

67753

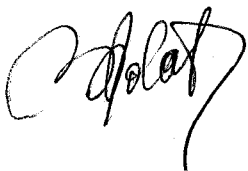
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE
MAKİNA PARÇALARININ
GERİLME ANALİZİNİN YAPILMASI

Mak. Müh. Ömer AKAYDIN
F.B.E. Makina Mühendisliği Anabilim Dalı Konstrüksiyon Programında
hazırlanan
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Y. Doç. Dr. Ferhat DİKMEN

Prof. Dr. Zekeriya POLAT



İSTANBUL, 1997

Prof. Dr. Uğur GÜVEN



Y. Doç. Dr. Ferhat DİKMEN



İÇİNDEKİLER

Sayfa No

	TEŞEKKÜR	IV
	TÜRKÇE ÖZET	V
	İNGİLİZCE ÖZET	VI
1.	GİRİŞ	1
1.1.	Genel Bilgiler	1
1.2.	Sonlu elemanlar Yönerinin Uygulandığı Yerler	2
1.3.	Avantajları ve Diğer Metodlara Üstünlükleri	2
1.4.	Sınır Değerleri Problemlerinin Çözümü	3
1.4.1.	Sonlu Farklar Metodu	3
1.4.1.1.	Sonlu Elemanlar Metodu İle Sonlu Farklar Metodunun Karşılaştırması	4
1.4.2.	Varyasyonel Metod	5
1.4.3.	Ağırlıklı Artıklar Metodu	6
1.4.3.1.	Yerine Koyma (Collocation) Metodu	6
1.4.3.2.	Alt Alan Metodu	6
1.4.3.3.	Galerkin Metodu	7
1.4.3.4.	En Az Kareler Metodu	7
1.5.	Nümerik Çözümler İçin İntegral Formülasyonu	7
1.6.	Hatalar	9
1.7.	Temel Yaklaşımlar	10
1.8.	Yakınsama (Convergence) Kriteri	11
1.9.	Sonlu Elemanlar Yönteminde İzlenen Adımlar	11
2.	MUKAVEMETTE KUVVET KAVRAMI	15
2.1	Dış Kuvvet	15
2.2.	İç Kuvvet	15
2.2.1.	İç Kuvvet Bileşkesi	16
2.2.2.	Zorlama Çeşitleri	17
3.	ELASTİSİTE BAĞINTILARI	19
3.1.	Gerilme Hali ve Bileşenleri	19
3.1.1.	Üç Eksenli Gerilme Hali	19
3.1.2.	İki Eksenli Gerilme Hali	20
3.1.3.	Tek Eksenli Gerilme Hali	21
3.2.	Şekil Değiştirme Hali ve Bileşenleri	22
3.2.1.	Üç Eksenli Şekil Değiştirme Hali ve Bileşenleri	22
3.2.2.	Düzlem Şekil Değiştirme Hali ve Bileşenleri	23
3.3.	Yer Değiştirme - Şekil Değiştirme Hali ve Bileşenleri	24
3.4.	Elastisite Bağıntıları	28
3.4.1.	Genel Hooke Kanunu	29
3.4.2.	Elastik Sabitler	30
3.4.3.	Genel Hooke Kanunu Uygulamaları	35
3.4.3.1.	Tek Boyutlu Elastisite	35
3.4.3.1.1.	Bir Boyutlu Gerilme ve Lineer Elastik İzotrop Hal	35

3.4.3.1.2.	Bir Boyutlu Şekil Değişirme ve Lineer Elastik İzotrop Hal	36
3.4.3.2.	İki Boyutlu Lineer Elastik İzotrop Hal	37
3.4.3.2.1.	Düzlem Gerilme ve Lineer Elastik İzotrop Hal	38
3.4.3.2.2.	Düzlem Şekil Değişirme ve Lineer Elastik İzotrop Hal	40
3.4.3.3.	Üç Boyutlu Lineer Elastik İzotrop Hal	42
3.5.	Kabuk ve Plakların Elastisite Bağntıları	45
3.5.1.	İzometrik Kabukların Bünye Denklemleri	46
3.5.2.	İzotrop Eğilmeli Plak Bünye Denklemleri	48
3.5.3.	İzotrop Levhanın Bünye Denklemi	48
4.	ENERJİ PRENSİPLERİ	49
4.1.	Toplam Potansiyel Enerji Prensibi	49
4.1.1.	Toplam Potansiyel Enerjinin Birinci Varyasyonu (Denge Denklemi)	49
4.1.2.	Toplam Potansiyel Enerjinin İkinci Varyasyonu (Stabilite Denklemi)	52
4.2.	Tek Serbestlik Dereceli Sistemler	54
4.3.	Çok Serbestlik Dereceli Sistemler	55
4.4.	Virtüel İş Prensibi	57
5.	SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ	59
5.1.	Giriş	59
5.1.1.	Deplasman Fonksiyonlarının Seçimi	60
5.2.	Genel Dış Yük Halinde Sonlu Elemanlar Metoduyla Eğilme Hesabı	62
5.3.	Sonlu Elemanlar Metodu İle Stabilite Hesabı	65
6.	Sonlu Elemanlar Metodu İle Çubuk Hesabı	72
6.1.	Sonlu Elemanlar Metodu İle Bir Çubuğun Eğilmesinin Hesabı	72
6.1.1.	Deplasman Fonksiyonlarının Seçimi	72
6.1.2.	Şekil Fonksiyonlarının Tayini	73
6.1.3.	Eleman Rijitlik Matrisinin Bulunması	76
6.1.4.	Eleman Yük matrisinin Hesabı	78
6.1.5.	Sisteme Geçiş	79
6.1.6.	Sınır Şartları	84
6.1.7.	Momentin Hesabı	85
7.	SAYISAL ÇÖZÜMLER	87
7.1.	Ağırlıklı Artıklar Metodu ile İlgili Sayısal Çözüm	87
7.2.	Galerkin Metodu İle Sayısal Çözüm	88
7.3.	Gauss Eliminasyon Metodu İle Sayısal Çözüm	91
7.4.	Direk Rijitlik (Katılık) Matrisi Yaklaşım Metodu İle Sayısal Çözüm	93
8.	DÜZLEM GERİLME VE DÜZLEM ŞEKİL DEĞİŞTİRME	98
8.1.	İnce Levha	98
8.1.1.	Deplasman Fonksiyonlarının Seçimi	98
8.1.2.	Şekil Fonksiyonları	100
8.1.3.	Eleman Rijitlik (Katılık) Matrisi	102
8.1.4.	Yük Matrisi	102
8.1.5.	Sayısal Örnek	103
8.2.	Düzlem Şekil Değişirme	110
9.	SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN BİLGİSAYARA UYGULANMASI	112

9.1.	Kullanılmakta Olan Bilgisayar Programlarının Tanıtımı	112
9.1.1.	Abaqus Programı	112
9.1.2.	Adina Programı	113
9.1.3.	Ansys Programı	114
9.1.4.	Aska Programı	115
9.1.5.	Eal Programı	116
9.1.6.	Fenris Programı	117
9.1.7.	Finite / gp Programı	118
9.1.8.	Larstran '80 Programı	119
9.1.9.	Marc Programı	120
9.1.10.	Pafec Programı	121
9.1.11	Samcef Programı	122
9.1.12.	Sesam '80 Programı	123
9.1.13.	Smart Programı	124
9.1.14.	Tujap programı	125
9.2.	Bilgisayar Programlarının Tablosal Karşılaştırması	126
9.3.	Bilgisayar İle Yapılan Parça Analizi Örnekleri	137
9.3.1.	Yayıllı Yük Uygulanan Bir Ucu Ankastre Çubuğun Gerilme Analizi	137
9.3.2.	Eksantrik Dairesel Bir Boşluğa Sahip Levhanın Gerilme Analizi	145
9.3.3.	Üç Boyutlu İç Altıköşe Başlı Parçanın Gerilme Analizi	152
	SONUÇLAR	165
	KAYNAKLAR	166
	EK 1 - Disketle verilen kısım için ek açıklamalar	167
	EK 2 - Ansys programında bulunan eleman tipleri listesi	173
	ÖZGEÇMİŞ	

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimin hazırlanmasında gösterdiği destek ve hoşgörü sebebiyle değerli hocam Y. Doç. Dr. Ferhat DİKMEN 'e, analiz için kullandığım programın teminindeki yardımlarından dolayı Y. Doç. Dr. İsmail EKMEKÇİ 'ye ve Arş. Gör. Özgen Ümit ÇOLAK 'a, tezi yazmamda yardımcı olan Sami AKAYDIN 'a, tezin çıktılarının alınmasındaki destekleri sebebiyle Mak. Müh. Ali E. CÖMERT'e ve Murat HEKİMOĞLU 'na teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Ömer AKAYDIN

Mak. Müh.

Şubat 1997

ÖZET

Teknikteki hızlı ilerlemeler ve bilgisayar teknolojisinin gelişmesi ile sonlu elemanlar yöntemi kolayca uygulanabilir bir metod olmuştur. Matematiksel temelleri 1795'te Gauss, 1870'de Rayleigh gibi matematikçilere dayanan yöntem birçok karmaşık problemin çözümünde ucuz, hızlı, verimli ve güvenilir sonuçlara ulaşmamızı sağlamaktadır.

Yapılan çalışmada yöntem ile ilgili ön bilgiler verildikten sonra kuvvet, gerilme kavramı ve enerji prensipleri üzerinde durulmuştur. Daha sonra Sonlu Elemanlar Yöntemi açıklanarak el ile çözüme imkan verebilen birkaç problem incelenmiştir. Şu an piyasada bulunan sonlu elemanlar için hazırlanmış bilgisayar programlarının kısa tanımları yapıldıktan sonra birkaç parçanın bilgisayarlı analizi gerçekleştirilmiştir.

ABSTRACT

The finite element method has become an easy applicable way by the help of the quick development in technique and in computer technology. The mathematical foundation of this method which is based on mathematicians, Gauss in 1795 and Rayleigh in 1870, provides us to reach cheap, fast, productive and reliable solutions in so many complex problems.

In this study, after some pre-knowledge about the method was given, the conception of stress and energy principles were dwelled upon. Then, with the explanation of the finite element method, some problems that can be solved by hand were examined. After introducing the computer programs that were prepared for the finite element method and were been found in the market at that moment, the analyse of some elements were made by the computer.

1. GİRİŞ

1.1. Genel Bilgiler

İnsan beyninin kapasitesi, kompleks olayları ve davranışları, tek operasyonda veya adımda anlamaya, idrak etmeye yetmemektedir. Bu sebeple sistemlerin belirli alt elemanlara bölünerek daha kolay anlaşılır hale getirilmesi ve tekrardan bu elemanlarla orjinal veya benzer sistemler inşa edilmesi; mühendisler, bilim adamları ve hatta ekonomistlerin kullandığı gayet doğal bir yöntemdir. İşte inceleyeceğimiz sonlu elemanlar yöntemi de bu temele dayanmaktadır.

Sonlu elemanlar yöntemi, birçok mühendislik dalında karşılaşılan problemlerin çözümüne ulaşmak için kullanılan sayısal bir analiz metodudur. Orjinal gelişimi havacılık sanayiinde olan ve gelişerek birçok mühendislik dalına yayılan yöntemin çeşitliliği ve esnekliği, okullarda ve endüstride bir analiz aracı olmasını da sağlamıştır.

Bugün birçok mühendislik dalında, problemlerin çözümünde mümkün olduğunca yaklaşık sayısal sonuçlara ulaşmak, kesin sonuçlara ulaşmaktan daha iyi, gerekli ; zaman ve para açısından daha verimli görülmektedir. Mesela üzerinde değişik şekilli birçok delik bulunan bir levhanın yük taşıma kapasitesini bulmak, uniform olmayan atmosferik şartlardaki kirleticilerin konsantrasyonlarını bulmak yada değişik şekilli ve kesit alanlı kanallardaki sıvı akışını bulmak klasik yöntemlerle oldukça zordur. Çok fazla çaba sarfetmeden bu problemlerle ilgili eşitlikleri ve sınır şartlarını yazabiliriz. Fakat daha sonra hiçde kolay olmayan analitik çözüm ve denklemlerle yüzyüze geliriz. Ayrıca yukarıdaki üç örnekte de görüleceği üzere geometrik yada diğer özellikleriyle bazı belirsiz veya keyfi durumlar karşımıza zorluk olarak çıkabilir.

Sonlu elemanlar metodunu iki alt bölüme ayırabiliriz. Birincisi, elemanları tek tek kullanarak yapısal kafes sistemlerin ek yerlerindeki yer değiştirmeleri ve eleman kuvvetlerini bulmaktır. İkincisi, sürekli elemanlarla ısı transferi, akışkanlar mekaniği ve katı mekanik problemlerin yaklaşık çözümlerine ulaşmaktır. Aynı ayrı elemanlar kullanarak yapılan formülasyon “yapıların matris analizi” olarak bilinir ve sonuç klasik analiz uygulanmış yapısal kafeslerle tamamen aynı olur. İkinci yaklaşım, gerçek sonlu

elemanlar yöntemidir ve arzu edilen parametrelerdeki değişiklikleri özel noktalar için bulmamızı sağlar. Bu noktalara düğüm noktaları (node) denilir. Genel sonlu elemanlar için hazırlanmış bilgisayar programları her iki yöntemi de kullanır.

Metot, birçok matematiksel kavram kullanarak, lineer veya nonlineer eşitliklerin oluşmasını sağlar. Bu eşitlikler 20 - 20.000 adet arası ve hatta daha fazla olabilir. Eşitlik miktarlarından da anlaşılacağı üzere metot, bilgisayar destekli çözüm mevcut olmadığında pratik değildir.

Yöntemin, kaynağı kesin olarak belli olmamasına karşın, birçok avantajı vardır. Düzgün olmayan şekilli birçok değişik malzemeden yapılmış ve karışık sınır şartlarına sahip problemlere uygulanabilen bu yöntem, aynı zamanda nonlineer malzeme özellikleri gösteren sabit durum ve zamana bağlı durum problemlerine de uygulanabilir.

1.2. Sonlu Elemanlar Yönteminin Uygulandığı Yerler

- a. Yapı mühendisliği : Çubuk, plak, levha ve kabukların çözümünde
- b. Zemin mekaniği : Şevlerin gerilme analizinde, barajlarda ve tünellerde
- c. Hidrolikte : Viskoz akımda, sürtünme maddelerinin taşınımında, dalga titreşiminde
- d. Isı transferinde : Isı iletiminde, ısı akımı taşınımında
- e. Nükleer enerjide : Reaktörün statik ve dinamik analizinde, ısı akımında
- f. Elektrik mühendisliğinde : Devre analizlerinde, manyetik potansiyel dağılımında
- g. Makina mühendisliğinde : Statik ve dinamik gerilme analizinde, titreşim analizinde kullanılabilir.

1.3. Avantajları ve Diğer Metodlara Üstünlükleri

1. Sonlu elemanlar metodu, geometrik ve malzeme olarak lineer ve nonlineer sistemlere uygulanabilir. Yapı için dört tipten bahsedilebilir.

- Sistem ve malzeme lineer
- Sistem nonlineer, malzeme lineer
- Sistem lineer, malzeme nonlineer

- Sistem ve malzeme nonlineer
2. Herhangibir gayri muntazam ve üniform olmayan sınır şartlarına uygulanabilir.
 3. Herhangibir gayri muntazam yük ve sisteme uygulanabilir.
 4. Problemin büyüklüğü sınırlanmamıştır, bilgisayar ile çözüm yapmaya uygundur.
 5. Kompleks çözümler ve yüksek dereceden problemler için verimlidir.
 6. Sınır şartları, sistem hesabında probleme en son dahil edilir.

1.4. Sınır Değerleri Problemlerinin Çözümü

Diferansiyel eşitlikler kullanılan fiziksel problemlerin en iyi çözüm yolu analitik çözümdür. Buna rağmen analitik çözümün zor olduğu birçok durum mevcuttur. Mesela matematiksel olarak sınırlarının tanımı mümkün olmayan oldukça düzensiz bir alan, birçok farklı veya karışık kompozit malzemelerden oluşmuş ve matematiksel olarak tanımlanması zor olan konfigürasyonlar, anizotropik malzemeler içeren ve analitik olarak çözülmesi, içerisinde nonlineer terimler bulunduğu için zor olan problemler.

Nümerik metod, analitik metodun geliştirilemediği durumlarda kullanılan yaklaşık çözüm yöntemidir. Tüm nümerik çözümler bağımsız parametrelere göre tek tek noktalar için değerler üretirler. Parametreler değiştirildiğinde tüm çözüm prosedürü tekrarlanır. Buna rağmen nümerik çözüm hiç çözüm olmamasından daha fazla arzu edilir. Hesaplanmış değerler, tek tek noktalar için dahi olsa, fiziksel prosesler için önemli bilgiler verir.

Nümerik çözümlere diferansiyel eşitliklerle erişmek için birçok prosedür vardır. Bu metodlar üç ana guruba ayrılabilir. 1. Sonlu farklar metodu, 2. Varyasyonlar metodu, 3. Ağırlıklı artıklar metodu.

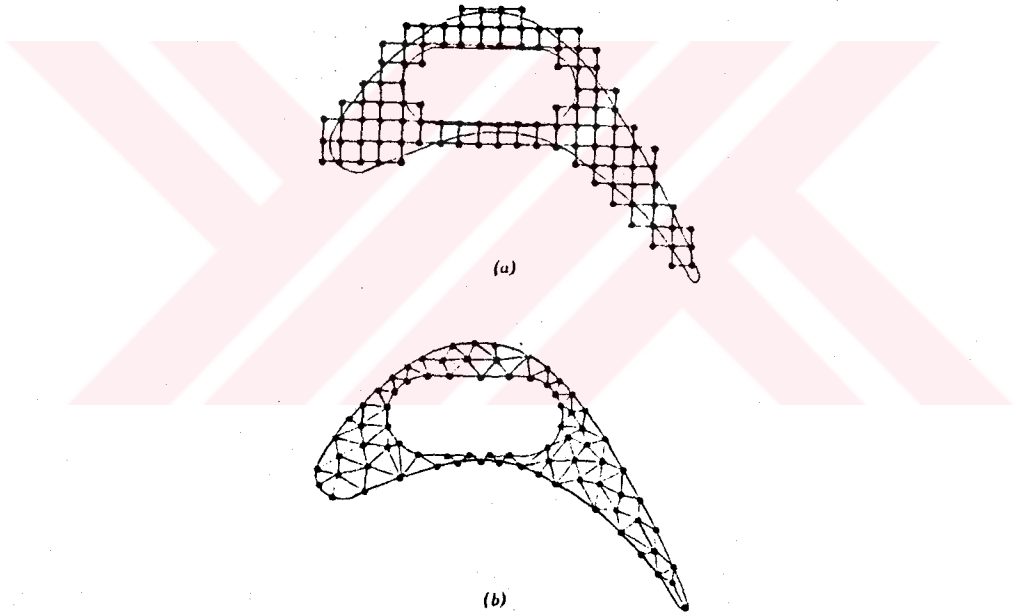
1.4.1. Sonlu Farklar Metodu

Bu metot, ana diferansiyel eşitliklerdeki türevlere, fark eşitlikleri kullanarak yaklaşım sağlar. Isı transferi, akışkanlar mekaniği problemleri ve sınırları koordinat eksenlerine paralel iki boyutlu alanlarla ilgili problemlerin çözümünde kullanış bir

metottur. Buna rağmen eğrisel ve şekilsiz sınırlı alanlarda kullanışsızdır ve genel bir bilgisayar programını bu yöntem için yazmak güçtür.

1.4.1.1. Sonlu Elemanlar Metodu İle Sonlu Farklar Metodunun Karşılaştırması

Modeli oluşturulmuş bir probleme, sonlu farklar metodu, nokta tarzında bir yaklaşım getirir. Model analizinde ne kadar fazla nokta olursa, sonuç o kadar yakın çıkar. Fakat alışılmamış şekilli veya sınırları düzgün geometrik olmayan parçalarda sonlu farklar tekniğini uygulamak zorlaşmaktadır. İşte bu durumlarda sonlu elemanlar yöntemi, sonlu farklar yöntemini yerini alır. Sonlu elemanlar yönteminde çözüm alanı, birçok küçük, birbiriyle irtibatlı alt alanlara veya elemanlara bölünür. Bu metot, modele parça tarzında bir yaklaşım getirir.



Şekil 1.1 Bir türbin kanat profilinin modellenmiş şekilleri

(a) tipik sonlu farklar modeli , (b) tipik sonlu elemanlar yöntemi

Bir örnekle sonlu farklar ve sonlu elemanlar modellerinin geometrik şekillerde nasıl oluşturulduğunu görebiliriz. Şekil 1.1 de bir türbin kanat profili görülmektedir. Biz kanat üzerine uygulanan kuvvetler sonucu oluşan yer değiştirme ve gerilme dağılımını veya termal yükler sonucu oluşan sıcaklık dağılımını bulmak isteyebiliriz. Kanadın orta

kısımında bulunan soğutma boşluğu dış kısmın biçimi ile birlikte basit olmayan bir geometrik şekil oluşturmaktadır.

Üniform sonlu farklar bölmelemesi, kanadın tümünü (çözüm alanını) kaplamakla birlikte, parça kenarlarında bir yaklaşım sözkonusu olmaktadır. Yatay ve dikey çizgilerden oluşmuş merdiven şekilli bir sınır meydana gelmektedir. Diğer yandan basit iki boyutlu eleman olarak “üçgen” kullanılan sonlu elemanlar modeli, bize daha iyi bir yaklaşım ve daha az nokta kullanma gereksinimi gibi avantajlar sunmaktadır. Ayrıca sınır düz çizgilerden oluşturulduğu için çözüm alanı daha iyi tanımlanabilmekte ve şekil daha iyi oluşturulabilmektedir.

Burada verilen örnek, bütün problemler için sonlu elemanlar metodunun sonlu farklar metodundan daha iyi olduğu anlamına gelmez. Gösterilmek istenen şey, sonlu elemanlar yönteminin kompleks geometrik şekillere daha uygun olduğudur.

1.4.2. Varyasyonel Metod

Varyasyonel yaklaşım, sayılar üreten bir fonksiyon integrali şeklindedir. Her yeni fonksiyon yeni bir sayı oluşturur. En düşük sayıyı üreten fonksiyon, diferansiyel eşitliği çözer.

$$\pi = \int_0^L \left[\frac{D}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - Qy \right] dx \quad (1.1)$$

π sayısal değerine özel eşitlik olan $y = f(x)$ verilerek çözüm yapılabilir. Varyasyonel değişimi hesaplama yöntemi bize $y = g(x)$ eşitliğinin π için daha düşük bir sayısal değer verdiğini de gösterebilir.

$$D \frac{d^2y}{dx^2} + Q = 0 \quad (1.2)$$

ve sınır şartları $y(0) = y_0$ ile $y(L) = y_L$ olur.

Diferansiyel eşitlik verilerek uygun fonksiyonlar arasından farklı deneme fonksiyonlarının yerini tutan yaklaşık çözüme ulaşılabilir. π için minimum değer veren deneme fonksiyonu yaklaşık çözümdür.

Varyasyonel metod, birçok sonlu elemanlar formülasyonunun temelini oluşturur ama birinci dereceden türevli terimleri içeren diferansiyel eşitliklere uygulanamamaktadır.

1.4.3. Ağırlıklı Artıklar Metodu

Bu metod da integral çözüm içerir ve yaklaşık sonuç diferansiyel eşitliğin yerini alır. Bu yaklaşık sonuç, eşitliği sağlamazsa artık yada hata terimleri içeren sonuçlar oluşur.

$y = h(x)$ fonksiyonunu (1.2) denkleminin yaklaşık sonucu olarak farzeder ve denklemde yerine koyarsak

$$D \frac{d^2 h(x)}{dx^2} + Q = R(x) \neq 0 \quad (1.3)$$

elde edilir. Metodun gerçekleşmesi için aşağıdaki denklemin sağlanması gerekir.

$$\int_0^L W_i(x) R(x) dx = 0 \quad (1.4)$$

Artık $R(x)$ ağırlık fonksiyonu $W_i(x)$ ile çarpılıp integrale edildiğinde sonuçun sıfır olması gerekir. Ağırlık fonksiyonlarının sayısı, yaklaşık çözümlerdeki bilinmeyen katsayılarına eşittir. Birçok ağırlık fonksiyonu seçim şekli olup en önemlileri aşağıda anlatılmıştır.

1.4.3.1. Yerine Koyma (Collocation) Metodu

İmpuls fonksiyonu $W_i(x) = \delta (x-x_i)$ ağırlık fonksiyonu olarak seçilir. Bu seçim özel noktalarda yokolan artıklar sağlamaya eşittir. Seçilen nokta sayısı yaklaşık çözümler içindeki belirlenmemiş katsayıların sayısı kadardır.

1.4.3.2. Alt Alan Metodu

Her ağırlık fonksiyonu birlik olarak $W_i(x) = 1$ şeklinde özel bir alan üzerinde seçilir. Bu işlem belirli bir aralıkta kaybolan artıkların integralini sağlar. İntegrasyon aralıklarının sayısı yaklaşık çözümler içindeki belirlenmemiş katsayıları sayısına eşittir.

1.4.3.3. Galerkin Metodu

Galerkin metodu, aynı fonksiyonları yaklaşık eşitliklerde kullanılan $W_i(x)$ fonksiyonları için kullanır. Bu yaklaşım birinci dereceden türevli terimleri içeren problemler için geliştirilmiş sonlu elemanlar yönteminin temelidir. Yöntem; varyasyonel metod kendinden eklenik (self - adjoint) diferansiyel eşitliklere uygulandığında bulunan sonuçlarla aynı değerleri verir. Galerkin metodu özellikle yüzey problemlerinin sonlu elemanlar ile çözümünde kullanılır.

1.4.3.4. En Az Kareler Metodu

Bu metod, artıkları ağırlık fonksiyonu olarak kullanır ve aşağıda tanımlanan yeni hata terimlerine ulaşır.

$$E_r = \int_0^L [R(x)]^2 dx \quad (1.5)$$

Bu hatalar yaklaşık çözümdeki bilinmeyen katsayılarına göre minimize edilir. Bu metod sonlu elemanlar çözümleri için formüle edilir fakat Galerkin ve Varyasyonel yöntem kadar yaygın değildir.

1.5. Nümerik Çözümler İçin İntegral Formülasyonu

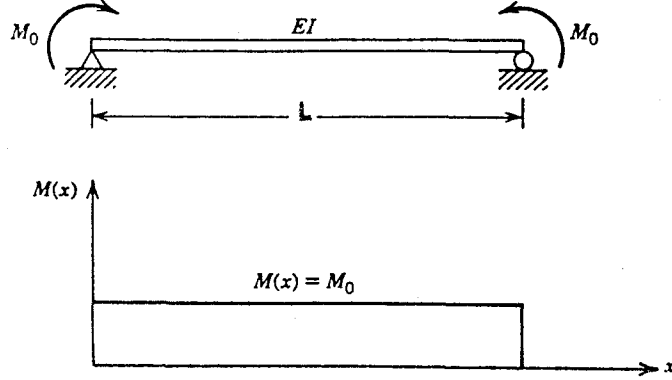
Basit mesnetlenmiş bir çubuğun her iki ucuna M_0 momentinin etki ettiği bir örneği ele alalım. Bu çubuk ve moment diyagramı Şekil 1.2 de gösterilmiştir. Düzenlenen eşitlik aşağıdaki şekildedir.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} - M(x) = 0 \quad (1.6)$$

Sınır şartları ise $y(0) = 0$ ve $y(L) = 0$ olur.

EI katsayısı çubuğun eğilmeye karşı olan direncini ve $M(x)$ eğilme momenti eşitliğini ifade eder. Bu örnekte $M(x)$ moment eşitliği M_0 sabit değerine eşittir. Çubuğun eğilmesini ifade eden yaklaşık eşitlik şu şekilde ifade edilebilir.

$$y(x) = A \sin \frac{\pi x}{L} \quad (1.7)$$



Şekil 1.2. Uçlarına moment uygulanan basit mesnetli çubuk

A belirlenmemiş bir katsayıdır. Verilen bu yaklaşık çözüm kabul edilebilir , çünkü $y(0) = y(L) = 0$ için eşitlik sağlanmakta ve umulan sehim eğrisine uygun bir şekil ortaya çıkmaktadır. Diferansiyel eşitliğin kesin sonucu aşağıdaki gibidir.

$$y(x) = \frac{M_0 x}{2EI} (x - L) \quad (1.8)$$

Bölüm 1.4 de kısaca açıklanmaya çalışılan metodları bu basit sisteme uyguladığımızda aşağıdaki eşitlikleri elde etmekteyiz. Formüllerin geliştirilme basamakları ve ispatı için Segerlind J. L. 1984 kitabına bakılabilir.

Varyasyanel metod, Galerkin metodu ve en az kareler metodu için

$$y(x) = -\frac{4M_0 L^2}{\pi^3 EI} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (1.9)$$

Yerine koyma metodu için

$$y(x) = -\frac{M_0 L^2}{\pi^2 EI} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (1.10)$$

Alt alan metodu için

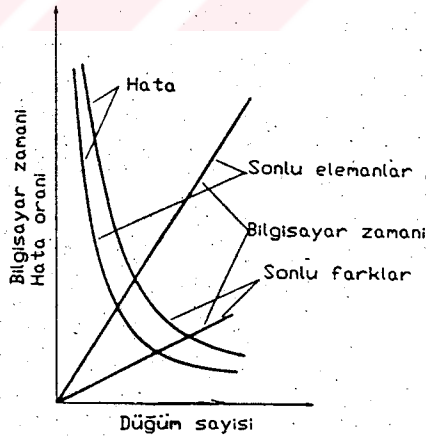
$$y(x) = -\frac{M_0 L^2}{2\pi EI} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (1.11)$$

eşitlikleri elde edilir.

1.6. Hatalar

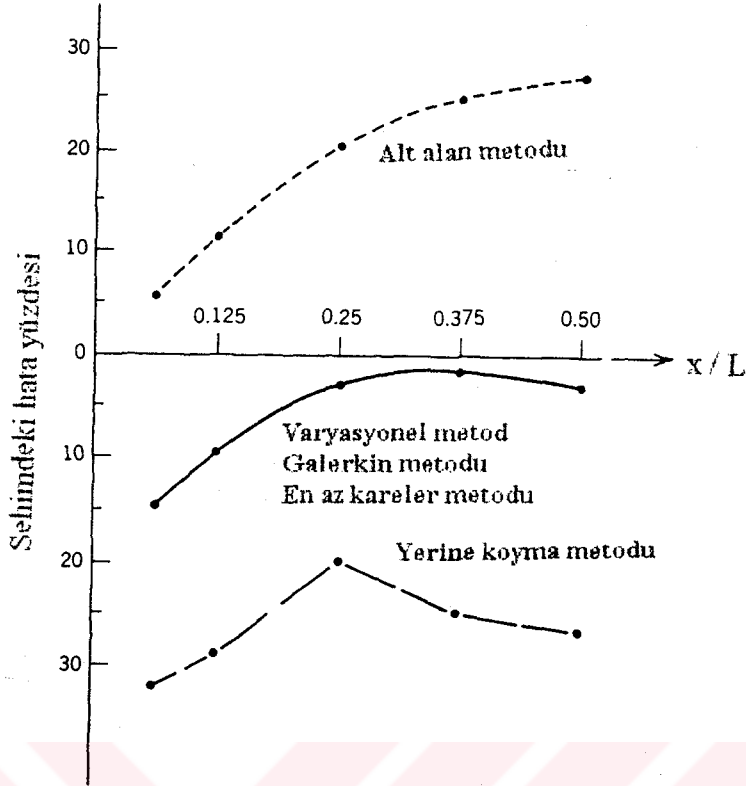
1. İdealizasyon hataları : Eğri ve değişik geometrik şekiller, doğru parçaları ile ifade edilir.
2. Eleman büyüklüğü hataları : Sistemi küçük elemanlara bölmek, daha doğru neticeler verir. Buna karşılık problemin çözüm süresi uzar.
3. Eleman biçiminin seçilmesi hataları : Düzgün ve simetrik elemanlar, düzgün olmayan ve sivri kenarlı sonlu elemanlardan daha iyidir.
4. Kabullerde yapılan hatalar : Seçilen deplasman fonksiyonlarının tabiatında bulunan hatalardır.
5. Yuvarlatma hataları : Yaklaşımlar ve hesap esnasındaki değerlerin yuvarlatılmasından oluşan hatalardır.

Zaman ve hata bakımından sonlu elemanlar metodu ile sonlu farklar metodunun mukayesesi Şekil 1.3 de verilmiştir. Sonlu elemanlarla hesap için harcanan zaman daha fazla, hata oranı ise daha azdır. Sonlu farklarda ise hesap için harcanan zaman daha az, fakat hata oranı daha fazladır. Kesin değerlere sonlu elemanlar yöntemi ile bulunan sonuçlar üstten yaklaşmakta, buna karşılık sonlu farklar ile bulunan sonuçlar alttan yaklaşmaktadır.



Şekil 1.3. Zaman ve hata bakımından iki yöntemin karşılaştırılması

Şekil 1.2 de gösterilen basit mesnetlenmiş çubuk için vermiş olduğumuz (1.9), (1.10) ve (1.11) eşitliklerini kesin sonuçla karşılaştırarak bir grafik üzerine taşırsak Şekil 1.4 elde edilmiş olur.



Şekil 1.4. Basit mesnetli çubuğa uygulanan beş yaklaşık çözüm yöntemi için hata grafiği

1.7. Temel Yaklaşımlar

Sonlu elemanlar metodunda sürekli ortamlar, ayrık sistemler haline getirilerek çözüm yapılabilir.

a) Sürekli ortam hali çizgilerle veya yüzeylerle ayrık hale getirilir. Eleman şekli sürekli ortam şekline benzer olmalıdır.

b) Elemanların düğüm noktaları ile birbirine bağlı olduğu farzedilir. Düğüm noktalarının deplasmanları veya bunların türevleri (dönme gibi) problemin bilinmeyen parametreleri olarak seçilir.

c) Deplasman fonksiyonları, birim deplasman durumlarının lineer bir kombinezonudur.

d) Kuvvetler düğüm noktalarına uygulanır.

1.8. Yakınsama (Convergence) Kriteri

Sonlu elemanlar metodunda gerçek sonuçlara yakınsama hızının artması için en önemli etken, elemanlarda deplasman parametrelerinin birim değerlerine karşı gelen seçilmiş deplasman fonksiyonlarının uygunluğudur. Bu fonksiyonların belirlenmesinde yakınsaklık (convergence) kriteri diye bilinen bazı özelliklerin sağlanması, metodun yakınsaklığının temini için önemlidir. Deplasman fonksiyonları seçilirken şunlara dikkat edilir.

a) Seçilen deplasman fonksiyonları, eleman içinde ve kenarlar boyunca süreklilik şartını sağlamalıdır.

b) Rijit cisim hareketinden dolayı gerilme ve şekil değiştirme olmamalı, sabit deformasyon şartı sağlanmalıdır.

c) Deplasman fonksiyonları eleman içinde sürekli olmalıdır. Eleman boyutu küçültülerek gerilme yayılımı sabite yakın hale getirilir.

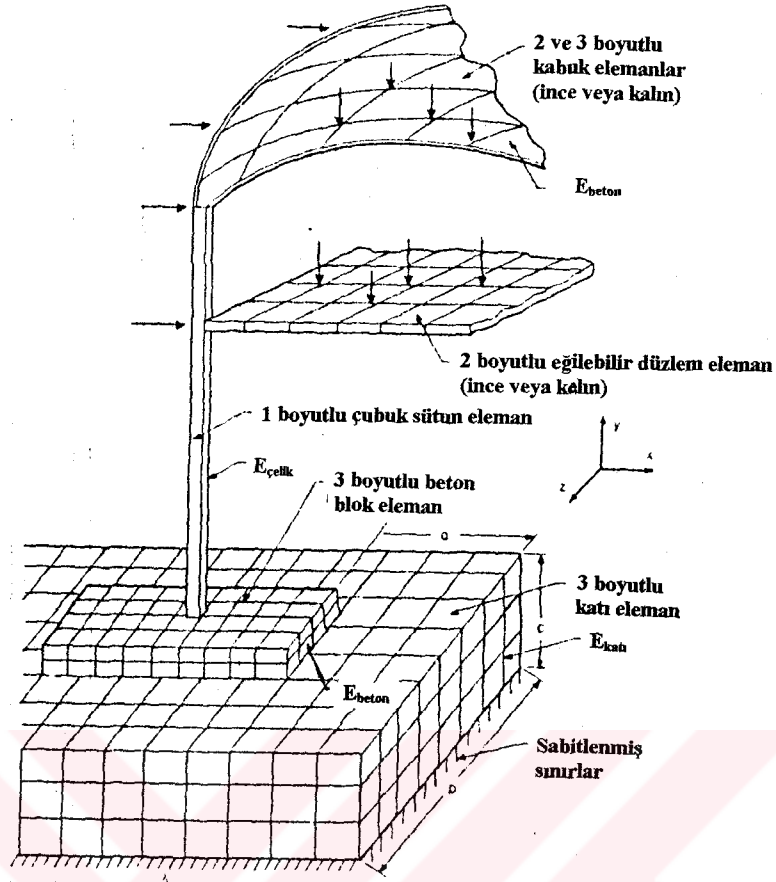
d) Koordinat eksenini değiştirince çözüm farklı olmamalıdır. Bunun için deplasman fonksiyonları ya tam polinom veya tabii koordinatların fonksiyonu şeklinde olmalıdır.

e) İç ve dış kuvvetlerin işindeki türevlerde de sürekli olmalıdır.

f) Deplasman fonksiyonları, düğüm noktası deplasmanlarının lineer bir fonksiyonu olmalıdır.

1.9. Sonlu Elemanlar Yönteminde İzlenen Adımlar

1. İlk adım, incelenecek yapının sonlu sayıda ve basit geometride elemanlara bölünmesidir. Şekil 1.1 de verilen örnekte, türbin kanadı sıcaklık ve gerilim dağılımı bulunmak üzere üçgen elemanlara bölünmüştür. Değişik şekilli elemanlar kullanılabilir. Özellikle çubuk ve düzlem plaklarda farklı şekilli eleman tipleri kullanmak bir gereklilik olabilir. Şekil 1.5 de tipik bir yapının belli bir kısmı görülmektedir. Analizi yapılacak kısımların geometrik yapılarına göre, farklı eleman tipleri ile bölündüğüne dikkat edilmelidir.



Şekil 1.5. Tipik bir inşaat yapısının değişik cins elemanlarla bölümlenmiş şekli

2. Eleman üzerinde, düğüm noktası (node) denilen bir takım anahtar noktalar seçilir. Bu düğüm noktalarında alan değişkenleri tanımlanır.

3. Eleman üzerinde, alan değişkenlerini ifade etmek için interpolasyon fonksiyonları seçilir. Alan değişkenleri skaler, vektörel veya yüksek seviyeli tansörler olabilir. Genellikle, integral ve türev işlemleri kolay yapılabildiğinden, polinomlar seçilir. Polinomun derecesi, elemana verilen düğüm noktası sayılarına, serbestlik derecesine ve her düğüm noktasındaki bilinmeyen miktarına bağlıdır.

4. Eleman özellikleri bulunur. Burada elemanın özelliklerini belirten matris eşitlikleri Bölüm 1.4 de açıklanan yöntemlerin biri ile hazırlanır. Problemin türüne bağlı olmakla birlikte, en sık kullanılan; varyasyonel yaklaşımdır.

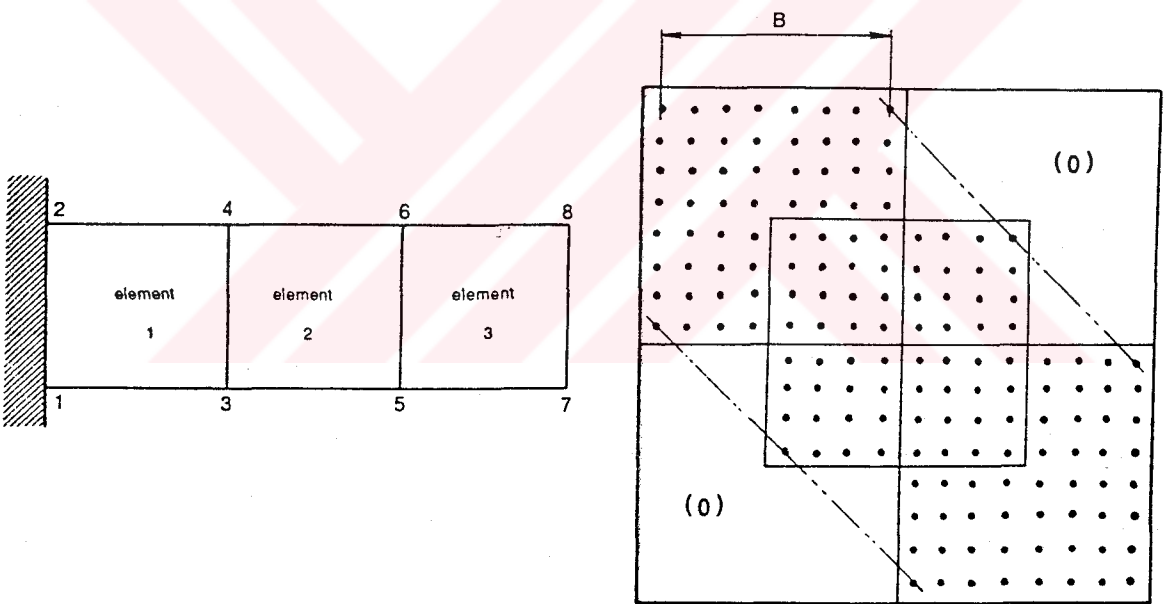
5. Yukarıdaki işlemlerin hepsi yapıldıktan sonra, eleman özelliklerini ifade eden matris eşitlikleri ile çözüm alanı veya sisteminin özelliklerini ifade eden matris eşitlikleri

birleştirilir. Elemanların birbirleriyle birleştiği veya paylaştığı düğüm noktalarındaki alan değişkenleri her zaman aynıdır.

Birkaç elemanın birleşmesiyle oluşan modellerde toplam eleman katılık matrislerinin nasıl oluşturulduğunu, iki örnek üzerinde daha iyi görebiliriz. Şekil 1.6 da dörtgen şekilli üç adet elemana ayrılan çubuğun şekli ve oluşan toplam katılık matrisi görülmektedir. Burada matrisin B bant genişliği (bant sütun adedi) şu eşitlikle bulunur.

$$B = (R + 1) \text{ DOF} \quad (1.12)$$

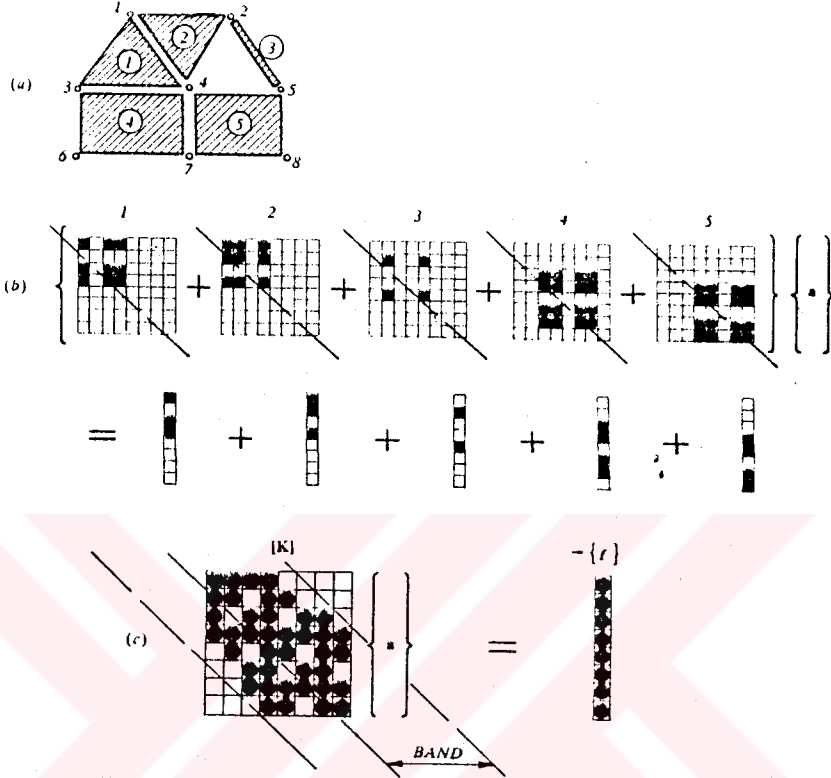
R tek bir elemandaki düğüm noktası adetleri arasındaki en büyük farktır. DOF ise serbestlik derecesini (degree of freedom) göstermektedir. Verilen şekil için B hesaplanırsa $B = (3 + 1) 2 = 8$ olarak bulunur.



Şekil 1.6 Elemanlara bölünmüş çubuk ve oluşturulmuş toplam katılık matrisi

Farklı şekillerdeki elemanlardan oluşmuş sistemlerde ise Şekil 1.7 de verilen sistem uygulanmaktadır. Burada elemanların numaralanmış düğüm noktaları ile

oluşturulan eleman matrislerinin, satır veya sütun numaralarının aynı olduğuna dikkat edilmelidir. Tüm kuvvetlerin düğüm noktalarına geldiği kabulü ile sistem basitleştirilmiş ve $\{f\}$ toplam vektörü oluşturulmuştur.



Şekil 1.7. Toplam katılık matrisi ve sonlu elemanlar denkleminin şematik oluşumu

6. Sistem denklemleri sınır şartları dikkate alınarak değiştirilir.
7. Lineer cebrik denklem sistemleri çözülerek düğüm noktalarının bilinmeyen alan değişkenleri bulunur.

8. Bünye denklemlerinden hareketle gerilmeler bulunur.

9. İsteniyorsa mesnet reaksiyonları bulunur.

Buraya kadar sonlu elemanlar yöntemi için genel bilgiler verilmeye çalışıldı. Mukavemet esaslarının ve kuvvet kavramının matrislerle ifade edilmesi ile yöntemin teorik formülasyonu ve dayandığı temeller görülebilir. Şimdi kuvvet ve gerilme kavramları üzerinde durulacaktır.

2. MUKAVEMETTE KUVVET KAVRAMI

2.1. Dış Kuvvet

Bir cisme, diğer cisimler tarafından yapılan etkiye dış kuvvet denir. Dış kuvvetler doğrudan doğruya belli olanlar ve irtibatlardan (mesnet tepkilerinden) gelenler olmak üzere ikiye ayrılabilirler.

Doğrudan doğruya belli olan dış kuvvetler, cisme tesir ettiği bilinen dış kuvvetlerdir. Mesela cismin kendi ağırlığı, üzerine yüklenmiş ağırlıklar veya diğer kuvvetler gibi. İrtibatlardan gelen kuvvetler ise cisimlerin diğer cisimlere bağlanmasıyla oluşur. Bu bağlantı ve dayanak noktalarına mesnet, bu kuvvetlere de mesnet tepkileri adı verilir.

Dış kuvvetler aşağıdaki gibi de sınıflandırılabilirler:

a) Tekil kuvvetler: Tesir ettikleri alan çok küçük olduğundan bir noktaya tesir ediyor kabul edilirler.

b) Yüze yayılmış kuvvetler: Cismin üzerine yüklenmiş diğer bir cisim gibi düşünebileceğimiz bu kuvvetlere yayılı yükler de denilir. Kendi arasında da, eşit dağılımlı kuvvetler ve yük yoğunluğu değişen yayılı kuvvetler olmak üzere ikiye ayrılabilir.

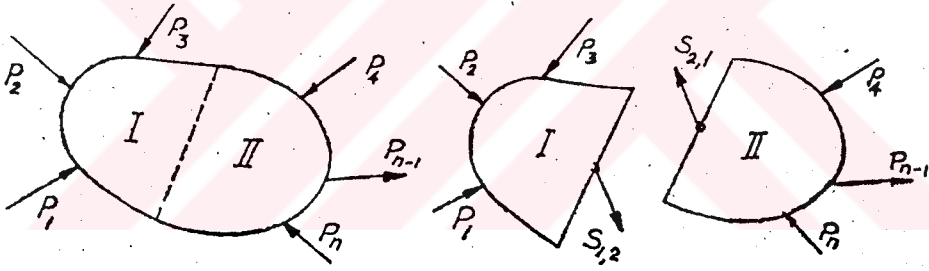
c) Hacime yayılmış kuvvetler: Cismin kendi ağırlığı ve yerçekimi kuvveti gibi.

