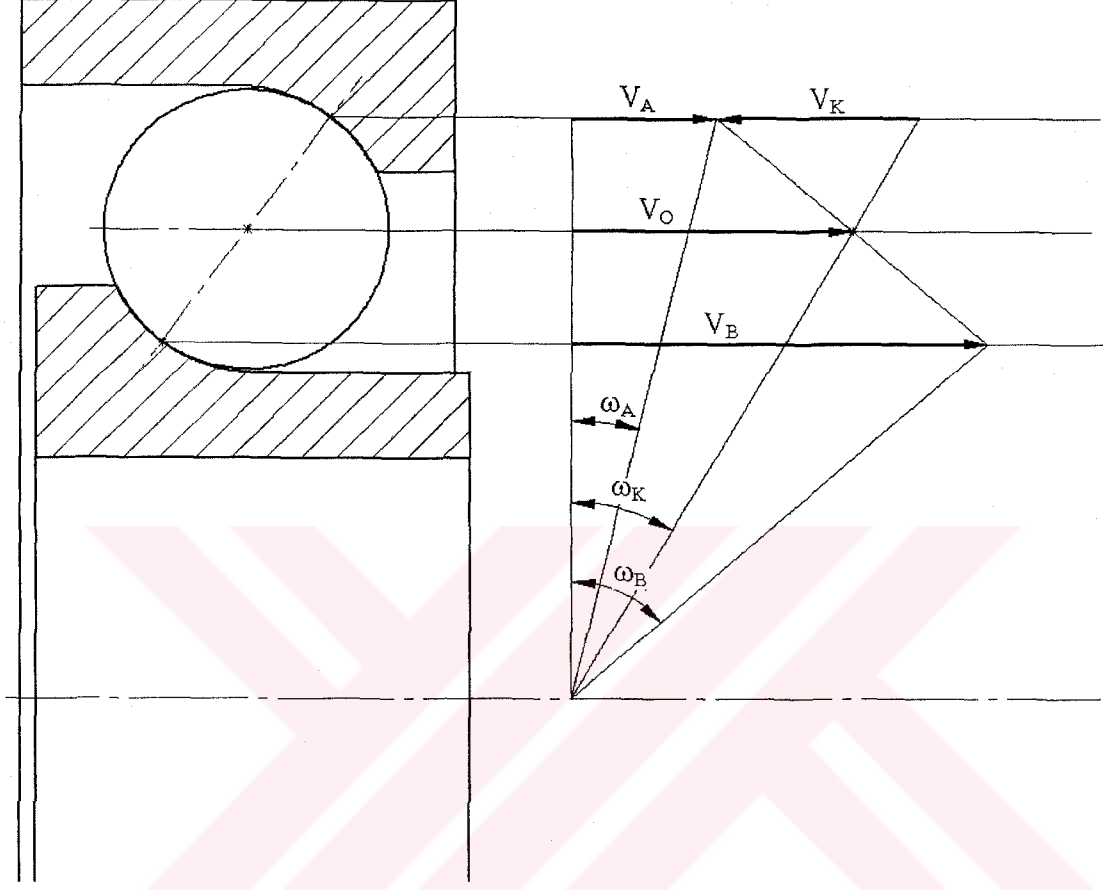
$$\Sigma \rho_a = \frac{2}{r_b} - \frac{1}{f_a \cdot 2r_b} - \frac{1}{r_b} \left( \frac{\gamma}{1+\gamma} \right) = \frac{1}{2r_b} \left( 4 - \frac{1}{f_a} - \frac{2\gamma}{1+\gamma} \right)$$

Eğrilik farkı ;

$$F_{\rho_a} = \frac{\left( \frac{1}{r_{11}} - \frac{1}{r_{12}} \right) + \left( \frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{22}} \right)}{\Sigma \rho_a} \quad (2.22)$$

$$F_{\rho_a} = \frac{-\frac{1}{r_b} \left( \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) - \left( -\frac{1}{2r_b \cdot f_a} \right)}{\Sigma \rho_a} = \frac{\frac{1}{f_a} - \frac{2\gamma}{1+\gamma}}{4 - \frac{1}{f_a} - \frac{2\gamma}{1+\gamma}}$$

## 2.2 Eğik (Omuzlu) Bilyalı Rulmanın Kinematığı



Şekil 2.7 Kafes ve bilyanın dönme hızlarının ifadesi

### 2.2.1 Çevre Hızları

A ve B değme noktalarının mil eksenine uzaklıkları  $R_A$  ve  $R_B$  olsun. Eğer iç bileziğin açısal  $\omega_i$  ise B'nin teğetsel hızı

$$V_B = \omega_i \cdot R_B = \omega_i \left( \frac{D_o}{2} - r_b \cos \alpha \right) \quad (2.23)$$

ve dış bileziğin açısal hızı  $\omega_a$  ise A noktasının hızı

$$V_A = \omega_a \cdot R_A = \omega_a \left( \frac{D_o}{2} + r_b \cos \alpha \right) \quad (2.24)$$

olacaktır (Eschmann,1985).

Şekilde görüldüğü gibi,  $V_o$  kafes hızı  $V_A$  ve  $V_B$  hızlarının aritmetik ortalamasıdır.

$$V_o = \frac{V_A + V_B}{2} \quad (2.25)$$

$$\omega_i = \frac{\pi n_i}{30} \quad (2.26)$$

$$\omega_a = \frac{\pi n_a}{30} \quad (2.27)$$

$$V_o = \frac{\frac{\pi n_i}{30} \left( \frac{D_o}{2} - r_b \cos \alpha \right) + \frac{\pi n_a}{30} \left( \frac{D_o}{2} + r_b \cos \alpha \right)}{2} \quad (2.28)$$

$$V_o = \frac{\pi D_o}{60} \left( \frac{n_i}{2} - \frac{\cos \alpha n_i}{\frac{D_o}{r_b}} + \frac{n_a}{2} + \frac{\cos \alpha n_a}{\frac{D_o}{r_b}} \right) \quad (2.29)$$

$$V_o = \frac{\pi D_o}{60} \left[ \left( 1 - \frac{2 \cos \alpha}{\frac{D_o}{r_b}} \right) \frac{n_i}{2} + \left( 1 + \frac{2 \cos \alpha}{\frac{D_o}{r_b}} \right) \frac{n_a}{2} \right] \quad (2.30)$$

$$V_o = \frac{\pi n_o D_o}{60} \quad (2.31)$$

$$n_o = \left( 1 - \frac{2 \cos \alpha}{\frac{D_o}{r_b}} \right) \frac{n_i}{2} + \left( 1 + \frac{2 \cos \alpha}{\frac{D_o}{r_b}} \right) \frac{n_a}{2} \quad (2.32)$$

Bilyalarla birlikte hareket eden kafes sisteminin (bilya grubu) mil eksenine etrafındaki açısal hızı  $\omega_o$  olsun

$$\omega_o = \frac{V_o}{R_o} = \frac{1}{2} \left[ \omega_i \left( 1 - \frac{2 r_b \cos \alpha}{D_o} \right) + \omega_a \left( 1 + \frac{2 r_b \cos \alpha}{D_o} \right) \right] \quad (2.33)$$

olur. Eğer dış bilezik yuvasının içinde duruyor ve sadece iç bilezik dönüyorsa ( $\omega_a = 0$ ) o zaman

parantez içindeki ikinci terim sıfır olacaktır.

$$\omega_o = \frac{1}{2} \omega_i \left( 1 - \frac{2r_b \cos \alpha}{D_o} \right) \quad (2.34)$$

Yaslanma açısı  $\alpha < 90^\circ$  olunca (çoğu kez olduğu gibi) kafes sisteminin dönme hızı mil hızının yarısından daha az olmaktadır. Kafes sisteminin dakikadaki dönme sayısı bilinen  $n_k = 30\omega_k/\pi$  bağıntısıyla kolayca bulunabilir.

### 2.2.1.1 İç Bilezikle Kafes Arasındaki Hız Farkı

$$\omega_i - \omega_o = \omega_i - \frac{1}{2} \left[ \omega_i + \omega_a + \frac{r_b \cos \alpha}{R_o} (\omega_a - \omega_i) \right] \quad (2.35)$$

$$\omega_i - \omega_o = \frac{\omega_i}{2} - \frac{\omega_a}{2} - \frac{r_b \cos \alpha}{D_o} (\omega_a - \omega_i) \quad (2.36)$$

$$\omega_i - \omega_o = \frac{1}{2} (\omega_i - \omega_a) \left( 1 + \frac{2r_b \cos \alpha}{D_o} \right) \quad (2.37)$$

