

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

128565

DEĞİŞKEN KESİTLİ KİRİŞLERDE
YER DEĞİŞTİRMELER VE KAYMANIN ETKİSİ

TE YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Makina Müh. Levent Murat ÖZSOY

FBE Makina Mühendisliği Anabilim Dalı Konstrüksiyon Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Uğur GÜVEN

Uğur Güven
P. Dr. Uğur Güven

R. Feruk Yüksekler

Prof. Dr. Atilla Salt

128565

İSTANBUL, 2002

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iv
ŞEKİL LİSTESİ.....	v
ÖNSÖZ.....	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	3
3. TEMEL DENKLEMLER.....	5
3.1 Eğilme momentinin çökmeye etkisi.....	5
3.1.1 Değişken dairesel kesitli kirişler.....	7
3.1.1.1 Lineer olarak değişen dairesel kesitli kirişler.....	7
3.1.1.1.1 Lineer olarak değişen yük altında çökme.....	8
3.1.1.1.2 Parabolik olarak değişen yük altında çökme.....	9
3.1.1.1.3 Düzgün yayılı moment altında çökme.....	10
3.1.1.2 Parabolik olarak değişen dairesel kesitli kirişler.....	11
3.1.1.2.1 Lineer olarak değişen dairesel kesitli kirişler.....	12
3.1.1.2.2 Parabolik olarak değişen yük altında çökme.....	13
3.1.2 Değişken dikdörtgen kesitli kirişler.....	14
3.1.2.1 Lineer değişken h , b =sabit dikdörtgen kesitli kirişler.....	14
3.1.2.1.1 Lineer olarak değişen yük altında çökme.....	15
3.1.2.1.2 Parabolik olarak değişen yük altında çökme.....	16
3.1.2.2 Parabolik değişken h , b =sabit dikdörtgen kesitli kirişler.....	16
3.1.2.2.1 Lineer olarak değişen yük altında çökme.....	18
3.1.2.2.2 Parabolik olarak değişen yük altında çökme.....	19
3.1.2.3 Lineer değişken b , h =sabit dikdörtgen kesitli kirişler.....	19
3.1.2.3.1 Lineer olarak değişen yük altında çökme.....	20
3.1.2.3.2 Parabolik olarak değişen yük altında çökme.....	21
3.1.2.4 Parabolik değişken b , h =sabit dikdörtgen kesitli kirişler.....	21
3.2 Kesmenin çökmeye etkisi.....	23
3.2.1 Düzgün yayılı yük altında çökme.....	23
3.2.1.1 Lineer olarak değişen dairesel kesitli kirişler.....	23
3.2.1.2 Lineer olarak değişen dikdörtgen kesitli kirişler.....	24
3.2.2 Noktasal yük altında çökme.....	24
3.2.2.1 Lineer olarak değişen dairesel kesitli kirişler.....	25
3.2.2.2 Lineer olarak değişen dikdörtgen kesitli kirişler.....	25

3.2.3	k_y katsayısının hesaplanması.....	26
3.2.3.1	Kesme kuvvetinin tek başına kayma gerilmesi üzerine etkisi.....	26
3.2.3.2	Kesme kuvveti ve eğilme momentinin kayma gerilmesi üzerine etkisi.....	27
3.3	Eğilme momenti ve kesme kuvvetinin birlikte çökme üzerine etkisi.....	30
4.	SAYISAL UYGULAMALAR.....	31
4.1	Lineer değişken yayılı yük altında lineer değişken dairesel kesitli ankastre kiriş.....	31
4.2	Düzgün yayılı moment altında lineer değişken dairesel kesitli basit konsol kiriş.....	33
4.3	Düzgün yayılı yük altında lineer değişken dairesel kesitli basit mesnetli kiriş.....	34
4.4	Düzgün yayılı yük altında lineer değişken dikdörtgen kesitli basit konsol kiriş.....	37
4.5	Noktasal yük altında lineer değişken dikdörtgen kesitli basit konsol kiriş.....	38
4.6	Düzgün yayılı yük altında lineer değişken dairesel kesitli basit konsol kiriş.....	39
5.	SONUÇLAR.....	42
	KAYNAKLAR.....	45
	ÖZGEÇMİŞ	47

SİMGE LİSTESİ

A, B, C, D	Elastik eğri denklemindeki integral sabitleri
b	Kesit genişliği
E	Elastisite modülü
F	Kesit alanı
G	Kayma modülü
h	Kesit boyu
J	Atalet momenti
k_y	Kayma gerilmesi dağılışı ile ilgili kesit geometrisine bağlı numerik çarpan
K	Karakteristik denklemde geçen sabit
l, L	Kiriş boyları
m	Yayıllı moment
M	Eğilme momenti
P	Noktasal yük
q	Yayıllı yük
R	Kesit yarıçapı
T	Kesme kuvveti
α	Kesit değişim katsayısı
β, γ	Yayıllı yük değişim katsayısı
τ	Kayma gerilmesi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1	Tezde kullanılan eksen takımı.....5
Şekil 3.2	Düzgün yayılı moment altında lineer değişken dairesel kesitli konsol kiriş..... 10
Şekil 3.3	Noktasal yük altında, lineer değişken h, b=sabit kesitli basit konsol kiriş..... 26
Şekil 3.4	Noktasal yük altında, lineer değişken h, b=sabit kesitli basit konsol kiriş..... 27
Şekil 4.1	Lineer değişken yayılı yük altında lineer değişken dairesel ankastre kiriş.....31
Şekil 4.2	Lineer değişken yayılı yük altında lineer değişken dairesel ankastre kirişin çökmesi.....32
Şekil 4.3	Düzgün yayılı moment altında lineer değişken dairesel kesitli basit konsol kiriş.....33
Şekil 4.4	Düzgün yayılı moment altında lineer değişken dairesel kesitli basit konsol kirişin çökmesi..... 34
Şekil 4.5	Düzgün yayılı yük altında lineer değişken dairesel kesitli basit mesnet kiriş..... 34
Şekil 4.6a,b,c,d,	Düzgün yayılı yük altında lineer değişken dairesel kesitli basit mesnet kirişin çökmesi.....36
Şekil 4.7	Düzgün yayılı yük altında lineer değişken dikdörtgen kesitli basit konsol kiriş.....37
Şekil 4.8	Düzgün yayılı yük altında lineer değişken dikdörtgen kesitli basit konsol kirişin çökmesi.....38
Şekil 4.9	Noktasal yük altında lineer değişken h, b=sabit basit konsol kiriş..... 38
Şekil 4.10	Noktasal yük altında lineer değişken h, b=sabit basit konsol kirişin çökmesi.....39
Şekil 4.11	Düzgün yayılı yük altında lineer değişken dairesel kesitli basit konsol kiriş.....39
Şekil 4.12	Düzgün yayılı yük altında lineer değişken dairesel kesitli basit konsol kirişin çökmesi..... 41

ÖNSÖZ

Değişken kesitli kirişlerin çökmesini konu alan bu yüksek lisans bitirme tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Makina Mühendisli bölümünde öğretim üyeliği yapan Prof Dr. Uğur Güven' in yardımı ve yönlendirmeleri ile İstanbul Teknik Üniversitesi' indeki 4 yıllık lisans ve yıldız Teknik Üniversitesi' inde bulunduğum 3 yıllık yüksek lisans eğitim sürecinde edindiğim bilgilere dayanır.

Çalışmaya konu edilen değişken kesitli kirişler, bilimsel görüşe uygun şekilde mukavemetin kanunlarına göre yüklemelere tabi tutulmuş sonra gerekli haller için çözüm metodları açıklanmıştır. Ayrıca teoriyi daha iyi anlatabilmek amacıyla çalışmanın sonuna sayısal uygulamalar eklenmiştir.

Tez çalışmamın başından sonuna kadar beni sabırla yönlendiren, cesaretlendiren ve destekleyen Sn. Prof. Dr. Uğur Güven' e ve teknik katkılarından dolayı ekibindeki Dr. Ahmet Çelik ile As. Yük. Müh. İbrahim Eren' e teşekkürlerimi bir borç bilirim.



ÖZET

Statikçe belirli ve belirsiz haller için değişken kesitli kirişlerin yük eksenini doğrultusunda elastik yer değiştirmeleri, değişik yüklemeler altında incelenmiştir. Analizde ele alınan kesitler dairesel ve dikdörtgen kesitli olup, yarıçapın, genişliğin ve yüksekliğin lineer ve parabolik olarak değişimleri gözönüne alınmıştır. Yükleme şartları olarak ise düzgün yayılı yük, lineer değişken yayılı yük, parabolik değişken yayılı yük, noktasal yük, düzgün yayılı moment halleri düşünölmüştür. Kirişlere ait elastik eğri ifadeleri, genel olarak 4. mertebeden diferansiyel denklemler kullanılarak elde edilmiştir.

Yüklemeden meydana gelen eğilme momenti ve kesme kuvvetinin kirişin yer değiştirmesi üzerindeki etkileri, önce ayrı ayrı ardından beraber olduğu halde ayrıntılı olarak belirtilmiştir. Kesme kuvvetinin etkisini belirten ana ifade, enerji yöntemi kullanılarak çıkartılmıştır. Her iki zorlayıcı faktörün etkisi karşılaştırıldığında, eğilme momentinin çökme üzerinde payının kesme kuvvetinininkinin çok üzerinde olduğu bir kez daha doğrulanmıştır. Eğilme momenti ve kesme kuvvetinin yer değiştirme üzerindeki etkilerinin daha iyi görölebilmesi için pratikte uygulaması olan çok sayıda sayısal örnek verilmiştir.

Analiz sonucu değişken kesitli kirişlerin yük eksenini doğrultusunda, sabit kesitli kirişlere göre yük altında daha rijit bir davranış gösterdiği belirlenmiştir. Ergonomik, hafif ve ucuz konstrüksiyonlar elde etmek için değişken kesitli kiriş kullanımının çözümlerden bir olacaktır.

Anahtar Kelimeler: Yer değiştirme, lineer ve parabolik olarak değişen kesitli kirişler, yayılı yük, noktasal yük, düzgün yayılı moment, kayma etkisi

ABSTRACT

The elastic deflections of beams with variable cross-section for static and hiperstatic conditions were studied in different load conditions. The beams which were studied in the analysis were circular and rectangular cross section. For radius, width and height variability, linearly and parabolically conditions were considered. For cross section variability, five load conditions were considered: concentrated load; uniformly distributed; linearly varying distributed; parabolically varying distributed transverse load; and uniformly distributed moment. The solutions were obtained by using fourth-order differantial equations.

The effects of bending moment and shearing force on deflection of beam were determined separately and together. The equation of effects of shearing force were found by energy method. When the effects of two forcible factors were compared, it has been understood that the effect of bending moment on deflection was much bigger than the effect of shearing force. Lots of numerical examples utilized in civil and mechanical engineering were provided at the end of analysis to explain the effects of bending moment and shearing force on deflection.

As a result of this analysis, it is determined that beams with variable cross-section is more rigid than beams with invariable cross-section in the direction of load axis. Using beams with variable cross-section is one of the solution of getting light and cheap constructions.

Keywords : Deflection, beams with linearly and parabolically variable cross-section, distributed load, concentrated load, distributed moment, shearing effect

1. GİRİŞ

İnşaat ve makina imalat sektörleri, kirişlerin en yoğun kullanıldığı alanlar olmakla beraber, demir-çelik mamullerinin üretim metodlarının gelişmesi ile birlikte bir parça boyunca değişken kesitli kirişlerin tüketimi artmıştır. Değişken ebatlı çelik kiriş ve mill gibi malzemelerin kullanılmasıyla daha hafif, ergonomik ve ucuz ürünlerin üretilmesi hedeflenmektedir. Bu anlamda günümüzde kullanımı giderek artan değişken kesitli malzemeler, bütün sektörlerde klasik sabit kesitli malzemelerin yerini almaktadır.

Değişken kesitli kirişler, inşaat sektöründe çelik konstrüksiyon yapılara rağbetin artmasıyla daha fazla kullanılır hale gelmiştir. Bu sektörde en önemli kullanım alanlarından birisi çelik konstrüksiyonlarda konsol çıkmalardır. Bu tip yapılarda değişken kesitli kirişlerin tercih edilmesinin sebebi, kirişin iki tarafına kolon ile bağlantı yapılamadığı durumlarda kirişin bağlantı tarafında kalın kesit, serbest tarafında ince kesti kullanılarak hafif bir yapı elde edilebilmesidir. Çelik konstrüksiyonlarda maliyetin, kullanılan çeliğin ağırlığıyla doğru orantılı artması sebebiyle, bu yöntemle önemli bir tasarruf sağlanmaktadır. Daha hafif bir yapıyı hedeflemek, maliyette önemli bir azalmaya sebep olacaktır.

Makina imalat sektöründe, değişken kesitli kirişlerin en yaygın kullanım alanlarından biri makina ekipman taşıyıcı kısımlarıdır. Makinanın aslı işlevini gerçekleştirdiği bölümün taşıyıcı gövdeyle birleştirildiği noktalarda sözkonusu kirişler sıkça kullanılmaktadır. Bu sayede yapının ağırlığı azalmakta, taşıyıcı gövdeye daha az yük binmektedir. Buna otomobillerde kullanılan yaprak tipte yaylar örnek gösterilebilir. Orta kısımda kalın kesit, yanlara doğru azalan kesitli bu tip yaylarla, kesici kuvvet ve moment dengesinde optimum noktaya yaklaşılmaktadır.

Değişken kesitli kirişlerin özel amaçlarla kullanıldığı bir sektörde havacılık endüstrisidir. Gelişen teknoloji ile uçakların ve helikopterlerin hızları ile uçuş kabiliyetleri gitdige artmaktadır. Hız ve uçuş kabiliyetini etkileyen en önemli faktörlerden birisi pervane geometrisidir. Beklentilerin karşılanabilmesi için istenen pal açısının sağlanabilmesi amacıyla pervane tasarımında değişken kesitli kirişler kullanılmaktadır.

Bu çalışmada sürekli lineer ve parabolik olarak değişen kesitli kirişlerin yük altında yer değiştirmesi, sabit kesitli kirişlerle karşılaştırmalı olarak değerlendirilecektir. Bu değerlendirmede, yer değiştirmeye sebep olan eğilme ve kesmenin ayrı ayrı ve beraberken etkileri göz önüne alınacaktır. Değerlendirme esnasında kiriş sistemlerine, tekil ve yayılı yük ile yayılı moment gibi farklı yükler uygulanacaktır. Bu sayede pratik uygulamalarda değişken

kesitli kirişlerin kullanımı için karar aşamasında gerekli teorik hesap ve karşılaştırma bilgilerinin açık ve net olarak ortaya konması amaçlanmaktadır.



2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Değişken kesitli kirişler ile ilgili çalışmaların tarihi oldukça eskiye dayanmaktadır. Bu konu, çok sayıda makaleye ve kitaba konu olmuştur. Yapılan yeni çalışmalar ile birlikte son yıllarda gelişen teknoloji ve üretim metodları sayesinde değişken kesitli kirişlerin kullanım alanları artmaktadır.