2.2. İç Kuvvet

İç kuvvetler, sonsuz sayıdaki küçük parçanın birbirleri ile bağlanmasından oluştuğu varsayılabilen doğal katı cismin çeşitli parçaları arasındaki etki ve tepkiler olarak tanımlanabilir. Bu iç kuvvet kavramının, mesela birbirlerine mafsallarla bağlanmış bir sistemde (zincir), mafsallar boyunca bir cisimden diğerine aktarılan etkilerin genelleştirilmesi ile varılan bir kavram olarak düşünülmesi, kavramın açıklanması bakımından yararlı olabilir. İç kuvvetlerin, cisimde zihnen tasarlanan bir ayırma olmadan hesaplanmasına ve kendisinden söz edilmesine olanak yoktur.

2.2.1. İç Kuvvet Bileşkesi

Bir cismin iki parçasının birbirine yaptığı etkiye iç kuvvet demiştik. Cisme etkiyen tüm dış kuvvetler belirli ise ve ayırma kesiti de seçilmiş ise bu kesitteki yayılı iç kuvvetlerin bileşkesini, statığın denge denklemleri ile hesaplamak mümkündür. Şekil 2.1 deki cisim P_1, P_2, \dots, P_n kuvvetleri tesirinde dengede bulunsun. Bu kuvvetler dış kuvvetler olup bir kısmı doğrudan doğruya bellidir, bir kısmı da mesnet tepkilerinden meydana gelmiştir. Cisim katı veya elastik olabilir. Elastik cisim de kuvvetlerin tesiriyle şekil değiştirdikten sonra katı cisim gibi kabul edilebilir Buna mukavemette, donma prensibi denir. Kuvvetlerin tesiri altında dengede duran bu cismi bir yüzeyle I ve II parçalarına ayırdığımızı düşünelim. Bu parçalar birbirlerine ayırma yüzeyi boyunca temas ve tesir etmektedirler.(Bu tesirlere iç kuvvetler diyoruz.) Cisim dengede ise parçalandıktan sonra I ve II parçaları da dengededirler.



Şekil 2.1

I parçasının dengede olabilmesi için tesir eden kuvvetlerin vektörel toplamının sıfır olması gerekir. Bu kuvvetler P_1, P_2, P_3 ile II nolu parçanın I'e tesiridir.

S_{dI} : I nolu parçaya tesir eden dış kuvvetlerin vektörel toplamı.

S_{dII} : II nolu parçaya tesir eden dış kuvvetlerin vektörel toplamı

$S_{1,2}$: II nolu parçanın I nolu parçaya tesiri

$S_{2,1}$: I nolu parçanın II nolu parçaya tesiri

I nolu parçanın dengede olabilmesi için $S_{dI} + S_{1,2} = 0$

II nolu parçanın dengede olabilmesi için $S_{dII} + S_{2,1} = 0$

Denklemlerin toplamını yaparsak $S_{dI} + S_{dII} + S_{1,2} + S_{2,1} = 0$ bulunur.

Cisim dengede olduğundan $S_{aI} + S_{aII} = 0$ dir. O halde $S_{1,2} + S_{2,1} = 0$ olacaktır. $S_{1,2} = -S_{2,1}$ olduğu görülür. I nolu parçanın II nolu parçaya tatbik ettiği kuvvet, II nolu parçanın I noluya tesirinin eşit şiddetli, ters yönlüdür.

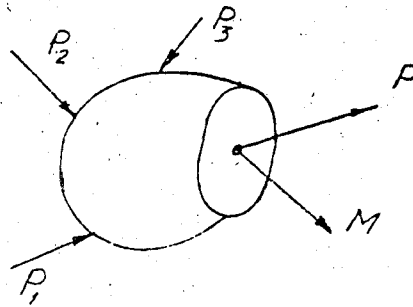
İç kuvvetler aksi yönde, eşit şiddette kuvvetlerdir. Denge şartları bütün kesite tesir eden iç kuvvetlerin bileşkesini verir. İç kuvvetlerin kesit içinde dağılışını denge şartları ile bulamayız. Dış kuvvetlerin cisimlerde meydana getirdiği şekil değiştirmeler göz önüne alınarak, iç kuvvetlerin kesit içinde nasıl dağıldıklarını ve birim kesit alanına isabet eden kuvvet miktarını (gerilme'yi) hesaplayabiliriz. Cismin I nolu parçasının dengesinin incelenmesi neticesinde II nin I'e tesirinin P_4, P_n kuvvet gurubunun, parçaları ayırma yüzeyine indirgenmesine eşit olduğu görülür

$$S_{1,2} = S_{aII} \text{ dir. Aynı şekilde } S_{1,2} = S_{aI} \text{ olur.}$$

Genel olarak I nolu parçayı dengede tutan, II nin I e tesiri bir P kuvveti ile bir M momentidir. (II ye tesir eden kuvvetlerin, kesitin ağırlık merkezine indirgenmesi neticesinde bir kuvvet ve moment bulunur.)

2.2.2. Zorlama Çeşitleri

P kuvveti ile M momentini kesit içinde ve kesitin normali üzerinde olmak üzere iki bileşene ayırılır. P kuvvetinin normal üzerindeki bileşenine normal kuvvet denilir. Bu kuvvet kesitten uzaklaşır yönde ise **Çekme kuvveti**, keside doğru yönelmiş ise **Basma kuvveti** ismini alır. P kuvvetinin kesit düzlemi içindeki bileşenine ise **Kesme (makaslama) kuvveti** denir. Moment gösteren vektörün düzlem üzerindeki bileşenine, cismin eksenini eğmeye çalıştığı için **Eğilme momenti**, kesitin normali üzerindeki bileşenine de **Burulma momenti** denir.



Şekil 2.2

Görülüyor ki dış kuvvetlerin tesiri altında bir cisim aşağıdaki zorlama çeşitleri ile zorlanmaktadır.

- a) Normal kuvvet (i. Çekme , ii. Basma)
- b) Kesme kuvveti
- c) Eğilme momenti
- d) Burulma momenti

Cisme tesir eden kuvvetler düzlemsel kuvvetlerse yani hepsi aynı düzlem içerisinde bulunuyorsa ve kesiti bu düzleme dik olarak alırsak moment vektörü kesit düzlemi içerisinde bulunur. Dolayısıyla bu kesit normal kuvvete, kesme kuvvetine ve eğilme momentine zorlanmaktadır. Burulma momenti sıfırdır. Düzlemsel olan dış kuvvetler , aynı zamanda cismin eksenine dik doğrultuda iseler, normal kuvvet de sıfır olacağından çubuk eksenine dik kesitteki iç kuvvetler kesme kuvveti ile eğilme momentinden ibaret kalır.

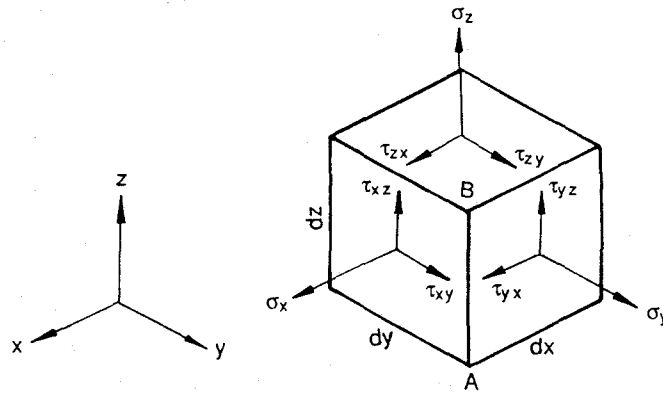
3. ELASTİSİTE BAĞINTILARI

3.1. Gerilme Hali ve Bileşenleri

Gerilme en genel formda dokuz bileşenli bir gerilme tensörü ile ifade edilebilir. (Uzunluk, alan, hacim, ısı derecesi, v.b. gibi yalnız bir sayının bilinmesi ile tanımlanan büyüklüklere *Skaler büyüklükler*, hız, ivme, kuvvet, statik moment, momentum v.b. gibi üç sayının bilinmesi ile tanımlanan büyüklüklere *Vektörel büyüklükler* adı verilir. Gerilme gibi üçten daha fazla değerle tanımlanan büyüklüklere ise *Tensörel büyüklükler* denir.)

3.1.1. Üç Eksenli Gerilme Hali

Şekil 3.1'de görüleceği üzere bir xyz eksen takımı ve bu takım üzerinde kenar uzunlukları sonsuz küçük bir dikdörtgenler prizması düşünelim. Bu prizmanın yüzleri, normaleri sırasıyla x,y,z olan alan elemanlarını tanımlarlar. Bu alan elemanlarına etkiyen gerilme bileşenleri şekil üzerinde gösterilmiştir. Bu bileşenlerin alt indisleri şu kurala göre verilmiştir: İlk indis gerilme bileşeninin ait olduğu yüzeyin normalini, ikinci indis ise bileşenin paralel olduğu eksen göstermektedir. Bu kurala göre normal gerilmeler daima aynı iki indisi alırlar. Sırf yazma kısalığı nedeniyle normal gerilmeler tek indisle gösterilirler



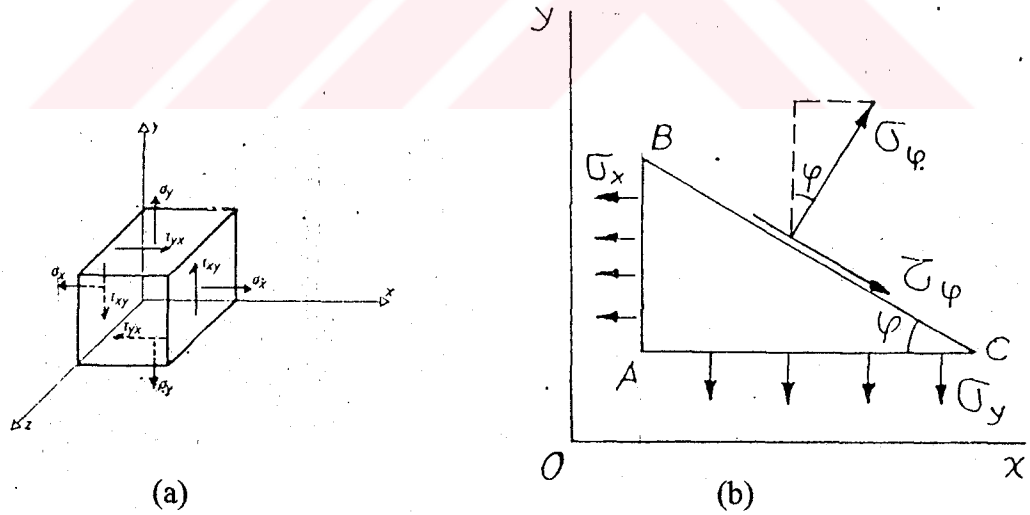
Şekil 3.1 Kartezyen koordinatlarda gerilme uygulanmış elemanter prizma

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_x \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \end{array} \quad (3.1)$$

Altı bağımsız gerilme bileşeni vardır. Bu durumda üç boyutlu elemanın herhangi bir noktasındaki gerilme hali, altısı bağımsız bileşen olmak üzere dokuz bileşenli bir gerilme tensörü ile ifade edilir.

3.1.2. İki Eksenli Gerilme Hali

Bir noktadan geçen bütün yüzey elemanlarındaki gerilme vektörlerinin doğrultuları hep aynı bir düzlem içerisinde kalırsa bu özel gerilme haline düzlem gerilme hali veya iki eksenli gerilme hali adı verilir. Bu özel halde alan elemanlarındaki gerilme vektörlerinin bu düzleme dik doğrultudaki bileşenlerinin eşdeğer olarak sıfır etmesi gerekeceğinden gerilme halini tanımlayan altı bileşenden bir kısmı eşdeğer olarak sıfır olur. Bu düzlemi xy düzlemi olarak seçersek z indisli bütün bileşenler sıfır olur. Bu özel halde sıfır olmayan bileşenler Şekil 3.2-a 'da gösterilmiştir.



Şekil 3.2

İki eksenli yani düzlem gerilme halinde gerilme tensörü, üçü bağımsız dört gerilme bileşeni ile belirlenir.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \sigma_z \equiv 0 \end{array} \quad (3.2)$$

Eleman içinde herhangi bir noktanın gerilme hali biliniyor ise o noktadan geçen herhangi bir düzlemdaki σ , τ gerilmeleri bulunabilir. Ancak bu düzlemler içinde asal gerilmelerin oluşturduğu asal gerilme düzlemi mühendislikte çok önemlidir. Şekil 3.2 b de ϕ açısı ile tanımlanan alan elemanları içerisinde kayma gerilmesi bileşeninin sıfır olduğu özel elemanlara *Asal elemanlar - Asal düzlemler* adı verilir. Asal düzlemlerin normallerinin doğrultuları da *Asal doğrultular* adını alır. Bu asal gerilme düzleminin konumu ve asal gerilme değerleri :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.3)$$

ve asal doğrultularını belirleyen ϕ_0 açısı :

$$\operatorname{tg} 2\phi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3.4)$$

olur. Kayma gerilmesinin ekstrem değerleri ise aşağıdaki gibi olur.

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (3.5)$$

3.1.3. Tek Eksenli Gerilme Hali

Eğer iki eksenli gerilme halinde asal gerilmelerden bir tanesi sıfır ise meydana gelen gerilme haline bir eksenli gerilme hali denir.

$$[\sigma] = [\sigma_x] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \sigma_{\max} = \sigma_1 = \sigma_x \\ \sigma_{\min} = 0 \\ \tau_{1,2} = \pm \frac{\sigma_1}{2} \end{array} \quad (3.6)$$

Eleman içindeki herhangi bir noktadaki tek eksenli gerilme durumunda, bu noktadan geçen herhangi doğrultudaki düzlemlerdeki σ , τ gerilmeleri, o noktadaki tek

eksenli gerilme hali bilindiği için bulunabilir.Örneğin o noktada tek eksenli gerilme ile φ açısı yapan düzlemdeki σ ve τ gerilme değerleri aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi \\ \tau &= -\sigma_x \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi\end{aligned}\quad (3.7)$$

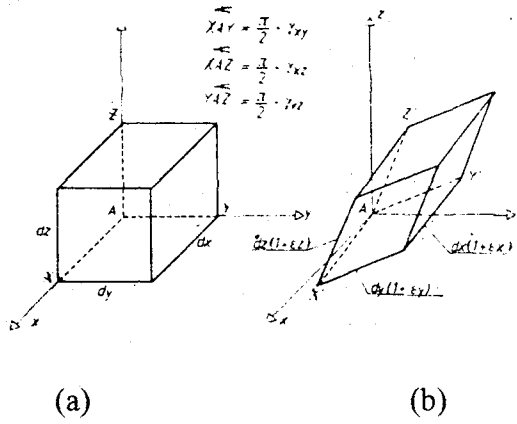
3.2. Şekil Değiştirme Hali ve Bileşenleri

Doğada katı cisimler genellikle kendilerine etkiyen ve kendi aralarında dengede olan dış kuvvetlerin etkisi altında şekil değiştirerek yeni bir denge konumuna erişirler. Şekil değiştirme bir katı cismin çeşitli noktalarının konumlarının birbirine göre değişmesidir. Bir cismin şekil değiştirmesini bilmek demek, genel olarak, o cismin şekil değiştirmeden sonraki yeni halini bilmek demektir. Bunun için çeşitli uzunluk ve açıların değişimini bilmek gerekir. Buradan şekil değiştirmenin *uzunluk değişimi* ve *açı değişimi* gibi iki ana elemanı olduğu sonucuna varabiliriz.

3.2.1. Üç Eksenli Şekil Değiştirme Hali ve Bileşenleri:

Bir noktada şekil değiştirmenin bilinmesini somut olarak bu noktadaki sonsuz küçük bir hacim elemanının şekil değiştirmeden sonraki yeni biçiminin bilinmesi anlamında tarif edilebiliriz. Bu hacim elemanının kenarlarını dx , dy , dz olan bir dikdörtgenler prizması olarak alırsak (Şekil 3.3-a) bu sonsuz küçük prizmanın şekil değiştirme halini (Şekil 3.3-b) bilebilmek için her kenarının yeni boyunu ve A köşesindeki her üç açısının yeni değerini bilmek yeterlidir. Bunun için de x , y , z doğrultularındaki ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z boy uzama oranları ile xAy , xAz , yAz dik açılarındaki γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} açı değişimi oranlarını bilmek gerekir. Böylece aşağıdaki matris elde edilir.

$$\left[\epsilon \right] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} \\ \gamma_{zx} &= \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} \end{aligned}\quad (3.8)$$



Şekil 3.3

3.2.2. Düzlem Şekil Değiştirme Hali ve Bileşenleri :

Eğer bir cisim şekil değiştirmesi esnasında çeşitli noktaların yer değiştirme vektörleri daima, belirli bir düzleme paralel düzlemler içerisinde kalıyorsa bu şekil değiştirme haline *düzlem şekil değiştirme hali* adı verilir.

Düzlem şekil değiştirme halinde, bir noktadaki şekil değiştirmeyi tanımlamak için gerekli altı bağımsız elemanın sayısı üçe düşer. Eğer faraza, xy düzlemi yer değiştirme vektörlerinin paralel kaldıkları düzlem olarak seçilirse, altı kartezyen bileşenin alt indisleri z olanları eşdeğer olarak sıfır olur. Matris formu aşağıda gösterilmiştir.

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \gamma_{xy} = \gamma_{yx} \\ \varepsilon_z \equiv 0 \end{matrix} \quad (3.9)$$

Asal doğrultudaki ekstrem birim uzamalar ,

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (3.10)$$

Asal uzama doğrultuları ,

$$\text{tg}2\varphi_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (3.11)$$

Asal kayma doğrultuları ise aşağıdaki gibi olur.

$$\operatorname{tg}2\varphi = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}} \quad (3.12)$$

3.3. Yer Değiştirme - Şekil Değiştirme Bağlıları

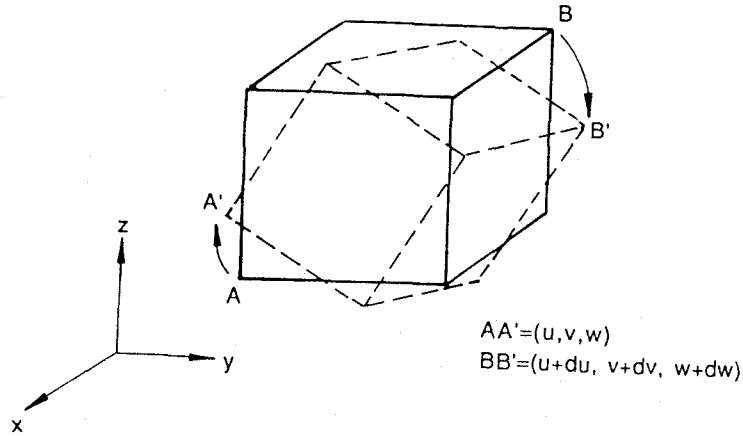
Şekil değiştirme ortamının bir noktasındaki şekil değiştirme halini tanımlayan altı adet şekil değiştirme oranını, söz konusu noktanın yer değiştirmesini tanımlayan değerler cinsinden hesaplamak mümkündür.

Şekil değiştiren ortamda herhangi bir A noktasının yer değiştirmesi bu noktaya ait bir yer değiştirme vektörü ile tanımlanır. Bu yer değiştirme vektörünün seçilen bir x, y, z koordinat takımındaki bileşenleri, u, v, w olsunlar. Şekil 3.4 deki deformasyona uğramış bir elemanter prizma için aşağıdaki diferansiyel denklemler yazılabilir.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (3.13)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \quad (3.14)$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \quad (3.15)$$



Şekil 3.4

Bu denklemler vektörel formda şu şekilde yazılabilir.

$$\{da\} = Te \{dr\} \quad (3.16)$$

$\{da\}$ vektörü du , dv , dw elemanlarından, $\{dr\}$ vektörü de dx , dy , dz elemanlarından oluşmuştur. Te tensörü ise aşağıda tanımlanmıştır.

$$Te = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

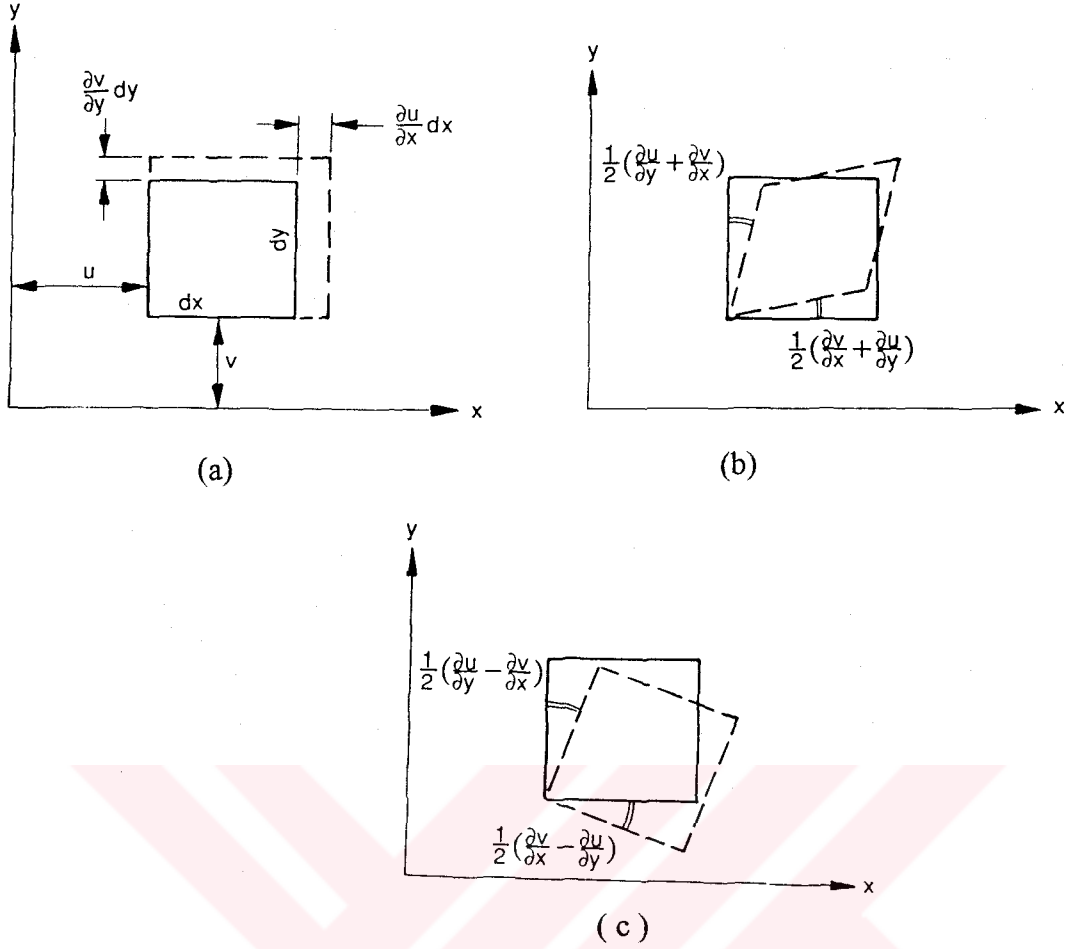
Bu tensörü üç parçaya ayırabiliriz.

$$Te = Te' + Te'' + Te''' \quad (3.18)$$

$$Te' = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$Te'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$Te''' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$



Şekil 3.5

Şekil 3.5 de elementel prizmanın xy düzlemine paralel yüzündeki deformasyonlar gösterilmiştir. (a) ve (b) de değişik tip deformasyonlar (c) de ise rijit gövdedeki dönüş gösterilmektedir. Aynı işlemler xz ve yz düzlemleri için de yapılabilir.

Aşağıda yer değiştirme - şekil değiştirme bağıntıları köşeli parantezler içerisinde nonlineer terimler dahil edilerek verilmiştir.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.22)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.23)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3.24)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.25)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad (3.26)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad (3.27)$$

Köşeli parantez içindeki terimlerden son terim dışındaki terimler, son terim yanında terk edilebilir.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.28)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.29)$$

Matris formda,

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon_L\} \quad (3.30)$$

$$\varepsilon_0 \quad : \text{Lineer terimleri içerir.} \quad \{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0,m} \\ \varepsilon_{0,e} \end{Bmatrix}$$

$\varepsilon_{0,m}$: Lineer membran terimleri

$\varepsilon_{0,e}$: Lineer eğilme terimleri

$$\varepsilon_L \quad : \text{Nonlineer terimleri içerir.} \quad \{\varepsilon_L\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{L,m} \\ \varepsilon_{L,e} \end{Bmatrix}$$

$\varepsilon_{L,m}$: Nonlineer membran terimleri

$\varepsilon_{L,e}$: Nonlineer eğilme terimleri

Buradan düzlem hal için,

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0, m} \\ \varepsilon_{0, c} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{L, m} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\{\varepsilon_m\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

eşitlikleri elde edilir.

3.4. Elastisite Bağlıları

Elastisite bağıntıları, elemanın malzemesi ile bunun dış etkiler altında tepki ve davranışlarını gösteren yani gerilme ile şekil değiştirme bileşenleri arasındaki ilişkiyi veren denklemlerdir. Bu denklemlere, malzemenin makroskobik fiziksel özelliklerini ve davranışlarını yansıttıklarından, bünye denklemleri de denir. Malzemenin makroskobik yapısını, mekanik ve fiziksel özelliklerini, dış yük altındaki davranışlarını açıklayan bünye denklemlerinin bulunması için yapılan çalışmalar üç grupta toplanabilir.

1-Malzemenin iç yapısının düzeninden gelen makroskobik yapısı ile atom kavramından yola çıkan araştırmalar.

2- Sürekli ortamlar mekaniğinden ortaya çıkan araştırmalar.

3- Deneysel araştırmalar.

Dış yüklerin etkisi altındaki gerçek malzemeler çok karmaşık ve birbirinden farklı davranışlar sergilerler. Tüm bu davranışları bir denklem takımı ile ifade etmek olansızdır. Bunun için malzemeler idealleştirilir. Böylece ideal malzemeyi tanımlayan belirli denklem takımlarını kurma yoluna gidilir. Bu denklemler, gerçek bir malzemenin fiziksel davranışlarının gözlemlerini ve istatistiksel olarak, büyük ölçüde malzemeler üzerinde yapılan laboratuvar deneylerine dayanarak belirlenen özelliklerini ortaya koyan matematiksel formüllerdir. Sürekli ortamlar mekaniğinde, ideal ortamlar için yazılan bu tip basit denklemlerin kurulmasına bir örnek olarak lineer, elastik, katı hooke cisimi gösterilebilir. Esas amacımız da, bir nokta civarındaki gerilme hali ile aynı nokta civarındaki Şekil değiştirme hali arasındaki matematiksel bağıntıyı kurmaktır.

3.4.1. Genel Hooke Kanunu

Belirli bir malzemeden oluşmuş bir elemanda, belirli bir sıcaklıkta, dış yüklerin etkisi altında oluşan Şekil değiştirmeler, dış yükler ortadan kalktığında tamamen geriye dönerse ve gerilme bileşenleri ile Şekil değiştirme bileşenleri arasında orantılılık varsa, böyle bir malzemeye ideal elastik lineer malzeme denir. Sıcaklık sınırlı kaldığı sürece, Şekil değiştirmeler küçük ise, birçok malzeme iyi bir yaklaşıklıkla bu özelliğe sahiptir. Böylece elastik cisimlerin etüdü çok sadeleşmiş ve nispeten basitleşmiş olur.

Sürekli bir ortamda, gerilme halinin, σ_{ij} gerilme tansörüyle ve Şekil değiştirme halinin ϵ_{kl} Şekil değiştirme tansörüyle ifade edildiğinden, $\sigma_{ij} = F_{ij} \epsilon_{kl}$ Şeklinde ve yine F_{ij} fonksiyonları ϵ_{kl} cinsinden kuvvet serilerine açılıp her açılımda yalnızca lineer terimler bırakılarak elde edilen D_{ijkl} ler malzemenin özelliklerini içeren elastik sabitler tansörünü göstermek üzere, genelleştirilmiş Hooke Kanunu (3.33) nolu ifade ile verilmiştir.

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, 4 \quad (3.33)$$

Böylece herhangi bir koordinat sistemi için genel Hooke Kanunu'nun yazılışı elde edilmiştir.

3.4.2. Elastik Sabitler

1- Elastik sabitler sayısı, en genel durumda, gerilme tansörünün dokuz bileşeni ile şekil değiştirme tansörünün dokuz bileşeninin lineer fonksiyonu olarak ifade edildiğinde ve gerilme tansörünün simetrik olmaması hali gözönüne alındığında 81 olarak bulunur.

2- D_{ijkl} elastik sabitleri noktanın durum ve konumuna bağlı olmazsa, ortam elastik olarak homojen adını alır. Bir homojen ortamda D_{ijkl} 'nin her bir katsayısının tek tek gözönüne alınan bütün bölge boyunca değişmediği kabul edilir. Homojen olmayan ortamda gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin simetrik olması halinde, gerilme ve şekil değiştirme bileşenleri altışar tane olacağından, elastik bağımsız sabitlerin sayısı 36 ya iner. $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$ ve $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ dolayısıyla $D_{ijkl} = D_{jikl}$ olur.

3-George Green tarafından ortaya atılan şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu fonksiyonu aşağıdaki şekilde ise

$$U = \frac{1}{2} D_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (3.34)$$

bağımsız elastik sabitler sayısı 36 dan 21 e iner. Çünkü

$$\frac{\partial u}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad , \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = D_{ijkl} \quad (3.35)$$

olacağından ve bu çift türetme işlemi sırası değiştirilerek tekrarlandığında

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon_{kl} \partial \epsilon_{ij}} = D_{klij} \quad (3.36)$$

olur. (3.35) ve (3.36) denklemlerinin sol tarafları eşit olduğundan sağ tarafları da eşit olacaktır ve $D_{ijkl} = D_{klij}$ olur. Dolayısıyla elastik sabitler arasındaki simetrik özellikler topluca aşağıdaki gibi özetlenebilir.

$$D_{ijkl} = D_{ijlk} \quad , \quad D_{ijkl} = D_{jikl} \quad , \quad D_{ijkl} = D_{klij}$$

Böylece, termodinamiğin birinci yasasına göre, elastik cisimdeki şekil değiştirmelerin izotermal ve reverzibl (tersinir, ters çevrilebilir) olduğu kabul edilerek, cisim içinde ortaya çıkan U potansiyel fonksiyonunun, birim şekil değiştirme bileşenlerinin homojen ve ikinci mertebeden bir fonksiyonu olduğunun kabul edilmesiyle,

en genel anizotrop elastik malzeme hali için, genelleştirilmiş Hooke Kanunu 'ndaki bağımsız elastik sabit sayısı 21 olur. Bunlar ,

$$D_{ijkl} = \begin{pmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1123} & D_{1131} & D_{1112} \\ & D_{2222} & D_{2233} & D_{2223} & D_{2231} & D_{2212} \\ & & D_{3333} & D_{3323} & D_{3331} & D_{3312} \\ & & & D_{2323} & D_{2331} & D_{2312} \\ & & & & D_{3131} & D_{3112} \\ & & & & & D_{1212} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

olur. Gerilme ve şekil değiştirme bileşenlerini iki indis yerine tek indis ile gösterebiliriz.

$$\sigma_{11} = \sigma_1 , \sigma_{22} = \sigma_2 , \sigma_{33} = \sigma_3 , \sigma_{23} = \sigma_4 , \sigma_{31} = \sigma_5 , \sigma_{12} = \sigma_6$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 , \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 , \varepsilon_{33} = \varepsilon_3 , 2\varepsilon_{23} = \varepsilon_4 , 2\varepsilon_{31} = \varepsilon_5 , 2\varepsilon_{12} = \varepsilon_6$$

x, y, z koordinat takımında mukavemette alışılmış notasyonlarla ,

$$\sigma_{11} = \sigma_x , \sigma_{22} = \sigma_y , \sigma_{33} = \sigma_z , \sigma_{23} = \tau_{yz} , \sigma_{31} = \tau_{zy} , \sigma_{12} = \tau_{xy}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_x , \varepsilon_{22} = \varepsilon_y , \varepsilon_{33} = \varepsilon_z , 2\varepsilon_{23} = \gamma_{yz} , 2\varepsilon_{31} = \gamma_{zx} , 2\varepsilon_{12} = \gamma_{xy}$$

gösterebiliriz. Ayrıca D sabitleri altındaki indis sayısı dörtten ikiye indirilebilir. $D_{ijkl} \rightarrow D_{mn}$ ij yerine $\rightarrow m$, kl yerine $\rightarrow n$, 11 yerine $\rightarrow 1$, 22 yerine $\rightarrow 2$, 33 yerine $\rightarrow 3$, 23-32 yerine $\rightarrow 4$, 31-13 yerine $\rightarrow 5$, 12-21 yerine $\rightarrow 6$ konulabilir. Bu durumda genel Hooke Kanunu matris formda

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ & & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ & & & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ & & & & D_{55} & D_{56} \\ & & & & & D_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

olur ve bu tip malzemelere anizotrop denir.

4- Bir malzeme, tek bir düzleme göre elastik özellikleri bakımından simetrik ise, bağımsız elastik sabitlerin sayısı 13'e iner. Ortamın simetrisine bağlı olarak bazı koordinat takımları için D_{ijkl} katsayıları aynı kalabilir. Örneğin kabuk ve plakta orta

yüzey elastik simetri düzlemi ise sekiz elastik sabit sıfır olur ve bağımsız sabitlerin sayısı 21 den 13 e iner.

$$D_{41} = D_{42} = D_{43} = D_{46} = D_{51} = D_{52} = D_{53} = D_{56} = 0$$

$$D = \begin{Bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & D_{16} \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & D_{26} \\ & & D_{33} & 0 & 0 & D_{36} \\ & & & D_{44} & D_{45} & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 \\ & & & & & D_{66} \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

Bu tip özelliğe sahip malzemeden oluşan cisimlere monolitik simetrlili denir.

5- Malzemenin elastik özellikleri karşılıklı olarak birbirine dik üç düzleme göre ikişer ikişer simetrik ise orthotrop adını alır ve bu durumda bağımsız sabitlerin sayısı 9 a iner. Bu durumda, koordinat düzlemlerini elastik simetri düzlemlerine paralel seçmek gerekir. Böylece dört elastik sabit de sıfır olur.

$$D_{26} = D_{36} = D_{61} = D_{45} = 0$$

$$D = \begin{Bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 \\ & & & & & D_{66} \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

Örnek olarak, kabuk ve plakta $\sigma_z = 0$ için düzlem gerilme haline tekabül eden bu durumda kesme etkisi de gözönüne alınmaktadır. (Reisner Teorisi)

6- Orthotrop cisimde, malzemenin elastik özellikleri, uygun olarak seçilen bir eksen takımının iki eksenini doğrultusunda aynı üçüncü eksen doğrultusunda farklıdır. Yani orthotrop olma koşuluna ek olarak, iki eksenin üçüncü eksen etrafında dönmesi halinde elastik özelliklerin değişmeyeceği kabulü vardır.

Bu malzemelere tetragonal simetriye sahiptir denir ve bu durumda bağımsız sabitlerin sayısı 6 olur.

$$D_{22} = D_{33} \quad , \quad D_{12} = D_{13} \quad , \quad D_{55} = D_{66}$$

$$D = \begin{Bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 \\ & & & & & D_{55} \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

7- Malzemenin elastik özellikleri , birbirine dik üç eksen boyunca eşitse, böyle bir malzemeye kübik özellikli malzeme adı verilir ve bağımsız elastik sabitlerin sayısı 3 e iner.

$$D_{11} = D_{22} \quad , \quad D_{23} = D_{12} \quad , \quad D_{44} = D_{66}$$

$$D = \begin{Bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & 0 & 0 \\ & & & & D_{44} & 0 \\ & & & & & D_{44} \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

8- Orthotrop cisim kalınlık boyunca homojen ise bağımsız elastik sabitlerin sayısı dört olur.

$$D = \begin{Bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & 0 \\ & & & & D_{22} & 0 \\ & & & & & D_{33} \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

9- İzotrop malzemede elastik sabitler koordinat ekseninin doğrultusundan bağımsızdır. Bir noktadan geçen her doğrultuda elastik sabitler aynı kalır. Bu durumda elastik bağımsız sabitlerin sayısı 2 ye iner. Bunlara Lamé katsayıları denir. (λ , μ)

$$D_{11} = D_{22} \quad , \quad D_{21} = D_{12} \quad , \quad D_{23} = D_{13} \quad , \quad D_{22} = D_{33}$$

$$D = \begin{Bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{66} & 0 & 0 \\ & & & & D_{66} & 0 \\ & & & & & D_{66} \end{Bmatrix} \equiv \quad (3.44)$$

$$\equiv \begin{Bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{Bmatrix}$$

Burada, $D_{12} = D_{21} = D_{31} = D_{13} = D_{32} = D_{23} = \lambda$; $D_{44} = D_{55} = D_{66} = \mu$ olur. Böylece izotrop cisim halinde tüm D_{ij} katsayılarının λ ve μ gibi iki lame sabiti ile ifade edilebileceği görülmektedir. Lame sabitlerinden μ ye genellikle kayma modülü denir ve G ile gösterilir. Mukavemette, λ ve μ Lame sabitleri yerine, E Young modülü ve ν poisson oranı kullanılır. Bunlar arasında

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} & \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} = G & E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} \end{aligned} \quad (3.45)$$

bağıntıları vardır. İzotrop cisimde gerilme ve şekil değiştirme hallerine ait asal eksenler üst üste gelirler. Bundan hareket ederek de bağımsız elastik sabitlerin sayısının ikiye düşeceği gösterilebilir.

10- Malzemenin özellikleri noktadan noktaya değişmiyor ise D_{ij} elastik sabitleri, koordinatlara bağlı olmaz ve bütün ortamda aynı sabit değerleri alırlar. Bu tip malzemeye homojen özellikli denir.

3.4.3. Genel Hooke Kanunu Uygulamaları

Cisimler için genel Hooke Kanunu'ndan hareketle elastisite bağıntılarını yazarken, gerilme ve şekil değiştirme halleri ile cisimi oluşturan malzemenin elastik özelliklerini dikkate almak zorunluluğu vardır. Böylece cismin malzemesinin izotrop, orthotrop, anizotrop ve bunların özel durumları ile, cismin maruz kaldığı gerilme ve şekil değiştirme hallerinin bir, iki yada üç boyutlu olmalarına göre ayırım yaparak, elastisite bağıntılarının kurulması gereği ortaya çıkar.

3.4.3.1. Tek Boyutlu Elastisite

Uygulamada karşılaşılan problemlerin çoğu tek yada iki boyutlu olmaktadır. Tek boyutlu elastisitenin temel denklemleri yani bünye denklemleri aşağıda verilmektedir. Tek boyutlu elastisitede iki farklı tip sözkonusudur.

3.4.3.1.1. Bir Boyutlu Gerilme ve Lineer Elastik İzotrop Hal

Bu durumda cisim tek eksenli gerilme haline maruz olup, malzeme izotrop elastiktir. Elastik cismin bütün noktalarında gerilme matrisi aşağıdaki formda olmalıdır.

$$\text{Gerilme} \quad [\sigma_{ij}] = \begin{vmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \sigma_x$$

$$\text{Şekil değiştirme} \quad \epsilon_x \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\epsilon_x \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\text{Bağımsız elastisite sabitleri} \quad E, \nu \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Elastisite bağıntıları $\sigma_x = E\varepsilon_x$ $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$

Eksenler artık asal eksenlerdir. Gerilme ve şekil değiştirme hallerine ait asal eksenler üst üste çakışır. (Paragraf 3.4.2) deki notasyonlarla gösterirsek,

$$\sigma_x = \sigma_{11}, \varepsilon_x = \varepsilon_{11}, \varepsilon_y = \varepsilon_{22}, \varepsilon_z = \varepsilon_{33}, \gamma_{xy} = \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{11}}{E}, \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\nu \frac{\sigma_{11}}{E}$$

3.4.3.1.2. Bir Boyutlu Şekil Değiştirme ve Lineer Elastik İzotrop Hal

Böyle bir durum için cismin içindeki tüm noktalarda aşağıdaki koşulun varolması gerekir.

$$u_x = u_x(x), \quad u_y = 0, \quad u_z = 0$$

$$\text{Buradan, } \varepsilon_z = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \quad \varepsilon_x \neq 0$$

Artık Hooke kanunlarından yararlanarak bu hal için elastisite bağıntıları elde edilir.

$$\text{Gerilme} \quad \sigma_x = \sigma_0 = St, \quad \sigma_y = \sigma_z \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\text{Şekil değiştirme} \quad \varepsilon_x = \varepsilon_0 = St \quad \varepsilon_z = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Bağımsız elastisite sabitleri E, ν

$$\text{Elastisite bağıntıları} \quad \sigma_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_x$$

Bölüm 3.4.2 deki notasyonlar ile

$$\text{Gerilme} \quad \sigma_{11} = \sigma_0 = St, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} \quad \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$$

$$\text{Şekil değiştirme} \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_0 = St \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0$$

Bağımsız elastisite sabitleri E, ν yada Lamé sabitleri λ, μ

$$\text{Elastisite bağıntıları} \quad \sigma_{11} = \lambda \varepsilon_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{11}$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{11}$$

3.4.3.2. İki Boyutlu Lineer Elastik İzotrop Hal

Bu durumda cisim iki eksenli gerilme yada şekil değiştirme haline maruz olup, malzeme elastik izotropdur. Bu hale iki boyutlu elastisite de denir. Düzlem elastisite düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme olmak üzere iki ayrı tipte etüd edilir.

Cismin referans düzlemine dik doğrunun boyu deformasyondan sonra değişmez. Yani referans yüzeyine dik doğru üzerindeki tüm noktalar eşit miktarda yer değiştirirler ve cismin kalınlığının deformasyondan sonra değişmediği varsayılır. Açıktır ki bu varsayım cisim ince ise geçerlidir. Diğer bir deyişle, şekil değiştirmeden önce elastik cisim içindeki bir z eksenine dik olan tüm düzlemler, şekil değiştirmeden sonra bu eksene dik kalırlarsa ve başlangıçta z eksenine paralel olan doğrular şekil değiştirmeden sonra paralel kalıyorsa, bu cisimde düzlem şekil değiştirme hali vardır. Bu analitik olarak $u_x = u_x(x,y)$, $u_y = u_y(x,y)$, $u_z = u_z(x,y)$ şeklinde ifade edilir. Z ekseninin boyu da değişmiyorsa $u_z = 0$ olur ve bu yukarıda cisim ince ise geçerli olur dediğimiz duruma karşılık gelir.

Bir cismin içinde bulunduğu referans yüzeyine dik doğrultudaki normal gerilmeler terk edilecek kadar küçük ise yani sıfır kabul edilebilirse cisimde bir düzlem gerilme hali vardır denir. Bu analitik olarak $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33}$ ve $\tau_{zx} = \tau_{zy} = \sigma_z = 0$ şeklinde ifade edilir.

Eğer düzlem şekil değiştirme halinde Ox ve Oy düzlemlerindeki gerilmeleri değiştirmeyecek şekilde z eksenini doğrultusunda sabit bir ε_0 birim şekil değiştirmesi eklenir ise, bu durumda genelleştirilmiş düzlem şekil değiştirme hali elde edilir. Yukarıdan, cismin referans yüzeyine başlangıçta dik olan bir doğrunun, şekil değiştirmeden sonra da dik ve boyu değişmeden kalmasının bir düzlem şekil değiştirme halini karakterize ettiğini biliyoruz. Ancak cismin referans yüzeyine dik gerilmelerin terk edilebilecek kadar küçük olması kabulü de aynı anda gözönüne alındığında bir düzlem gerilme hali ile karşılaşılır. Bu durumda görülür ki $\tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$ iken $\tau_{xz} \neq 0$ ve $\tau_{yz} \neq 0$ olur ve karmaşık bir düzlem gerilme ile şekil değiştirme ortaya çıkar. Bu durum, cismin

kalınlığı cismin diğer boyutlarına oranla belirli bir değerden küçük ise rahatlıkla kabul edilebilir.

3.4.3.2.1. Düzlem Gerilme ve Lineer Elastik İzotrop Hal

Gerilmeler $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ $\sigma_z = 0, \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

Şekil değiştirmeler $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ $\epsilon_z = -\frac{\nu}{(1-\nu)}(\epsilon_x + \epsilon_y)$

Bağımsız elastik sabitler E, ν

Elastisite bağıntıları

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\epsilon_x + \epsilon_y) + 2G\epsilon_x$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\epsilon_x + \epsilon_y) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\epsilon_x + \epsilon_y) + 2G\epsilon_y$$

$$\tau_x = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

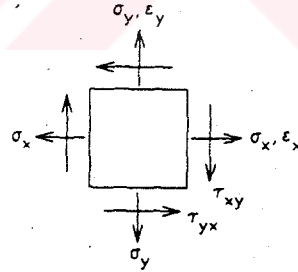
(3.46)

yada

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$



Matris formda

Şekil 3.6

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad ; \quad \{\epsilon\} = [H] \{\sigma\} \quad \text{şeklinde yazılabilir}$$

Açık olarak ,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

Aynı ifadeleri bölüm 3.4.2 deki notasyonlarla verelim.

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Gerilme - şekil değiştirme bağıntıları ile elastisite bağıntıları aşağıdaki gibi olur.

$$\sigma_{11} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + 2\mu\epsilon_{11} \quad \sigma_{33} = 0$$

$$\sigma_{22} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + 2\mu\epsilon_{22} \quad \sigma_{13} = 0$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\epsilon_{12} \quad \sigma_{23} = 0$$

Yukarıdaki denklemleri, λ ve μ nün E ve ν cinsinden değerlerini yerlerine koyarak ifade edelim.

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{11} + \nu\epsilon_{22}) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + 2G\epsilon_{11}$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + 2G\epsilon_{22}$$

$$\sigma_{12} = 2G\epsilon_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \epsilon_{12}$$

$$2\epsilon_{12} = \epsilon_4 = \gamma_{xy}$$

$$\sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{13} = 0$$

yada

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu\sigma_{22})$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{12} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{12} \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = \varepsilon_z\end{aligned}$$

Bu sonuçlar ince levhada düzlem gerilme haline tipik bir örnektir.

3.4.3.2.2. Düzlem Şekil Değişirme ve Lineer Elastik İzotrop Hal

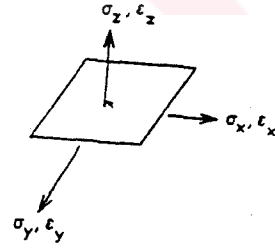
Gerilmeler	$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$	$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$
Şekil değişirmeler	$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} = \gamma_{yx}$	$\varepsilon_x = 0 \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$
Bağımsız elastik sabitler	E, ν	

Bünye denklemleri ve elastisite bağıntıları

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = G\gamma_{xy}\end{aligned}\quad (3.49)$$

yada

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{(1+\nu)}{E}[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{(1+\nu)}{E}[(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}\end{aligned}\quad (3.50)$$



Şekil 3.7

Matris formda , $\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$; $\{\varepsilon\} = [H] \{\sigma\}$ şeklinde yazılabilir

Açık formda,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{vmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{(1+\nu)}{E} \begin{vmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

Şimdi aynı denklemleri bölüm 3.4.2 deki notasyonlarla verelim. $U_z = 0$ olduğundan , $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \rightarrow \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ olur. Elastisite bağıntıları E ve ν cinsinden yazılırsa

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}]$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}]$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12} = 2G\varepsilon_{12}$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad , \quad 2\varepsilon_{12} = \gamma_{xy}$$

$$\sigma_{23} = 0 \quad , \quad \sigma_{13} = 0$$

yada

$$\varepsilon_{11} = \frac{(1+\nu)}{E} [(1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{(1+\nu)}{E} [(1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}]$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G}$$

$$\varepsilon_{33} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{13} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{23} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_z \text{ elde edilir.}$$

Bu uzun silindir düzlem şekil değiştirme haline tipik bir örnektir.

3.4.3.3. Üç Boyutlu Lineer Elastik İzotrop Hal

Lineer elastik ve izotrop ortamlar için genelleştirilmiş Hooke Kanunu aşağıdaki şekilde verilebilir. Gerilme ve şekil değiştirme hali üç eksenlidir.

Gerilmeler $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$

Şekil değiştirmeler $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$

Bağımsız elastisite sabitleri E, ν yada Lamé sabitleri λ, μ

Elastisite bağıntıları

$$\sigma_x = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_x = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)]$$

$$\sigma_y = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_y = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)]$$

$$\sigma_z = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_z = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)]$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

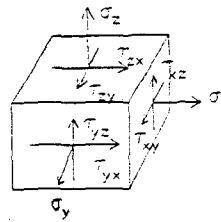
$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)]$$



Şekil 3.8

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

Matris formda, $\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$ olur ve formülün açık formu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

Şimdi genel Hooke Kanununu yani bünye denklemlerini bölüm 3.4.2 deki notasyonlarla yazalım.