### 2.2.1.2 Dış Bilezikle Kafes Arasındaki Hız Farkı

$$\omega_a - \omega_o = \omega_a - \frac{1}{2} \left[ \omega_i + \omega_a + \frac{2r_b \cos \alpha}{D_o} (\omega_a - \omega_i) \right] \quad (2.38)$$

$$\omega_a - \omega_o = \frac{\omega_a}{2} - \frac{\omega_i}{2} - \frac{r_b \cos \alpha}{D_o} (\omega_a - \omega_i) \quad (2.39)$$

$$\omega_a - \omega_o = \frac{1}{2} (\omega_a - \omega_i) \left( 1 - \frac{2r_b \cos \alpha}{D_o} \right) \quad (2.40)$$

$$V_k = V_A - V_o \quad (2.41)$$

$$V_k = V_A - \omega_o \cdot R_a \quad (2.42)$$

$$\omega_o = \frac{\pi \cdot n_o}{30} \quad (2.43)$$

$$V_k = \frac{\pi \cdot n_a}{30} \left( \frac{D_o}{2} + r_b \cdot \cos \alpha \right) - \frac{\pi \cdot n_o}{30} \left( \frac{D_o}{2} + r_b \cdot \cos \alpha \right) \quad (2.44)$$

$$= \frac{\pi \cdot n_a \cdot D_o}{60} + \frac{\pi \cdot n_a \cdot r_b \cdot \cos \alpha}{30} - \frac{\pi}{30} \left( \frac{D_o}{2} + r_b \cdot \cos \alpha \right) \left[ \left( 1 - \frac{2 \cdot \cos \alpha}{D_o / r_b} \right) \frac{n_i}{2} + \left( 1 + \frac{2 \cdot \cos \alpha}{D_o / r_b} \right) \frac{n_a}{2} \right] \quad (2.45)$$

$$= \frac{\pi \cdot n_a \cdot D_o}{60} + \frac{\pi n_a r_b \cos \alpha}{30} - \frac{\pi_i D_o}{4 \cdot 30} + \frac{\pi \cos \alpha n_i D_o}{2 \cdot 30 \cdot D_o / r_b} - \frac{\pi n_a D_o}{4 \cdot 30} - \frac{\pi \cos \alpha n_a D_o}{30 \cdot 2 \cdot D_o / r_b} - \frac{\pi_i r_b \cos \alpha}{2 \cdot 30} + \frac{\pi_i \cos^2 \alpha r_b}{30 \cdot D_o / r_b} - \frac{\pi n_a r_b \cos \alpha}{2 \cdot 30} - \frac{\pi \cos^2 \alpha \cdot n_a \cdot r_b}{30 \cdot D_o / r_b}$$

$$= \frac{\pi r_b}{30} \left[ \frac{n_a D_o}{4 r_b} + \frac{n_a \cos \alpha}{2} - \frac{n_i D_o}{4 r_b} + \frac{\cos \alpha n_i}{2} - \frac{\cos \alpha n_a}{2} - \frac{\cos \alpha n_i}{2} + \frac{\cos^2 \alpha n_i r_b}{D_o} - \frac{\cos^2 \alpha n_a r_b}{D_o} \right]$$

$$= \frac{\pi r_b}{30} \left[ \frac{n_a}{2} \left( \frac{D_o}{2 r_b} - \frac{2 \cos^2 \alpha}{D_o / r_b} \right) - \frac{n_i}{2} \left( \frac{D_o}{2 r_b} - \frac{2 \cos^2 \alpha}{D_o / r_b} \right) \right] \quad (2.46)$$

$$V_k = \frac{\pi r_b}{30} \left( \frac{D_o}{2 r_b} - \frac{2 \cos^2 \alpha}{D_o / r_b} \right) \left( \frac{n_a}{2} - \frac{n_i}{2} \right) \quad (2.47)$$

$$\pm n_k = \left( \frac{D_o}{2 r_b} - \frac{2 \cos^2 \alpha}{D_o / r_b} \right) \left( \frac{n_a - n_i}{2} \right) \quad (2.48)$$

### 3. ELASTOHİDRODİNAMİK YAĞLAMA TEORİSİ

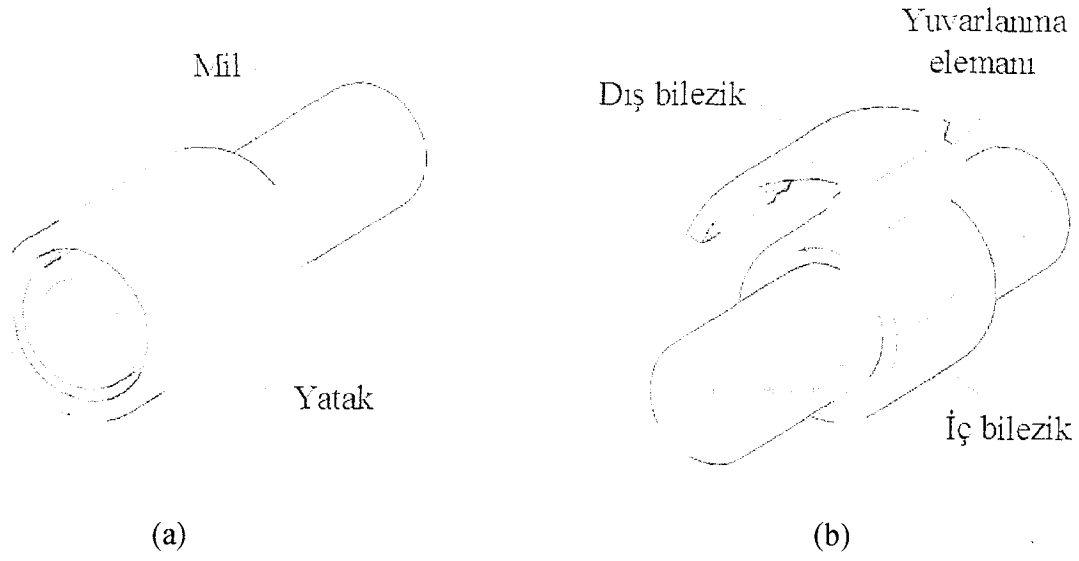
İlk olarak H.M.Martin 1916'da düzlem-silindir geometrisini analiz etmiştir.Martin yüksek gerilimli EHL değmelerde oluşan sürekli bir hidrodinamik filmin mevcudiyetiyle ilgili çalışmalarında elde ettiği sonuçlar deneysel sonuçlardan farklı olmuştur.Bu nedenle de yaklaşık yirmi yıl boyunca yağlanmış uyumlu yüzeyler üzerindeki teorik çalışmalardan olumlu sonuçlar elde edilememiştir.Martin analizini sınırlayan kabuller yapmıştır. Bunlar:

1. Sabit yağlayıcı viskozitesi
2. Katı sınırlı yüzeyler

Klasik hidrodinamik teoride ilk ilerleme 1936'da W.Peppler'in değmelerde elastik deformasyon oluşumunu farketmesiyle gerçekleşmiştir.Bu gelişme esnasında Peppler bir hata yapmıştır.Basıncın yağlamanın olmadığı değmelerdeki Hertz basıncını aşmaması gerekmekteydi.İkinci ilerleme ise 1945'de Gatcombe'nin akışkan viskozitesinin basınçla değişimini çalışmalara dahil etmesiyle gerçekleşti. EHD yağlama üzerinde ilk çalışan Rus bilim adamı A.M.Ertel dir. Daha sonra onun çalışma arkadaşı Grubin devam etmiştir Nihayet 1949 yılında A.N.Grubin hem elastik deformasyonun hem de basınca bağlı viskozitenin etkisini hesaplara dahil ederek ilk başarılı sonucu elde etmiştir.

#### 3.1 Uyumlu ve Uyumsuz Yüzeyler

Uyumlu yüzeylerde yük geometrik uyumluluğa bağlı olarak büyük bir alana yayılır.Örneğin kaymalı yataklarda temastan kaynaklanan yağlama bölgesi uzunluk boyunca radyus olarak  $2\pi$  kadardır.Yük artarken bu yükü taşıyan yüzeylerde yük dağılımı sabit kalır.Şekilde görüldüğü gibi kaymalı yataklar uyumlu yüzeylere örnektir.Kaymalı yataklarda yataklarla mil arasındaki boşluk mil çapının binde biri kadardır.Uyumlu yüzeylere başka bir örnek ise insanın kalça kemiğidir.Yağlanmış makina elemanlarının çoğu birbiriyle uyumlu olmayan yüzeylere sahiptir.Yükün bütün ağırlığı küçük bir yağlama bölgesi boyunca taşınmaktadır.



Şekil 3.1 a) Uyumlu ve, b) Uyumsuz yüzeyler

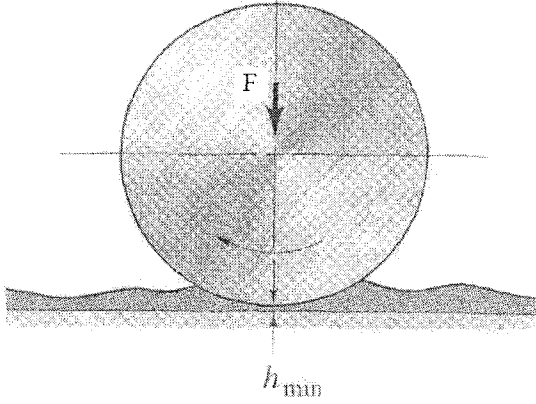
### 3.2 Elastohidrodinamik Yağlama

Elastohidrodinamik yağlama, yağlanmış yüzeylerin elastik deformasyonun çok büyük olduğu yerlerdeki hidrodinamik yağlama formudur.

Elastohidrodinamik yağlama özellikle uygun olmayan yüzeyler ve akışkan film ile ilişkilidir. İki farklı EHL formu vardır.