Romano, F., ve Zingone, G., (1992) tarafından yayımlanmış olan çalışmada, değişken dikdörtgen kesitli kirişlerde yer değiştirme incelenmiştir. Bu çalışmada, boy ve genişlik sırasıyla değiştirilerek dördüncü mertebeden diferansiyel denklemler çözülmek suretiyle yer değiştirmenin ifadesi elde edilmiştir.

Romano, F., ve Zingone, G., (1992) tarafından yayımlanmış bir diğer çalışmada ise değişken dairesel kesitli kirişlerde yer değiştirme dağılımı daha ayrıntılı olarak irdelenmiştir. Çeşitli bağlantı sistemlerinde değişken yayılı yük altında kirişin elastik eğrisine ait dördüncü mertebeden diferansiyel denklemler çözülmüş ardından sayısal örneklerle çalışma desteklenmiştir.

Göktürk, A., ve Hopkins, H., (1981) tarafından yayımlanmış çalışmada, plastik kirişlerde yayılı yük altında yer değiştirme irdelenmiştir. Yayılı ve noktasal yük altında kirişlerin elastik eğri denklemleri elde edilmiştir.

Fertis, G., ve Taneja, R., (1991), tarafından yayımlanmış çalışmada, değişken atalet momentli, elastik olmayan prizmatik ve prizmatik olmayan yapılarda yer değiştirme analizi yapılmıştır.

Shrimai, L., ve Gige, M., (1990), tarafından yayımlanmış çalışmada, Timoshenko kirişinin yayılı yük altında yer değiştirmesi irdelenmiştir.

İnan, M., (1967) tarafından yayımlanmış Cisimlerin Mukavemeti adlı kitapta, değişken kesitli kirişlere ait ayrıntılı bilgilerin yer aldığı önemli Türkçe kaynaklardan biridir. Bu kitapta değişken kesitli bir kirişin elastik eğrisinin elde edilmesinde kullanılan temel denklemler de yer almaktadır.

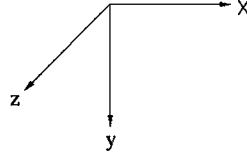
Heteyni, M., (1937), tarafından yayımlanmış çalışmada, değişken dikdörtgen kesitli kirişler ele alınmıştır. Çalışmanın temeli, dikdörtgen kesitli kirişlerde elastik eğri denkleminin elde edilmesine dayanmaktadır. Temel denklemlerin elde edilmesi, yayılı yük altında çökme ifadelerinin bulunmasıyla desteklenmiştir.

Ting, B., (1982), tarafından yayımlanmış çalışmada, sonlu kirişlerin elastik zeminde elastik eğri denklemlerinin elde edilmesi konu edilmiştir. Değişken kesitli kırıslere ait elastik eğri denklemler bir başka ifadeyle yer değiştirmesine de değinilmiştir.



3. TEMEL DENKLEMLER

Taşıyıcı çubuk sistemlerinde, eksenleri doğru olan çubuklar, eğildikten sonra eksenleri eğri olmakta ve buna elastik eğri denmektedir. Düzlemsel yüklemelerde elastik eğriye ait diferansiyel denklemler kurulurken gerçekte eğilme momenti ve kesmenin etkileri göz önüne alınmalıdır. Bu çalışmada seçilen koordinat eksenleri Şekil 3.1' deki gibidir;



Şekil 3.1 Eksen takımı

Sonsuz küçük şekil ve yer değiştirmeler için geçerli olan süperpozisyon ilkesine göre yer değiştirme ifadesi, eğilme ve kesmeden oluşan bileşenlerin toplamı olarak alınır:

$$y = y_M + y_T \quad (3.1)$$

Burada y_M eğilme momenti bileşeni, y_T de kesme kuvveti bileşenidir. Eşitliğin her iki tarafının x değişkenine göre iki defa türevi alınırsa

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y_M}{dx^2} + \frac{d^2 y_T}{dx^2} \quad (3.2)$$

olarak elastik eğrinin 2. mertebeden diferansiyel denklemi elde edilir. Eşitliğin sol tarafındaki ilk terim yerine (İnan, 1967)' den alınan (18.6) no.' lu eşitliği ve ikinci terim yerine aynı kaynaktan (17.43) no.' lu eşitliği konulursa

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_z}{EJ_z} + \frac{k_y}{GF} \frac{dT_y}{dx} = -\left(\frac{M_z}{EJ_z} + \frac{k_y}{GF} P \right) \quad (3.3)$$

elde edilir. Burada k_y , kesitteki kayma gerilmesinin dağılışı ile ilgili ve kesitin geometrisine bağlı olarak değişen bir katsayıdır. Ayrıca E elastisite modülü, G kayma modülü, F kesit alanı, J_z ise kesidin tarafsız eksenine göre atalet momentidir.

3.1 Eğilme momentinin çökmeye etkisi

Bu bölümde eğilme momentinin tek başına elastik eğri üzerindeki etkisinin belirlenmesine ve değişken dairesel ve dikdörtgen kesitli kirişlerin yük altındaki çökme ifadesinin elde edilmesine değinilecektir.

J_z , x değişkenine bağlı bir ifade olmak üzere, değişken kesitli bir kiriş için elastik eğrinin 2. mertebeden diferansiyel denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_z}{EJ_z} \quad (3.4)$$

(3.4) no.' lu denklem x değişkenine göre türetilirse

$$E \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{(M_z' J_z - M_z J_z')}{J_z^2}$$

$$E \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{M_z'}{J_z} + \frac{M_z J_z'}{J_z^2} \quad (3.5)$$

elde edilir.

(3.5) no.' lu denklem bir kez daha türetilirse elastik eğrinin 4. mertebeden diferansiyel denklemi

$$E \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{-M_z'' J_z - J_z' M_z'}{J_z^2} + \frac{(M_z' J_z' + M_z J_z'') J_z^2 - 2J_z'^2 J_z M_z}{J_z^4} \quad (3.6)$$

şeklinde olur.

Eğilme momenti ifadesi, $M_z = -EJ_z y''(x)$ ' dir. (3.7)

(005) no.' lu denklem x değişkenine göre bir kez türetilirse

$$T_y = -EJ_z y'''(x) - EJ_z' y''(x) \quad (3.8)$$

kesme kuvveti çıkar.

Kesme kuvveti ifadesinin x değişkenine göre bir kez daha türevi alınır

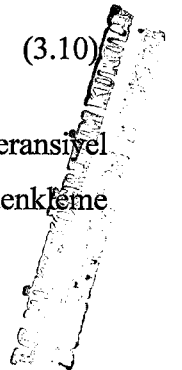
$$q_y = EJ_z y^{iv}(x) + 2EJ_z' y'''(x) + EJ_z'' y''(x) \quad (3.9)$$

yaylı yükün şiddeti bulunur.

(3.9) no.' lu denklem (E) elastisite modülüne bölünürse

$$J_z(x) y^{iv}(x) + 2J_z'(x) y'''(x) + J_z''(x) y''(x) = \frac{q(x)}{E} \quad (3.10)$$

değişken kesitli bir kiriş için elastik eğrinin yaylı yüke bağlı 4. mertebeden diferansiyel denklemi elde edilir. Diferansiyel denklemin çözümü yapıldığında 4 adet sabit denkleme eklenecektir. Sabitlerin bulunması için 4 tane sınır şartına ihtiyaç duyulacaktır.



J_z ifadesi görüldüğü üzere x' e bağlı olup, kesidin dairesel veya dikdörtgen kesitli olmasına göre değişmektedir. Aşağıda lineer olarak değişen dairesel ve dikdörtgen kesitli kirişlere ait (3.10) no.' lu denklemin çözümleri yer almaktadır.

3.1.1 Değişken dairesel kesitli kirişler

Bu bölümde lineer ve parabolik olarak değişen dairesel kesitli kirişlerde, lineer ve parabolik olarak değişen yayılı yük altında çökme incelenecektir.

3.1.1.1 Lineer olarak değişen dairesel kesitli kirişler

Lineer olarak değişen dairesel kesitli kirişte yarı çap ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$R(x) = R_0 + \alpha x \quad (3.11)$$

Kirişin atalet momenti ifadesi ise,

$$J(x) = \frac{\pi}{4} (R_0 + \alpha x)^4 \quad (3.12)$$

olur.

(3.12) no.' lu denklemin 1. ve 2. türevleri alınırsa

$$J'(x) = \pi \alpha (R_0 + \alpha x)^3 \quad (3.13)$$

$$J''(x) = 3\pi \alpha^2 (R_0 + \alpha x)^2 \text{ elde edilir.} \quad (3.14)$$

(3.12), (3.13) ve (3.14) no.' lu eşitlikler, (3.10) no.' lu denkleminde yerlerine konularsa

$$(R_0 + \alpha x)^4 y''(x) + 8\alpha (R_0 + \alpha x)^3 y'''(x) + 12\alpha^2 (R_0 + \alpha x)^2 y^2(x) = \frac{4q(x)}{\pi E} \quad (3.15)$$

bulunur.

Aşağıdaki değişken dönüşümü yapıp, (3.15) no.' lu denkleminde yerine konularak

$$u = R_0 + \alpha x \quad (3.16)$$

$$\frac{du}{dx} = \alpha \quad (3.17)$$

$$y'(x) = \alpha y'(u); y''(x) = \alpha^2 y''(u); y'''(x) = \alpha^3 y'''(u); y''(x) = \alpha^4 y''(u) \quad (3.18)$$

$$u^4 y''(u) + 8u^3 y'''(u) + 12u^2 y''(u) = \frac{4q(u)}{\pi \alpha^4 E} \quad (3.19)$$

elde edilir.

(3.19) no.' lu denklem, Euler' in 4. mertebeden bir lineer diferansiyel denklemdir. Çözüm elde edilebilmesi için sabit katsayılı bir denkleme dönüştürülmesi gerekmektedir. Bu sebeple aşağıdaki değişken dönüşümü yapıлып, (3.19) no.' lu denklemde yerine konularak

$$u = e^t \quad (3.20)$$

$$y'(u) = e^{-t} y'(t) \quad (3.21)$$

$$y''(u) = e^{-2t} [y''(t) - y'(t)] \quad (3.22)$$

$$y'''(u) = e^{-3t} [y'''(t) - 3y''(t) + 2y'(t)] \quad (3.23)$$

$$y^{iv}(u) = e^{-4t} [y^{iv}(t) - 6y'''(t) + 11y''(t) - 6y'(t)] \quad (3.24)$$

$$y^{iv}(t) + 2y'''(t) - y''(t) - 2y'(t) = F(t) \quad (3.25)$$

4. mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklem elde edilir. Sağ tarafı mevcut olan bu denklemin homojen eşitliği aşağıdaki gibidir:

$$y^{iv}(t) + 2y'''(t) - y''(t) - 2y'(t) = 0 \quad (3.26)$$

(3.26) no.' lu denkleme ait karakteristik denklemi

$$K^4 + 2K^3 - K^2 - 2K = 0 \quad (3.27)$$

olur. Buradan kökler

$K_1 = 0$; $K_2 = 1$; $K_3 = -1$ ve $K_4 = -2$ olarak bulunur.

Kökler dikkate alınarak (3.26) no.' lu denkleme ait

$$y(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-t} + C_4 e^{-2t} \quad (3.28)$$

çözümü elde edilir.

(3.16) ve (3.20) no.' lu değişken dönüşümleri, (3.28) no.' lu denklemde yerine konursa

$$y(x) = C_1 + C_2 (R_0 + \alpha x) + \frac{C_3}{(R_0 + \alpha x)} + \frac{C_4}{(R_0 + \alpha x)^2} \quad (3.29)$$

bulunur.

3.1.1.1.1 Lineer olarak değişen yük altındaki çökme

Lineer olarak değişen yayılı yük ifadesi aşağıdaki gibi alınır:

$$q(x) = q_0 + \beta x \quad (3.30)$$

(3.16), (3.18) ve (3.30) no.' lu denklemler dikkate alınarak, (3.25) no' lu denklemin sağ tarafından

$$F(t) = \frac{4}{\pi\alpha^5 E} (\alpha q_0 + \beta e^t - \beta R_0) \quad (3.31)$$

ifadesi elde edilir (Romano, F., ve Zingone, G., 1992)

F(t) ifadesinden, diferansiyel denklemin çözümüne gelen terim

$$y(t) = -\frac{2}{\pi\alpha^5 E} (\alpha q_0 - \beta R_0)t + \frac{2\beta}{3\pi\alpha^5 E} te^t \quad (3.32)$$

olur (Romano, F., ve Zingone, G., 1992).

(3.28) ve (3.32) no.' lu denklemler dikkate alınarak, (3.15) no.' lu denklemin genel çözümü, bir başka bir ifade ile elastik eğri denklemi

$$y(x) = C_1 + C_2(R_0 + \alpha x) + \frac{C_3}{(R_0 + \alpha x)} + \frac{C_4}{(R_0 + \alpha x)^2} - \frac{2}{\pi\alpha^5 E} (\alpha q_0 - \beta R_0) \ln(R_0 + \alpha x) + \frac{2\beta}{3\pi\alpha^5 E} (R_0 + \alpha x) \ln(R_0 + \alpha x) \quad (3.33)$$

olarak bulunur (Romano, F., ve Zingone, G., 1992).

3.1.1.1.2 Parabolik olarak değişen yük altındaki çökme

Parabolik olarak değişen yayılı yük aşağıdaki gibi alınır:

$$q(x) = q_0 + \beta x + \gamma x^2 \quad (3.34)$$

(3.16), (3.18) ve (3.34) no.' lu denklemler dikkate alındığında, (3.25) no' lu denklemin sağ tarafından

$$F(t) = \frac{4}{\pi\alpha^6 E} \left[(\alpha^2 q_0 - \alpha\beta R_0 + \gamma R_0^2) + (\alpha\beta - 2\gamma R_0)e^t + \gamma e^{2t} \right] \quad (3.35)$$

ifadesi bulunur (Romano, F., ve Zingone, G., 1992).

F(t) ifadesinden, diferansiyel denklemin çözümü olarak

$$y(t) = A_1 t + B_1 t e^t + D_1 e^{2t} \quad (3.36)$$

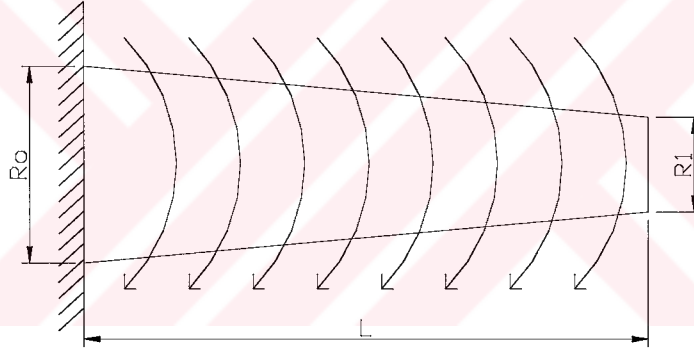
$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{2}{\pi\alpha^6 E} (\alpha^2 q_0 - \alpha\beta R_0 + \gamma R_0^2) \\
B_1 &= \frac{2(\alpha\beta - 2\gamma R_0)}{3\pi\alpha^6 E} \\
D_1 &= \frac{\gamma}{6\pi\alpha^6 E}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

elde edilir (Romano, F., ve Zingone, G., 1992).

