

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

128636

GTD MODEL ASKERİ JEEP ŞASİSİNİN ve AKTARMA  
ORGANLARININ SONLU ELEMANLAR METODUYLA  
DİNAMİK ANALİZLERİ

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANİSYON BİRİMİ

Makine Müh. Sezer CİNDEMİR

F.B.E Makine Mühendisliği Anabilim Dalı Konstrüksiyon Programında  
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

128636

Tez Danışmanı : Prof. Necati TAHRALI

*[Signature]*

Prof. Dr. Bahri Sahin  
Doç. Dr. İsmail YÜKSEK

İSTANBUL, 2002

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ .....	iv
KISALTMA LİSTESİ .....	v
ŞEKİL LİSTESİ .....	vi
ÇİZELGE LİSTESİ .....	viii
ÖNSÖZ .....	ix
ÖZET .....	x
ABSTRACT .....	xi
1. GİRİŞ .....	1
2. SONLU ELEMANLAR ANALİZİ METODU .....	2
2.1 Giriş .....	2
2.2 Sonlu elemanlar metodunun temelleri .....	2
2.3 Sonlu eleman tipleri .....	6
2.4 Metodun matematik esasları .....	10
2.4.1 Elastisite teorisi .....	10
2.4.2 Bir boyutlu çubuk eleman için rijitlik matrisinin oluşturulması .....	14
2.4.3 Tetrahedron eleman için rijitlik matrisinin oluşturulması .....	21
2.4.4 Dinamik inceleme .....	25
3. ÇEŞİTLİ ZORLANMA DURUMLARI İÇİN JEEP ŞASİSİNİN STATİK VE DİNAMİK ANALİZLERİNİN YAPILMASI .....	30
3.1 Jeep şasisine ait sonlu elemanlar ağının hazırlanması .....	30
3.2 Statik ağırlık etkisi altında iken şasinin analizi .....	33
3.3 Tek bir ön tekerleğin bir darbeye maruz kalması durumunda şasinin analizi .....	35
3.4 İki ön tekerleğin bir darbeye maruz kalması durumunda şasinin analizi .....	37
3.5 Tek bir arka tekerleğin darbeye maruz kalması durumunda şasinin analizi .....	39
3.6 İki arka tekerleğin bir darbeye maruz kalması durumunda şasinin analizi .....	40
3.7 Jeep düz yolda fren yaptığında şasinin analizi .....	42
3.8 Jeep şasisine ait doğal frekans değerlerinin hesaplanması .....	44
4. ÇEŞİTLİ ZORLANMA DURUMLARI İÇİN JEEP ÖN AKSININ STATİK VE DİNAMİK ANALİZLERİNİN YAPILMASI .....	49
4.1 İniş eğimli yolda jeep'in fren yapması durumunda ön aksın analizi .....	49
4.2 Yan eğimli yolda jeep'in fren yapması durumunda ön aksın analizi .....	51
4.3 Virajda hareket esnasında ön aksın analizi .....	53
4.4 Ön aksa ait doğal frekans değerlerinin bulunması .....	54

5.	ÇEŞİTLİ ZORLANMA DURUMLARI İÇİN JEEP ARKA AKSININ STATİK VE DİNAMİK ANALİZLERİNİN YAPILMASI.....	56
5.1	Tırmanma eğimli yolda hızlanma durumunda arka aksın analizi.....	57
5.2	Yan eğimli yolda hızlanma durumunda arka aksın analizi.....	58
5.3	Virajda hareket esnasında arka aksın analizi .....	60
5.4	Arka aksa ait doğal frekans değerlerinin bulunması.....	61
	SONUÇLAR.....	63
	KAYNAKLAR.....	64
	ÖZGEÇMİŞ.....	65



## SİMGE LİSTESİ

A	Kesit alanı
B	Gerinim deformasyon matrisi
[d]	Bir sonlu elemanın deformasyon vektörü
[D]	Sonlu elemanlar ağının deformasyon vektörü
D	Malzeme özellikleri matrisi
E	Elastisite modülü
f	Birim hacme etki eden kuvvet
[f]	Bir sonlu elemana etki eden kuvvet vektörü
[F]	Sonlu elemanlar ağına etki eden kuvvet vektörü
F	Kuvvet
G	Kaymada elastisite modülü
J	Koordinat dönüşüm (Jacobian) matrisi
[k]	Bir sonlu elemanın rijitlik matrisi
[K]	Sonlu elemanlar ağının rijitlik matrisi
l	Uzunluk
m	Kütle
[m]	Bir sonlu elemanın kütle matrisi
[M]	Sonlu elemanlar ağının kütle matrisi
n	Bir yüzeyin normal vektörü
N	Şekil fonksiyonu
P	Noktasal kuvvet
q	Sonlu eleman uçlarındaki deformasyon vektörü
Q	Global koordinat sistemindeki deformasyon matrisi
T	Birim yüzeye etki eden kuvvet
[T]	Katı cismin kinetik enerjisi
u	Lokal eksen takımında deformasyon değeri
U	Titreşim genliği, Gerinim enerjisi
V	Hacim
w	Titreşim hareketinin dairesel frekansı
WP	İş potansiyeli
x	Hareket miktarı
$\dot{x}$	Hız
$\ddot{x}$	İvme
$\varepsilon$	Normal gerinim
$\gamma$	Kaymada gerinim
$\sigma$	Normal gerilme
$\tau$	Kayma gerilmesi
$\nu$	Poisson oranı
$\xi$	Doğal koordinat sistemi değişkeni
$\zeta$	Doğal koordinat sistemi değişkeni
$\eta$	Doğal koordinat sistemi değişkeni

## KISALTIMA LİSTESİ

CAD	Computer Aided Design
CAE	Computer Aided Engineering
FEA	Finite Element Analysis
FEM	Finite Element Method
SEA	Sonlu Elemanlar Analizi
SEM	Sonlu Elemanlar Metodu



## ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Eksenel kuvvete maruz ankastre çubuk.....	3
Şekil 2.2 Ankastre çubuğun sonlu elemanlara ayrılması.....	3
Şekil 2.3 Çubuktaki SEM metodu ile hesaplanan ve gerçek gerilmeler .....	4
Şekil 2.4 Çeki zorlanması altındaki delikli plak.....	5
Şekil 2.5 Delikli plak için sonlu elemanlar ağı.....	5
Şekil 2.6 Mukavemet biliminde incelenen yapılar .....	7
Şekil 2.7 Çeşitli tipte sonlu elemanlar .....	8
Şekil 2.8 Bir kafes sistemin çubuk elemanlarla oluşturulmuş sonlu elemanlar modeli .....	8
Şekil 2.9 Bir otomobil kaputunun ağ yapısı .....	9
Şekil 2.10 Bir biyel koluna ait ağ yapısı .....	9
Şekil 2.11 Lineer (a) ve parabolik (b) tetrahedral elemanlar.....	10
Şekil 2.12 Kuvvet etkisi altındaki rijit cisim .....	11
Şekil 2.13 Katı cismin içerisindeki bir elemanter tetrahedron .....	13
Şekil 2.14 Bir yapının çubuk elemanlar kullanılarak modellenmesi.....	15
Şekil 2.15 Kartezyen ve doğal koordinat sistemindeki bir çubuk eleman.....	16
Şekil 2.16 Bir elemandaki gerçek (a) ve lineerleştirilmiş (b) deformasyonlar.....	17
Şekil 2.17 Kartezyen ve doğal koordinat sistemindeki tetrahedral eleman.....	21
Şekil 2.18 İki serbestlik dereceli bir kütle yay sistemi .....	25
Şekil 2.19 Kütleli homojen olan bir katı ve içindeki elemanter eleman .....	26
Şekil 3.1 Jeep şasisinin CATIA V5 programında oluşturulmuş montaj modeli .....	30
Şekil 3.2 Jeep şasisinin sonlu elemanlar modeli .....	31
Şekil 3.3 Jeep şasisinin tetrahedron elemanlar kullanılarak oluşturulmuş ağ yapısı.....	31
Şekil 3.4 CATIA programında parçalar arası geçiş tanımlanması .....	32
Şekil 3.5 Şasisinin analizi için kullanılan matematik modeli.....	33
Şekil 3.6 Düşey yükleme sonucu şasi bulunan gerilmeler .....	34
Şekil 3.7 Düşey yükleme sonucu süspansiyon sisteminin deformasyonu.....	34
Şekil 3.8 Ön tekerleğe etki eden darbe kuvveti.....	35
Şekil 3.9 Ön tekerleğe gelen darbe kuvvetini tanımlamak için kullanılan matematik model ..	36
Şekil 3.10 Tek bir ön tekerleğe darbe gelmesi durumunda şasideki gerilmeler.....	36
Şekil 3.11 Tek bir ön tekerleğe darbe gelmesi durumunda deformasyonlar .....	37
Şekil 3.12 İki ön tekerleğe darbe gelmesi sonucu şasideki gerilme dağılımı.....	38
Şekil 3.13 İki ön tekerleğe darbe gelmesi sonucu süspansiyon sisteminin deformasyonu .....	38
Şekil 3.14 Arka tekerleğe gelen darbe kuvvetini tanımlamada kullanılan matematik model ..	39
Şekil 3.15 Tek bir arka tekerleğe darbe gelmesi durumunda şasideki gerilmeler .....	39
Şekil 3.16 Tek bir arka tekerleğe darbe gelmesi durumunda deformasyonlar .....	40
Şekil 3.17 İki arka tekere de darbe gelmesi durumunda maksimum gerilmeler .....	41
Şekil 3.18 İki arka tekere de darbe gelmesi durumunda şaside meydana gelen gerilmeler .....	41
Şekil 3.19 İki arka tekerleğe darbe gelmesi durumunda deformasyonlar .....	42
Şekil 3.20 Jeep düz yolda fren yaptığında şasiyi analiz etmek için kullanılan model .....	43
Şekil 3.21 Jeep düz yolda fren yaptığında şaside oluşan gerilmeler .....	43
Şekil 3.22 Jeep düz yolda fren yaptığında süspansiyon sisteminin deformasyonu .....	44
Şekil 3.23 Jeep şasisinin doğal frekanslarını bulmak için kullanılan sonlu eleman modeli.....	45
Şekil 3.24 Jeep şasisinin doğal frekans değerlerinin ölçümü .....	46
Şekil 3.25 Jeep şasisinin frekans domeninde ölçülen doğal frekans-ivme grafiği .....	47
Şekil 3.26 Jeep şasisinin zaman domeninde ölçülen darbe cevabı.....	47
Şekil 4.1 Ön aks sonlu elemanlar modeli .....	49
Şekil 4.2 İniş eğimli yolda frenleme durumuna ait matematik model.....	50
Şekil 4.3 İniş eğimli yolda frenlemede ön akstaki gerilme dağılımı .....	50
Şekil 4.4 Süspansiyon sisteminin deformasyonu .....	51
Şekil 4.5 Yan eğimli yolda frenleme durumuna ait matematik model.....	51

Şekil 4.6 Yan eğimli yolda frenlemede ön akstaki gerilme dağılımı .....	52
Şekil 4.7 Süspansiyon sisteminin deformasyonu .....	52
Şekil 4.8 Virajda hareket durumuna ait matematik model .....	53
Şekil 4.9 Virajda hareket durumunda oluşan gerilme dağılımı .....	53
Şekil 4.10 Süspansiyon sisteminin deformasyonu .....	54
Şekil 5.1 Arka aksa ait sonlu elemanlar modeli .....	56
Şekil 5.2 Tırmanma eğimli yolda hızlanma durumuna matematik model .....	57
Şekil 5.3 Tırmanma eğilimli yolda hızlanma durumunda gerilme dağılımı.....	57
Şekil 5.4 Süspansiyon sisteminin deformasyonu .....	58
Şekil 5.5 Yan eğimli yolda hızlanma durumuna ait matematik model .....	58
Şekil 5.6 Yan eğimli yolda hızlanma durumunda gerilme dağılımı.....	59
Şekil 5.7 Süspansiyon sisteminin deformasyonu .....	59
Şekil 5.8 Virajda hareket durumuna ait matematik model .....	60
Şekil 5.9 Virajda hareket durumunda oluşan gerilme dağılımı.....	60
Şekil 5.10 Süspansiyon sisteminin deformasyonu .....	61



## ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 3.1 Jeep şasisinin CATIA programınca hesaplanan doğal frekans değerleri .....	45
Çizelge 3.2 Jeep şasisinin ölçüm yapılarak bulunan doğal frekans değerleri .....	48
Çizelge 4.1 Ön aksın CATIA programında hesaplanan doğal frekans değerleri .....	54
Çizelge 5.1 Arka aksın CATIA programında hesaplanan doğal frekans değerleri .....	61



## ÖNSÖZ

Bu tez çalışması Kara kuvvetleri Komutanlığının 1013. Ordu Donatım ATF fabrikasında üretilmekte olan GTD model askeri Jeep'in şasisinin, ön aksının ve arka aksının çeşitli zorlanma durumları için dinamik analizlerini yapmak amacı ile hazırlanmıştır.

Analiz işlemi bilgisayar ortamında sunduğu çeşitli avantajlar nedeni ile "Sonlu elemanlar analizi metodu" kullanılarak yapılmıştır. Jeep şasisinin, ön aksın ve arka aksın sonlu elemanlar modelleri CATIA V5 programında tetrahedron tipinde elemanlar kullanılarak oluşturulmuş ve hesaplamalar yapılmıştır.

Analiz işlemi sırasında bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Necati Tahralı ile Ar. Gör. Cihan Demir'e, analizi yapılan jeep elemanları ile ilgili teknik dokümanları sağlayan Alb. Yük. Müh. Serdar Ayaroğlu ile askeri fabrika personeline ve analiz işlemi için kullanılan bilgisayar yazılım ve donanımını temin eden Grup Otomasyon Ltd. Şti.'ne teşekkürü bir borç bilirim.



## ÖZET

Sonlu Elemanlar analizi metodu karmaşık geometriye, malzeme özelliklerine ve yüklenme şartlarına sahip yapıların çeşitli tipteki analizlerini gerçekleştirmek için giderek artan oranda kullanılmaktadırlar. Klasik hesaplama metotları ile hesaplanması çok zor olan yada imkansız problemlere çözüm bulunabilmesi, incelenen yapı hakkında klasik yöntemlere göre daha fazla bilgi verilebilmesi ve bilgisayar destekli tasarım sistemleri ile entegre edilebilmesi metodun avantajlarından biridir.

KKK.'lığının 1013. Ordu Donatım Ana Tamir Fabrikasında üretilen GTD model Jeep'in şasisinin, ön ve arka akslarının dinamik analizleri de yukarıdaki avantajları nedeni ile sonlu elemanlar metodu kullanılarak yapılmıştır.

Analiz işlemi için öncelikle incelenecek olan şasi, ön ve arka aksın sonlu elemanlar modeli bilgisayarda CATIA V5 programı kullanılarak oluşturulmuştur. Daha sonra yine aynı paket programın kullanılması suretiyle adı geçen elemanlardaki gerilme, deformasyon ve doğal frekans değerleri hesaplanmıştır. Çalışmanın son aşamasında bilgisayar tarafından hesaplanan değerler Jeep fabrikasında gerçekleştirilen deney sonuçları ve ölçümler ile karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler :** Sonlu elemanlar, Şasi, Dinamik analiz, Bilgisayar destekli tasarım



## ABSTRACT

Finite Element Method (FEM) is a widely used method for structural analysis of complex shaped parts, that having different material properties and loading conditions. One of the most important advantages of the method is the fact that finite element method can calculate what can not be calculated by classical methods. FEM also gives more information about the analyzed structure and it can be integrated with Computer Aided Design (CAD) systems.

Analysis of chassis frame, front axle and rear axle of GTD type military jeep, produced in 1013.th main repair factory, is carried out by using finite element method because of it's advantages as mentioned above.

Finite element models of chassis frame, front axle and rear axle are created CATIA V5 program at first stage of the analysis. After stresses and deformations on the elements are calculated by same computer software. At last stage calculated results, obtained by FEM software and measured results at the jeep factory are compared.

**Keywords :** Finite elements, Chassis frame, Dynamic analysis, Computer aided design



## 1. GİRİŞ

Fiziksel bir sistemin analizlerini yapabilmek amacıyla bir takım denklem ve eşitlikler kullanılarak oluşturulmuş modeline matematik model denilmektedir. Mekanik derslerinden hatırlanacağı üzere bazı kabuller yaparak çeşitli fiziksel sistemlerin analitik ifadelerini elde etmek mümkün olmaktadır. Bu analitik ifadeler dolayısıyla oluşturulan matematik model kısmen basit ve kolay hesaplanabilir olmakta ancak çok karmaşık problemlerin modellenmesinde yetersiz kalmaktadır. Bu durumda incelenen yapının bilgisayarda modellenmesi önemli bir çözüm yolu olmaktadır. Bilgisayar yardımıyla oluşturulan modeller çok kompleks ve detaylı modeller olup binlerce hatta milyonlarca denklem takımının bir araya getirilmesi ile oluşturulmaktadır.

Günümüzdeki bilgisayar programlarının çoğu matematik modelleri oluşturmak ve çözmek için Sonlu Elemanlar Analizi (SEA) yada Sonlu Elemanlar Metodu (SEM) ismi verilen yöntemi kullanmaktadır. Karmaşık geometriye, malzeme özelliklerine ve zorlanma koşullarına sahip yapıların analiz edilmesine olanak sağlaması ve bilgisayar destekli tasarım programları ile entegre edilebilmesi nedeni ile sonlu elemanlar metodu bir çok mühendislik dalında kendine uygulama alanı bulmaktadır.

Bu çalışma içerisinde 1013. Ordu Donatım Ana Tamir Fabrikasında üretilen GTD model Jeep'in şasisinin, ön ve arka akslarının dinamik analizleri sonlu elemanlar metodu kullanılarak yapılmıştır. Genel olarak literatürde görülen sonlu elemanlar analizi çalışmalarından farklı olarak bu çalışmada incelenen yapıların sonlu elemanlar modelleri bilgisayarda oluşturulan katı modeller kullanılarak analiz yazılımı tarafından otomatik olarak oluşturulmuş ve üç boyutlu sonlu elemanlar kullanılarak analiz işlemi gerçekleştirilmiştir.

## 2. SONLU ELEMANLAR ANALİZİ METODU

### 2.1 Giriş

Sonlu elemanlar analizi metodu karmaşık geometrideki fiziksel sistemlerin tümünü bir bütün olarak incelemek yerine bu sistemi incelenmesi daha kolay olan elemanlara (Sonlu Elemanlar) ayırarak incelemek amacıyla kullanılan bir metottur.

Metot ilk defa 1950'li yıllarda havacılık endüstrisinde uçakların kanatlarındaki gerilmelerin analizi için kullanılmıştır. 1960'lı yıllarda metodun matematik temelleri oluşturulmaya başlanmış ve çeşitli mühendislik dallarında avantajları nedeniyle giderek artan oranda kullanılmaya başlanmıştır. İlk sonlu elemanlar terimi (Finite Element) 1960 yılında Clough isimli bilim adamı tarafından kullanılmıştır. 1970'li yıllarda metot özel bilgisayarlarda kendine uygulama alanı bulmuştur. 1980'li yıllara girerken mikro bilgisayarların geliştirilmesi ile metodun uygulanması genişlemiştir. 1990'lı yıllara gelindiğinde ise büyük ölçekli yapıların analiz edilmesi mümkün olmuştur.