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11} \\ \sigma_{22} &= \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22} \\ \sigma_{33} &= \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33} \\ \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12} \\ \sigma_{23} &= 2\mu\varepsilon_{23} \\ \sigma_{31} &= 2\mu\varepsilon_{31} \end{aligned} \quad (3.53)$$

yada

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{22} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{33} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{12} \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{23} \quad \varepsilon_{31} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{31} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Burada Lamé katsayıları, elastisite modülü ve Poisson oranı cinsinden ,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

olup , şekil değiştirme bileşenleri arasındaki ilişki topluca ,

$$[\epsilon_{ki}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \epsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Elastisite bağıntıları E ve ν cinsinden,

$$\sigma_{11} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + 2G\epsilon_{11} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\epsilon_{11} + \nu(\epsilon_{22} + \epsilon_{33})]$$

$$\sigma_{31} = 2G\epsilon_{31} = \frac{E}{(1+\nu)}\epsilon_{31} \quad \text{yada}$$

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})]$$

$$\epsilon_{31} = \frac{1}{2G}\sigma_{31}$$

olur. Elastisite katsayıları Lamé katsayıları λ , μ cinsinden matris formda aşağıdaki gibidir.

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Genel mukavemette malzemeler lineer izotrop kabul edildiklerinden düzlem gerilme durumundaki iki boyutlu lineer elastik orthotrop hal , düzlem şekil değiştirme durumundaki iki boyutlu lineer orthotrop hal ve üç boyutlu tetragonal simetriye sahip orthotrop malzeme halinden bahsedilmeyecektir.

3.5. Kabuk ve Plakların Elastisite Bağıntıları

İnce, elastik kabuk ve plakların bünye denklemlerinin teşkili özetle açıklanacaktır.

Kabuk ince ve şekil değiştirmeler küçük kabul edilmiştir. Kabuk malzemesinin davranışı lineer elastiktir. Dolayısıyla genelleştirilmiş Hooke kanunu geçerlidir, z/r oranı bir sayısının yanında terk edilebilir. $[1 - (z / r)] \cong 1$. İnce bir kabuğu tam analiz edebilmek için kabuğu teşkil eden malzemenin davranışı, elastik özellikleri ile, şekil değiştirme ve gerilme halinin bileşenleri arasında ilişki kurmak gerekmektedir. Böylece kabuk malzemesinin verilmiş bir noktasında gerilme ve şekil değiştirmelere bağlı davranış kanunundan hareketle, kabuğun referans yüzeyinde verilmiş bir noktada kesit tesirleri ile yer değiştirmelere bağlı denklemleri yani elastisite bağıntılarını bulabiliriz.

Birim boyda ve t kalınlığındaki kabuğun gerilmeler cinsinden kesit zorlamaları aşağıdadır.

$$N_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y} \right) dz = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x dz , \quad \text{kabuk çok tabakalı ise}$$

$$N_x = \sum_{t=1}^{t=n} \int \sigma_x dz \quad \text{olur.}$$

$$N_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y dz , \quad N_{xy} = \int \tau_{xy} dz , \quad N_{yx} = \int \sigma_{yx} dz ,$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x z dz , \quad M_{xy} = \int \tau_{xy} z dz , \quad M_{yx} = \int \tau_{yx} z dz ,$$

$$M_y = \int \sigma_y z dz , \quad N_{xz} = \int \tau_{xz} dz , \quad N_{yz} = \int \tau_{yz} dz , \quad (3.56)$$

Genel Hooke Kanunu denklem (3.33) den

$$\{\sigma_{ij}\} = [D_{ijkl}] \{\epsilon_{kl}\} \quad (3.57)$$

(3.38) denklemiyle bilinen elastisite bağıntıları (3.56) denklemlerinde yerine konular ve gerekli integrasyon işlemleri yapılırsa, anizotrop kabuk için genel Hooke Kanunu'na uygun biçimde, genel kesit tesiri-şekil değiştirme bağıntıları elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

Burada C_{ij} lerin oluşturduğu 6 x 6 lık katsayılar matrisine kabuğun rijitlik matrisi denir. Bundan sonra C_{ij} katsayılar matrisi $[D]$ ile gösterilecektir. Bu $[D]$ matrisini bundan önceki paragrafta verilen (3.57) denklemindeki $[D_{ijkl}]$ matrisi ile karıştırmamalıdır. Sonuç olarak kabuğun elastisite bağıntısını matris formda, kapalı olarak

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (3.59)$$

şeklinde gösterebiliriz.

3.5.1. İzometrik Kabukların Bünye Denklemleri

İnce cidarlı, t kalınlıklı, izotrop kabuğun kesit tesiri - şekil değiştirme bağıntıları $\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$ şeklinde olup açık formda,

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

olur. Burada izotrop hal için

3.5.2. İzotrop, Eğilmeli Plak Bünye Denklemleri

Açık matris formda, bünye denklemi aşağıdadır.

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.65)$$

Katsayılar rijitlik matrisi [D] ise aşağıdaki gibi olur.

$$[D] = \begin{vmatrix} D & D\nu & 0 \\ & D & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2}D \end{vmatrix}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{EI}{(1-\nu^2)} \quad (3.66)$$

Burada (I) atalet momentidir.

3.5.3. İzotrop Levhanın Bünye Denklemleri

Kesit tesirleri ile şekil değiştirmeler arasındaki elastisite bağıntıları açık matris formda aşağıda verilmiştir.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = C \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.67)$$

Katsayılar rijitlik matrisi [D] ise aşağıdaki gibi olur.

$$[D] = \begin{vmatrix} C & C\nu & 0 \\ & C & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2}C \end{vmatrix}, \quad C = \frac{Et}{1-\nu^2} \quad (3.68)$$

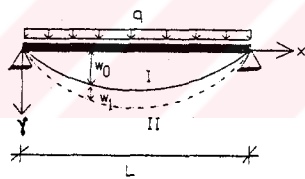
4. ENERJİ PRENSİPLERİ

4.1 Toplam Potansiyel Enerji Prensibi

Geometrik açıdan lineer ve lineer olmayan sistemlere uygulanabilen toplam potansiyel enerji , fiziksel açıdan yalnızca lineer sistemlere uygulanabilmektedir.

4.1.1. Toplam Potansiyel Enerjinin Birinci Varyasyonu (Denge Denklemi)

Toplam potansiyel enerji, sistemin hakiki denge konumunda bir ekstremden geçer. Böylece problemi belirli bir integral ifadeyi ekstrem yapan konumun bulunmasına indirgenmiş oluruz. Problemlerin çoğunda bu ekstrem değer bir minimumdur. Bu prensibe onun için minimum potansiyel enerji prensibi denir. Matematikte ise bu çeşit problemlere Varyasyon hesabı denir. Şekil 4.1 deki basit kiriş q yayılı yüküyle yüklü olsun. Çubuğun dx elemanına ait diferansiyel denge denklemini yazalım, z eksenini aşağı doğru alalım.



- w = çökme(sehim)
- w' = eğim(kesit dönmesi)
- $-EIw'' = M$ eğilme momenti
- $-EIw''' = V$ kesme kuvveti
- $EIw^{IV} = q$ yayılı yükün şiddeti

Şekil 4.1

Çubuğun diferansiyel denklemi şöyle olur.

$$EIw^{IV} = q \quad (4.1)$$

Böylece çökme ile dış yük arasındaki esas diferansiyel denklem kurulmuş olur. Denklem entegrasyonundaki sabitlerin belirtilmesinde kullanılacak sınır şartları ise şunlardır.

$$X = 0 \text{ da } w = 0 \quad ; \quad x = L \text{ de } w = 0 \quad (\text{Geometrik şartlar})$$

$$X = 0 \text{ da } w'' = 0 \quad ; \quad x = L \text{ de } w'' = 0 \quad (\text{Dinamik şartlar})$$

Aranan $w(x)$ eğrisi geometrik sınır şartlarını gerçekleyen birçok eğriler arasından bir tanesidir. Hakiki denge konumunda toplam potansiyel enerji minimum olmakta ve enerji en küçük değerini bu konumda almaktadır. Toplam potansiyel enerji, iç kuvvetlerin potansiyel enerjileri ile dış kuvvetlerin potansiyel enerjilerinin toplamına eşittir.

$$V = U + W \quad (4.2)$$

Burada U iç kuvvetlerin işi, W de dış kuvvetlerin işidir. Misalimizde iç kuvvetler eğilme momenti ve kesme kuvvetidir. Kesme kuvvetini ihmal edip iç kuvvetlerin potansiyel enerjisini yazalım.

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (4.3)$$

Bu ifadeyi deplasmanlar cinsinden yazalım. $M = -EIw''$

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L (w'')^2 dx \quad (4.4)$$

Sistem konservatif ise dış kuvvetlerin işi daima negatiftir. Burada q kuvveti ile w deplasmanı aynı yönde olduğu için çarpımları pozitiftir. Dolayısıyla dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi şöyle olur.

$$W = -\int_0^L qw dx \quad (4.5)$$

Toplam potansiyel enerji :

$$V = U + W = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} (w'')^2 - qw \right] dx \quad (4.6)$$

Şekil 4.1 de görüldüğü gibi, I hakiki denge konumuna yakın II . bir konum daha alalım. Burada w_0 , denge konumuna karşı gelen deplasmandır. w_1 ise ikinci konumu elde etmek için verilen sonsuz küçük artımlardır. Böyle bir artıma w' nin varyasyonu denir. w' de II . konuma karşı gelen deplasmandır.

$$w = w_0 + w_1$$

$w_1(x) = \varepsilon \xi(x)$; burada ε istenildiğikadar küçük alınan bir değeri, $\xi(x)$ ise sınırlarda sıfır olan keyfi bir fonksiyonu gösterir. $\xi(0) = \xi(L) = 0$; $w_1(0) = w_1(L) = 0$ olur.

Potansiyel enerjideki değişme (varyasyon) şöyle yapılır.

$$\Delta V = V_{II} (w_0 + w_1) - V_I (w_0) \quad (4.7)$$

$$\Delta V = \left[\int_0^L \frac{EI}{2} (w_0'' + w_1'')^2 dx - \int_0^L q(w_0 + w_1) dx \right] - \left[\int_0^L \frac{EI}{2} (w_0'')^2 dx - \int_0^L q w_0 dx \right] \quad (4.8)$$

Gerekli işlemler ve kısaltmalar yapıldıktan sonra aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\Delta V = \int_0^L EI w_0'' w_1'' dx - \int_0^L q w_1 dx + \int_0^L \frac{EI}{2} (w_1'')^2 dx \quad (4.9)$$

Burada üçüncü terim ilk iki terimden daha küçük olup daima pozitifdir.

$$\int_0^L \frac{EI}{2} (w_1'')^2 dx = \alpha \geq 0 \quad (4.10)$$

İlk integrali kısmi olarak arka arkaya iki defa entegre edelim

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int_0^L EI w_0'' w_1'' dx = |EI w_0'' w_1'|_0^L - |EI w_0''' w_1|_0^L + \int_0^L EI w_0^{IV} w_1 dx \quad (4.11)$$

İlk terim $w''(0) = w''(L) = 0$ dinamik şartlardan dolayı, ikinci terim de sınırlarda $w_1(0) = w_1(L) = 0$ olduğundan dolayı sıfır eder. Sonuç olarak potansiyel enerjideki değişim sıfırdan büyük bir değerdir.

$$\Delta V = \alpha > 0 \quad (\alpha \text{ sonsuz küçük pozitif bir değerdir})$$

Bu da gösteriyor ki, denge konumuna komşu olan bütün konumlardaki potansiyel enerji denge konumundakinden daha fazladır. O halde denge konumuna ait toplam potansiyel enerji minimumdur. ΔV ' deki birinci dereceden ve ikinci dereceden terimlerin

toplamına V ' nin birinci ve ikinci varyasyonu denir. Bunlar δV ve $\frac{\delta^2 V}{2}$ ile gösterilir.

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2!} \delta^2 V$$

$$\delta V = \int_0^L (EI w_0'' w_1'' - q w_1) dx = 0 \quad (\text{Denge denklemi})$$

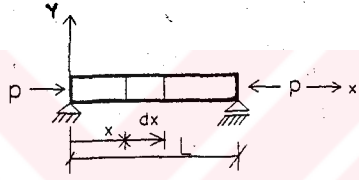
$$\frac{1}{2!} \delta^2 V = \int_0^L \frac{EI}{2} (w_1'')^2 dx = \alpha > 0$$

$$\delta V = 0$$

$$\frac{1}{2} \delta^2 V > 0 \quad \text{ise } V \text{ minimumdur.}$$

O halde elastik bir sistemde, geometrik sınır şartlarını gerçekleyen bütün yer değiştirme konumları arasında; hakiki konum; toplam potansiyel enerjiyi minimum yapandır.

4.1.2. Toplam Potansiyel Enerjinin İkinci Varyasyonu (Stabilite Denklemi)



Şekil 4.2

Uçlarından aksenal P basınç yüküne maruz bir prizmatik çubuk alalım. Toplam potansiyel enerjiyi yazalım.

$$V = U_m + U_b + W \quad (4.12)$$

Burada U_m membran, U_b eğilme şekil değiştirme enerjisi ve W tatbik edilen dış yükün potansiyel enerjisidir.

$$U_m = \frac{EA}{2} \int_0^L \epsilon^2 dx \quad (4.13)$$

$$U_b = \frac{EI}{2} \int_0^L (w'')^2 dx \quad (4.14)$$

Burada ϵ , merkezi eksendeki uzama şekil değiştirmesini ifade eder.

$$\epsilon = u' + \frac{1}{2} (w')^2 \quad (4.15)$$

Eksenel P yükünün potansiyel enerjisi şöyledir.

$$W = P[u(L) - u(0)] \quad (4.16)$$

$$W = P \int_0^L u' dx \quad (4.17)$$

(4.13), (4.14) ve (4.17) denklemlerini (4.12) denklemi içine koyalım.

$$V = \int_0^L \frac{EA}{2} \varepsilon^2 dx + \int_0^L \frac{EI}{2} (w'')^2 dx + \int_0^L Pu' dx \quad (4.18)$$

(4.18) denkleminin içine (4.15) denklemini koyalım.

$$V = \int_0^L \left[\frac{EA}{2} \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 + \frac{EI}{2} (w'')^2 + Pu' \right] dx \quad (4.19)$$

$$u \rightarrow u_0 + u_1, \quad w \rightarrow w_0 + w_1 \quad (4.20)$$

Burada u_0 , w_0 stabilitenin incelendiği denge konumunu gösterir. u_1 , w_1 ise ikinci konumu elde etmek için verilen sonsuz küçük artımlardır. Deforme olmamış kolon için şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned} u_0 &= -\frac{P}{EA}x & u_0' &= -\frac{P}{EA} & w_0 &\cong 0 \\ \varepsilon &= -\frac{P}{EA} & \frac{du}{dx} &= -\frac{P}{EA} & u &= -\frac{P}{EA}x \end{aligned} \quad (4.21)$$

(4.20) ve (4.21) değerlerini (4.19) denklemi içine yerleştirip tekrar düzenlersek potansiyel enerjideki değişimi buluruz.

$$V + \Delta V = \int_0^L \left\{ \left[\frac{EA}{2} (u_0' + u_1') + \frac{1}{2} (w_0' + w_1')^2 \right]^2 + \frac{EI}{2} (w_0'' + w_1'')^2 + P(u_0' + u_1') \right\} dx \quad (4.22)$$

$$V = \int_0^L \left[\frac{EA}{2} \left(u_0' + \frac{1}{2} w_0'^2 \right)^2 + \frac{EI}{2} (w_0'')^2 + Pu_0' \right] dx \quad (4.23)$$

$$\Delta V = (V + \Delta V) - V$$

Potansiyel enerjideki değişimi Taylor serisine açalım.

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2!} \delta^2 V + \frac{1}{3!} \delta^3 V + \dots$$

$$\frac{1}{2!} \delta^2 V = \frac{1}{2} \int_0^L [EA(u_1')^2 + EI(w_1'')^2 - P(w_1')^2] dx \quad (4.24)$$

İkinci derece terimlerin toplamı $\frac{1}{2!} \delta^2 V$ ile gösterilir. Üçüncü ve dördüncü dereceden terimler terk edilmiştir. P nin küçük değerleri için, u_1 , w_1 in bütün sıfır olmayan varyasyonları için $\delta^2 V > 0$ dır. Yük sıfırdan artırılırken en az bir u_1 , w_1 varyasyonları için $\delta^2 V$ sıfıra eşitlendiğinde \bar{P} denilen bir değere ulaşılır. Bütün diğer varyasyonlar için hala pozitifdir. $P = \bar{P}$ için $\delta^2 V$; u_1 , w_1 e göre stasyonerdir.

$$\delta(\delta^2 V) = 0 \quad \delta V = 0$$

$\delta^2 V$ nin u_1 , w_1 e göre varyasyonel türevi sıfıra eşittir.

$$\frac{\partial(\delta^2 V)}{\partial u_1} = 0 \quad \frac{\partial(\delta^2 V)}{\partial w_1} = 0 \quad (4.25)$$

olur.

4.2. Tek Serbestlik Dereceli Sistemler

Deplasman parametresi sadece C nin fonksiyonu olan bir yapı için, belirli bir $C = C_0$ halinde, V potansiyel enerjinin karakteri, yapının C_0 dan $C_0 + C_1$ e olan keyfi küçük deplasmanına karşılık gelen potansiyel enerjideki ΔV değişiminin incelenmesi ile bulunabilir. Burada C_1 oldukça küçük bir artımdır. Potansiyel enerjideki değişimin C_0 civarında Taylor serisine açılımı aşağıdaki gibidir.

$$\Delta V = V'(C_0)C_1 + \frac{1}{2!} V''(C_0)C_1^2 + \frac{1}{3!} V'''(C_0)C_1^3 + \dots \quad (4.26)$$

$$\text{Burada } C = C_0 \text{ da } V'(C_0) = \frac{dV}{dC}; V''(C_0) = \frac{d^2V}{dC^2}; V'''(C_0) = \frac{d^3V}{dC^3}$$

şeklinde. Stasyoner V için ilk türev sıfır olmalıdır.

$$V'(C_0) = 0$$

$C = C_0$ daki minimum için , ilk türev sifira eşit olmalı ve ikinci türev negatif olmalıdır.

$$V''(C_0) \geq 0$$

Denge hali , C_1 in lineer olan açılım terimi ile C_1 in ikinci derece olan stabilite terimine bağlıdır. ($V'' = 0$ için ΔV nin işareti açılımda bir yüksek dereceden sıfır olmayan terimin işaretine bağlıdır.)

4.3. Çok Serbestlik Dereceli Sistemler

Denge ve stabilite için bu bilinen kriterler çok serbestlik dereceli sistemler için genelleştirilmiştir. Potansiyel enerji B ve C gibi iki deplasman parametresinin fonksiyonu olan bir yapı için (örneğin keyfi küçük deplasman değerleri B_1 ve C_1 den oluşan) potansiyel enerjideki değişimin Taylor serisine açılımı şu şekilde yapılabilir.

$$\begin{aligned} \Delta V = & \frac{\partial V}{\partial B}(B_0, C_0)B_1 + \frac{\partial V}{\partial C}(B_0, C_0)C_1 + \\ & + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial B^2}(B_0, C_0)B_1^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial B \partial C}(B_0, C_0)B_1C_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial C^2}(B_0, C_0)C_1^2 \right] + \dots \end{aligned} \quad (4.27)$$

Stasyoner V için birinci derece terimlerin toplamı sıfıra eşitlenmelidir. B_1 ve C_1 bağımsız keyfi olduklarına göre, bu durum iki eşitlikle ifade edilebilir.

$$\frac{\partial V}{\partial B}(B_0, C_0) = \frac{\partial V}{\partial C}(B_0, C_0) = 0 \quad (4.28)$$

(Burada $B = B_0, C = C_0$ da $\frac{\partial V}{\partial B} = \frac{\partial V}{\partial C} = 0$ dır) Stasyoner V nin minimum olması

için B_1 ve C_1 in tüm olabilecek değerlerinde ikinci derece terimlerin toplamı pozitif olmalıdır. Homojen ikinci dereceden olan bir polinoma; yani B_1 ve C_1 in ikinci derecedeki terimlerin toplamından ibaret olan polinoma kuadratik form denir. Değişkenlerin bazı değerler için değilde ; tüm olabilecek değerler için , pozitif olan kuadratik forma pozitif belirli denir.

ΔV ifadesindeki birinci dereceden terimlerin toplamına V nin birinci varyasyonu denir. δV sembolü ile gösterilir. İkinci derece terimlerin toplamına V nin ikinci varyasyonu denir ve $\frac{\delta^2 V}{2}$ ile gösterilir. Potansiyel enerjideki değişim şöyle yazılabilir.

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2!} \delta^2 V + \frac{1}{3!} \delta^3 V + \dots \quad (4.29)$$

Burada denklem (4.27) den

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial B} (B_0, C_0) B_1 + \frac{\partial V}{\partial C} (B_0, C_0) C_1 \quad (4.30)$$

$$\delta^2 V = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial B^2} (B_0, C_0) B_1^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial B \partial C} (B_0, C_0) B_1 C_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial C^2} (B_0, C_0) C_1^2 \right] \quad (4.31)$$

Bu terminoloji içinde çok serbestlik dereceli sistemin dengesi için kriter, V 'nin birinci varyasyonunun sıfıra eşit olması ve stabilite için kriter ise ikinci varyasyonun pozitif belirli olmasıdır.

Bir yapı için kritik yük yapının stabilitesinin kaybolduğu yükür. Yük sıfırdan arttıkça $\delta^2 V$ pozitif olur. Buna bağlı olarak çok serbestlik dereceli sistemler için kritik yük en küçük yükür. Bu ise matematikten bildiğimiz katsayılar determinantını sıfır yapan değerdir. Tatbik edilen P yükünün kafi derecede küçük değerleri için yapının dengesi stabildir ve $\delta^2 V$; B_1 ve C_1 in sıfır olmayan bütün değerleri için pozitifdir. Yük sıfırdan arttırılırken en az bir B_1 , C_1 çifti için $\delta^2 V$ sıfıra eşitlendiğinde P denilen bir değere ulaşılır. B_1 ve C_1 in diğer bütün değerleri için de hala pozitifdir. $P = P$ de bu B_1 , C_1 çifti için $\delta^2 V$ minimumdur. O zaman B_1 , C_1 için stasyonerdir ve şöyle olur.

$$\frac{\partial(\delta^2 V)}{\partial B_1} = 0, \quad \frac{\partial(\delta^2 V)}{\partial C_1} = 0 \quad (4.32)$$

(4.31) denkleminin B_1 ve C_1 e göre diferansiyeli aşağıdaki gibidir.

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial B^2} (B_0, C_0) B_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial B \partial C} (B_0, C_0) C_1 \right] \quad (4.33)$$

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial B \partial C} (B_0, C_0) B_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial C^2} (B_0, C_0) C_1^2 \right] \quad (4.34)$$

(4.33) ve (4.34) denklemleri B_1 ve C_1 e göre lineer homojendir. $B_1 = C_1 = 0$ olan çözüm trivial çözümdür. İlk konumu gösterir. Bundan başka bir konum da bulunması şart ise katsayılar determinantının sıfır olması şarttır. Buna burkulma şartı veya burkulma determinanti denir. $\Delta = 0$ denkleminin kökleri bize özel değerleri, kritik yükleri verir.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial B^2} (B_0, C_0) & \frac{\partial^2 V}{\partial B \partial C} (B_0, C_0) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial B \partial C} (B_0, C_0) & \frac{\partial^2 V}{\partial C^2} (B_0, C_0) \end{vmatrix} \quad (4.35)$$

Burada kök sayısı sonsuzdur. Küçükten büyüğe doğru sıralarsak en küçük kök kritik yükü verir.

4.4. Virtüel İş Prensibi

Virtüel deplasmanlar metodu ve virtüel kuvvetler metodu olmak üzere ikiye ayrılır. Sonlu elemanlar metodunda virtüel deplasmanlar metodu kullanılır. Kuvvetlerin işi hesaplanırken yer değişmelerin mutlaka o kuvvetlerden doğması gerekmez. Yani iş her zaman gerçek olmayabilir. Keyfi bir yer değiştirme ile de iş hesabı bahis konusu olabilir. Tamamen keyfi olan bu yer değiştirmeye virtüel yer değiştirme denir. Kuvvetin bu şekilde virtüel yer değiştirme ile yaptığı işe de Virtüel İş denir. Virtüel yer ve şekil değiştirmeler sistemin dış bağlarına uygun, sistemin iç sürekliliğini bozmayan, çok küçük ve keyfidir. Virtüel iş prensibi geneldir. Geometrik veya fiziksel açıdan lineer veya lineer olmayan sistemlere uygulanabilir. Cismin fizik bünyesine bağlı değildir. Dengesi incelenen cisim rijit, elastik veya plastik olabilir.

Rijit cisimler mekaniğinde nonlinearite problemi iki ana kola ayrılmıştır. Biri malzeme veya fiziksel nonlinearite, diğeri ise büyük deplasman veya geometrik nonlinearitedir. Malzeme bakımından nonlinearite, malzemenin gerilme - deformasyon kanununa bağlıdır. Geometrik nonlinearite deplasmanların derecesine bağlıdır. Öyleyse bu

deplasman durumunda artık küçük deplasmanlar için geçerli olan deformasyon deplasman bağıntıları geçerli değildir. Böyle problemlere de virtüel iş prensibi kolaylıkla uygulanabilmektedir. u hakiki deplasman, δu virtüel deplasman, $\{\varepsilon\}$ hakiki deformasyon, $\{\delta\varepsilon\}$ virtüel deformasyon ise; deplasman durumunda iç kuvvetlerin yaptığı işe iç kuvvetlerin virtüel işi denir.

$$\delta U = \iiint_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (4.36)$$

Burada gerilmeler hakiki gerilmeler, deformasyonlar ise virtüeldir.

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (4.37)$$

$$\delta U = \iiint_V \{\delta\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV \quad (4.38)$$

X kütlelesel kuvveti, p yüzeysel kuvveti, q çizgisel kuvveti, P münferit kuvveti gösterirse dış kuvvetlerin virtüel işi aşağıdaki gibi olur.

$$\delta W = \iiint_V \{\delta u\}^T \{X\} dV + \iint_F \{\delta u\}^T \{p\} dF + \int_S \{\delta u\}^T \{q\} ds + P \quad (4.39)$$

Dış yüklerin etkisi altında dengede olan bir sisteme geometrik ve kinematik sınır şartlarına uygun, keyfi küçük bir deplasman verildiğinde dış kuvvetlerin işindeki artım, sistemin şekil değiştirme enerjisindeki artıma eşittir. Yani iç kuvvetlerin virtüel işi dış kuvvetlerin virtüel işine eşittir.

$$\delta U = \delta W \quad (4.40)$$

5. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

5.1. Giriş

Sonlu elemanlar yöntemi; sürekli bir sistemi, problemin karakterine uygun sonlu elemanlara ayırarak elde edilen elemanlar üzerinde, iç ve dış kuvvetlerin enerjisinin minimizasyonu ve sonra bu elemanların birleştirilmesi tarzında bir uygulama getirir. Bunun sonucu olarak mesnet şartları, sisteme ait özellikler, dış yüklerin sürekli yada ani değişimleri kolayca gözönüne alınabilir. Dolayısıyla sonlu elemanlar yöntemi, analitik metodlarla çözülemeyen karışık problemlere uygulanabilir. Yüzeysel sistemin tipik bölgelerinde eleman boyutları küçültülerek o bölgenin iyi incelenmesi mümkün olur. Diğer bir avantajı da sınır şartlarının problemin çözüm sırasına göre, en son adımda hesaplara dahil edilmesidir. Böylelikle çeşitli sınır şartlarını probleme uygularken baştaki yoğun hesaplara girilmez.

Sonlu elemanlar metodunun kabuk sistemlere uygulanışına ait çalışmaların bir kısmında sistem düzlemsel sonlu elemanlara ayrılmaktadır. Bu tip hesaplarda eleman özel eksenlerinin sistem eksenlerine dönüştürülmesinde ve sistem rijitlik matrisinin hesabında bazı güçlüklerle karşılaşmaktadır. Kabuk formuna uygun eğrisel sonlu eleman kullanılması bu güçlükleri ortadan kaldırmaktadır. Yapının geometrisine bağlı olarak elemanın şekli bir, iki veya üç boyutlu olabilir. Eleman sınırları düz veya eğri çizgili olabilir.

Sonlu elemanlar metodunda sistem sonlu sayıda elemanlara ayrılmakta ve bu elemanların boyutları küçüldükçe problemin hata oranı azalmakta, fakat çözüm süresi uzamaktadır. Sistemi oluşturan elemanların herbirine sonlu eleman denir ve birleştikleri köşe noktaları da düğüm noktaları olarak adlandırılır. Sonlu eleman yüzeyinin şekil değiştirmesi, düğüm noktalarının deplasman parametrelerine bağlı olarak ifade edilebilir. Deplasman parametreleri ; deplasman bileşenleri, dönmeler ve burulma eğriliği gibi deplasman vektörlerini içermektedir. Eğilme hesaplarında düğüm noktalarının deplasman parametrelerinin belirlenmesi, sistemin deplasman yüzeyinin ve her düğüm noktasındaki kesit tesirlerinin bulunması için kafidir. Stabilitate hesabında ise, bu deplasman

parametrelerine göre kurulan denklem takımının (Δ) katsayılar determinantını sıfır yapan yük, yani kritik yük tayin edilir.

5.1.1. Deplasman Fonksiyonlarının Seçimi

Deplasman fonksiyonları rijit cisim hareketi ve sabit deformasyon şartını sağlayacak şekilde seçilmelidir. Koordinat eksenini değişince çözüm farklı olmamalıdır. Bunun için deplasman fonksiyonları ya tam polinom veya tabii koordinatlarının fonksiyonu şeklinde olmalıdır. Bu fonksiyonlar elemanın içinde, kenarında ve iç ile dış kuvvetlerin içindeki türevlerde sürekli olmalıdır.

Herhangi bir (e) elemanına ait ve bu elemanın içinde yada sınırları üzerinde bir (i) noktasındaki deplasman vektörü $\{u\}$ olsun.

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = [\phi(x, y)]\{a\} \quad (5.1)$$

Burada $[\phi(x, y)]$ seçilen deplasman fonksiyonlarıdır. Hesap kolaylığı bakımından genellikle polinom seçilir. Paskal üçgeni polinomların seçilmesine yardımcı olur. Polinomlarda türev almak, integral almak kolaydır. Gerçek çözüme istenildiği kadar yaklaşmak mümkündür. Seçilen deplasman fonksiyonları tam bir polinom ise geometrik izotropi sağlar. Eğer polinom tam değil, fakat simetri varsa yine geometrik izotropi vardır. Burada $\{a\}$ bilinmeyen katsayılarıdır. Bu $\{a\}$ katsayılarının sayısı, bir elemandaki düğüm noktalarının deplasman parametrelerinin toplam sayısına eşit olmalıdır.

Elemanı düğüm noktası deplasman parametreleri, eğer elemanda dört düğüm noktası varsa

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} [d]_1 \\ [d]_2 \\ [d]_3 \\ [d]_4 \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

şeklinde. Elemanın herhangi bir (i) düğüm noktasında tarif edilen deplasman parametreleri ise şunlardır.

$$\{d\}_{i(i=1,2,3,4)} = (u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \tau \dots \dots \dots) \quad (5.3)$$

Eleman düğüm noktası deplasmanları $\{d\}$ ile polinom sabitleri $\{a\}$ arasındaki bağı veren $[A]$ matrisi ise; eleman düğüm noktalarının deplasman parametrelerinin $\phi(x,y)$ ve $\phi(x,y)$ nin türevleri cinsinden yazılmış değerlerine düğüm noktası koordinatlarının konması ile bulunur.

$$\{d\} = [A] \{a\} \quad (5.4)$$

$$\{a\} = [A]^{-1} \{d\} \quad (5.5)$$

$$[B] = [A]^{-1} \text{ diyelim .} \quad (5.6)$$

$$\{a\} = [B] \{d\} \quad (5.7)$$

(5.7) denklemini (5.1) denkleminde yerine koyarsak eleman deplasman vektörü, elemanın düğüm noktalarının deplasman parametreleri cinsinden belirlenmiş olur.

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ w(x,y) \end{Bmatrix} = [\phi(x,y)][B]\{d\} \quad (5.8)$$

$$[\phi(x,y)][B] = [N] \quad (5.9)$$

Bu ifadeye şekil fonksiyonları denir. Deplasman parametresi sayısı kadar şekil fonksiyonu elde edilir.

$$\{u\} = [N] \{d\} \quad (5.10)$$

Şekil değiştirmeler ise şöyle yazılır.

$$\{\epsilon\} = [\Delta] \{u\} = [\Delta] [N] \{d\} = [\Delta N] \{d\} \quad (5.11)$$

Burada $[\Delta N]$ şekil değiştirme matrisidir.

(1) düğüm noktasındaki d_1 deplasman parametresine ait N_1 şekil fonksiyonu öyle hesaplanır ki; (1) düğüm noktasının (x,y,z) koordinatları konduğu zaman,

$$N_1 = 1; N_2 = N_3 = \dots \dots = 0$$

olur. Şekil fonksiyonları, eleman şekli ve boyutu değişmediği sürece her elemanda aynıdır. Yalnız deplasman parametreleri elemandan elemana değişir. Problemde bu deplasman parametreleri bilinmeyen olarak hesaplanır. Lineer transformasyon halinde şekil fonksiyonları değişmiyorsa lineer izotropi var denilir.

5.2. Genel Dış Yük Halinde Sonlu Elemanlar Metoduyla Eğilme Hesabı

Dengede olan bir cismin, herhangi bir yer ve şekil değiştirmesinde iç kuvvetlerin işi, dış kuvvetlerin işine eşittir. İç kuvvetlerin virtüel işini δU , dış kuvvetlerin virtüel işini de δW ile gösterelim.

Tabii durum hakiki yükleme, i birim durumu ise virtüel yer değiştirme ve virtüel şekil değiştirme durumu olarak alınıp virtüel iç kuvvetlerle, virtüel dış kuvvetlerin işini yazalım.

$$\delta U = \int_V \{\delta \varepsilon\}_i \sigma dV \quad (5.12)$$

$$\{\sigma\} = [D][\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}] + \{\sigma_0\} - \alpha \Delta t \{D_T\} \quad (5.13)$$

Burada ;

$[D]$: Malzemenin elastisite matrisini

$\{\varepsilon_0\}$: Başlangıç şekil değiştirmesini

$\{\sigma_0\}$: Başlangıç gerilmesini

α : Genleşme katsayısını

Δt : Sıcaklık değişmesini

$\{D_T\}$: Sıcaklık elastisite matrisini gösterir.

(5.13) denklemini (5.12) denkleminde yerlerine koyalım.

$$\delta U = \int_V \{\delta \varepsilon\}_i^T [D] \{\varepsilon\} dV - \int_V \{\delta \varepsilon\}_i^T [D] \{\varepsilon_0\} dV + \int_V \{\delta \varepsilon\}_i^T \{\sigma_0\} dV - \int_V \{\delta \varepsilon\}_i^T \alpha \Delta t \{D_{T0}\} dV \quad (5.14)$$

$$\delta W = \int_V \{\delta u\}_i^T \{X\} dV + \int_F \{\delta u\}_i^T \{p\} dF + \int_S \{\delta u\}_i^T \{q\} ds + \{d\}^T P - \int_F c \{\delta w\}_i^T \{w\} dF \quad (5.15)$$

u : Deplasmanı

X : Kütlesel kuvveti

p : Yüzeysel yükü

q : Çizgisel yükü

P : Tekil yükü

c : Elastik yataklama katsayısını gösterir.

Elastik yatak tepkileri yalnız yüzey normali doğrultusundadır. Elastik yatak katsayısı c nin eleman yüzeyinde sabit olduğu kabul edileceğinden;

$P_f = -cw$ dir.

Virtüel yer değiştirme ve virtüel şekil değiştirmeler ise (5.10) ve (5.11) denklemlerinden aşağıdaki gibidir.

$$\delta u = [N]\{\delta d\} \quad (5.16)$$

$$\delta \epsilon = [\Delta N]\{\delta d\} \quad (5.17)$$

(5.16) ve (5.17) denklemlerini (5.15) ve (5.14) denklemlerinde yerlerine koyalım. İ kuvvetlerle dış kuvvetlerin eşitliğini yazalım.

$$\delta U = \delta W \quad (5.18)$$

Matris formda yazarsak;

$$[k_e]\{d\} + [s_e]\{d\} = P + \{q_e\}_q + \{q_e\}_p + \{q_e\}_x + \{q_e\}_{\sigma_0} + \{q_e\}_{\epsilon_0} + \{q_e\}_T \quad (5.19)$$

elde edilir.

$$[k_e] = \int_V [\Delta N][D][\Delta N]dV \quad : \text{Eleman rijitlik matrisi}$$

$$[s_e] = c \int_F [N(w)]^T [N(w)]dF \quad : \text{Eleman elastik yataklama matrisi}$$

P : Elemanın düğüm noktasına etkiyen tekil yük

$$\{q_e\}_q = \int_S [N]^T \{q\}ds \quad : \text{Elemana etkiyen çizgisel yük}$$

$$\{q_e\}_p = \int_F [N]^T \{p\}dF \quad : \text{Elemana etkiyen yüzeysel yük}$$

$$\{q_e\}_x = \int_S [N]^T \{X\}dV \quad : \text{Elemana etkiyen kütleysel yük}$$

$$\{q_e\}_{\sigma_0} = \int_S [\Delta N]^T \{\sigma_0\}dV \quad : \text{Eleman başlangıç gerilmeleri}$$

$$\{q_e\}_{\epsilon_0} = \int_S [\Delta N]^T \{\epsilon_0\}dV \quad : \text{Eleman başlangıç şekil değiştirmeleri}$$

$$\{q_e\}_T = \alpha \Delta t \int_S [\Delta N]^T \{D_T\}dV \quad : \text{Eleman sıcaklık değişmeleri}$$

$\{d\}$: Eleman düğüm noktası deplasman parametresi

Burada elastik yataklama matrisindeki $[N(w)]$ şekil fonksiyonu sadece (w) 'ye bağlı şekil fonksiyonudur. Sıcaklık değişmesi dışındaki yük matrislerinin toplamına $\{q_e\}_0$ sıcaklık değişmesi matrisine de $\{q_e\}_T$ diyelim. (5.19) denklemini aşağıdaki şekli alır.

$$[k_e]\{d\} + [s_e]\{d\} = \{q_e\}_0 + \{q_e\}_T \quad (5.20)$$

Sisteme geçiş :

$$[K]\{D_s\} + [S]\{D_s\} = \{Q\}_0 + \{Q\}_T \quad (5.21)$$

Burada $\{D_s\}$ sistemin düğüm noktası deplasman parametreleridir.

Sisteme geçmek çevirme matrisleri veya biriktirme metodu ile yapılır.

1. Sonlu elemana ayrılan sistemin düğüm noktaları numaralandırılırken elde edilecek lineer denklem takımının katsayılar matrisi bant genişliğinin mümkün mertebe küçük olmasına dikkat edilmelidir.

2. Her elemanın rijitlik (katılık) matrisi, varsa elastik yataklama matrisi ve dış etkiler matrisi hesaplanır.

3. Eleman eksenini ile sistem ekseninin çakışmaması halinde eleman rijitlik matrisi ve yük matrisi çevirme matrisleri ile sistem eksenlerine dönüştürülür.

4. Sistem rijitlik ve dış etkiler matrisi yerlerine yerleştirilir.

5. Elde edilen denklem takımına mesnet şartları konur. Mesnetlerde sıfır olduğu bilinen deplasman parametrelerine ait satır ve sütunlar silinip denklem takımı küçültülür. Eğer mesnet çökmeleri varsa, mesnet çökmeleri düğüm noktaları deplasman parametrelerinin alacağı değerlerle belirlenir. Katsayılar matrisinde bu deplasman parametrelerine karşı gelen yatay satırlar silinmeli, sütunlar ise bu değerlerle çarpılarak denklem takımının sağına geçirilip ilave yükleme terimleri olarak düşünülmelidir.

6. Denklem takımı çözülerek düğüm noktası deplasman parametreleri bulunur.

7. Eleman eksenini ile sistem eksenini çakışmaması halinde deplasman parametreleri eleman özel eksenine dönüştürülür.

8. Düğüm noktalarındaki deformasyonlar ve kesit tesirleri bulunur.

9. Aynı düğüm noktasında birleşen elemanların her birinden hesaplanan kesit tesirleri farklıdır. Bu değerlerin ortalaması alınarak o düğüm noktasının kesit tesiri nümerik olarak bulunmuş olur.

5.3. Sonlu Elemanlar Metodu İle Stabilité Hesabı

Kesit kalınlıklarının sistem boyutlarına göre çok küçük olması halinde yapının narinliği söz konusu olur. Narinliđin artması büyük deplasmanlara sebep olacağından; birinci ,mertebe teorisi yerine, ikinci mertebé teorisiyle hesap gerekmektedir. Dolayısıyla sistemin stabilité hesabı ehemmiyet kazanmaktadır. Stabilité hesabında denge konumu bellidir. Denge durumunun kararlı olup olmadığını araştırır ve kararlı denge konumunu oluşturan şartlar incelenir.

Kabuller

1) Denge denklemleri şekil değiştirmiş sistem üzerinde yazıldığı için elastik stabilité lineer olmayan bir teoridir. Yük-deplasman arasında artık bir orantılılık bulunmaz. Bu nedenle etkiyen dış yüklerin aralarındaki oran sabit kalacak şekilde arttıkları kabul edilir.

2) Sistem lineer olmadığından süperpozisyon prensibi, Betti karşıtlık teoremi geçerli değildir.

3) Membran kesit tesirlerinin büyük değerler aldığı gözönüne alınarak yalnızca bunların $[N_0]$ ikinci mertebé etkileri hesaba katılacak, eğilme ve burulma momentlerinin ikinci mertebé etkileri ihmal edilecektir.

Toplam potansiyel enerji denklemi:

$$V = U + W \quad (5.22)$$

Burada U şekil değiştirme enerjisini; W dış kuvvetlerin işini gösterir.

İnce, elastik bir dairesel silindirik kabuğun şekil değiştirme enerjisi şöyledir.

$$U = U_m + U_b \quad (5.23)$$

U_m membran şekil değiştirme enerjisi, U_b eğilme şekil değiştirme enerjisidir.

$$U_m = \frac{C}{2} \iint \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}^2 \right) dx dy \quad (5.24)$$

$$U_b = \frac{D}{2} \iint \left(k_x^2 + k_y^2 + 2\nu k_x k_y + 2(1-\nu)k_{xy}^2 \right) dx dy \quad (5.25)$$

$$U = \frac{C}{2} \iint \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}^2 \right) dx dy + \frac{D}{2} \iint \left(k_x^2 + k_y^2 + 2\nu k_x k_y + 2(1-\nu)k_{xy}^2 \right) dx dy \quad (5.26)$$

Kabuk elemanının yüzeyi üzerine etkiyen yüklerin x , y , z , doğrultularındaki bileşenleri P_x , P_y , P_z ise ve kabuk ortalama yüzeyi üzerindeki bir noktanın deplasman bileşenleride u , v , w ise tatbik edilen yüklerin potansiyel enerjisi için ifade şöyle olur.

$$W = -\iint (p_x u + p_y v + p_z w) dx dy \quad (5.27)$$

Sistem konservatif ise dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi negatiftir. Bu bağıntıda deplasman ve kuvvetler aynı yöndedir. Burada $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ ortalama yüzeyin uzama ve kayma şekil değiştirme bileşenleri; k_x, k_y, k_{xy} ise ortalama yüzeyin eğrilik değişimi ve burulma eğriliğidir. Bunlara kabuğun deformasyon-deplasman bağıntıları veya kinematik münasebetleri veyahutta uygunluk denklemleri denir. Ortalama yüzeyin u , v , w deplasman bileşenlerinin fonksiyonlarıdır.

Novozhilov teorisine göre, basık olmayan dairesel silindirlerin nonlineer deformasyon-deplasman bağıntıları ortalama yüzeyin u , v , w deplasman bileşenleri cinsinden yazılışları aşağıdaki şekildedir. Burada r silindirin yarıçapını göstermektedir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\beta_x^2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{w}{r} + \frac{1}{2}\beta_y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{r} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \beta_x \beta_y = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{v}{r} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ k_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ k_y &= \frac{\partial v}{r \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$2k_{xy} = \frac{2\partial v}{r\partial x} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad ; \quad \beta_y = \frac{v}{r} - \frac{\partial w}{\partial y}$$

Minimum Potansiyel Enerji Kriteri

Gerçek denge konumuna sonsuz yakın; ikinci bir konum daha alalım

$$u \rightarrow u_0 + u_1$$

$$v \rightarrow v_0 + v_1 \quad (5.29)$$

$$w \rightarrow w_0 + w_1$$

Burada, u_0, v_0, w_0 denge konumuna karşı gelen deplasmanlardır. u_1, v_1, w_1 ikinci konumu elde etmek için verilen sonsuz küçük virtüel artımlardır. u, v, w ise ikinci konuma karşı gelen deplasmanlardır. (5.29) denklemindeki değerleri (5.26) denkleminde terim terim yerlerine koyup şekil değiştirme enerjisinin ikinci varyasyonunu hesaplayalım.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (5.30)$$

$$\epsilon_x^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4$$

Yukarıdaki ifadeye benzer şekilde $\epsilon_y, \gamma_{xy}, k_x, k_y$ ve k_{xy} yi yazıp (5.26) denklemini teşkil ettikten sonra, buradaki u, v, w yerine (5.29) denklemindeki değerleri yerine koyarsak, şekil değiştirme enerjisinin $U + \Delta U$ değerini elde ederiz. u_0, v_0, w_0 deplasmanlarından oluşan denge konumundaki potansiyel enerjiyi çıkarırsak, potansiyel enerjideki ΔU değişimini elde ederiz.

$$\Delta U = \delta U + \frac{1}{2!} \delta^2 U + \frac{1}{3!} \delta^3 U + \dots \quad (5.31)$$

Buradaki $\frac{1}{2!} \delta^2 U$ değeri; (1) indisli kemiyetlerin ikinci dereceden olan

terimlerinin toplanmasıyla elde edilir. $w_0 \equiv 0$ için ϵ_x 'in değeri şöyledir.

$$\frac{1}{2!} \delta^2 (\varepsilon_x^2) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \quad (5.32)$$

ε_y , γ_{xy} , k_x , k_y ve k_{xy} için benzer ifadeleri yazarsak membran ve eğilme şekil değiştirme enerjisinin ikinci varyasyonu aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} \delta^2 U_m &= \frac{C}{2} \iint \left\{ (\delta \varepsilon_x)^2 + (\delta \varepsilon_y)^2 + 2\nu (\delta \varepsilon_x)(\delta \varepsilon_y) + \frac{1-\nu}{2} (\delta \gamma_{xy})^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[(\varepsilon_{x0} + \nu \varepsilon_{y0}) (\delta^2 \varepsilon_x) + (\varepsilon_{y0} + \nu \varepsilon_{x0}) (\delta^2 \varepsilon_y) + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy0} (\delta^2 \gamma_{xy}) \right] \right\} dx dy \\ \frac{1}{2!} \delta^2 U_b &= \frac{D}{2} \iint \left\{ (\delta k_x)^2 + (\delta k_y)^2 + 2\nu (\delta k_x)(\delta k_y) + 2(1-\nu) (\delta k_{xy})^2 \right\} dx dy \end{aligned} \quad (5.33)$$

Bu son şekle göre şekil değiştirme enerjisinin ikinci varyasyonunu yazalım.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} \delta^2 U &= \frac{C}{2} \iint \left(\varepsilon_{x1}^2 + \varepsilon_{y1}^2 + 2\nu \varepsilon_{x1} \varepsilon_{y1} + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^2 \right) dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint \left(N_{x0} \beta_{x1}^2 + N_{y0} \beta_{y1}^2 + 2N_{xy0} \beta_{x1} \beta_{y1} \right) dx dy \\ &\quad + \frac{D}{2} \iint \left[k_{x1}^2 + k_{y1}^2 + 2\nu k_{x1} k_{y1} + 2(1-\nu) k_{xy1}^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (5.34)$$

Bu denklemdeki deformasyon - deplasman münasebetleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x1} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} & k_{y1} &= \frac{\partial v_1}{r \partial y} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{y1} &= \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{w_1}{r} & 2k_{xy1} &= \frac{2\partial v_1}{r \partial x} - \frac{2\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xy1} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} & \beta_{x1} &= -\frac{\partial w_1}{\partial x} \\ k_{x1} &= \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} & \beta_{y1} &= \frac{v_1}{r} - \frac{\partial w_1}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Buradaki N_{x0} , N_{y0} ve N_{xy0} değerleri membran denge denklemlerinden elde edilen membran kuvvetleridir.

$$\begin{aligned}
N_{x0} &= C(\varepsilon_{x0} + \nu\varepsilon_{y0}) \\
N_{y0} &= C(\varepsilon_{y0} + \nu\varepsilon_{x0}) \\
N_{xy0} &= C\frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy0}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

(5.27) denklemindeki tatbik edilen yüklerin potansiyel enerjisinin ikinci varyasyonunda ikinci dereceden terimler ihtiva etmediğinden $\delta^2W = 0$ dır. Sonuç aşağıdaki gibidir.

$$\delta^2V = \delta^2U_m + \delta^2U_b \tag{5.37}$$

(5.34) denklemindeki (1) indisini atıp matris formda yazalım.

$$\frac{1}{2!}\delta^2V = \frac{1}{2}\iint[\varepsilon]^T[D][\varepsilon]dxdy + \frac{1}{2}\iint[B]^T[N_0][\beta]dxdy \tag{5.38}$$

Açık şekilde yazalım.

$$\frac{1}{2!}\delta^2V = \frac{1}{2}\iint \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} dxdy +$$

$$\frac{1}{2}\iint \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \nu - \frac{\partial w}{\partial y} \\ r \end{array} \right\} \begin{bmatrix} N_{x0} & N_{xy0} \\ N_{xy0} & N_{y0} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \nu - \frac{\partial w}{\partial y} \\ r \end{array} \right\} dxdy \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon\} &= [F]\{a\} \\
\{\beta\} &= [G]\{a\}
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Burada [F] ve [G] matrisine türev matrisi denir. (5.7) denklemini (5.40) denkleminde yerlerine koyalım.

$$\begin{aligned}\{\varepsilon\} &= [F][B]\{d\} \\ \{\beta\} &= [G][B]\{d\}\end{aligned}\quad (5.41)$$

(5.39) denklemini türev matrisleri şeklinde yazalım.

$$\frac{1}{2!}\delta^2 V = \frac{1}{2}\{d\}^T \left(\iint [B]^T [F]^T [D][F][B] dx dy + \iint [B]^T [G]^T [N_0][G][B] dx dy \right) \{d\} \quad (5.42)$$

Eleman matrisi şeklinde yazalım.

$$\delta^2 V = \{d\}^T \left([k_e] + \lambda [n_e] \right) \{d\} \quad (5.43)$$

Burada $[k_e]$ eleman rijitlik matrisi, λ yük parametresi, $[n_e]$ eleman geometrik yük matrisidir. $[n_e]$ ikinci mertebe etkilerinden meydana gelen ilave yüküdür. Sisteme geçiş çevirme matrisleri veya biriktirme metoduyla yapılarak $[K]$ sistem rijitlik matrisi ve $[N]$ sistem geometrik yük matrisi elde edilir. Elemanın deplasman parametreleri $\{d_{ei}\}$; sistemin deplasman parametreleri $\{D_s\}$ ise; bütün sistemin potansiyel enerjisinin minimizasyonunu yaparsak,

$$\frac{\partial(\delta^2 V)_{\text{sistem}}}{\partial D_s} = \sum \frac{\partial(\delta^2 V)_{\text{sistem}}}{\partial d_{ei}} = 0 \quad (D_s = D_1, D_2, D_3, \dots, D_n) \quad (5.44)$$

elde edilir.