(3.28) ve (3.36) no.' lu denklemler dikkate alınarak alınarak elde edilen (3.15) no.' lu denklemin genel çözümü, bir başka ifadeyle elastik eğri denklemi aşağıda gibi çıkar (Romano, F., ve Zingone, G., 1992).

$$\begin{aligned}
y(x) &= C_1 + C_2 (R_0 + \alpha x) + \frac{C_3}{(R_0 + \alpha x)} + \frac{C_4}{(R_0 + \alpha x)^2} \\
&+ A_1 \ln(R_0 + \alpha x) + B_1 (R_0 + \alpha x) \ln(R_0 + \alpha x) + D_1 (R_0 + \alpha x)^2
\end{aligned} \tag{3.38}$$

3.1.1.1.3 Düzgün yayılı moment altındaki çökme



Şekil 3.2 Sabit yayılı moment altında lineer değişken dairesel kesitli konsol kiriş

Şekil 3.2' de yer alan düzgün yayılı moment altındaki konsol kirişin diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi alınabilir:

$$EJ_z(x)y''(x) = mx - ml \tag{3.39}$$

Kirişin atalet momenti ifadesi ise

$$J_z(x) = \frac{\pi}{4} (R_0 + \alpha x)^4 \tag{3.40}$$

olur. Atalet momenti ifadesi (3.39) no.' lu denklemde yerine konulup gerekli düzenleme yapılırsa

$$y''(x) = \frac{4}{\pi E} \frac{(mx - ml)}{(R_0 + \alpha x)^4} \quad (3.41)$$

ifadesi elde edilir. (3.41) no.' lu denklem bir kez integre edilirse

$$y'(x) = \frac{4}{\pi E} \int \frac{(mx - ml)}{(R_0 + \alpha x)^4} \quad (3.42)$$

$$y'(x) = -\frac{4m}{3\alpha\pi E} \left[\frac{x}{(R_0 + \alpha x)^3} + \frac{1}{2\alpha(R_0 + \alpha x)^2} \right] + \frac{4ml}{3\alpha\pi E(R_0 + \alpha x)^3} + C_1 \quad (3.43)$$

bulunur.

(3.43) no.' lu denklem bir kez daha integre edilirse, yayılı moment altındaki lineer değişken dairesel kesidin elastik eğri ifadesi

$$y(x) = -\frac{4m}{3\alpha\pi E} \left[-\frac{x}{2\alpha(R_0 + \alpha x)^2} - \frac{1}{\alpha^2(R_0 + \alpha x)} \right] - \frac{4ml}{6\alpha^2\pi E(R_0 + \alpha x)^2} + C_1x + C_2 \quad (3.44)$$

olarak çıkar.

3.1.1.2 Parabolik olarak değişen dairesel kesitli kirişler

Parabolik olarak değişen dairesel kesitli kiriş için yarı çap ve atalet momenti ifadeleri aşağıdaki gibi alınır:

$$R(x) = (R_0^{1/2} + \alpha x)^2 \quad (3.45)$$

$$J(x) = \frac{\pi}{4} (R_0^{1/2} + \alpha x)^8 \quad (3.46)$$

(3.46) no.' lu denklemin 1. ve 2. türevleri alınırsa

$$J'(x) = 2\pi\alpha(R_0^{1/2} + \alpha x)^7 \quad (3.47)$$

$$J''(x) = 14\pi\alpha^2(R_0^{1/2} + \alpha x)^6 \quad (3.48)$$

elde edilir.

(3.46), (3.47) ve (3.49) no.' lu denklemler, (3.10) no.' lu eşitlikte yerine konursa aşağıdaki

$$(R_0^{1/2} + \alpha x)^8 y^{iv}(x) + 16\alpha(R_0^{1/2} + \alpha x)^7 y'''(x) + 56\alpha^2(R_0^{1/2} + \alpha x)^6 y''(x) = \frac{4}{\pi E} q(x) \quad (3.49)$$

ifadesi bulunur. Aşağıdaki değişken dönüşümü yapıлып, (3.49) no.' lu denklemde yerine konulursa

$$u = R_0^{1/2} + \alpha x \quad (3.50)$$

$$u^4 y^{iv}(u) + 16u^3 y'''(u) + 56u^2 y''(u) = \frac{4q(u)}{\pi \alpha^4 E u^4} \quad (3.51)$$

çıkar.

(3.20), (3.21), (3.22), (3.23) ve (3.25) no.' lu denklemler (3.49) no.' lu denklemde uygulandığı takdirde

$$y^{iv}(t) + 10y'''(t) + 19y''(t) - 30y'(t) = F(t) \quad (3.52)$$

bulunur.

Sağ tarafsız homojen denklem ise aşağıdaki gibidir:

$$y^{iv}(t) + 10y'''(t) + 19y''(t) - 30y'(t) = 0 \quad (3.53)$$

(3.53) no.' lu denklemin karakteristik denklemi

$$K^4 + 10K^3 + 19K^2 - 30K = 0 \quad (3.54)$$

olur. Buradan kökler,

$K_1=0$; $K_2=1$; $K_3=-5$; $K_4=-6$ olarak bulunur.

Kökler dikkate alınarak (3.53) no.' lu denklemin çözümü

$$y(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-5t} + C_4 e^{-6t} \quad (3.55)$$

elde edilir.

(3.20) ve (3.50) no.' lu denklemler, (3.55) no.' lu denklemde yerine konulursa elde edilen çözüm aşağıdaki gibi bulunur:

$$y(x) = C_1 + C_2 (R_0^{1/2} + \alpha x) + \frac{C_3}{(R_0^{1/2} + \alpha x)^5} + \frac{C_4}{(R_0^{1/2} + \alpha x)^6} \quad (3.56)$$

3.1.1.2.1 Lineer olarak değişen yük altındaki çökme

(3.20), (3.30), (3.50) ve (3.51) no.' lu denklemler dikkate alındığında, (3.52) no.' lu denklemin sağ tarafından

$$F(t) = \frac{4}{\pi \alpha^5 E} e^{-4t} (\alpha q_0 - \beta R_0^{1/2} + \beta e^t) \quad (3.57)$$

ifadesi elde edilir.

F(t) ifadesinden, diferansiyel denklemin çözümüne gelen terim ise aşağıdaki gibidir:

$$y(t) = \frac{1}{10\pi\alpha^5 E} (\alpha q_0 - \beta R_0^{1/2}) e^{-4t} + \frac{\beta}{18\pi\alpha^5 E} e^{-3t} \quad (3.58)$$

(3.55) ve (3.58) no.' lu denklemler dikkate alınarak, (3.49) no.' lu denklemin genel çözümü, bir başka ifadeyle elastik eğri denklemi

$$y(x) = C_1 + C_2 (R_0^{1/2} + \alpha x) + \frac{C_3}{(R_0^{1/2} + \alpha x)^5} + \frac{C_4}{(R_0^{1/2} + \alpha x)^6} + \frac{\beta}{18\pi\alpha^5 E (R_0^{1/2} + \alpha x)^3} + \frac{(\alpha q_0 - \beta R_0^{1/2})}{10\pi\alpha^5 E (R_0^{1/2} + \alpha x)^4} \quad (3.59)$$

olur.

3.1.1.2.2 Parabolik olarak değişen yük altındaki çökme

(3.20), (3.34), (3.50) ve (3.51) no.' lu denklemler dikkate alındığında, (3.52) no.' lu denklemin sağ tarafından elde edilen ifade aşağıda gibi çıkar:

$$F(t) = \frac{4e^{-4t}}{\pi\alpha^6 E} \left[(\alpha^2 q_0 + \gamma R_0 - \alpha\beta R_0^{1/2}) + (\alpha\beta - 2\gamma R_0^{1/2}) e^t + \gamma e^{2t} \right] \quad (3.60)$$

F(t) ifadesinden, diferansiyel denklemin çözümüne gelen terim

$$y(t) = A_2 e^{-2t} + B_2 e^{-3t} + D_2 e^{-4t} \quad (3.61)$$

şeklindedir. A_2 , B_2 , D_2 katsayıları sırasıyla

$$A_2 = \frac{\gamma}{18\pi\alpha^6 E}$$

$$B_2 = \frac{\alpha\beta - 2\gamma R_0^{1/2}}{18\pi\alpha^6 E} \quad (3.62)$$

$$D_2 = \frac{1}{10\pi\alpha^6 E} (\alpha^2 q_0 + \gamma R_0 - \alpha\beta R_0^{1/2})$$

olarak bulunur. (3.56) ve (3.61) no.' lu denklemler dikkate alınarak, (3.49) no.' lu denklemin genel çözümü, bir başka ifadeyle elastik eğri denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$y(x) = C_1 + C_2 (R_0^{1/2} + \alpha x) + \frac{C_3}{(R_0^{1/2} + \alpha x)^5} + \frac{C_4}{(R_0^{1/2} + \alpha x)^6} + \frac{A_2}{(R_0^{1/2} + \alpha x)^2} + \frac{B_2}{(R_0^{1/2} + \alpha x)^3} + \frac{D_2}{(R_0^{1/2} + \alpha x)^4} \quad (3.63)$$

3.1.2 Değişken dikdörtgen kesitli kirişler

Bu bölümde lineer ve parabolik olarak değişken dikdörtgen kesitli kirişlerde, lineer ve parabolik olarak değişen yayılı yük altında çökme incelenecektir.

3.1.2.1 Lineer değişken h, b=sabit dikdörtgen kesitli kirişler

Lineer olarak değişen h, b=sabit kesitli kirişte h ve atalet momenti ifadesi aşağıdaki gibi alınır:

$$h(x) = h_0 + \alpha x \quad (3.64)$$

$$J(x) = \frac{bh(x)^3}{12}. \quad (3.65)$$

(3.65) no.' lu denklemin 1. ve 2. türevleri alınırsa

$$J'(x) = \frac{b\alpha}{4} (h_0 + \alpha x)^2 \quad (3.66)$$

$$J''(x) = \frac{b\alpha^2}{2} (h_0 + \alpha x) \quad (3.67)$$

elde edilir.

(3.65), (3.66) ve (3.67) no.' lu eşitlikler, (3.10) no.' lu denklemde yerlerine konulursa

$$\frac{b}{12} (h_0 + \alpha x)^3 y^{iv}(x) + \frac{b}{2} \alpha (h_0 + \alpha x)^2 y'''(x) + \frac{b}{2} \alpha^2 (h_0 + \alpha x) y''(x) = \frac{q(x)}{E} \quad (3.68)$$

bulunur.

Aşağıdaki değişken dönüşümü yapıp, (3.68) no.' lu denklemde yerine konulursa

$$u = h_0 + \alpha x \quad (3.69)$$

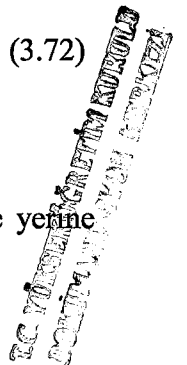
$$\frac{du}{dx} = \alpha \quad (3.70)$$

$$y'(x) = \alpha y'(u); y''(x) = \alpha^2 y''(u); y'''(x) = \alpha^3 y'''(u); y^{iv}(x) = \alpha^4 y^{iv}(u) \quad (3.71)$$

$$u^4 y^{iv}(u) + 6u^3 y'''(u) + 6u^2 y''(u) = \frac{12q(u)u}{b\alpha^4 E} \quad (3.72)$$

çıkar.

(3.20), (3.21), (3.22), (3.23) ve (3.24) no.' lu denklemler (3.72) no.' lu denklemde yerine konulursa elde edilen ifade aşağıdaki gibi olur:



$$y^{IV}(t) - y''(t) = F(t) \quad (3.73)$$

(3.73) no.' lu denklemin sağ tarafsız homojen denklemi

$$y^{IV}(t) - y''(t) = 0 \text{ ' dir.} \quad (3.74)$$

(3.74) no.' lu denklemin karakteristik denklemi

$$K^4 - K^2 = 0 \quad (3.75)$$

olur. Buradan kökler,

$K_1=0$; $K_2=0$; $K_3=1$; $K_4=-1$ olarak bulunur.

Kökler dikkate alınarak (3.74) no.' lu denklemin çözümü

$$y(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^t + C_4 e^{-t} \quad (3.76)$$

olarak elde edilir.

(3.20) ve (3.69) no.' lu denklemler, (3.76) no.' lu denkleminde yerine konulursa, elde edilen çözüm ifadesi aşağıdaki gibi çıkar:

$$y(x) = C_1 + C_2 \ln(h_0 + \alpha x) + C_3 (h_0 + \alpha x) + \frac{C_4}{(h_0 + \alpha x)} \quad (3.77)$$

3.1.2.1.1 Lineer olarak değişen yük altındaki çökme

(3.20), (3.30), (3.69) ve (3.72) no.' lu denklemler dikkate alındığında, (3.73) no.' lu denklemin sağ tarafından

$$F(t) = \frac{12}{\alpha^6 Eb} e^t (\alpha^2 q_0 - \alpha \beta + \alpha \beta e^t) \quad (3.78)$$

ifadesi elde edilir (Romano, F., ve Zingone, G., 1992).

F(t) ifadesinden, diferansiyel denklemin çözümüne gelen terim ise aşağıdaki gibi çıkar:

$$y(x) = \frac{6}{\alpha^6 Eb} (\alpha^2 q_0 - \alpha \beta h_0) (h_0 + \alpha x) \ln(h_0 + \alpha x) + \frac{\beta}{\alpha^5 Eb} (h_0 + \alpha x)^2 \quad (3.79)$$

(3.77) ve (3.79) no.' lu denklemler dikkate alınarak, (3.68) no.' lu denklemin genel çözümü, bir başka bir ifadeyle elastik eğri denklemi

$$y(x) = C_1 + C_2 \ln(h_0 + \alpha x) + C_3 (h_0 + \alpha x) + \frac{C_4}{(h_0 + \alpha x)} + \frac{6}{\alpha^6 Eb} (\alpha^2 q_0 - \alpha \beta h_0) (h_0 + \alpha x) \ln(h_0 + \alpha x) + \frac{\beta}{\alpha^5 Eb} (h_0 + \alpha x)^2 \quad (3.80)$$

elde edilir.