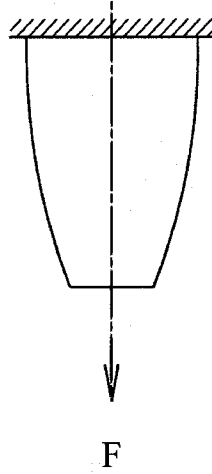
Sonlu elemanlar metodu bugün bilgisayar destekli tasarım sistemleri ile entegre edilerek gerilme, doğal frekans, ısı transferi, akışkanlar mekaniği, elektromanyetik, jeo mekanik ve biyomekanik gibi sahalarda kendine uygulama alanı bulmaktadır.

Analitik metotlara göre incelenen yapı hakkında daha fazla bilgi verebiliyor olması, çok kompleks yapıların göreceli olarak kolayca çözümüne olanak sağlaması, bilgisayar destekli tasarım sistemleri ile entegre çalışarak daha tasarım aşamasında yapının analiz ve optimizasyonuna olanak sağlaması, çok kompleks yapılarda hesaplama zamanını kısaltması gibi avantajları nedeni ile metot günümüzde oldukça popülerdir.

### 2.2 Sonlu elemanlar metodunun temelleri

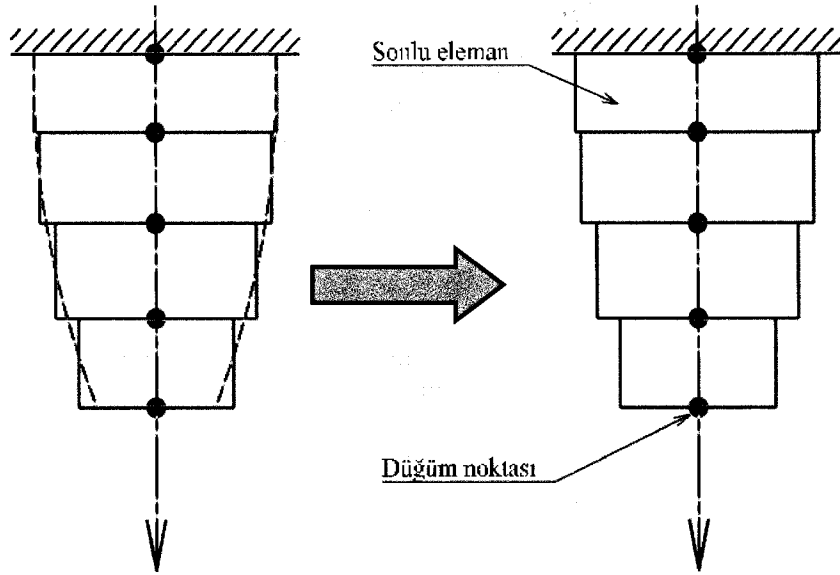
Tüm mühendislik problemlerinde bir fiziksel sistemin olduğu gibi analizlerinin yapılması ve matematik modellerinin oluşturulması mümkün olmamaktadır. Bir uçak gövdesinin aerodinamik analizlerinin yada bir otomobil karoserinin analizlerinin yapılması gibi durumlarda klasik mekanik yöntemleri ile problemlere çözüm bulmak çok zor yada imkansız olmaktadır. Bu gibi durumlarda yapının tamamını analiz etmek yerine esas yapının özelliklerini taşıyan ve analiz edilmeleri daha kolay olan sonlu elemanları kullanmak incelenen problem için yaklaşık bir çözüm yolu olmaktadır.

Metodun çalışma prensibini incelemek için Şekil 2.1'deki gibi F kuvvetine maruz bırakılan ankastre bir çubuğu göz önüne alalım. Çubukta meydana gelen deformasyon ve gerilmeleri analitik olarak hesaplamak çubuk kesiti uzunluk boyunca değiştiği için zor olacaktır. Bu durumda çubuğu bir bütün olarak incelemek yerine kesiti sabit olan silindirlere bölünmüş bir yapı gibi düşünerek analiz etmek daha pratik olacaktır.



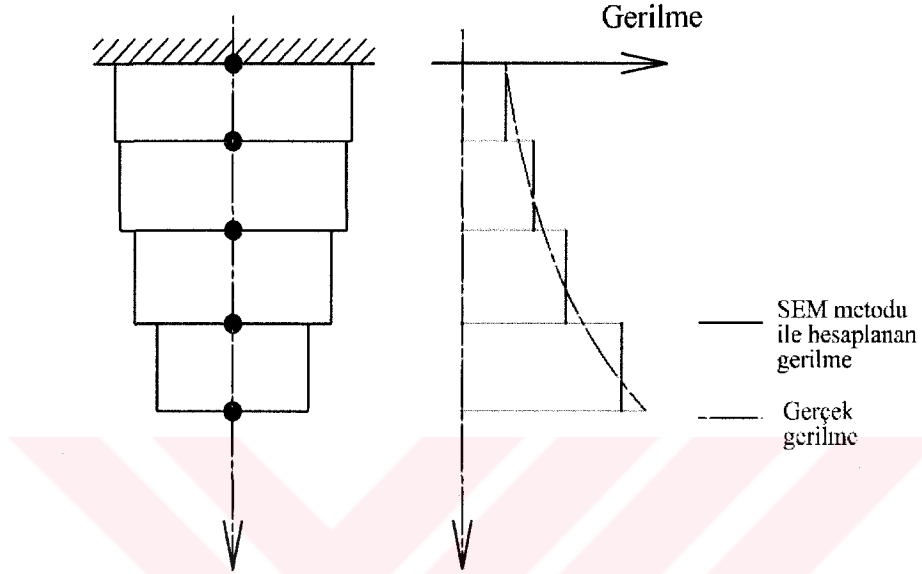
Şekil 2.1 Eksenel kuvvete maruz ankastre çubuk

Bu amaçla inceleyeceğimiz çubuğu çapları sabit olan 4 silindire bölelim (Şekil 2.2). Aslında sonsuz sayıda elemandan oluşan (sürekli bir sistem olan) çubuk artık 4 adet sonlu sayıda elemandan oluşmaktadır ve bu elemanlara Sonlu elemanlar (Finite Elements) denilmektedir. Bu sonlu elemanlar birbirilerine düğüm noktaları vasıtasıyla bağlanmaktadır.



Şekil 2.2 Ankastre çubuğun sonlu elemanlara ayrılması

Bir boyutlu olarak incelediğimiz bu sistemde her düğüm noktası sadece çubuk eksenini boyunca hareket edebileceğinden her bir düğüm noktasının bir serbestlik derecesi vardır. Tüm sistemin serbestlik derecesi 5 olmaktadır. Yapı artık basit sonlu elemanlara bölündüğünden her bir sonlu elemandaki deformasyon ve gerilme değerinin hesaplanması mümkündür. Gerilme değerleri hesaplandığı takdirde sonlu elemanlar metodu ile hesaplanan gerilmelerin analitik olarak hesaplanan gerilme değerinden farklı olduğu görülecektir (Şekil 2.3).



Şekil 2.3 Çubuktaki SEM metodu ile hesaplanan ve gerçek gerilmeler

Bu farklılığın nedeni yapının artık süreksiz olmasıdır. Çubuğu modellemek için kullanılan sonlu eleman sayısının artması ile birlikte gerçek gerilme değerlerine yakın gerilme değerleri elde edilebilir. Çubuğun kuvvet etkisi altında göstermiş olduğu deformasyon her bir sonlu elemanın kuvvet etkisi altında göstermiş oldukları deformasyonların toplamına eşittir. Başka bir ifadeyle çubuğun toplam rijitliği sonlu elemanların rijitliklerinin toplamına eşittir. Sonlu elemanlara bölünmemiş çubukta olduğu gibi sonlu elemanların bir araya gelerek oluşturduğu ağ (mesh) yapıda da “uygulanan kuvvet sonucu oluşan deformasyonların yapının rijitliğine bağlı olması” ilkesi geçerliliğini korumaktadır.

Şimdiye kadar anlatılanları matematiksel olarak ifade etmek için her bir sonlu elemanın rijitliğini  $[k]$  matrisi ile, eleman üzerindeki kuvvetleri  $[f]$  vektörü ile ve deformasyonları da  $[d]$  vektörü ile gösterelim. Bu matrisler arasındaki ilişki

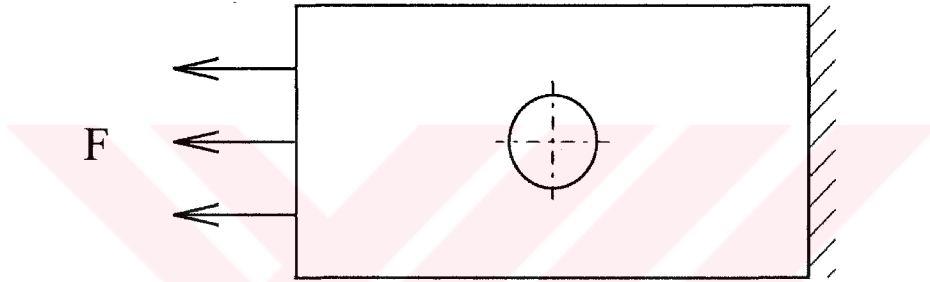
$$[k].[d]=[f] \quad (2.1)$$

şeklinde olmaktadır. Çubuğun toplam rijitliği her bir sonlu elemanın rijitliğinin birbirine monte ederek toplanması ile bulunmaktadır. Tüm yapıya etkiyen kuvvet ile deformasyonlar arasındaki ilişki (2.1) denkleminde benzer tarzda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[K].[D]=[F] \quad (2.2)$$

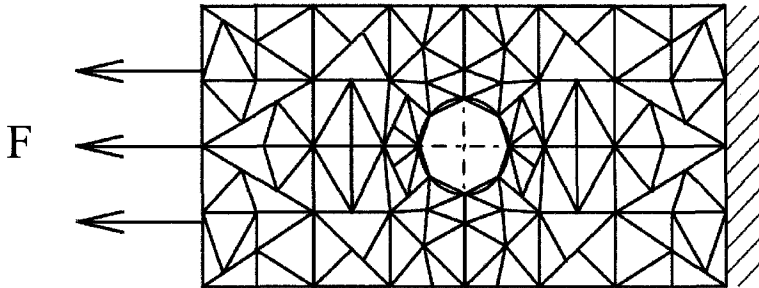
Burada [K] matrisi tüm yapının rijitlik matrisini, [D] tüm yapının deformasyon vektörünü ve [F] de çubuğa etki eden kuvvet vektörünü göstermektedir. Bu matrislerin nasıl hesaplandıklarına ve monte edildiklerine 2.4 nolu bölümde değinilecektir.

Şimdi de biraz daha karmaşık yapıdaki ortasında delik bulunan bir plakayı göz önüne alalım. (Şekil 2.4). Yine burada da çeki zorlanmasına maruz kalan çubuktaki gerilmeleri ve deformasyonları hesaplamak analitik olarak çok kolay olmayacaktır.



Şekil 2.4 Çeki zorlanması altındaki delikli plak

İncelenen yapıyı sonlu elemanlara bölerek bir ağ yapısı oluşturmak hesaplama açısından kolaylık sağlayacaktır. (Şekil 2.5) Çubuk elemanda olduğu gibi burada da “uygulanan kuvvet sonucu oluşan deformasyonların yapının rijitliğine bağlı olması” ilkesi geçerliliğini korumaktadır. Dolayısıyla her bir sonlu elemanın rijitliğinin hesaplanabilmesi durumunda tüm yapının rijitliği ve deformasyonlar hesaplanabilecektir.



Şekil 2.5 Delikli plak için sonlu elemanlar ağı

Çubuk örneğinden farklı olarak plaka örneğinde serbestlik derecesinin hassas sonuçlar elde edebilmek için fazla tutulması nedeniyle sonlu elemanlar modelinin matematik hesaplamaları çok zaman alacaktır. Bu durumda analiz işlemi için bilgisayar programlarının kullanılması gerekli olmaktadır.

Genel olarak bilgisayar programları analiz işlemini üç aşamada gerçekleştirmektedir; Ön işlem, Hesaplama, Son işlem.

**Ön işlem (Pre processing)** aşaması analizi yapılacak olan geometrinin bilgisayar programına tanıtılması olarak özetlenebilir. Yakın bir zamana kadar bu işlemin yapılması amacıyla yapıyı ve sonlu elemanlar ağını tanımlayan bir bilgi dosyası bilgisayar programına verilmekte idi. Ancak günümüzde çoğu bilgisayar programı incelenen yapının bilgisayarda tasarlanmış modelini (CAD modeli) kullanarak sonlu elemanlar ağını ve matematik modeli oluşturabilmektedirler.

**Hesaplama (Processing)** aşaması matematik hesaplamaların gerçekleştiği ve denklemlerin çözüldüğü aşamadır.

**Son işlem (Post processing )** aşaması hesaplama sonuçlarının kullanıcıya verildiği aşamadır. Bu aşamada bilgisayar programı analiz edilen yapıdaki deformasyonları, gerilmeleri, tahmini hata dağılımı, mesnet tepkileri gibi parametreleri çeşitli resimler ve skalalar kullanarak göstermektedir. Gelişmiş bilgisayar programları yapının deformasyonunu animasyonlar kullanarak da gösterebilmektedirler.

### 2.3 Sonlu eleman tipleri

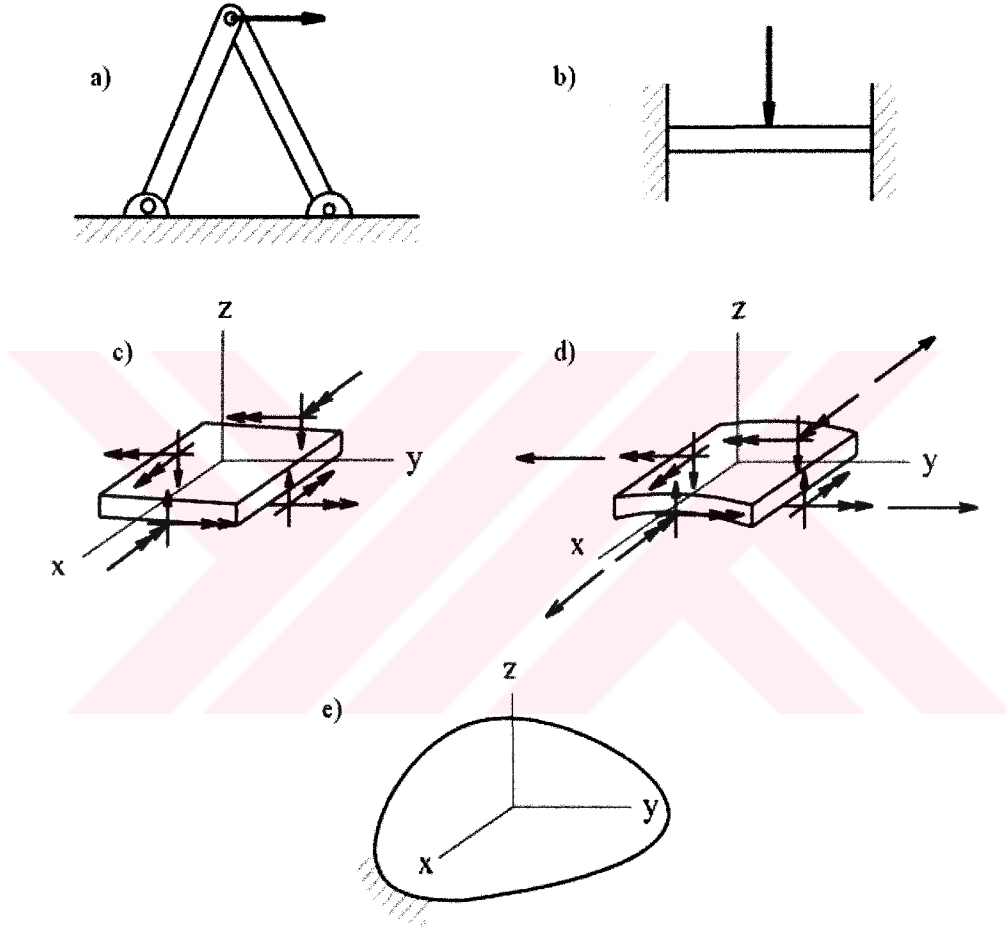
Makine mühendisliği ve mukavemet biliminde incelenmekte olan yapılar sahip oldukları geometrilere ve taşıdıkları yüklere göre farklı şekilde isimlendirilmektedirler.

Bu yapıların en temel ve basit olanı eksenlerine paralel olarak yük taşıyan yapılardır. Bu tip yapıların sadece eksenel yük taşıyabilen ve çekme basma zorlamasına maruz kalabilenlerine **çubuk** ismi verilmektedir (Şekil 2.6.a). Çubuklar iki boyutu üçüncü boyutları yanında oldukça küçük elemanlardır ve bu nedenle eksenleri ile gösterilirler. Diğer taraftan eksenel kuvvet yanı sıra eğilme momenti de taşıyan çubuk yapılara **kiriş** adı verilmektedir (Şekil 2.6.b).

İkinci tipteki yapılar iki boyutu diğerine göre çok büyük olan **plak** ve **kabuk** yapılardır. Plak yapılar büyük olan boyutları yönünde eğilme momenti ve üçüncü boyutlarında da eksenel

kuvvet taşıyan yapılardır (Şekil 2.6.c). Diğer taraftan kabuk yapılar ise plaklar gibi eğilme momenti ile normal kuvvet taşımının yanı sıra ilk iki boyutları boyunca da aksel kuvvet taşıyabilen elemanlardır (Şekil 2.6.d)

Üçüncü tip yapılar ise boyutsal olarak üç boyutu da biri birine yakın elemanların oluşturduğu yapılardır (Şekil 2.6.e). Yukarıdaki sınıflandırmanın haricindeki tüm yapılar bu gruba girmektedir. Bu tip yapılara özel bir isim verilmemiş olup çözüm için genel mukavemet metotları kullanılmaktadır.