#### 3.2.1 Sert EHL

Sert EHL metaller gibi yüksek elastik modüllü malzemelerde söz konusudur. Yağlamanın bu formunda elastik deformasyon ve basınç-viskozite etkileri aynı derecede önemlidir. Şekil 3.2, sert EHL ile ilgili karakteristikleri göstermektedir. Maksimum basınç genellikle 0.5 ve 4 Gpa arasında değişir ve minimum film kalınlığı 0.1  $\mu\text{m}$  mertebesindedir



Uygun olmayan yüzeyler  
Yüksek elastisite modüllü malzemeler  
(örneğin çelik)  
 $p_{\max} \cong 0,5-4 \text{ Gpa}$   
 $h_{\min} = f(F, U_b, \eta_0, R_x, R_y, E') > 0,1 \mu\text{m}$   
Elastik ve viskoz etkiler önemli

Şekil 3.2 Sert EHL

Efektif Elastisite Modülü:

$$E' = \frac{2}{\frac{1-\nu_a^2}{E_a} + \frac{1-\nu_b^2}{E_b}}$$

Hamrock ve Dowson 1977'de sert EHL için  $h_{\min}$  (minimum film kalınlığı), normal uygulanan F yükü ve  $u_b$  yüzey hızı arasında aşağıdaki ilişkileri elde etmişlerdir.

$$(h_{\min})_{\text{HEHL}} \propto F^{-0.073}$$

$$(h_{\min})_{\text{HEHL}} \propto U_b^{0.6}$$

Bu parametreler arasında hidrodinamik yağlama için ise

$$(h_{\min}) \propto (U_b/F)^{1/2}$$

şeklindedir.

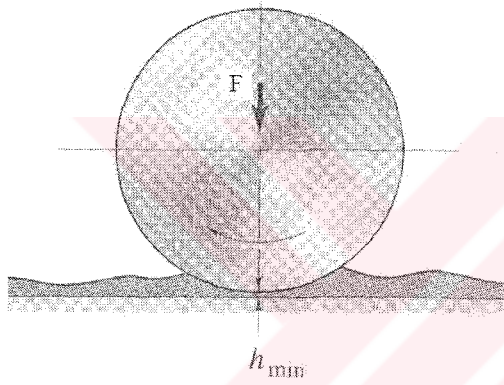
Hidrodinamik yağlama ve sert elastohidrodinamik yağlama karşılaştırılırsa

1. Normal yükün üssü hidrodinamik yağlamada, sert elastohidrodinamik yağlamaya göre beş kat fazladır.
2. Hızın üssü sert Elastohidrodinamik yağlamaya göre fazladır.

EHL yüksek elastisite modüllü dişliler ve yuvarlanma elemanlı yataklar için önemlidir.

### 3.2.2 Esnek EHL

Lastik gibi düşük elastisite modüllü malzemelerde görülür. Şekil 3.3 esnek EHL malzemelerin karakteristiklerini göstermektedir. Hafif yüklerde bile elastik deformasyonlar çok büyüktür. Esnek EHL için maximum basınç 0.5 ile 4MPa arasındayken sert EHL 0.5 ile 4 GPa (genellikle 1 GPa) dır. Bu düşük basıncın viskozite üzerindeki etkisi ihmal edilebilir. Minimum film kalınlığı toplam elastik modülün etkili olduğu hidrodinamik yağlamadaki gibi aynı parametrelerin bir fonksiyonudur. Minimum film kalınlığı yumuşak EHL için 1µm dir. Sızdırmazlık elemanları, insan eklemleri, otomobil lastikleri ve bir takım plastiktan yapılmış düşük elastik modüllü makine elemanlarının mühendislik uygulamalarında esnek EHL önem kazanmaktadır (Hamrock, Jacobson, Schmid, 1999).



Uygun olmayan yüzeyler  
(örneğin nitrit lastik)

$$p_{max} \cong 0,5-4 \text{ Mpa}$$

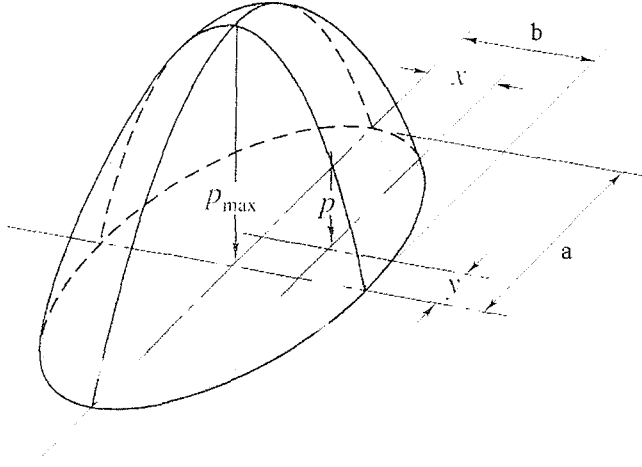
$$h_{min} = f(F, U_b, \eta_o, R_x, R_y, E') \cong 1 \mu\text{m}$$

Elastik etkiler daha etkin

Şekil 3.3 Esnek EHL

### 3.2.3 Değme Mekaniği

Yüksüz durumda, yuvarlanma elemanları ve yuvarlanma yolları arasındaki değme nokta değme ve çizgi değme olarak adlandırılır. Yüklenmemiş durumda, aksenal bir kesit, konveks yuvarlanma elemanının eğriliğinin konkav yuvarlanma yolunun eğriliğinden daha büyük olduğunu gösterirse bu değme bir noktadır ve nokta değme olarak ifade edilir. Yük altında nokta değme alanındaki yüzeyler arasında oluşan elastik deformasyonlar genellikle eliptiktir. Bilyalı yataklarda nokta değme görülür.



Şekil 3.4 Değme sonucu oluşan elipsin eksenleri



Şekil 3.5 Eğik (Omuzlu) bilyalı rulman

Değme geometrisinde daha önce tanımlanan (2.10) eğrilik toplamı ve (2.13) eğrilik farkı denklemlerini hatırlayacak olursak ;

$$\Sigma \rho = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}$$

$$F_\rho = \frac{\left( \frac{1}{r_{11}} - \frac{1}{r_{12}} \right) + \left( \frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{22}} \right)}{\Sigma \rho_i}$$

1881'de Hertz tarafından ifade edilen eliptik değme altındaki basınç dağılımı denklemi(Bozacı,2003)

$$p = p_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2 - \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right] \quad (3.1a)$$

ve

$$p_{\max} = \frac{3.F}{2.\pi.a.b} \quad (3.1b)$$

Basıncın bulunabilmesi için geometriye bağlı olan değme elipsinin yarı eksen uzunlukları olan a ve b bulunmalıdır. a ve b'nin nasıl hesaplanacağını 1991'de Harris ifade etmiştir. Eğrilik farkı eliptik parametrenin ( $\kappa$ ) ifadesi olarak yazılabilir.

$$F_\rho = \frac{(\kappa^2 + 1)\varepsilon - 2F}{(\kappa^2 - 1)\varepsilon} \quad (3.2)$$

$\varepsilon$  ve F sırasıyla tamamlanmış eliptik integralin ikinci ve birinci türü olarak verilir.

$$\varepsilon = \int_0^{\pi/2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \sin^2 \phi \right]^{1/2} d\phi \quad (3.3a)$$

$$F = \int_0^{\pi/2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \sin^2 \phi \right]^{1/2} d\phi \quad (3.3b)$$

(3.2) denklemini  $\kappa$ 'nın fonksiyonu olarak yazılırsa (Harris,1991)

$$F_\rho = f(\kappa) \quad (3.4a)$$

Denklem (3.4a) bize eliptik parametre ( $\kappa$ )'nın bilinen değeriyle eğrilik farkını hesaplama imkanını verir. Fakat bizim ihtiyacımız olan bu değildir. Eliptik parametreyi ( $\kappa$ ) denklem (3.4a)'nın tersini alarak bulabiliriz.

$$\kappa = f^{-1}(F_\rho) \quad (3.4b)$$

Denklem (3.4b) de verilen eğrilik farkı ( $F_\rho$ ) değeri ile eliptik parametreyi ( $\kappa$ ), eliptik parametre ( $\kappa$ ) değeri ile de değme elipsinin yarı eksen uzunlukları olan a ve b'yi ve deformasyon miktarını bulabiliriz.

$$\delta = F \left[ \left( \frac{9}{2\bar{\varepsilon}.R} \right) \left( \frac{F}{\pi.\bar{\kappa}.E'} \right)^2 \right]^{1/3} \quad (3.5a)$$

$$a = \left[ \frac{6.\kappa^2.\varepsilon.F.R}{\pi.E'} \right]^{1/3} \quad (3.5b)$$

$$b = \left[ \frac{6.\varepsilon.F.R}{\pi.\kappa.E'} \right]^{1/3} \quad (3.5c)$$

Denklem (3.4b) 1973'de Hamrock ve Anderson tarafından nümerik olarak bulunabilmiştir. Yapılan yaklaşım 1977'de Brewe ve Hamrock tarafından uygun eğrilikle

$$\kappa \approx \bar{\kappa} = 1,0339 \left( \frac{R_y}{R_x} \right)^{0,636} \quad (3.6a)$$

bulunmuştur. Bazı otoriteler denklem (3.6a) da aşağıdaki ifadeleri yazmayı tercih etmişlerdir.

$$\bar{\kappa} = \alpha_r^{2/3} , \quad \alpha_r = \left( \frac{R_y}{R_x} \right) \quad (3.6b)$$

Brewe ve Hamrock 1977'de mükemmel bir yaklaşıklıkla denklem (3.3) 'deki eliptik integralleri

$$\varepsilon \approx \bar{\varepsilon} = 1,0003 + \frac{0,5968}{\alpha_r} \quad (3.7a)$$

$$F \approx \bar{F} = 1,5277 + 0,6023 \ln \alpha_r \quad (3.7b)$$

şeklinde yazmışlardır.