3.1.2.1.2 Parabolik olarak değişen yük altındaki çökme

(3.20), (3.34), (3.69) ve (3.72) no.' lu denklemler dikkate alınarak, (3.73) no.' lu denklemin sağ tarafından elde edilen denklem aşağıdaki gibi çıkar:

$$F(t) = \frac{12}{\alpha^6 Eb} e^t \left[\alpha^2 q_0 - \alpha \beta h_0 + \gamma h_0^2 + (\alpha \beta - 2\gamma h_0) e^t + \gamma e^{2t} \right] \quad (3.81)$$

F(t) ifadesinden, diferansiyel denklemin çözümüne gelen terim

$$y(x) = \frac{6}{\alpha^6 Eb} (\alpha^2 q_0 + \gamma h_0^2 - \alpha \beta h_0) (h_0 + \alpha x) \ln(h_0 + \alpha x) + \frac{(\alpha \beta - 2\gamma h_0)}{\alpha^6 Eb} (h_0 + \alpha x)^2 + \frac{\gamma}{6\alpha^6 Eb} (h_0 + \alpha x)^3 \quad (3.82)$$

olarak bulunur.

(3.77) ve (3.82) no.' lu denklemler dikkate alınarak, (3.68) no.' lu denklemin genel çözümü ve başka bir ifadeyle elastik eğri denklemi

$$y(x) = C_1 + C_2 \ln(h_0 + \alpha x) + C_3 (h_0 + \alpha x) + \frac{C_4}{(h_0 + \alpha x)} + \frac{6}{\alpha^6 Eb} (\alpha^2 q_0 + \gamma h_0^2 - \alpha \beta h_0) (h_0 + \alpha x) \ln(h_0 + \alpha x) + \frac{(\alpha \beta - 2\gamma h_0)}{\alpha^6 Eb} (h_0 + \alpha x)^2 + \frac{\gamma}{6\alpha^6 Eb} (h_0 + \alpha x)^3 \quad (3.83)$$

elde edilir (Romano, F., ve Zingone, G., 1992).

3.1.2.2 Parabolik değişken h, b=sabit dikdörtken kesitli kirişler

Parabolik olarak değişen h, b=sabit kesitli kirişte h ve atalet momenti ifadeleri aşağıdaki gibi alınır:

$$h(x) = (h_0^{1/2} + \alpha x)^2 \quad (3.84)$$

$$J(x) = \frac{bh(x)^3}{12} = \frac{b(h_0^{1/2} + \alpha x)^6}{12} \quad (3.85)$$

(3.85) no.' lu denklemin 1. ve 2. türevleri alınırsa;

$$J'(x) = \frac{b\alpha}{2} (h_0^{1/2} + \alpha x)^5 \quad (3.86)$$

$$J''(x) = \frac{5b\alpha^2}{2} (h_0^{1/2} + \alpha x)^4 \quad (3.87)$$

elde edilir.

(3.85), (3.86) ve (3.87) no.' lu denklemler, (3.10) no.' lu eşitlikte yerine konulursa aşağıdaki ifade bulunur.

$$\frac{b}{12} (h_0^{1/2} + \alpha x)^6 y^{iv}(x) + b\alpha (h_0^{1/2} + \alpha x)^5 y'''(x) + \frac{5b}{2} \alpha^2 (h_0^{1/2} + \alpha x)^4 y''(x) = \frac{q(x)}{E} \quad (3.88)$$

Aşağıdaki değişken dönüşümü yapıлып, (3.88) no.' u denklemden yerine konursa

$$u = h_0^{1/2} + \alpha x \quad (3.89)$$

$$\frac{du}{dx} = \alpha \quad (3.90)$$

$$y'(x) = \alpha y'(u); y''(x) = \alpha^2 y''(u); y'''(x) = \alpha^3 y'''(u); y^{iv}(x) = \alpha^4 y^{iv}(u) \quad (3.91)$$

$$u^4 y^{iv}(u) + 12u^3 y'''(u) + 30u^2 y''(u) = \frac{12q(u)}{b\alpha^4 E u^2} \quad (3.92)$$

çıkar.

(3.20), (3.21), (3.22), (3.23) ve (3.24) no.' lu denklemler (3.92) no.' lu denklemden yerine konulduğunda bulunan ifade aşağıdaki gibidir:

$$y^{iv}(t) + 6y'''(t) + 5y''(t) - 12y'(t) = F(t) \quad (3.93)$$

Sağ tarafsız homojen denklem ise aşağıdaki gibi çıkar:

$$y^{iv}(t) + 6y'''(t) + 5y''(t) - 12y'(t) = 0 \quad (3.94)$$

(3.94) no.' lu denklemin karakteristik denklemi

$$K^4 + 6K^3 + 5K^2 - 12K = 0 \quad (3.95)$$

olur. Buradan kökler

$K_1=0$; $K_2=1$; $K_3=-3$; $K_4=4$ olarak bulunur.

Kökler dikkate alınarak, (3.94) no.' lu denklemin çözümü

$$y(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^{-3t} + C_4 e^{-4t} \quad (3.96)$$

elde edilir.

(3.20) ve (3.89) no.' lu denklemler, (3.96) no.' lu denklemde yerine konulursa elde edilen denklem aşağıdaki gibidir;

$$y(x) = C_1 + C_2 \ln(h_0^{1/2} + \alpha x) + \frac{C_3}{(h_0^{1/2} + \alpha x)^3} + \frac{C_4}{(h_0^{1/2} + \alpha x)^4} \quad (3.97)$$

3.1.2.2.1 Lineer olarak değişen yük altındaki çökme

(3.20), (3.30), (3.89) ve (3.92) no.' lu denklemler dikkate alınarak, (3.93) no.' lu denklemin sağ tarafından elde edilen denklem aşağıdaki gibi bulunur:

$$F(t) = \frac{12e^{-2t}}{\alpha^6 Eb} (\alpha q_0 - \alpha \beta h_0^{1/2} + \alpha \beta e^t) \quad (3.98)$$

F(t) ifadesinden, diferansiyel denklemin çözümüne gelen terim

$$y(x) = \frac{\alpha q_0 - \alpha \beta h_0^{1/2}}{\alpha^6 Eb (h_0^{1/2} + \alpha x)^2} + \frac{\alpha \beta}{\alpha^6 Eb (h_0^{1/2} + \alpha x)} \quad (3.99)$$

olur.

(3.97) ve (3.99) no.' lu denklemler dikkate alınarak, (3.88) no.' lu denklemin çözümü, bir başka bir ifadeyle elastik eğri denklemi

$$y(x) = C_1 + C_2 (h_0^{1/2} + \alpha x) + \frac{C_3}{(h_0^{1/2} + \alpha x)^3} + \frac{C_4}{(h_0^{1/2} + \alpha x)^4} + \frac{\alpha^2 q_0 - \alpha \beta h_0^{1/2}}{\alpha^6 Eb (h_0^{1/2} + \alpha x)^2} + \frac{\alpha \beta}{\alpha^6 Eb (h_0^{1/2} + \alpha x)} \quad (3.100)$$

elde edilir (Romano, F., ve Zingone, G., 1992).

3.1.2.2.2 Parabolik olarak değişen yük altındaki çökme

(3.20), (3.34), (3.89) ve (3.92) no.' lu denklemler dikkate alınarak, (3.93) no.' lu denklemin sağ tarafından

$$F(t) = \frac{12e^{-2t}}{\alpha^6 Eb} \left[\alpha^2 q_0 - \alpha \beta h_0^{1/2} + \gamma h_0 + (\alpha \beta - 2\gamma h_0^{1/2}) e^t + \gamma e^{2t} \right] \quad (3.101)$$

ifadesi elde edilir.

F(t) ifadesinden, diferansiyel denklemin çözümüne gelen terim ise aşağıdaki gibidir (Romano, F., ve Zingone, G., 1992):

$$y(x) = \frac{\alpha^2 q_0 - \alpha \beta h_0^{1/2} + \gamma h_0}{\alpha^6 E b (h_0^{1/2} + \alpha x)^2} + \frac{\alpha \beta - 2\gamma h_0^{1/2}}{\alpha^6 E b (h_0^{1/2} + \alpha x)} - \frac{\gamma}{\alpha^6 E b} \ln(h_0^{1/2} + \alpha x) \quad (3.102)$$

(3.97) ve (3.102) no.' lu denklemler dikkate alınarak, (3.88) no.' lu denklemin çözümü, bir başka ifadeyle elastik eğri denklemi

$$y(x) = C_1 + C_2 (h_0 + \alpha x) + \frac{C_3}{(h_0^{1/2} + \alpha x)^3} + \frac{C_4}{(h_0^{1/2} + \alpha x)^4} + \frac{\alpha^2 q_0 - \alpha \beta h_0^{1/2} + \gamma h_0}{\alpha^6 E b (h_0^{1/2} + \alpha x)^2} + \frac{\alpha \beta - 2\gamma h_0^{1/2}}{\alpha^6 E b (h_0^{1/2} + \alpha x)} - \frac{\gamma}{\alpha^6 E b} \ln(h_0^{1/2} + \alpha x) \quad (3.103)$$

olur (Romano, F., ve Zingone, G., 1992).

3.1.2.3 Lineer değişken b, h=sabit dikdörtken kesitli kirişler

Lineer olarak değişen b, h=sabit kesitli kirişte b ve atalet momenti ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$b(x) = b_0 + \alpha x \quad (3.104)$$

$$J(x) = \frac{h^3 b(x)}{12} \quad (3.105)$$

$$J(x) = \frac{h^3 (b_0 + \alpha x)}{12} \quad (3.106)$$

(3.106) no.' lu denklemin 1. ve 2. türevleri alınırsa

$$J'(x) = \frac{h^3 \alpha}{12} \quad (3.107)$$

$$J''(x) = 0 \quad (3.108)$$

elde edilir.

(3.106), (3.107) ve (3.108) no.' lu eşitlikler, (3.10) no.' lu denklemden yerine konulursa

$$\frac{(b_0 + \alpha x) h^3}{12} y^{iv}(x) + \frac{\alpha h^3}{6} y'''(x) = \frac{q(x)}{E} \quad (3.109)$$

ifadesi bulunur.

Aşağıdaki değişken dönüşümü yapıp (3.109) no.' lu denklemden yerine konulursa

$$u = b_0 + \alpha x \quad (3.110)$$

$$\frac{du}{dx} = \alpha \quad (3.111)$$

$$y'(x) = \alpha y'(u); y''(x) = \alpha^2 y''(u); y'''(x) = \alpha^3 y'''(u); y^{iv}(x) = \alpha^4 y^{iv}(u) \quad (3.112)$$

$$u^4 y^{iv}(u) + 2u^3 y'''(u) = \frac{12q(u)u^3}{\alpha^4 E h^3} \quad (3.113)$$

çıkar.

(3.20), (3.21), (3.22), (3.23), (3.24) no.' lu eşitlikler (3.113) no.' lu denklemde yerine konulursa aşağıdaki denklem bulunur.

$$y^{iv}(t) - 4y'''(t) + 5y''(t) - 2y'(t) = F(t) \quad (3.114)$$

(3.114) no.' lu denklemin sağ tarafsız homojen denklemi

$$y^{iv}(t) - 4y'''(t) + 5y''(t) - 2y'(t) = 0 \text{ ' dir.} \quad (3.115)$$

(3.115) no.' lu denklemin karakteristik denklemi ise

$$K^4 - 4K^3 + 5K^2 - 2K = 0 \quad (3.116)$$

olur.

Buradan kökler, $K_1=0$; $K_2=1$; $K_3=1$; $K_4=2$ olarak bulunur.

Kökler dikkate alınarak (3.115) no.' lu denklemin çözümü aşağıdaki gibi çıkar:

$$y(x) = C_1 + C_2(b_0 + \alpha x) + C_3(b_0 + \alpha x) \ln(b_0 + \alpha x) + C_4(b_0 + \alpha x)^2 \quad (3.117)$$

3.1.2.3.1 Lineer olarak değişen yük altındaki çökme

(3.20), (3.30), (3.110) ve (3.113) no.' lu denklemler dikkate alındığında (3.114) no.' lu denklemin sağ tarafından

$$F(t) = \frac{12}{\alpha^6 E h^3} e^{3t} (\alpha^2 q_0 - \alpha \beta b_0 + \alpha \beta e^t) \quad (3.118)$$

ifadesi elde edilir (Romano, F., ve Zingone, G., 1992).

F(t) ifadesinden, diferansiyel denklemin çözümüne gelen terim ise aşağıdaki gibidir (Romano, F., ve Zingone, G., 1992):

$$y(x) = \frac{1}{\alpha^6 E h^3} (\alpha^2 q_0 - \alpha \beta b_0) (b_0 + \alpha x)^3 + \frac{\alpha \beta}{6 \alpha^6 E h^3} \quad (3.119)$$

(3.117) ve (3.119) no.' lu denklemler dikkate alınarak, (3.109) no.' lu denklemin çözümü başka bir ifadeyle elastik eğri denklemi

$$y(x) = C_1 + C_2(b_0 + \alpha x) + C_3(b_0 + \alpha x) \ln(b_0 + \alpha x) + C_4(b_0 + \alpha x)^2 + \frac{1}{\alpha^6 E h^3} (\alpha^2 q_0 - \alpha \beta b_0)(b_0 + \alpha x)^3 + \frac{\alpha \beta}{6 \alpha^6 E h^3} (b_0 + \alpha x)^4 \quad (3.120)$$

olarak elde edilir (Romano, F., ve Zingone, G., 1992).

3.1.2.3.2 Parabolik olarak değişen yük altındaki çökme

(3.20), (3.34), (3.110) ve (3.113) no.' lu denklemler dikkate alınarak (3.114) no.' lu denklemin sağ tarafından elde edilen denklem aşağıdaki gibidir:

$$F(t) = \frac{12}{\alpha^6 E h^3} e^{3t} \left[\alpha^2 q_0 - \alpha \beta b_0 + \gamma b_0^2 + (\alpha \beta - 2\gamma b_0) e^t + \gamma e^{2t} \right] \quad (3.121)$$

F(t) ifadesinden, diferansiyel denklemin çözümüne gelen terim olarak

$$y(x) = \frac{1}{\alpha^6 E h^3} (\alpha^2 q_0 - \alpha \beta b_0 + \gamma b_0^2)(b_0 + \alpha x)^3 + \frac{1}{6 \alpha^6 E h^3} (\alpha \beta - 2\gamma b_0)(b_0 + \alpha x)^4 + \frac{\gamma}{20 \alpha^6 E h^3} (b_0 + \alpha x)^5 \quad (3.122)$$

ifadesi bulunur.

(3.117) ve (3.122) no.' lu denklemler dikkate alınarak, (3.109) no.' lu denklemin çözümü başka bir ifadeyle elastik eğri denklemi

$$y(x) = C_1 + C_2(b_0 + \alpha x) + C_3(b_0 + \alpha x) \ln(b_0 + \alpha x) + C_4(b_0 + \alpha x)^2 + \frac{1}{\alpha^6 E h^3} (\alpha^2 q_0 - \alpha \beta b_0 + \gamma b_0^2)(b_0 + \alpha x)^3 + \frac{1}{6 \alpha^6 E h^3} (\alpha \beta - 2\gamma b_0)(b_0 + \alpha x)^4 + \frac{\gamma}{20 \alpha^6 E h^3} (b_0 + \alpha x)^5 \quad (3.123)$$

elde edilir.