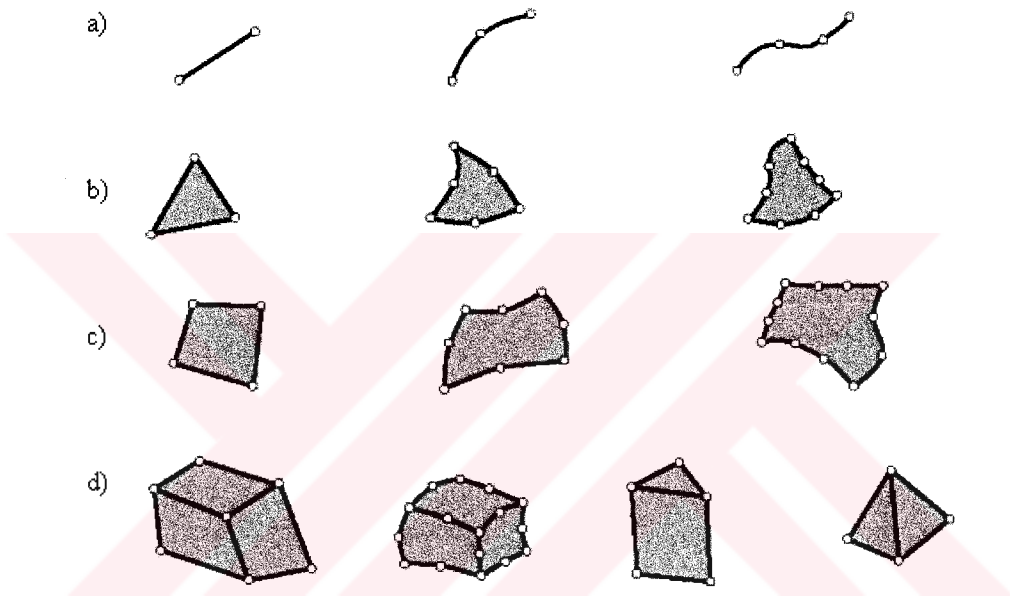
Şekil 2.6 Mukavemet biliminde incelenen yapılar

Yukarıda anlatılan ve sonsuz sayıda elemanın bir araya gelmesi ile oluşan (sürekli bir sistem olan) yapıların sonlu elemanlar modelleri oluşturulurken yine yukarıdakine benzer tarzda sınıflandırılmış olan ve bu yapıların gerilme ve deformasyon özelliklerini modelleyecek sonlu elemanlar kullanılmaktadır (Şekil 2.7).

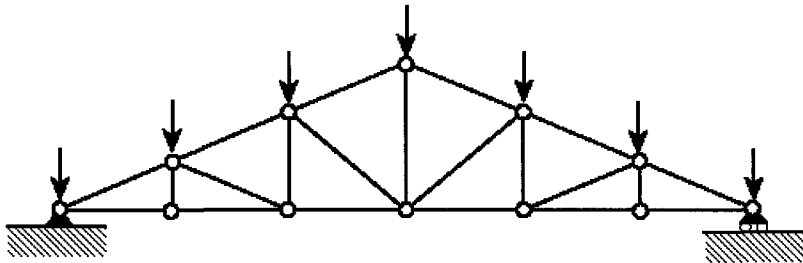
Şekil 2.7.a'da gösterilen elemanlar bir boyutlu (line elements) sonlu elemanlardır. Bu tip sonlu elemanlar kafes sistem, köprü vb.. gibi fiziksel sistemleri modellemede

kullanılmaktadırlar. Bu tipteki sonlu elemanların çoğunluğu sadece eksenlerine paralel doğrultusunda kuvvet taşıyabilmektedirler. Dolayısıyla sadece aksel deformasyon durumunu incelemek ve çubukları modellemek için kullanılmaktadırlar. Sadece kiriş eleman aksel deformasyonun yanı sıra açısıl deformasyonlarında incelenmesine olanak sağlamaktadır.

Bir boyutlu sonlu elemanlar kuvvetleri sadece kendi eksenleri boyunca taşıyabildiklerinden bir boyutlu ismini almaktadırlar. Ancak 2 veya 3 boyutlu uzayda çeşitli şekilde konumlandırılabilirler. Şekil 2.8'de bir kafes yapının çubuk (Bar) elemanlar kullanılarak oluşturulmuş sonlu elemanlar modeli gösterilmektedir.



Şekil 2.7 Çeşitli tipte sonlu elemanlar

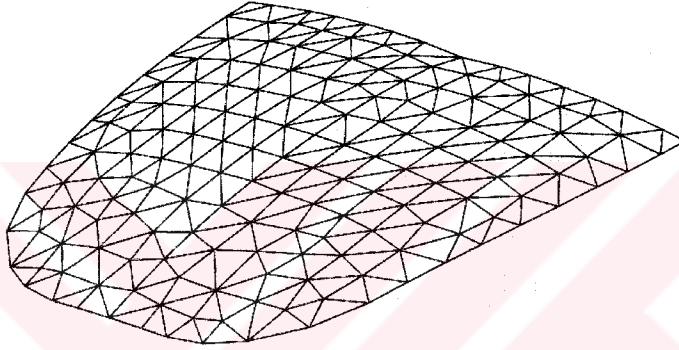


Şekil 2.8 Bir kafes sistemin çubuk elemanlarla oluşturulmuş sonlu elemanlar modeli

Şekil 2.7.b ve 2.7.c'de gösterilen elemanlar iki boyutlu sonlu elemanlar (Plane elements) olup iki eksenli gerilme ve deformasyon halini modellemede kullanılmaktadırlar. Bu

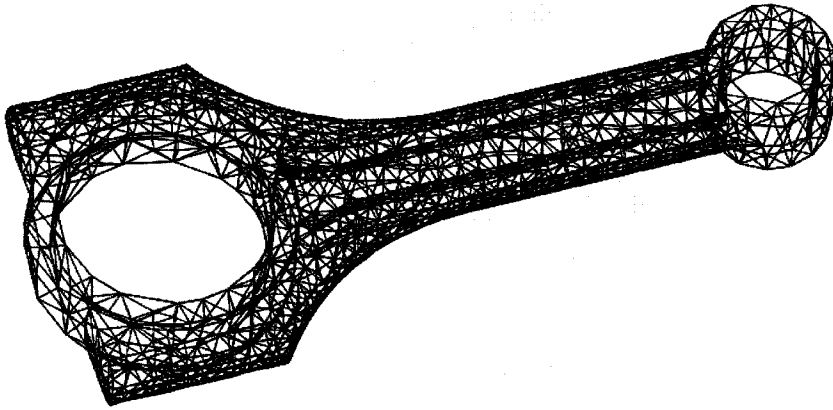
elemanların çoğu sadece öteleme deformasyonuna maruz kalabilirken kabuk (Shell) elemanlar açısall deformasyona maruz kalıp eğilme momenti taşıyabilmektedirler. Genel olarak kalınlıkları diğer boyutlarının yanında çok az olan otomobil karoseri, basınçlı kaplar, plaklar ve kabuk gibi fiziksel elemanların sonlu elemanlar modelini oluşturmada kullanılmaktadırlar. Şekil 2.9'da bir otomobil kaputuna ait üçgensel elemanlar kullanılarak oluşturulmuş ağ yapı görülmektedir.

Şekil 2.7.d'de gösterilen elemanlar üç boyutlu elemanlar olup üç eksenli gerilme halleri modellemek için kullanılmaktadırlar. Bir boyutlu ve iki boyutlu sonlu elemanların aksine bu elemanlarda gerilmeler tamamen üç bileşenlidir. Dolayısıyla incelenecek yapıyı tüm ayrıntılarıyla modellemek için kullanılmaktadırlar.



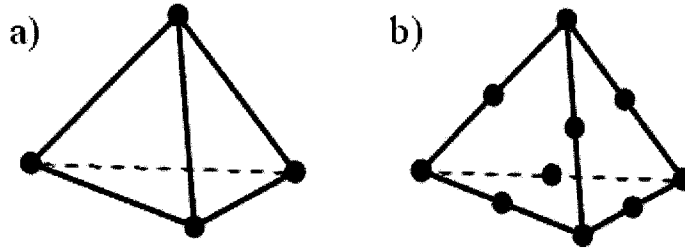
Şekil 2.9 Bir otomobil kaputunun ağ yapısı

Şekil 2.10'da bir biyel kolunun tetrahedron elemanlar kullanılarak oluşturulmuş sonlu elemanlar modeli görülmektedir.



Şekil 2.10 Bir biyel koluna ait ağ yapısı

Sonlu elemanlar gerilmenin kaç ekseninde meydana geldiğinin yanı sıra köşe noktaları haricinde düğüm noktası içerip içermediklerine göre de sınıflandırılabilirler. Sadece köşe noktalarında düğüm noktası bulunan elemanlara Lineer elemanlar, kenar eğrileri üzerinde de düğüm noktası içeren elemanlara Parabolik eleman denilmektedir (Şekil 2.11). Yapılarının daha karmaşık olması nedeniyle parabolik elemanların matematiksel ifadeleri lineer elemanlara göre daha karmaşık olmaktadır. Ancak aynı sonlu eleman büyüklüğü için parabolik elemanlar lineer elemanlara göre daha hassas sonuçlar vermektedirler.



Şekil 2.11 Lineer (a) ve parabolik (b) tetrahedral elemanlar

Yukarıda bahsedilen klasik sonlu elemanların yanı sıra günümüzde kullanılmakta olan sonlu elemanlar analizi yazılımları özel durumları modellemek için kendilerine ait sonlu elemanları da kullanılmaktadırlar. Bu sonlu elemanlar genellikle parçalar arasındaki geçiş yapıyı oluşturmak ve modellenmeyecek olan bir parçanın sonlu elemanlar ağı üzerindeki etkisini modellemek için kullanılmaktadırlar.

## 2.4 Metodun matematik esasları

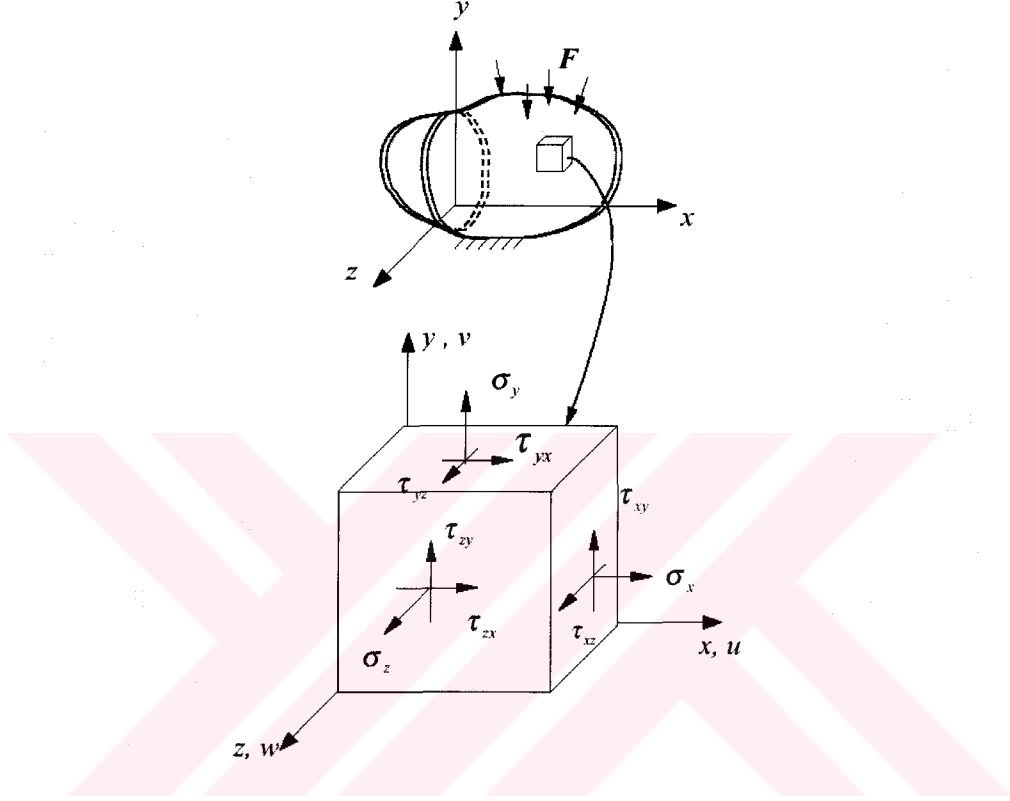
### 2.4.1 Elastisite teorisi

Metodun matematik temellerini daha kolay anlayabilmek için elastisite teorisinin bağıntılarını tekrar gözden geçirelim. Şekil 2.12'de çeşitli kuvvetlerin etkisi altında bulunan rijit bir katı cisim ve içerisindeki bir elemanter eleman gösterilmiştir.

Katı cisim  $x, y, z$  kartezyen eksen takımında şekildeki gibi durmaktadır ve bazı bölgelerinden uzayda sabitlenmiştir. Kuvvet etkisi altında iken rijit katı cisim deforme olmakta ve katı cismin herhangi bir noktasının deformasyonu global eksen takımında  $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$  şeklinde üç bileşenle ifade edilmektedir. Lokal eksen takımında ise deformasyonlar aşağıdaki gibidir;

$$\mathbf{u} = [u, v, w]^T \quad (2.3)$$

Katı cismin uzayda sabitlendiği sınırlarında deformasyon değeri  $u = 0$  olacaktır. Herhangi bir noktada deformasyon sıfırdan farklı bir  $a$  değerinde ise  $u = a$  değerini alacaktır. Katı cismin birim hacmine etki eden kuvvetler (örneğin ağırlık kuvveti) aşağıdaki  $\mathbf{f}$  vektörü ile ifade edilebilir.



Şekil 2.12 Kuvvet etkisi altındaki rijit cisim

$$\mathbf{f} = [f_x, f_y, f_z]^T \quad (2.4)$$

Katı cismin birim yüzeyine etki eden kuvvetler (örneğin sürtünme, basınç kuvveti vb.) aşağıdaki  $\mathbf{T}$  vektörü ile ifade edilebilir.

$$\mathbf{T} = [T_x, T_y, T_z]^T \quad (2.5)$$

Katı cismin herhangi bir  $i$  noktasına etki eden noktasal kuvvetler ise  $\mathbf{P}_i$  vektörü ile gösterilebilir.

$$\mathbf{P}_i = [P_x, P_y, P_z]^T \quad (2.6)$$

Elementer elemanda bu kuvvetler etkisi altında oluşan gerilmeler aşağıdaki gibi altı bileşen ile ifade edilmektedir.

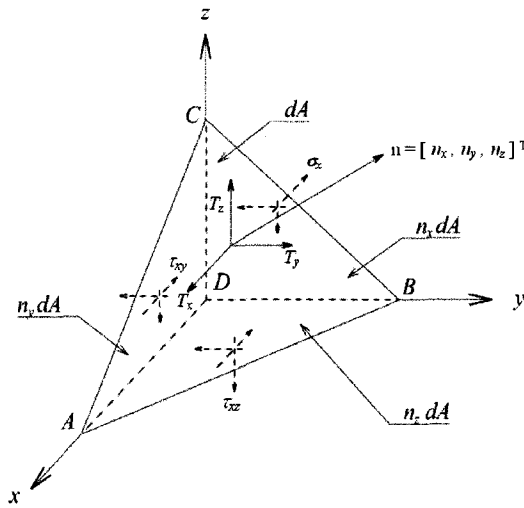
$$\sigma = [ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy} ]^T \quad (2.7)$$

(2.7) denklemindeki  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  ifadeleri normal gerilmeler ve  $\tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$  ifadeleri de kayma gerilmeleridir. Elemanter elemanın hacminin  $dV = dx dy dz$  olduğunu dikkate alarak elemanın yüzeylerindeki kuvvetlerin dengesini ( $\Sigma F_x=0, \Sigma F_y=0, \Sigma F_z=0$ ) yazarsak hacimsel kuvvetler ile bu gerilmeler arasındaki ilişkileri veren (2.8) denkleminde ulaşabiliriz.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Şimdi de katı cismin yüzeyinde bulunan Şekil 2.13'teki gibi bir tetrahedron elemanı göz önüne alalım. Tetrahedron elemanın  $DA, DB,$  ve  $DC$  kenarları  $x, y$  ve  $z$  eksenlerine paralel olsun. Bu durumda  $ABC$  üçgeni ( $dA$  alanı) katı cismin yüzeyindeki alan olmaktadır. Eğer  $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$  vektörü  $ABC$  alanının normal vektörü ise bu durumda tetrahedronun yan yüzeyleri;  $BDC=n_x dA, ADC =n_y dA$  ve  $ADB = n_z dA$  olmaktadır. Bu değerler dikkate alınıp üç eksen doğrultusunda kuvvetlerin eşitliği göz önüne alınırsa yüzeysel kuvvetler ile gerilmeler arasındaki ilişkiyi veren (2.9) denkleminde ulaşılabilir.

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= T_x \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z &= T_y \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z &= T_z \end{aligned} \quad (2.9)$$



Şekil 2.13 Katı cismin içerisindeki bir elemanter tetrahedron

Elemanter elemanda gerçekleşen gerinimler ise yine 2.7 denklemine benzer tarzda altı değişkenli bir vektör olmaktadır (2.10). Buradaki  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  ve  $\varepsilon_z$  değerleri normal gerinimler olmakta,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{xz}$  ve  $\gamma_{xy}$  değerleri ise kayma gerinimleri olmaktadır.

$$\varepsilon = [ \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy} ]^T \quad (2.10)$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$  değerleri ile deformasyonlar arasındaki ilişkileri yazıp (2.11 denklemini) yukarıdaki denkleminde yerine koyacak olursak küçük deformasyon değerleri için gerinim ve deformasyon değerleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibi bulunmuş olur.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\varepsilon = \left[ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^T \quad (2.12)$$

Gerilme ve gerinim arasındaki ilişkiyi bulmak için Hook kanunu kullanılabilir. Lineer elastik malzemeler için gerinim ve gerilme değerleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_y &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \varepsilon_z &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Bu denklemlerdeki  $E$  değeri malzemenin Elastiklik (Young) modülü,  $\nu$  değeri malzemenin Poisson oranı ve  $G$ 'de kaymadaki elastiklik modülü olmaktadır.  $G$  değeri aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.14)$$

(2.13) denklemindeki ifadelerin sağ ve sol tarafları toplanacak olursa ;

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{(1-2\nu)}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2.15)$$

denklemleri elde edilebilir. Kayma gerinimlerine ait ifadelerinde benzer tarzda toplanması ve (2.14) denkleminin de göz önüne alınması suretiyle gerilme ve gerinim değerleri arasındaki ilişki matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

veya ;

$$\sigma = D\varepsilon \quad (2.17)$$

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Buradaki D matrisi 6x6 boyutlarında bir matris olup malzeme özelliklerini tanımladığından malzeme matrisi adını almaktadır.

## 2.4.2 Bir boyutlu çubuk eleman için rijitlik matrisinin oluşturulması

Bölüm 2.2'de değinildiği üzere bir yapıyı oluşturan sonlu elemanların her birinde oluşan deformasyonlar ile sonlu elemanın rijitliği arasında (2.1) denklemindeki gibi bir ilişki vardır. Analiz işlemlerinin başlangıç noktası bu denklemde görülen her bir elemana ait rijitlik matrisi [k]'nın oluşturulması olmaktadır. Kolay olması bakımından ilk önce bir boyutlu çubuk elemanda bu matrisler oluşturulacaktır.

