

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DARBOUX ÇATILI REGLE YÜZEYLERİN KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ

GÜLSÜM YELİZ SAÇLI

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. SALİM YÜCE**

İSTANBUL, 2013

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DARBOUX ÇATILI REGLE YÜZEYLERİN KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ

Gülsüm Yeliz SAÇLI tarafından hazırlanan tez çalışması 05.08.2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU

Bahçeşehir Üniversitesi

Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Yıldız Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında ilk olarak eğriler teorisi, yüzeyler teorisi ve regle yüzeyler ile ilgili temel kavramlar verilmiş ve regle yüzey üzerinde Darboux çatı incelenmiş olup, Darboux çatılı regle yüzeylerin karakteristik özellikleri araştırılmıştır.

Tez çalışmam boyunca her türlü görüş ve düşünceleriyle bana yol gösteren, yardım ve katkılarını esirgemeyen değerli ve saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Salim YÜCE' ye ve hocamızla çalışmalarını sürdüren geometri çalışma grubuna teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım süresinde sağladıkları maddi ve manevi destekle beni hiç yalnız bırakmayan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ağustos, 2013

Gülsüm Yeliz SAÇLI

İÇİNDEKİLER

	sayfa
SİMGE LİSTESİ	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
ÇİZELGE LİSTESİ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
BÖLÜM 1.....	1
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	1
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2.....	3
TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 Afin Uzay ve Öklid Uzayı	3
2.2 Diferensiyellenebilir Fonksiyonlar	7
2.2.1 k-yıncı Sınıftan Diferensiyellenebilir Fonksiyonlar	7
2.2.2 Tanjant Vektörler ve Tanjant Uzaylar	8
2.2.3 Vektör Alanları ve Vektör Alanlarının Uzayı	10
2.2.4 Yöne Göre Türev ve Kovaryant Türev.....	12
2.3 Eğriler Teorisi	17
2.3.1 Skalar Hız Fonksiyonu ve Skalar Hız.....	18
2.3.2 Parametre Değişimi	18
2.3.3 Serret - Frenet Vektörleri	19
2.3.4 Frenet Formülleri ve Eğrilikler	22
2.3.5 E^3 de Özel Düzlemler	26
2.3.6 Bir Eğrinin Küresel Göstergeleri.....	27
2.4 Yüzeyler Teorisi	29
2.4.1 E^3 Öklid Uzayında Yüzey	29

2.4.2	Şekil Operatörü	31
2.4.3	Temel Formlar	33
2.4.4	Şekil Operatörünün Cebirsel Değişmezleri	34
2.4.5	Yüzey Üzerinde Darboux Çatı	36
BÖLÜM 3		42
REGLE YÜZEYLERDE TEMEL KAVRAMLAR		42
3.1	Regle Yüzey	42
3.2	Dağılma Parametresi	55
3.3	Açılabilir Regle Yüzey	57
3.4	Ortogonal Yörünge	58
3.5	Striksiyon Eğrisi	59
3.6	Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları	67
BÖLÜM 4		88
DARBOUX ÇATILI REGLE YÜZEYLERİN KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ		88
4.1	Regle Yüzeylerde Darboux Çatısı	88
4.2	Darboux Çatılı Regle Yüzeylerde Dağılma Parametresi	92
4.3	Darboux Çatılı Açılabilir Regle Yüzey	93
4.4	Darboux Çatılı Regle Yüzeylerde Ortogonal Yörünge	94
4.5	Darboux Çatılı Regle Yüzeylerde Striksiyon Eğrisi	94
4.6	Darboux Çatılı Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları	103
BÖLÜM 5		117
SONUÇ VE ÖNERİLER		117
KAYNAKLAR		118
EK - A		119
1 – PARAMETRELİ UZAY HAREKETLERİ		119
A.1	Afin Dönüşümler	119
A.2	Çizgiler Uzayında Hareketler	123
EK - B		129
ANALİZ TEMEL KAVRAMLAR		129
B.1	Tek Değişkenli Fonksiyonlar	129
B.1.1	Tek Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik	129
B.1.2	Tek Değişkenli Fonksiyonlarda Türev	131
B.1.3	Tek Değişkenli Fonksiyonlarda İntegral	132
B.2	Çok Değişkenli Fonksiyonlar	133
B.2.1	Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik	133
B.2.2	Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Kısmi Türev	135
B.2.3	Çok Değişkenli Fonksiyonlarda İntegral	136