3.1.2.4 Parabolik değişken b, h=sabit dikdörtken kesitli kirişler

Parabolik olarak değişen b, h=sabit kesitli kirişte b ve atalet momenti ifadeleri aşağıdaki gibi alınır:

$$b(x) = (b_0^{1/2} + \alpha x)^2 \quad (3.124)$$

$$J(x) = \frac{h^3 b(x)}{12} \quad (3.125)$$

$$J(x) = \frac{h^3 (b_0^{1/2} + \alpha x)^2}{12} \quad (3.126)$$

(3.126) no.' lu denklemin 1. ve 2. türevleri alınırsa

$$J'(x) = \frac{2\alpha h^3 (b_0^{1/2} + \alpha x)}{12} \quad (3.127)$$

$$J''(x) = \frac{2\alpha^2 h^3}{12} \quad (3.128)$$

elde edilir.

(3.126), (3.127) ve (3.128) no.' lu denklemler (3.10) no.' lu denklemde yerine konulursa aşağıdaki ifade bulunur:

$$\frac{(b_0^{1/2} + \alpha x)^2 h^3}{12} y^{iv}(x) + \frac{4\alpha (b_0^{1/2} + \alpha x) h^3}{12} y'''(x) + \frac{2\alpha^2 h^3}{12} y''(x) = \frac{q(x)}{E} \quad (3.129)$$

Aşağıdaki değişken dönüşümü yapıp (3.129) no.' lu denklemde yerine konulursa aşağıdaki gibi olur:

$$u = b_0^{1/2} + \alpha x \quad (3.130)$$

$$\frac{du}{dx} = \alpha \quad (3.131)$$

$$y'(x) = \alpha y'(u); y''(x) = \alpha^2 y''(u); y'''(x) = \alpha^3 y'''(u); y^{iv}(x) = \alpha^4 y^{iv}(u) \quad (3.132)$$

$$u^4 y^{iv}(u) + 4u^3 y'''(u) + 2y''(u) = \frac{12q(u)u^2}{\alpha^4 E h^3} \quad (3.133)$$

(3.20), (3.21), (3.22) (3.23) ve (3.24) no.' lu denklemler (3.133) no.' lu denklemde yerine konulduğunda

$$y^{iv}(t) - 2y'''(t) + y''(t) = F(t) \quad (3.134)$$

ifadesi çıkar. (3.134) no.' lu denklemin sağ tarafsız homojen denklemi

$$y^{iv}(t) - 2y'''(t) + y''(t) = 0 \text{ ' dır.} \quad (3.135)$$

Karakteristik denklem ise

$$K^4 - 2K^3 + K^2 = 0 \quad (3.136)$$

olur.

Buradan kökler, $K_1=0$, $K_2=0$, $K_3=1$, $K_4=1$ olarak bulunur.

Kökler dikkate alınarak (3.135) no. denklemin çözümü olarak

$$y(x) = C_1 + C_2 \ln(b_0^{1/2} + \alpha x) + C_3(b_0 + \alpha x) + C_4(b_0 + \alpha x) \ln(b_0 + \alpha x) \quad (3.137)$$

ifadesi elde edilir.

3.2 Kesmenin çökmeye etkisi

Bu bölümde kesme kuvvetinin tek başına elastik eğri üzerindeki etkisinin belirlenmesine ve değişken dairesel ve dikdörtgen kesitli kirişin düzgün yayılı yük ile noktasal yük altındaki çökme ifadesinin elde edilmesine değinilecektir.

3.2.1 Düzgün yayılı yük altında çökme

Eğilme momenti ve kesme kuvvetinin beraber ele alındığı durumda elastik eğri ifadesi (3.3) no.' lu denklem ile açıklanmıştı. Kesme kuvvetinin tek başına dikkate alındığı durumda düzgün yayılı yük altında (3.3) no.' lu denklem aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{k_y}{GF} \frac{dT_y}{dx} = -\frac{k_y}{GF} q_0 \quad (3.138)$$

3.2.1.1 Lineer olarak değişen dairesel kesitli kirişler

Lineer olarak değişen dairesel kesitli kirişte yarı çap ifadesi (3.11) no.' lu denklemdeki gibi alınabilir:

$$R(x) = R_0 + \alpha x$$

Kesit alanı,

$$F = \pi(R_0 + \alpha x)^2 \quad (3.139)$$

olur.

Kesit alanı ifadesi (3.138) no.' lu denklemde yerine konulursa

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{k_y q_0}{G\pi(R_0 + \alpha x)^2} \quad (3.140)$$

ifadesi elde edilir.

(3.140) no.' lu denklem bir kez integre edilirse,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_y q_0}{G\pi\alpha(R_0 + \alpha x)} + A \quad (3.141)$$

bulunur. (3.140) ifadesi ikinci kez integre edilirse, lineer değişken dairesel kesitli kirişte çökme ifadesi aşığıdaki gibi çıkar.

$$y = \frac{k_y q_0}{G\pi\alpha^2} \ln(R_0 + \alpha x) + Ax + B \quad (3.142)$$

3.2.1.2 Lineer olarak değişen dikdörtgen kesitli kirişler

Lineer olarak değişen h, b=sabit kesitli kirişte h ifadesi (3.64) no.' lu denklemdeki gibi alınabilir:

$$h(x) = h_0 + \alpha x$$

Kesit alanı,

$$F = b(h_0 + \alpha x) \quad (3.143)$$

çıkar. Kesit alanı ifadesi (3.138) no.' lu denklemde yerine konulursa,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{k_y q_0}{Gb(h_0 + \alpha x)} \quad (3.144)$$

elde edilir. (3.144) no.' lu denklem bir kez integre edilirse,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k_y q_0}{Gb\alpha} \ln(h_0 + \alpha x) + A \quad (3.145)$$

çıkar. (3.145) ifadesi ikinci kez integre edilirse, lineer değişken dikdörtgen kesitli kirişte çökme ifadesi aşığıdaki gibi olur.

$$y = -\frac{k_y q_0}{Gb\alpha^2} [\ln(h_0 + \alpha x)(h_0 + \alpha x) - (h_0 + \alpha x)] + Ax + B \quad (3.146)$$

3.2.2 Noktasal yük altında çökme

Noktasal tük altında değişken kesitli kirişe ait elastik eğri denkleminin 1. mertebede diferansiyel denklemi aşığıdaki gibidir (Timoshenko, S., ve Gere, J.M., 1984):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Pk_y}{FG} \quad (3.147)$$

3.2.2.1 Lineer olarak değişken dairesel kesitli kirişler

Lineer olarak değişen dairesel kesitli kirişte yarı çap ifadesi (3.11) no.' lu denklemdeki gibi alınabilir:

$$R(x) = R_0 + \alpha x$$

Kesit alanı (3.139) no.' lu denklemdeki gibi olur:

$$F = \pi(R_0 + \alpha x)^2$$

Kesit alanı ifadesi, (3.147) no.' lu denklemde yerine konulursa,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Pk_y}{G\pi(R_0 + \alpha x)^2} \quad (3.148)$$

elde edilir. (3.148) no.' lu denklem bir kez integre edilirse değişken dairesel kesitli kirişte çökme ifadesi aşağıdaki gibi çıkar:

$$y = -\frac{Pk_y}{G\pi(R_0 + \alpha x)} + A \quad (3.149)$$

3.2.2.2 Lineer olarak değişen dikdörtgen kesitli kirişler

Lineer olarak değişen h, b=sabit kesitli kirişte h ifadesi (3.64) no.' lu denklemdeki gibi alınır.

$$h(x) = h_0 + \alpha x$$

Kesit alanı (3.143) no.' lu denklemdeki gibi olur.

$$F = b(h_0 + \alpha x)$$

Kesit alanı ifadesi, (3.147) no.' lu denklemde yerine konursa,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Pk_y}{Gb(h_0 + \alpha x)} \quad (3.150)$$

elde edilir. (3.150) no.' lu denklem bir kez integre edilirse, değişken dikdörtgen kesitli kirişte çökme ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$y = \frac{Pk_y}{Gb\alpha} \ln(h_0 + \alpha x) + A \quad (3.151)$$

3.2.3 k_y katsayısının hesaplanması

Kesme kuvvetinin elastik eğri üzerinde etkisi incelenirken denklemde yer alan k_y katsayısı, kesitte kayma gerilmesi dağılışı ile ilgili olup, kesidin geometrisine bağlıdır. Kayma gerilmesi ifadesi gerçekte kesme kuvveti ve eğilme momenti etkilerinin toplamı olup, h değişen, b =sabit dikdörtgen kesitli bir kirişte aşağıdaki gibi yazılabilir (Timoshenko, S., ve Gere, J.M., 1984):

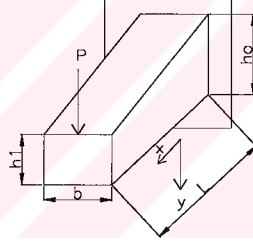
$$\tau = \frac{PQ}{Jb} + \frac{Mh}{4J} \left(1 - \frac{Qh}{J}\right) \frac{dh}{dx} \quad (3.152)$$

Burada, P kuvvet, J atalet momenti, M eğilme momenti, b kesidin genişliğidir. Q ifadesi ise aşağıdaki gibidir (Timoshenko, S., ve Gere, J.M., 1984):

$$Q = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \quad (3.153)$$

Bu bölümde kayma gerilmesi hesabındaki eğilme momentinin dikkate alındığı ve de alınmadığı durumlarda karşılaştırmalı çökme ifadeleri elde edilmeye çalışılacaktır.

3.2.3.1 Kesme kuvvetinin tek başına kayma gerilmesi üzerine etkisi



Şekil 3.3 Noktasal yük altında lineer değişken dikdörtgen kesitli konsol kiriş

Şekil 3.3' deki lineer olarak değişen h , b =sabit kesitli kirişte h ifadesi (3.64) no.' lu denklemdeki gibidir:

$$h(x) = h_0 + \alpha x$$

Kirişin kesit alanı (3.143) no.' lu denklemdeki gibidir:

$$F = b(h_0 + \alpha x)$$

Şekil 3.3' deki kirişe ait elastik eğrinin elde edilebilmesi için (3.151) no.' lu denklem kullanılır:

$$y = \frac{Pk_y}{Gb\alpha} \ln(h_0 + \alpha x) + A$$

Sınır şartı, $x=0$ ' da $y=0$ yazılarak,

$$0 = \frac{Pk_y}{Gb\alpha} \ln(h_0) + A \quad (3.154)$$

$$A = -\frac{Pk_y}{Gb\alpha} \ln(h_0) \quad (3.155)$$

olarak bulunur. Buradan kirişin elastik eğri denklemi aşağıdaki gibi çıkar:

$$y = \frac{Pk_y}{Gb\alpha} \ln(h_0 + \alpha x) - \frac{Pk_y}{Gb\alpha} \ln(h_0)$$

$$y = \frac{Pk_y}{Gb\alpha} [\ln(h_0 + \alpha x) - \ln h_0] \quad (3.156)$$

$x=0$ ' da $h=h_0$, $x=L$ ' de $h=h_1$ olmak üzere $h_0=2h_1$ kabulü yapılırsa,

$$h_1 = h_0 + \alpha L$$

$$h_1 = 2h_1 + \alpha L$$

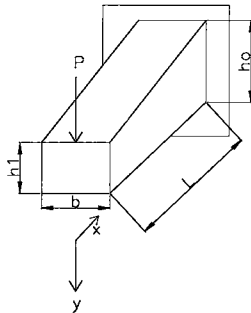
$$-h_1 = \alpha L$$

$$\alpha = -\frac{h_1}{L} \quad (3.157)$$

olur. P kuvvetinin etkidiği $x=L$ noktası için α ve h_0 ifadeleri (3.156) no.' lu denklemde yerine konulursa elastik eğri denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$y = \frac{PLk_y}{Gbh_1} [\ln 2h_1 - \ln h_1] \quad (3.158)$$

3.2.3.2 Kesme kuvveti ve eğilme momentinin kesme gerilmesi üzerine etkisi



Şekil 3.4 Noktasal yük altında lineer değişken dikdörtgen kesitli konsol kiriş

Şekil 3.4' deki kiriş için kayma gerilmesi ifadesi (3.152) no.' lu denklemdeki gibidir:

$$\tau = \frac{PQ}{Jb} + \frac{Mh}{4J} \left(1 - \frac{Qh}{J}\right) \frac{dh}{dx}$$

$$Q = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$x=0$ ' da $h=h_1$, $x=L$ ' de $h=h_0$ olmak üzere h ifadesi aşağıdaki gibi alınır:

$$h(x) = h_1 + \alpha x \quad (3.159)$$

Atalet momenti ifadesi (3.65) no.' lu denklemdeki gibi olur:

$$J(x) = \frac{b(h_1 + \alpha x)^3}{12}$$

Eğilme momenti, $M=Px$ ' dir. (3.160)

$$\frac{dh}{dx} = \frac{(h_1 + \alpha x) - h_1}{L} \quad (3.161)$$

(3.153), (3.159), (3.160) ve (3.161) no.' lu denklemler, (3.152) no.' lu denklemde yerine konulursa,

$$\tau = \frac{P \frac{b}{2} \left[\frac{(h_1 + \alpha x)^2}{4} - y^2 \right]}{b^2 \frac{(h_1 + \alpha x)^3}{12}} + \frac{Px(h_1 + \alpha x)}{4b \frac{(h_1 + \alpha x)^3}{12}} \left[1 - \frac{\frac{b(h_1 + \alpha x)}{2} \left[\frac{(h_1 + \alpha x)^2}{4} - y^2 \right]}{b \frac{(h_1 + \alpha x)^3}{12}} \right] \alpha \quad (3.162)$$

kesme gerilmesi ifadesi elde edilir. Kesme gerilmesi ve kesme kuvvetinin sebep olduğu çökme arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir:

$$\frac{1}{2} P y_T = \frac{b}{2G} \int_0^L \int_{\frac{(h_1 + \alpha x)}{2}}^{\frac{(h_1 + \alpha x)}{2}} \tau^2 dx dy \quad (3.163)$$

İntegrasyon işlemi sonrası y_T ifadesi olarak

$$y_T = \frac{b}{G} \left[\begin{aligned} & \frac{3PL(h_1 + \alpha x)(L^2 \alpha^2 + 3L\alpha h_1 + 3h_1^2)}{4b^2 h_1 (h_1 + L\alpha)^3} \\ & - \frac{3FL(h_1 + \alpha x)^3 (L^4 \alpha^4 + 5L^3 \alpha^3 h_1 + 10L^2 \alpha^2 h_1^2 + 10L\alpha h_1^3 + 10h_1^4)}{20b^2 h_1^3 (h_1 + \alpha L)^5} \\ & + \frac{9PL(h_1 + \alpha x)^5 (3L^6 \alpha^6 + 21L^5 \alpha^5 h_1 + 63L^4 \alpha^4 h_1^2 + 105L^3 \alpha^3 h_1^3 + 35L^2 \alpha^2 h_1^4 + 35L\alpha h_1^5 + 35h_1^6)}{700b^2 h_1^5 (h_1 + \alpha L)^7} \\ & + \frac{105L^2 \alpha^2 h_1^4 + 35L\alpha h_1^5 + 35h_1^6}{700b^2 h_1^5 (h_1 + \alpha L)^7} \end{aligned} \right] \quad (3.164)$$

elde edilir.