Bir boyutlu gerilme durumunda (2.3), (2.4) ve (2.10) denklemleri sadece x koordinatına bağımlı olup aşağıdaki gibi yazılmaktadırlar.

$$\begin{aligned}
 u &= u(x) \\
 \sigma &= \sigma(x) \\
 \varepsilon &= \varepsilon(x)
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

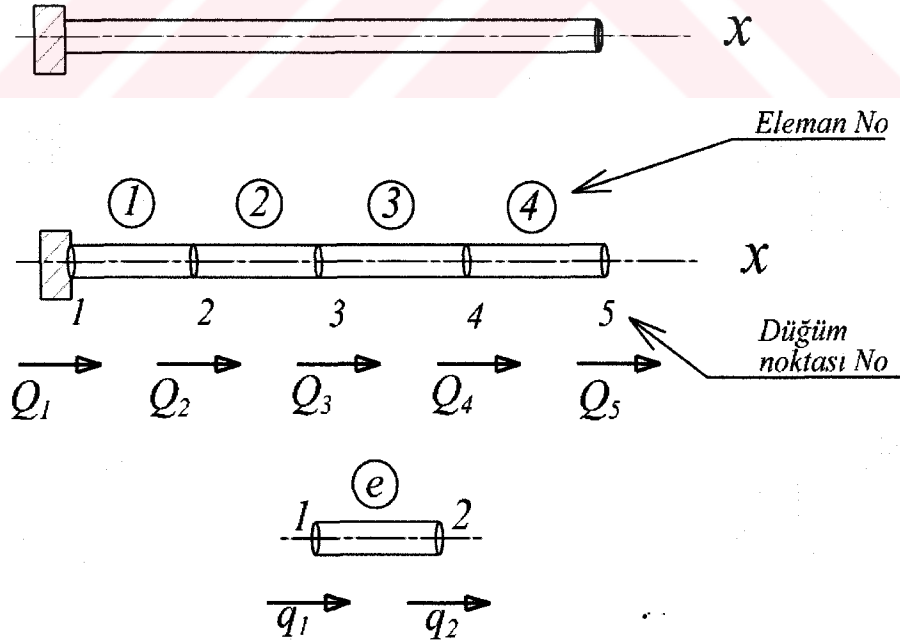
Yine gerilme-gerinim ve gerinim-deformasyon ilişkileri bir boyutlu gerilme durumunda aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\begin{aligned}
 \sigma &= E\varepsilon \\
 \varepsilon &= \frac{du}{dx}
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

Elemanter elemanın hacmi ise kesiti sabit olduğundan aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$dv = A dx \tag{2.21}$$

Bir boyutlu gerilme durumunda bir yapının sonlu elemanlar modelini oluşturmak için Şekil 2.14'deki gibi bir yapıyı göz önüne alalım. Yapının sonlu elemanlar modelini çubuk (Bar) elemanlar kullanarak oluşturduğumuz taktirde model şekildeki gibi olacaktır. 4 adet çubuk eleman kullanarak sonlu elemanlar modelini oluşturalım. Her bir eleman düğüm noktaları vasıtasıyla diğer elemanlara bağlanmaktadır. Düğüm noktaları sadece x yönünde hareket edebileceklerinden her bir düğüm noktasının bir serbestlik derecesi vardır. Beş adet düğüm noktası için tüm sistemin serbestlik derecesi beş olmaktadır.



Şekil 2.14 Bir yapının çubuk elemanlar kullanılarak modellenmesi

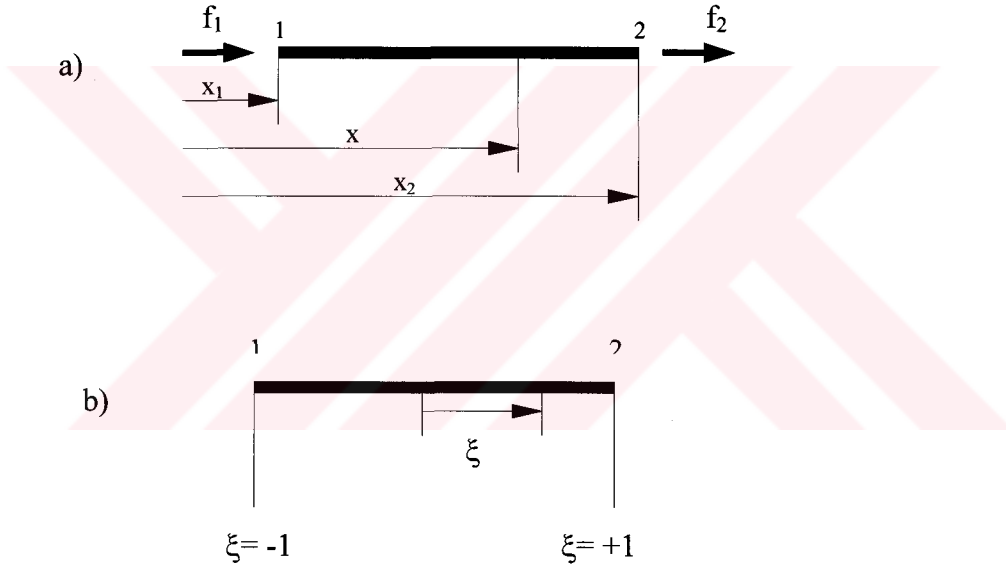
Global olarak düğüm noktalarındaki deformasyonlar ve kuvvetler vektörel olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} Q &= [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5]^T \\ F &= [F_1, F_2, F_3, F_4, F_5]^T \end{aligned} \quad (2.22)$$

Tek bir sonlu elemanı kullanacak olursak deformasyonlar ve kuvvetler aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} q_e &= [q_{e1}, q_{e2}]^T \\ f_e &= [f_{e1}, f_{e2}]^T \end{aligned} \quad (2.23)$$

Bir çubuk eleman boyunca deformasyonları bulmak için Şekil 2.15'deki gibi hem kartezyen (x) hem de doğal ( $\xi$ ) koordinat sistemindeki bir çubuğu göz önüne alalım.



Şekil 2.15 Kartezyen ve doğal koordinat sistemindeki bir çubuk eleman

Doğal koordinat sistemi şekil fonksiyonlarını tanımlamada kullanılacak olup aşağıdaki gibi ifade edilecektir.

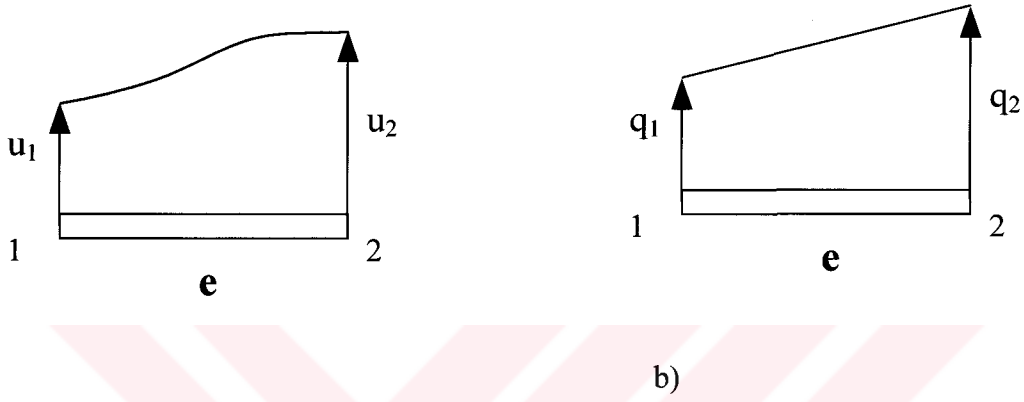
$$\xi = \frac{2}{x_2 - x_1} (x - x_1) - 1 \quad (2.24)$$

(2.24) denkleminde görüldüğü üzere çubuğun 1. noktasında  $\xi = -1$  ve 2. noktasında ise  $\xi = +1$  olmaktadır. Bu koordinat sisteminin kullanılmasıyla şekil fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$$

$$N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$$
(2.25)

Bu şekil fonksiyonları eleman boyunca bilinmeyen yerdeğiştirme değerlerini eleman uçlarındaki deformasyonlar cinsinden ifade etmeye yarayacaklardır. Lineer şekil fonksiyonlarının kullanılması sureti ile eleman içerisindeki deformasyonların lineer olarak değiştiği kabul edilmiştir.



Şekil 2.16 Bir elemandaki gerçek (a) ve lineerleştirilmiş (b) deformasyonlar

Şekil 2.16'dan görüldüğü üzere  $\xi = -1$  için  $N_1=1$  ve  $N_2=0$  ayrıca  $\xi = +1$  için  $N_1=0$  ve  $N_2=1$  olmaktadır. Şekil fonksiyonları tanımlandıktan sonra eleman boyunca yerdeğiştirme eleman uçlarındaki deformasyonlar  $q_1$  ve  $q_2$ 'ye bağlı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u = N_1 q_1 + N_2 q_2$$

veya

$$u = Nq$$
(2.26)

$$N = [N_1, N_2]$$

$$q = [q_1, q_2]^T$$
(2.27)

(2.26) denkleminde  $N$  şekil fonksiyonları matrisi,  $q$  ise eleman deformasyon vektörü olmaktadır. Denklem (2.20)'deki gerinim deformasyon matrisini tekrardan aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$
(2.28)

Türev operatörlerini değiştirecek olursak ;

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \quad (2.29)$$

denklemini elde edilir.  $\frac{du}{d\xi}$  ve  $\frac{d\xi}{dx}$  değerleri ise aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{x_2 - x_1} \quad (2.30)$$

$$u = \frac{1-\xi}{2} q_1 + \frac{1+\xi}{2} q_2 \quad (2.31)$$

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{-q_1 + q_2}{2} \quad (2.32)$$

(2.30), (2.31), (2.32) denklemlerinin (2.29) denkleminde yerine konulması ile eleman boyunca gerinim dağılımını veren ifade bulunmuş olur.

$$\varepsilon = \frac{1}{x_2 - x_1} (-q_1 + q_2) \quad (2.33)$$

$$\varepsilon = Bq$$

Bu ifadedeki B matrisi elemanın gerinim deformasyon matrisi olmaktadır.

$$B = \frac{1}{x_2 - x_1} [-1 \quad 1] \quad (2.34)$$

Gerinim değeri bulunduktan sonra elemandaki gerilmeler Hook kanunu uyarınca aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$\sigma = EBq \quad (2.35)$$

Gerilme ifadesini de bulduktan sonra şimdide çubuk elemanın rijitlik matrisini çıkartmaya çalışalım. Bunun için öncelikle deforme olan yapının potansiyel enerjisini ( $\Pi$ ) yazalım.

$\Pi =$  Gerinim enerjisi + İş potansiyeli (WP)

İncelemekte olduğumuz çubuk için gerinim enerjisi ve iş potansiyeli sırası ile aşağıdaki gibidir.

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma^T \varepsilon A dx \quad (2.36)$$

$$WP = - \int u^T f A dx - \int u^T T dx - \sum_i u_i p_i \quad (2.37)$$

İncelenen yapı artık bir bütün olmayıp sonlu elemanlardan oluştuğundan yukarıdaki ifadeler sonlu elemanların toplam enerjisi cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Pi = \sum_e U_e - \sum_e \int u^T f A dx - \sum_e \int u^T T dx - \sum_i Q_i P_i \quad (2.38)$$

Her bir çubuk eleman için gerinim enerjisi artık aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$U_e = \frac{1}{2} \int \sigma^T \cdot \varepsilon \cdot A \cdot dx \quad (2.39)$$

$\sigma = EBq$  ve  $\varepsilon = Bq$  olduğu dikkate alınır;

$$U_e = \frac{1}{2} \int q^T \cdot B^T \cdot E \cdot B \cdot q \cdot A \cdot dx \quad (2.40)$$

$$U_e = \frac{1}{2} q^T \int [B^T \cdot E \cdot B \cdot A \cdot dx] q \quad (2.41)$$

$dx = \frac{x_2 - x_1}{2} d\xi = \frac{l_e}{2} d\xi$  değerleri ile;

$$U_e = \frac{1}{2} q^T \left[ A_e \cdot \frac{l_e}{2} \cdot E_e \cdot B^T \cdot B \int_{-1}^1 d\xi \right] q \quad (2.42)$$

$$U_e = \frac{1}{2} q^T \cdot A_e \cdot l_e \cdot E_e \cdot \frac{1}{l_e^2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} q \quad (2.43)$$

$$U_e = \frac{1}{2} q^T \frac{A_e E_e}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} q \quad (2.44)$$

$$U_e = \frac{1}{2} q^T \cdot k_e \cdot q$$

(2.44) denklemindeki  $k_e$  ifadesi çubuk elemanın rijitlik matrisi olup aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$k^e = \frac{E_e A_e}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

(2.45) denklemini yardımıyla her bir sonlu elemanın rijitlik matrisleri hesaplanabilmektedir. Hesaplama sonrası bu matrislerin tüm yapıya ait rijitlik matrisini oluşturmak üzere bir araya

getirilmesi gerekmektedir. Bu işlem kısaca aşağıdaki gibi yapılmaktadır.

Öncelikle tüm  $[k_e]$  matrislerinin elemanları global rijitlik matrisi içerisinde kendilerine ayrılan satır ve sütunlara yazılmaktadır. Daha sonra aynı satır ve sütunda bulunan elemanlar toplanmaktadır. Aşağıda incelemekte olduğumuz 4 çubuktan oluşan sonlu elemanlar modeline ait global rijitlik matrisi gözükmemektedir.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{A_1}{L_1} & -\frac{A_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A_1}{L_1} & \left(\frac{A_1}{L_1} + \frac{A_2}{L_2}\right) & -\frac{A_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A_2}{L_2} & \left(\frac{A_2}{L_2} + \frac{A_3}{L_3}\right) & -\frac{A_3}{L_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_3}{L_3} & \left(\frac{A_3}{L_3} + \frac{A_4}{L_4}\right) & -\frac{A_4}{L_4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{A_4}{L_4} & \frac{A_4}{L_4} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Serbestlik derecesi beş olduğundan  $[K]$  matrisinin boyutu  $5 \times 5$ 'tir. Serbestlik derecesinin artması ile beraber hesaplamaların da artıyor olması nedeni ile bilgisayarda hesaplama yapmak gerekli olmaktadır.  $[k]$  matrisini elde etmek için günümüzdeki sonlu elemanlar analizi yazılımları kendilerine özgü algoritmaları kullanmaktadırlar.

$[K]$  matrisinin oluşturulmasını takiben incelenen sisteme ait denge denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \frac{A_1}{L_1} & -\frac{A_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A_1}{L_1} & \left(\frac{A_1}{L_1} + \frac{A_2}{L_2}\right) & -\frac{A_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A_2}{L_2} & \left(\frac{A_2}{L_2} + \frac{A_3}{L_3}\right) & -\frac{A_3}{L_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_3}{L_3} & \left(\frac{A_3}{L_3} + \frac{A_4}{L_4}\right) & -\frac{A_4}{L_4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{A_4}{L_4} & \frac{A_4}{L_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

veya ;

$$[K] [Q] = [F] \quad (2.48)$$

Artık  $[K]$  ve  $[F]$  matrisleri bilindiğinden yukarıdaki denklem kullanılarak  $[Q]$  deformasyon

matrisi dolayısıyla gerilmeler hesaplanabilir.

### 2.4.3 Tetrahedron eleman için rijitlik matrisinin oluşturulması

Çoğu mühendislik problemi üç boyutlu olup analiz edilecek yapılar için üç boyutlu sonlu elemanların kullanılması gerekli olmaktadır. Üç eksenli gerilme halinden hatırlanacağı üzere deformasyon, gerilme, gerinim değerleri aşağıdaki gibidir.

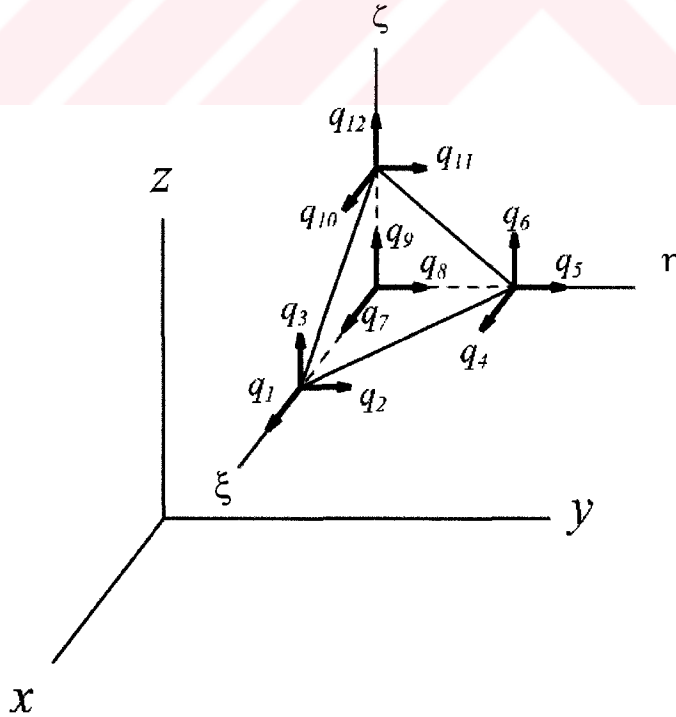
$$u = [ u , v , w ]^T \quad (2.49)$$

$$\sigma = [ \sigma_x , \sigma_y , \sigma_z , \tau_{yz} , \tau_{xz} , \tau_{xy} ]^T \quad (2.50)$$

$$\varepsilon = [ \varepsilon_x , \varepsilon_y , \varepsilon_z , \gamma_{yz} , \gamma_{xz} , \gamma_{xy} ]^T \quad (2.51)$$

$$\sigma = D \varepsilon \quad (2.52)$$

Şimdi analiz etmek istediğimiz yapıyı Lineer tetrahedron elemanlar kullanarak modelleyeceğimizi düşünelim ve Şekil 2.17'deki gibi bir tetrahedron elemanı göz önüne alalım. Lineer tetrahedron elemanın dört adet düğüm noktası bulunmakta olup her bir düğüm noktasının 3 öteleme serbestlik derecesi bulunmaktadır. Dolayısıyla lokal ve global koordinatlarda deformasyon vektörü aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.17 Kartezyen ve doğal koordinat sistemindeki tetrahedral eleman

$$\begin{aligned} q &= [q_1, q_2, \dots, q_{12}]^T \\ Q &= [Q_1, Q_2, \dots, Q_N]^T \end{aligned} \quad (2.53)$$

(2.53) denklemindeki N toplam serbestlik derecesini göstermektedir. Eleman boyunca deformasyonları tanımlamak için artık 4 şekil fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi \\ N_2 &= \eta \\ N_3 &= \zeta \\ N_4 &= 1 - \xi - \eta - \zeta \end{aligned} \quad (2.54)$$

Tetrahedral elemanın herhangi bir noktasındaki yer değiştirmeler şekil fonksiyonları kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$u = Nq \quad (2.55)$$

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

(2.54) denklemindeki şekil fonksiyonları aynı zamanda yerdeğiştirme değerinin arandığı noktaların x, y, z koordinatlarını tanımlamada da kullanılabilirler.

$$\begin{aligned} x &= N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 \\ y &= N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 \\ z &= N_1z_1 + N_2z_2 + N_3z_3 + N_4z_4 \end{aligned} \quad (2.57)$$

(2.54) denkleminde şekil fonksiyonlarının değerlerini alıp (2.57) denklemine koyup, daha sonra bu denklemi  $x_{ij} = x_i - x_j$ ,  $y_{ij} = y_i - y_j$ ,  $z_{ij} = z_i - z_j$  ifadeleri ile sadeleştirirsek kartezyen koordinatlar ile doğal koordinatlar arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki denkleme ulaşabiliriz.

$$\begin{aligned} x &= x_4 + x_{14}\xi + x_{24}\eta + x_{34}\zeta \\ y &= y_4 + y_{14}\xi + y_{24}\eta + y_{34}\zeta \\ z &= z_4 + z_{14}\xi + z_{24}\eta + z_{34}\zeta \end{aligned} \quad (2.58)$$