Daha sonra Hamrock ve Brewe 1983 bu formları daha da basitleştirmişlerdir (Szeri, 1988).

$$\bar{\varepsilon} = 1 + \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) / \alpha_r$$

$$\bar{F} = \frac{\pi}{2} + \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \ln \alpha_r$$

### 3.3 EHL Teorisine Yapılan Farklı Yaklaşımlar

#### 3.3.1 Grubin'in EHD Değme Modeli

Yapılan incelemelerde katılar arasındaki değmelerde esnemeler, deformasyonlar göz ardı edilmiştir. Oysa ki değme alanında çökmeler olmaktadır. Yüksek yerel basınçlar yerel elastik deformasyonlara sebep olmaktadır. Bu yerel deformasyonların film kalınlığını büyüten en önemli etken olduğu artık bilinmektedir. Elastik deformasyonlardan ötürü eşdeğer silindirin R yarıçapı büyümektedir.  $h_0$ , R ile orantılı olduğundan  $h_0$  da büyümektedir.

Grubin esnemez bir düzlemin karşısında esnek bir silindir göz önüne almıştır. Değme alanı boyunca silindirde bir çökme olacaktır. Silindirin şekli değme alanı dışında da değişebilecektir. Eğer elastik çökme  $h_0$  dan daha büyükse yağlayıcı içindeki basınç dağılımı Hertzian basınç dağılımına yakın olmalıdır. Yani eliptik basınç dağılımından sapmalar ihmal edilebilir. Bu durumda yağlanmış yüzeyde yağlayıcı filminin geometrisi, kuru değmede

oluşan deforme olmuş yüzey geometrisiyle aynı (veya yakın) olacaktır. Deforme olmuş silindirin şeklini kullanarak herhangi bir  $h_0$  değeri için basınç dağılımı belirlenebilir.

$$\frac{dP_o}{dx} = 6 \cdot U \cdot \eta_o \cdot \frac{h - \bar{h}}{h^3} \quad (3.8)$$

$$\bar{h} = h_0 \text{ (film kalınlığı paralel ise)}$$

$$h = h_0 + h_s \quad (3.9)$$

$$h_s = w + \frac{x^2}{2R} \quad (3.10)$$

$$\frac{x^2}{2R} = \frac{a^2 x^2}{2R a^2} = \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \cdot p_{\max} \cdot a \cdot \frac{x^2}{a^2} \quad (3.11)$$

$$w = - \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \cdot a \cdot p_{\max} \cdot \left( \frac{x^2}{a^2} + \log \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.12)$$

$$h_s = \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \cdot p_{\max} \cdot a \left\{ \frac{x}{a} \sqrt{\left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right)} - \log_e \left[ \frac{x^2}{a^2} + \sqrt{\left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right)} \right] \right\} \quad (3.13)$$

$$p = p_{\max} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{1/2} \quad (3.14)$$

$$\frac{W}{L} = \int_{-a}^{+a} p dx = p_{\max} \cdot \int_{-a}^{+a} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{1/2} dx = \frac{\pi}{2} p_{\max} \cdot a \quad (3.15)$$

$$\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} = \frac{1}{E_r} \quad (3.16)$$

$$\frac{h_s \cdot E_r}{W/L} = 2 \left\{ \frac{x}{a} \sqrt{\left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right)} - \log_e \left[ \frac{x}{a} + \sqrt{\left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right)} \right] \right\} \quad (3.17)$$

Denklemin sol tarafı boyutsuzlaştırılıp  $\delta$  olarak yazılırsa ;

$$\delta \equiv \frac{h_s \cdot E_r}{W/L} \quad (3.18)$$

Aynı yolla boyutsuz minimum film kalınlığı  $H_o$  olarak ifade edilirse ;

$$H_o \equiv \frac{h_o \cdot E_r}{W/L} \quad (3.12)$$

Boyutsuz film kalınlığı  $H$  ile ifade edilirse ;

$$H \equiv \frac{h \cdot E_r}{W/L} \quad (3.19)$$

$$h = h_o + h_s \quad (3.20)$$

$\rightarrow H = H_o + \delta$  ve basınç ifadesi

$$\frac{dP_o}{dx} = 6.U.\eta_o \frac{h_s}{(h_o + h_s)^3} = \frac{6.U.\eta_o}{(W/L.E_r)^2} \frac{\delta}{H^3} \quad (3.21)$$

$x^* = x/a$  ve  $W/L.E_r$  uzunluk ölçüsü buradan

$$P_o = \frac{6.U.\eta_o.a}{(W/L.E_r)^2} \cdot P_o^* \quad (3.22)$$

yazılabilir.

Bütün denklem boyutsuz hale getirilerek yazılırsa ;

$$\frac{dp_o^*}{dx^*} \equiv \frac{\delta}{H^3} \quad (3.23)$$

$$\delta \equiv \frac{h_s \cdot E_r}{W/L} = 2 \left\{ \frac{x}{a} \sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} - \log_e \left[ \frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} \right] \right\} \quad (\text{boyutsuz distorsiyon}) \quad (3.24)$$

$$H \equiv \frac{h \cdot E_r}{W/L} = \frac{(h_o + h_s) \cdot E_r}{W/L} \quad (3.25)$$

( $x < -a$  olduğu değme bölgesi dışındaki boyutsuz film kalınlığı)

$x = -a$  (veya  $x^* = -1$ ) da  $p_o$  denklem  $x = -\infty$  ve  $x = -a$  ( $x^* = -\infty$  ve  $-1$ ) arasında

integre edilmesi zorunludur. İntegral  $\int_{-\infty}^{-1} \delta \cdot dx^* / H^3 = p_o^*$  nümerik olarak çözülebilir. Farklı  $H_o$  değerlerinde, integralin belirlenen üst limitlerine ( $x^*$ ) karşılık gelen  $p_o^*$  değerlerinin listelenmesi sonucu  $p_o^* = \gamma \cdot H_o^{-\beta}$  yaklaşımı yapılır.

$x^* \equiv x/a = -1$  de  $p_o^* = 0,0986 \cdot H_o^{-1,375}$  elde edilir (Cameron,1971). Burada  $x/a = -1$  de  $p_o = 1/\alpha$  dır ve  $E_r$  ifadesiyle birlikte

$$a = \left( \frac{4}{E_r} \cdot \frac{WR}{L} \right)^{1/2} \quad (3.26)$$

minimum film kalınlığı boyutsuz olarak daha önce  $H_o = \frac{H_o E_r}{W/L}$  olarak belirtilmişti.

$$P_o = \frac{6U\eta_o a}{(W/LE_r)^2} \quad (3.27)$$

$$P_o^* = \frac{1}{\alpha} \quad (3.28)$$

$$P_o^* = 0.0986 H_o^{-11/8} \quad (3.29)$$

$$11/8 = 1.375$$

a ve  $P_o^*$ ,  $P_o$  denkleminde yerine konulursa

$$p_o = \frac{1}{\alpha} = \frac{6U\eta_o (4WR/LE_r)^{1/2}}{(W/LE_r)^2} \times 0.0986 \left( \frac{W/LE_r}{h_o} \right)^{11/8} \quad (3.30)$$

$$h_o^{11/8} = 1.183U\eta_o \alpha \frac{R^{1/2}}{(W/LE_r)^{1/8}} \quad (3.31)$$

$$h_o = 1.13(U\eta_o \alpha)^{8/11} \frac{R^{4/11}}{(W/LE_r)^{1/11}} \quad (3.32)$$

$$\frac{1}{E_r} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1-\nu^2}{E} \right) \quad (3.33)$$

$$(2/\pi)^{1/11} = 0.96 \text{ ise}$$

$$h_o = 1.18 \frac{(U\eta_o\alpha)^{8/11} R^{4/11}}{[(1-\nu^2)W/E_L]^{1/11}} \quad (3.34)$$

$$\frac{h_o}{R} = 1.18 \frac{(U\eta_o\alpha/R)^{8/11}}{[(1-\nu^2)W/E_L R]^{1/11}} \quad (3.35)$$

Bütün deęerler boyutsuzdur.  $\nu = 0.3$

$$1/(1-\nu^2)^{1/11} = 1.009 \quad (3.36)$$

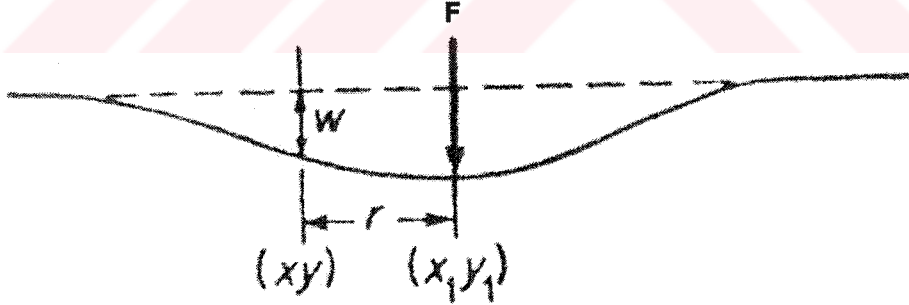
$$\frac{h_o}{R} = 1.19(U\eta_o\alpha/R)^{8/11} (ELR/W)^{1/11} \quad (3.37)$$

$$W/LR = S_c \quad (3.38)$$

yazılırsa

$$h_o/R = 1.19(U\eta_o\alpha/R)^{8/11} (E/S_c)^{1/11} \text{ olur.} \quad (3.39)$$

### 3.3.2 Cameron'un Yaklaşımı



Şekil 3.6 Hertz tipi deforme olan yüzeyin geometrik temsili

Hertz bağıntılarında hareketle yüzey deformasyonunun hesabı aşağıdaki gibi yapılır. Şekil 3.6'de  $(x, y)$  ve  $(x_1, y_1)$  arasındaki mesafenin  $r$  olduğu bir durumda  $(x_1, y_1)$  de uygulanan bir noktasal  $F$  kuvvetinin  $(x, y)$  noktasında oluşturacağı sehim  $w$ 'yi ele alalım.