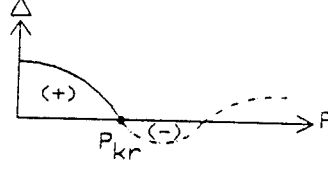
Stabilite probleminin çözümü :

Burkulma yükü, sistemin ilk durumunu kararsız hale getiren en küçük yük parametresi olarak tanımlanabilir. Dış yüklerden oluşan membran kesit tesirleri bir yük parametresine bağlı olarak ifade edilebilir. İkinci mertebe hesaplarında süperpozisyon prensibi geçerli olmadığı için yükü belli bir değer katları şeklinde gösterebiliriz. λ bir yük parametresi olarak kabul edilirse $[N_0] = \lambda [n_0]$ olur. Stabilite denklemi ise ,

$$\left([K] + \lambda [N] \right) \{D_s\} = 0 \quad (5.45)$$

şeklindedir. Bu denklem takımına problemin sınır şartları konur. Sistemin ilk konumunun kararsız hale gelmesi ve $\{D_s\} = 0$ dan farklı kararlı başka bir denge konumunun bulunması için yukardaki denklem takımının katsayılar determinantının (Δ) sıfır olmasını gerektirir. (Δ) yı sıfır yapan yük iki şekilde bulunur.

1. Bisection metodu ile P_{kr} yük hesaplanır. Şöyleki, sıfırdan başlayarak P 'ye artan değerler verilir ve (Δ) hesaplanır. Pozitiften negatife geçtiği bölgede bu aralıklar sıklaştırılarak (Δ) yı sıfır yapan P_{kr} değeri bulunmuş olur.



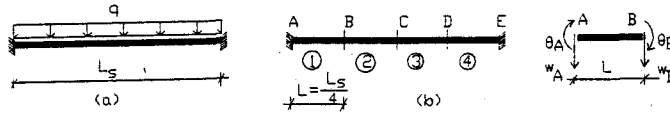
Şekil 5.1

2. Ardışık yaklaşım yöntemi ile de P_{kr} yük hesaplanır.

6. SONLU ELEMENLAR METODUYLA ÇUBUK HESABI

6.1. Sonlu Elemanlar Metoduyla Bir Çubuğun Eğilmesinin Hesabı

İki ucu ankastre, yayılı q yüküne maruz bir çubuğun eğilme momentini sonlu elemanlar metoduyla hesaplayalım.



Şekil 6.1 a,b

Şekil 6.1-b deki gibi çubuğu dört eşit parçaya bölelim ve düğüm noktası parametrelerini tespit edelim. Elemanın A ve B düğüm noktasının koordinatları $A(0,0)$; $B(L,0)$ dir.

$$\{d\}^T = [w_A, \theta_A, w_B, \theta_B] = [d_1, d_2, d_3, d_4] \quad (6.1)$$

6.1.1 Deplasman Fonksiyonlarının Seçimi :

Deplasman fonksiyonları rijit cisim hareketi ve sabit deformasyon şartını sağlayacak şekilde seçilmelidir. Koordinat ekseni değişince çözüm farklı olmamalıdır. Bunun için deplasman fonksiyonu ya tam polinom veya tabii koordinatların fonksiyonu şeklinde olmalıdır. Ayrıca iç ve dış kuvvetlerin işindeki türevlerde de sürekli olmalıdır. Biz burada deplasman fonksiyonunu polinom olarak seçeceğiz. Elemanda bilinmeyen dört deplasman parametresi olduğu için, dört bilinmeyenli deplasman fonksiyonu seçmemiz gerekir.

$$w = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (6.2)$$

$$w = [\phi(x)]\{a\} = [1, x, x^2, x^3]\{a\} \quad (6.3)$$

6.1.2 Şekil Fonksiyonlarının Tayini :

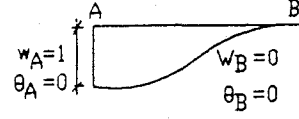
İki yolla şekil fonksiyonları tayin edilir.

1. Yol : N_1 Şekil fonksiyonunun tayini :

Deplasman parametreleri,

$$w_A = 1 \text{ ve } \theta_A = w_B = \theta_B = 0$$

olacak şekilde şekil fonksiyonu tayin edilir.



Şekil 6.2

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x} = a_2 + 2a_3 + 3a_4x^2 \quad (6.4)$$

Burada (6.2) ve (6.4) denkleminde $A(0,0)$ ve $B(L,0)$ koordinatları koyarsak dört bilinmeyenli dört denklem elde edilir.

$$w_A = 1 = a_1 + 0 + 0 + 0$$

$$\theta_A = 0 = a_2 + 0 + 0 + 0$$

$$w_B = 0 = a_1 + a_2L + a_3L^2 + a_4L^3 \quad (6.5)$$

$$\theta_B = 0 = a_2 + 2a_3L + 3a_4L^2$$

Buradan a_1, a_2, a_3, a_4 çözümlenerek aşağıdaki değerler elde edilir. Bu değerler (6.2) denkleminde yerine konularak N_1 şekil fonksiyonu elde edilir.

$$a_1 = 1 ; a_2 = 0 ; a_3 = -\frac{3}{L^2} ; a_4 = \frac{2}{L^3}$$

$$N_1 = 1 - \frac{3}{L^2}x^2 + \frac{2}{L^3}x^3 \quad (6.6)$$

N_2 şekil fonksiyonunun tayini:

$$\theta_A = 1 ; w_A = w_B = \theta_B = 0$$

olacak şekilde N_2 şekil fonksiyonu tayin edilir.



Şekil 6.3

$$w_A = 0 = a_1 + 0 + 0 + 0 \quad (6.7)$$

$$\theta_A = 1 = a_2 + 0 + 0$$

$$w_B = 0 = a_1 + a_2L + a_3L^2 + a_4L^3$$

$$\theta_B = 0 = a_2 + 2a_3L + 3a_4L^2$$

Denklemler çözülerek a_1, a_2, a_3, a_4 bulunur.

$$a_1=0; \quad a_2=1; \quad a_3 = -\frac{2}{L}; \quad a_4 = \frac{1}{L^2}$$

$$N_2 = L \left(\frac{x}{L} - 2 \frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right) \quad (6.8)$$

N_3 şekil fonksiyonu tayini :

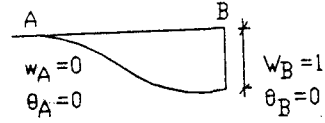
$w_B = 1; w_A = \theta_A = \theta_B = 0$ olacak şekilde N_3 şekil fonksiyonu tayin edilir.

$$w_A = 0 = a_1 + 0 + 0 + 0 \quad (6.9)$$

$$\theta_A = 0 = a_2 + 0 + 0$$

$$w_B = 1 = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3$$

$$\theta_B = 0 = a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2$$



Denklem takımı çözülerek a_1, a_2, a_3, a_4 bulunur.

Şekil 6.4

$$a_1 = 0; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = \frac{3}{L^2}; \quad a_4 = -\frac{2}{L^3}$$

$$N_3 = 3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3} \quad (6.10)$$

N_4 şekil fonksiyonunun tayini :

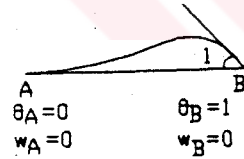
$\theta_B = 1; w_A = \theta_A = w_B = 0$ olacak şekilde N_4 şekil fonksiyonu tayin edilir.

$$w_A = 0 = a_1 + 0 + 0 + 0 \quad (6.11)$$

$$\theta_A = 0 = a_2 + 0 + 0$$

$$w_B = 0 = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3$$

$$\theta_B = 1 = a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2$$



denklem takımı çözülerek a_1, a_2, a_3, a_4 bulunur.

Şekil 6.5

$$a_1 = 0; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = -\frac{1}{L}; \quad a_4 = \frac{1}{L^2}$$

$$N_4 = L \left(-\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right) \quad (6.12)$$

2.yol: Eleman düğüm noktası deplasmanları $\{d\}$ ile polinom sabitleri $\{a\}$ arasındaki bağı veren $[A]$ bağı matrisi ise ; elemanın düğüm noktası deplasman

parametrelerinin $\phi(x)$ ve $\phi(x)$ in türevleri cinsinden yazılmış bileşenlerinde düğüm noktası koordinatlarının yerine konulmasıyla bulunur.

$$\{d\} = [A]\{a\} \quad (6.13)$$

$$\{a\} = [A]^{-1}\{d\} \quad (6.14)$$

$$[A]^{-1} = [B] \text{ diyelim}$$

$$\{a\} = [B]\{d\} \quad (6.15)$$

$$w = [\phi(x)]\{a\} \quad (6.16)$$

(6.15) denklemini (6.16) denkleminde yerlerine koyalım.

$$w = [\phi(x)][B]\{d\} \quad (6.17)$$

$[N] = [\phi(x)][B]$ ye şekil fonksiyonu denir. Bu şekil fonksiyonları her elemanda aynıdır. Yalnız deplasman parametreleri elemandan elemana değişir.

$$w = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (6.18)$$

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x} = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 \quad (6.19)$$

Bağ matrisi elemanın $A(0,0)$; $B(L,0)$ düğüm noktası koordinatlarının (6.18) ve (6.19) denklemleri içine konması ile bulunur

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

$[A]^{-1} = [B]$ matrisi hesaplanır.

$$[N_1, N_2, N_3, N_4] = [\phi(x,y)]\{a\} = [1, x, x^2, x^3]\{a\} \quad (6.21)$$

$$[N_1, N_2, N_3, N_4] = [1, x, x^2, x^3][B]\{d\} \quad (6.22)$$

$$N_1 = 1 - \frac{3}{L^2}x^2 + \frac{2}{L^3}x^3$$

$$N_2 = L \left(\frac{x}{L} - 2\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right)$$

$$N_3 = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \quad (6.23)$$

$$N_4 = L \left(-\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right)$$

$$\frac{x}{L} = \xi \text{ diyelim ;}$$

$$N_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$N_2 = L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)$$

$$N_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

(6.24)

$$N_4 = L(-\xi^2 + \xi^3)$$

6.1.3 Eleman Rijitlik Matrisinin Bulunması ;

Yayılı q yüküne maruz bir çubuğun toplam potansiyel enerjisi (4.6) denkleminde verildiği şekildedir. Toplam potansiyel enerjinin birinci varyasyonu ise şöyledir.

$$\delta V^e = \delta U^e + \delta W^e$$

$$\delta V^e = \int_0^L [EI(w'')^2 - qw] dx \quad (6.25)$$

Matris formda yazalım.

$$\delta U^e = \int_0^L [EI(w'')^2] dx = \int_0^L \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dx = \{d\}^T [k_e] \{d\} \quad (6.26)$$

$$\delta W^e = -\int_0^L q w dx = -\int_0^L [N_1, N_2, N_3, N_4]^T q dx = -\{d\}^T [q_e] \quad (6.27)$$

$$\delta V^e = \{d\}^T ([k_e] \{d\} - [q_e]) \quad (6.28)$$

Burada $[k_e]$ eleman rijitlik matrisi $[q_e]$ dış yük matrisidir.

Elemanın rijitlik matrisi hesaplanırken iki yöntem uygulanır.

- 1) İntegral matrisleriyle hesap yapmak ;
- 2) Şekil fonksiyonları önceden tayin edip, onlarla işlem yapmak.

1) İntegral matrisleriyle eleman rijitlik matrisinin hesabı :

$$\varepsilon = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -w'' \quad (6.29)$$

$$w = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (6.30)$$

$$w' = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2$$

$$-w'' = -2a_3 - 6a_4x \quad (6.31)$$

$$\{\varepsilon\} = [F]\{a\} \quad (6.32)$$

Burada F matrisine, türev matrisi denir. (6.15) denklemini (6.32) denkleminde yerlerine koyalım.

$$\{\varepsilon\} = [F][B]\{d\} \quad (6.33)$$

$$[F] = [0, 0, -2, -6x] \quad (6.34)$$

(6.33) denklemini (6.26) denkleminde yerine koyalım.

$$[k_e] = \int_0^L \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dx \quad (6.35)$$

$$[k_e] = \int_0^L [B]^T [F]^T [EI] [F] [B] dx \quad (6.36)$$

$$[H] = EI \int_0^L [F]^T [F] dx \text{ integral matrisidir.}$$

2) Şekil fonksiyonlarından faydalanarak eleman rijitlik matrisinin hesabı :

$$[k_e] = \int_0^L \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dx \quad (6.37)$$

$$[k_e] = \int_0^L [-N_1'', -N_2'', -N_3'', -N_4'']^T [EI] [-N_1'', -N_2'', -N_3'', -N_4''] dx \quad (6.38)$$

$$[k_e] = EI \int_0^L \begin{bmatrix} N_1'' N_1'' & N_1'' N_2'' & N_1'' N_3'' & N_1'' N_4'' \\ N_2'' N_1'' & N_2'' N_2'' & N_2'' N_3'' & N_2'' N_4'' \\ N_3'' N_1'' & N_3'' N_2'' & N_3'' N_3'' & N_3'' N_4'' \\ N_4'' N_1'' & N_4'' N_2'' & N_4'' N_3'' & N_4'' N_4'' \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad N_2 = L \left(\frac{x}{L} - \frac{2x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right)$$

$$N_1' = -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3} \quad N_2' = L \left(\frac{1}{L} - \frac{4x}{L^2} + \frac{3x^2}{L^3} \right)$$

$$N_1'' = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad N_2'' = L \left(-\frac{4}{L^2} + \frac{6x}{L^3} \right)$$

Örnek olarak k_{12} yi hesaplayalım.

$$k_{12} = EI \int_0^L N_1'' N_2'' dx = EI \int_0^L \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left(-\frac{4}{L^2} + \frac{6x}{L^3} \right) L dx = \frac{6EI}{L^2}$$

Diğerleride aynı şekilde hesaplanıp eleman rijitlik matrisi bulunmuş olur.

$$[k_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^3 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

Bilinmeyen sayısı fazla ise 1. Yol; bilinmeyen sayısı az ise 2. Yol tercih edilir.

6.1.4 Eleman Yük Matrisinin Hesabı

$$\{q_e\} = \int_0^L [N_1 N_2 N_3 N_4]^T q dx \quad (6.41)$$

Örnek olarak $\{q_{e1}\}$ yük matrisini hesaplayalım.

$$\{q_{e1}\} = \int_0^L N_1 q dx = \int_0^L \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right) q dx = \frac{qL}{2}$$

Sonuç vektörü aşağıdaki şekildedir.

$$\{q_e\} = q \begin{bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L^2}{12} \\ \frac{L}{2} \\ \frac{L^2}{12} \\ -\frac{L}{2} \\ -\frac{L^2}{12} \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

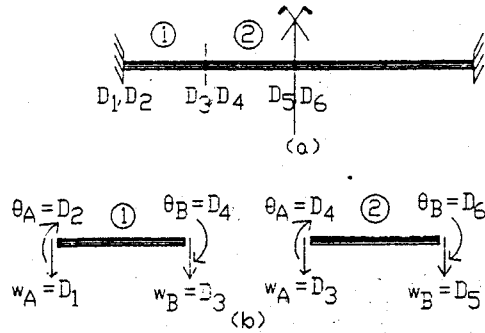
6.1.5 Sisteme Geçiş

1)Çevirme matrisiyle

2)Biriktirme metoduyla olmak üzere iki türlü sisteme geçiş yapılır.

1)Çevirme matrisleriyle sisteme geçiş

Simetriden faydalanıp sistemin yarısı ile hesap yapalım. Sistemin deplasman parametrelerini $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ ile gösterelim.



Şekil 6.6

1. Eleman için çevirme matrisi (6.43) ifadesiyle verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} W_A \\ \theta_A \\ W_B \\ \theta_B \end{bmatrix}_{1.\text{eleman}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{e1}} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}_{\text{sistem}} \quad (6.43)$$

2. Eleman için çevirme matrisi:

$$\begin{bmatrix} W_A \\ \theta_A \\ W_B \\ \theta_B \end{bmatrix}_{2.\text{eleman}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_{e2}} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}_{\text{sistem}} \quad (6.44)$$

Çevirme matrislerinden faydalanarak sistemin rijitlik matrisini hesaplayalım.

$$[K_{e1}] = [C_{e1}]^T [k_e] [C_{e1}] \quad 1. \text{ Elemanın sisteme çevrişi}$$

$$[K_{e2}] = [C_{e2}]^T [k_e] [C_{e2}] \quad 2. \text{ Elemanın sisteme çevrişi}$$

$$[K_{e1}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e1}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12 & -6L & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

Aynı şekilde $[K_{e2}]$ yi hesaplayalım.

$$[K_{e2}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6L & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

Toplam sistem rijitlik matrisi:

$$[K] = [K_{e1}] + [K_{e2}]$$

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

Yük vektörünün sisteme geçirilişi:

$$\{Q_{e1}\} = [C_{e1}]^T \{q_{e1}\}$$

$$\{Q_{e2}\} = [C_{e2}]^T \{q_{e2}\}$$

$$\{Q_{e1}\} = q \begin{bmatrix} L/2 \\ L^2/12 \\ L/2 \\ -L^2/12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \{Q_{e2}\} = q \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L/2 \\ L^2/12 \\ L/2 \\ -L^2/12 \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

Toplam sistem yük matrisi:

$$\{Q\} = \{Q_{e1}\} + \{Q_{e2}\}$$

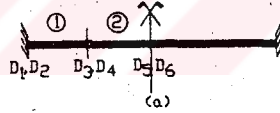
$$\{Q\} = q \begin{bmatrix} L/2 \\ L^2/12 \\ L \\ 0 \\ L/2 \\ -L^2/12 \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

Sistemin deplasman parametresine $\{D_s\}$ diyelim.

$$[K]\{D_s\} = \{Q\} \text{ olur.}$$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} L/2 \\ L^2/12 \\ L \\ 0 \\ L/2 \\ -L^2/12 \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

2) Biriktirme metoduyla sisteme geçiş:



Şekil 6.7

(1)	(2)
$D_1 = w_A$	$D_3 = w_B$
$D_2 = \theta_A$	$D_4 = \theta_B$
$D_3 = w_A$	$D_5 = w_B$
$D_4 = \theta_A$	$D_6 = \theta_B$

Eleman rijitlik matrisi:

$$[k_e] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

Sistem rijitlik matrisi biriktirme metoduyla hesaplanırken eleman, önce 1 inci sonra 2 inci elemana yerleştirilir.

Eleman Elemanda deplasman parametresi Sistemde deplasman parametresi

$$(1) \quad \begin{aligned} d_1 &= w_A \dots \dots \dots D_1 \\ d_2 &= \theta_A \dots \dots \dots D_2 \\ d_3 &= w_B \dots \dots \dots D_3 \\ d_4 &= \theta_B \dots \dots \dots D_4 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} d_1 &= w_A \dots \dots \dots D_3 \\ d_2 &= \theta_A \dots \dots \dots D_4 \\ d_3 &= w_B \dots \dots \dots D_5 \\ d_4 &= \theta_B \dots \dots \dots D_6 \end{aligned}$$

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆
D ₁	⁽¹⁾ k ₁₁	⁽¹⁾ k ₁₂	⁽¹⁾ k ₁₃	⁽¹⁾ k ₁₄	0	0
D ₂	⁽¹⁾ k ₂₁	⁽¹⁾ k ₂₂	⁽¹⁾ k ₂₃	⁽¹⁾ k ₂₄	0	0
D ₃	⁽¹⁾ k ₃₁	⁽¹⁾ k ₃₂	⁽¹⁾ k ₃₃ + ⁽²⁾ k ₁₁	⁽¹⁾ k ₃₄ + ⁽²⁾ k ₁₂	⁽²⁾ k ₁₃	⁽²⁾ k ₁₄
D ₄	⁽¹⁾ k ₄₁	⁽¹⁾ k ₄₂	⁽¹⁾ k ₄₃ + ⁽²⁾ k ₂₁	⁽¹⁾ k ₄₄ + ⁽²⁾ k ₂₂	⁽²⁾ k ₂₃	⁽²⁾ k ₂₄
D ₅	0	0	⁽²⁾ k ₃₁	⁽²⁾ k ₃₂	⁽²⁾ k ₃₃	⁽²⁾ k ₃₄
D ₆	0	0	⁽²⁾ k ₄₁	⁽²⁾ k ₄₂	⁽²⁾ k ₄₃	⁽²⁾ k ₄₄

(6.51)

Sistemdeki K₃₃, birinci elemandaki ⁽¹⁾k₃₃ ile ikinci elemandaki ⁽²⁾k₁₁ nin toplamına eşittir.

$$K_{33} = {}^{(1)}k_{33} + {}^{(2)}k_{11}$$

$$K_{43} = {}^{(1)}k_{43} + {}^{(2)}k_{21}$$

$$K_{44} = {}^{(1)}k_{44} + {}^{(2)}k_{22}$$

$$K_{34} = {}^{(1)}k_{34} + {}^{(2)}k_{12}$$

$$K_{15} = 0$$

$$K_{36} = {}^{(2)}k_{14}$$

$$K_{24} = {}^{(1)}k_{24}$$

6.1.6 Sınır Şartları:

Sonlu elemanlar metodunun diğer metodlara üstünlüğü sınır şartlarının probleme en sonunda konulmasıdır. Simetriden faydalanarak sistemin yarısı ile hesap yapılır. Çubuğun ucu ankastre olduğundan ($w = w' = 0$) dir. Dolayısıyla sınır şartları aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned} D_1 = D_2 = 0 & \quad \text{Mesnet şartı} \\ D_6 = 0 & \quad \text{Simetri şartı} \end{aligned} \quad (6.52)$$

(6.50) denkleminin içine (6.52) sınır şartlarını koyalım. Sınır şartlarına ait satır ve sütun silinip (1) konur.

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8L^2 & -6L & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ 0 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L \\ 0 \\ L/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

$$\begin{aligned} 24D_3 - 12D_5 &= qL \frac{L^3}{EI} \\ 8L^2D_4 - 6LD_5 &= 0 \end{aligned} \quad (6.54)$$

$$-12D_3 - 6LD_4 + 12D_5 = q \frac{L L^2}{2 EI}$$

Bu üç bilinmeyenli üç denklem çözülerek D_3 , D_4 , D_5 bulunur.

$$D_3 = \frac{3}{8} q \frac{L^4}{EI} \quad ; \quad D_4 = \frac{1}{2} q \frac{L^3}{EI} \quad ; \quad D_5 = \frac{2}{3} q \frac{L^4}{EI} \quad (6.55)$$

Sistemin momentini hesaplariken eleman rijitlik matrisleri değişmeyecek, fakat her elemanın düğüm noktası deplasmanları değişecektir.

6.1.7 Momentin Hesabı:

Her düğüm noktasındaki momentler hesaplanır. (B) düğüm noktasındaki moment ise, (1) elemanındaki ile (2) elemanındaki momentin ortalaması alınarak bulunur.

1. Elemanında:

$$M_1 = -EIw''$$

$$M_1 = -EI \begin{bmatrix} N_1'' & N_2'' & N_3'' & N_4'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = -\frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} \left(-6 + \frac{12x}{L}\right) & L\left(-4 + \frac{6x}{L}\right) & \left(6 - \frac{12x}{L}\right) & L\left(-2 + \frac{6x}{L}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{8}q\frac{L^4}{EI} \\ \frac{1}{2}q\frac{L^3}{EI} \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

$$M_1 = -\left(\frac{5}{4} - \frac{6x}{4L}\right)qL^2 \quad (6.57)$$

Ankastre mesnetteki moment $x = 0$ da:

$$M_1 = -\frac{5}{4}qL^2 \quad ; \quad L = \frac{L_s}{4}$$

$$M_1 = -\frac{5}{64}qL_s^2 = -\frac{1}{12,8}qL_s^2 \quad (\text{Kesin çözüm } M_1 = -\frac{qL_s^2}{12})$$

2. Elemanda

$$M_2 = -\frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} \left(-6 + \frac{12x}{L}\right) & L\left(-4 + \frac{6x}{L}\right) & \left(6 - \frac{12x}{L}\right) & L\left(-2 + \frac{6x}{L}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{8}q\frac{L^4}{EI} \\ \frac{1}{2}q\frac{L^3}{EI} \\ \frac{2}{3}q\frac{L^4}{EI} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

$$M_2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{2x}{4L} \right) qL^2 \quad (6.59)$$

Kiriş orta noktasındaki moment , $x = L$ de :

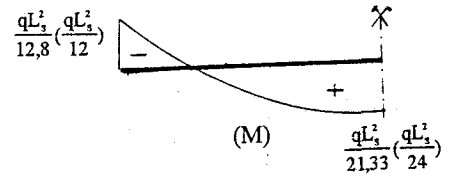
$$M_2 = \frac{3}{4} qL^2 \quad ; \quad L = \frac{L_s}{4}$$

$$M_2 = \frac{3}{64} qL_s^2 = \frac{1}{21.33} qL_s^2 \quad \left(\text{Kesin çözüm } M_2 = \frac{qL_s^2}{24} \right)$$

(B) düğüm noktasındaki moment ise :

$$x = L \text{ için : } M_1 = - \left(\frac{5}{4} - \frac{6L}{4L} \right) qL^2 = \frac{1}{4} qL^2$$

$$x = 0 \text{ için : } M_2 = \frac{1}{4} qL^2$$



Şekil 6.8

$$M_B = \frac{M_1 + M_2}{2} = \frac{1}{4} qL^2 \quad ; \quad L = \frac{L_s}{4} \quad (6.60)$$

$$M_B = \frac{qL_s^2}{64}$$

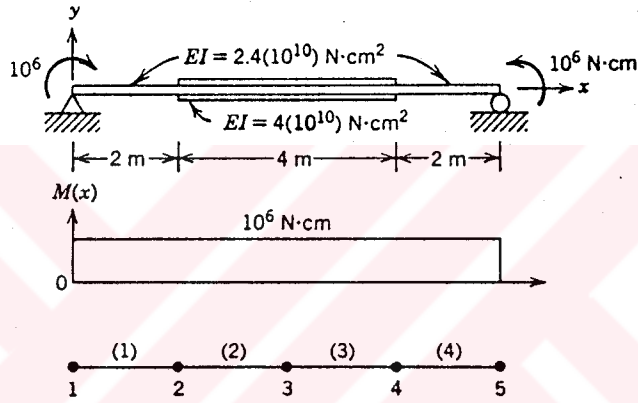
Bölüm 7 de bu konuyu açıklayabilecek birkaç basit sayısal örnek verilecektir.

7. SAYISAL ÇÖZÜMLER

7.1. Ağırlıklı Artıklar Metodu İle İlgili Sayısal Çözüm

Ağırlıklı artıklar metodunu kullanarak basit mesnetlenmiş ve uçlarına moment etki eden bir çubuğun sayısal analizini yapalım. (Şekil 7.1) Bu yöntemde kullanılacak ana eşitlik aşağıdaki gibidir. Ayrıntılı açıklama için Segerlind, L. J. (1984) kitabına bakılabilir.

$$R_s = \frac{-(EI)^{(s-1)} Y_{s-1} + [(EI)^{(s-1)} + (EI)^s] Y_s - (EI)^s Y_{s+1}}{L} - QL = 0 \quad (7.1)$$



Şekil 7.1

Oluşacak olan sehim eğrisinin diferansiyel formülü şu şekilde yazılabilir.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} - M(x) = 0 \quad (7.2)$$

E : Young modülü N/cm^2

Mx : Eğilme momenti $N \cdot cm$

I : Atalet momenti cm^4

y : Sehim cm

Sınır Şartları : $y(0) = y(800 \text{ cm}) = 0$ şeklinde olur. (7.1) formülündeki

bilinenler için bir tablo hazırlanarak yerlerine yazılacak olursa,

e	EI	Q = -M(x)	L
1	$2,4(10^{10})$	-10^6	200
2	$4,0(10^{10})$	-10^6	200
3	$4,0(10^{10})$	-10^6	200
4	$2,4(10^{10})$	-10^6	200

2, 3 ve 4 nolu düğüm noktaları için aşağıdaki eşitlikler elde edilir. 10^8 çarpanı her terim için mevcut olup yazımı basitleştirmek için verilmemiştir.

$$\begin{aligned} R_2 &= -1,2 Y_1 + 3,2 Y_2 - 2,0 Y_3 + 2 = 0 \\ R_3 &= -2,0 Y_2 + 4,0 Y_3 - 2,0 Y_4 + 2 = 0 \\ R_4 &= -2,0 Y_3 + 3,2 Y_4 - 1,2 Y_5 + 2 = 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

$Y_1 = Y_5 = 0$ sınır değerleri yerlerine konulursa

$$\begin{aligned} R_2 &= 3,2 Y_2 - 2,0 Y_3 = -2 \\ R_3 &= -2,0 Y_2 + 4,0 Y_3 - 2,0 Y_4 = -2 \\ R_4 &= -2,0 Y_3 + 3,2 Y_4 = -2 \end{aligned} \quad (7.4)$$

eşitlikleri bulunur. Denklemler çözülürse,

$$Y_2 = -2,5 \text{ cm}, \quad Y_3 = -3,0 \text{ cm}, \quad Y_4 = -2,5 \text{ cm}$$

sehim değerleri bulunmuş olur.

Belirlenmiş düğüm noktaları dışındaki sehimleri de bulmamız gerekebilir. Mesela $x = 300 \text{ cm}$ için sehim değerini bulmaya çalışalım. Bu nokta 2. elemanın içinde ve 2 ile 3 nolu düğüm noktaları arasındadır.

$$Y^{(2)} = N_2^{(2)} Y_2 + N_3^{(2)} Y_3 = \left(\frac{X_3 - x}{X_3 - X_2} \right) Y_2 + \left(\frac{x - X_2}{X_3 - X_2} \right) Y_3 \quad (7.5)$$

$X_2 = 200 \text{ cm}$ ve $X_3 = 400 \text{ cm}$ olup yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} Y &= \left(\frac{400 - 300}{400 - 200} \right) (-2,5) + \left(\frac{300 - 200}{400 - 200} \right) (-3,0) \\ Y &= -2,75 \text{ cm} \end{aligned}$$

bulunur. 1 nolu düğüm noktasındaki eğimi bulalım.

$$\frac{dy^{(1)}}{dx} = \frac{1}{L} (-Y_1 + Y_2) = \frac{-2,5 - 0}{200} = -0,0125 \text{ cm / cm}$$

7.2. Galerkin Metodu İle Sayısal Çözüm

Şekil 7.1 deki problemi Galerkin metoduyla çözelim. Bu metoddaki genel matrisler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{matrix} & i & j \\ [k^{(e)}] = & \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} & \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \end{matrix}, \quad \{f^{(e)}\} = \begin{matrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \\ i \\ j \end{matrix} \quad (7.6)$$

$$[k^{(e)}] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \{f^{(e)}\} = \frac{QL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (7.7)$$

Kullanılacak olan dataları tablo halinde verelim.

e	i	j	EI/L	QL/2
1	1	2	1,2 (10) ⁸	-10 ⁸
2	2	3	2,0 (10) ⁸	-10 ⁸
3	3	4	2,0 (10) ⁸	-10 ⁸
4	4	5	1,2 (10) ⁸	-10 ⁸

Bulunan bu değerler (7.7) eşitliğinde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{matrix} & 1 & 2 \\ [k^{(1)}] = 10^8 & \begin{bmatrix} 1,2 & -1,2 \\ -1,2 & 1,2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}, \quad \{f^{(1)}\} = -10^8 \begin{matrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & 2 & 3 \\ [k^{(2)}] = 10^8 & \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}, \quad \{f^{(2)}\} = -10^8 \begin{matrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & 3 & 4 \\ [k^{(3)}] = 10^8 & \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}, \quad \{f^{(3)}\} = -10^8 \begin{matrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & 4 & 5 \\ [k^{(4)}] = 10^8 & \begin{bmatrix} 1,2 & -1,2 \\ -1,2 & 1,2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} \end{matrix}, \quad \{f^{(4)}\} = -10^8 \begin{matrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

Genel toplam katılık matrisi K ve kuvvet matrisi F 'nin nasıl elde edildiği aşağıda gösterilmiştir. Birinci elemanın değerleri yazılırsa,

$$[K] = 10^8 \begin{bmatrix} 1,2 & -1,2 & 0 & 0 & 0 \\ -1,2 & 1,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{F\} = -10^8 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

olur. İkinci elemanın değerleri matrise eklenirse,

$$[K] = 10^8 \begin{bmatrix} 1,2 & -1,2 & 0 & 0 & 0 \\ -1,2 & 3,2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{F\} = -10^8 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

olur. Üçüncü elemanın değerleri eklendiğinde ,

$$[K] = 10^8 \begin{bmatrix} 1,2 & -1,2 & 0 & 0 & 0 \\ -1,2 & 3,2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{F\} = -10^8 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

bulunur. Son olarak dördüncü elemanın değerleri matrise eklenir ve denklem oluşturulur.

$$\begin{bmatrix} 1,2 & -1,2 & 0 & 0 & 0 \\ -1,2 & 3,2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3,2 & -1,2 \\ 0 & 0 & 0 & -1,2 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.8)$$

Matris işlemleri yapıldığında aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$R_2 = -1,2 Y_1 + 3,2 Y_2 - 2,0 Y_3 + 2 = 0$$

$$R_3 = -2,0 Y_2 + 4,0 Y_3 - 2,0 Y_4 + 2 = 0$$

$$R_4 = -2,0 Y_3 + 3,2 Y_4 - 1,2 Y_5 + 2 = 0$$

(7.9)

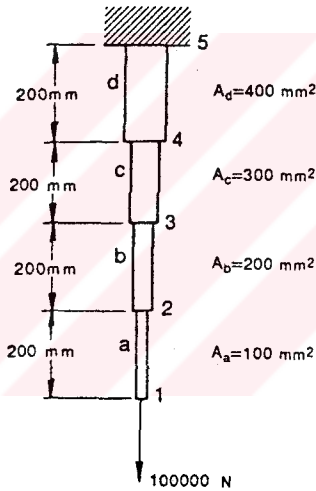
$Y_1 = Y_5 = 0$ sınır değerleri yerlerine konulursa

$$\begin{aligned}
R_2 &= 3,2 Y_2 - 2,0 Y_3 & = -2 \\
R_3 &= -2,0 Y_2 + 4,0 Y_3 - 2,0 Y_4 & = -2 \\
R_4 &= & -2,0 Y_3 + 3,2 Y_4 = -2
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Görüldüğü gibi (7.9) ve (7.10) eşitlikleri, bölüm 7.1 deki problem için bulunmuş olan (7.3) ve (7.4) eşitlikleri ile aynı olup elde edilecek sonuçlar da aynı olacaktır.

7.3. Gauss Eliminasyon Metodu İle Sayısal Çözüm

Gauss eliminasyon metodunu kullanarak başka bir problemin çözümünü yapalım. Ucuna 100.000 N luk bir kuvvet etki eden çelik malzemeden yapılmış farklı kalınlıklara sahip parçada oluşacak uzamaları bulalım. Şekil 7.2 de gerekli ölçüler verilmiştir.



Şekil 7.2

Genel y eksenine paralel sistemler için eleman katılık matrisleri Zahavi E. (1992) de şu şekilde verilmiştir.

$$\left[k^{(e)} \right] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.11}$$

(7.11) denklemini sistemdeki dört elemana teker teker uygulayalım.

$$\left[k^{(a)} \right] = \frac{100 \times 200.000}{200} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{N}{mm}$$

$$[k^{(b)}] = \frac{200 \times 200.000}{200} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$[k^{(c)}] = \frac{300 \times 200.000}{200} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$[k^{(d)}] = \frac{400 \times 200.000}{200} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 4 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Toplam katılık matrisini oluşturarak denklem sistemine geçelim.

$$10^5 \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100.000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_5 \end{Bmatrix}$$

R_5 5 noktasının tepki kuvvetidir. Parça bu noktadan bağlandığı için v_5 uzaması sıfır olur.

Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa ,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

bulunur. Şimdi Gauss eliminasyon metodunu uygulayarak matris sistemini çözelim .1.

matris satırını 2. Satıra ekleyelim.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2. satırı 3. Satıra ekleyelim.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Son olarak 3. Satırı 4. Satıra ekleyelim.

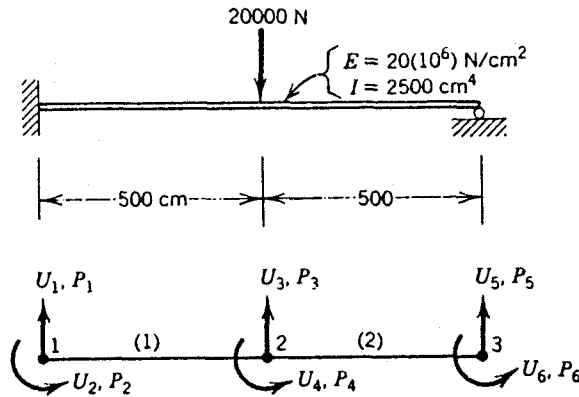
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Bulunan son matris sistemi çözüldürse şu sonuçlar elde edilir.

$$v_1 = 25 / 12 \text{ mm}, \quad v_2 = 13 / 12 \text{ mm}, \quad v_3 = 7 / 12 \text{ mm}, \quad v_4 = 1 / 4 \text{ mm}.$$

7.4. Direk Rijitlik (Katılık) Matrisi Yaklaşım Metodu İle Sayısal Çözüm

Bir tarafı ankastre olan, diğer tarafı ise oynak mesnetlenmiş çubuğun ortasına 20.000 N luk bir yük etki etmektedir. Bu yük altında çubukta oluşacak olan sehimi, kesme kuvvetini, eğilme momentini ve ilgili diyagramları bulmaya çalışalım. Şekil 7.3 de gerekli büyüklükler verilmiştir. Burada U cm. veya radyan olarak düğüm noktalarının yer değiştirmelerini, P ise bu noktalara etki eden kuvvet veya momentleri temsil etmektedir.



Şekil 7.3

Genel çubuk elemanlar için kullanılan Segerlind L. J. (1984) kitabında verilen katılık matrisi aşağıdaki gibidir.

$$[k^{(e)}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 2i-1 & 2i & 2j-1 & 2j \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2i-1 \\ 2i \\ 2j-1 \\ 2j \end{matrix} \quad (7.12)$$

Eleman düğüm noktalarına ait iç kuvvetler ise şu şekilde ifade edilebilir.

$$\{S^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} S_i^{(e)} \\ M_i^{(e)} \\ S_j^{(e)} \\ M_j^{(e)} \end{Bmatrix} = [k^{(e)}] \{U^{(e)}\} \quad (7.13)$$

(7.13) eşitliğindeki $S^{(e)}$; e elemanının i noktasındaki kesme kuvvetini, $M^{(e)}$; e elemanının j noktasındaki eğilme momentini ifade eder.

(7.12) matrisindeki değişkenleri hesaplayarak eleman katılık matrislerinde yerlerine yazalım.

$$EI/L^3 = 400 \text{ N/cm}$$

$$6L = 3000 \text{ cm}$$

$$4L^2 = 1.000.000 \text{ cm}^2$$

$$2L^2 = 500.000 \text{ cm}^2$$

$$[k^{(1)}] = 400 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 3000 & -12 & 3000 \\ 3000 & 1000000 & -3000 & 500000 \\ -12 & -3000 & 12 & -3000 \\ 3000 & 500000 & -3000 & 1000000 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$[k^{(2)}] = 400 \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 12 & 3000 & -12 & 3000 \\ 3000 & 1000000 & -3000 & 500000 \\ -12 & -3000 & 12 & -3000 \\ 3000 & 500000 & -3000 & 1000000 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Bu iki eleman katılık matrisi birleştirilir ve sınır şartları $U_1 = U_2 = U_5 = 0$ yerlerine yazılırsa aşağıdaki genel denklem sistemi elde edilir.

$$400 \begin{bmatrix} 24 & 0 & 3000 \\ 0 & 2000000 & 500000 \\ 3000 & 500000 & 1000000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sistemin çözümü aşağıdaki sonuçlara ulaşmamızı sağlar.

$$U_3 = -3,646 \text{ cm}, \quad U_4 = -0,003125 \text{ rad}, \quad \text{ve} \quad U_6 = 0,01250 \text{ rad}$$

Yer değiştirme vektörü ise şu şekildedir.

$$\{U\}^T = [0 \quad 0 \quad -3,646 \quad -0,003125 \quad 0 \quad 0,01250]$$

(7.13) eşitliği kullanılarak 1 nolu elemanın 1 ve 2 nolu düğüm noktalarının kesme kuvveti ve eğilme momenti değerleri bulunabilir.

$$\{U^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3,646 \\ -0,003125 \end{Bmatrix}$$

$$[S^{(1)}] = 400 \begin{bmatrix} 12 & 3000 & -12 & 3000 \\ 3000 & 1000000 & -3000 & 500000 \\ -12 & -3000 & 12 & -3000 \\ 3000 & 500000 & -3000 & 1000000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3,646 \\ -0,003125 \end{Bmatrix}$$

İşlemler yapılırsa

$$\{S^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} S_1^{(1)} \\ M_1^{(1)} \\ S_2^{(1)} \\ M_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13750N \\ 3750000N.cm \\ -13750N \\ 3125000N.cm \end{Bmatrix}$$

değerleri bulunur. Aynı işlem 2. Eleman için yapılırsa

$$\{U^{(2)}\}^T = [-3,646 \quad -0,003125 \quad 0 \quad 0,01250]$$

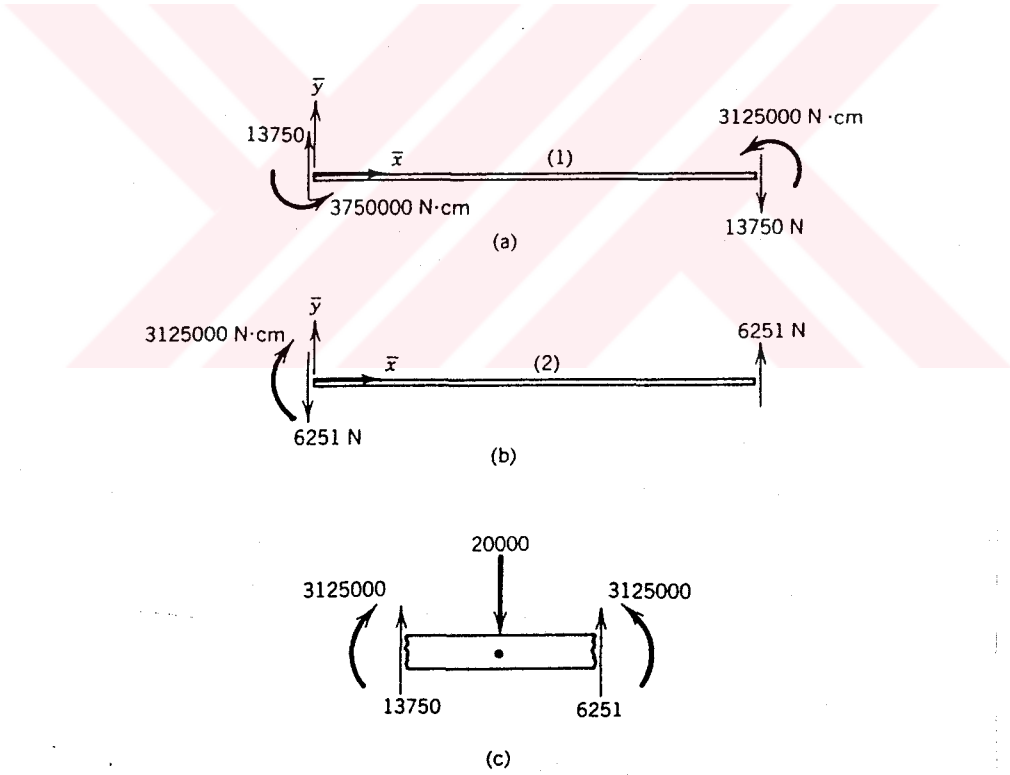
$$\{S^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} S_2^{(2)} \\ M_2^{(2)} \\ S_3^{(2)} \\ M_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6251\text{N} \\ -3125000\text{N}\cdot\text{cm} \\ 6251\text{N} \\ 0\text{N}\cdot\text{cm} \end{Bmatrix}$$

değerleri bulunur.

Şekil 7.4 a, b de 1 ve 2 nolu elemanlara etki eden kuvvet ve momentler görülmektedir. Şekil 7.4 c de ise iki eleman birleştirilerek tüm parçanın durumu gösterilmiştir. Burada statik dengeyi kontrol edebiliriz.

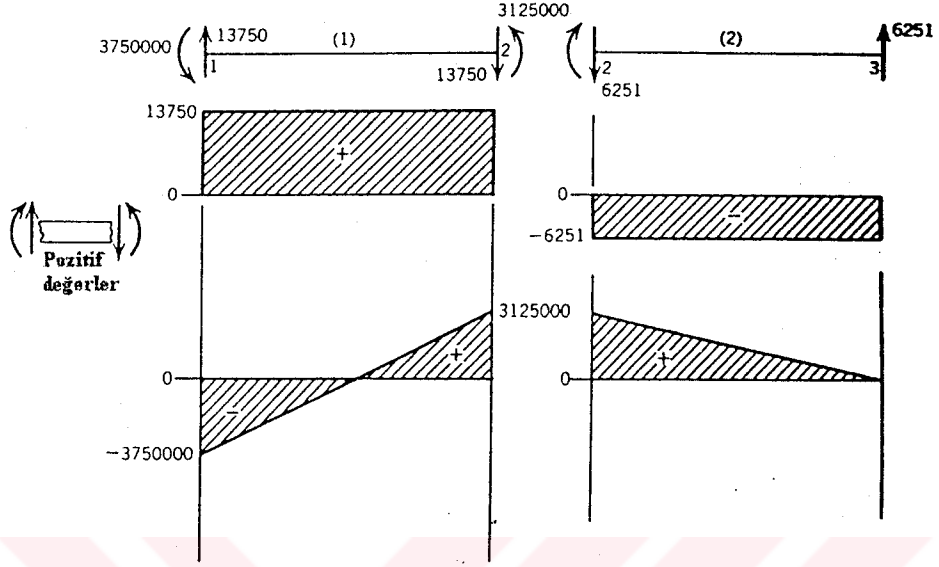
$$+\uparrow \sum F_y = 13750 + 6251 - 20.000 = 1 \approx 0$$

$$+\uparrow \sum M = 3125000 - 3125000 = 0$$



Şekil 7.4

Şekil 7.5 de ayrı ayrı elemanların kesme kuvveti ve moment diyagramları verilmiştir.