Yukarıdaki denklemde kısmi türevlerin alınması ve türev operatörlerinin değiştirilmesi sureti ile kartezyen ve doğal koordinat sistemlerindeki gerinim ifadeleri arasındaki ilişki bulunmuş olur. Örneğin **u** deformasyon değeri için gerinim ifadeleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2.59)$$

Yukarıdaki denklemdeki  $\mathbf{J}$  ifadesi doğal ve kartezyen koordinat sistemleri arasındaki dönüşüm matrisi olup (Jacobian matrisi) aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{14} & y_{14} & z_{14} \\ x_{24} & y_{24} & z_{24} \\ x_{34} & y_{34} & z_{34} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

(2.59) denklemindeki ifadede dönüşüm matrisinin tersi denklemin sol tarafına atılacak olursa (2.62) denklemi elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (2.62)$$

Bu denklemde  $\mathbf{A}$  dönüşüm matrisinin tersi olup aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{24}z_{34} - y_{34}z_{24} & y_{34}z_{14} - y_{14}z_{34} & y_{14}z_{24} - y_{24}z_{14} \\ z_{24}x_{34} - z_{34}x_{24} & z_{34}x_{14} - z_{14}x_{34} & z_{14}x_{24} - z_{24}x_{14} \\ x_{24}y_{34} - x_{34}y_{24} & x_{34}y_{14} - x_{14}y_{34} & x_{14}y_{24} - x_{24}y_{14} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Denklem (2.51)'deki gerinim deformasyon ilişkilerinin kullanılması, kartezyen koordinat sistemi ile doğal koordinat sistemi arasındaki (2.62) denklemindeki dönüşümün dikkate alınması ve deformasyon değerlerinin  $\mathbf{u} = \mathbf{Nq}$  olarak ifade edilmesi ile sureti ile gerinim

matrisi artık aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\varepsilon = Bq \quad (2.64)$$

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{13} & 0 & 0 & -A_1^{\sim} & 0 & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & -A_2^{\sim} & 0 \\ 0 & 0 & A_{31} & 0 & 0 & A_{32} & 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & -A_3^{\sim} \\ 0 & A_{31} & A_{21} & 0 & A_{32} & A_{22} & 0 & A_{33} & A_{23} & 0 & -A_3^{\sim} & -A_2^{\sim} \\ A_{31} & 0 & A_{11} & A_{32} & 0 & A_{12} & A_{33} & 0 & A_{13} & -A_3^{\sim} & 0 & -A_1^{\sim} \\ A_{21} & A_{11} & 0 & A_{22} & A_{12} & 0 & A_{23} & A_{13} & 0 & -A_2^{\sim} & -A_1^{\sim} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$A_1^{\sim} = A_{11} + A_{12} + A_{13}$$

$$A_2^{\sim} = A_{21} + A_{22} + A_{23}$$

$$A_3^{\sim} = A_{31} + A_{32} + A_{33}$$

$$(2.66)$$

Tetrahedral elemanın rijitlik matrisini elde etmek için gerinim enerjisini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$U_e = \frac{1}{2} \int_e \varepsilon^T D \varepsilon dV$$

$$U_e = \frac{1}{2} q^T B^T D B q \int_e dV$$

$$U_e = \frac{1}{2} q^T V_e B^T D B q$$

$$U_e = \frac{1}{2} q^T k^e q$$

$$(2.67)$$

yukarıdaki denklemde  $k_e$  elemanın rijitlik matrisi olup aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$k_e = V_e B^T D B$$

$$(2.68)$$

(2.68) denklemindeki  $V_e$  ifadesi elemanın hacmi olup  $\frac{1}{6} |\det \mathbf{J}|$  olmaktadır. Her bir tetrahedron

eleman için rijitlik matrisi hesaplandıktan sonra bu rijitlik matrisleri tüm yapıya ait rijitlik matrislerini elde etmek üzere bir araya getirilmelidirler. 4 noktalı tetrahedron elemanın 12 serbestlik derecesi bulunduğundan her bir rijitlik matrisinin boyutu 12x12'dir. Bu durumda hesaplamalar uzayacağından tüm yapının rijitlik matrisini elde etmek için bilgisayar yazılımlarının kullanılması gerekli olmaktadır.

Tüm yapıya ait rijitlik matrisinin oluşturulması ve sınır koşullarının uygulanmasını takiben

yapıya etki eden kuvvetler ve oluşan deformasyonlar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$KQ = F \quad (2.69)$$

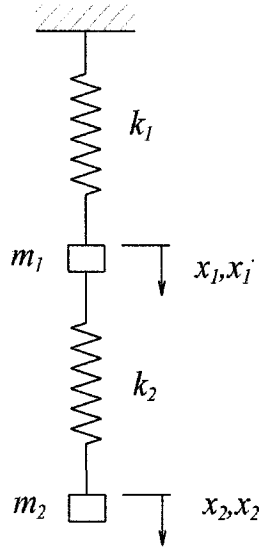
Yukarıdaki denklem takımının çözülmesi ve deformasyonların bulunması sonucu elemanlardaki gerilmeler aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} \sigma &= D\varepsilon \\ \varepsilon &= Bq \\ \sigma &= \mathbf{D} \mathbf{B} q \end{aligned} \quad (2.70)$$

#### 2.4.4 Dinamik inceleme

Şimdiye kadar sonlu elemanlar analizi yöntemi ile çeşitli yapıların statik analizlerini yaparak elemanlardaki gerilme ve deformasyonların nasıl hesaplandığını gördük. Gerilme ve deformasyonların yanı sıra incelenen yapının zamana bağlılık gösteren karakterleri ve doğal frekans değerleri de analiz edilmesi gereken özelliklerdir. Keza bir makine elemanı kendi doğal frekans değerleri ile çakışan frekanstaki bir zorlanmaya maruz bırakılırsa sistemde genlikler sonsuza gidecek ve **rezonans** olayı meydana gelerek eleman tahrip olacaktır.

Sonlu elemanlar metodu ile bir sistemin doğal frekans analizlerinin nasıl yapıldığını araştırmak için ilk önce Şekil 2.18'deki gibi iki serbestlik dereceli bir kütle yay sistemini göz önüne alalım.



Şekil 2.18 İki serbestlik dereceli bir kütle yay sistemi

Yayların kütlesiz olduğu kabulü yapılarak yaylara asılmış kütlelere etki eden kuvvetlerin dengesini aşağıdaki gibi yazarsak kütlelerin hareketlerinin diferansiyel denklemini elde etmiş oluruz.

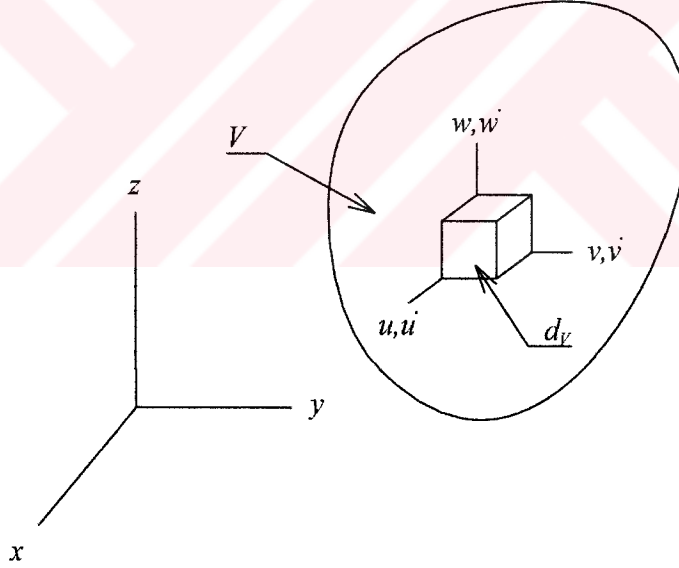
$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' &= -k_2 (x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Yukarıdaki denklemleri bilgisayar ortamında daha kolay tanımlamak için matris formunda yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.72)$$

$$[M]x'' + [K]x = 0 \quad (2.73)$$

(2.73) denklemindeki  $[M]$  matrisi bu sistemin **kütle matrisi**,  $[K]$  matrisi ise **rijitlik matrisi** olmaktadır. Şimdi de genel olarak rijitlik matrisinin nasıl hesaplandığını görmek için şekil 2.19'daki gibi bir katıyı göz önüne alalım.



Şekil 2.19 Kütlesi homojen olan bir katı ve içindeki elemanter eleman

$\rho$  elemanın yoğunluğu,  $u^\bullet$  elemanın herhangi bir  $x$  noktasındaki hız vektörü olmak üzere katı cismin kinetik enerjisi aşağıdaki gibi formüle edilebilir.

$$T = \int_V u^{\bullet T} u^\bullet \rho d_V \quad (2.74)$$

$u = Nq$  olduğu ve şekil fonksiyonlarının zamandan bağımsız olduğu düşünülürse her bir sonlu eleman için enerji denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$T_e = \frac{1}{2} q^T \left[ \int_e \rho N^T N d_v \right] q \quad (2.75)$$

Yukarıdaki denklemde köşeli parantezin içindeki ifade elemanın kütle matrisinin genel ifadesi olmaktadır.

$$m_e = \int_e \rho N^T N d_v \quad (2.76)$$

Bir boyutlu çubuk eleman için  $q = [q_1, q_2]^T$  ve  $N = [N_1, N_2]$  olduğu dikkate alınırsa kütle matrisi aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$m^e = \rho \int_e N^T N A dx$$

$$m^e = \frac{\rho A_e l_e}{2} \int_{-1}^1 N^T N d\xi \quad (2.77)$$

$$m^e = \frac{\rho A_e l_e}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tetrahedral eleman için yerdeğiştirme ve şekil fonksiyonlarının aşağıdaki gibi oldukları hatırlanıp (2.76) denklemindeki integral alınırsa kütle matrisi (2.80) denklemindeki gibi hesaplanmış olur.

$$u = [u, v, w]^T \quad (2.78)$$

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

Tüm elemanlar için kütle matrisinin hesaplanmasından sonra hesaplanan bu matrisler monte edilerek global kütle matrisi elde edilebilir. Kütle matrisinin elde edilmesini takiben incelenen yapının hareketinin diferansiyel denklemi (2.81) denklemindeki gibi yazılabilir.

$$m^e = \frac{\rho V_e}{20} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

$$MQ'' + KQ = F \quad (2.81)$$

Serbest titreşim hareketi durumunda sisteme etki eden kuvvet  $F=0$  olacağından hareket denkleminin aşağıdaki gibi olacaktır.

$$MQ'' + KQ = 0 \quad (2.82)$$

(2.78) denkleminin çözümünü elde etmek için  $Q$  yerdeğiştirme değerinin aşağıdaki gibi değiştiğini kabul edelim.

$$Q = U \sin \omega t \quad (2.83)$$

Bu denklemde  $U$  titreşim hareketinin genliği ve  $\omega$  titreşim hareketinin dairesel frekansıdır. Bu denklemde türevlerin alınması ve (2.83) denkleminin (2.82) denkleminde yerine konulması suretiyle aşağıdaki denkleme ulaşılabilir.

$$[K - \omega^2 M] U = 0 \quad (2.84)$$

Titreşim hareketi için  $U \neq 0$  olacağından (2.84) denkleminin artık aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[K - \omega^2 M] = 0 \quad (2.85)$$

Bu denklemin çözülmesi suretiyle aranılan  $\omega$  değerleri bulunabilir. Boyutu  $n \times n$  olan bir rijitlik matrisi (2.85) denkleminin için  $n$  adet kök veya doğal frekans değeri vermektedir. (2.72) denklemin göz önüne alınması bu denklemin çözülmesi ile 2 adet doğal frekans değerinin hesaplanabileceği görülebilir.

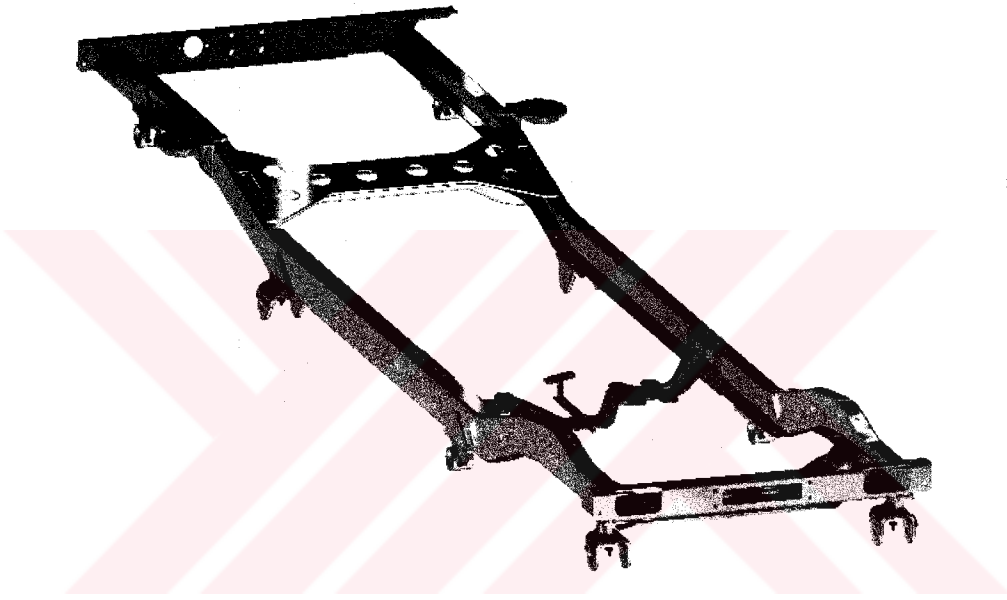
Hesaplanan  $n$  adet doğal frekans değerinden en küçük olanı  $\omega_1$  ile gösterilip temel frekans adını almaktadır. Her bir  $\omega_i$  değerine karşılık (2.84) denkleminde  $U_i$  yer değiştirmesi yada mod şekli hesaplanabilmektedir. Bu mod şekilleri titreşim hareketi esnasında hareketin şeklini belirtmektedir.



### 3. ÇEŞİTLİ ZORLANMA DURUMLARI İÇİN JEEP ŞASİSİNİN STATİK VE DİNAMİK ANALİZLERİNİN YAPILMASI

#### 3.1 Jeep şasisine ait sonlu elemanlar ağının hazırlanması

Günümüzde kullanılmakta olan sonlu elemanlar analizi yazılımları bilgisayar destekli tasarım programları ile entegre çalışabildiklerinden incelenmek istenen yapının bilgisayarda modeli tasarlanmış ise bu modeli kullanarak sonlu elemanlar ağını oluşturabilmektedirler. İncelemekte olduğumuz jeep şasisinin bilgisayardaki modeli CATIA V5 programı kullanılarak katı ve montaj modelleme metotları ile Şekil 3.1'deki gibi oluşturulmuştur.

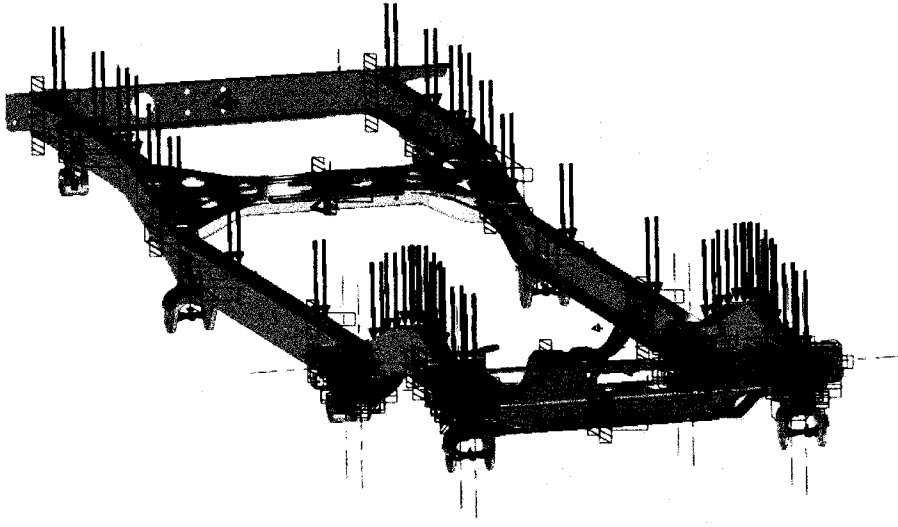


Şekil 3.1 Jeep şasisinin CATIA V5 programında oluşturulmuş montaj modeli

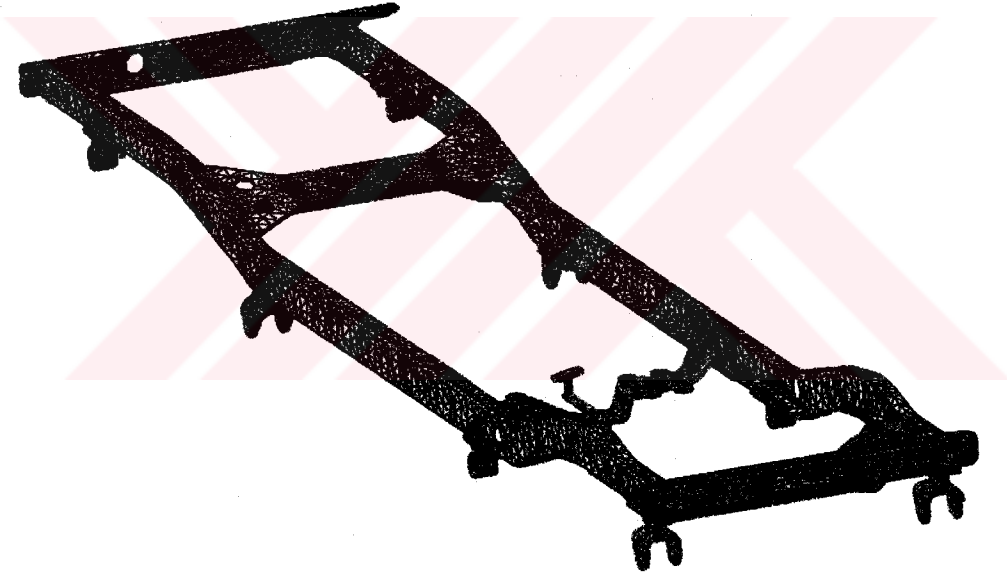
Oluşturulan bu montaj modeli ve montaj modellemede tanımlanan sınırlamalar kullanılarak şasinin sonlu elemanlar modeli ve her bir parçanın sonlu elemanlar ağı CATIA programı tarafından otomatik olarak oluşturulmuştur (Şekil 3.2, Şekil 3.3).

Gerilmelerin az olduğu parçalarda hesaplama zamanını azaltmak ve bilgisayar kapasitesini optimum kullanmak için üç boyutlu sonlu elemanlardan 4 noktalı (lineer) tetrahedron eleman kullanılmıştır. Gerilmelerin yüksek olduğu civata, perçin gibi parçalarda ise 10 noktalı (parabolik) tetrahedron elemanlar kullanılmıştır.