$x=0$ ' da $h=h_1$, $x=L$ ' de $h=h_0$ olmak üzere $h_0=2h_1$ kabulü yapılırsa,

$$\begin{aligned} h_0 &= h_1 + \alpha L \\ 2h_1 &= h_1 + \alpha L \\ h_1 &= \alpha L \\ \alpha &= \frac{h_1}{L} \end{aligned} \quad (3.165)$$

olur. P kuvvetinin etkidiği $x=0$ noktası için α ifadesi (3.164) no.' lu denklemde yerine konulursa elastik eğri denklemi aşağıdaki gibi çıkar:

$$y_T = \frac{46983}{89600} \frac{FL}{Gb h_1} \quad (3.166)$$

Eğilme momentinin dikkate alınmadığı durumda elde edilen (3.158) no.' lu denklemi ve dikkate alındığı durumda bulunan (3.166) no.' lu denklemi karşılaştırabilmek için $h_1=100\text{mm}$ kabulü yapalım. (3.158) no.' lu denklemdeki k_y çarpanı $6/5$ olarak alalım (İnan, M., 1967). Bu durumda (3.158) no.' lu denklem aşağıdaki gibi çıkar:

$$y_T = 0.00828 \frac{FL}{Gb}$$

$h_1=100\text{mm}$, (3.165) no.' lu denklemde yerine konulursa

$$y_T = 0.00525 \frac{FL}{Gb}$$

elde edilir. Bu iki denklem birbiriyle kıyaslandığında görülmektedir ki kesme etkisinden gelen çökme, kayma gerilmesi hesabında eğilme momenti dikkate alması durumunda azalmaktadır.

Kesme kuvvetinin çökmeye etkisinin incelendiği bölüm 3.2' de, kayma gerilmesi hesabında yer alan eğilme momenti etkisi dikkate alınmamış olup, sayısal örneklerde k_y değerleri (İnan, M., 1967) isimli kaynağın 299 no.' lu sayfasındaki tablodan alınmıştır.

3.3 Eğilme momenti ve kesme kuvvetinin birlikte çökme üzerine etkisi

(3.1) no.' lu denklemde, eğilme momenti ve kesme kuvvetinin y ekseninde sebep olduğu yer değiştirme ifade edilmişti. Bölüm 3.1' de eğilme momentinin tek başına çökmeye etkisi, bölüm 3.2' de de kesme kuvvetinin tek başına çökmeye etkisi incelendi. Bu bölümde ise eğilme momenti ve kesme kuvvetinin, düzgün yayılı yük altında lineer dairesel kesitli kirişin çökmesi üzerindeki etkisi incelenecektir.

Eğilme momentinden kaynaklanan yer değiştirme ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$y = C_1 + C_2(R_0 + \alpha x) + \frac{C_3}{(R_0 + \alpha x)} + \frac{C_4}{(R_0 + \alpha x)^2} - \frac{2}{\pi \alpha^5 E} (\alpha q_0) \ln(R_0 + \alpha x) \quad (3.167)$$

Kesme kuvvetinin sebep olduğu yer değiştirme (3.142) no.' lu denklemdeki gibidir.

$$y = \frac{k_y q_0}{G \pi \alpha^2} \ln(R_0 + \alpha x) + Ax + B$$

(3.152) ve (3.142) no' lu denklemler, superpozisyon ilkesine göre toplandığı takdirde, yayılı yük altında lineer değişken dairesel kesitli kirişin çökme ifadesi, başka bir ifadeyle elastik eğri denklemi aşağıdaki gibi olur:

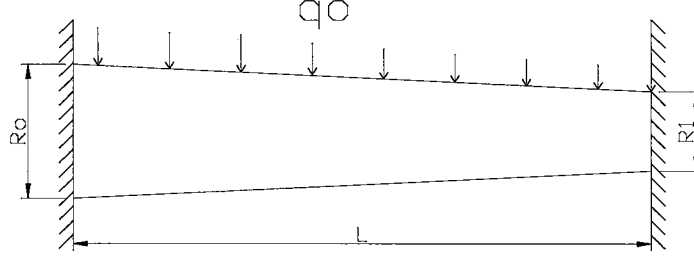
$$y = C_1 + C_2(R_0 + \alpha x) + \frac{C_3}{(R_0 + \alpha x)} + \frac{C_4}{(R_0 + \alpha x)^2} - \frac{2}{\pi \alpha^5 E} (\alpha q_0) \ln(R_0 + \alpha x) \quad (3.168)$$

$$+ \frac{k_y q_0}{G \pi \alpha^2} \ln(R_0 + \alpha x) + Ax + B$$

4. SAYISAL UYGULAMALAR

Burada, Bölüm 3' de verilen değişken kesitli kirişlere ait temel elastik eğri ifadelerinin sayısal uygulamaları yer alacaktır.

4.1 Lineer değişken yayılı yük altında lineer değişken dairesel kesitli ankastre kiriş



Şekil 4.1 Lineer değişken yayılı yük altında lineer değişken dairesel kesitli ankastre kiriş

4.1 no.' lu uygulamada yalnızca eğilme momentinin etkisi gözönüne alınıp, kullanılacak büyüklükler aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$L=5000\text{mm}, E=200,000 \text{ MPa}$$

$$R_0=200\text{mm}, R_1=100\text{mm}, \text{yarıçap değişim katsayısı } \alpha=-0.02$$

$$x=0' \text{ da } q_0=80 \text{ Nmm}^{-1}, x=5000\text{mm}' \text{ de } q_0=30 \text{ Nmm}^{-1},$$

$$\text{Yayıllı yük değişim katsayısı } \beta=-0.01 \text{ Nmm}^{-2}$$

Kirişe diferansiyel denklemini aşağıdaki gibi olur:

$$y(x) = C_1 + C_2(R_0 + \alpha x) + \frac{C_3}{R_0 + \alpha x} + \frac{C_4}{(R_0 + \alpha x)^2} - \frac{2}{\pi \alpha^5 E} (\alpha q_0 - \beta R_0) \ln(R_0 + \alpha x) \\ + \frac{2\beta}{3\pi \alpha^5 E} (R_0 + \alpha x) \ln(R_0 + \alpha x)$$

Buradaki C_1, C_2, C_3 ve C_4 sabitlerinin bulunabilmesi gerekli sınır şartları $y(0)=0, y'(0)=0, y(L)=0$ ve $y'(L)=0$ olarak yazılır.

$y(0)=0$ sınır şartı için diferansiyel denklem,

$$C_1 + C_2 R_0 + \frac{C_3}{R_0} + \frac{C_4}{R_0^2} = \frac{2}{\pi \alpha^5 E} (\alpha q_0 - \beta R_0) \ln R_0 - \frac{2\beta}{3\pi \alpha^5 E} R_0 \ln R_0 \quad (4.1)$$

olur.

$y'(0)=0$ sınır şartı için elde edilen diferansiyel denklem,

$$C_2 - \frac{C_3}{R_0^2} - \frac{2C_4}{R_0^3} = \frac{2}{\pi\alpha^5 ER_0} (\alpha q_0 - \beta R_0) - \frac{2\beta}{3\pi\alpha^5 E} (\ln R_0 + 1) \quad (4.2)$$

şeklindedir.

$y(L)=0$ sınır şartı için diferansiyel denklem,

$$C_1 + C_2 R_1 + \frac{C_3}{R_1} + \frac{C_4}{R_1^2} = \frac{2}{\pi\alpha^5 E} (\alpha q_0 - \beta R_0) \ln R_1 - \frac{2\beta}{3\pi\alpha^5 E} R_1 \ln R_1 \text{ haline gelir.} \quad (4.3)$$

$y'(L)=0$ sınır şartı için diferansiyel denklem,

$$C_2 - \frac{C_3}{R_1^2} - \frac{2C_4}{R_1^3} = \frac{2}{\pi\alpha^5 ER_1} (\alpha q_0 - \beta R_0) - \frac{2\beta}{3\pi\alpha^5 E} (\ln R_1 + 1) \quad (4.4)$$

haline gelir.

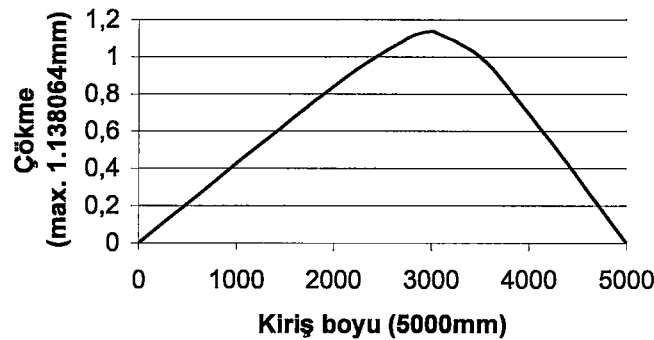
Sayısal değerler, (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.4) no.' lu denklemlerde yerine konulursa

$C_1 = -737.76$, $C_2 = -23.55$, $C_3 = -43856$, $C_4 = 1702400$ olarak elde edilir.

Bulunan 4 sabit, diferansiyel denklemde yerine konulduğunda elde edilen denklem aşağıdaki gibidir:

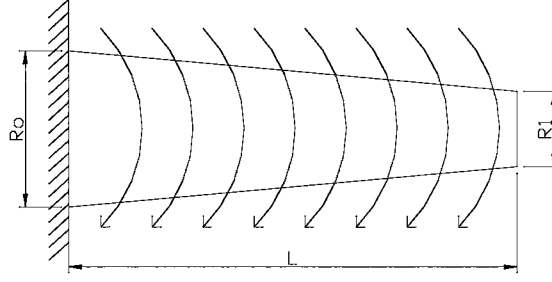
$$y(x) = -737.76 - 23.55(R_0 + \alpha x) - \frac{43856}{R_0 + \alpha x} + \frac{1702400}{(R_0 + \alpha x)^2} - \frac{2}{\pi\alpha^5 E} (\alpha q_0 - \beta R_0) \ln(R_0 + \alpha x) + \frac{2\beta}{3\pi\alpha^5 E} (R_0 + \alpha x) \ln(R_0 + \alpha x) \quad (4.5)$$

(4.5) no.' lu denklem kullanılarak elde edilen, yayılı yük altında 5000mm uzunluğundaki kirişin y eksenindeki çökmesi, Şekil 4.2' de gösterilmiştir.



Şekil 4.2 Lineer yayılı yük altında lineer değişken dairesel kesitli ankastre kirişin çökmesi

4.2 Düzgün yayılı moment altında lineer değişken dairesel kesitli konsol kiriş



Şekil 4.3 Düzgün yayılı moment altında lineer değişken dairesel kesitli basit konsol kiriş

4.2 no.' lu uygulamada yalnızca eğilme momentinin etkisi gözönüne alınıp, kullanılacak büyüklükler aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$L=5000\text{mm}, E=200,000 \text{ MPa}$$

$$R_0=200\text{mm}, R_1=100\text{mm}, \text{yarıçap değişim katsayısı } \alpha=-0.02$$

$$m=25000 \text{ kNmm}$$

Şekil 4.3' deki kiriş için (3.39) no.' lu denklemdeki ifade yazılabilir:

$$EJ_z(x)y''(x) = mx - ml$$

Yarıçap ve atalet momenti ifadesi, (3.39) no.' lu denklemde yerine konulursa, (3.41) no.' lu denklem elde edilir:

$$y''(x) = \frac{4}{\pi E} \frac{(mx - ml)}{(R_0 + \alpha x)^4}$$

(3.41) no.' lu denklemin integrali alınarak

$$y'(x) = -\frac{4m}{3\alpha\pi E} \left[\frac{x}{(R_0 + \alpha x)^3} + \frac{1}{2\alpha(R_0 + \alpha x)^2} \right] + \frac{4ml}{3\alpha\pi E(R_0 + \alpha x)^3} + C_1$$

ifadesi bulunur. Bir kez daha integrali alınırsa (3.44) no.' lu denklemdeki gibi kirişe ait elastik eğri ifadesi

$$y(x) = -\frac{4m}{3\alpha\pi E} \left[-\frac{x}{2\alpha(R_0 + \alpha x)^2} - \frac{1}{\alpha^2(R_0 + \alpha x)} \right] - \frac{4ml}{6\alpha^2\pi E(R_0 + \alpha x)^2} + C_1x + C_2$$

olarak elde edilir.

C_1 ve C_2 sabitlerinin bulunabilmesi için gerekli 2 adet sınır şartı $y(0)=0$, $y'(0)=0$ ' dır. Sınır şartları uygulanarak sırası ile

$$C_1 = \frac{4m}{6\pi E \alpha^2 R_0^2} - \frac{4mL}{3\pi E \alpha R_0^3} \quad (4.6)$$

$$C_2 = \frac{4mL}{6\alpha^2 R_0^2 \pi E} - \frac{4m}{3\alpha^3 R_0 \pi E} \quad (4.7)$$

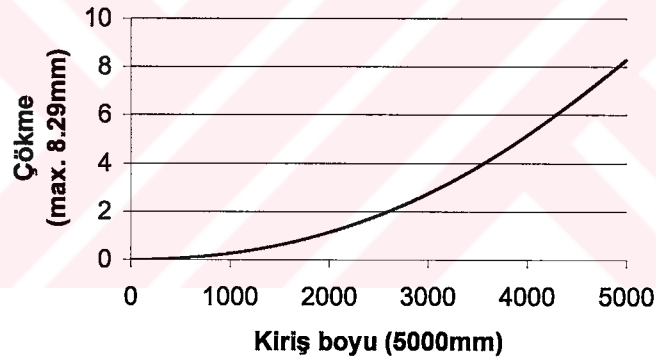
olarak bulunur.

C_1 ve C_2 sabitleri, elastik eğri denkleminde yerine konulursa,

$$y(x) = -\frac{4m}{3\alpha\pi E} \left[-\frac{x}{2\alpha(R_0 + \alpha x)^2} - \frac{1}{\alpha^2(R_0 + \alpha x)} \right] - \frac{4ml}{6\alpha^2\pi E(R_0 + \alpha x)^2} \quad (4.8)$$

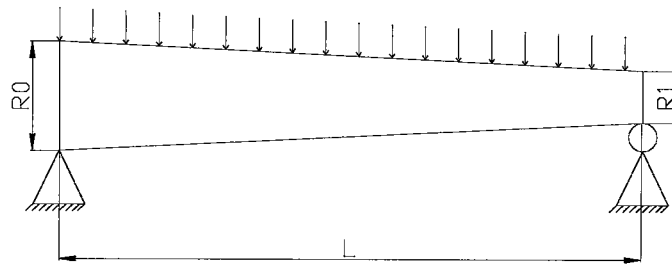
$$+ \left[\frac{4m}{6\pi E \alpha^2 R_0^2} - \frac{4mL}{3\pi E \alpha R_0^3} \right] x + \frac{4mL}{6\alpha^2 R_0^2 \pi E} - \frac{4m}{3\alpha^3 R_0 \pi E}$$

olarak tam denklem elde edilir. (4.8) no.' lu denklem kullanılarak elde edilen, yayılı moment altında 5000mm uzunluğundaki kirişin y eksenindeki çökmesi, Şekil 4.4 no.' lu tabloda gösterilmiştir.