Şekil 7.5

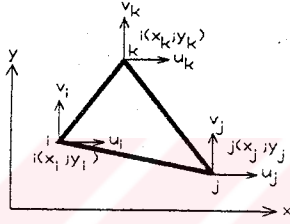
8 .DÜZLEM GERİLME ve DÜZLEM ŞEKİL DEĞİŞTİRME

8.1 İNCE LEVHA

Eğer kuvvet düzlem içinde etkiyorsa buna levha, düzleme dik etki ediyorsa bunada plak denir. İnce levha düzlem gerilme haline tipik bir örnektir.

$$\sigma_z = 0 \quad , \quad \varepsilon \neq 0$$

8.1.1 Deplasman Fonksiyonlarının Seçimi



Şekil 8.1

Düğüm deplasman parametreleri

$$\{d\}^T = [u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k] \quad (8.1)$$

Bunları koordinatlara bağlı olarak şöyle yazabiliriz.

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i & v_i &= \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j & v_j &= \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\ u_k &= \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k & v_k &= \alpha_4 + \alpha_5 x_k + \alpha_6 y_k \end{aligned} \quad (8.2)$$

Deplasman fonksiyonlarını bu şekilde seçelim. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ sabit sayılardır. Koordinatlara bağlı lineer bağıntılardır. Bu bağıntılar düğüm noktaları içinde sağlanmış olmalıdır. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ lar u_i, u_j, u_k ve v_i, v_j, v_k 'ya bağlı olarak bulunurlar. Cramer kuralıyla çözüm yapılırsa:

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_k & x_k & y_k \end{vmatrix}}{2\Delta} ; \quad \alpha_1 = \frac{\Delta_1}{2\Delta}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\Delta} [u_i(x_j y_k - x_k y_j) + u_j(x_k y_i - y_k x_i) + u_k(x_i y_j - x_j y_i)] \quad (8.3)$$

$$\alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_i & y_i \\ 1 & u_j & y_j \\ 1 & u_k & y_k \end{vmatrix}}{2\Delta} ; \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{2\Delta}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\Delta} [u_i(y_j - y_k) + u_j(y_k - y_i) + u_k(y_i - y_j)]$$

$$\alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_i & u_i \\ 1 & x_j & u_j \\ 1 & x_k & u_k \end{vmatrix}}{2\Delta} ; \quad \alpha_3 = \frac{\Delta_3}{2\Delta}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\Delta} [u_i(x_k - x_j) + u_j(x_i - x_k) + u_k(x_j - x_i)]$$

Aynı şekilde $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ bulunur. Kısaltmak amacıyla aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j & ; & & b_i &= y_j - y_k & ; & & c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_k y_i - y_k x_i & ; & & b_j &= y_k - y_i & ; & & c_j &= x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i & ; & & b_k &= y_i - y_j & ; & & c_k &= x_j - x_i \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$u = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_k + b_k x + c_k y)u_k] \quad (8.5)$$

$$v = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_k + b_k x + c_k y)v_k]$$

8.1.2 Şekil Fonksiyonları

$$N_i = \frac{1}{2\Delta}(a_i + b_i x + c_i y)$$

$$N_j = \frac{1}{2\Delta}(a_j + b_j x + c_j y) \quad (8.6)$$

$$N_k = \frac{1}{2\Delta}(a_k + b_k x + c_k y)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (8.7)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{d\} \text{ şeklinde kısaca gösterebiliriz. (5.11) denkleminde } \text{şekil}$$

değişiklikler şöyledir.

$$\{\varepsilon\} = [\Delta N] \{d\}$$

Burada ΔN şekil değiştirme matrisidir. Şekil fonksiyonlarının türevleri alınarak bulunur.

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (6.8)$$

Gerilmeler:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \{\varepsilon_0\} \right) + \sigma_0 \quad (8.9)$$

Burada $\{\varepsilon_0\}$ ve $\{\sigma_0\}$ sırasıyla başlangıç şekil değıştirmesi ve başlangıç gerilmesidir. Bunları ihmal ediyoruz. İzotrop bir malzemede, düzlem gerilme için $[D]$ matrisi şöyledir.

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

$$\{\sigma\} = \frac{1}{2\Delta} \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = \frac{1}{2\Delta} \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b_i & \nu c_i & b_j & \nu c_j & b_k & \nu c_k \\ \nu b_i & c_i & \nu b_j & c_j & \nu b_k & c_k \\ \frac{1-\nu}{2} c_i & \frac{1-\nu}{2} b_i & \frac{1-\nu}{2} c_j & \frac{1-\nu}{2} b_j & \frac{1-\nu}{2} c_k & \frac{1-\nu}{2} b_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix} \quad (8.11)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{2\Delta(1-\nu^2)} (b_i U_i + \nu c_i V_i + b_j U_j + \nu c_j V_j + b_k U_k + \nu c_k V_k)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{2\Delta(1-\nu^2)} (\nu b_i U_i + c_i V_i + \nu b_j U_j + c_j V_j + \nu b_k U_k + c_k V_k) \quad (8.12)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2\Delta(1-\nu^2)} \frac{1-\nu}{2} (c_i U_i + b_i V_i + c_j U_j + b_j V_j + c_k U_k + b_k V_k)$$

8.1.3 Eleman Rijitlik (Katılık) Matrisi:

$$[k_e] = \iint [\Delta N]^T [D] [\Delta N] t dx dy \quad (8.13)$$

Burada t levha kalınlığıdır.

$$[k_e] = \frac{1}{4\Delta^2} \frac{E}{(1-\nu^2)} \iint \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \\ b_j & 0 & c_j \\ 0 & c_j & b_j \\ b_k & 0 & c_k \\ 0 & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & \nu c_i & b_j & \nu c_j & b_k & \nu c_k \\ \nu b_i & c_i & \nu b_j & c_j & \nu b_k & c_k \\ \frac{1-\nu}{2} c_i & \frac{1-\nu}{2} b_i & \frac{1-\nu}{2} c_j & \frac{1-\nu}{2} b_j & \frac{1-\nu}{2} c_k & \frac{1-\nu}{2} b_k \end{bmatrix} t dx dy \quad (8.14)$$

8.1.4 Yük Matrisi

Yaylı yük halinde düğüm noktalarına etkileyen kuvvetler x ve y eksenleri doğrultusunda aşağıdaki şekildedir.

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$

Elemanın her düğüm noktasına kuvvetlerin dağılımı şöyledir.

$$[q_e] = -\int [N]^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} dx dy \quad (8.15)$$

Elemanın (i) düğüm noktasındaki değer ise aşağıdaki şekildedir.

$$\{q_i\} = -\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \int N_i dx dy \quad (8.16)$$

(8.6) denklemini (8.16) da yerlerine koyalım.

$$\int x dx dy = \int y dx dy = 0 \quad ; \quad \int dx dy = \Delta$$

$$\{q_i\} = -\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \int a_i \frac{1}{2\Delta} dx dy = -\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \frac{a_i}{2} \quad (8.17)$$

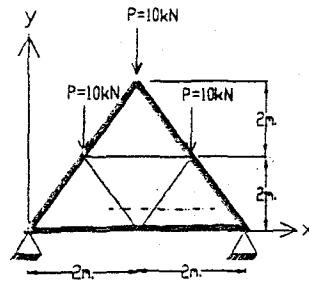
Eğer koordinatlar elemanın merkezinden alınırsa

$$x_i + x_j + x_k = y_i + y_j + y_k = 0 \quad \text{ve} \quad a_i = a_j = a_k = \frac{2\Delta}{3} \quad (8.18)$$

olur. (8.18) denklemini (8.17) de yerlerine koyalım.

$$\{q_i\} = \{q_j\} = \{q_k\} = -\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \frac{\Delta}{3} \quad (8.19)$$

8.1.5. Sayısal Örnek



Şekil 8.2

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2 \times 2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \{d\}$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$$\{\sigma\} = \frac{E}{4(1-0,2^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-0,2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \{d\}$$

$$\{\sigma\} = \frac{E}{4(1-0,2^2)} \begin{bmatrix} -2 & -0,2 & 2 & -0,2 & 0 & 0,4 \\ -0,4 & -1 & 0,4 & -1 & 0 & 2 \\ -0,4 & -0,8 & -0,4 & 0,8 & 0,8 & 0 \end{bmatrix} \{d\}$$

Elemen rijitlik matrisi

$$[k_e] = \iint [\Delta N]^T [D] [\Delta N] t \, dx dy$$

$$[k_{el}] = \frac{Et}{16(1-0,2^2)} \iint \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -0,2 & 2 & -0,2 & 0 & 0,4 \\ -0,4 & -1 & 0,4 & -1 & 0 & 2 \\ -0,4 & -0,8 & -0,4 & 0,8 & 0,8 & 0 \end{bmatrix} dx dy$$

$$\Delta_1 = \int dx dy = 2 \text{ dir.}$$

Tip 1' in elemen rijitlik matrisi :

$$[k_{el}] = \frac{Et}{8(1-0,2^2)} \begin{bmatrix} 4,4 & 1,2 & -3,6 & -0,4 & -0,8 & -0,8 \\ 1,2 & 2,6 & 0,4 & -0,6 & -1,6 & -2,0 \\ -3,6 & 0,4 & 4,4 & -1,2 & -0,8 & 0,8 \\ -0,4 & -0,6 & -1,2 & 2,6 & 1,6 & -2,0 \\ -0,8 & -1,6 & -0,8 & 1,6 & 1,6 & 0 \\ -0,8 & -2,0 & 0,8 & -2,0 & 0 & 4,0 \end{bmatrix}$$

2. Eleman Tipi:

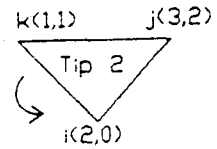
$$a_i = 3x_2 - 1x_2 = 4 \quad ; \quad a_j = 1x_0 - 2x_2 = -4 \quad ; \quad a_k = 2x_2 - 3x_0 = 4$$

$$b_i = 2 - 2 = 0 \quad ; \quad b_j = 2 - 0 = 2 \quad ; \quad b_k = 0 - 2 = -2$$

$$c_i = 1 - 3 = -2 \quad ; \quad c_j = 2 - 1 = 1 \quad ; \quad c_k = 3 - 2 = 1$$

$$\Delta = \frac{2 \times 2}{2} = 2 \text{ m}^2$$

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{2 \times 2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \{d\}$$



Şekil 8.5

$$\{\sigma\} = \frac{E}{4(1-0,2^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-0,2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \{d\}$$

$$\{\sigma\} = \frac{E}{4(1-0,2^2)} \begin{bmatrix} 0 & -0,4 & 2 & 0,2 & -2 & 0,2 \\ 0 & -2 & 0,4 & 1 & -0,4 & 1 \\ -0,8 & 0 & 0,4 & 0,8 & 0,4 & -0,8 \end{bmatrix} \{d\}$$

$$[k_{e2}] = \frac{Et}{16(1-0,2^2)} \iint \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0,4 & 2 & 0,2 & -2 & 0,2 \\ 0 & -2 & 0,4 & 1 & -0,4 & 1 \\ -0,8 & 0 & 0,4 & 0,8 & 0,4 & -0,8 \end{bmatrix} dx dy$$

$$\Delta_2 = \iint dx dy = 2$$

$$[k_{e2}] = \frac{Et}{8(1-0,2^2)} \begin{bmatrix} 1,6 & 0 & -0,8 & -1,6 & -0,8 & 1,6 \\ 0 & 4 & -0,8 & -2 & 0,8 & -2 \\ -0,8 & -0,8 & 4,4 & 1,2 & -3,6 & -0,4 \\ -1,6 & -2 & 1,2 & 2,6 & 0,4 & -0,6 \\ -0,8 & 0,8 & -3,6 & 0,4 & 4,4 & -1,2 \\ 1,6 & -2 & -0,4 & -0,6 & -1,2 & 2,6 \end{bmatrix}$$

Tip 2 nin eleman rijitlik matrisi $[k_{e2}]$ yukarıda verilmiştir.

Yük matrisi:

10 kN' luk tekil yük (4) , (5) ve (6) düğüm noktalarına etkimektedir.

Sınır Şartları:

Sistemin (1) ve (3) düğüm noktası sabit mesnet olduğundan $D_1=D_2=D_5=D_6=0$ dır.

Sisteme Geçiş:

Biriktirme metodu ile sisteme geçilmiştir.

Eleman No	Elemanda Serbestlik Derecesi	Sistemde Serbestlik Derecesi
1	d_1	D_1
	d_2	D_2
	d_3	D_3
	d_4	D_4
	d_5	D_5
	d_6	D_6
2	d_1	D_1
	d_2	D_2
	d_3	D_3
	d_4	D_4
	d_5	D_5
	d_6	D_6
3	d_1	D_1
	d_2	D_2
	d_3	D_3
	d_4	D_4
	d_5	D_5
	d_6	D_6
4	d_1	D_1
	d_2	D_2
	d_3	D_3
	d_4	D_4
	d_5	D_5
	d_6	D_6

(1) , (3) ve (4) nolu eleman 1. tip ; 2 nolu eleman 2. tip elemandır.

$$K_{4,4} = k_{4,4}^{(1)} + k_{2,2}^{(2)} + k_{2,2}^{(3)}$$

$$K_{6,6} = k_{4,4}^{(3)}$$

$$K_{3,9} = k_{1,3}^{(2)} + k_{1,5}^{(3)}$$

$$K_{3,10} = k_{1,4}^{(2)} + k_{1,6}^{(3)}$$

$$K_{8,11} = k_{2,5}^{(4)}$$

$$K_{7,8} = k_{5,6}^{(1)} + k_{5,6}^{(2)} + k_{1,2}^{(4)}$$

$$K_{5,8} = 0$$

$$K_{1,7} = k_{1,5}^{(1)}$$

Tablo olarakta gösterilebilir.

Eleman Serbestlik Derecesi	Sistem Serbestlik Derecesi			
	1	2	3	4
d ₁	D ₁	D ₃	D ₃	D ₇
d ₂	D ₂	D ₄	D ₄	D ₈
d ₃	D ₃	D ₉	D ₅	D ₉
d ₄	D ₄	D ₁₀	D ₆	D ₁₀
d ₅	D ₇	D ₇	D ₉	D ₁₁
d ₆	D ₈	D ₈	D ₁₀	D ₁₂

Sistem rijitlik matrisini $[K]$ ve sistem yük matrisini $[Q]$ ile gösterelim. $\{D_s\}$ ise sistemin deplasman parametresidir.

$$[K]\{D_s\} = [Q]$$

$$\begin{array}{c} \text{Et} \\ 8 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 - 0,2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 4,4 & 1,2 & -3,6 & -0,4 & 0 & 0 & -0,8 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2,6 & 0,4 & -0,6 & 0 & 0 & -1,6 & -2,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 10,4 & 0 & -3,6 & -0,4 & -1,6 & -2,4 & -1,6 & -2,4 & 0 & 0 \\ & & & 9,2 & 0,4 & -0,6 & 2,4 & -4,0 & -2,4 & -4,0 & 0 & 0 \\ & & & & 4,4 & -1,2 & 0 & 0 & -0,8 & 0,8 & 0 & 0 \\ & & & & & 2,6 & 0 & 0 & 1,6 & -2,0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 10,4 & 0 & -7,2 & 0 & -0,8 & -0,8 \\ & & & & & & & 9,2 & 0 & -1,2 & -1,6 & -2,0 \\ & & & & & & & & 10,4 & 0 & -0,8 & 0,8 \\ & & & & & & & & & 9,2 & 1,6 & -2,0 \\ & & & & & & & & & & 1,6 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 4,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Yük vektörü deplasmanlarla ters işaretli olduğu için negatif işareti kullanılır. Çözüm yapılırken, sınır şartlarından dolayı sıfır olan deplasmanların bulunduğu satır ve sütun silinerek matris çözülür. Matrislerimiz 12x12 dir. Bilinen deplasman sayısı 4, kalan matris 8x8 dir.

Çözüm sonuçları :

Sınır şartından ; $D_1 = D_2 = D_5 = D_6 = 0$

Simetri şartından ; $D_3 = D_{11} = 0$; $D_7 = -D_9$; $D_8 = D_{10}$

$$D_3 = 0 \qquad D_9 = -0,37 \frac{(1 - 0,2^2)8}{Et}$$

$$D_4 = -5,52 \frac{(1 - 0,2^2)8}{Et} \qquad D_{10} = -6,13 \frac{(1 - 0,2^2)8}{Et}$$

$$D_7 = -0,37 \frac{(1 - 0,2^2)8}{Et} \qquad D_{11} = 0$$

$$D_8 = -6,13 \frac{(1 - 0,2^2)8}{Et} \qquad D_{12} = -8,49 \frac{(1 - 0,2^2)8}{Et}$$

Gerilmelerin Hesabı

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{1.\text{eleman}} = \frac{2}{t} \begin{bmatrix} -2 & -0,2 & 2 & -0,2 & 0 & 0,4 \\ -0,4 & -1 & 0,4 & -1 & 0 & 2 \\ -0,4 & -0,8 & -0,4 & 0,8 & 0,8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5,52 \\ 0,37 \\ -6,13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_1 = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} -2,696 \\ -13,480 \\ -8,240 \end{bmatrix} \text{ kN / m}^2$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{2.\text{eleman}} = \frac{2}{t} \begin{bmatrix} 0 & -0,4 & 2 & 0,2 & -2 & 0,2 \\ 0 & -2 & 0,4 & 1 & -0,4 & 1 \\ -0,8 & 0 & 0,4 & 0,8 & 0,4 & -0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -5,52 \\ -0,37 \\ -6,13 \\ 0,37 \\ -6,13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_2 = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} -3,448 \\ -3,032 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN / m}^2$$

3. eleman 1. elemanla aynıdır.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{4.\text{eleman}} = \frac{2}{t} \begin{bmatrix} -2 & -0,2 & 2 & -0,2 & 0 & 0,4 \\ -0,4 & -1 & 0,4 & -1 & 0 & 2 \\ -0,4 & -0,8 & -0,4 & 0,8 & 0,8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,37 \\ -6,13 \\ -0,37 \\ -6,13 \\ 0 \\ -8,49 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_4 = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} -4,848 \\ -10,032 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN / m}^2$$

8.2. Düzlem Şekil Değişirme

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (8.20)$$

Malzeme izotropsa, düzlem şekil değiştirme halinde $[D]$ matrisi yukarıda verilmiştir.

$$\epsilon_z = 0 \quad , \quad \sigma_z \neq 0$$

Düzlem şekil değiştirme haline, uzun silindir tipik bir örnektir.



9. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN BİLGİSAYARA UYGULANMASI

9.1 Kullanılmakta Olan Bilgisayar Programlarının Tanıtımı

Bu bölümde mühendislik problemlerinin çözümü için geliştirilmiş ve sonlu elemanlar yöntemi kullanarak analiz yapan programlar hakkında özet bilgi verilecektir. Açıklanacak olan bu 14 programın isimleri aşağıda sıralanmıştır.

- Abaqus
- Adina
- Ansys
- Aska
- Eal
- Fenris
- Finite / gp
- Larstran '80
- Marc
- Pafec
- Samcef
- Sesam '80
- Smart
- Tujap

9.1.1. ABAQUS Programı

1. Tanımlayıcı Program Başlığı : Genel amaçlı sonlu elemanlar sistemi
2. Program Geliştiricisi : Hibbitt, Karlsson and Sorensen , Inc
3. Programın İlk Sürüm Tarihi : 1978
4. Genel Bilgiler : Bu program üretimde kullanılabilecek birçok uygulamanın dizaynı için geliştirilmiş olan genel amaçlı sonlu elemanlar sistemidir. Geniş bir eleman kütüphanesine sahip olması, nonlinear uygulamaların yapılabilmesi, bu uygulamalar için otomatik zaman basamaklayıcının bulunması, kullanımının kolay olması, iyi grafik çıktıların alınabilmesi ve okunabilir anahtar kelimelerle giriş yapılabilmesi gibi avantajlara sahip bir programdır.
5. Program Kapasitesi : Program birçok alanda üretim aracı olarak kullanılacak şekilde dizayn edilmiştir. En önemli özelliği pratikte güvenilir olmasıdır. Birçok programın nonlinear analiz yöntemini kullanmasından bu yana , Abaqus programına minimum kullanıcı rehberliğine ihtiyaç duyan, değişken problem parametreleri için genişletilmiş nonlinear özelliklere sahip eleman kütüphanesi şeklinde bir alt birim ilave edilmiştir. Program ile, kıydan denize uzanan ve dalga yüklerine maruz kalan liman şeklindeki

yapıların modelleri, beton modeller, elastomer modeller, karışık malzemelerden oluşturulmuş modeller yapılabilmektedir.

7. Kullanıcı Ortamı (interface) ve Modelleme Kapasitesi : Programın kullanıcı ortamı dört prensibe dayanır. Kolay veri girişi, dikkatli dökümanlaştırma, genişletilmiş çizim kapasitesi ve otomatik zaman basamaklayıcı ana prensiplerdir. Veri girişi anahtar kelimelerle veya “ sets” adlı kısım kullanılarak yapılır. Anahtar kelimeler blok halinde dataları tanımlar, kartlar ise parametreleri içerir. Set kısmı büyük modellerin data girişinde kullanılır. Ayrıca malzeme özellikleri, yükler, sınır şartları ve çıktı şekilleriyle ilgili komutlar da buradan verilebilir.

8. Önemli Özellikler ve Limitler : Program ileri düzeydeki uygulamaları çözebilecek şekilde dizayn edilmiştir. Özellikle nonlinear analiz için kullanılır. Anlatılan özelliklerinden dolayı en kolay öğrenilen ve kullanılan geniş kapsamlı programlardan biri olma niteliğini taşımakta ve linear uygulamalarda en etkili matematiksel çözümleri veren bir sistem olduğu görülmektedir.

9. Program Dili : FORTRAN 77.

10. Program Boyu : 140.000 satır.

9.1.2. ADINA Programı

1. Tanımlayıcı Program Başlığı : Otomatik dinamik artışı nonlinear analiz (Automatic dynamic incremental nonlinear analiz)

2. Program Geliştiricisi : ADINA Engineering , Inc.

3. İlk Sürüm Tarihi : 1975

4. Genel bilgiler : Adina yapısal problemlerde, ısı transferi ve yüzey problemlerinde etkili bir sonlu elemanlar programıdır ve kompleks endüstriyel problemlerin lineer ve nonlinear uygulamalarında kullanılmak üzere geliştirilmiştir.

Adina sistemi birçok alt programdan oluşur. ADINA deformasyon ve gerilme analizinde, ADINAT ısı transferi ve yüzey problemlerinde, ADINA-IN giriş ve çizim komutlarını vermede, ADINA-PLOT giriş ve çıkış datalarının grafiksel ve alfanümerik karakterlerle gösterimini sağlar.

Programın ana teması, yapısal ve ısı transfer sistemlerinin modellenmesinde maksimum kapasiteyi az fakat etkili sonlu elemanlarla, genişletilmiş malzeme ve model kütüphanesiyle ve etkili sayısal kontrollerle gerçekleştirmektir.

Adina sistemi genel üç boyutlu analiz için kullanılabilir. İnşaat, makina, uçak, nükleer enerji, gemi, otomobil, jeofizik ve üretim teknolojilerinde çözümler üretebilir.

5. Önemli Özellikler : Bu program etkili ve verimli lineer ve nonlineer analiz için yapılmıştır. Teorik kullanım için açıklamalar içeren iyi hazırlanmış dökümanlar mevcuttur. Kullanıcı program akışını kolay anlayabilmekte ve programı özel isteklerine adapte edebilmektedir.

6. Program Dili : FORTRAN.

7. Program Boyu : 150.000 satır.

9.1.3. ANSYS Programı

1. Tanımlayıcı Program Başlığı : Yapısal, ısı transferi ve statik elektromanyetik analizler için genel amaçlı sonlu elemanlar programı.

2. Program Geliştiricisi : Swanson Analysis Systems, Inc.

3. İl Sürüm Tarihi : 1970

4. Genel Bilgiler : Ansys dizayn mühendisleri için yapısal, ısı, akışkan, elektrik, statik elektromanyetik analiz yapabilen geniş ölçekli ve genel amaçlı bir bilgisayar programıdır. 1970 yılından beri nükleer, havacılık, taşımacılık, ilaç, çelik, demiryolu, ambalaj ve inşaat endüstrilerinde kullanılmaktadır.

5. Program kapasitesi : Program iki ve üç boyutlu sistemlere uygulanan statik, dinamik, termal, lineer ve nonlineer analiz için kullanılabilir. Ansys, ısıdan doğan kuvvet analizlerinde termal çıktı ile yapısal girdiyi beraber idare edebilmektedir. Lineer ve nonlineer yapılarda detaylı bölgesel alt modelleme yapabilir. Ön ve üst işlemcilerle sahip bu program geniş bir grafik görüntüleme özelliğine sahiptir.

6. Kullanıcı Ortamı ve Modelleme Kapasitesi : Model ve yük oluşturma işlemleri ile onay mekanizması Ansys içinde mevcuttur. Parçayı bölümlenmek (mesh) ve yüklemek otomatik

olarak gerçekleşir. Programın her komut için on-line yardım bilgileri (help menüsü) mevcuttur. Üst işlemci gelişmiş grafik opsiyonuna sahiptir. Program aynı zamanda CAD sistemleri ile de irtibatlandırılabilir.

7. Önemli Özellikleri : Program 3000 serbestlik derecesine kadar çözüm olanağı sunar. Tek ve çok basamaklı alt yapılandırma oluşturulduğunda modeldeki serbestlik derecesinin limiti sadece bilgisayar kapasitesine ve kullanılacak zamana bağlıdır.

8. Program Dili : FORTRAN 77.

9. Program Boyu : 150.000 satır.

9.1.4. ASKA Programı

1. Tanımlayıcı Program Başlığı : Genel amaçlı sonlu elemanlar sistemi

2. Program Geliştiricisi : Insitut für Statik und Dynamik, University of Stuttgart .

3. İlk Sürüm Tarihi : 1969.

4. Genel Bilgiler : Aska denenmiş genel amaçlı sonlu elemanlar programıdır. Yüksek kapasiteli problemlerin çözümünü gerçekleştirir ve oldukça güvenilirdir.

5. Program Kapasitesi :

- Ayrıntılı alt yapılandırma analizi
- Programın kendi data tabanlı yönetime sahip olması
- Kapsamlı eleman kütüphanesi
- Nonlineer malzeme davranışları ve zamana bağlı tanımlanan yerdeğiştirme ve kuvvet girdileri için tanımlanan kullanıcı kaynaklı alt yönetim

6. Kullanıcı Ortamı ve Modelleme Kapasitesi : Ön ve üst işlemcilerin bağlantısını bu ortam sağlar. Sınırlanmamış veri girişi, tüm iç dataların, dış dosyaların ve özel grafiklerin bağlantı ortamını oluşturur.

7. Önemli Özellikler ve Limit : Her alt yapılandırma için 20.000 bilinmeyen, 2000 yükleme durumu.

8. Program Dili : Standart FORTRAN IV

9. Program Boyu : 600.000 satır.

9.1.5. EAL Programı :

1. Program Başlığı : Mühendislik analiz dili (Engineering analysis language)
2. Program Geliştiricisi : Engineering Information Systems, Inc. (EISI)
3. İlk Sürüm Tarihi : 1976
4. Genel Bilgiler : Eal yapısal ve termal sonlu elemanlar analizi ve dizaynı için kullanılan kapsamlı ve geniş ölçekli bir programdır. Geliştirilmiş dil şekli ve genel amaçlı data tabanlı yönetim kapasitesi kullanıcıya komplike ve alışılmamış problemlerin büyük esneklik ve kolaylıkla çözülmesi için fırsat verir. Hassas inceleme ve analiz kapasitesine sahiptir.
5. Program Kapasitesi : Eal kullanılarak yapılabilen analiz tipleri aşağıda verilmiştir.
 - Lineer ve nonlinear statik analiz.
 - Statik denk ortamlarda burulma ve eğilme analizi.
 - Denk ortamlarda titreşim analizi.
 - Direk kompleks frekans cevabı.
 - Akışkan ile yapısal modellerin karşılıklı dinamik etkileşimi.
 - Serbest titreşim cevabı.
 - Çok basamaklı alt yapılandırma ve statik, eğilme, burulma ve dinamik analiz için Rayleigh - Ritz analizi.
 - Lineer ve nonlinear geçici ve sabit termal analiz.
 - Akışkan analizi.
6. Kullanıcı Ortamı ve Modelleme Kapasitesi : Eal birbiriyle irtibatlı olan bütün işlemcileri bir veri tabanı üzerine yerleştirmiştir. İşlemciler çalıştığında ilgili kaynak bilgileri veri tabanından çıkarılır ve hesaplanmış sonuçlar veri tabanında saklanır. Analizi tekrar başlatmak tamamen otomatiktir. Kullanıcı sadece veri tabanı içeren dosyayı yüklemekte ve tekrar çalıştırmaktadır.

Geliştirilmiş grafik ve rapor sistemleriyle değişik formda çıktılar kolaylıkla alınabilmektedir.
7. Önemli Özellikler : Eal "runstreams" adı verilen komut ve datalardan oluşan ve analizin bütün yönlerini kontrol edebilen bir kolaylığı kullanıcılarına sağlamaktadır. Bu

sistem kullanıcıya koplike ve alışılmamış problemlerin çözümünde büyük esneklik sağlar. Program ayrıca tam otomatik kontrol sistemi geliştirmiştir ve yeni özelliklerin programa ve bilgisayara yüklenmesine imkan verilmiştir.

8. Program Dili : ANSI FORTRAN 66 ve assembler

9. Program Boyu : 150.000 satır.

9.1.6. FENRIS Programı

1. Tanımlayıcı Program Başlığı : Genel amaçlı yapısal nonlinear analiz sistemi (Finite element nonlinear integrated system)

2. Program Geliştiricisi : Pal G. Bergan and project group from the Norwegian Institute of Technology (NTH)

3. İlk Sürüm Tarihi : 1982.

4. Genel Bilgiler . Fenris, ana uygulama alanı deniz ve liman endüstrisi olan genel amaçlı nonlinear sonlu elemanlar programıdır.

5. Program Kapasitesi : Fenris, "satellites" adı verilen birçok alt uygulama programına bölünmüştür. Her bir satellite ayrı elemanlar ve özellikler içerir.

- Satellite 1, üç boyutlu yapılar, kablo, çubuk, 3 ve 4 noktalı membran (zar), yay ve dönebilen bağlantı elemanları için kullanılır.
- Satellite 2, asimetrik katılar için kullanılır.
- Satellite 3, katı levha ve kabuklar için kullanılır.
- Satellite 4, üç boyutlu katı yapılar için kullanılır.

Program kullandığı referans koordinat sistemi sayesinde büyük yer değiştirmelere izin verir. Esnek ve etkili bir yol olan zamana bağımlı yük uygulamaları program ile verilebilir. Otomatik dalga yükü üreten modül ve hidrostatik modül beraber kullanılarak çekme ve sürüklenme yükleri hesaplanabilir. Nonlinear statik ve dinamik analiz yapılabilir. Birçok değişik malzeme özelliklerini içeren bir kütüphaneye sahip programda lineer elastik, hiperelastik ve elastoplastik malzemelerle analizler gerçekleştirilebilir.

6. Önemli Özellikler ve Limit : Programın önemli özellikleri şöyle sıralanabilir.

- Büyük dönmelere izin veren ve idare edebilen metod
- Kabuk ve levha elemanların bulunması
- Dalga yükü modülü ve hidrostatik kararlılık hesabı
- Sesam'80 programı ile beraber çalışabilme imkanı
- Otomatik yük ve zaman basamaklarında artım yapabilme

Fenris programı, problemlerin ölçüleri için herhangi bir sınır koymaz. Çalışma alanındaki dinamik yüklemelerde sadece bilgisayarın kapasitesi limiti belirler.

7. Program Dili : FORTRAN 77

8. Program Boyu : 160.000 satır.

9.1.7. FINITE / GP Programı

1. Tanımlayıcı Program Başlığı : Kişisel bilgisayarlar için sonlu elemanlar analizi

2. Program Geliştiricisi : J. E. Akin, Rice University

3. İlk Sürüm Tarihi : 1984

4. Genel Bilgiler: Program lineer gerilme ve termal analiz için dizayn edilmiş PC analiz sistemidir. Aktif grafik ve kullanım kolaylığı sağlayan sınırlandırılmamış alan girdileri içermektedir. Kapasitesi PC'nin hafızası ile sınırlıdır.

5. Program Kapasitesi : Programın otomatik bölme üreticisi, aktif grafikleri, potansiyel akış, ısı transferi ve gerilme analizi yapabilmesi gibi özellikleri vardır. Levha sehimleri, termal gerilme analizi, iki boyutlu asimetrik, küresel izoparametrik elemanlar ve üç boyutlu elemanlar kullanabilme, esnek sınır şartlarını uygulayabilme gibi özelliklere de sahiptir.

6. Kullanıcı Ortamı ve Modelleme Kapasitesi : Bölme üreticisi, bölmelemenin aktif grafiklerle gösterimi, eleman numaraları, nokta numaraları, malzeme kodları, sınır şartları vb. özelliklere sahiptir. Aktif pencereler, büyütme ve döndürme özellikleri de bulunmaktadır. İleri işlemci aktif deforme olmuş kafes şekillerini, kenarları, yüzey sıcaklıklarını, termal yayılmayı ve Von-Mises gerilmesini kullanarak işlem yapabilmektedir.

7. Önemli Özellikler ve Limit : Program PC versiyonu olduğu için, lineer analiz biraz sınırlanmıştır. Analizlerde lineer ve quadratik izoparametrik elemanlar kullanılır. Problem ölçüsü PC hafızasıyla sınırlanmıştır. 512 K'lık bir ön hafızaya sahip bir bilgisayar 2.000 serbestlik derecesine kadar çözüm yapar.

8. Program Dili : FORTRAN

9. Program Boyu : 14.000 satır.

9.1.8. LARSTRAN '80 Programı

1. Tanımlayıcı Program Başlığı : Large Strain Analysis .

2. Program Geliştiricisi : Institut für Statik und Dynamik der Luft, University of Stuttgart

3. İlk Sürüm Tarihi : 1981

4. Genel Bilgiler : Program üç değişik kullanıcı grubu için hazırlanmıştır. Endüstride çalışan mühendisler, kendi formül ve algoritmalarını geliştiren mühendisler, yeni metodlar geliştiren ve test eden bilim adamları. Sistem değişik seviyelere girme hakkını kullanıcıya vermektedir. Programın bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

- Standart hesaplama kütüphanesi
- Sonlu elemanlar kütüphanesi
- Ön ve üst işlemciler
- Standart dış ana hipermatrix işlemleri (out of core)
- Veri tabanı yönetimi
- Standart iç ana matrix işlemleri (in core)

5. Program Kapasitesi : Larstran '80, iki ve üç boyutlu yapıların nonlinear analizi için kullanılan genel amaçlı bir sonlu elemanlar programıdır. Statik ve dinamik problemler, eğilme, frekans ve viskoz akış problemleri bu programla çözülebilir, geometrik ve malzeme bazlı nonlinear uygulamaların çözümü yapılabilir. Simetrik ve simetrik olmayan matrisler oluşturulabilir ve otomatik kesme ve yeniden başlama özellikleri programca desteklenir. Genişletilmiş teşhis sistemi ve veri tabanı yönetim sistemi program tarafından gerçekleştirilmektedir.

6. Kullanıcı Ortamı ve Modelleme Kapasitesi : Kullanıcı, özellikle otomatik data üreticisi kullanarak, anahtar kelimelerle program sistemini oluşturur. Kontrol programının kurulması kullanıcı monitörü vasıtasıyla girdi ve çıktıların iletimi sonucu olur. Standartlaştırılmış kullanıcı komutları ile birçok konu hakkında (örn: malzeme bilgileri vs.) program içinden bilgi alınabilir. Ayrıca iç grafik sistemi ile birçok data kontrol edilebilir ve sonuçlar grafik olarak görülebilir. Ayrıca 80 den fazla eleman içeren bir kütüphane de mevcuttur.

7. Program Dili : FORTRAN IV, FORTRAN 77

8. Program Boyu : 200.000 satır.

9.1.9. MARC Programı

1. Tanımlayıcı Program Başlığı : Genel amaçlı sonlu elemanlar programı

2. Program Geliştiricisi : MARC Analysis Research Corporation

3. İlk Sürüm Tarihi : 1970

4. Genel Bilgiler : Marc, nonlinear problemler için genel amaçlı sonlu elemanlar programıdır. Dünyanın birçok ülkesinde kullanılmaktadır. Avrupa, Amerika ve Japonyada dağıtım ofisleri vardır. Program havacılık, otomotiv, imalat, enerji ve konstrüksiyon endüstrilerinde kullanılır. Basit veri girişi, otomatik yükleme ve zaman artım özelliği kullanım kolaylıklarındandır. Çıktılar kullanıcı kontrolü ile değişik cihazlardan alınır.

5. Program Kapasitesi : Program elastoplastik, viskoelastik, anizotropik ve sıkıştırılmayan malzemelerle ilgili problemleri çözebilecek kapasitededir. Şekil değiştirme ve dönmeler küçük yüklere veya deplasman artımlarına sınırlama getirilmeden ele alınır. Yapısal prosedür nonlinear statik, dinamik ve karışık problemlerin basamaklı yük kontrolü veya adaptasyon zamanı ile çözümünü mümkün kılar. Kırılma, noktasal dinamik analiz, ileri eğilme analizi, bunların birleşimi ve ileri yapılandırma program ile gerçekleştirilebilmektedir. Zengin eleman kütüphanesi çok çeşitli izoparametrik ve hibrit eleman cinslerini içerir.

Programın nonlinear çözüm algoritması nonlinear problemlerin çözümü için çok etkilidir. Tutarlı veri giriş stili, nokta ve elemanlara isim verme özelliğiyle birlikte, birçok

mantıksal işlemleri yapmayı gerçekleştirir. Programla; düşük gerilmeler, kırılma davranışları asimetrik katıların ve kabukların keyfi yüklemeleri, otomatik yük basamaklandırması, titreşim cevabı analizi ve hidrodinamik yataklama analizi yapılabilmektedir.

6. Kullanıcı Ortamı ve Modelleme Kapasitesi : Marc programı, bölme üreticisine ve ön ile ileri işlemciler için program dahilinde grafik yapılandırma imkanına sahiptir. Marc içinde ön ve ileri işlemcilerle birlikte çalışabilen "mentat" adlı program ise, model yapılandırması, yükleme, malzeme seçimi ve sınır şartlarının verilmesinde kullanılır. Mentat, Marc girdi ve çıktı dosyalarını okuyabilir; sonuç dosyalarının, deforme olmuş parça şekillerinin, istenen değişkenlere göre grafik çizimlerinin yapılmasını destekler.

7. Önemli Özellikler ve Limitler : Metallerin şekillendirildiği imalat yöntemlerinde, birçok problemlerle karşı karşıya kalınır. Sonlu elemanlar yönteminde plastisitede kullanılan Lagrange formülleri ile problemlerin çözümleri gerçekleştirilir. Modeli tekrar bölümlenebilir özelliği ile fazla çarpılmış (deforme olmuş) alanlar, tekrar elemanlarına ayrılabilir. Eğilmiş, bükülmüş rijit sınırlı keyfi şekiller programla modellenilebilir.

Çözüm yöntemi olarak Newton - Rapson, değiştirilmiş Newton - Rapson ve gerilme düzeltme algoritmaları kullanılır.

8. Program Dili : FORTRAN IV, FORTRAN 66 ve FORTRAN 77 ile uyumlu

9. Program Boyu : 100.000 satır.

9.1.10. PAFEC Programı

1. Tanımlayıcı Program Başlığı : Otomatik sonlu elemanlar hesaplama programı (Programs for Automatic Finite Element Calculations)

2. Program Geliştiricisi : PAFEC, Ltd.

3. İlk Sürüm Tarihi : 1970

4. Genel Bilgiler : Pafec genel amaçlı sonlu elemanlar sistemidir. Sıradan ve bilinen mühendislik anahtar kelimeleri ile giriş yapılabilir. İngiltere'de geliştirilmiştir ve yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Program, CAD sistemleriyle bağlantılı çalışabilir ve kendi içinde renkli grafikler verebilir.

T.C. YÜKSEK ÖĞRETİM KURULU
BİLİMSEL ARAŞTIRMA VE TEKNOLOJİ GELİŞTİRME BAKANLIĞI
MÜHÜR

5. Program Kapasitesi :Lineer gerilme analizi, sürünme, plastisite, büyük deformasyonlar, titreşim dinamik frekans cevabı, termal analiz, alt yapılandırma, dönел simetri, bölme üreticisi, dahili grafikler, dahili veri tabanı girişı, otomatik eleman sıralama ve geniş eleman kütüphanesi başlıca özelliklerindedir.

6. Kullanıcı Ortamı ve Modelleme Kapasitesi : Yüzey modelleri, iki ve üç boyutlu modeller kadar iyi yapılabilmektedir. Elle yapılan girişler sayısal tanımlamalarla verilir. Genişletilmiş üst işlemciyi grafik birimi desteklemektedir. Programın kullanımı kolaydır ve iyi bir şekilde hazırlanmış kullanım kılavuzları vardır.

7. Program Dili : FORTRAN

8. Program Boyu : 400.000 satır.

9.1.11. SAMCEF Programı

1. Tanımlayıcı Program Başlığı : Lineer ve nonlinear statik, dinamik ve termal analiz için genel sistem.

2. Program Geliştiricisi : L. T. A. S. Aerospace Laboratory of the University of Liège

3. İlk Sürüm Tarihi : 1965

4. Genel Bilgiler : Samcef, araştırmacıların ve dizayn mühendislerinin ihtiyaçları düşünülerek geliştirilmiş genel amaçlı sonlu elemanlar programıdır. Programın ilk çıkışı 1965 te olmuş ve sürekli endüstri işbirliğiyle geliştirilmeye devam etmiştir. Kompozit malzeme, viskoplastisite ve kırılma ile ilgili çözümler sistem ile gerçekleştirilebilmektedir.

5. Program Kapasitesi : Samcef, birçok yapısal statik, dinamik analiz problemleri ile ısı transferi ve akışkanlar mekaniği problemlerinin çözümü için kullanılan genel amaçlı sonlu elemanlar programıdır. Lineer ve nonlinear analiz yöntemlerini içerir. Kompozit malzemelerin modellenmesi oldukça karmaşıktır. Sıkıştırılabilir ve sıkıştırılmaz sıvılarla akışkanların dinamik analizi yapılabilir. İki boyutlu ve asimetrik yapılara şekil ve ağırlık iyileştirmesi (optimizasyon) uygulanabilir. Üst yapılandırma özellikleri her boy probleme uygulanabilir ve çözüm algoritmaları yeni bilgisayarlarada adapte edilebilir.

6. Kullanıcı Ortamı ve Modelleme Kapasitesi : Geometri, sıcaklık dağılımı, malzeme özellikleri, eleman birleşimleri ve sınır şartları oldukça açık seçik bir dille ifade edilmiş ve

program içine dahil edilmiştir. Çok sayıda model çizim özellikleri mevcuttur. Mesela perspektif, yansıtma (projection), bazı hatların gizlenmesi, kıvrılmayan yüzey yapısı gibi. Birçok girdi hatası otomatikman denetlenebilmektedir. Çıktılar deforme olmuş yapı, dinamik düğüm noktası şekli, kenar çizimleri ve asal gerilmeler gibi değişik şekillerde verilebilir.

7. Önemli Özellikler ve Limitler : Program birçok uygulama alanında kullanılmaktadır. CAD sistemleriyle ortak çalışılabilmektedir. Yeni eleman tiplerini programa dahil etmek kolaydır. Birleşik yapıların modellenmesinde program içinde bulunan birçok eleman verimli bir şekilde kullanılabilir.

8. Program Dili : FORTRAN IV

9. Program Boyu : 300.000 satır.

9.1.12. SESAM '80 Programı

1. Tanımlayıcı Program Başlığı : Genel amaçlı yapısal analiz sistemi (superelement structural analysis program modules)
2. Geliştirici Firma : Norwegian Institute of Technology (NTH) ve SINTEF.
3. İlk Sürüm Tarihi : 1980
4. Program Kapasitesi : Sesam '80, genel amaçlı yapısal analiz programıdır. İki ve üç boyutlu yapılara uygulanan statik ve dinamik yüklerle ilgili çözümler programla gerçekleştirilebilir. Statik analizler için çok kademeli süpereleman tekniği kullanılır. Dinamik analizler için ise birçok alternatif çözüm tekniği vardır. Alt alan iterasyonları ve Lanczos metodları titreşim problemleri için; modal süperpozisyon, direk frekans cevabı ile direk zaman tümleme metodları harmonik yada keyfi zamana bağlı zorlanmış problemler için kullanılır. Master-slave ve component mode ise dinamik problemlerde serbestlik derecelerini azaltarak problem boyutunu küçültmektedir. Geniş eleman kütüphanesi çubuk, membran, kabuk, katı, asimetrik katılar ve yay gibi değişik birçok elemanı içerir. Özel geliştirilmiş geçiş elemanları ile plak ve katıların birleştirilmesi mümkündür. Liman yapılarındaki çevresel etkiler hesaplanabilir ve bu yükler analiz programına transfer edilebilir. Kafes sistemlerine deprem yükleri uygulanabilmektedir.

5. Kullanıcı Ortamı ve Modelleme Kapasitesi : Sesam '80 programının ön işlemcisi grafiksel olarak sonlu elemanlar model üreticisine sahiptir. Bu işlemci ile çubuk, membran plak ve katı modelleme yapılabilir. Özel amaçlı ön işlemci ise kafes yapılarında, süper elemanların birleştirilmesinde ve kompleks boru şekilli birleşimlerde kullanılır.
6. Önemli Özellikler ve Limitler : Çözüm için problem boyutlarıyla ilgili bir sınırlama yoktur. Her serbestlik derecesi, eleman ve yükleme şartı uygulanabilir. Sınırlama sadece bilgisayar kapasitesine bağlıdır. Sesam '80 programı Fenris programı ile beraber yapısal analiz problemlerinin pratik çözümlerini yapabilmektedir.
7. Program Dili : FORTRAN 77
8. Program Boyu : 800.000 satır.

9.1.13. SMART Programı

1. Tanımlayıcı Program Başlığı : Büyük yapıların termomekanik analizi
2. Program Geliştiricisi : SMART Group at ISD/ICA University of Stuttgart
3. İlk Sürüm Tarihi : 1976
4. Genel Bilgiler : Program iki kısma ayrılır. SMART I statik paket adını alır. Elastik olmayan davranışlar, sürünme, kırılma ve çatlama problemlerinde kullanılır. SMART II ise difüzyon paketi ismini alır ve nonlinear, geçici ısı transferi ve radyasyon problemlerinde kullanılır.
5. Program Kapasitesi : Alt modelleme tekniğinde ölçü sınırı yoktur. Termal gerilme analizi yapılabilmektedir. Kapsamlı eleman kütüphanesi iki boyutlu, asimetric malzeme modelleri için nokta, çubuk, yüzey ve isoparametrik katı elemanları; termoviskoelastisite, çarşal sürünme, üç eksenli gerilme, deformasyon halleri ve radyasyon değişimi için üç boyutlu malzeme modelleri içermektedir.
6. Kullanıcı Ortamı ve Modelleme Kapasitesi : Smart, ön işlemci ihtiyacını minimuma indiren karmaşık koordinatlar ve yenilenen veri üreticisi sistemi kullanır. Program içi aktif grafik sistemi (INGA) üst işlemci için tamamen programla uyumludur. Mesela yer değiştirmeler, gerilmeler, asal gerilmeler, sıcaklık vektör çizimleri grafik olarak görülebilir.

7. Önemli Özellikler ve Limitler : Smart programı; sonlu elemanlar yerdeğiştirme metodu, artımsal linearizasyon, iterative düzeltme, inelastik analiz ile geçici difüzyon analizi için şartsız dengeli zaman çalıştırıcısı gibi özelliklere sahiptir.