CATIA V5 programı ile ağ yapılar oluşturulurken farklı parçaların ağ yapılarını biri birine bağlamak için program geçiş bölgesinde bir ağ yapı (Spider) oluşturmaktadır. Kullanılan parçalar arası geçiş (Connection) tipine göre Spider isimli yapı değişmektedir. Jeep şasisinin,



Şekil 3.2 Jeep şasisinin sonlu elemanlar modeli



Şekil 3.3 Jeep şasisinin tetrahedron elemanlar kullanılarak oluşturulmuş ağ yapısı

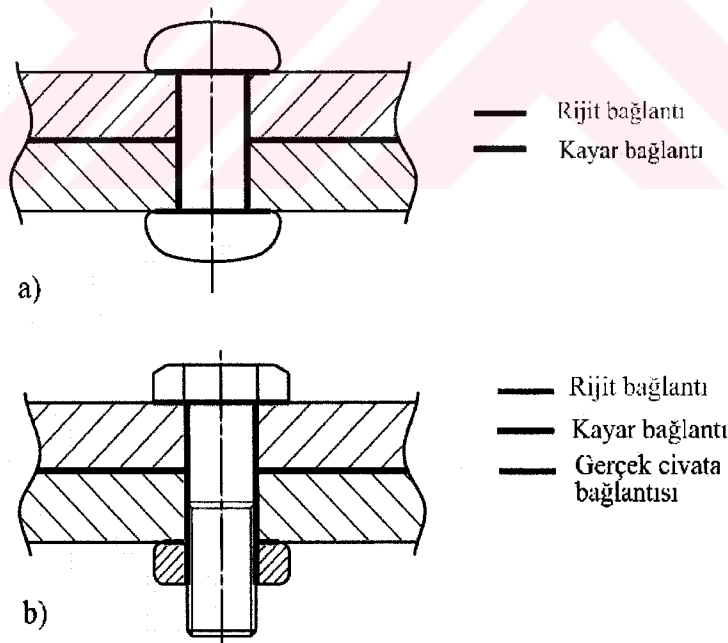
ön aksın ve arka aksın sonlu elemanlar modellerini oluştururken 3 tip geçiş kullanılmıştır; Rijit bağlantı, kayar bağlantı ve gerçek civata bağlantısı.

**Rijit bağlantı (Fastened Connection)** birbirine bağlanacak ağ yapıların bağlandıkları düğüm noktalarında tüm hareket yönleri için hareket miktarlarını her iki parçada da aynı yapacak şekilde çalışan bir sınırlamadır. Dolayısıyla bu bağlantının kullanılması suretiyle iki parça biri birilerine temas eden düğüm noktalarından sabitlenmiş olmaktadır.

**Kayar bağlantı (Slider Connection )** birbirine bağlanacak ağ yapıların bağlandıkları düğüm noktalarında bağlanan yüzeylerin sadece normalleri doğrultusundaki hareket için parçaları sınırlandırmaktadır. Dolayısıyla bu tip sınırlama kullanılması suretiyle parçaların biri birilerine dokunan yüzeylerinden diğer parçanın içine giremeyecekleri ancak yüzeylere teğet doğrultuda kayabilecekleri tanımlanmış olmaktadır.

**Gerçek cıvata bağlantısı (Bolt Tightening Connection)** cıvata ve somun arasında rijit bağlantı tipinde bir sınırlama oluşmasını sağlamaktadır. Ancak bu bağlantı tipinde rijit bağlantıdan farklı olarak cıvata ve somun arasındaki ön gerilme kuvveti de verilerek hesaplamalar yapılabilmektedir.

Şekil 3.4'te bu bağlantıların jeep şasisindeki kullanımına ait 2 örnek görülmektedir. Şekil 3.4.a'da görüldüğü gibi perçin başı ile kirişler arasındaki sürtünme bağlantısını tanımlayabilmek için rijit bağlantı, diğer taraftan deforme olmuş yapıda perçin gövdesinin delik yüzeylerinden içeri girmesini engellemek için kayar bağlantı kullanılmıştır. Benzer tarzda Şekil 3.4.b'de görüldüğü gibi somun ile cıvata arasındaki bağlantıyı tanımlamak için gerçek cıvata bağlantısı, diğer elemanlar arasındaki bağlantıyı tanımlamak için rijit ve kayar bağlantılar kullanılmışlardır.



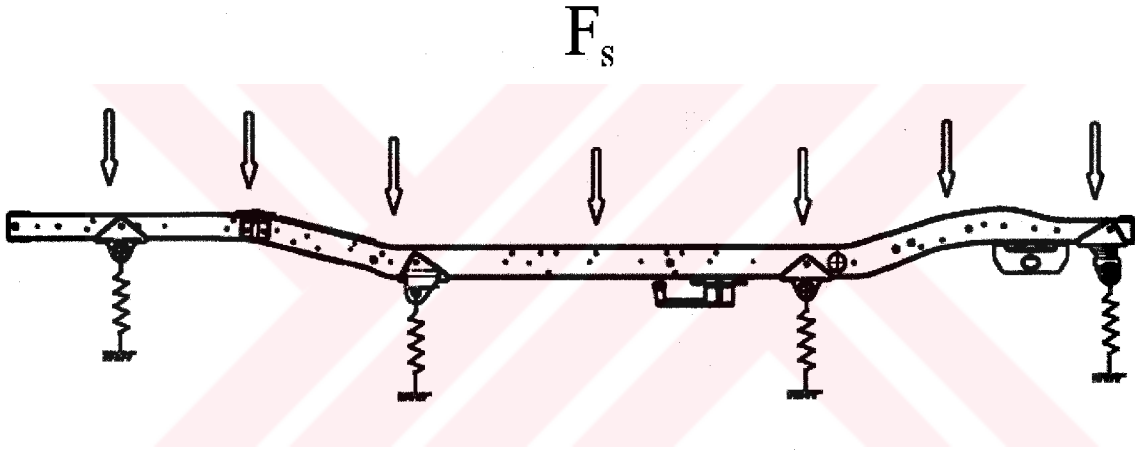
Şekil 3.4 CATIA programında parçalar arası geçiş tanımlanması

Diğer taraftan bilgisayarda modellenmemiş olan süspansiyon sisteminin modellenmesi için CATIA programında yay elemanlar ( Smooth spring virtual part) kullanılmışlardır. Programa

eş değer yay katsayıları girilirken hem yayların (önde 76000 N/m, arkada 80000 N/m) hem de pnömatik tekerleğin yay sabitleri göz önünde tutulmuştur.

### 3.2 Statik ağırlık etkisi altında iken şasinin analizi

GTD model jeep şasisi ilk aşamada kendi ağırlığı (Yüksüz halde iken taşıtın ağırlığı 3000 daN) ve taşımış olduğu yükten (maksimum 2000 daN) kaynaklanan düşey statik yüke ( $F_s$ ) karşı kontrol edilmiştir. Statik yük ve taşınan yükün ağırlığı etkisi altında iken şaside bulunan gerilmelerin akma sınırına göre oldukça düşük olması nedeni ile analiz sırasında bu ağırlığın yanı sıra şasisin akma sınırına gelinceye kadar ne kadarlık bir kuvvete dayanabileceği test edilmiştir. Şasisin analizi için kullanılan matematik model Şekil 3.5'deki gibi hazırlanmıştır.



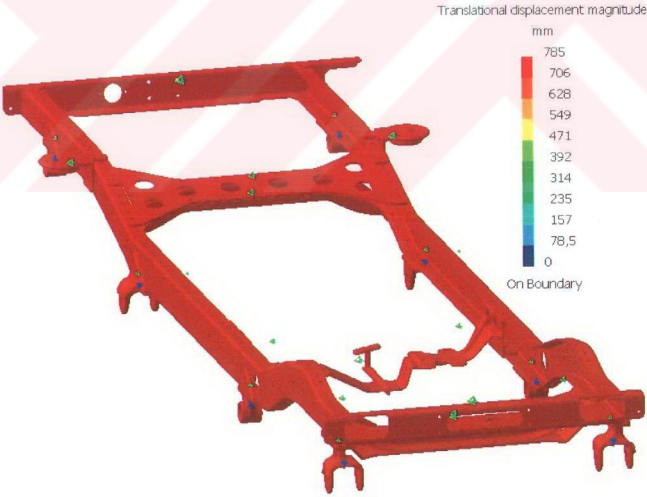
Şekil 3.5 Şasinin analizi için kullanılan matematik modeli

Akma sınırına gelinceye kadar, yayılı olarak toplamda 170000N kuvvet etkisi altında bırakılan jeep şasisinde CATIA programınca hesaplanan maksimum gerilme  $211 \text{ N/mm}^2$  olmuştur (Şekil 3.6). Dolayısıyla şasisin gerilmeler bakımından tehlikeli bölgede olması için 170000N'dan daha büyük bir kuvvetle zorlanması gerekmektedir.

Analiz işlemi sonucu bulunan maksimum deformasyon değeri 785mm'dir (Şekil 3.7). Bu kadar yüksek bir deformasyon değeri 170000 N kuvvet etkisi altında süspansiyon sisteminin çökmesinden kaynaklanmaktadır. Pratikte bu süspansiyon sisteminin bu kadar deforme olmasına müsaade edilmeyeceğinden şasi düşey yükleme sonucu statik durumda akma sınırına ulaşmayacaktır.



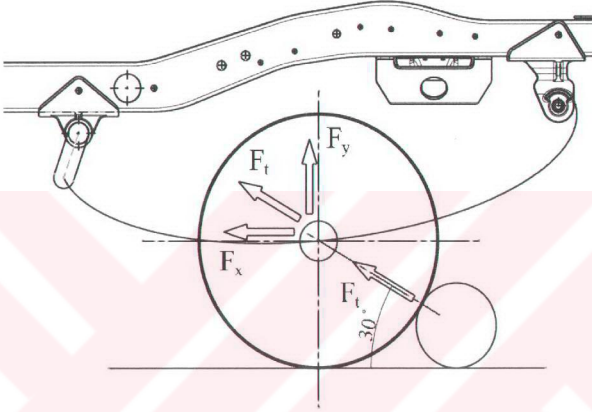
Şekil 3.6 Düşey yükleme sonucu şasi bulunan gerilmeler



Şekil 3.7 Düşey yükleme sonucu süspansiyon sisteminin deformasyonu

### 3.3 Tek bir ön tekerleğin bir darbeye maruz kalması durumunda şasisin analizi

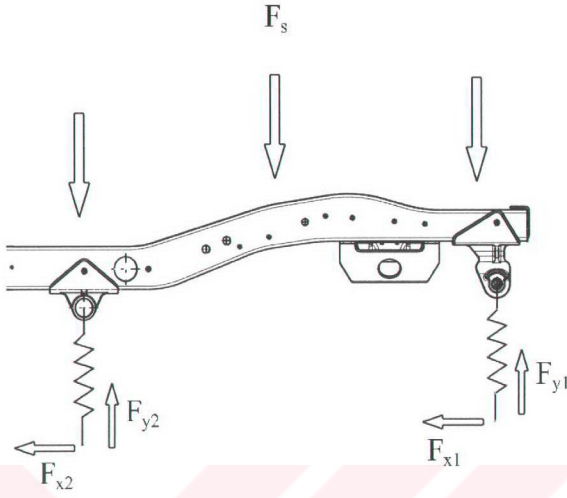
Hareket halinde iken GTD model jeep'in şasisini zorlayacak olan kuvvetlerden biri de araç tekerleklerinden bir veya birkaç tanesinin çukura girmesi , bir tümseğe çarpması sonucu oluşan darbe kuvvetidir. Ön tekerleklerden birinin bu şekilde darbeye maruz kalması sonucu ön tekerlek ve dolayısı ile şasi Şekil 3.8'deki gibi bir  $F_t$  kuvvetine maruz kalacaktır.



Şekil 3.8 Ön tekerleğe etki eden darbe kuvveti

$F_t$  kuvvetinin değeri değişik yol şartlarında farklı olacağından analiz işlemi sırasında bu kuvvetin değerinin 2000 daN olduğu ve zeminle 30°'lik bir açı yapacak şekilde etkidiği kabul edilmiştir. Bu kuvvet araç yaklaşık 20 km/h hızda hareket etmekte iken tekerlek 20 cm'lik bir tümseğe çarptığında oluşmaktadır. Şasisin analizi için kullanılan matematik model Şekil 3.9'daki gibi oluşturulmuştur.

Darbe kuvvetinin yanı sıra aracın statik durumdaki 3000 daN ağırlığı da şasiye etki ettirildikten sonra yapılan hesaplama sonucu bulunan gerilme değerleri Şekil 3.10'daki gibi olup maksimum gerilme 140 N/mm<sup>2</sup>'dir. Diğer taraftan deformasyon dağılımı Şekil 3.11'deki gibi olup süspansiyon sisteminin maksimum deformasyonu 123mm'dir.



Şekil 3.9 Ön tekerleğe gelen darbe kuvvetini tanımlamak için kullanılan matematik model



Şekil 3.10 Tek bir ön tekerleğe darbe gelmesi durumunda şasideki gerilmeler



Şekil 3.11 Tek bir ön tekerleğe darbe gelmesi durumunda deformasyonlar

#### 3.4 İki ön tekerleğin bir darbeye maruz kalması durumunda şasinin analizi

Şekil 3.8'e benzer tarzda GTD model jeep'in her iki ön tekerleğine birden darbe kuvveti gelmesi durumunda jeep şasisi tek tekerleğe darbe gelmesine göre daha kritik bir durumda bulunacaktır.

Her iki tekerleğe de 2000 daN darbe kuvveti ve taşıt ağırlığı olan 3000 daN'luk kuvvetin uygulanması durumunda şasideki gerilmeler Şekil 3.12'de görülmekte olup bu yüklem durumu için maksimum gerilme  $166 \text{ N/mm}^2$  olmaktadır. Deformasyon değerleri ise Şekil 3.13'de görülmekte olup süspansiyon sisteminin maksimum deformasyonu 102mm'dir.



Şekil 3.12 İki ön tekerleğe darbe gelmesi sonucu şasideki gerilme dağılımı

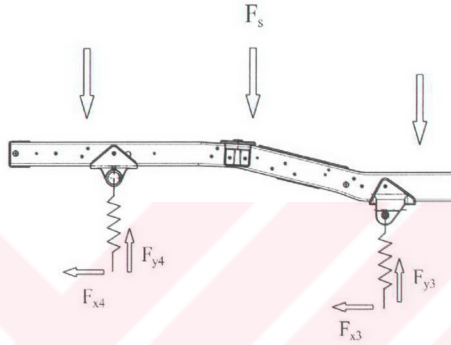


Şekil 3.13 İki ön tekerleğe darbe gelmesi sonucu süspansiyon sisteminin deformasyonu

### 3.5 Tek bir arka tekerleğin darbeye maruz kalması durumunda şasinin analizi

Jeep şasisini zorlayan diğer bir durumda arka tekerleklerin bir darbe kuvvetine maruz kalmasıdır. Bu durumda da tekerleklere gelen kuvvetin 2000 daN olduğu kabul edilmiş ve jeep ağırlığı olan 3000 daN'lık kuvvet şasiye etki ettirmiştir. (Şekil 3.14)

Analiz sonucu bulunan maksimum gerilme  $122 \text{ N/mm}^2$  (Şekil 3.15) ve maksimum deformasyon  $124 \text{ mm}$ 'dir. (Şekil 3.16)



Şekil 3.14 Arka tekerleğe gelen darbe kuvvetini tanımlamada kullanılan matematik model



Şekil 3.15 Tek bir arka tekerleğe darbe gelmesi durumunda şasideki gerilmeler

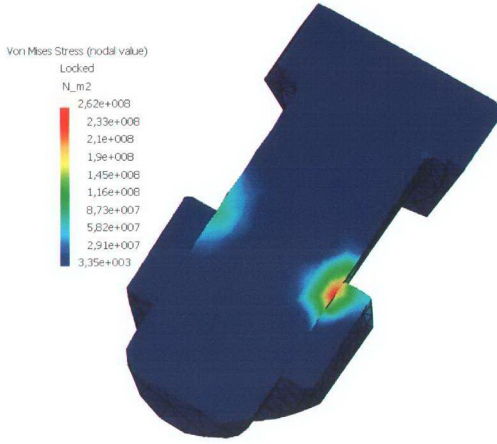


Şekil 3.16 Tek bir arka tekerleğe darbe gelmesi durumunda deformasyonlar

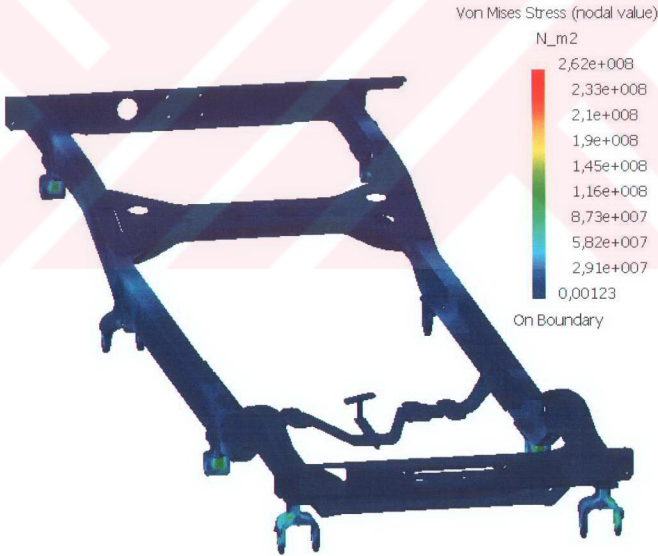
### 3.6 İki arka tekerleğin bir darbeye maruz kalması durumunda şasinin analizi

İki arka tekerleğin birden darbeye maruz kalması durumunda yine tekerleklerle ayrı ayrı 2000 daN kuvvet uygulanmış ve analiz işlemi gerçekleştirilmiştir.