Eğer  $F$  noktasal yükü yerine alan üzerinde bir basınç dağılımı olsaydı o zaman herhangi bir

nokta için

$$F = pdx_1 dy_1 \quad (3.40)$$

noktasal yükü ikame edilebilir ve (x,y) deki bu basınca karşılık gelen toplam deformasyon bütün alan yüzeyince alınacak olan şu integrale eşit olurdu.

$$w = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint \frac{pdx_1 dy_1}{r} \quad (3.41)$$

Bir çok elastisite kitabında , iki eğri yüzeyin temaslarından doğan basınç dağılımının eliptik olduğu ispat edilmiştir. Yani a yarıçapı ve orijini merkez olan dairesel temas alanı için r radyal uzaklığındaki bir nokta için

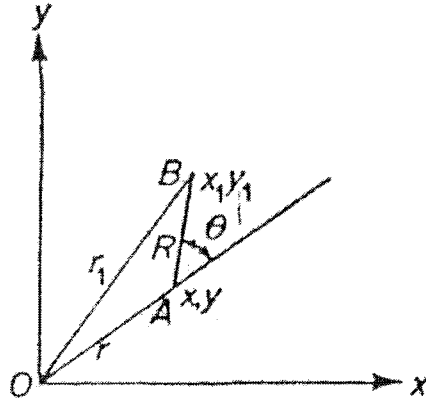
$$p = p_{\max} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{1/2} \quad (3.42)$$

ifadesi geçerlidir. Aynı anda 2a genişliğindeki bir temas bandı için

$$p = p_{\max} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{1/2} \text{ elde edilir.} \quad (3.43)$$

Bu tür çalışmalarda rastlanan diğer bir basitleştirme de eş çalışan yüzeylerin bir tanesini düzlem kabul etmek ve ihmal edilen eğriliğin etkisini hesaba katan eş değer eğrilik yarıçapı tanımlamaktır (Cameron, 1966).

### Nokta Değme



Şekil 3.7 Polar koordinatlarda noktasal yükten dolayı oluşan deformasyon

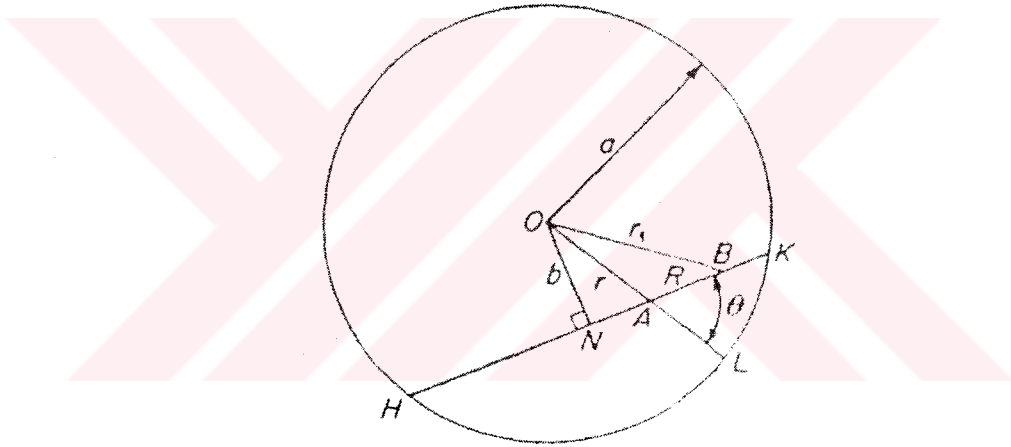
Şekil 3.7'deki sistemde  $(x_1, y_1)$ deki B noktasına yük uygulanmakta ve  $(x, y)$  deki A noktasında Deformasyon görülmektedir.  $AB=R$ ,  $OA=r$  ve  $OB=r_1$  dir.  $OA$  ve  $AB$  arasındaki açı  $\theta$  dir. B noktasında basınç  $p$  ve buraya uygulanan nokta noktasal yük  $pdx_1dy_1$  dir.

$$dx_1dy_1 = Rdrd\theta \quad (3.44)$$

A noktasındaki deformasyon ise:

$$w = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint \frac{pdx_1dy_1}{R} \quad (3.45)$$

$$= \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint pdRd\theta \quad (3.46)$$



Şekil 3.8 Dairesel temas alanı üzerindeki deformasyon

Şekil 3.8'de basınç  $a$  yarıçaplı KLH yayına etkimektedir. Merkezde  $r_1$  kadar uzakta olan herhangi bir B noktasındaki basınç

$$p = \frac{P_{\max}}{a} (a^2 - r_1^2)^{1/2} \quad (3.47)$$

$$C = \frac{P_{\max}}{a} \quad (3.48)$$

$OB=r_1$ ,  $OA=r$ ,  $AB=R$  ve  $ON=b$  dir.  $ON$  HNK'ya diktir.  $\angle KAL = \theta$  dir.

$$u = NB = r \cos \theta + R \quad (3.49)$$

$$r_1^2 = b^2 + u^2 \quad (3.50)$$

B deki basınç  $p = C(a^2 - b^2 - u^2)^{1/2}$  ve şekil 3.8 de A noktasındaki deformasyon basınç dağılımına bağlı olarak

$$w = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \iint p dR d\theta \text{ olacaktır.} \quad (3.51)$$

$$du = dR \quad (3.52)$$

$$\int p dR = C \int (a^2 - b^2 - u^2)^{1/2} du \quad (3.53)$$

$$(a^2 - b^2) \text{ sabittir ve } (HN)^2 = (NK)^2 \cdot u \text{ 'nun limitleri HN ve NK dir, örneğin } \pm \sqrt{(a^2 - b^2)}. \quad (3.54)$$

$$\int p dR = C \int \{(a^2 - b^2) - u^2\}^{1/2} du \quad (3.55)$$

$$= \frac{C\pi}{2} (a^2 - b^2) = \frac{C\pi}{2} (a^2 - r^2 \sin^2 \theta) \quad (3.56)$$

**A noktasındaki toplam deformasyon w**

$$w = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} C \frac{\pi}{2} \left( a^2 - \frac{r^2}{2} \right) \pi = \frac{(1 - \nu^2) p_{\max}}{2E} \frac{a}{a} \left( a^2 - \frac{r^2}{2} \right) \quad (3.57)$$

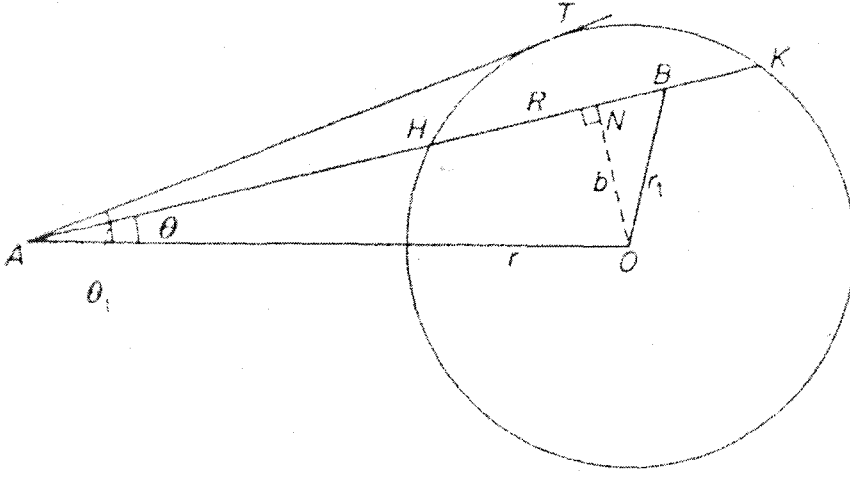
**Merkezde deformasyon  $w_o$**

$$w_o = \left\{ \frac{(1 - \nu^2)}{2E} \right\} p_{\max} a \text{ ve } r < a \text{ için } w = w_o \left( 1 - \frac{r^2}{2a^2} \right) \quad (3.58)$$

**Kenarda ( $r=a$ ) deformasyon,  $w = w_o/2$ ,**

$$w_{r=a} = \frac{(1 - \nu^2)}{4E} \pi p_{\max} a \quad (3.59)$$

Şekil 3.9'da deformasyonun olduğu A noktası basınç dairesinin dışında yer almaktadır. A noktası artık H ve K'nın arasında değil H'nin arkasında yer almaktadır.