8. Program Dili : ANSI 66, FORTRAN IV

9. Program Boyu : 200.000 satır.

9.1.14. TUJAP Programı

1. Tanımlayıcı Program Başlığı : Elastoplastik malzemeler ve kırılma mekaniği için borsal mafsallı analiz programı.

2. Program Geliştiricisi : Det norske Veritas in cooperation with the Foundation for Scientific and Industrial Research at the Norwegian Institute of Technology (SINTEF)

3. İlk Sürüm Tarihi : 1984

4. Program Kapasitesi : Tujap borsal mafsalların statik elastoplastik analizini yapar. Oldukça karmaşık birleşimler ele alınabilir. Mafsallar ve birleşimler, 20 noktalı katı elemanlardan, 8 noktalı plak elemanlardan yada ikisinin birleşiminden oluşabilir. Özel geliştirilmiş geçiş elemanları, plak elemanlar ile katı elemanlara uygulanabilir. Mesela bir beton siva şekli katı elemanlarla modellenebilir ve çelik boru elemanları özel geliştirilmiş boşluk elemanları yardımıyla modele irtibatlandırılabilir. Katı elemanlarla aynı zamanda Amerikan Welding Society kurallarına uygun geometrideki kaynak bağlantıları modellenebilir. Eliptik çatlaklar otomatik bölme üreticisi tarafından modele iletilebilir. Bölgesel gerilmeler ve çatlak ucu gerilme yoğunluk faktörleri program tarafından hesaplanabilir.

5. Kullanıcı Ortamı ve Modelleme Kapasitesi : Tujap ön işlemcisi, otomatik iç grafik üreticisi kullanır. Kullanıcı tarafından bilgisayara girilen minimum bilgi ile (örneğin boru radyüsü, kalınlığı ve uzaydaki konumu) kesişen tüm eğriler, ve sonlu elemanlar modeli üretilebilir. Grafikselleştirme ve tablosal sonuç sunumları üst işlemci tarafından gerçekleştirilir.

6. Önemli Özellikler ve Limitler : Çözüm için problem boyutlarıyla ilgili bir sınırlama yoktur. Her serbestlik derecesi, eleman ve yükleme şartı uygulanabilir. Sınırlama sadece bilgisayar kapasitesine bağlıdır. Tujap programı, Sesam '80 programı ile beraber yapısal

analiz problemlerinin pratik çözümlerini yapabilmektedir.Önemli özelliklerini şöyle sıralayabiliriz.

- Otomatik model üreticisi, borusal elemanların üstlerine oturtulabileceği birçok düzlem bağlantıları oluşturabilir. Bölmeleme ünitesi ise, kaba bölmeleme ile sadeleştirilmiş bölmeleme arasında yumuşak bir geçiş sağlar.
- Program elastoplastik problemlerin çözümü için birçok yöntem sunar.
- Multilevel süpereleman tekniği uygulabilir.

7. Program Dili : FORTRAN 77

8. Program Boyu : 200.000 satır.

9.2 . Bilgisayar Programlarının Tablosal Karşılaştırması

Programların karşılaştırmasını ve birbirleri ile aralarındaki farkların daha iyi anlaşılabilmesi için karşılaştırma tabloları yapılmıştır. İlerki sayfalarda ilgili tablolar görülebilir.

TABLO 2. Yapısal ve Katı Modelleme Uygulamaları (Devamı)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1. Eleman tipleri (devamı)														
i. Asimetrik katılar	lgm	lgm	lgm	lm		lgm	l	lgm	lgm	lgm	lgm	l	lm	
j. Üç boyutlu katılar	lgm	lgm	lgm	lm	lg	lgm	l	lgm	lgm	lgm	lgm	l	lm	m
k. Sınır elemanlar	lgm	lgm	lgm						lgm	l				
l. Boşluk elemanları	lgm	lgm	lgm		lm	lgm			lgm	lgm	lg			m
2. Uygulama alanları														
a. Lineer statik	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
b. Serbest titreşimler	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•	•
c. Çatallı eğilme problemleri	•	•	•	•	•			•	•	•	•			
d. Nonlineer statik cevap	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•			•
e. İleri derecede nonlineer bükülme	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•			•
f. Nonlineer temas problemleri	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•			•
g. Nonlineer dinamik titreşim	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•			
h. Nonlineer geçici cevap	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•			
ı. Nonlineer dinamik dalga yayılımı	•	•				•				•				
i. Nonlineer sıvı - yapı etkileşimi	•	•	•	•	•	•			•	•	•			
j. Nonlineer termel - mekanik birleşim	•	•	•	•	•	•			•	•	•			
k. Statik büyük deformasyonlu plastisite	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•		•	
l. Dinamik büyük deformasyonlu plastisite	•	•				•		•	•	•				
m. Lineer statik cevap hassasiyet hesabı					•						•			
n. Lineer dinamik cevap hassasiyet hesabı					•									
o. Serbest titreşimlerde hassasiyet hesabı					•									

* l : Lineer analiz, g : Geometrik ve malzemesel nonlineerlik, m : malzemesel nonlineerlik, lgm: l, g, m, gm

1 : Abaqus, 2 : Adina, 3 : Ansys, 4 : Aska, 5 : Eal, 6 : Fennis, 7 : Finite / Gp, 8 : Lastran '80, 9 : Marc, 10 : Pafec, 11 : Samcef

12 : Sesam '80, 13 : Smart, 14 : Tujap

TABLO 2. Yapısal ve Katı Modelleme Uygulamaları (Devamı)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3. Formülasyon														
i) Yapısal bilinmeyenler														
a. Yerdeğiştirme metodu	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
b. Kuvvet metodu														
c. Melez metod					•				•					
d. Karışık metod	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
ii) Referans Yapısı														
a. Toplam lagrange	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
b. Yenilenmiş lagrange	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
c. Euler									•					
4. Çözüm Teknikleri														
a. Nonlineer statik artımlı (tekrarsız)	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
b. Nonlineer statik Newton tipi metodlar	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
c. Nonlineer dinamik belirgin hal	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
d. Nonlineer dinamik belirsiz hal	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
e. Nonlineer dinamik belirgin-belirsiz hal														
5. Yükleme Tipi														
a. Noktasal yükler	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
b. Çizgisel yükler	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
c. Asimetrik yükler	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
d. Yüzeye yayılı yükler	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
e. Hacime yayılı yükler	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
f. Ağırlık yükü	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

1 : Abaqus , 2 : Adina , 3 : Ansys , 4 : Aska , 5 : Eal , 6 : Fenris , 7 : Finite / Gp , 8 : Lastran'80 , 9 : Marc , 10 : Pafec , 11 : Samcef

12 : Sesam '80 , 13 : Smart , 14 : Tujap

TABLO 2. Yapısal ve Katı Modelleme Uygulamaları (Devamı)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5. Yükleme tipi (devamı)														
g. Ön gerilme, şekil değiştirme yada hız	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
h. Termal yükleme	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
ı. Merkezkaç yükü	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
i. Değişken yükleme	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
j. Rasgele yükleme	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
k. Girokopik yükleme	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
l. Orantısız yükleme	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
m. Periyodik yükleme	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
n. Bağlantılı yükleme	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
6. Desteklenen durumlar ve yüklemeler														
a. Asimetrik	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
b. Kenarlarda	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
c. İç noktalarda	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
d. Tavsiye edilen yerdeğişimler	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
e. Kayan ortamlar	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
f. Temas noktalarındaki destek	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
g. Elastik yapı	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
h. Sürtünme kuvvetleri	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
ı. Çoknoktadan zorlama	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
i. Periyodik simetri	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

1 : Abaqus , 2 : Adina , 3 : Ansys , 4 : Aska , 5 : Eal , 6 : Fenris , 7 : Finite / Gp , 8 : Lastran'80 , 9 : Marc , 10 : Pafec , 11 : Samcef
12 : Sesam '80 , 13 : Smart , 14 : Tujap

TABLO 2. Yapısal ve Katı Modelleme Uygulamaları (Devamı)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
7. Malzeme özellikleri ve modelleri														
a. İzotropik	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
b. Anizotropik	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
c. Çok tabakalı	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
d. Homojen olmayan	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
e. Sıcaklığa bağımlı elastik özellikler	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
f. Sıcaklığa bağımlı plastik ve viskoplastik özellikler	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
g. Lineer elastik	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
h. Nonlineer elastik	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
i. Elastik-tamamen plastik	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
i. Elastik-gergin sertlik	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
j. Viskoelastik	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
k. Viskoplastik	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
l. Yüksek sıcaklıkta sürünme	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

TABLO 3. Hasar ve Kırılma Mekanığı Uygulamaları

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1. Element tipleri *														
a. Düzenlem gerilme	•	S	S	S	S				•	•	S			
b. Düzenlem şekil değiştirme	•	S	S	S	•				•	•	S			
c. Plaklar	•	•	•	•	•				•	•				
d. İnce kabuklar	•	•	•	•	•				•	•				
e. Kalın kabuklar	•	•	•	•	•				•	•				

1 : Abaqus , 2 : Adina , 3 : Ansys , 4 : Aska , 5 : Eal , 6 : Fenris , 7 : Fimite / Gp , 8 : Lastran'80 , 9 : Marc , 10 : Pafec , 11 : Samcef

12 : Sesam '80 , 13 : Smart , 14 : Tujap

* S : Tekil elemanlar

TABLO 3 Hasar ve Kırılma Mekanığı Uygulamaları (Devamı)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1. Eleman tipleri (devamı) *														
f. Dönel kabuklar	•	•		•					•					
g. Asimetrik katılar	•	S	S	S					•	S				
h. Üç boyutlu katılar	•	S	S	•					•	S				S
2. Uygulama alanları														
a. Lineer statik	•	•	•	•					•	•				•
b. Nonlineer statik	•	•	•	•					•	•				
c. Lineer dinamik			•											
d. Nonlineer dinamik		•	•											
e. Hasar		•	•											
3. Formülasyon														
a. Yer değiştirme	•	•	•	•					•	•				•
b. Kuvvet														
c. Melez														
d. Karışık	•	•												
4. Yükleme														
a. Statik	•	•	•	•					•	•				•
b. Zamanın fonksiyonu olarak	•	•	•						•	•				
c. Mode I	•	•	•	•					•	•				
d. Mode II	•	•		•					•	•				
e. Mode III	•	•		•					•	•				
f. Karışık mode	•	•							•	•				•
g. Ön gerilme / şekil değiştirme	•	•		•					•	•				

1 : Abaqus, 2 : Adina, 3 : Ansys, 4 : Aska, 5 : Eal, 6 : Ferris, 7 : Finite / Gp, 8 : Lastran'80, 9 : Marc, 10 : Pafec, 11 : Samcef

12 : Sesam '80, 13 : Smart, 14 : Tujap

S : Tekil elemanlar

TABLO 3. Hasar ve Kırılma Mekanığı Uygulamaları (Devamı)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5. Yüze çatlak geometrisi														
a. Doğrusal	•	•	•	•					•					•
b. Eğrisel	•	•		•					•	•				•
c. Dairesel	•	•		•					•					•
d. Eliptik	•	•		•					•					•
e. Karışık	•	•		•					•	•				•
6. İç çatlak geometrisi														
a. Doğrusal	•	•	•	•					•					•
b. Eğrisel	•	•		•					•	•				•
c. Dairesel	•	•		•					•					•
d. Eliptik	•	•		•					•					•
e. Karışık	•	•		•					•	•				•
7. Çatlak kapanma dallanması														
a. Sürtünmesiz kapanma	•	•							•					•
b. Sürtünmeli kapanma	•	•							•					•
c. Dallanma														•

TABLO 4. Programın Model Kapasitesi

1. Girdi formu ve sırası														
i) Girdi formu														
a. Sabit şekilde	•	•		•					•					
b. Liste yönetimli serbest şekil	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
c. Problem kaynaklı dil	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

1 : Abaqus , 2 : Adina , 3 : Ansys , 4 : Aska , 5 : Eal , 6 : Fenris , 7 : Finite / Gp , 8 : Lastran '80 , 9 : Marc , 10 : Pafec , 11 : Samcef
 12 : Sesam '80 , 13 : Smart , 14 : Tujap

TABLO 4. Programın Model Kapasitesi (Devamı)

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1.	Girdi formu ve sırası (devamı)														
	ii) Girdi sırası														
a.	Kullanıcı yönetimli	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
b.	Sistem yönetimli	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
c.	Kullanıcı kaynaklı üstyönetim	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
2.	Model üreticisi ve kontrol														
	i) Otomatik yada yarı otomatik üretici														
a.	Düğüm noktası koordinatları için	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
b.	Eleman bağlantıları için	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
c.	Gerilme, simetri ve sınır şartları için	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
d.	Üst yapılandırma bağlantıları için	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
e.	Tanımlanan kısım tekrarı için	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
f.	Yükler için	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
	ii) Otomatik yada yarı otomatik üretici														
a.	Tek boyutlu elemanlar için	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
b.	Üçgen elemanlar için	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
c.	Karesel elemanlar için	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
d.	Eğrisel kabuk elemanlar için	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
e.	Üç boyutlu katı elemanlar için	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
f.	İki boyutlu kabuk elemanlar için	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
g.	Kesişimler İçin	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
h.	Özel tip yapılar için	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

1 : Abaqus, 2 : Adina, 3 : Ansys, 4 : Aska, 5 : Eal, 6 : Fenris, 7 : Finite / Gp, 8 : Lastran'80, 9 : Marc, 10 : Pafec, 11 : Samcef
12 : Sesam '80, 13 : Smart, 14 : Tujap

TABLO 4. Programın Model Kapasitesi (Devamı)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2. Model üreticisi ve kontrol (devamı)														
iii) Veri kontrol özellikleri														
a. Yazıcı (printer)	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
b. Plotter (çizici)	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
c. Program içi aktif grafikler	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
iv) Modelin grafik ve cisim çıktıları														
a. Analiz bölgesinin tümünde	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
b. Analiz bölgesinin bir kısmında	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
c. Gizli hatlar ve yüzeyler içermek	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
d. Perspektif ve izometrik görünüm	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
e. Keyfi düzlemlerde görünüm	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
v) Diğer özellikler														
a. Dijital girdi			•							•	•			
b. Nokta, eleman ve eşitliklerin otomatik numaralanması	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
c. Görülebilen veri tabloları	•													
3. Sonuçların çıktı şekli														
i) Tablosal çıktı				•	•					•				
a. Sabit şekilli kurulum	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
b. Kullanıcı tanımlı kurulum ve sıralamalar	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
c. Maksimum ve minimum değerler	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
d. Nokta blokları için ort. - max. değerler	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
e. Gerilme, sıcaklık ve akış maksimumları	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

1 : Abaqus , 2 : Adina , 3 : Ansys , 4 : Aska , 5 : Eal , 6 : Fenris , 7 : Finite / Gp , 8 : Lastran '80 , 9 : Marc , 10 : Pafec , 11 : Samcef
12 : Sesam '80 , 13 : Smart , 14 : Tujap

TABLO 4. Programın Model Kapasitesi (Devamı)

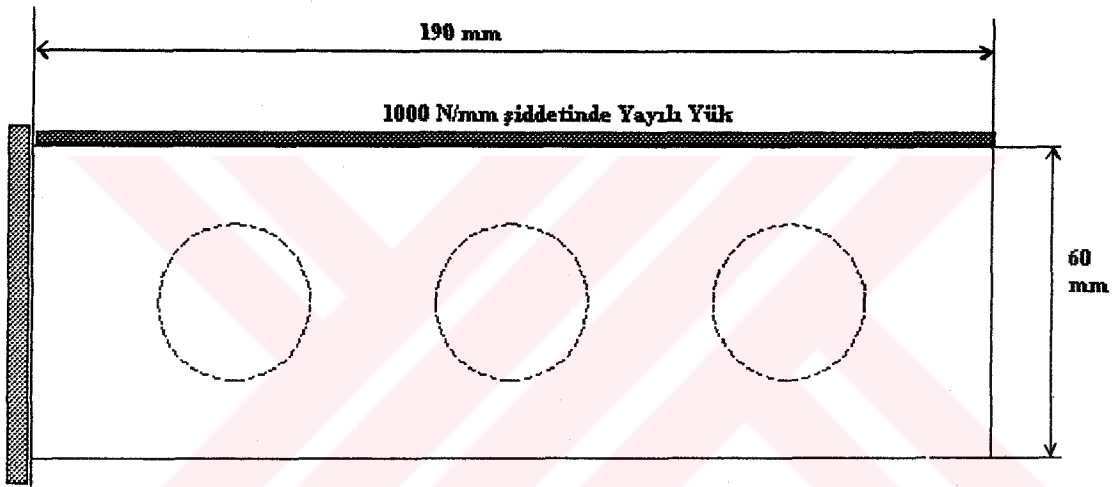
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3. Sonuçların çıktı şekli (devamı)														
ii) Üst işlemci ve çizim için çıktı	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
iii) Grafik çizimler														
a. Sıcaklık ve akış için izoterm çizimler	•		•		•	•	•		•	•	•	•		•
b. Yüzey fonksiyonları			•			•			•					
c. Seçmeli çıktı	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•		•
d. Tarihsel ilerletmeli çizimler	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•		
4. İnteraktif girdi ve kontrol														
a. Parametre özellikleri	•	•	•		•				•	•	•			
b. Standart kontrol	•	•	•		•					•	•			
c. Hata düzeltme			•		•		•			•	•			
d. Kullanıcı kontrollü matris ayrışımı			•	•	•									

1 : Abaqus , 2 : Adina , 3 : Ansys , 4 : Aska , 5 : Eal , 6 : Fenris , 7 : Finite / Gp , 8 : Lastran'80 , 9 : Marc , 10 : Pafec , 11 : Samcef
 12 : Sesam '80 , 13 : Smart , 14 : Tujap

9.3. Bilgisayar ile yapılan parça analizi örnekleri

Bu bölümde, genel tanıtımı Bölüm 9.1.3. de yapılan ANSYS V.5.0-A programı kullanılarak, bilgisayar yardımıyla bazı parçaların gerilme analizi yapılacaktır. Kullanılan bu versiyon üniversiteler için hazırlanmış olup, analiz yapılacak parça boyutları ve yükleme tipleri belli ölçülere kadar sınırlandırılmıştır. Analiz sonuçlarının grafik çıktısının alınabilmesi ve güvenilir olması programın seçiminde başlıca tercih sebepleridir.

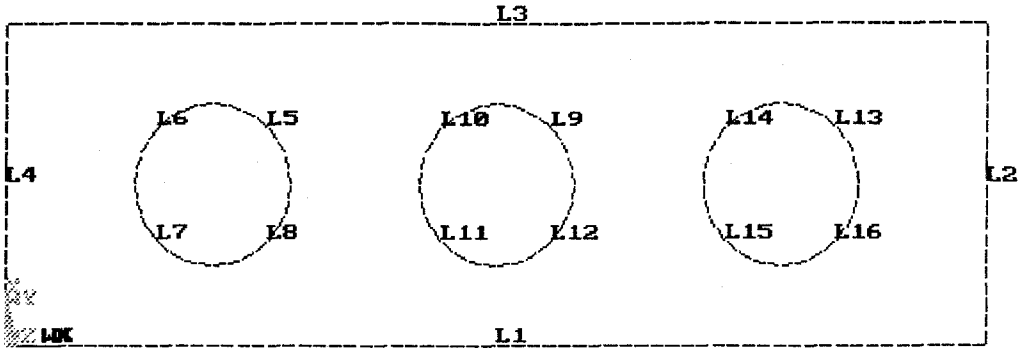
9.3.1. Yayılı Yük Uygulanan Bir Ucu Ankastre Çubuğun Gerilme Analizi



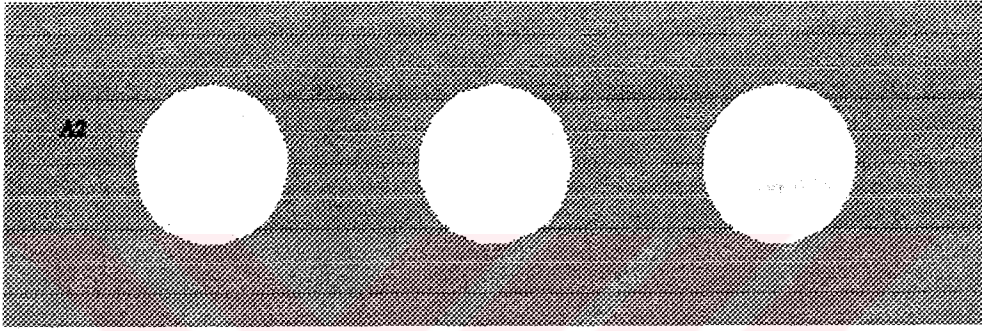
Şekil 9.1

Şekil 9.1 de verilen bir ucu ankastre mesnetlenmiş çubuk 20 mm. kalınlığındadır. Parçaya 1000 N/mm şiddetinde yayılı yük uygulanmıştır. Delikler eşit büyüklükte olup çapları 30 mm. dir. Parçada oluşacak olan gerilme dağılımı ve yer değiştirme miktarları bulunacaktır. Çubuk taşıyıcı bir kiriş parçası olarak düşünülebilir.

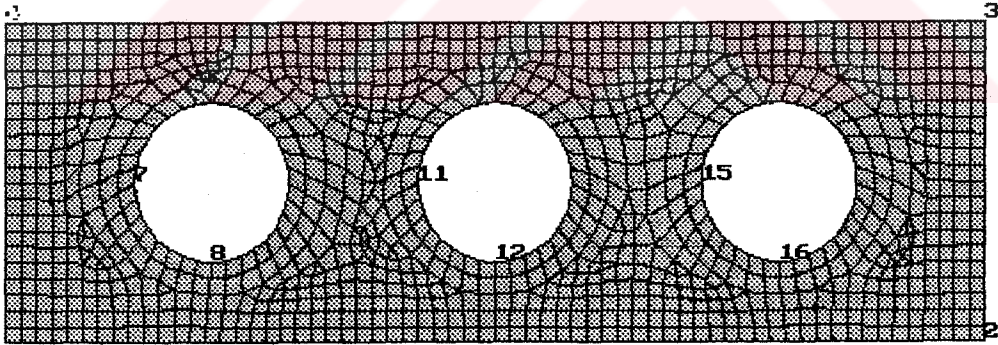
Analizin nasıl yapıldığı adım adım anlatılacaktır. İlk olarak parçanın modeli oluşturulur. Şekil 9.2 de program yardımı ile çizimi yapılmış olan parça görülmektedir. L indisi ile verilen kısımlar parçayı oluşturan çizgilerdir. Parçanın sol alt köşesinde xy koordinat sistemi görülmektedir. Şekil 9.3 de ise aynı parçanın katı modelleme ile oluşturulmuş şekli görülmektedir. A₂ ile gösterilen kısım program tarafından tanımlanan yüzey alanını ifade etmektedir.



Şekil 9.2

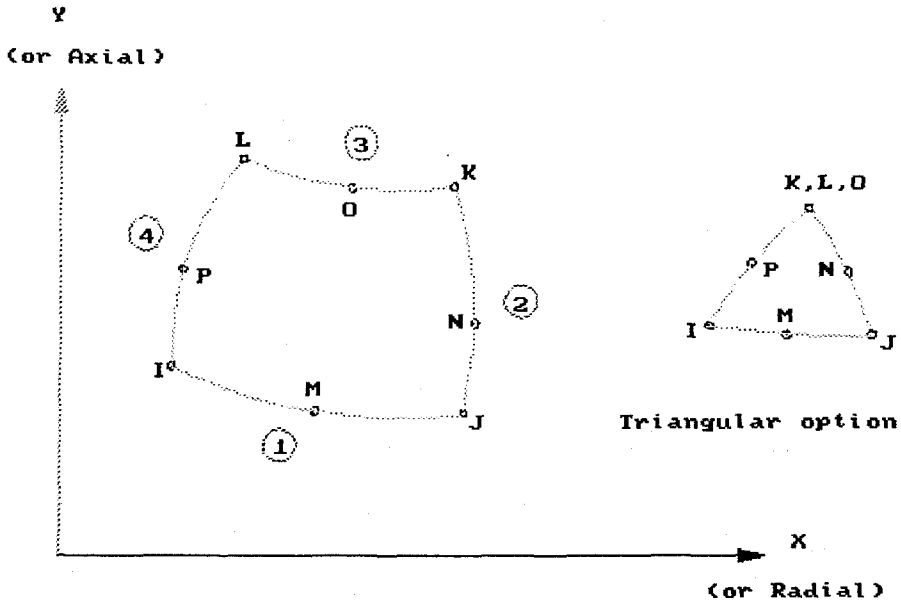


Şekil 9.3.



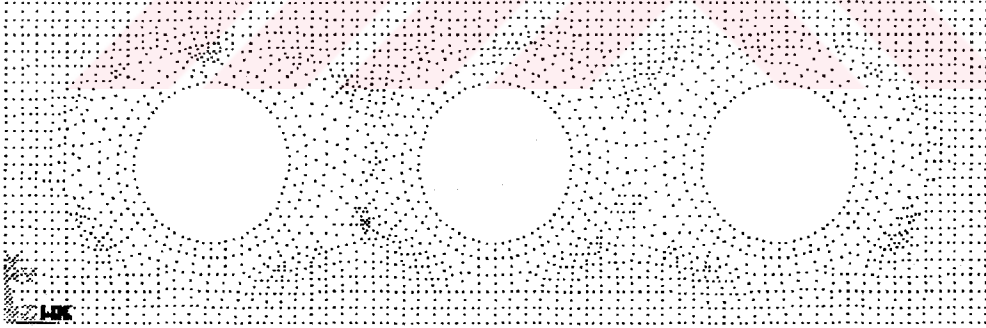
Şekil 9.4.

Otomatik bölümleyici ile 8 noktalı Plane 82 elemanına bölünmüş olan parça Şekil 9.4 de gösterilmiştir. Seçilen elemanın 8 noktadan (node) oluşmuş olması, deliklerin çevresindeki bölümlenmeden normal düzleme geçişte üçgen elemanlar kullanımına izin verir. Şekil 9.5. de bu elemanın özellikleri grafiksel olarak gösterilmiştir.



Şekil 9.5.

Parçanın elemanlara bölünmüş şeklindeki çizgileri iptal edersek noktalardan oluşan Şekil 9.6. yı elde ederiz. Program her noktaya bir numara vermektedir fakat nokta sayısındaki fazlalık sebebiyle numaraları görüntülemek mümkün değildir.



Şekil 9.6.

Parçanın bir kenarı ankastre olarak mesnetlenmiştir. Bunun anlamı L4 hattı boyunca u_x ve u_y doğrultularındaki şekil ve yerdeğiştirmelerin sıfır olmasıdır. Programın listelediği mesnet durumu aşağıdadır. 1 ve 4 numaraları L4 hattının iki ucunu ifade eder.

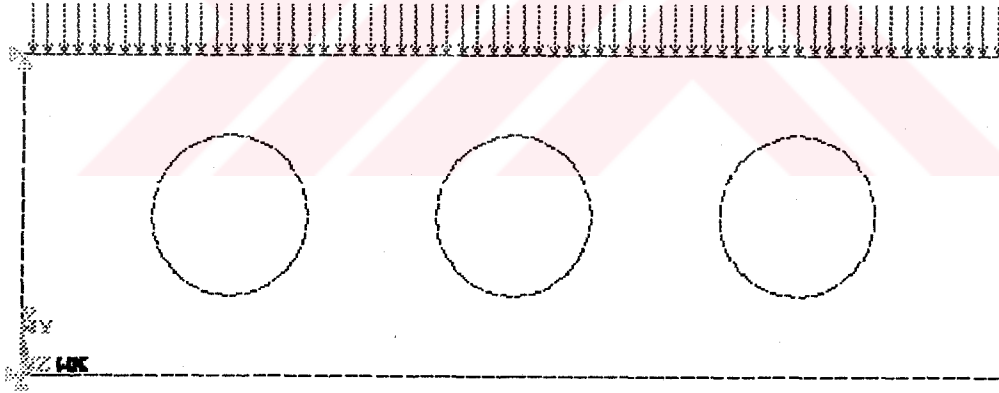
LIST SELECTED DOF CONSTRAINTS ON KEYPOINT 1
CURRENTLY SELECTED DOF SET= UX UY

KEYPOINT	LOAD LABEL	VALUE(S)	EXP KEY
1	UX	0.00000E+00	1
1	UY	0.00000E+00	1
4	UX	0.00000E+00	1
4	UY	0.00000E+00	1

Parçanın üstüne (L3 hattına) 1000 N/mm şiddetinde yayılı yük uygulanmıştır. Bu durum program yardımıyla aşağıdaki gibi listelenebilir. i ve j noktaları yayılı yükün iki ucunu ifade etmektedir. Şekil 9.7 de ise bu yükleme durumu gösterilmiştir. Parçanın sol kenarının iki köşesindeki simgeler mesnetlenmiş olduğunu belirtmektedir.

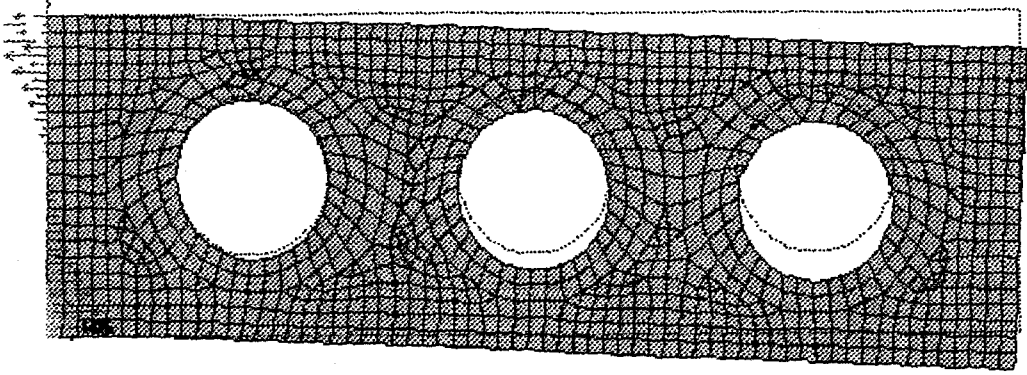
LIST SURFACE LOADS ON ALL SELECTED LINES

LINE	LOAD LABEL	VALI	VALJ	VAL2I	VAL2J
3	PRES	1000.	1000.	0.0000E+00	0.0000



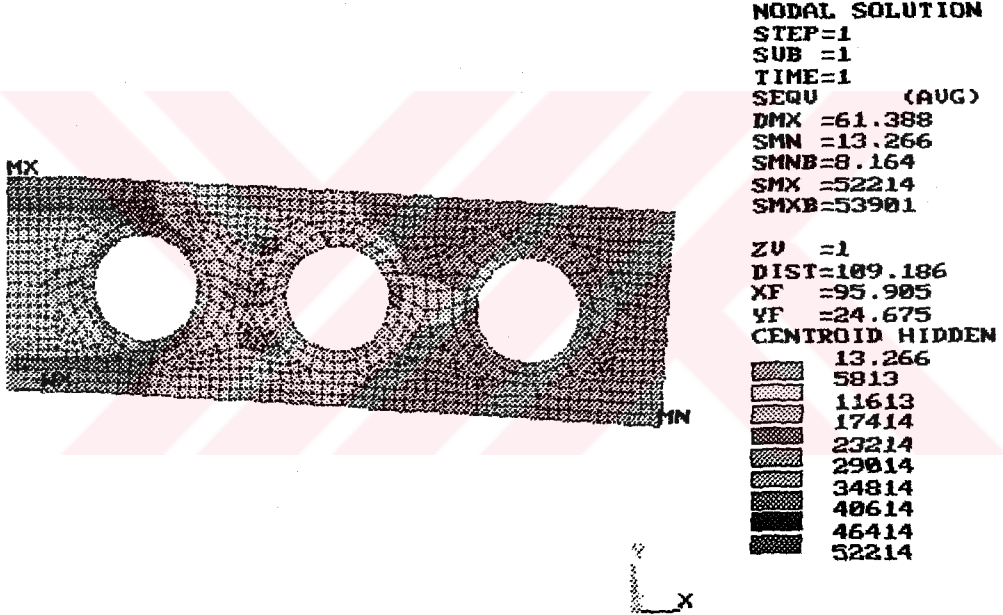
Şekil 9.7.

Yükleme yapıldıktan sonra parçada oluşabilecek deformasyon ve mesnetlerdeki reaksiyon kuvvetleri Şekil 9.8. de verilmiştir. Deforme olmuş parçanın arka kısımda yükleme yapılmadan önceki parça sınırları görülmektedir.



Şekil 9.8.

Parça üzerinde oluşan gerilmelerin dağılımı da Şekil 9.9. da verilmiştir.



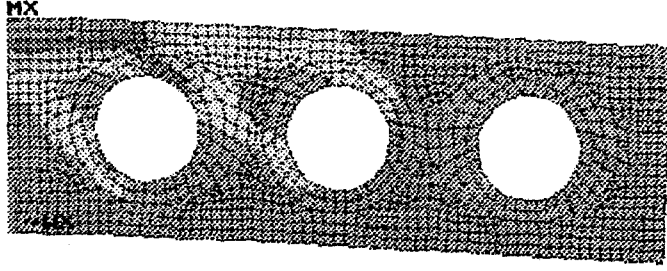
Şekil 9.9.

Program tarafından hazırlanan toplam kuvvet ve moment listesi de şu şekildedir.

***** SUMMATION OF TOTAL FORCES AND MOMENTS IN GLOBAL COORDINATES *****

FX = 0.7827475E-06
 FY = -3800000.
 FZ = 0.0000000E+00
 MX = 0.0000000E+00
 MY = 0.0000000E+00
 MZ = -0.3610000E+09

1., 2. ve 3. Ana gerilmeler (Principal Stress) sırasıyla Şekil 9.10, Şekil 9.11. ve Şekil 9.12 de verilmiştir.

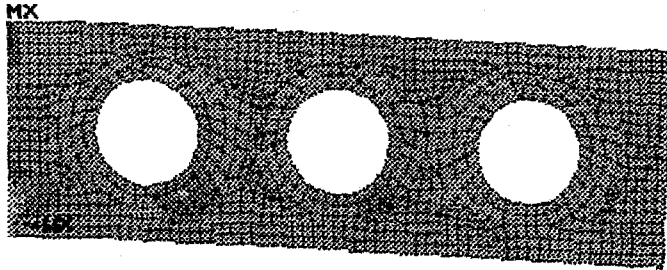


NODAL SOLUTION
 STEP=1
 SUB =1
 TIME=1
 S1 (AVG)
 DMX =61.388
 SMNB=-1487
 SMX =56286
 SMXB=57973

ZU =1
 DIST=109.186
 XF =95.905
 YF =24.675
 CENTROID HIDDEN
 0

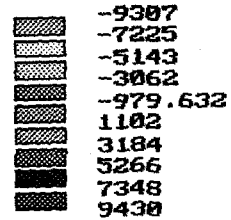


Şekil 9.10.

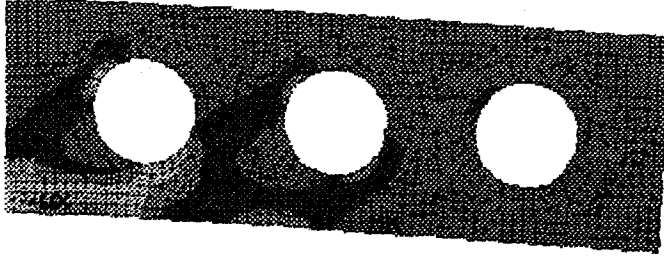


NODAL SOLUTION
 STEP=1
 SUB =1
 TIME=1
 S2 (AVG)
 DMX =61.388
 SMN =-9307
 SMNB=-10783
 SMX =9430
 SMXB=11117

ZU =1
 DIST=109.186
 XF =95.905
 YF =24.675
 CENTROID HIDDEN



Şekil 9.11.



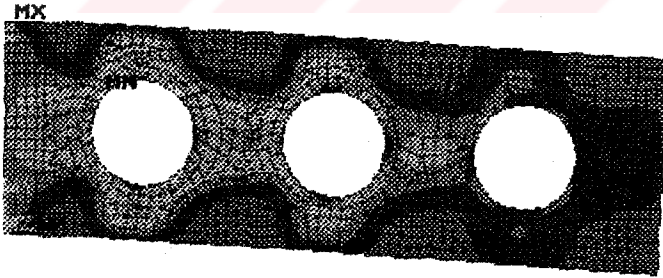
NODAL SOLUTION
 STEP=1
 SUB =1
 TIME=1
 S3 (AUG)
 DMX =61.388
 SMN =-51910
 SMNB=-53385
 SMXB=1703

ZU =1
 DIST=109.186
 XF =95.905
 YF =24.675
 CENTROID HIDDEN
 -51910
 -46142
 -40374
 -34607
 -28839
 -23071
 -17303
 -11536
 -5768
 0



Şekil 9.12.

xy düzlemindeki kayma gerilmesi dağılımı Şekil 9.13. de verilmiştir.



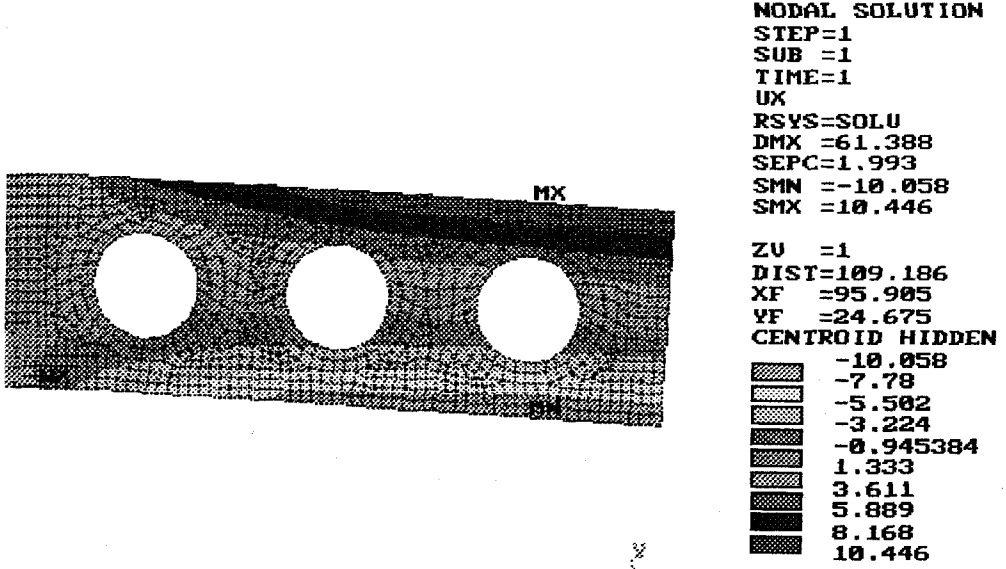
NODAL SOLUTION
 STEP=1
 SUB =1
 TIME=1
 SXY (AUG)
 RSYS=0
 DMX =61.388
 SMN =-13720
 SMNB=-14650
 SMX =1679
 SMXB=3338

ZU =1
 DIST=109.186
 XF =95.905
 YF =24.675
 CENTROID HIDDEN
 -13720
 -12009
 -10298
 -8587
 -6876
 -5165
 -3454
 -1743
 -32.308
 1679

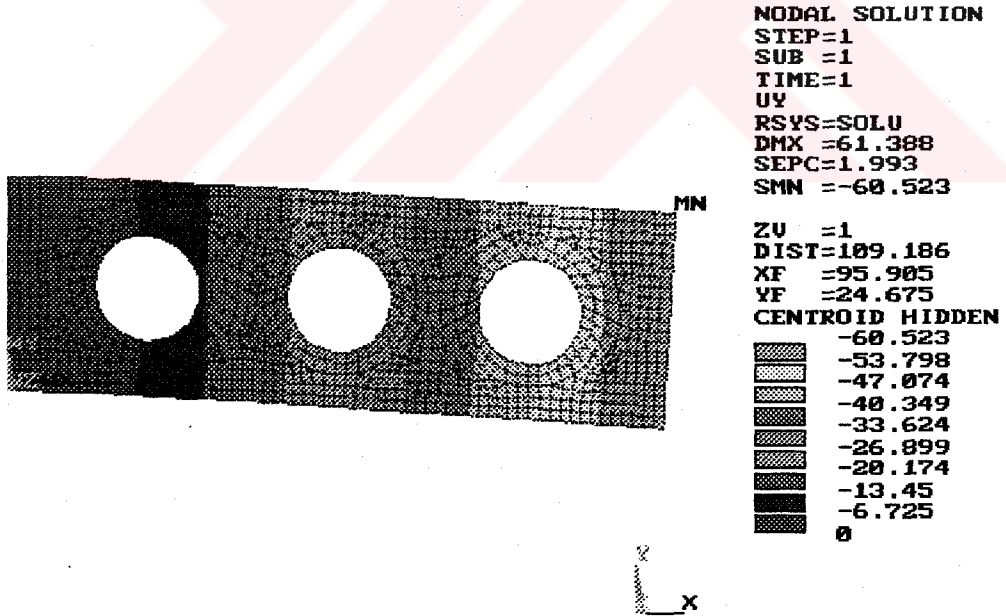


Şekil 9.13.

x yönündeki yerdeğıştirmeler Şekil 9.14 de gösterilmiştir. y yönündeki yerdeğıştirmeler ise Şekil 9.15 de verilmiştir.

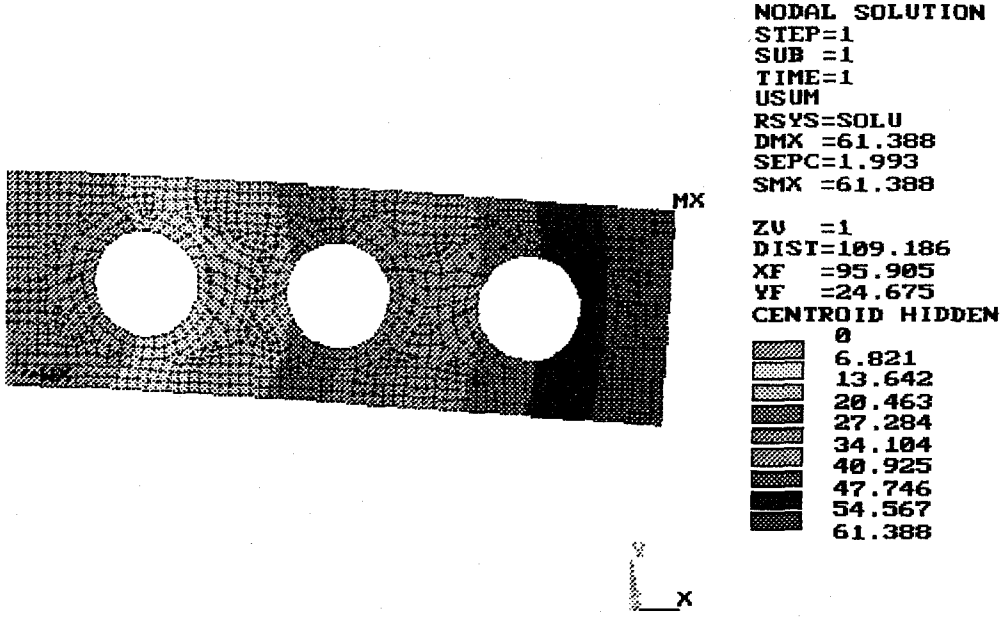


Şekil 9.14.



Şekil 9.15.

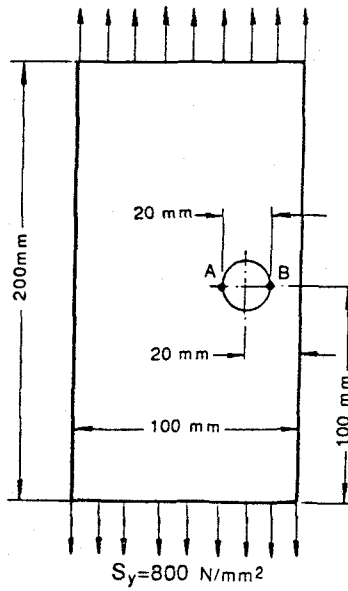
Toplam yerdeğıştirme miktarları ise Şekil 9.16 da verilmiştir.



Şekil 9.16.

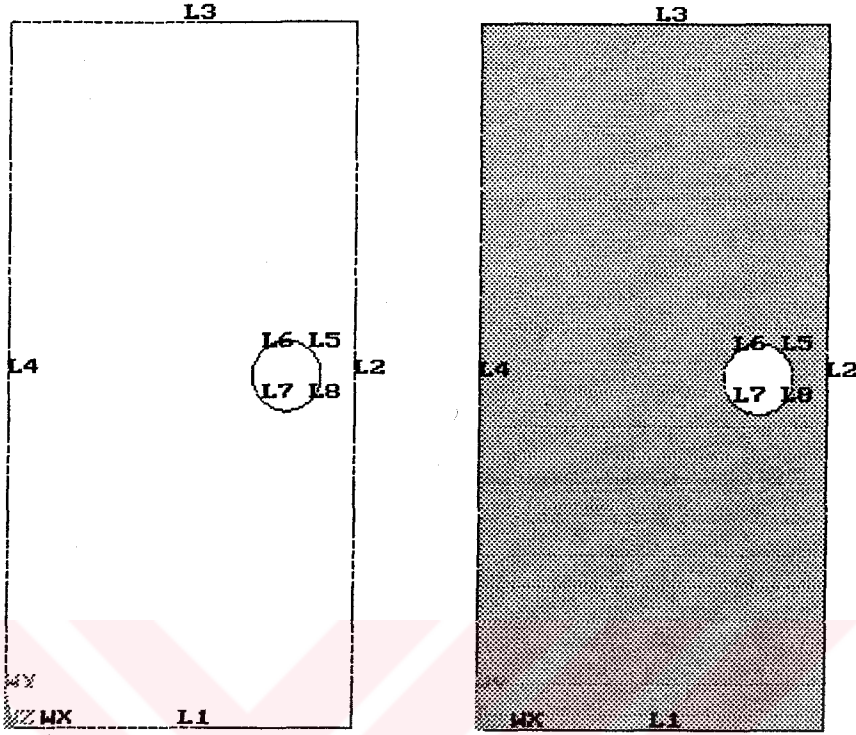
9.3.2. Eksantrik Dairesel Bir Boşluğa Sahip Levhanın Gerilme Analizi

Şekil 9.17 de ölçüleri verilmiş olan parça 10mm kalınlığında olup çelikten yapılmıştır. Uygulanan yayılı yük sonucu parçada oluşabilecek olan gerilme ve şekil değiştirmeleri bulalım. $E = 207.000 \text{ N/mm}^2$



Şekil 9.17

Program yardımıyla oluşturulan model Şekil 9.18 de verilmiştir.



Şekil 9.18.

Malzemenin özelliklerini belirten liste aşağıdaki gibidir.

```

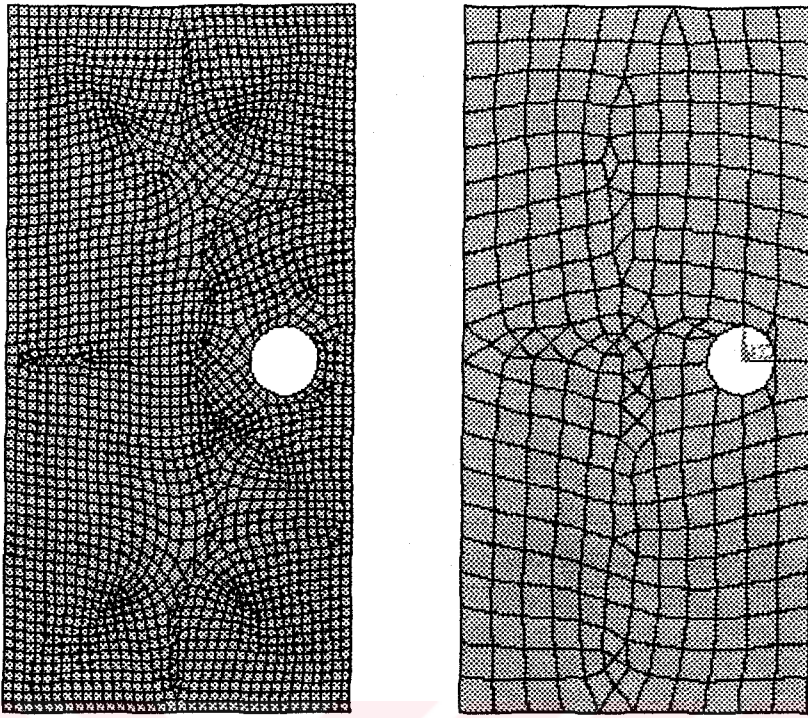
LIST MATERIALS      1 TO      1 BY      1
PROPERTY= ALL

PROPERTY TABLE EX  MAT=      1 NUM. POINTS= 1
TEMPERATURE        DATA      TEMPERATURE    DATA      TEMPERATURE      DATA
0.00000E+00 0.20700E+06

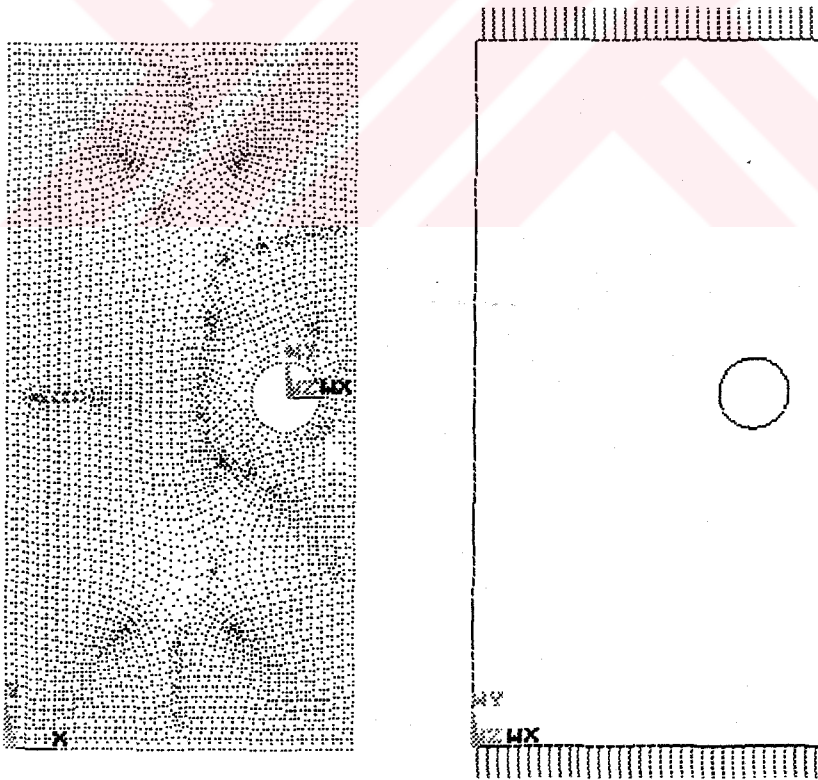
PROPERTY TABLE DENS MAT=      1 NUM. POINTS= 1
TEMPERATURE        DATA      TEMPERATURE    DATA      TEMPERATURE      DATA
0.00000E+00 0.78400E-05

```

Parçanın bölüneceği alt eleman cinsi olarak bir önceki örnekte kullanıldığı gibi Plane 82 seçilmiştir. Şekil 9.5. de bu elemanın özellikleri görülmektedir. İncelenecek parçayı istediğimiz boyutlardaki elemanlara bölme imkanımız vardır. Şekil 9.19 da parça 3 ve 10 birimlik iki ayrı boyutta bölümlenmeye tabi tutulmuştur. Daha yakın sonuçlara ulaşmak için küçük bölümlenme tercih edilmelidir.