Şekil 4.4 Düzgün yayılı moment altında lineer değişken dairesel kesitli konsol kirişin çökmesi

4.3 Düzgün yayılı yük altında lineer değişken dairesel kesitli basit mesnetli kiriş



Şekil 4.5 Düzgün yayılı yük altında lineer değişken dairesel kesitli basit mesnetli kiriş

4.3 no.' lu uygulamada yalnızca kesme kuvvetinin etkisi gözönüne alınıp, kullanılacak büyüklükler aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$L=5000\text{mm}, G=76923 \text{ MPa}$$

$$R_0=200\text{mm}, \text{yarıçap değişim katsayısı } \alpha_1=-0,01, \alpha_2=-0,015, \alpha_3=-0,02, \alpha_4=-0,025,$$

$$q_0=1000 \text{ Nmm}^{-1}, k_y=1.18$$

Burada düzgün yayılı yük altında lineer değişken dairesel kesitli basit mesnet kiriş için 4 farklı α değerinde çökmesi incelenecektir.

Şekil 4.5' deki kiriş için (3.142) no.' lu denklem kullanılır.

$$y = \frac{k_y q_0}{G \pi \alpha^2} \ln(R_0 + \alpha x) + Ax + B$$

A ve B sabitlerinin bulunabilmesi için gerekli 2 adet sınır şartları $y(0)=0$ ve $y(L)=0$ kullanılarak sırasıyla elde edilen A ve B sabitleri aşağıdaki gibi olur:

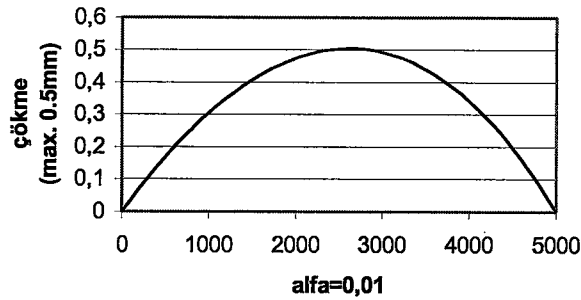
$$A = \frac{k_y q_0}{G \pi \alpha^2} (\ln R_0 - \ln R_1) \quad (4.9)$$

$$B = -\frac{k_y q_0}{G \pi \alpha^2} \ln R_0 \quad (4.10)$$

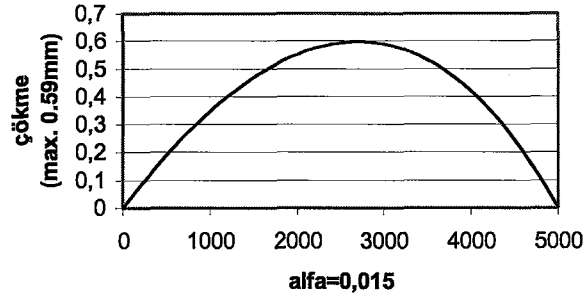
A ve B sabitleri, diferansiyel denklemde yerine konulduğunda

$$y = \frac{k_y q_0}{G \pi \alpha^2} \ln(R_0 + \alpha x) + \frac{k_y q_0}{G \pi \alpha^2 L} (\ln R_0 - \ln R_1) x - \frac{k_y q_0}{G \pi \alpha^2} \ln R_0 \quad (4.11)$$

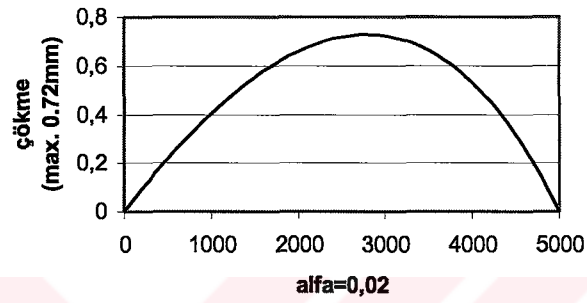
elde edilir. (4.11) no.' lu denklem kullanılarak, düzgün yayılı yük altında 5000mm uzunluğundaki değişken dairesel kesitli kirişin 4 farklı yarıçap değişim katsayısına göre y eksenindeki çökme değerleri Şekil 4.6 a, b, c ve d' de gösterilmiştir.



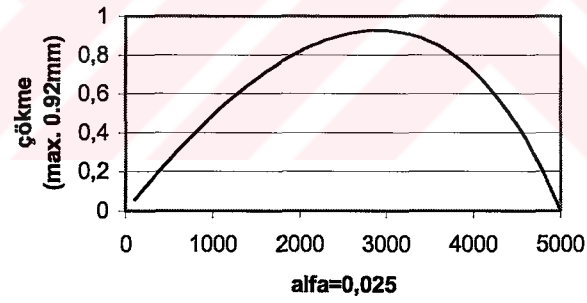
Şekil 4.6 a



Şekil 4.6 b



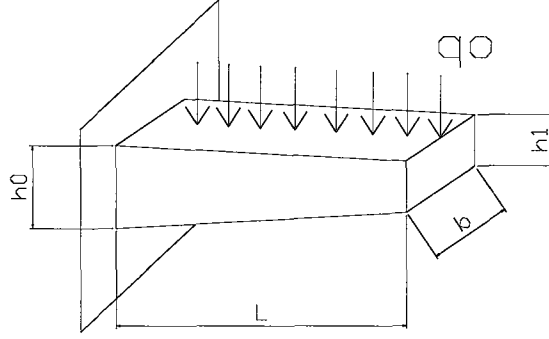
Şekil 4.6 c



Şekil 4.6 d

Şekil 4.6 a, b, c, d Düzgün yayılı yük altında lineer değişken dairesel kesitli basit mesnetli kirişin 4 farklı α değeri için çökmesi

4.4 Düzgün yayılı yük altında lineer değişken dikdörtgen kesitli konsol kiriş



Şekil 4.7 Düzgün yayılı yük altında lineer değişken dikdörtgen kesitli konsol kiriş

4.4 no.' lu uygulamada yalnızca kesme kuvvetinin etkisi gözönüne alınıp, kullanılacak büyüklükler aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$L=5000\text{mm}, G=76923 \text{ MPa}$$

$$h_0=200\text{mm}, h_1=100\text{mm}, \text{ boy değişim katsayısı } \alpha_1 = -0.02$$

$$q_0=80 \text{ Nmm}^{-1}, k_y=1.20$$

Şekil 4.7' deki kiriş için (3.146) no.' lu denklem kullanılır:

$$y = -\frac{k_y q_0}{Gb\alpha^2} [\ln(h_0 + \alpha x)(h_0 + \alpha x) - (h_0 + \alpha x)] + Ax + B$$

A ve B sabitlerinin bulunabilmesi için gerekli 2 adet sınır şartları $y(0)=0$, $y'(0)=0$ kullanılarak sırası ile

$$A = \frac{k_y q_0}{Gb\alpha} \ln h_0 \quad (4.12)$$

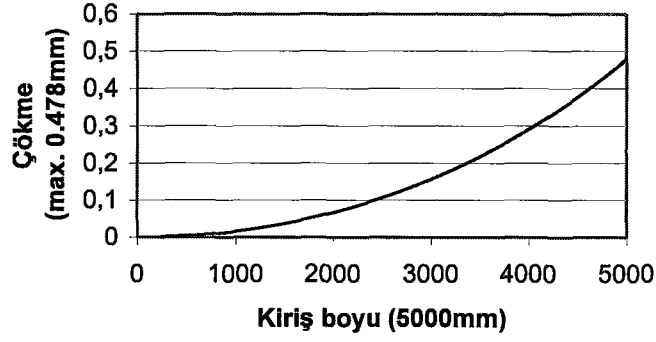
$$B = \frac{k_y q_0}{Gb\alpha^2} (h_0 \ln h_0 - h_0) \quad (4.13)$$

bulunur.

A ve B sabitleri, diferansiyel denklemde yerine konulursa, kirişe ait elastik eğri denklemini aşağıdaki çıkar:

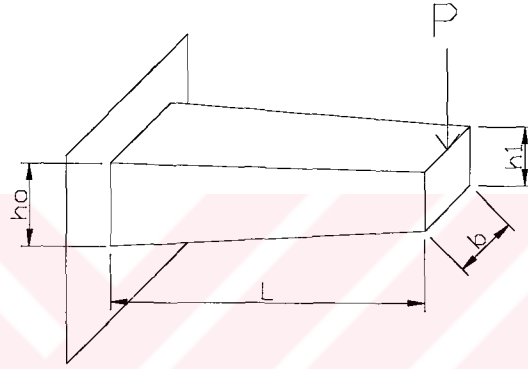
$$y = -\frac{k_y q_0}{Gb\alpha^2} [(h_0 + \alpha x) \ln(h_0 + \alpha x) - (h_0 + \alpha x)] + \left[\frac{k_y q_0}{Gb\alpha} \ln h_0 \right] x + \frac{k_y q_0}{Gb\alpha^2} (h_0 \ln h_0 - h_0) \quad (4.14)$$

(4.14) no.' lu denklem kullanılarak elde edilen, düzgün yayılı yük altında 5000mm uzunluğundaki kirişin y eksenindeki çökmesi, Şekil 4.8' de gösterilmiştir.



Şekil 4.8 Düzgün yayılı yük altında lineer değişken dikdörtgen kesitli konsol kirişin çökmesi

4.5 Noktasal yük altında lineer değişken dikdörtgen kesitli konsol kiriş



Şekil 4.9 Noktasal yük altında lineer değişken dikdörtgen kesitli konsol kiriş

4.5 no.' lu uygulamada yalnızca kesme kuvvetinin etkisi gözönüne alınıp, kullanılacak büyüklükler aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$L=5000\text{mm}, G=76923 \text{ MPa}$$

$$h_0=200\text{mm}, h_1=100\text{mm}, \text{ boy değişim katsayısı } \alpha_1= -0.02$$

$$P=5000 \text{ N}, k_y=1.20$$

Şekil 4.9' deki kiriş için (3.151) no.' lu denklem kullanılır:

$$y = \frac{k_y P}{Gb\alpha} \ln(h_0 + \alpha x) + A$$

A sabitinin bulunabilmesi için gerekli sınır şartı $y(0)=0$ kullanılarak

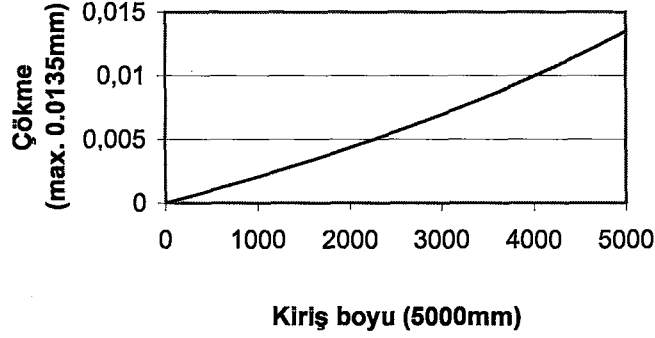
$$A = -\frac{k_y P}{Gb} \ln h_0 \quad (4.15)$$

bulunur.

A sabiti, diferansiyel denklemde yerine konulduğunda, kirişin elde edilen elastik eğri denklemi aşağıdaki gibi bulunur:

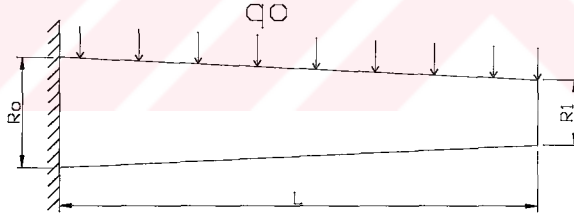
$$y = \frac{k_y P}{Gb\alpha} [\ln(h_0 + \alpha x) - \ln h_0] \quad (4.16)$$

(4.16) no.' lu denklem kullanılarak elde edilen, noktasal yük altında 5000mm uzunluğundaki kirişin y eksenindeki çökmesi, Şekil 4.10' da gösterilmiştir.



Şekil 4.10 Noktasal yük altında lineer değişken dikdörtgen kesitli konsol kirişin çökmesi

4.6 Düzgün yayılı yük altında lineer değişken dairesel kesitli konsol kiriş



Şekil 4.11 Düzgün yayılı yük altında lineer değişken dairesel kesitli konsol kiriş

4.5 no.' lu uygulamada eğilme momenti ve kesme kuvvetinin etkisi birlikte gözönüne alınıp, kullanılacak büyüklükler aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$L=5000\text{mm}, E=200,000 \text{ MPa}, G=76923 \text{ MPa}$$

$$R_0=200\text{mm}, R_1=100\text{mm}, \text{yarıçap değişim katsayısı } \alpha=-0.02$$

$$q_0=80 \text{ Nmm}^{-1}, k_y=1.18$$

Şekil 4.11 ' de gösterilen kirişte eğilme momentinin etkisi için

$$y(x) = C_1 + C_2(R_0 + \alpha x) + \frac{C_3}{(R_0 + \alpha x)} + \frac{C_4}{(R_0 + \alpha x)^2} - \frac{2}{\pi \alpha^4 E} (q_0) \ln(R_0 + \alpha x) \quad (4.17)$$

kesme kuvvetinin etkisi için ise (3.142) no.' lu denklemdeki

$$y = \frac{k_y q_0}{G \pi \alpha^2} \ln(R_0 + \alpha x) + Ax + B$$

ifadeleri kullanılır.