Şekil 3.9 Basınç dairesinin dışındaki bir noktada oluşan deformasyon

$AO=r$ ,  $OB=r_1$ ,  $AB=R$ ,  $ON \perp HNK$ ,  $ON=b$ ,  $\angle OAH = \theta$  ve  $\angle OAT = \theta_1$

AT dairenin teğetidir ve  $\theta$ 'nın en büyük değeri  $\theta_1$ dir. Burada  $\theta$ 'nın limit değerleri daha önceki gibi 0 ve  $\pi$  değil  $\pm\theta_1$  dir, ancak  $u$ 'nun limitleri önceki gibi  $\pm\sqrt{(a^2 - b^2)}$ .

$$\int p dR = \frac{C\pi}{2} (a^2 - r^2 \sin^2 \theta) \quad (3.60)$$

$$w = \frac{1-\nu^2}{\pi E} C \frac{\pi}{2} \int_{-\theta_1}^{+\theta_1} (a^2 - r^2 \sin^2 \theta) d\theta \quad (3.61)$$

$$w = \frac{1-\nu^2}{\pi E} C \frac{\pi}{2} \int_{-\theta_1}^{+\theta_1} \left\{ a^2 - \frac{r^2}{2} (1 - \cos 2\theta) \right\} d\theta \quad (3.62)$$

$$w = \frac{1-\nu^2}{2E} \frac{C}{2} \left\{ \left( 2a^2 - \frac{r^2}{2} \right) \theta_1 + \frac{r^2}{2} \sin 2\theta_1 \right\} \quad (3.63)$$

$\sin \theta_1 = a/r$  olduğundan  $\sin 2\theta_1 = 2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 = \frac{2a}{r} \sqrt{\frac{r^2 - a^2}{2}}$  ve  $C = p_{\max} / a$

$$w = \frac{(1-\nu^2)}{2E} a p_{\max} \left\{ \left( 2 - \frac{r^2}{a^2} \right) \sin^{-1} \frac{a}{r} + \left( \frac{r^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} \right\} \quad (3.64)$$

Bu denklemi daire içindeki nokta için olanla karşılaştırdığımızda farklar çok açıktır.  $\theta_1 \pi$ 'ye ve  $\sin 2\theta$  sifıra eşitti. Kenarda ( $r=a$ )

$$w_{r=a} = \frac{(1-\nu^2)}{4E} \pi p_{\max} a \text{ ile} \quad (3.65)$$

$$w = \frac{(1-\nu^2)}{2E} a p_{\max} \left\{ \left( 2 - \frac{r^2}{a^2} \right) \sin^{-1} \frac{a}{r} + \left( \frac{r^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} \right\} \text{ denklemleri birbirlerine eşittir.} \quad (3.66)$$

Bir düz yüzeyin deformasyonu için olan bu açıklama a yarıçaplı bir dairenin üzerine dağıtılmış bir yarı-eliptik basınç alanı ile sonuçlanır. Daha sonraki adım bu basınçın integrali olan yükü belirlemek ve sonra da eğer yüzey düz değil de eğrisel olsaydı durum ne olurdu diye incelemektir. Hem deformasyonların hem de değme alanının küçük olduğu ve düzlemsel yada eğrisel olsun yüzeylerin şekliyle değişmediği kabul edilmektedir.

Toplam yük dairesel değme alanının basıncının integraline eşit olacaktır.

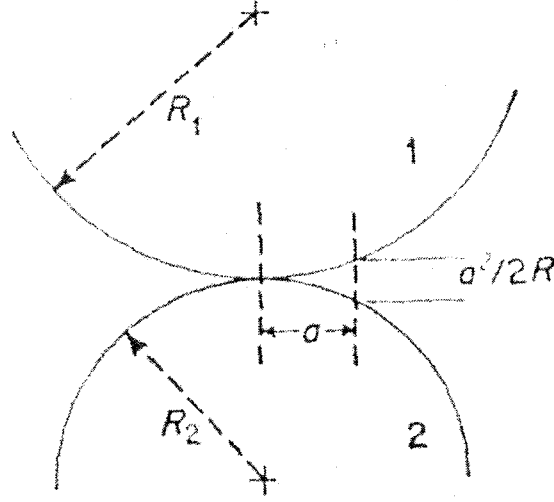
$$F = \int_0^a \int_0^{2\pi} p r_1 dr_1 d\theta \quad (3.67)$$

$$= 2\pi p_{\max} \int_0^a \left( 1 - \frac{r_1^2}{a^2} \right)^{1/2} r_1 dr_1 = \frac{2\pi}{3} p_{\max} a^2 \quad (3.68)$$

a ile F arasındaki ilişki yüzeylerin düzlemsel değil de eğrisel olduğu kabul edilerek elde edilebilir. Şekilde  $R_1$  ve  $R_2$  yarıçaplı iki küre yüksüz bir durumda birbirlerine değmektedirler.

$$a \ll R \text{ için } \frac{1}{R} \equiv \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ iken}$$

$$\text{değme noktasından a uzaklığında küreler arası mesafe } \left( \frac{a^2}{2} \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = a^2/2R \text{ olur.} \quad (3.69)$$



Şekil 3.10 Değen kürelerin geometrisi

Yüklemeden sonra  $a$  mesafesi sıfırdır artık  $a$  değme alanının yarıçapıdır ve  $a$  mesafesindeki toplam deformasyon

$$w_1 + w_2 = \left( \frac{1-\nu^2}{E_1} + \frac{1-\nu^2}{E_2} \right) \pi p_{\max} \frac{a}{4} \quad (3.70)$$

$$\frac{a^2}{2R} = \left( \frac{1-\nu^2}{E_1} + \frac{1-\nu^2}{E_2} \right) \pi p_{\max} \frac{a}{4} \quad (3.71)$$

$$a = \left( \frac{1-\nu^2}{E_1} + \frac{1-\nu^2}{E_2} \right) \pi p_{\max} \frac{R}{2} \quad (3.72)$$

$$F = (2\pi/3) p_{\max} a^2 \text{ olduğu bilinmektedir.} \quad (3.73)$$

$$a^3 = \left( \frac{1-\nu^2}{E_1} + \frac{1-\nu^2}{E_2} \right) \frac{3RF}{4} \quad (3.74)$$

Eğer malzemeler aynı ise

$$a^3 = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{3RF}{2} \quad (3.75)$$

$\nu = 0.3$  için

$$a = \left( \frac{3}{2} \times 0.91 \frac{RF}{E} \right)^{1/3} \quad (3.76)$$

Bu sonuçlar değme alanının dışındaki bir kürenin deforme olmuş yüzeyini elde etmek için kullanılabilir. Basınç bölgesinin dışındaki düz yüzeyin deformasyon formülü

$$w = \frac{(1-\nu^2)}{2E} ap_{\max} \left\{ \left( 2 - \frac{r^2}{a^2} \right) \sin^{-1} \frac{a}{r} + \left( \frac{r^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} \right\} \text{ olduğu bilinmektedir.} \quad (3.77)$$

Eğer yüzey küreselleşmeye başladıysa  $z$  mesafesi, (küre düzleme hafifçe değmektedir)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ olduğu düşünülürse}$$

$$z = \frac{r^2}{2R} \quad (3.78)$$

$r = a$  da  $w = a^2/2R$  ve  $z = a^2/2R$  olmaktadır.

Orijin öyle bir nokta seçilmeli ki bu noktada yüzey ve rijid (zarar görmemiş) düzlem arasındaki boşluk sıfır olsun. Bu ikisinin toplamı,  $(w+z)_{r=a} = 2(a^2/2R)$ ,  $(w+z)_r$ 'den çıkartılmalıdır.  $r > a$  da boşluk  $h$  olarak yazılır.  $r=a$  iken

$$w = \frac{1-\nu^2}{E} \pi p_{\max} \frac{a}{4} = \frac{a^2}{2R} \text{ olduğu biliniyor ve} \quad (3.79)$$

$$\frac{r^2}{2R} = \frac{a^2}{2R} \frac{r^2}{a^2} = \frac{1-\nu^2}{4E} p_{\max} a \left( \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (3.80)$$

$$h = w + \frac{r^2}{2R} - \frac{2a^2}{2R} = w - \frac{1-\nu^2}{2E} ap_{\max} \frac{\pi}{2} \left( 2 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (3.81)$$

$$h = \frac{1-\nu^2}{2E} ap_{\max} \left\{ \left( 2 - \frac{r^2}{a^2} \right) \sin^{-1} \frac{a}{r} + \left( \frac{r^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} \right\} - \frac{1-\nu^2}{2E} ap_{\max} \frac{\pi}{2} \left( 2 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (3.82)$$

$$\sin^{-1}(a/r - \pi/2) = -\cos^{-1}(a/r) \quad (3.83)$$

$$h = \frac{1-\nu^2}{2E} ap_{\max} \left\{ - \left( 2 - \frac{r^2}{a^2} \right) \cos^{-1} \frac{a}{r} + \left( \frac{r^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} \right\} \quad (3.84)$$

Eğer yüzeylerin her ikisi de elastikse ,

$$h = \left( \frac{1-\nu_1^2}{2E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{2E_2} \right) ap_{\max} \left\{ - \left( 2 - \frac{r^2}{a^2} \right) \cos^{-1} \frac{a}{r} + \left( \frac{r^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} \right\} \quad (3.85)$$

Eğer her ikisinin de elastisite modülü aynı ise,  $\left( \frac{1-\nu_1^2}{2E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{2E_2} \right) = \frac{1-\nu^2}{E}$  olur. (3.86)

$$h = \left( \frac{1-\nu^2}{E} \right) ap_{\max} \left\{ - \left( 2 - \frac{r^2}{a^2} \right) \cos^{-1} \frac{a}{r} + \left( \frac{r^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} \right\} \quad (3.87)$$

### 3.3.3 Hamrock – Dowson Yaklaşımı

Eliptik değmelerde minumum film kalınlığına ait dört farklı yağlama rejimi öne sürülmüştür(Hamrock,Dowson).