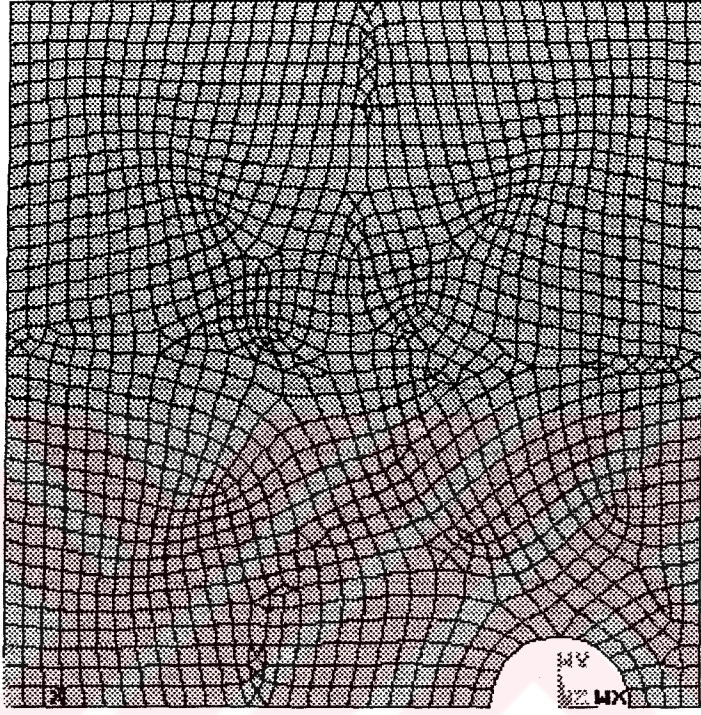


Şekil 9.19.



Şekil 9.20

Şekil 9.20. de bölümlenen parçayı oluşturan düğüm noktaları ve uygulanan kuvvet görülmektedir. Parça x eksenine göre simetrik olduğuna göre sadece yarısı ile aynı işlemleri yapabiliriz. Yapılacak olan modellemede, yarı parçanın simetri eksenine kesilen kısmı sabit mesnet olarak düşünülecektir. Şekil 9.21. de yarı parçanın 3 birimlik boyutta bölümlenmiş şekli verilmiştir.

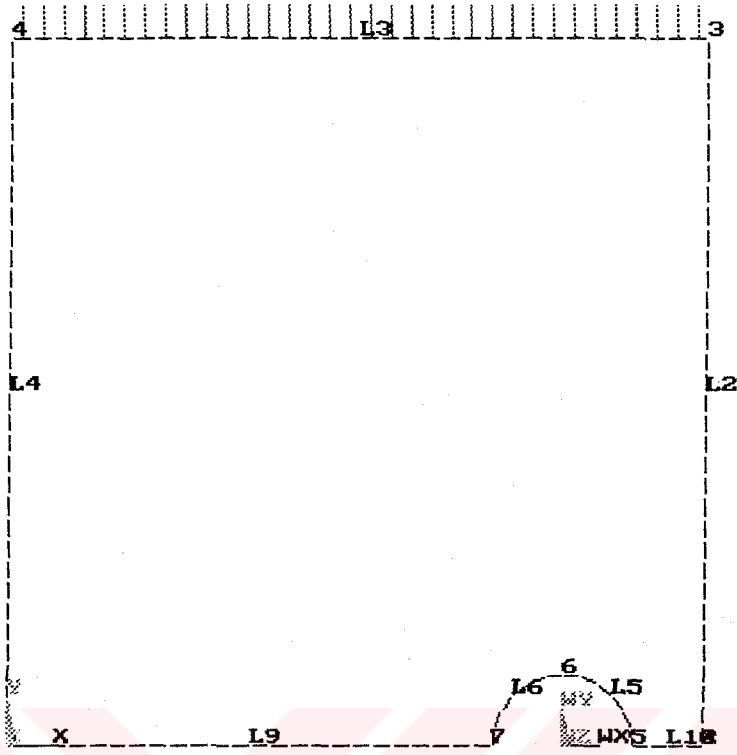


Şekil 9.21.

Parçanın mesnetlenecek kısmının listesi aşağıda verilmiştir. 1, 2, 5 ve 7 noktaları boyunca, ux ve uy eksenlerine göre tüm yerdeğişirmeler sıfır olacaktır.

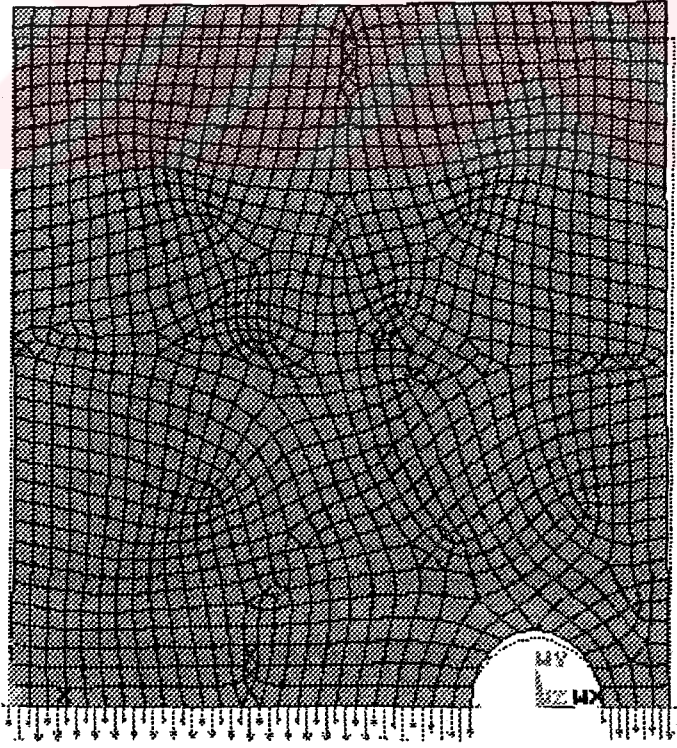
LIST SELECTED DOF CONSTRAINTS ON KEYPOINT 1
CURRENTLY SELECTED DOF SET= UX UY

KEYPOINT	LOAD LABEL	VALUE(S)	EXP KEY
1	UX	0.00000E+00	1
1	UY	0.00000E+00	1
2	UX	0.00000E+00	1
2	UY	0.00000E+00	1
5	UX	0.00000E+00	1
5	UY	0.00000E+00	1
7	UX	0.00000E+00	1
7	UY	0.00000E+00	1



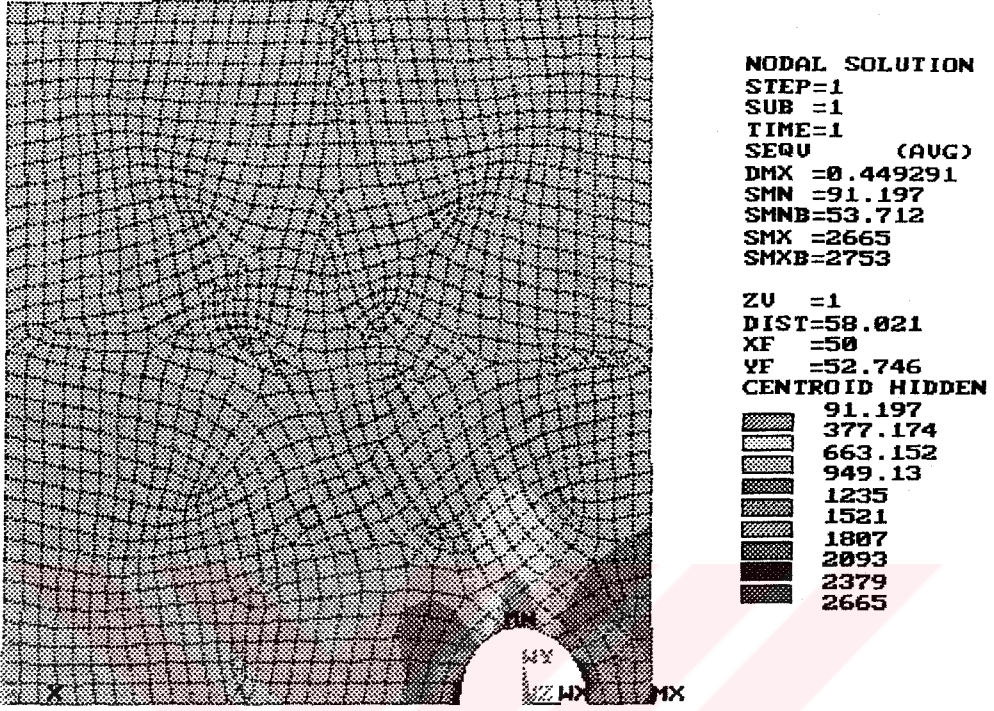
Şekil 9.22.

Şekil 9.22 de L3 hattı boyunca uygulanmış olan yayılı çeki yük görülmektedir.

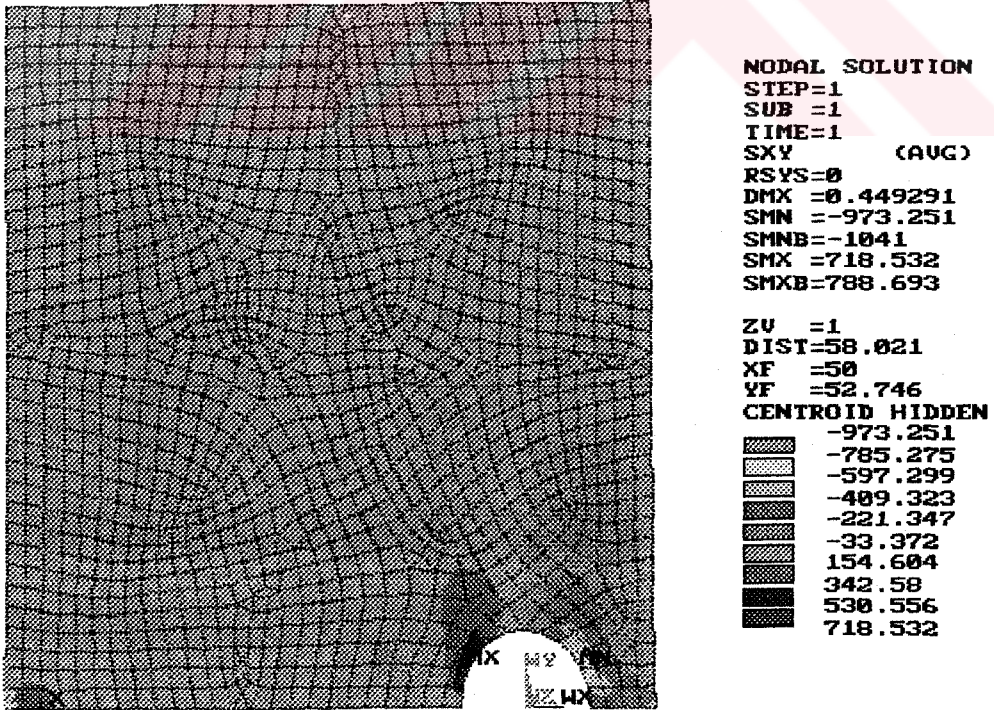


Şekil 9.23.

Şekil 9.23 de yayılı yük sebebiyle oluşan şekil değişimi görülmektedir. Parçanın altındaki oklar mesnet olarak düşünülen kısmın reaksiyon kuvvetlerini ifade eder. Parçada oluşan gerilme dağılımı Şekil 9.24. de gösterilmiştir.

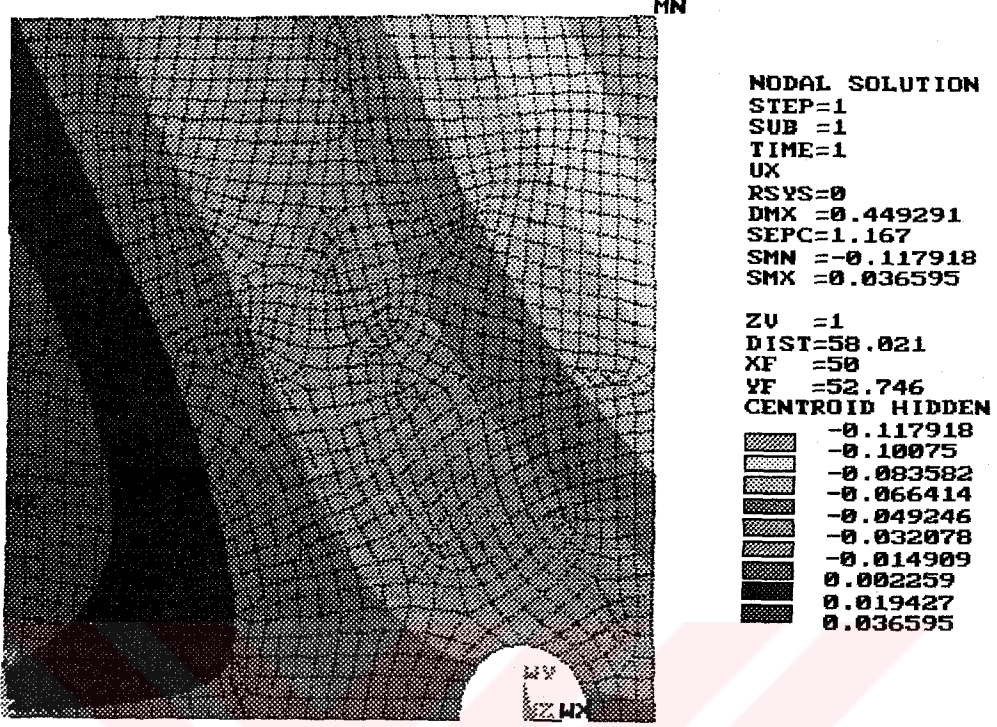


Şekil 9.24

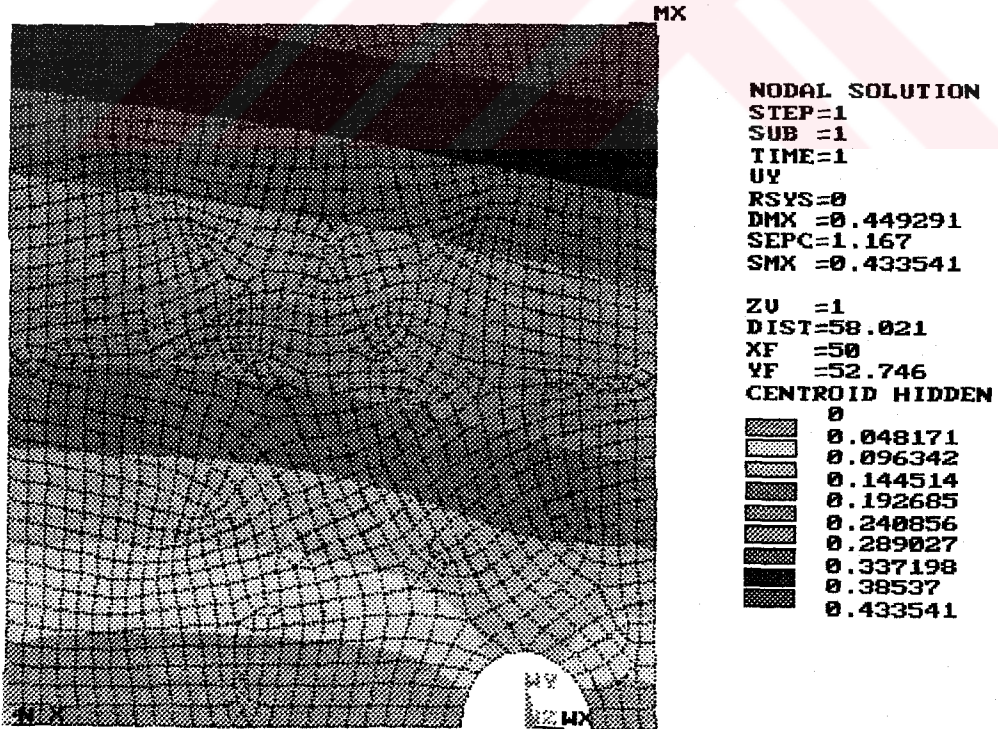


Şekil 9.25

Kayma gerilmesi dağılımı Şekil 9.25 de verilmiştir. x yönündeki yerdeğiştirme Şekil 9.26 da, y yönündeki yerdeğiştirme ise Şekil 9.27 de verilmiştir.

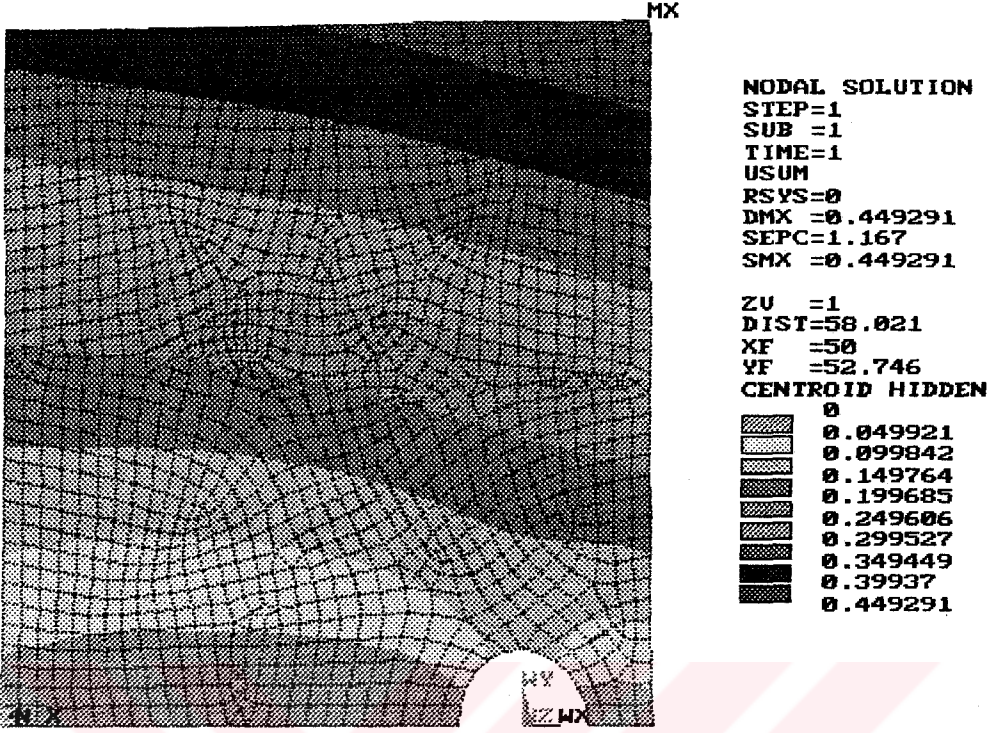


Şekil 9.26.



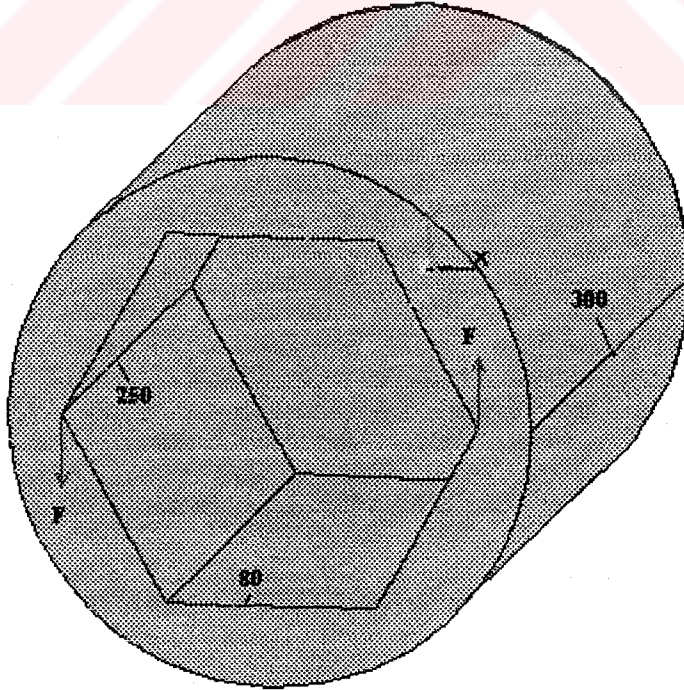
Şekil 9.27.

Toplam yer değiştirme şekli ise şekil 9.28.de görülebilir.



şekil 9.28.

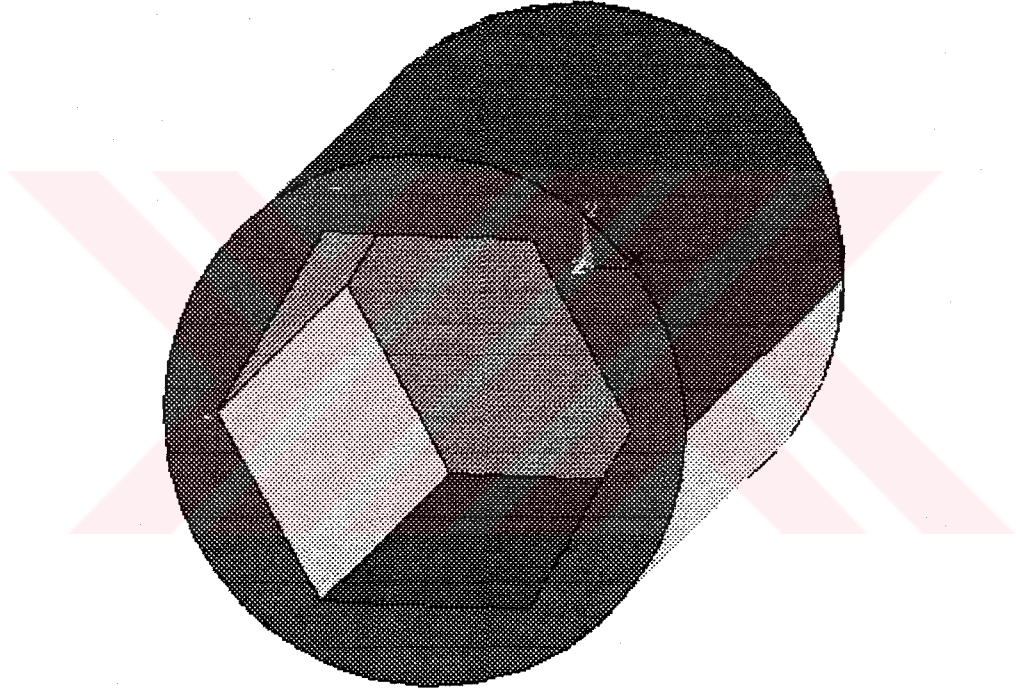
9.3.3. Üç Boyutlu  Altıköşe Başlı Parçanın Gerilme Analizi



şekil 9.29.

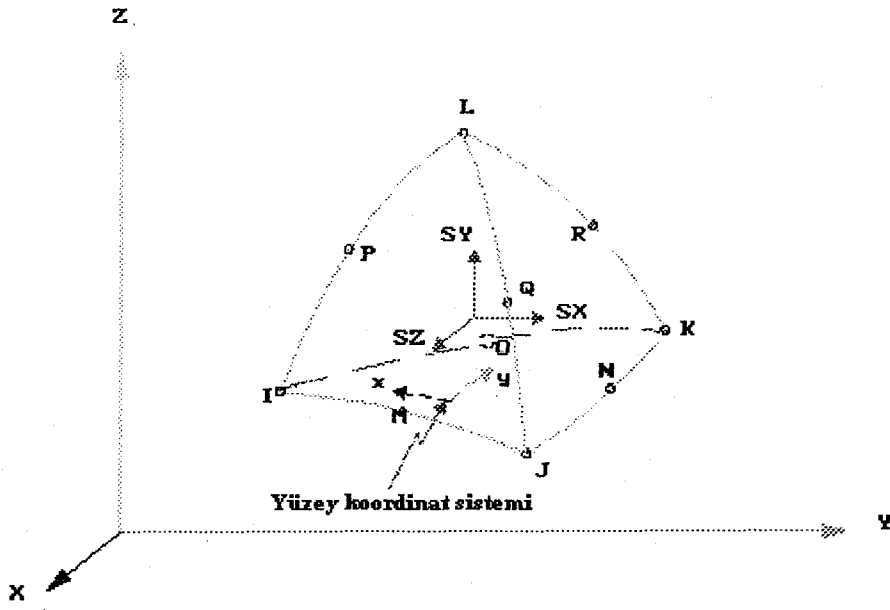
Şekil 9.29 da somun anahtarına benzeyen ve ortasında altıgen bir boşluk bulunan parça görülmektedir. Bu parçayı, içten altı köşe başlı (allen) civatasının sonuna kadar sıkılmış durumunun analizi için yaklaşık bir model olarak düşünebiliriz. Boyu 300mm, çapı 100 mm olan parçanın içine açılan boşluğun derinliği 250 mm ve kenar uzunluğu 80 mm dir. Parçaya 1000N şiddetinde ikiz kuvvet etki etmektedir. Oluşabilecek gerilme ve şekil değiştirme miktarlarını bulalım. Malzeme olarak çelik seçilmiştir. $E = 207.000 \text{ N.mm}^2$ dir.

Program yardımı ile yapılmış modelleme Şekil 9.30 da verilmiştir.

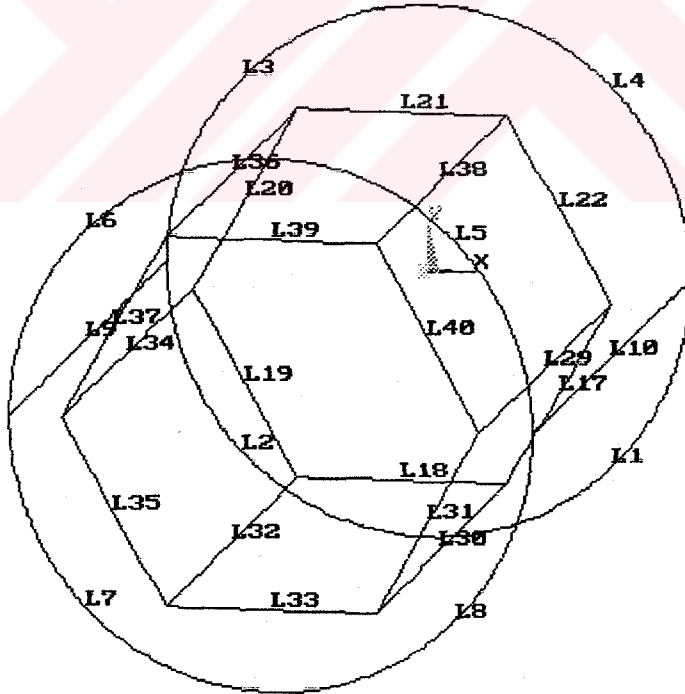


Şekil 9.30.

Parçanın otomatik olarak bölümlenebilmesi için üç boyutlu Solid 92 adlı eleman seçilmiştir. Elemanın şekli, koordinat sistemi ve ilgili özellikleri Şekil 9.31. de gösterilmiştir. Parçayı oluşturan çizgileri Şekil 9.32. de görebiliriz. Numaralama işlemi otomatik olarak program tarafından gerçekleştirilmektedir. Analizin yapılabilmesi için L_1 , L_2 , L_3 ve L_4 çizgileri ile sınırlanmış alanın şekil değiştirmesinin sıfır olduğu kabulünün yapılması gerekir.

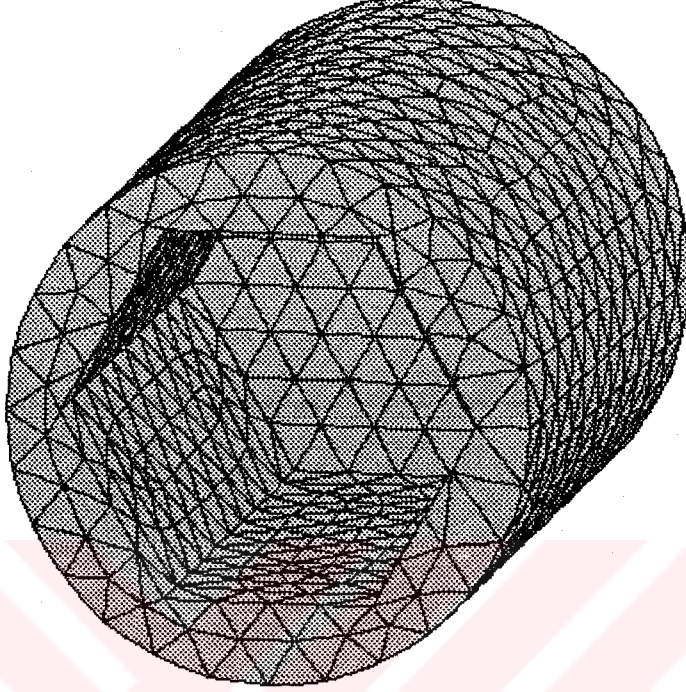


Şekil 9.31.

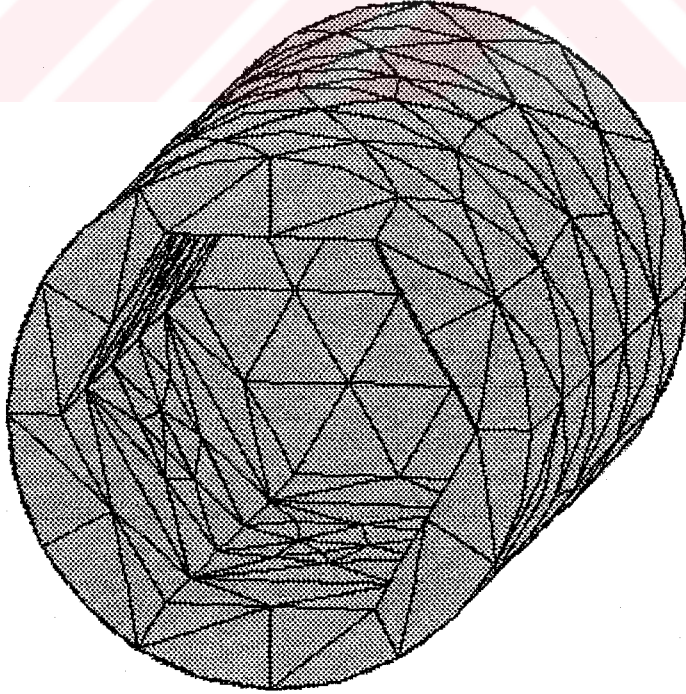


Şekil 9.32

25 ve 60 birimlik iki değişik ölçü için bölümleme Şekil 9.33 ve Şekil 9.34 de yapılmıştır. Ancak kullanılan programın kapasitesi ufak bölümleme ile işlem yapmaya yetmediğinden 60 birim için işlem sürdürülecektir.

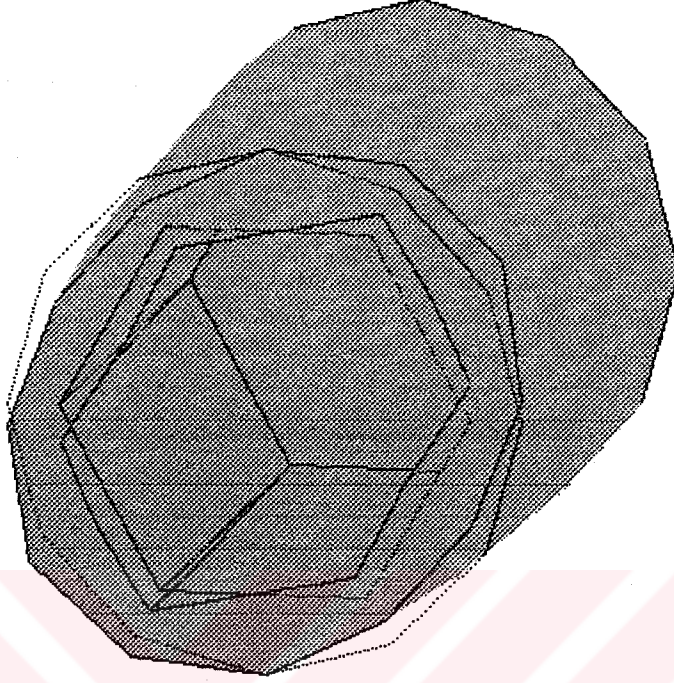


Şekil 9.33

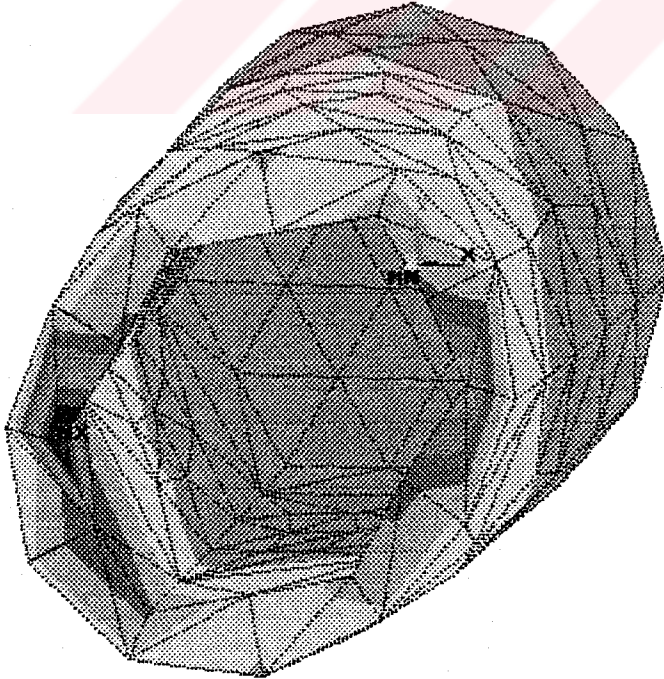


Şekil 9.34.

Cisim kapalı olan diğer ucu sabitlenmiş gibi düşünülerek ikiz kuvvet uygulandıktan sonra, Şekil 9.35 deki durum oluşur. Gerilme dağılımı Şekil 9.36 da verilmiştir.



Şekil 9.35

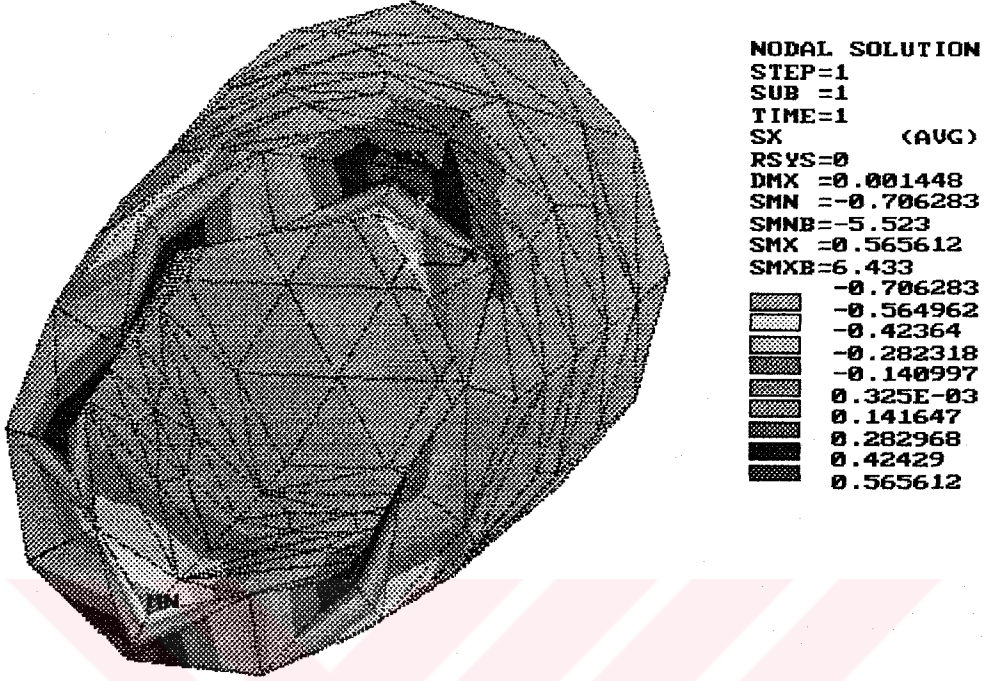


NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SEQV (AVG)

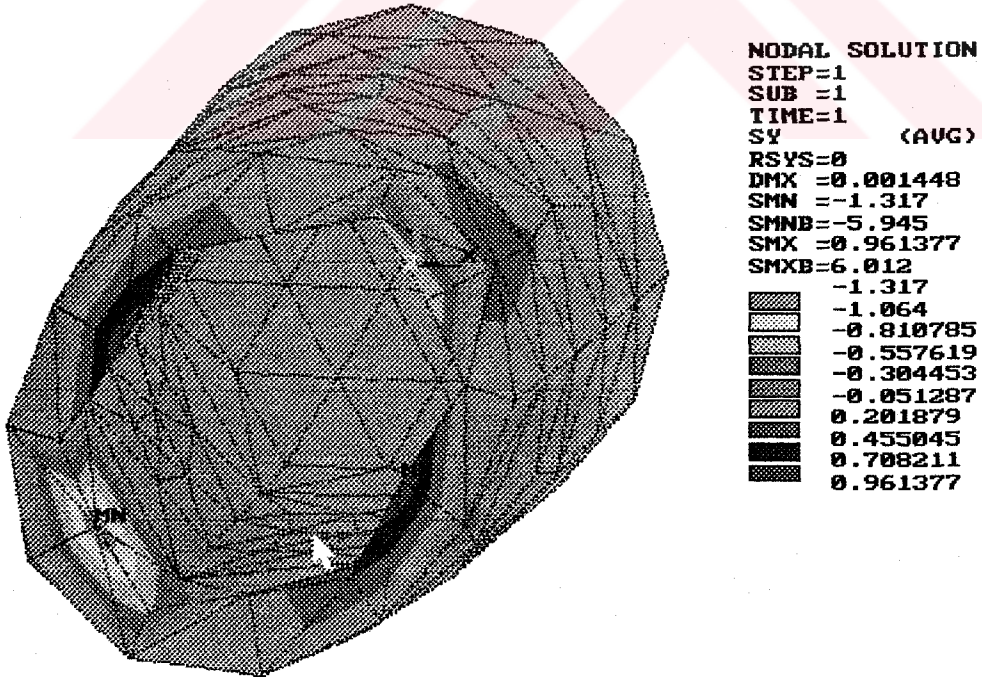
DMX	=0.001448
SMN	=0.001099
SMX	=3.514
SMXB	=9.492
	0.001099
	0.39137
	0.781642
	1.172
	1.562
	1.952
	2.343
	2.733
	3.123
	3.514

Şekil 9.36

x, ve y yönlerindeki gerilme dağılımları sırası ile Şekil 9.37 ve Şekil 9.38 de verilmiştir.

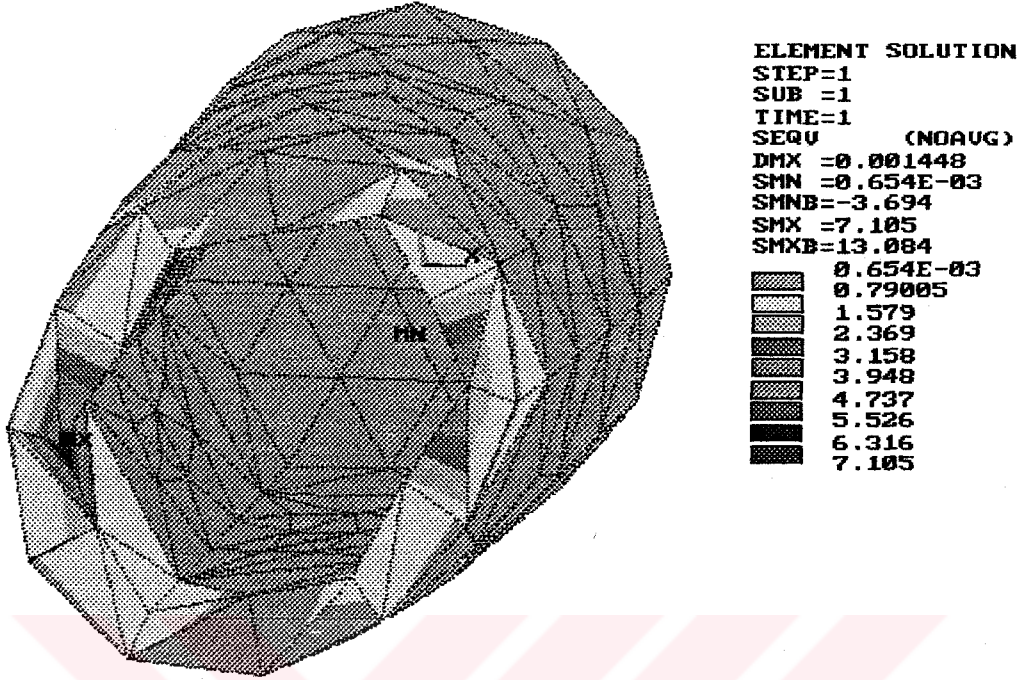


Şekil 9.37.

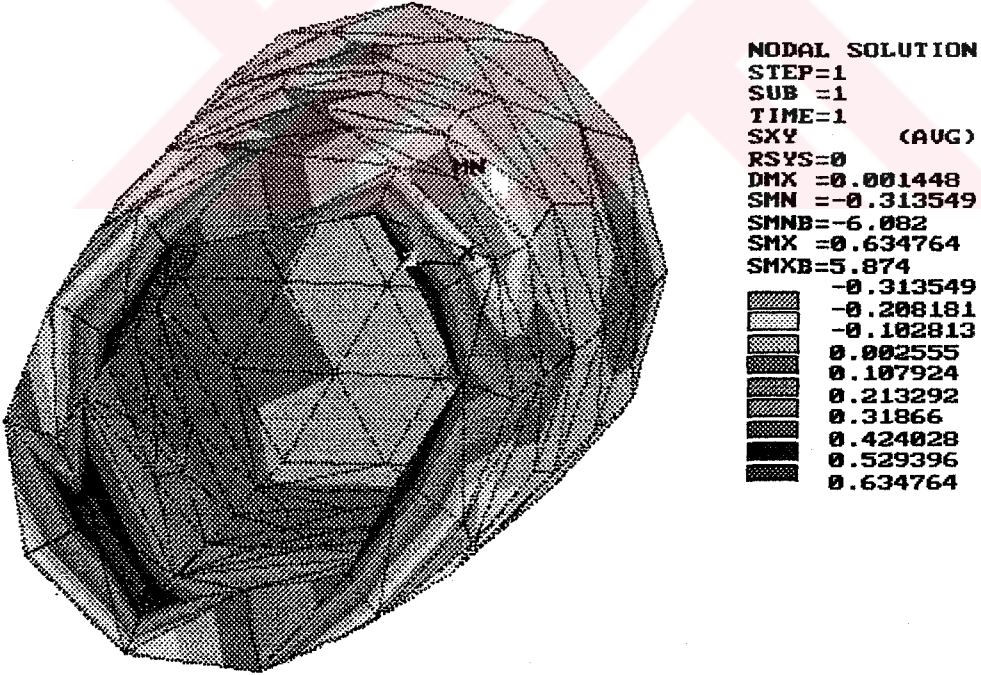


Şekil 9.38.

Eleman bazlı çözüm Şekil 9.39 da verilmiştir.



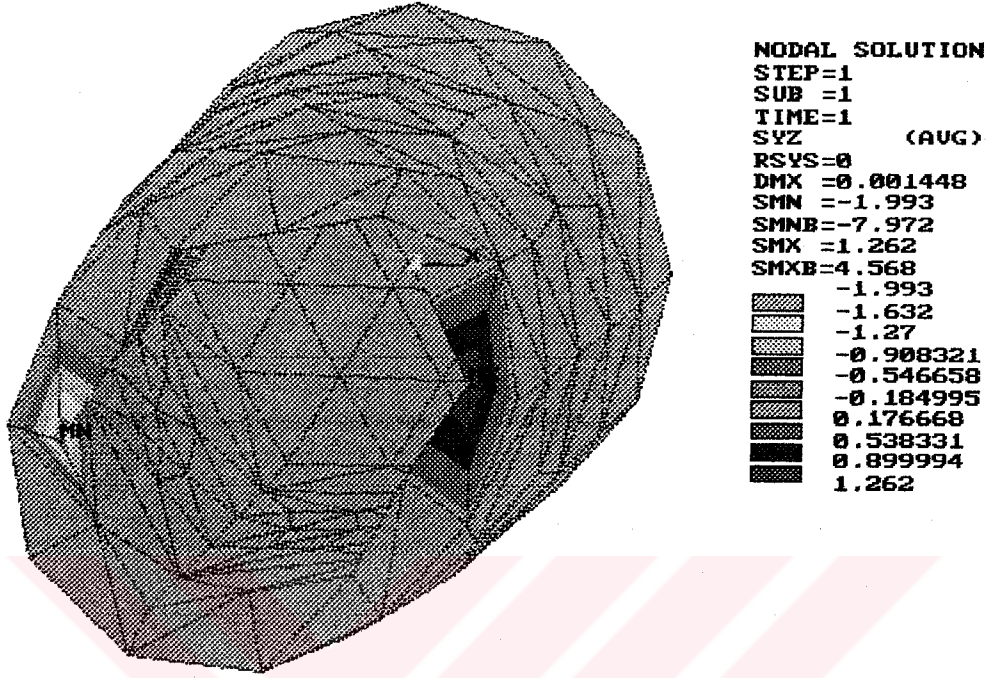
Şekil 9.39.



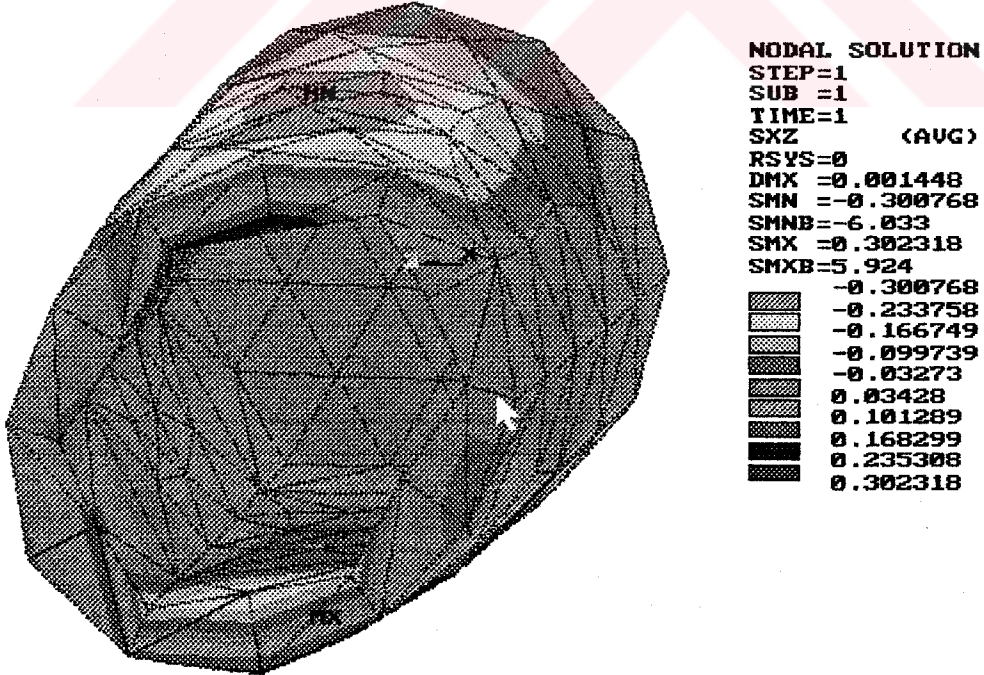
Şekil 9.40.