Sonuçta bulunan maksimum gerilme değeri  $262 \text{ N/mm}^2$  olup arka braketini şasiye bağlayan civatada ortaya çıkmıştır (Şekil 3.18). Süspansiyon sisteminin maksimum deformasyon değeri ise  $94,7\text{mm}$ 'dir. (Şekil 3.19)



Şekil 3.17 İki arka tekerle de darbe gelmesi durumunda maksimum gerilmeler



Şekil 3.18 İki arka tekerle de darbe gelmesi durumunda şaside meydana gelen gerilmeler



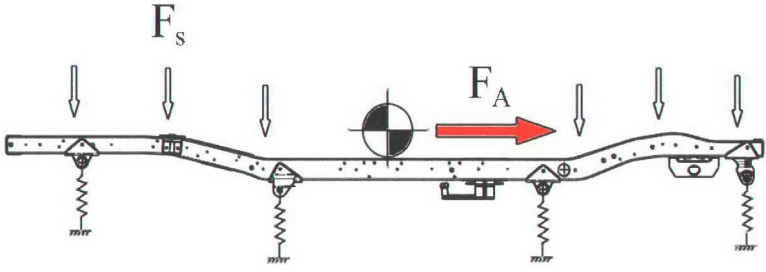
Şekil 3.19 İki arka tekerleğe darbe gelmesi durumunda deformasyonlar

### 3.7 Jeep düz yolda fren yaptığında şasisinin analizi

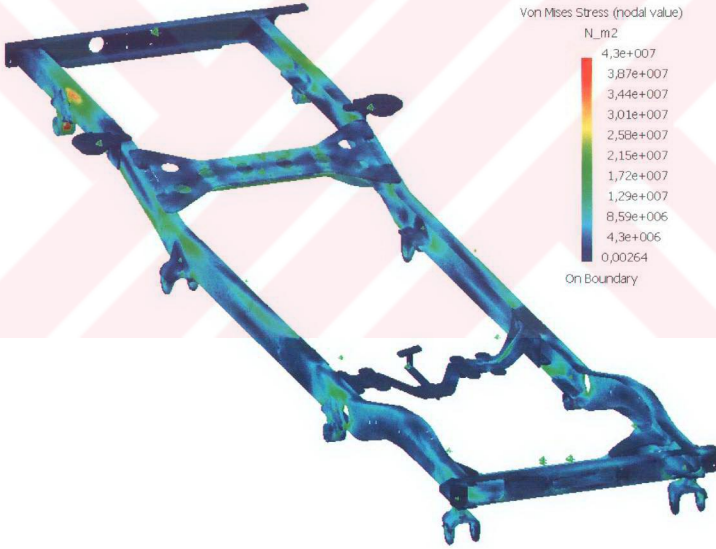
GTD model Jeep'in şasisini zorlayacak bir diğer kuvvette jeep düz yolda fren yaptığı takdirde oluşacak atalet kuvvetidir. Bu frenleme durumunda ve en uygun yol şartlarında Jeep'in ulaşabileceği maksimum frenleme ivmesi yapılan denemeler sonucunda  $7,153 \text{ m/s}^2$  olarak tespit edilmiştir. Bu durumda yüklü halde araç kütesinin 3000 kg kabul edilmesi suretiyle şasiye etkimesi gereken atalet kuvveti 21459 N olarak bulunur.

Bu kuvvetin yanı sıra statik ağırlık kuvvetinin de şasiye yayılı olarak uygulanması sonucu analiz için oluşturulan matematik model Şekil 3.20'deki gibidir. Bu modelde atalet kuvvetinin ağırlık merkezinden etkiği düşünülmüş ve ağırlık merkezi düşey doğrultuda yaklaşık olarak şasi üzerinde bulunduğundan şasiye eğilme momenti uygulanmamıştır.

Analiz işlemleri sonucu şasideki maksimum gerilme  $43 \text{ N/mm}^2$  (Şekil 3.21) ve süspansiyon sisteminin maksimum deformasyonu 138 mm olarak bulunmuştur (Şekil 3.22).



Şekil 3.20 Jeep düz yolda fren yaptığıında şasiyi analiz etmek için kullanılan model



Şekil 3.21 Jeep düz yolda fren yaptığıında şaside oluşan gerilmeler



Şekil 3.22 Jeep düz yolda fren yaptığıında süspansiyon sisteminin deformasyonu

### 3.8 Jeep şasisine ait doğal frekans değerlerinin hesaplanması

Şimdiye kadar sonlu elemanlar analizi yöntemi ile jeep şasisin statik analizlerini yaparak şasiyi oluşturan elemanlardaki gerilme ve deformasyonlar hesaplandı. Gerilme ve deformasyonların yanı sıra incelenen yapının zamana bağlılık gösteren karakterleri ve doğal frekans değerleri de analiz edilmesi gereken özelliklerdir. Keza bir makine elemanı kendi doğal frekans değerleri ile çakışan frekanstaki bir zorlanmaya maruz bırakılırsa sistemde titreşim genlikleri sonsuza gidecek ve **rezonans** olayı meydana gelerek eleman tahrip olacaktır.

GTD model dizel jeep şasisinin doğal frekans değerlerini bulmak üzere CATIA programında oluşturulan sonlu elemanlar modeli Şekil 3.23'teki gibidir. Bu modelde ön aks, arka aks ve tekerleklerin ağırlıkları da dikkate alınmış ve yapıya ilave kütleler asılarak modellenmişlerdir. Bunun yanı sıra bilgisayarda modellenmemiş olan süspansiyon sisteminin modellenmesi için CATIA programında yay elemanlar ( Smooth spring virtual part) kullanılmışlardır. Programa eş değer yay katsayıları girilirken hem yayların (önde 76000 N/m, arkada 80000 N/m) hem de pnömatik tekerleğin yay sabitleri göz önünde tutulmuştur.



Şekil 3.23 Jeep şasisinin doğal frekanslarını bulmak için kullanılan sonlu eleman modeli

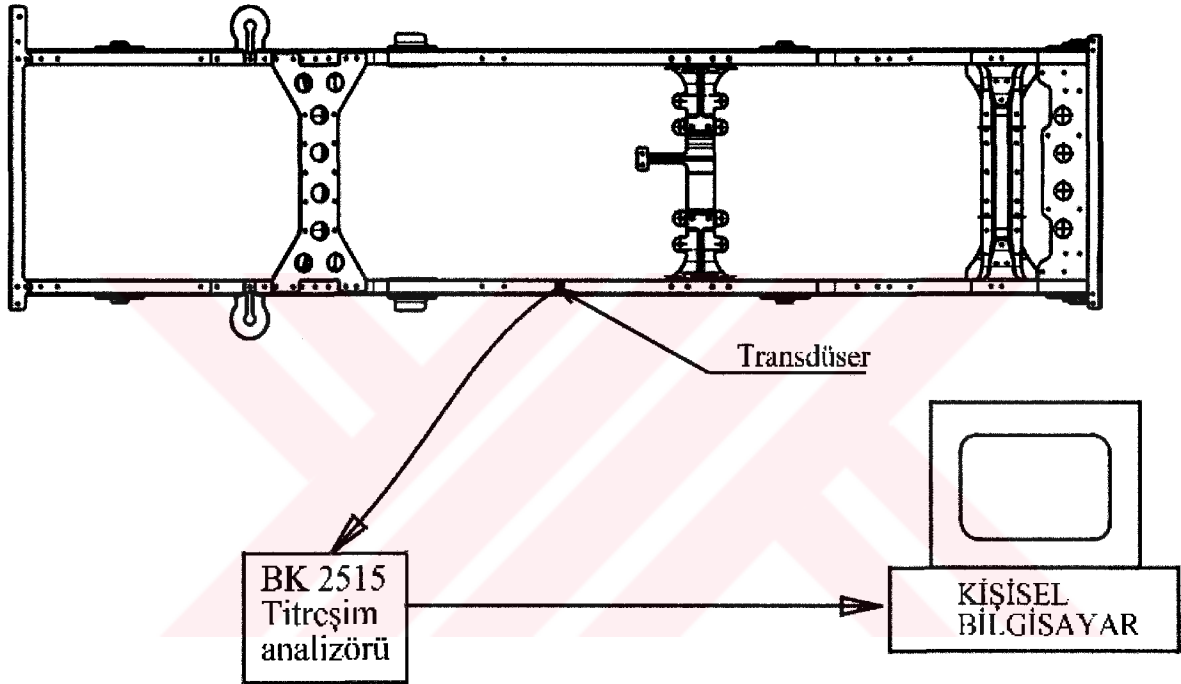
Hesaplama sonucu CATIA programınca bulunan doğal frekans değerleri Çizelge 3.1'deki gibidir.

Çizelge 3.1 Jeep şasisinin CATIA programınca hesaplanan doğal frekans değerleri

Mod	Frekans Hz
1	3.4125e+000
2	1.8804e+001
3	1.9317e+001
4	2.9687e+001
5	6.7495e+001
6	7.7248e+001
7	7.9944e+001
8	8.9642e+001
9	9.0089e+001
10	9.4441e+001

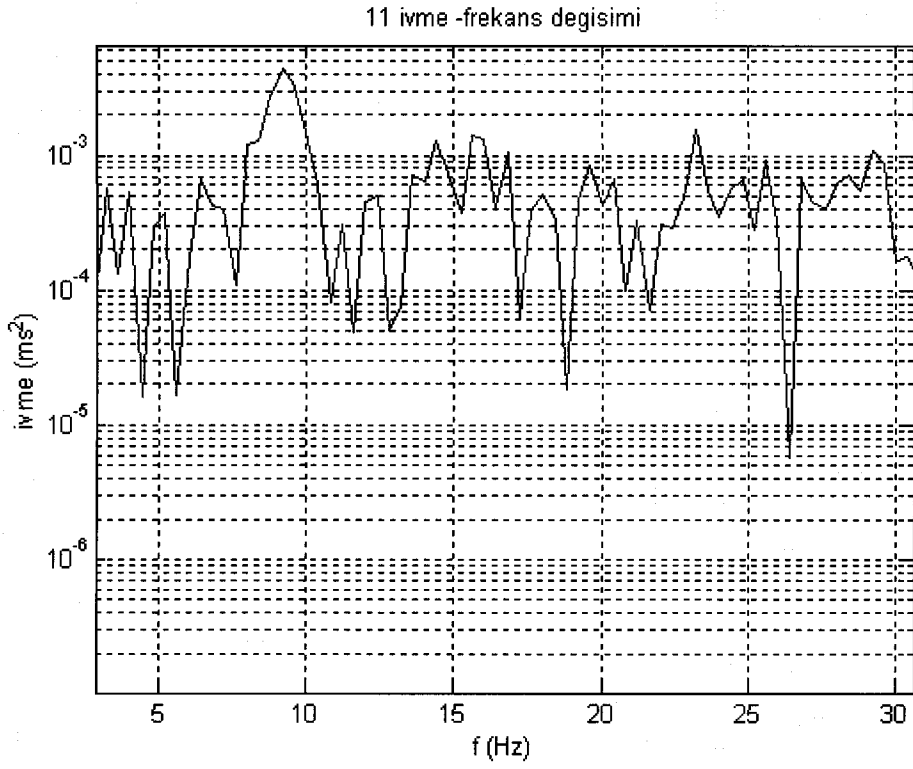
Bu frekans değerlerinden 1. frekans değeri şasinin düşey titreşimindeki, 2. frekans değeri yalpa hareketindeki ve 3. frekans değeri de kafa vurma hareketindeki doğal frekans değerleri olmaktadır.

Bilgisayarda CATIA programı yardımı ile doğal frekans değerlerinin hesaplanmasını takiben 1013. Ordu donatım ana tamir fabrikasında jeep şasisini, ön aks, arka aks ve tekerlekler gibi diğer aktarma organlarını içeren bir model üzerinde BK 2515 marka bir titreşim analizörü kullanılarak şasinin doğal frekans değerleri ölçülmüştür (Şekil 3.24).

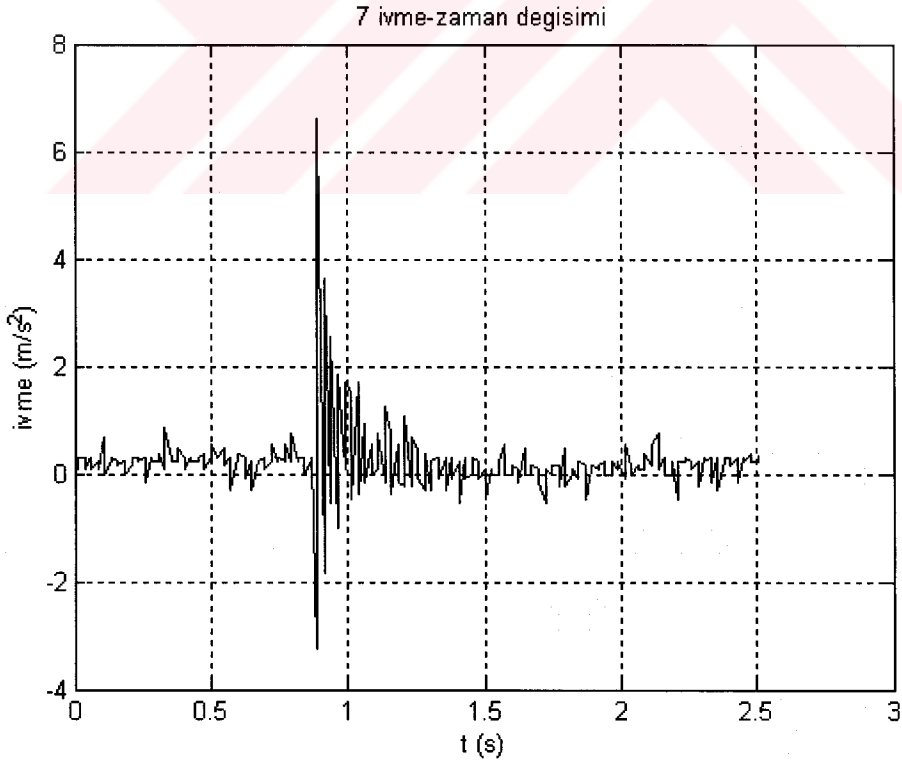


Şekil 3.24 Jeep şasisinin doğal frekans değerlerinin ölçümü

Ölçüm esnasında şasinin değişik noktalarında transdüserler kullanılarak frekans ve zaman domeninde ölçümler yapılmış ve ölçüm sonuçları bilgisayara aktarılmıştır. Şekil 3.25'te frekans domeninde ve Şekil 3.26'da da zaman domeninde yapılmış ölçüm sonuçlarına ait örnekler görülmektedir. Çizelge 3.2'de ise ölçüm sonucu bulunan şasiye ait doğal frekans değerleri görülmektedir.



Şekil 3.25 Jeep şasisinin frekans domeninde ölçülen doğal frekans-ivme grafiği



Şekil 3.26 Jeep şasisinin zaman domeninde ölçülen darbe cevabı

Çizelge 3.2 Jeep şasisinin ölçüm yapılarak bulunan doğal frekans değerleri

<b>Mod</b>	<b>Frekans (Hz)</b>
1	3,6
2	5,2
3	6,4
4	9,2
5	11,2
6	12,4
7	14,4
8	18
9	18,4
10	19,6



#### 4. ÇEŞİTLİ ZORLANMA DURUMLARI İÇİN JEEP ÖN AKSININ STATİK VE DİNAMİK ANALİZLERİNİN YAPILMASI

GTD model jeep'in şasisinin yanı sıra ön aksı da düz veya eğimli yolda hızlanma, yavaşlama, tümsekten geçme ve viraj dönme gibi çeşitli zorlanmalara maruz kalmaktadır. Bu zorlanmalar altında ön aksın gerilme analizleri ile doğal frekans değerlerin hesaplanmasında yine CATIA V5 programı kullanılmıştır.

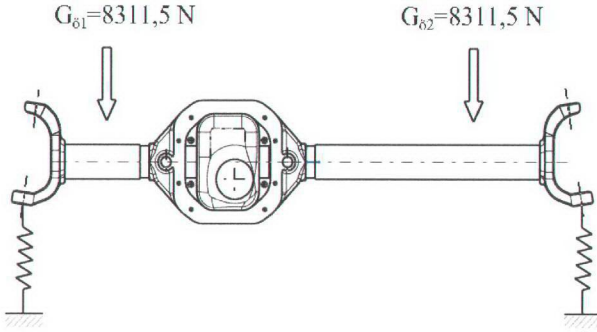
Ön aksın sonlu elemanlar modeli hazırlanırken bilgisayarda modellenmemiş olan süspansiyon sisteminin modellenmesi için CATIA programında yay elemanlar ( Smooth spring virtual part) kullanılmışlardır. Programa eş değer yay katsayıları girilirken önde 76000 N/m olan yay sabiti ile pnömatik tekerleğin 180000 N/m olan yay sabiti göz önünde tutulmuştur. Ön aks elemanlarını modellemek için lineer tetrahedron elemanlar kullanılmışlardır (Şekil 4.1).



Şekil 4.1 Ön aks sonlu elemanlar modeli

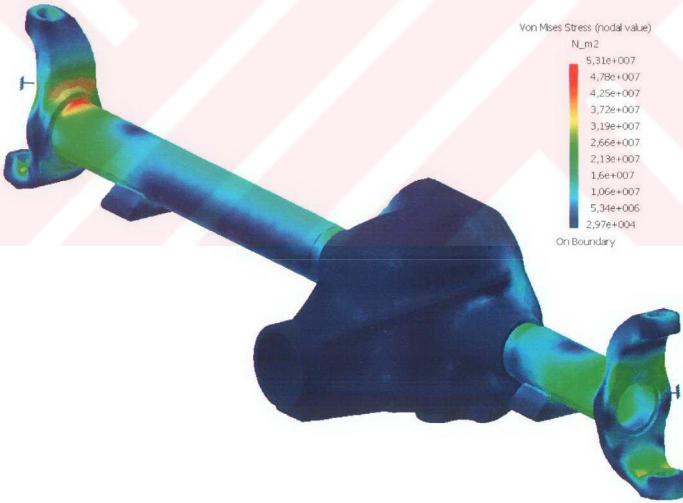
##### 4.1 İniş eğimli yolda jeep'in fren yapması durumunda ön aksın analizi

GTD model jeep'in ön aksını simetrik olarak en fazla zorlayan durum iniş eğimli yolda aracın fren yapması durumudur. Bu durumda ön akstaki braketlere etki eden kuvvetlerin değerleri birbirine eşit olup 8311,5 N olmaktadır [8]. Bu duruma ait matematik model Şekil 4.2'deki gibidir.



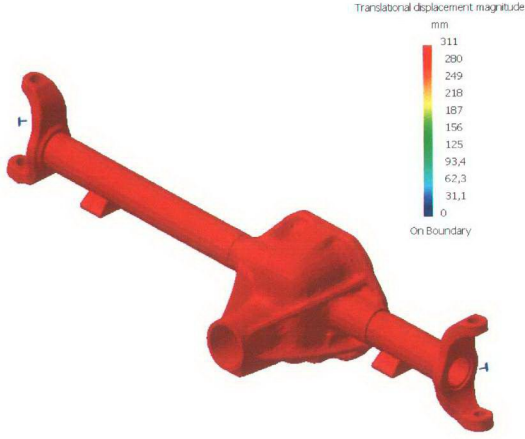
Şekil 4.2 İniş eğimli yolda frenleme durumuna ait matematik model

Analiz işlemi sonucu bulunan maksimum gerilme  $53,1 \text{ N/mm}^2$ 'dir (Şekil 4.3).