(4.17) no.' lu denklemdeki C_1 , C_2 , C_3 ve C_4 sabitlerinin bulunabilmesi gerekli geometrik $y(0)=0$, $y'(0)=0$ sınır şartları ve dinamik $M(L)=0$ ve $T(L)=0$ sınır şartları kullanılarak sırası ile

$$C_1 = \frac{2}{\pi \alpha^4 E} (q_0) \left[2 \frac{R_1}{R_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 + \ln R_0 - 1 \right] \quad (4.18)$$

$$C_2 = \frac{2}{\pi \alpha^4 E R_0} (q_0) \left[1 - \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{3} \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 \right] \quad (4.19)$$

$$C_3 = -\frac{2R_1}{\pi \alpha^4 E} (q_0) \quad (4.20)$$

$$C_4 = \frac{R_1^2}{3\pi \alpha^4 E} (q_0) \quad (4.21)$$

ifadeleri elde edilir. Sayısal değerler, (4.18), (4.19), (4.20) ve (4.21) no.' lu denklemlerde yerine konulursa

$C_1=8237.3$, $C_2=4.642$, $C_3=159235.66$ ve $C_4=2635927.8$ bulunur. 4 adet sabit (4.17) no.' lu denklemde yerine konulduğunda, kirişin eğilme momentinden gelen elastik eğri denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$y(x) = 8237.3 + 4.642(R_0 + \alpha x) - \frac{159235.66}{(R_0 + \alpha x)} + \frac{2635927.8}{(R_0 + \alpha x)^2} - \frac{2}{\pi \alpha^4 E} (q_0) \ln(R_0 + \alpha x) \quad (4.22)$$

Kesme kuvvetinin etkisi için kullanılacak (3.142) no.' lu denklemdeki A ve B sabitlerinin bulunabilmesi için gerekli sınır şartları $y(0)=0$ ve $y'(0)=0$ kullanılarak sırası ile

$$A = -\frac{k_y q_0}{G \alpha \pi R_0} \quad (4.23)$$

$$B = -\frac{k_y q_0}{G \alpha^2 \pi} \ln R_0 \quad (4.24)$$

ifadeleri bulunur.

A ve B sabitleri (3.142) no.' lu denklemde yerine konulduğunda, kirişin kesme kuvvetinden gelen elastik eğri denklemi aşağıdaki gibi çıkar:

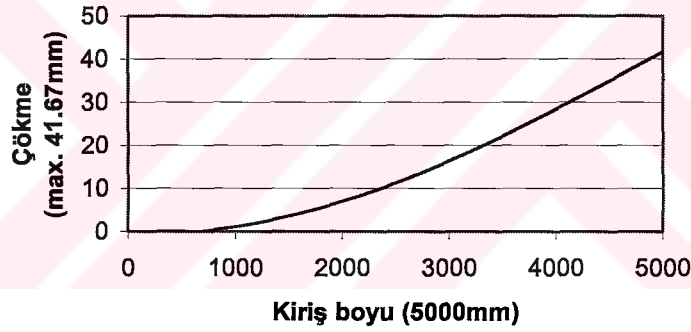
$$y(x) = \frac{k_y q_0}{G \alpha^2 \pi} \ln(R_0 + \alpha x) - \left(\frac{k_y q_0}{G \alpha \pi R_0} \right) x - \frac{k_y q_0}{G \alpha^2 \pi} \ln R_0 \quad (4.25)$$

(4.22) ve (4.25) no.' lu denklemler superpozisyon ilkesine göre toplandığında

$$y(x) = 8237.3 + 4.642(R_0 + \alpha x) - \frac{159235.66}{(R_0 + \alpha x)} + \frac{2635927.8}{(R_0 + \alpha x)^2} - \frac{2}{\pi \alpha^4 E} (q_0) \ln(R_0 + \alpha x) \\ + \frac{k_y q_0}{G \alpha^2 \pi} \ln(R_0 + \alpha x) - \left(\frac{k_y q_0}{G \alpha \pi R_0} \right) x - \frac{k_y q_0}{G \alpha^2 \pi} \ln R_0 \quad (4.26)$$

bulunur.

(4.26) no.' lu denklem kullanılarak elde edilen, düzgün yayılı yük altında 5000mm uzunluğundaki kirişin y eksenindeki çökmesi, Şekil 4.12' de gösterilmiştir.



Şekil 4.12 Düzgün yayılı yük altında lineer değişken dairesel kesitli konsol kirişin çökmesi

5. SONUÇLAR

Gelişen teknoloji ile beraber sanayisi ilerlemiş veya ilerlemekte olan ülkelerde başta inşaat ve makina imalat sektöründe olmak üzere çeşitli endüstri kollarının ihtiyaçlarına daha iyi cevap verebilmek amacıyla klasik kiriş uygulamalarının dışına çıkılarak farklı taşıyıcı sistemler kullanılmaktadır. Bu tarz sistemlerde göze çarpan unsurlardan birisi de değişken kesitli kirişlerin kullanımınıdır. Bu sayede, evvelce yapılması fizibilite açısından mümkün olmayan tasarımlar gerçekleştirilerek üretici veya son kullanıcının ihtiyaçları karşılanabilecektir.

Bu çalışmada, değişken kesitli kirişlerin y ekseninde yer değiştirmesi ile ilgili kirişe ait elastik eğrinin elde edilme yöntemleri, sayısal örneklerde desteklenerek incelenmiştir. İnceleme esnasında elde edilen bilgiler, temel denklemler ve sayısal uygulamalar olmak üzere 2 ana başlık altında toplanmıştır.

Değişken kesitli kirişlerin uygulanan yük altında (y eksenini doğrultusunda) yer değiştirmesi üzerine esas olarak eğilme momenti ve kesme kuvveti olmak üzere 2 faktör çok etkilidir. x eksenini doğrultusunda yer değiştirme ise gözardı edilmektedir. Temel denklemler bölümünde, önce eğilme momenti ardından da kesme kuvveti son olarak da her ikisinin beraber ele alındığı durumlarda kirişe ait temel elastik eğri ifadeleri verilmiştir. Çalışmaya konu edilen kirişler, değişken dairesel ve dikdörtgen kesitli olup, lineer ve parabolik olarak ayrı ayrı göz önüne alınmıştır. Eğilme momenti ve kesme kuvvetine sebep olacak yük olarak ise lineer ve parabolik olarak değişen yayılı yük, düzgün yayılı yük, noktasal yük ve düzgün yayılı moment gibi yükleme şartları kullanılmıştır. Farklı kiriş formları ve yükleme şartları altında elastik eğri denklemlerinin elde edilmesinin ardından, pratikte kullanımına rastlanabilecek taşıyıcı sistemler, sayısal uygulamalar bölümünde matematiksel olarak simüle edilmiştir.

Sayısal uygulamalar bölümünde 6 adet örnek yer almaktadır. Örnek teşkil edecek uygulamalar seçilirken, referans alınan kaynaklardakinden farklı olup, o örneklerle karşılaştırma yapılabilmesine imkan vermesi ve pratikte rastlayabileceğimiz türden olmasına dikkat edilmiştir. Bütün örneklerin kendi aralarında da karşılaştırılabilmesi için kiriş boyları, ebatları ve yüklerin sayısal değerleri aynı tutulmuştur.

1. uygulamada, her iki tarafından ankastre mesnetlenmiş lineer değişken dairesel kesitli bir kirişin, lineer değişken yayılı yük altında eğilme momentinden kaynaklanan y eksenindeki yer değiştirmesi incelenmiştir. Bu sistem hiperstatik olup inşaat sektöründe özellikle çatı ve kiriş bağlantı sistemlerinde sıkça karşımıza çıkmaktadır. 11 no.' lu kaynakta yer alan, gene hiperstatik olan bir tarafından ankastre diğer tarafından basit mesnetlenmiş kirişle

karşılaştırma yapılabilmesi bakımından faydalı olacaktır. Çubuk boyları ve yükleme şartları aynı olduğu halde, bir tarafından ankastre diğer tarafından basit mesnetlenmiş kirişte maksimum çökme 2.02 mm olurken, her iki tarafından ankastre mesnetli kirişte maksimum çökme 1.138 mm' dir.

2. uygulamada, lineer olarak değişken dairesel kesitli basit konsol kirişte düzgün yayılı momentden kaynaklanan eğilme momentinin y ekseninde sebep olduğu yer değiştirme ele alınmıştır. Kiriş boyunca y ekseninde çubuğu eğmeye çalışan düzgün yayılı moment altında, başlangıç yarıçapı 200 mm, serbest uçta yarıçapı 100 mm olan kirişte maksimum çökme serbest uçta olup 8.29 mm çıkmıştır. Kesit yarıçapının 100 mm olarak sabit devam ettiği kirişte aynı bağlantı sistemi ve yükleme şartı altında maksimum çökme ise 13.61 mm olmaktadır.

3. uygulamada, sol tarafından mafsallı mesnetlenmiş sağ tarafından ise basit mesnetlenmiş lineer değişken dairesel kesitli bir kirişte, düzgün yayılı yükten kaynaklanan kesme kuvvetinin y ekseninde neden olduğu çökme incelenmiştir. Bu problemde, kesit değişiminin çökme üzerindeki etkisinin daha iyi anlaşılabilmesi bakımından 4 farklı yarıçap değişim katsayısı (α) için örnekleme yapılmıştır. 4 farklı (α) değeri için görülmektedir ki kesit incelidikçe çökme, 0.5 mm' den 0.92 mm' e kadar çıkmaktadır. Bu tip bağlantı sistemlerine makinaların hareketli parçalarında sıkça rastlanmaktadır.

4. uygulamada, lineer değişken dikdörtgen kesitli basit konsol kirişte 80 Nmm^{-1} lik düzgün yayılı yükün sebep olduğu kesme kuvvetinin y ekseninde meydana getirdiği yer değiştirme ele alınmıştır. Özellikle makinaların taşıyıcı sistemlerinde rastlanan bu örnekte, başlangıç $h=200 \text{ mm}$, serbet uçta $h=100 \text{ mm}$ olan bir kirişte maksimum çökme serbest uçta olup 0.478 mm' dir. Aynı yükleme şartı ve bağlantı sistemi için $h=100 \text{ mm}$ sabit dikdörtgen kesitli kirişte çökme 0.791 mm olarak elde edilmiştir.

5. uygulamada, değişken dökdörtgen kesitli basit konsol kirişin serbest ucunda yer alan 5000 N' luk noktasal yükün sebep olduğu kesme kuvvetinin y ekseninde kiriş üzerindeki etkisi incelenmiştir. Söz konusu yük altında başlangıç $h=200 \text{ mm}$, serbest uçta $h=100 \text{ mm}$ olan bir kirişin maksimum çökmesi 0.0135 mm olarak bulunmuştur. Aynı şartlarda $h=100 \text{ mm}$ sabit dikdörtgen kesitli bir için çökme 0.0262 mm' dir.

İlk 5 örnekte, eğilme momenti ve kesme kuvvetinin kiriş üzerinde ayrı ayrı etkileri ele alınmıştır. 6. uygulamada ise superpozisyon ilkesine göre toplanmak suretiyle her iki zorlayıcı faktörün, lineer değişken dairesel kesitli basit konsol bir kiriş üzerinde etkileri bulunmuştur. 80 Nmm^{-1} lik düzgün yayılı yükün serbest ucta neden olduğu çökme 41.26 mm' dir. Bu

değerin 40.7 mm' lik kısmı eğilme momentinden geri kalanı da kesme kuvvetinin etkisinden doğmuştur.

Sayısal uygulamalar kısmında yer alan örneklerin çözümleri bir arada değerlendirildiğinde 2 tane önemli sonuca varılmaktadır. İlki, değişken kesitli kirişlerin yükleme şartlarından dolayı y eksenindeki hareketlerinde eğilme momentinin etkisi, kesme kuvvetinin etkisine nazaran çok daha fazladır. Bu fark, 6. no.' lu uygulamada açıkça görülmektedir. İkincisi ise, sabit kesitli kirişlerde çökme, değişken kesitli kirişlere göre daha fazla olmaktadır. Bu artışa, 2, 4 ve 5 no.' lu uygulamalar örnek gösterilebilir.

Günümüzde üretici ve son kullanıcının taleplerini karşılamak için devamlı araştırma geliştirme çalışmaları yapılmakta ve buna bağlı olarak piyasalara yeni ürünler sunulmaktadır. Tasarım ve üretim aşamasında, müşteri taleplerinin karşılanması yanısıra ergonomik, hafif ekonomik çözümlerine girilmektedir. Özellikle inşaat ve makina imalat sanayinde, dinamik etkilere daha dayanıklı, daha hafif ve ekonomik konstrüksiyonlar elde etmek için uygun değişken kesitli kirişlerin kullanılması, aranan çözümlerden birisidir.

KAYNAKLAR

Fertis, G., ve Taneja, R., (1991), "Equivalent Systems for Inelastic Analysis of Prismatic and Nonprismatic Members", Journal of Structural Engineering, Vol. 117, No. 2.

Göktürk, A., ve Hopkins, H., (1981), "Plastics Beam at Finite Deflection Under Transverse Load with Variable End-Constraints", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 2, No. 5/6

Franklin, J., ve Scott R., (1979), "Beam equation with variable foundation coefficient", J. Engrg. Mech. Div.i ASCE, 105(5), 811-827.

Heteyni, M., (1937), "Deflection of beams varying cross section", J. Appl. Mech., 4(2), 49-52.

Heteyni, M., (1946), Beams on elastic foundation, Univ. Of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan.

İnan, M., (1967), Cisimlerin Mukavemeti , ITU Vakfi yayımları, İstanbul.

İnan, M., (1951), "An approximate method in calculating the finite displacements of beams", Bulletin of the Technical University of İstanbul, Vol. 15, 1962

Miranda, C., ve Nair, K., (1964), "Finite beams on elastic foundation", J. Struct. Div., ASCE, 92(2).

Richards, T., (1977), "Energy methods in stress analysis", Ellis Harwood Limited.

Roark, R., ve Young, W., (1975), Formulas for Stress and Strain, McGraw-Hill, Tokyo.

Romano, F., ve Zingone, G., (1992), "Deflections of Beams with Varying Rectangular Cross Section", Journal of Engineering Mechanics, Vol 118, No.10

Romano, F., ve Zingone, G., (1992), "Deflections of Members with Variable Circular Cross-Section", Int. J. Mech. Sci. Vol. 34, No.6.

Shrima, L., ve Gige, M., (1990), "Timoshenko Beam Element Resting on Two-Parameter Elastic Foundation", Journal of Engineering Mechanics, Vol 118, No.2.

Thomas, G., ve Finney, R., (1992), Calculus and Analytic Geometry, Literatür Yayıncılık Dağıtım Pazarlama San. Ve Tic. Ltd. Şti., İstanbul.

Timoshenko, S., (1976), Strength of materials, part I, elementary theory and problems, Third Ed., Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington N. Y.

Timoshenko, S., (1976), Strength of materials, part II, elementary theory and problems, Third Ed., Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington N. Y.

Timoshenko, S., ve Gere, J.M., (1984), Mechanics of Materials, PWS Publishers

Ting, B., (1982), "Finite beams on elastic foundation with restraints", J. Struct. Div., ASCE, 180(3).

Ting, B., ve Mocky, E., (1984), "Beam on elastic foundation finite element", J. Struct. Mech., ASCE, 110(10).

Zhaohua, F., ve Cook, r., (1985) "Beam on elastic foundation finite element", J. Struct. Mech., ASCE, 109(6).

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	05.07.1976	
Doğum yeri	Düzce	
Lise	1987-1988	Bolu Anadolu Lisesi
	1988-1994	Düzce Anadolu Lisesi
Lisans	1994-1999	İstanbul Teknik Üniversitesi Makina Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	1999-2002	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Mak. Müh. Anabilim Dalı, Konstrüksiyon Programı

Çalıştığı Kurumlar

1998-Devam ediyor Metamin Mümessillik San. ve Tic. A.Ş.