Nominal nokta değme için ;

$$\text{Film kalınlığı parametresi} \quad H = h_o / R \quad (3.88)$$

$$\text{Yük parametresi} \quad W = F / E' .R.L \quad (3.89)$$

$$\text{Hız parametresi} \quad U = \eta_0 \tilde{u} / E' .R \quad (3.90)$$

$$\text{Malzeme parametresi} \quad G = \alpha .E' \quad (3.91)$$

$$g_H = \left( \frac{W}{U} \right)^2 \cdot H \quad (3.92)$$

$$g_V = \left( \frac{G \cdot W^3}{U^2} \right)^2 \quad (3.93)$$

$$g_E = W^{8/3} \cdot U^2 \quad (3.94)$$

$$\kappa = 1,0339 \cdot \left( \frac{R_Y}{R_X} \right)^{0,636} \quad (3.95)$$

$$g_H = \psi(g_V, g_E, \kappa) \quad (3.96)$$

- i) **İzoviskoz – katı rejim** :Bu rejimde yüzeylerin elastik deformasyonu, yüzeyleri ayıran yağlayıcı film kalınlığının önemsiz bir parçasıdır ve değme bölgesindeki maksimum basınç akışkan viskozitesini önemli miktarda arttıramayacak kadar düşüktür. Hidrodinamik yataklarda ve aksel yataklarda bu durumla karşılaşmak mümkündür. Bu klasik hidrodinamik yağlamanın rejimidir.

$$g_V = 0, g_E = 0$$

$$\rightarrow g_{H \min} = 128 \cdot \alpha_r \cdot \lambda_b^2 \left[ 0,31 \cdot \tan^{-1} \left( \frac{\alpha_r}{2} \right) + 1,683 \right]^2 \quad (3.97)$$

$$\lambda_b = \left( 1 + \frac{2}{3\alpha_r} \right)^{-1} \quad (3.98)$$

- ii) **Piezoviskoz – katı rejim** : Değme bölgesindeki basınç o kadar yüksektir ki değme ile birlikte akışkan viskozitesinde önemli bir artış olur. Yüzeylerin deformasyonu akışkan film kalınlığının önemsiz bir kısmıdır. Orta yüklü silindirik ve konik bilyalarda ve bazı piston-silindirler arasında görülür.

$$g_V \neq 0, g_E = 0$$

$$\rightarrow g_{H \min} = 1,41 \cdot g_V^{0,371} \left[ 1 - e^{-0,0387 \cdot \alpha_r} \right] \quad (3.99)$$

- iii) **İzoviskoz – elastik rejim** : Bu rejimde cisimlerin elastik deformasyonu onları ayıran akışkan film kalınlığının önemli bir parçasıdır. Değme bölgesinde akışkanın viskozitesini etkileyecek kadar yüksek bir basınç söz konusu değildir. İnsan ve hayvanların sinovial akışkanla yağlanan eklemleri örnek verilebilir. Bu rejimde genellikle yumuşak elastohidrodinamik yağlama söz konusudur.

$$g_E \neq 0, g_V = 0$$

$$\rightarrow g_{H \min} = 8,70 \cdot g_E^{0,67} \left[ 1 - 0,85 \cdot e^{-0,31\kappa} \right] \quad (3.100)$$

- iv) **Piezoviskoz – elastik rejim** : Bu rejimde cisimlerin elastik deformasyonu onları ayıran akışkan film kalınlığının önemli bir kısmıdır ve değme ile oluşan basınç o kadar yüksektir ki değme ile akışkan viskozitesini önemli ölçüde artırır. Bu rejimde

sert elastohidrodinamik yağlama söz konusudur.

$$g_E \neq 0, \quad g_V \neq 0$$

$$\rightarrow g_{H \min} = 3,42 \cdot g_V^{0,49} \cdot g_E^{0,17} [1 - e^{-0,68\kappa}] \quad (3.101)$$



#### 4. SAYISAL UYGULAMA

Aşağıda ilgili değerleri verilen eğik (omuzlu) bilyalı rulmana ait geometrinin, değme mekaniği parametrelerinin ve EHL film kalınlığının hesaplanmasına ilişkin bir örnek.

Bilyanın dış bileziğe değdiği noktalar arasındaki çap ( $2 R_A$ ): 147,73 mm

Bilyanın iç bileziğe değdiği noktalar arasındaki çap ( $2R_B$ ) : 102,79 mm

Bilyanın çapı ( $2 r_b$ ) : 22,23 mm

İç bileziğin yuvarlanma yarıçapı ( $r_i$ ) : 11,63 mm

Dış bileziğin yuvarlanma yarıçapı ( $r_a$ ) : 11,63 mm

Yük (F) : 3543 N

Bilya sayısı (n) : 9

İç bileziğin açısal hızı ( $\omega_i$ ) : 400 rad/sec

Dış bileziğin açısal hızı ( $\omega_a$ ) : 0

Mutlak viskozite ( $\eta_o$ ) : 0,04 Pa.s

Viskozite – basınç katsayısı  $\alpha$  :  $2,3 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$

$$f_i = \frac{r_i}{2 \cdot r_b} \quad f_i = \frac{11,63}{22,23} = 0,5232$$

$$f_a = \frac{r_a}{2 \cdot r_b} \quad f_a = \frac{11,63}{22,23} = 0,5232$$

$$B = f_i + f_a - 1 = 0,5232 + 0,5232 - 1 = 0,0464$$

$$l_m = r_a + r_i - 2 \cdot r_b$$

$$l_m = (f_a + f_i - 1) \cdot 2 \cdot r_b = B \cdot 2 \cdot r_b$$

$$l_m = 0,0464 \cdot 22,23 = 1,031 \text{ mm}$$

$$c = 2 \cdot R_A - 2 \cdot R_B - 2 \cdot r_b = 147,73 - 102,79 - 2 \cdot 22,23 = 0,48 \text{ mm}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left( 1 - \frac{c}{2I_m} \right)$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left( 1 - \frac{0,48}{2.1,031} \right) = 40^\circ$$

$$D_o = (2.R_A + 2.R_B) / 2$$

$$= (147,73 + 102,79) / 2 = 125,26 \text{ mm}$$

$$\gamma = \frac{2.r_b \cdot \cos \alpha}{D_o}$$

$$\gamma = \frac{22,23 \cdot \cos 40}{125,26} = 0,1359$$

İç bilezik bilya arasında ;

Eğrilik toplamı

$$\Sigma \rho_i = \frac{1}{R_i} = \frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{22}}$$

$$\Sigma \rho_i = \frac{1}{2r_b} \left( 4 - \frac{1}{f_i} + \frac{2\gamma}{1-\gamma} \right)$$

$$\Sigma \rho_i = \frac{1}{22,23} \left( 4 - \frac{1}{0,5232} + \frac{2 \cdot 0,1359}{1 - 0,1359} \right) = 0,108 \text{ mm}^{-1}$$

Eğrilik farkı ;

$$F_{\rho_i} = \frac{\frac{1}{f_i} + \frac{2\gamma}{1-\gamma}}{4 - \frac{1}{f_i} + \frac{2\gamma}{1-\gamma}}$$

$$F_{\rho_i} = \frac{\frac{1}{0,5232} + \frac{2 \cdot 0,1359}{1 - 0,1359}}{4 - \frac{1}{0,5232} + \frac{2 \cdot 0,1359}{1 - 0,1359}} = 0,9260$$

Dış bilezik bilya arasında ;

$$\Sigma \rho_a = \frac{1}{R_a} = \frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{22}}$$

$$\Sigma \rho_a = \frac{1}{2r_b} \left( 4 - \frac{1}{f_i} - \frac{2\gamma}{1+\gamma} \right)$$

$$\Sigma \rho_a = \frac{1}{22,23} \left( 4 - \frac{1}{0,5232} - \frac{2,0,1359}{1+0,1359} \right)$$

$$\Sigma \rho_a = 0,0832 \text{mm}^{-1}$$

Eğrilik farkı ;

$$F_{\rho a} = \frac{\frac{1}{f_a} - \frac{2\gamma}{1+\gamma}}{4 - \frac{1}{f_a} - \frac{2\gamma}{1+\gamma}}$$

$$F_{\rho a} = \frac{\frac{1}{0,5232} - \frac{2,0,1359}{1+0,1359}}{4 - \frac{1}{0,5232} - \frac{2,0,1359}{1+0,1359}} = 0,9038$$

Efektif elastisite modülü

$$E' = \frac{2}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}$$

Çelik için  $E=207,5 \text{ GPa}$

$$\nu = 0,3$$

$$E' = 228 \text{ GPa}$$

İç bilezik bilya arasındaki deformasyon miktarı

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{21}}$$

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{D_o - 2r_b \cdot \cos \alpha / 2 \cdot \cos \alpha}$$

$$R_x = \frac{2r_b(D_o - 2r_b \cdot \cos \alpha)}{2D_o} = \frac{22,23 \cdot (125,26 - 22,23 \cdot \cos 40)}{2 \cdot 125,26} = 9,6039 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{22}}$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{-r_i}$$

$$R_y = \frac{r_i \cdot 2r_b}{2r_i - 2r_b} = \frac{11,63 \cdot 22,23}{2 \cdot 11,63 - 22,23} = 251,004 \text{ mm}$$

$$\Sigma \rho = \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} = \frac{1}{9,6039} + \frac{1}{251,004}$$

$$R_i = 9,25 \text{ mm}$$

$$\alpha_r = R_y / R_x = 251,004 / 9,6039 = 26,135 \bar{\kappa} = \alpha_r^{2/3} = 8,806$$

$$\bar{\varepsilon} = 1 + \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) / \alpha_r = 1,0218$$

$$\bar{F} = \frac{\pi}{2} + \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \ln \alpha_r = 3,4335$$

$$\delta = \bar{F} \left[ \left( \frac{9}{2 \cdot \bar{\varepsilon} \cdot R} \right) \left( \frac{F}{\pi \cdot \bar{\kappa} \cdot E'} \right)^2 \right]^{1/3}$$

$$\delta = 3,4335 \left[ \left( \frac{9}{2 \cdot 1,0218 \cdot 9,25 \cdot 10^{-3}} \right) \left( \frac{3543}{\pi \cdot 8,806 \cdot 228 \cdot 10^9} \right)^2 \right]^{1/3} = 0,1825 \mu\text{m}$$

$$a_i = \left[ \frac{6 \cdot \kappa^2 \cdot \bar{\varepsilon} \cdot w \cdot R}{\pi \cdot E'} \right]^{1/3} = \left[ \frac{6 \cdot 8,806^2 \cdot 1,0218 \cdot 3543 \cdot 9,25 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 228 \cdot 10^9} \right]^{1/3} = 2,79 \text{ mm}$$

$$b_i = \left[ \frac{6 \cdot \bar{\varepsilon} \cdot w \cdot R}{\pi \cdot \kappa \cdot E'} \right]^{1/3} = \left[ \frac{6 \cdot 1,0218 \cdot 3543 \cdot 9,25 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 8,806 \cdot 228 \cdot 10^9} \right]^{1/3} = 0,316 \text{ mm}$$