Şekil 4.3 İniş eğimli yolda frenlemede ön akstaki gerilme dağılımı

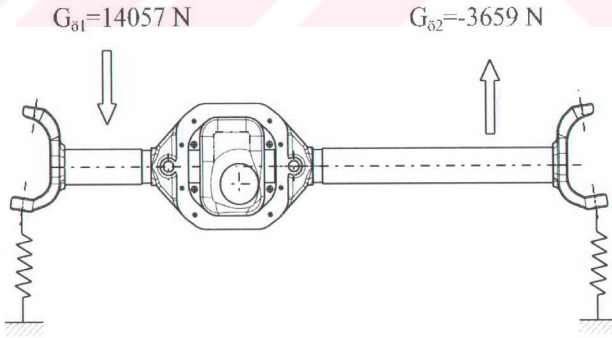
Süspansiyon sisteminin maksimum deformasyonu ise  $311 \text{ mm}$ 'dir (Şekil 4.4)



Şekil 4.4 Süspansiyon sisteminin deformasyonu

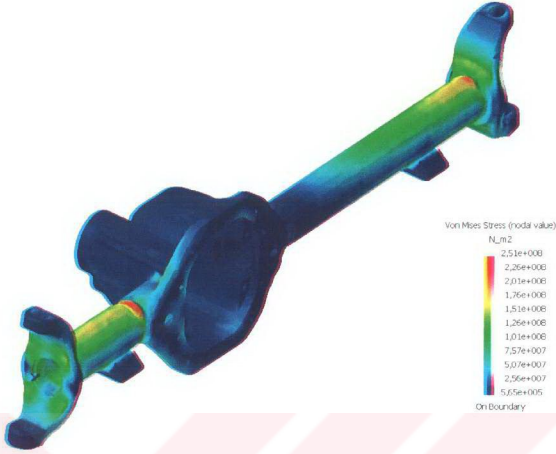
#### 4.2 Yan eğimli yolda jeep'in fren yapması durumunda ön aksın analizi

GTD model jeep'in ön aksını asimetrik olarak en fazla zorlayan durum yan eğimli yolda aracın fren yapması durumudur. Bu durumda ön akstaki braketlere etki eden kuvvetlerin değerleri birbirinden farklı olup sırası ile 14057 N ve  $-3659$  N olmaktadır [8]. Bu duruma ait matematik model Şekil 4.5'deki gibidir.



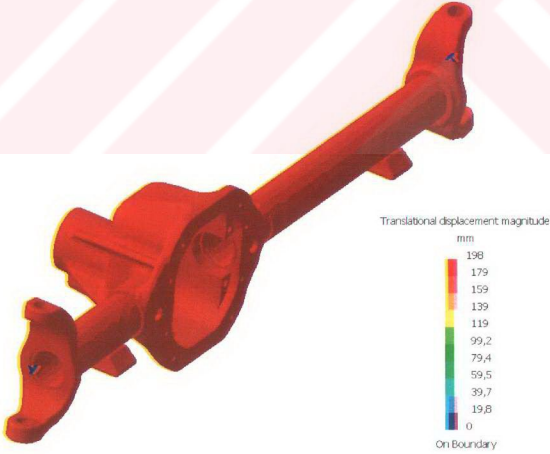
Şekil 4.5 Yan eğimli yolda frenleme durumuna ait matematik model

Analiz işlemi sonucu bulunan maksimum gerilme  $251 \text{ N/mm}^2$ 'dir (Şekil 4.6)



Şekil 4.6 Yan eğimli yolda frenlemede ön akstaki gerilme dağılımı

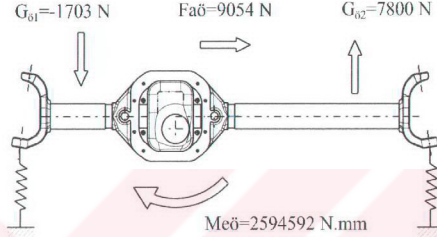
Süspansiyon sisteminin maksimum deformasyonu ise  $198 \text{ mm}$ 'dir (Şekil 4.7)



Şekil 4.7 Süspansiyon sisteminin deformasyonu

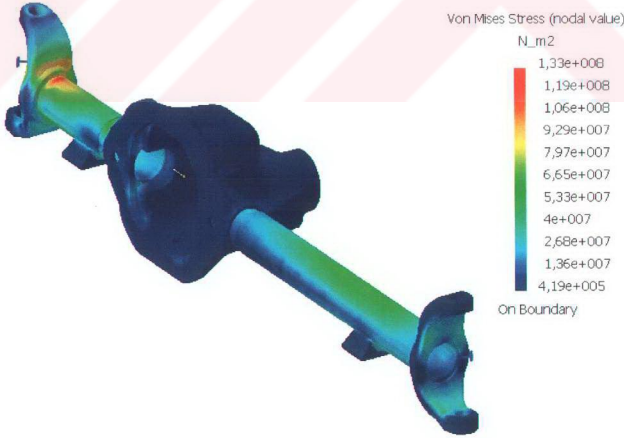
### 4.3 Virajda hareket esnasında ön aksın analizi

GTD model jeep'in ön aksını zorlayan bir diğer durum aracın maksimum açısal ivme ile bir virajı dönmesi durumudur. Bu durumda ön akstaki braketlere etki eden kuvvetlerin değerleri birbirinden farklı olup sırası ile -1703 N ve 7800 N olmaktadır [8]. Bunun yanı sıra virajı dönerken 9504 N değerinde bir atalet kuvveti ve bu kuvvetten kaynaklanan 2594592 N.mm eğilme momenti ön aksa etki etmektedir. Bu duruma ait matematik model Şekil 4.8'deki gibidir.



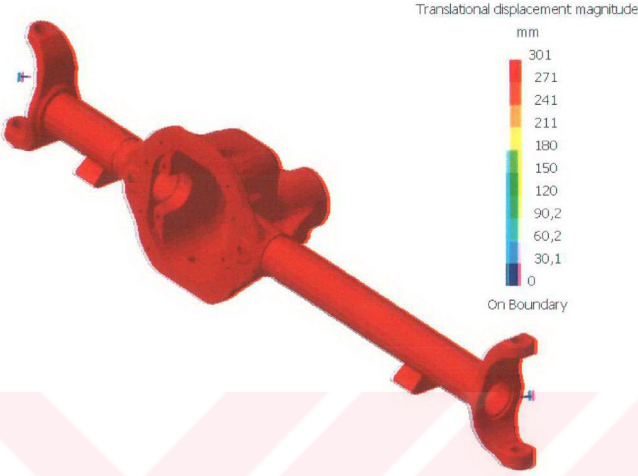
Şekil 4.8 Virajda hareket durumuna ait matematik model

Analiz işlemi sonucu bulunan maksimum gerilme  $133 \text{ N/mm}^2$ 'dir (Şekil 4.6).



Şekil 4.9 Virajda hareket durumunda oluşan gerilme dağılımı

Süspansiyon sisteminin maksimum deformasyonu ise 301mm'dir (Şekil 4.10).



Şekil 4.10 Süspansiyon sisteminin deformasyonu

#### 4.4 Ön aksa ait doğal frekans değerlerinin bulunması

Ön aksa ait doğal frekans değerlerinin bulunabilmesi için ön aksın sonlu elemanlar modeli yine CATIA V5 programında modellenmiştir. Ön aksın sadece kendi frekans değerlerini elde edebilmek için yay kullanılmamıştır.

Hesaplama sonucu CATIA programınca bulunan doğal frekans değerleri aşağıdaki gibidir.

Çizelge 4.1 Ön aksın CATIA programında hesaplanan doğal frekans değerleri

Mod	Frekans Hz
1	1.3537e+002
2	1.7122e+002
3	2.8453e+002
4	3.8868e+002

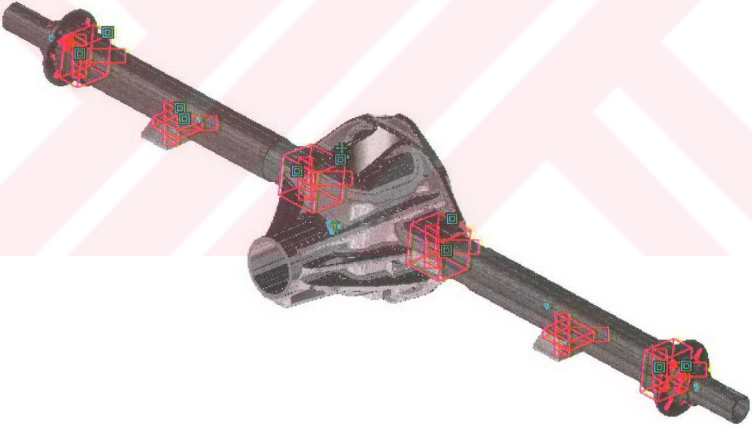
5	5.4840e+002
6	7.4586e+002
7	8.9345e+002
8	1.0442e+003
9	1.3742e+003
10	1.4465e+003



## 5. ÇEŞİTLİ ZORLANMA DURUMLARI İÇİN JEEP ARKA AKSININ STATİK VE DİNAMİK ANALİZLERİNİN YAPILMASI

GTD model jeep'in şasisinin yanı sıra arka aksı da düz veya eğimli yolda hızlanma, yavaşlama, tümsekten geçme ve viraj dönme gibi çeşitli zorlanmalara maruz kalmaktadır. Bu zorlanmalar altında arka aksın gerilme analizleri ile doğal frekans değerlerin hesaplanmasında yine CATIA V5 programı kullanılmıştır.

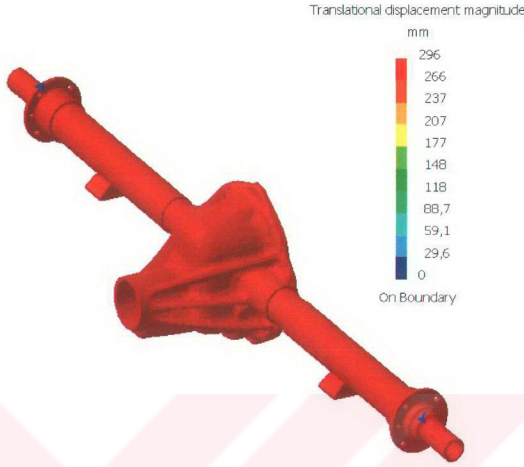
Arka aksın sonlu elemanlar modeli hazırlanırken bilgisayarda modellenmemiş olan süspansiyon sisteminin modellenmesi için CATIA programında yay elemanlar ( Smooth spring virtual part) kullanılmışlardır. Programa eş değer yay katsayıları girilirken arkada 80000 N/m olan yay sabiti ile pnömatik tekerleğin 180000 N/m olan yay sabiti göz önünde tutulmuştur. Arka aks elemanlarını modellemek için lineer tetrahedron elemanlar kullanılmışlardır (Şekil 5.1).



Şekil 5.1 Arka aksa ait sonlu elemanlar modeli



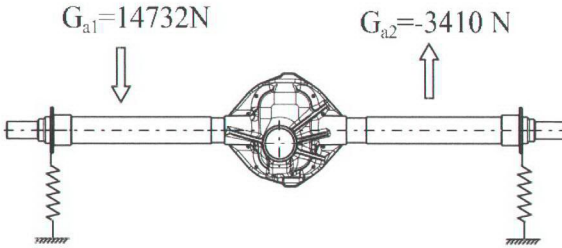
Süspansiyon sisteminin maksimum deformasyonu ise 296mm'dir (Şekil 5.4).



Şekil 5.4 Süspansiyon sisteminin deformasyonu

## 5.2 Yan eğimli yolda hızlanma durumunda arka aksın analizi

GTD model jeep'in arka aksını asimetrik olarak en fazla zorlayan durum yan eğimli yolda aracın hızlanması durumudur. Bu durumda arka akstaki braketlere etki eden kuvvetlerin değerleri birbirinden farklı olup sırası ile 14732 N ve -3410 N olmaktadır [8]. Bu duruma ait matematik model Şekil 5.6'daki gibidir.



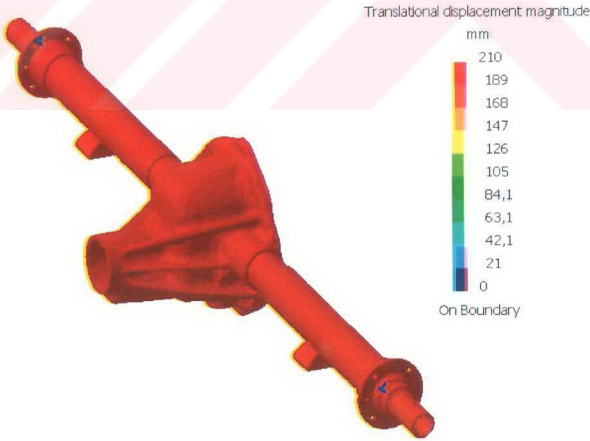
Şekil 5.5 Yan eğimli yolda hızlanma durumuna ait matematik model

Analiz işlemi sonucu bulunan maksimum gerilme  $336 \text{ N/mm}^2$ 'dir (Şekil 5.6).



Şekil 5.6 Yan eğimli yolda hızlanma durumunda gerilme dağılımı

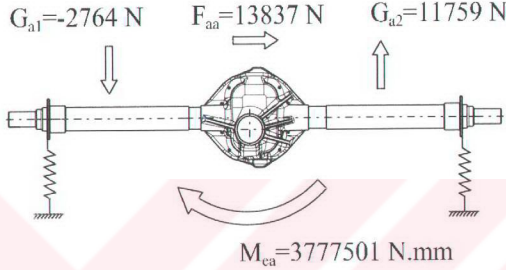
Süspansiyon sisteminin maksimum deformasyonu ise 210mm'dir (Şekil 5.7).



Şekil 5.7 Süspansiyon sisteminin deformasyonu

### 5.3 Virajda hareket esnasında arka aksın analizi

GTD model jeep'in arka aksını zorlayan bir diğer durum aracın maksimum açışal ivme ile bir virajı dönmesi durumudur. Bu durumda arka akstaki braketlere etki eden kuvvetlerin değerleri birbirinden farklı olup sırası ile -2664 N ve 11759 N olmaktadır [8]. Bunun yanı sıra virajı dönerken 13837 N değerinde bir atalet kuvveti ve bu kuvvetten kaynaklanan 3777501 N.mm eğilme momenti arka aksa etki etmektedir. Bu duruma ait matematik model Şekil 5.8'deki gibidir.



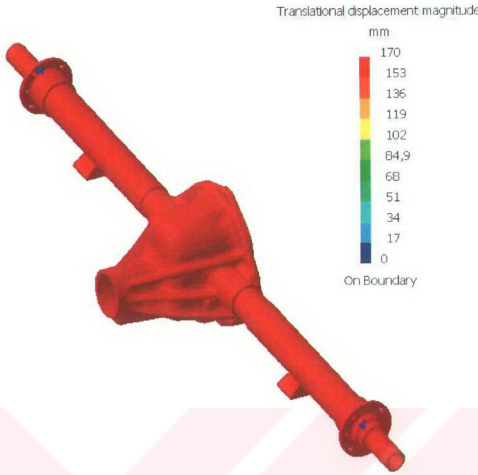
Şekil 5.8 Virajda hareket durumuna ait matematik model

Analiz işlemi sonucu bulunan maksimum gerilme  $242 \text{ N/mm}^2$ 'dir (Şekil 5.9).



Şekil 5.9 Virajda hareket durumunda oluşan gerilme dağılımı

Süspansiyon sisteminin maksimum deformasyonu ise 170mm'dir (Şekil 5.10).



Şekil 5.10 Süspansiyon sisteminin deformasyonu

#### 5.4 Arka aksa ait doğal frekans değerlerinin bulunması

Arka aksa ait doğal frekans değerlerinin bulunabilmesi için arka aksın sonlu elemanlar modeli yine CATIA V5 programında oluşturulmuştur. Arka aksın sadece kendi frekans değerlerini elde edebilmek için yay kullanılmamıştır.

Hesaplama sonucu CATIA programınca bulunan doğal frekans değerleri aşağıdaki gibidir.

Çizelge 5.1 Arka aksın CATIA programında hesaplanan doğal frekans değerleri

Mod	Frekans Hz
1	1.2288e+002
2	1.2856e+002
3	2.3764e+002
4	3.7134e+002
5	3.9805e+002

6	9.1212e+002
7	9.5262e+002
8	9.7613e+002
9	1.0610e+003
10	1.2143e+003



## SONUÇLAR

Analizi yapılan GTD model jeep'in şasisinin en çok zorlandığı durum bölüm 3.6'da değinildiği üzere jeep'in her iki arka tekerine de darbe gelmesi durumudur. Bu durumda maksimum gerilme  $262 \text{ N/mm}^2$  olup (Şekil 3.17) yaprak yay braketlerini şasiye bağlayan civatada meydana gelmektedir. Malzemesi 8.8 kalitede olan civata için akma sınırı  $640 \text{ N/mm}^2$  (DIN ISO 898T1) olduğundan oluşan maksimum gerilme akma sınırını aşmamaktadır, dolayısıyla belirtilen zorlanma durumu için jeep şasisi emniyetli durumdadır. Ancak maksimum gerilmenin civatada meydana gelmesi gerçekte jeep şasisi daha fazla bir kuvvet ile zorlandığında kopmanın neden civatalarda olduğunu açıklamaktadır.

Ön aksın en fazla zorlanmaya maruz kaldığı durum ise jeep'in yan eğimli yolda frenleme yapması durumudur. Bu durumda gerilmenin en yüksek olduğu eleman ön kovan kısa taşıyıcı borusu olup oluşan maksimum gerilme  $251 \text{ N/mm}^2$  olmaktadır (Şekil 4.6). Malzemesi St 37-2 olan taşıyıcı boru için akma sınırı  $235 \text{ N/mm}^2$  (DIN EN 10 025) olduğundan bu zorlanma altında taşıyıcı boru akma sınırını geçecek ve plastik bölgedeki deformasyonlar oluşacaktır. Taşıyıcı borunun plastik deformasyonunu ve hasara uğramasını engellemek için bu durumda elemanın geometrisini değiştirerek mukavemetini arttırmak yada St 37-2 yerine daha mukavemetli bir malzeme kullanmak gerekli olmaktadır.

Diğer taraftan arka aksta maksimum gerilmenin oluşmasına sebep olan durum aracın yan eğimli yolda hızlanması durumudur. Bu durumda maksimum gerilme aks başı flanşında meydana gelmiş olup değeri  $336 \text{ N/mm}^2$ 'dir (Şekil 5.6). 42CrMo4 malzemesinden yapılan flanş için akma sınırı  $750 \text{ N/mm}^2$  olduğundan (DIN EN 10 083) bu zorlanma hali için aks başı flanşı emniyetli durumdadır.

**KAYNAKLAR**

Beerermann, H. J., (1989), The Analysis of Commercial Vehicle Structures, MEP Limited, London

Chandrupatla, T. R. ve Belagundu, A. D., (1991), Introduction to Finite Elements in Engineering, Printice Hall

Dassault Systemes, (2001), Catia V5 Generative Part Structural Analysis

Dassault Systemes, (2001), Catia V5 Generative Assembly Structural Analysis

Ereke, M., (1989), Şasi ve Karoseri Tasarımında İleri Hesap Yöntemleri, İTÜ Makine Fakültesi, İstanbul

Liu, Y., (1998), "Introduction to Finite Element Method", University of Cincinnati

Pippert, H., (1998), Karosserietechnik, Vogel Fachbuch

Yalçın, B. ve Tezel, R.K., (2001), "1013. Ordu Donatım ATF Tarafından Üretilen GTD Dizel Jeeplerin Ön ve Arka Akslarının Mukavemet Hesapları", YTÜ Makine Fak. Makine Müh. Bölümü Makine Teorisi Sistem Dinamiği ve Kontrol ABD., İstanbul



**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum tarihi	04.06.1977	
Doğum yeri	Giresun	
Lise	1990-1993	Bulancak Lisesi
Lisans	1996-2000	Yıldız Teknik Üniversitesi Mühendislik Fak. Makine Müh. Bölümü, Konstrüksiyon-İmalat Dalı
Yüksek Lisans	2000-devam ediyor	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Müh. ABD, Konstrüksiyon Programı

**Çalıştığı kurum**

2000-devam ediyor Grup Otomasyon Ltd Şti.