Şekil 9.40 da xy düzlemindeki kayma gerilmesi dağılımı görülmektedir.

yz ve xz düzlemlerindeki kayma gerilmesi dağılımları Şekil 9.41 ve Şekil 9.42 de verilmektedir.

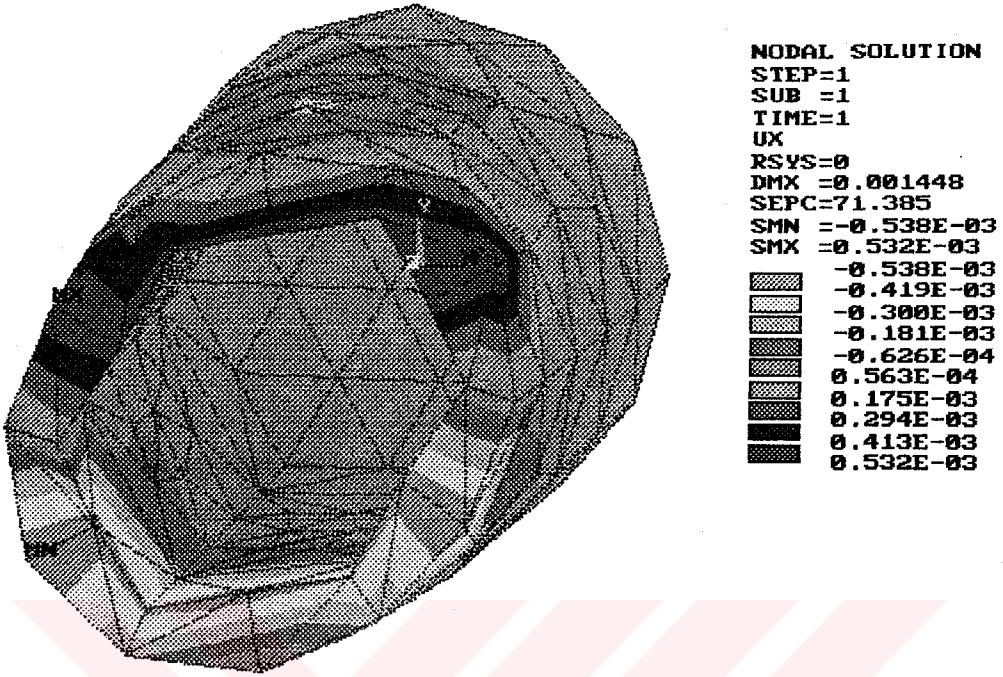


Şekil 9.41

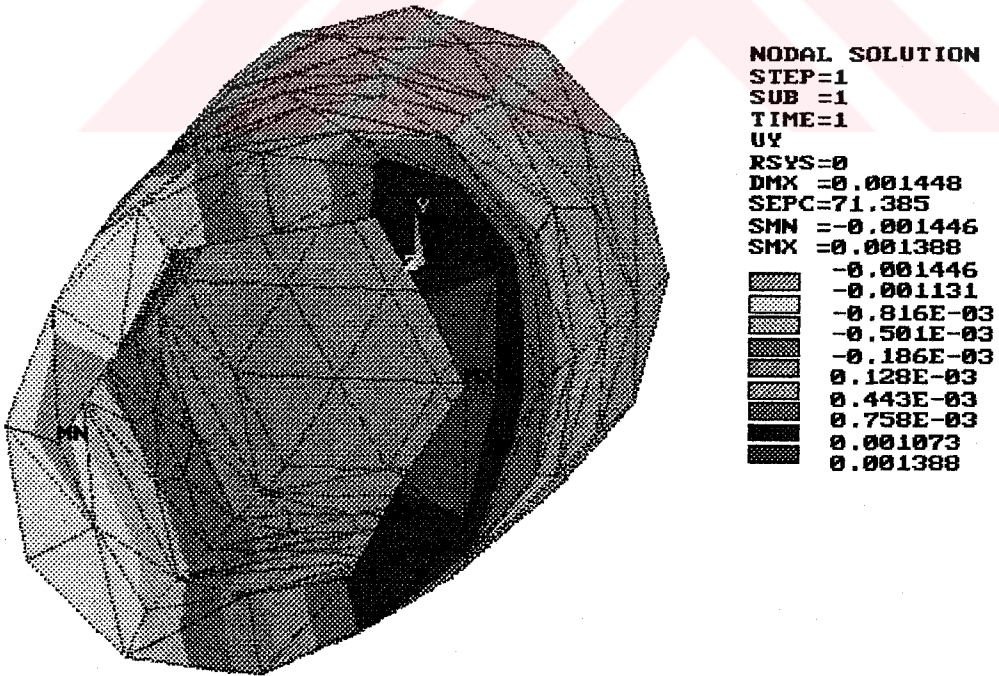


Şekil 9.42

x ve y yönünde oluşabilecek yerdeğişmeler Şekil 9.43 ve Şekil 9.44 de verildi.

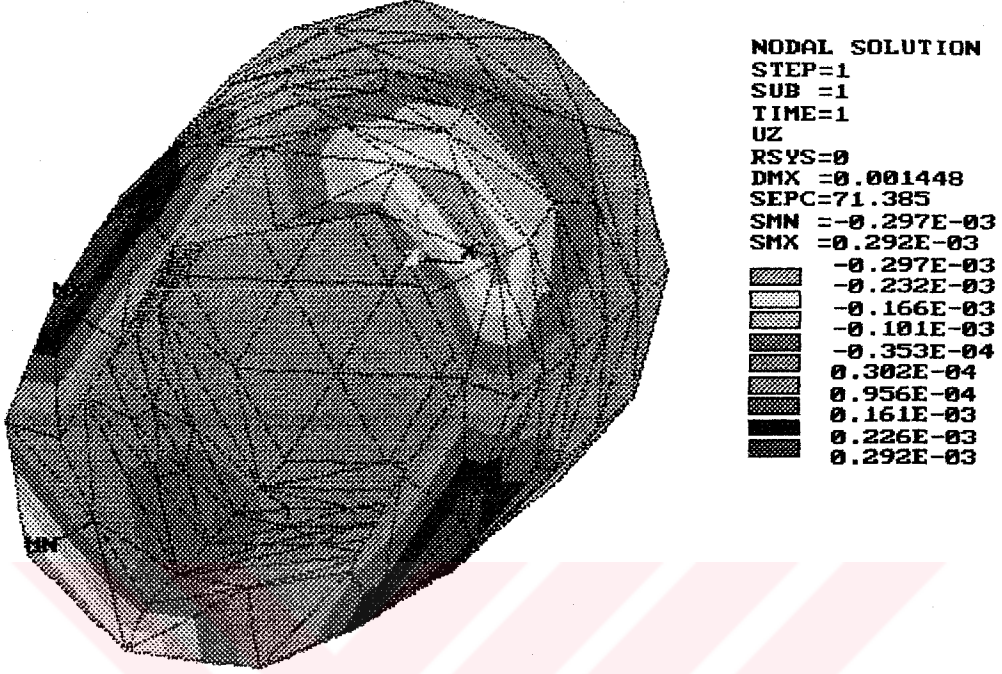


Şekil 9.43.

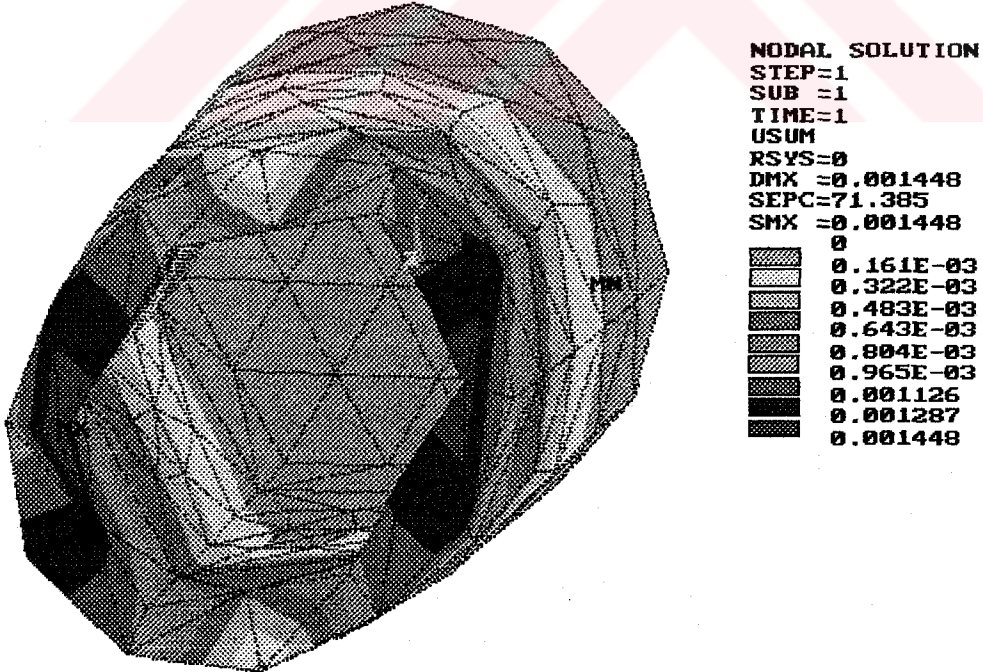


Şekil 9.44

Şekil 9.45 de z yönündeki yerdeğişmeler gösterilmiştir. Toplam yer değişmelerini ise Şekil 9.46 da görebiliriz.

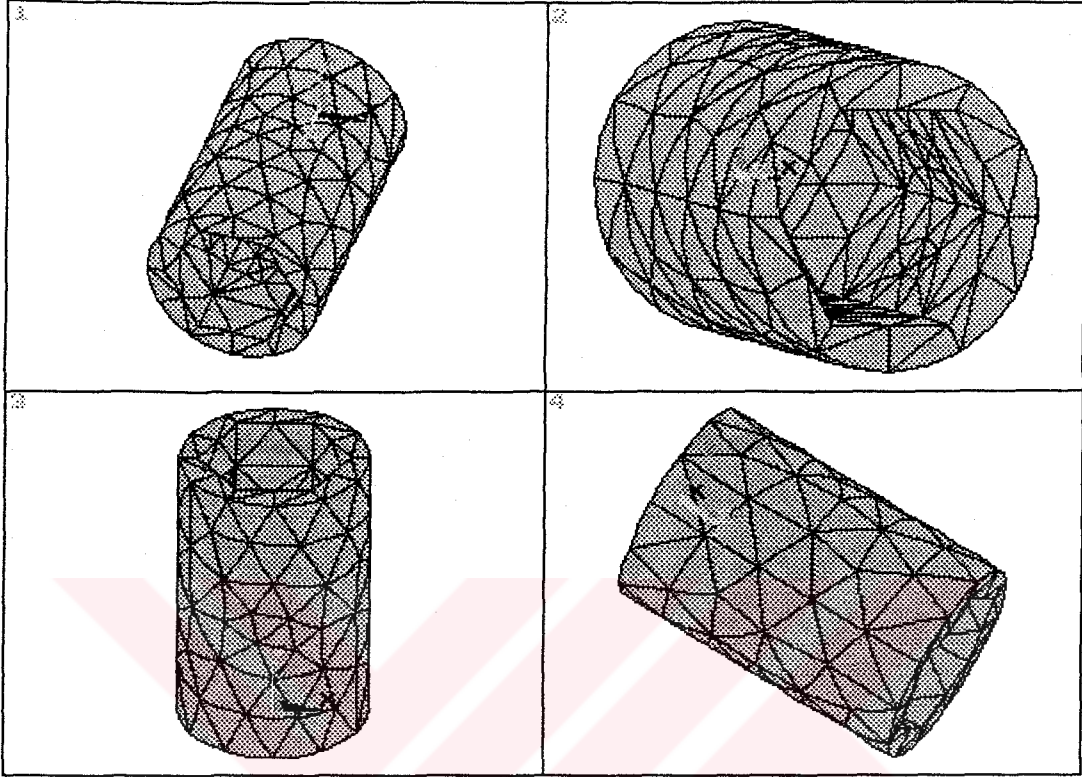


Şekil 9.45.

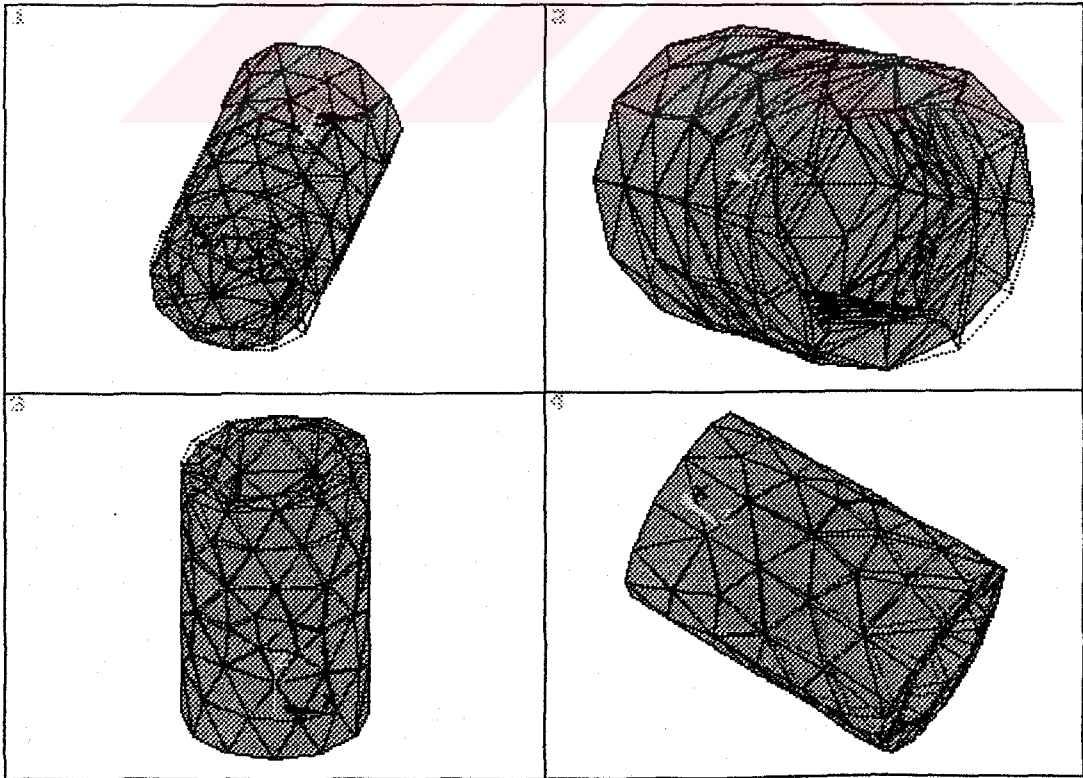


Şekil 9.46

Parça üç boyutlu olduğu için görüntülerin değişik açılardan incelenmesinde yarar vardır. Şekil 9.47. de bölmeleme değişik açılardan görülmektedir. Deforme olmuş şekli ise Şekil 9.48 de görebiliriz.

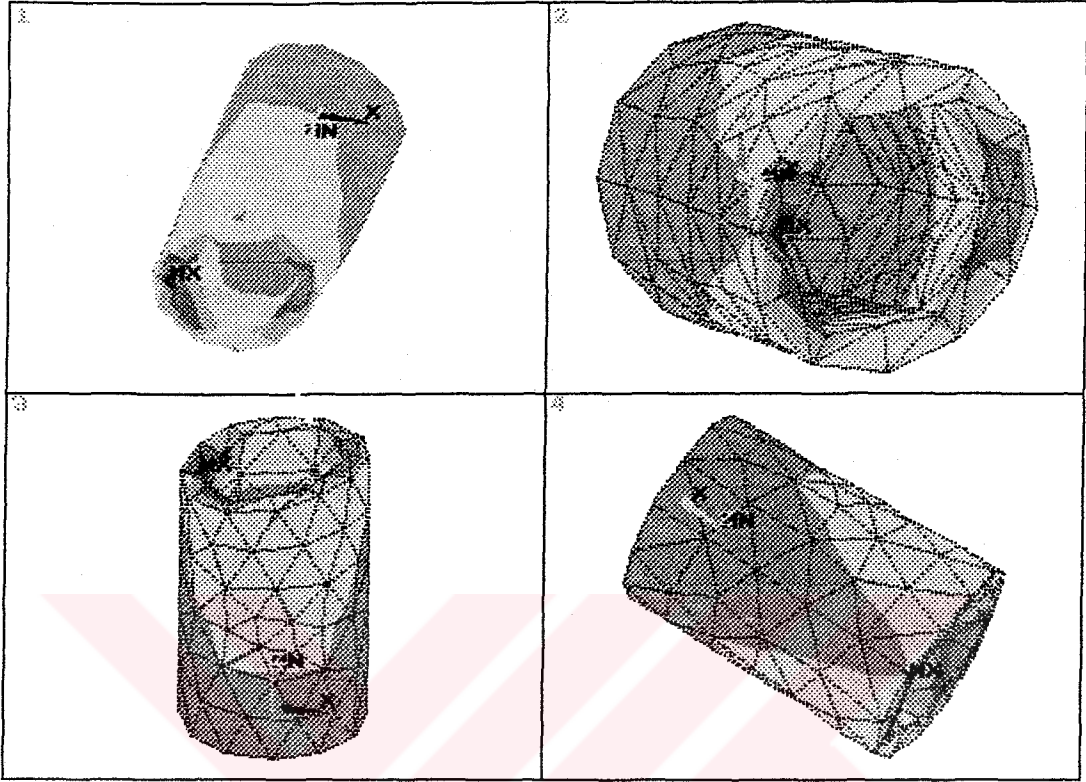


Şekil 9.47.

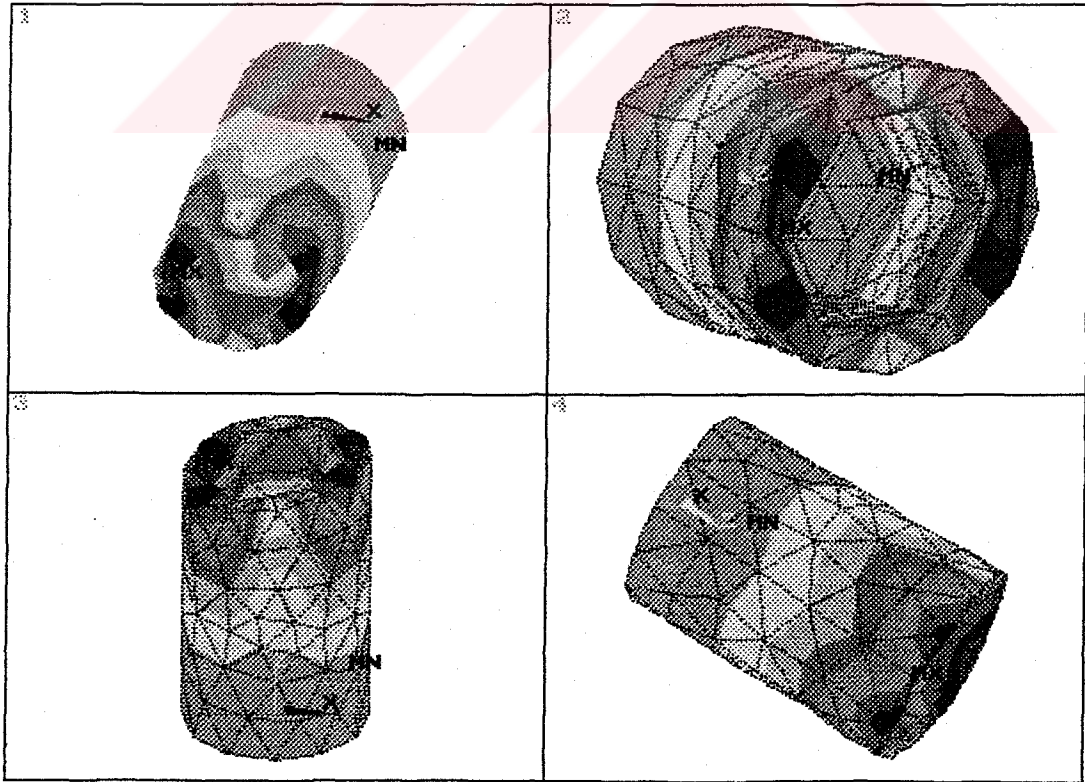


Şekil 9.48.

Şekil 9.49 da toplam gerilme dağılımı verilmiştir. Şekil 9.50 de ise toplam şekil değiştirmeler değişik açılardan verilmiştir.

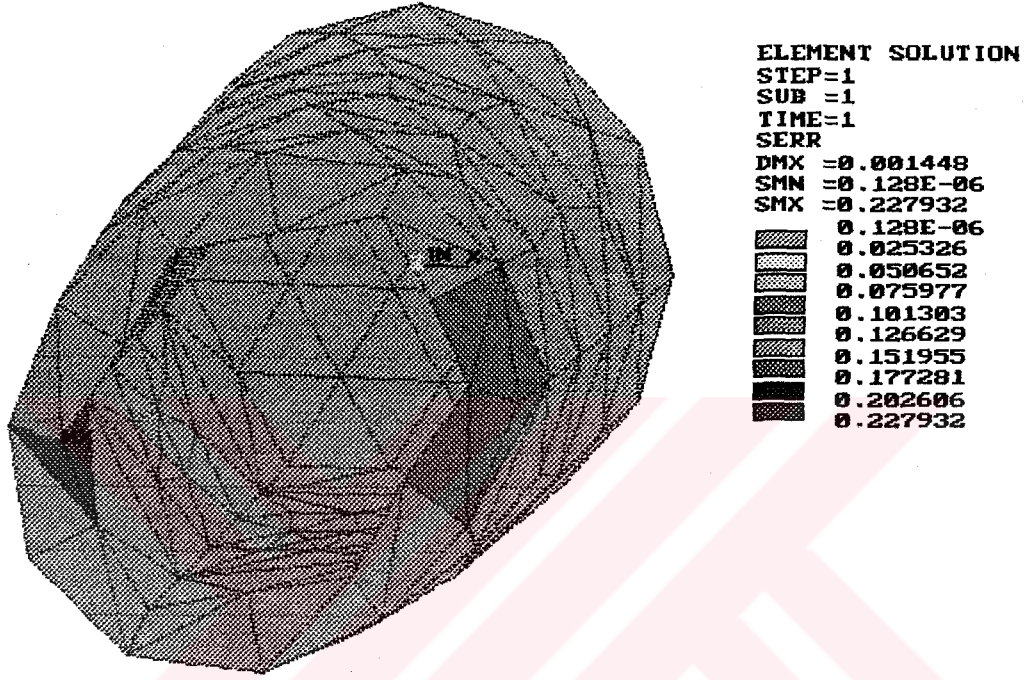


Şekil 9.49.



Şekil 9.50.

Gerilme dağılımı Şekil 9.39 da verilmiştir. Dikkat edilecek olursa kuvvet uygulanan kısımlarda tam simetrik dağılım gerçekleşmemiştir. Bunun sebebi bölmelemenin yeterince küçük yapılamamış olmasıdır. Şekil 9.51 de enerji yöntemi ile hatalı hesaplanma ihtimali olan kısımların dağılımı görülebilir.



Şekil 9.51

Analiz yapılmış parçaların kenarlarındaki kolon şu bilgileri içerir.

Nodal Solution	: Çizim tipi	Rsys	: Aktif sonuç koordinat sistemi
Step = 1	: Basamaklı yük no	Dmx	: Maksimum yerdeğiştirme
Sub = 1	: Alt basamak no	Smn	: Çizim konusuna ait min. değer
Time = 1	: Zaman	Smnb	: Çizim konusuna ait min. sınır değeri
Serr (Sx, Ux)	: Çizimin konusu	Smx	: Çizim konusuna ait max. değer
Mx	: Çizim konusunun maximum yeri	Smxb	: Çizim konusuna ait max sınır değeri
Mn	: Çizim konusunun minimum yeri		

SONUÇLAR

Sonlu Elemanlar Yöntemi, bilgisayar teknolojisindeki gelişmelere paralel olarak sürekli ilerleyen ve uygulama alanı da sürekli genişlemekte olan bir sayısal çözüm metodudur. Bulunan sonuçların deneysel çıktılara uyumu; kullanılan yaklaşım, matematiksel temel ve bölme hassasiyetine bağlıdır.

Bu çalışmada, incelenen parçaların gerilme ve şekil değiştirme analizi sonuçlarının gerçeğe uygun olduğu görülmüştür.

Laboratuvar çalışmalarında, üretilecek parça veya makinaların prototipleri üzerinde yapılan ve oldukça pahalı olan birçok deney, doğrudan bilgisayar ekranından görülebilmekte ve böylece istenen değişiklikler için tekrar tekrar model yapma gereksinimi ortadan kalkmaktadır. Bu ise zaman ve para açısından yüksek verimliliğe ulaşmayı sağlamaktadır.

Çalışmada tercih edilen ANSYS programı, gerilme analizini birkaç değişik yoldan yaparak hatalı olabilecek sonuçlar hakkında bilgi vermektedir. Bu da, kullanımdan dolayı meydana gelebilecek hataların farkedilebilmesine ve düzeltilmesine imkan sağlar. CAM ve CAD sistemleriyle irtibatlı çalışabilen programlar yardımıyla parçanın modellenmesi kolaylaşmakta, imalat aşamaları kontrol edilebilmekte ve en iyiyi, en hızlı ve en ucuza imal edip, en uzun kullanabilmek için değişik alternatifler, şekiller, ölçüler veya malzemeler bulunabilmektedir.

Nonlineer uygulamalarda iyi sonuçlar veren yöntem, inşaat mühendisliğinin kompleks plak ve kabuk problemlerinin külfetli işlemlerini kolayca yapabilmektedir.

Zamana bağlı sürünme olayının deneysel olarak ulaşılamayacak sonuçlarına dahi Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılarak erişilebilir.

Teknoloji ve matematik bilimindeki gelişmeler sayesinde Sonlu Elemanlar Yöntemi geleceğin en etkili ve kolay analiz metodu olacaktır.

KAYNAKLAR

- 1- Dawe, D. J. , 1984. Matrix and finite element displacement analysis structures. Clarendon Press , Oxford.
- 2- Huebner, K. H. , 1975. The finite element method for engineers. A wiley - interscience Publication.
- 3- Introduction to ANSYS for revision 5.0 Volume I, 1993, Program el kitabı
- 4- Introduction to ANSYS for revision 5.0 Volume II, 1993, Program el kitabı
- 5- Kardestuncer, H. (Editor in chief) , 1988. Finite element handbook. McGraw - Hill
- 6- Kayan, İ. , 1987. Cisimlerin mukavemeti. İstanbul Teknik Üniversitesi Matbaası, Gümüşsuyu.
- 7- Köksal, T. , Sonlu elemanlar metodu. 1995. Yıldız Teknik Üniversitesi Matbaası, İstanbul.
- 8- Oydaşık, Ş. , 1983. Mukavemet 1. Anka Ofset Basımevi, İstanbul.
- 9- Segerlind, L. J. , 1984. Applied finite element analysis. John Wiley and Sons, Canada
- 10- Zahavi, E. , 1992 The finite element method in machine design. A Solomon Press .
- 11- Zienkiewicz, O. C. , and Taylor, R. L. , 1989. The finite element method, Volume 1 Fourth Edition, McGraw - Hill, Berkshire - England
- 12- Zienkiewicz, O. C. , and Taylor, R. L. , 1991. The finite element method, Volume 2 Fourth Edition, McGraw - Hill, Berkshire - England

EK 1

Disketle verilen kısım için ek açıklamalar ve indeks

Ansys Programı ile incelenerek Bölüm 9.3 de anlatılan parçalar ile ilgili renkli grafik görüntüleri, disketlere dosyalar halinde kaydedilmiştir. Her parçaya bir numara verilmiş ve ilgili dosyalar bu parçaya ait dizin içerisinde yerleştirilmiştir. PV adlı görüntü programı, ekrandan görüntü alabilmek için, her diskete kopyalanmıştır.

Disketler içerisinde Bölüm 9.3.1, Bölüm 9.3.2 ve Bölüm 9.3.3. de incelenen parçalara ait görüntülerin yanı sıra ankastre mesnetlenmiş ve yayılı yatak yüküne maruz kalan bir asma plakası (kolu) da incelenmiştir.

Parça1 Dizini (Yayılı yük uygulanan bir ucu ankastre çubuk)

<u>Dosya Adı</u>	<u>İçeriği</u>
Den 01	: Parçanın malzeme özellikleri
Den 02	: Eleman tipi listesi ve özellikleri
Den 03	: Plane 82 adlı elemanın genel görünüşü
Den 04	: Plane 82 elemanı için input görünüşü
Den 05	: Plane 82 elemanı için output görünüşü
Den 06	: Model için dikdörtgen parça oluşturulması
Variable 01	: Dikdörtgen şekli + 1 daire (modelleme aşaması)
Variable 02	: Dikdörtgen şekli + 3 daire (modelleme aşaması)
Variable 03	: Tanımlanmış alanların gösterimi
Variable 04	: Numaralanmış alan listesi
Variable 05	: 1 daire çıkarılmış dikdörtgen şekli (modelleme aşaması)
Variable 06	: 3 daire çıkarılmış dikdörtgen şekli (modelleme aşaması)
Variable 07	: Çizgi numaraları
Variable 08	: 3 birimlik bölümlenme yapılmış durum
Variable 09	: Noktasal (node) gösterim şekli
Variable 10	: Mesnetlenen kısımların listesi
Variable 11	: Mesnetlenmiş çizgili parça şekli

- Variable 12 : Yayılı yük listesi
- Variable 13 : Yükleme yapılmış çizgili parça şekli
- Variable 14 : Deforme olmuş parça şekli (orjinal parça sınırları karşılaştırması ile)
- Variable 15 : Reaksiyon kuvvetleri listesi
- Variable 16 : Reaksiyon kuvvetleri listesi
- Variable 17 : Reaksiyon kuvvetleri listesi
- Variable 18 : Mesnet tepkileriyle birlikte deforme olmuş parça şekli
- Variable 19 : Gerilme dağılımı (bölmesiz)
- Variable 20 : Gerilme dağılımı (bölmeli)
- Variable 25 : 3. Ana gerilme dağılımı
- Variable 26 : 2. Ana gerilme dağılımı
- Variable 27 : 1. Ana gerilme dağılımı
- Variable 28 : Kayma gerilmesi dağılımı
- Variable 29 : Yalnız x eksen yönündeki gerilme dağılımı
- Variable 30 : Yalnız y eksen yönündeki gerilme dağılımı
- Variable 31 : Yalnız x eksen yönündeki şekil değiştirme dağılımı
- Variable 32 : Yalnız y eksen yönündeki şekil değiştirme dağılımı
- Variable 33 : Toplam şekil değiştirme dağılımı
- Variable 34 : Enerji hata arama metoduna göre elemansal hata dağılımı

Parça2 Dizini (Eksantrik dairesel bir boşluğa sahip levha)

- | <u>Dosya Adı</u> | <u>İçeriği</u> |
|------------------|---|
| Variable 01 | : Parçanın malzeme özellikleri listesi |
| Variable 02 | : Model için dikdörtgen parça oluşturulması |
| Variable 03 | : Dairesel alanın çıkarıldığı durum |
| Variable 04 | : 3 birimlik bölümlenme yapılmış durum |
| Variable 05 | : 10 birimlik bölümlenme yapılmış durum |
| Variable 07 | : Noktasal (node) gösterim şekli |
| Variable 08 | : Çizgisel gösterim |

- Variable 09 : Katı modellenmiş ve numaralanmış parça
 Variable 11 : Yayılı yük listesi
 Variable 12 : Alan ve çizgi numaraları verilmiş yarı katı model
 Variable 13 : 10 birimlik bölümlenme yapılmış yarı model
 Variable 14 : 3 birimlik bölümlenme yapılmış yarı model
 Variable 17 : Mesnetlenen kısımların listesi
 Variable 18 : Yükleme yapılmış çizgisel model
 Variable 19 : Mesnet gösterimli yükleme yapılmış çizgisel model
 Variable 20 : Yayılı yük listesi
 Variable 21 : Deforme olmuş parça şekli (orjinal parça sınırları karşılaştırması ile)
 Variable 22 : Gerilme dağılımı (bölmeli)
 Variable 23 : Yalnız x eksen yönündeki gerilme dağılımı
 Variable 24 : Yalnız y eksen yönündeki gerilme dağılımı
 Variable 25 : Kayma gerilmesi dağılımı
 Variable 26 : 1. Ana gerilme dağılımı
 Variable 27 : 2. Ana gerilme dağılımı
 Variable 28 : 3. Ana gerilme dağılımı
 Variable 30 : Yalnız x eksen yönündeki şekil değiştirme dağılımı
 Variable 31 : Yalnız y eksen yönündeki şekil değiştirme dağılımı
 Variable 32 : Toplam şekil değiştirme dağılımı
 Variable 33 : Enerji hata arama metoduna göre elemansal hata dağılımı

Parça3 Dizini (Üç boyutlu iç altıköşe başlı parça)

Dosya Adı İçeriği

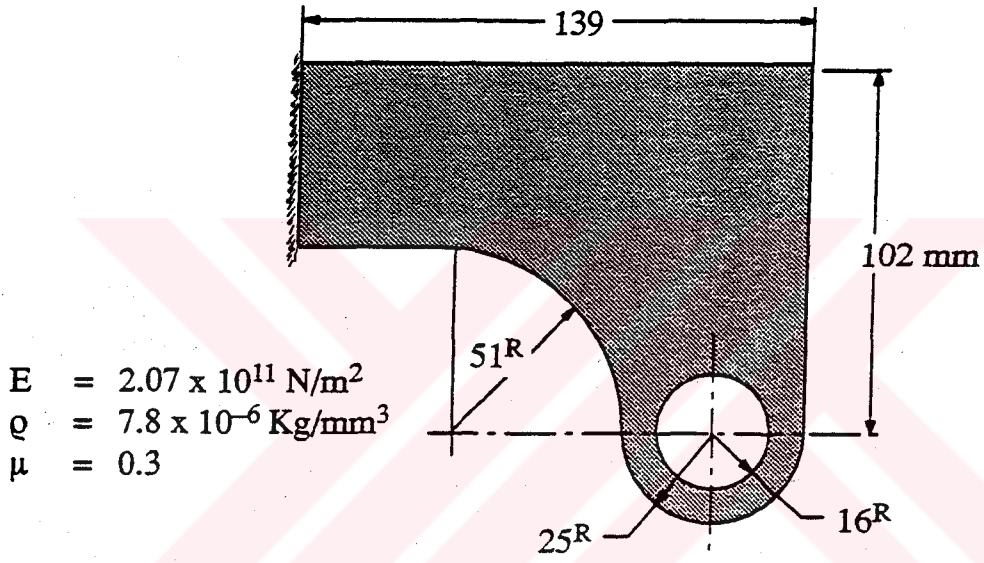
- Variable 01 : Solid 92 adlı eleman için input görünüşü
 Variable 02 : Solid 92 adlı eleman için output görünüşü
 Variable 03 : Modelin dış silindirinini şekli
 Variable 04 : Modellenmiş parça
 Variable 05 : Modellenmiş parçaya değişik açıdan bakış

- Variable 06 : 25 birimlik bölümlenme yapılmış model
- Variable 07 : Çizgi numaraları
- Variable 09 : Kuvvet uygulanmış model
- Variable 10 : Modeli oluşturan yüzeylerin gösterilmesi
- Variable 11 : 6 birimlik bölümlenme yapılmış model
- Variable 13 : Bölümlenmiş modele kuvvet uygulanışı
- Variable 14 : Deforme olmuş parça şekli (orjinal parça sınırları karşılaştırması ile)
- Variable 15 : Deforme olmuş parça şekli (bölümlenme gösterilmeden)
- Variable 16 : Gerilme dağılımı
- Variable 17 : Yalnız y eksenini yönündeki gerilme dağılımı
- Variable 18 : Toplam şekil değiştirme dağılımı
- Variable 19 : Elemanlar çözümünde gerilme dağılımı
- Variable 20 : xz doğrultusundaki kayma gerilmesi dağılımı
- Variable 21 : yz doğrultusundaki kayma gerilmesi dağılımı
- Variable 22 : xz doğrultusundaki kayma gerilmesi dağılımı
- Variable 23 : 1. Ana gerilme dağılımı
- Variable 25 : 2. Ana gerilme dağılımı
- Variable 26 : 3. Ana gerilme dağılımı
- Variable 27 : Enerji hata arama metoduna göre elemanlar hata dağılımı
- Variable 28 : Yalnız x eksenini yönündeki şekil değiştirme dağılımı
- Variable 29 : Yalnız y eksenini yönündeki şekil değiştirme dağılımı
- Variable 30 : Yalnız z eksenini yönündeki şekil değiştirme dağılımı
- Variable 31 : Yalnız x eksenini yönündeki gerilme dağılımı
- Variable 32 : Farklı bakış açısına göre toplam şekil değiştirme dağılımı
- Variable 33 : Farklı bakış açısına göre gerilme dağılımı
- Variable 34 : Farklı bakış açısına göre deforme olmuş parça şekli
- Variable 35 : Farklı bakış açısına göre deforme olmuş parça şekli (eleman sınırları ile)
- Variable 36 : Toplam şekil değiştirme dağılımının farklı açılardan çoklu gösterimi
- Variable 37 : Gerilme dağılımının farklı açılardan çoklu gösterimi
- Variable 38 : Deforme olmuş şeklin farklı açılardan çoklu gösterimi

Variable 39 : Bölümlenmiş şeklin farklı açılardan çoklu gösterimi

Parça4 Dizini (Ankastre mesnetlenmiş asma plakası)

İncelenecek olan parçanın şekli ve boyutları aşağıda verilmiştir. Parçanın alt kısmındaki yatak boşluğuna 0 - 31.25 N/mm aralığında artan şiddette bir yayılı yatak yükü etki ettirilmiştir. Parça kalınlığı 10 mm dir. Sol uc ankastre olarak mesnetlenmiştir.



Dosya Adı İçeriği





















- Variable 05 : Katı modelleme yapılmış parça
- Variable 06 : Çizgi numaraları
- Variable 07 : Noktasal (node) gösterim şekli
- Variable 08 : 3 birimlik bölümlenme yapılmış durum
- Variable 09 : Mesnetlenen kısımların listesi
- Variable 10 : Yayılı yük listesi
- Variable 11 : Mesnetlenmiş katı parça şekli
- Variable 12 : Yük uygulanmış bölümlü parça şekli
- Variable 13 : Deforme olmuş parça şekli (orjinal parça sınırları karşılaştırması ile)





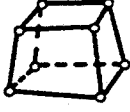







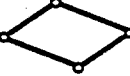






- Variable 14 : Gerilme dağılımı
- Variable 15 : Yalnız x eksenindeki gerilme dağılımı
- Variable 16 : Yalnız y eksenindeki gerilme dağılımı
- Variable 17 : Kayma gerilmesi dağılımı
- Variable 19 : 1. Ana gerilme dağılımı
- Variable 20 : 2. Ana gerilme dağılımı
- Variable 21 : 3. Ana gerilme dağılımı
- Variable 22 : Yalnız x eksenindeki şekil değiştirme dağılımı
- Variable 24 : Yalnız y eksenindeki şekil değiştirme dağılımı
- Variable 25 : Toplam şekil değiştirme dağılımı
- Variable 26 : Enerji hata arama metoduna göre elemansal hata dağılımı

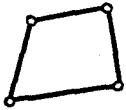
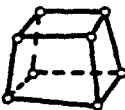
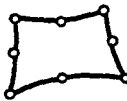
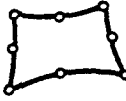
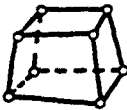
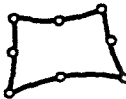









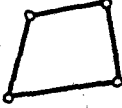
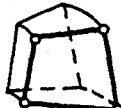
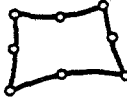








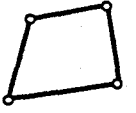
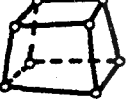










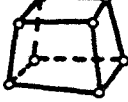

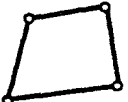

EK 2

Ansys programında bulunan eleman tipleri listesi

Structural Point	Structural 2-D Line	Structural 2-D Beam		
Structural Mass  MASS21 1 node 3-D space DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ	Spar  LINK1 2 nodes 2-D space DOF: UX, UY	Elastic Beam  BEAM3 2 nodes 2-D space DOF: UX, UY, ROTZ	Plastic Beam  BEAM23 2 nodes 2-D space DOF: UX, UY, ROTZ	Offset Tapered Unsymmetric Beam  BEAM54 2 nodes 2-D space DOF: UX, UY, ROTZ
Structural 3-D Line		Structural 3-D Beam		
Spar  LINK8 2 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ	Tension-Only Spar  LINK10 2 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ	Linear Actuator  LINK11 2 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ	Elastic Beam  BEAM4 2 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ	Thin Walled Plastic Beam  BEAM24 2 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ
	Structural Pipe			
Offset Tapered Unsymmetric Beam  BEAM44 2 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ	Elastic Straight Pipe  PIPE16 2 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ	Elastic Pipe Tee  PIPE17 4 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ	Curved Pipe (Elbow)  PIPE18 2 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ	Plastic Straight Pipe  PIPE20 2 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ
		Structural 2-D Solid		
Immersed Pipe  PIPE59 2 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ	Plastic Curved Pipe  PIPE60 2 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ	Triangular Solid  PLANE2 6 nodes 2-D space DOF: UX, UY	Axisymmetric Harmonic Struct. Solid  PLANE25 4 nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ	Structural Solid  PLANE42 4 nodes 2-D space DOF: UX, UY

<p>Structural Solid</p>  <p>PLANE32 8 nodes 2-D space DOF: UX, UY</p>	<p>Axisymmetric Harmonic Struct. Solid</p>  <p>PLANE83 8 nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ</p>	<p>Structural 3-D Solid</p> <p>Structural Solid</p>  <p>SOLID45 8 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ</p>	<p>Layered Solid</p>  <p>SOLID46 8 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ</p>	<p>Anisotropic Solid</p>  <p>SOLID64 8 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ</p>
<p>Reinforced Solid</p>  <p>SOLID65 8 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ</p>	<p>Solid with Rotations</p>  <p>SOLID72 4 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ</p>	<p>Solid with Rotations</p>  <p>SOLID73 8 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ</p>	<p>Tetrahedral Solid</p>  <p>SOLID92 10 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ</p>	<p>Structural Solid</p>  <p>SOLID95 20 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ</p>
<p>Structural 2-D Shell</p>		<p>Structural 3-D Shell</p>		
<p>Plastic Axisymmetric Shell with Torsion</p>  <p>SHELL51 2 nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ, ROTZ</p>	<p>Axisymmetric Harmonic Struct. Shell</p>  <p>SHELL61 2 nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ, ROTZ</p>	<p>Shear/Twist Panel</p>  <p>SHELL28 4 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ or ROTX, ROTY, ROTZ</p>	<p>Membrane Shell</p>  <p>SHELL41 4 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ</p>	<p>Plastic Shell</p>  <p>SHELL43 4 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ</p>
<p>Elastic Shell</p>  <p>SHELL63 4 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ</p>	<p>16-Layer Structural Shell</p>  <p>SHELL91 8 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ</p>	<p>Structural Shell</p>  <p>SHELL93 8 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ</p>	<p>100-Layer Structural Shell</p>  <p>SHELL99 8 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ</p>	

Hyperelastic Solid				
<p>Hyperelastic Mixed U-P Solid</p>  <p>HYPERS6 4 nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ</p>	<p>Hyperelastic Mixed U-P Solid</p>  <p>HYPERS8 8 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ</p>	<p>Hyperelastic Mixed U-P Solid</p>  <p>HYPERS74 8 nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ</p>	<p>Hyperelastic Solid</p>  <p>HYPERS84 8 nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ</p>	<p>Hyperelastic Solid</p>  <p>HYPERS86 8 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ</p>
Visco Solid				Thermal Point
<p>Viscoelastic Solid</p>  <p>VISCO88 8 nodes 2-D space DOF: UX, UY</p>	<p>Large Strain Solid</p>  <p>VISCO106 4 nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ</p>	<p>Large Strain Solid</p>  <p>VISCO107 8 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ</p>	<p>Large Strain Solid</p>  <p>VISCO108 8 nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ</p>	<p>Thermal Mass</p>  <p>MASS71 1 node 3-D space DOF: TEMP</p>
Thermal Line				Thermal 2-D Solid
<p>Radiation Link</p>  <p>LINK31 2 nodes 3-D space DOF: TEMP</p>	<p>Conduction Bar</p>  <p>LINK32 2 nodes 2-D space DOF: TEMP</p>	<p>Conduction Bar</p>  <p>LINK33 2 nodes 3-D space DOF: TEMP</p>	<p>Convection Link</p>  <p>LINK34 2 nodes 3-D space DOF: TEMP</p>	<p>Triangular Thermal Solid</p>  <p>PLANE35 6 nodes 2-D space DOF: TEMP</p>
				Thermal 3-D Solid
<p>Thermal Solid</p>  <p>PLANE55 4 nodes 2-D space DOF: TEMP</p>	<p>Axisymmetric Harmonic Thermal Solid</p>  <p>PLANE75 4 nodes 2-D space DOF: TEMP</p>	<p>Thermal Solid</p>  <p>PLANE77 8 nodes 2-D space DOF: TEMP</p>	<p>Axisymmetric Harmonic Thermal Solid</p>  <p>PLANE78 8 nodes 2-D space DOF: TEMP</p>	<p>Thermal Solid</p>  <p>SOLID70 8 nodes 3-D space DOF: TEMP</p>

		Thermal Shell	Fluid		
Tetrahedral Thermal Solid  SOLID87 10 nodes 3-D space DOF: TEMP	Thermal Solid  SOLID90 20 nodes 3-D space DOF: TEMP	Thermal Shell  SHELL57 4 nodes 3-D space DOF: TEMP	Thermal-Fluid Flow  FLUID15 5 nodes 2-D space DOF: VX, VY, TEMP, PRES	Acoustic Fluid  FLUID29 4 nodes 2-D space DOF: UX, UY, PRES	
Acoustic Fluid  FLUID30 8 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, PRES	Dynamic Fluid Coupling  FLUID38 2 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ	Thermal-Fluid Pipe  FLUID66 2 nodes 3-D space DOF: PRES, TEMP	Contained Fluid  FLUID79 4 nodes 2-D space DOF: UX, UY	Contained Fluid  FLUID80 8 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ	
	Thermal Electric			Magnetic Electric	
Axisymmetric Harmonic Contained Fluid  FLUID81 4 nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ	Thermal-Electric Solid  PLANE67 4 nodes 2-D space DOF: TEMP, VOLT	Thermal-Electric Line  LINK68 2 nodes 3-D space DOF: TEMP, VOLT	Thermal-Electric Solid  SOLID69 8 nodes 3-D space DOF: TEMP, VOLT	Current Source  SOURC36 3 nodes 3-D space DOF: MAG	
		Coupled-field			
Magnetic-Electric Solid  PLANE53 8 nodes 2-D space DOF: VOLT, AZ	Magnetic-Electric Solid  SOLID96 8 nodes 3-D space DOF: VOLT, MAG, AX, AY, AZ	Coupled-field Solid  SOLIDS5 8 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, TEMP, VOLT, MAG	Coupled-field Solid  PLANE13 4 nodes 2-D space DOF: UX, UY, TEMP, VOLT, AZ	Tetrahedral Coupled-field Solid  SOLID98 10 nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, TEMP, VOLT, MAG	

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Ömer AKAYDIN

Doğum Tarihi : 06-03-1971

Doğum Yeri : Erzurum

Eğitim Durumu : 1985 - 1988 Erzurum Lisesi.

1988 - 1992 Yıldız Teknik Üniversitesi , Makina Mühendisliği Bölümü.

1993 - 1994 Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans İngilizce hazırlık sınıfı .

1994 -1995 Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans programı, Makina Mühendisliği Ana Bilim Dalı, Konstrüksiyon Programı derslerinin alınması.