Minimum film kalınlığı

$$\tilde{u} = \frac{|\omega_a - \omega_i| |D_o^2 - (2r_b)^2|}{4.D_o} = \frac{|0 - 400| |125,26^2 - 22,23^2|}{4.125,26} = 12,131 m / sn$$

Verilen dizayn parametrelerine göre

$$U = \frac{\eta_o \tilde{u}}{E' . R_x} = \frac{0,04.12,131}{228.10^9 . 9,6039.10^{-3}} = 2,216.10^{-10}$$

$$G = \alpha . E' = 2,3.10^{-8} . 228.10^9 = 5,244.10^3$$

$$W = \frac{w}{E' . R_x^2} = \frac{3543}{228.10^9 (9,6039.10^{-3})^2} = 1,6847.10^{-4}$$

$$g_V = \frac{G.W^3}{U^2} = 5,1061.10^{11}$$

$$g_E = W^{8/3} / U^2 = (1,6847.10^{-4})^{8/3} / (2,216.10^{-10})^2 = 1,763.10^9$$

$$g_{H \min} = 3,42 . g_V^{0,49} . g_E^{0,17} [1 - e^{-0,68\kappa}] = 3,42 . (5,1061.10^{11})^{0,49} . (1,763.10^9)^{0,17} [1 - e^{-0,68.8,806}]$$

$$g_{H \min} = 6,9464.10^7$$

$$H_{\min} = g_{H \min} \left( \frac{U}{W} \right)^2 = 1,2018.10^{-4}$$

$$h_{\min} = R_x . H_{\min} = 0,009069.1,2018.10^{-4} = 1,0899 \mu m$$

Dış bilezik bilya arasındaki deformasyon miktarı

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{22}}$$

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{r_b} - \frac{1}{D_o + 2r_b . \cos \alpha / 2 . \cos \alpha}$$

$$R_x = \frac{2r_b (D_o + 2r_b . \cos \alpha)}{2D_o} = \frac{22,23 . (125,26 + 22,23 . \cos 40)}{2.125,26} = 12,626 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{22}}$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{-r_a}$$

$$R_y = \frac{r_a \cdot 2r_b}{2r_a - 2r_b} = \frac{11,63 \cdot 22,23}{2 \cdot 11,63 - 22,23} = 251,004 \text{ mm}$$

$$\Sigma\rho = \frac{1}{R_a} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} = \frac{1}{12,626} + \frac{1}{251,004}$$

$$R_a = 12,021 \text{ mm}$$

$$\alpha_r = R_y / R_x = 251,004 / 12,626 = 19,88 \quad \bar{\kappa} = \alpha_r^{2/3} = 7,338$$

$$\bar{\varepsilon} = 1 + \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) / \alpha_r = 1,0287$$

$$\bar{F} = \frac{\pi}{2} + \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \ln \alpha_r = 3,2773$$

$$\delta = \bar{F} \left[ \left( \frac{9}{2 \cdot \bar{\varepsilon} \cdot R} \right) \left( \frac{F}{\pi \cdot \bar{\kappa} \cdot E'} \right)^2 \right]^{1/3}$$

$$\delta = 3,4335 \left[ \left( \frac{9}{2 \cdot 1,0287 \cdot 12,021 \cdot 10^{-3}} \right) \left( \frac{3543}{\pi \cdot 7,338 \cdot 228 \cdot 10^9} \right)^2 \right]^{1/3} = 0,1884 \mu\text{m}$$

$$a_a = \left[ \frac{6 \cdot \kappa^2 \cdot \bar{\varepsilon} \cdot w \cdot R}{\pi \cdot E'} \right]^{1/3} = \left[ \frac{6 \cdot 7,338^2 \cdot 1,0287 \cdot 3543 \cdot 12,021 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 228 \cdot 10^9} \right]^{1/3} = 2,703 \text{ mm}$$

$$b_a = \left[ \frac{6 \cdot \bar{\varepsilon} \cdot w \cdot R}{\pi \cdot \kappa \cdot E'} \right]^{1/3} = \left[ \frac{6 \cdot 1,0287 \cdot 3543 \cdot 12,021 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 7,338 \cdot 228 \cdot 10^9} \right]^{1/3} = 0,3684 \text{ mm}$$

Minimum film kalınlığı

$$\tilde{u} = \frac{|\omega_a - \omega_i| |D_o^2 - (2r_b)^2|}{4 \cdot D_o} = \frac{|0 - 400| |125,26^2 - 22,23^2|}{4 \cdot 125,26} = 12,131 \text{ m/sn}$$

Verilen dizayn parametrelerine göre

$$U = \frac{\eta_o \tilde{u}}{E' . R_x} = \frac{0,04.12,131}{228.10^9 . 12,626.10^{-3}} = 1,6856.10^{-10}$$

$$G = \alpha . E' = 2,3.10^{-8} . 228.10^9 = 5,244.10^3$$

$$W = \frac{w}{E' . R_x^2} = \frac{3543}{228.10^9 (12,626.10^{-3})^2} = 0,9747.10^{-4}$$

$$g_V = \frac{G.W^3}{U^2} = 1,709.10^{11}$$

$$g_E = W^{8/3} / U^2 = (0,9747.10^{-4})^{8/3} / (1,6856.10^{-10})^2 = 0,7081.10^9$$

$$g_{H \min} = 3,42 . g_V^{0,49} . g_E^{0,17} [1 - e^{-0,68x}] = 3,42 . (1,709.10^{11})^{0,49} . (0,7081.10^9)^{0,17} [1 - e^{-0,68.7,338}]$$

$$g_{H \min} = 3,4643.10^7$$

$$H_{\min} = g_{H \min} \left( \frac{U}{W} \right)^2 = 1,036.10^{-4}$$

$$h_{\min} = R_x . H_{\min} = 0,012626 . 1,036.10^{-4} = 1,308 \mu m$$

## 5. SONUÇLAR

EHL’de yağ filminin oluşması sonucunda film kalınlığını ifade eden formülasyonların çok fazla parametreye bağlı olması nedeniyle bugüne kadar tam bir analitik çözüm yapılamamıştır. Gerekli basitleştirmelerle mükemmel sonuca ulaştıran nümerik yaklaşımlar ortaya konmuştur. Çalışmamızda Ertel, Cameron, Hamrock ve Dowson’un yaklaşımları irdelenmiş ve şu an en güncel olan Hamrock-Dowson EHL film kalınlığı metodu bir eğik (omuzlu) bilyalı rulmana uyarlanarak çözüm elde edilmiştir.



**KAYNAKLAR**

- Ai, X., Moyer, C.A. (2001), *Modern Tribology Handbook, Volume II, Chapter 28*, CRC Press, New York
- Akkurt, M. (2000), *Makine Elemanları I-II*, Birsen Yayınevi, İstanbul
- Bozacı, A., *Makina Elemanları II, Lisans Ders Notları*
- Bozacı, A., *Triboloji, Yüksek Lisans Ders Notları*
- Cameron, A. (1971), *Basic Lubrication Theory*, William Cloves and Sons, London
- Cameron, A. (1966), *The Principles of Lubrication*, William Cloves and Sons, London
- Changsen, W. (1991), *Analysis of Rolling Element Bearings*, Mechanical Engineer Pub. Lmted., London
- Eschmann, P. (1985), *Ball and Roller Bearings: Theory, Design and Application*, München:R.Oldenburg
- Güllü, E. (1986), *Kaymalı Yatakların EHL Analizi ve Yatak Deformasyonunun Performans Karakteristiklerine Etkisi*, Doktora Tezi, İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü
- Hamrock, B. J., Jacobson, B., Schmid, S.R. (1999), *Fundamentals of Machine Elements*, The McGraw-Hill Companies, USA
- Hamrock, B.J., Dowson, D., “Minimum Film Thickness in Elliptical Contacts for Different Regimes of Fluid Film Lubrication”, *EHL and Related Topics*, pp. 22-27
- Harris, T.A. (1991), *Rolling Bearing Analysis*, Willey, New York
- Shaw, M.C. (1949), *Anaysis and Lubrication of Bearings*, McGraw-Hill Book Co., New York
- Szeri, A.Z. (1988), *Fluid Film Lubrication Theory and Design*, Cambridge University Press, New York

**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum tarihi	08.08.1977	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1991-1994	Halide Edip Adıvar Lisesi
Lisans	1995-1999	Yıldız Teknik Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	2000-2004	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Müh., Konstrüksiyon Programı

**Çalıştığı kurum(lar)**

2000-Devam ediyor YTÜ Mak.Fak. Makina Müh.Böl.  
Araştırma Görevlisi