ÖZGEÇMİŞ.....	140
---------------	-----

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
E^2	Öklid düzlemi
E^3	Öklid uzayı
$\ \cdot\ $	Öklid normu
$\times$	Vektörel çarpım
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	İç çarpım
κ	Eğrinin eğriliği
τ	Eğrinin burulması
K	Yüzeyin Gauss eğriliği
κ_n	Normal eğrilik
κ_g	Geodezik eğrilik
τ_g	Geodezik burulma
$e(s)$	Regle yüzeyin anadoğrusu
$c(s)$	Regle yüzeyin striksiyon eğrisi
L_e	Regle yüzeyin açılım uzunluğu
λ_e	Regle yüzeyin açılım açısı
P_e	Regle yüzeyin dağılma parametresi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2. 1 Tanjant vektör	8
Şekil 2. 2 Tanjant vektörlerde toplama	10
Şekil 2. 3 Parametrik eğri.....	14
Şekil 2. 4 E^3 de özel düzlemler.....	27
Şekil 2. 5 Teğetler göstergesi	28
Şekil 2. 6 Binormaller göstergesi.....	29
Şekil 2. 7 E^3 de yüzey	30
Şekil 2. 8 Eğrilik vektörü	40
Şekil 2. 9 Yüzey eğrisi ve teğet düzlem üzerindeki izdüşümü	40
Şekil 3. 1 E^3 de doğru.....	42
Şekil 3. 2 Semer yüzeyi.....	44
Şekil 3. 3 Möbiüs şeridi	44
Şekil 3. 4 Plücker koniği.....	45
Şekil 3. 5 Genelleştirilmiş koni regle yüzeyi	55
Şekil 3. 6 Regle yüzeyin dağılma parametresi.....	56
Şekil 3. 7 Regle yüzeyin ortogonal yörüngesi.....	59
Şekil 3. 8 Regle yüzeyin striksiyon eğrisi	60
Şekil 4. 1 Regle yüzey üzerinde Darboux çatı.....	90
Şekil 4. 2 Frenet çatısı ile Darboux çatısı arasındaki ilişki	91
Şekil 4. 3 α eğrisinin teğet açılabilir regle yüzeyi.....	101
Şekil 4. 4 Tek kanatlı hiperboloid regle yüzeyi	103
Şekil Ek A.1 E^3 de doğru.....	124

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4. 1 Genel sonuçların karşılaştırılması..... 116

DARBOUX ÇATILI REGLE YÜZEYLERİN KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ

Gülsüm Yeliz SAÇLI

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Salim YÜCE

Bu tezde Darboux çatılı regle yüzeyler ve karakteristik özellikleri konu alınmıştır. Çalışma beş temel bölüm ve iki ek bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde literatür özeti ve tezin amacı verilmiştir. İkinci bölümde tezin bütününde kullanılacak olan temel kavramlar anlatılmıştır. Üçüncü bölümde ise regle yüzeyler ele alınmıştır.

Tezin orijinal kısmı olan dördüncü bölümde ise regle yüzeylerde Darboux çatı tanımlanmış ve Darboux çatıya bağlı olarak regle yüzeyin karakteristik özellikleri incelenmiştir. Yüzey üzerindeki Darboux çatısı ile Frenet çatısı arasındaki ilişki verilmiştir. Beşinci bölümde ise çalışmanın genel özeti ile birlikte bundan sonraki çalışmalar ile ilgili yol gösterilmiştir.

Tezin ilk ek kısmı EK-A' da üçüncü bölümde temel bilgi olarak kullanılan 1– parametrelili uzay hareketleri, EK-B'de ise tezin tamamı ile ilgili temel analiz bilgileri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Öklid uzayı, eğri, yüzey, regle yüzey, darboux çatı

**CHARACTERISTIC PROPERTIES OF RULED SURFACES WITH
DARBOUX FRAME**

Gülsüm Yeliz SAÇLI

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Salim YÜCE

This thesis has been subject to ruled surface with Darboux - Frame and their characteristic properties. Thesis consists of five chapters and two appendix.

In the first chapter the aim of the thesis and the review of the literature are given. The basic concepts are described in the second chapter, which are used in whole thesis. In the third chapter ruled surfaces are examined.

The fourth chapter of the thesis is the original part. Ruled surface with Darboux Frame defined and characteristic properties of them with respect to Darboux Frame are examined. Moreover, the relation between Darboux Frame and Frenet Frame is given. In the fifth chapter overview of the study are given and shown the path for future studies.

The first additional part Appendix A is used as a basic knowledge of the third chapter 1– parameter space are motions and Appendix B is used as fundamental analysis informations about all of the thesis at Appendix B.

Keywords: Euclid space, curve, surface, ruled surface, Darboux frame

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

1.1 Literatür Özeti

Regle yüzeyler ilk olarak G. Monge tarafından tanımlanmış olup doğruların 1-parametrelili ailesi olarak V. Hlavaty [1] and J. Hoschek [2] tarafından çalışılmıştır. Daha sonra E - Study dönüşümü yardımıyla regle yüzeylerin tanımı geliştirilmiştir.

Bir doğrunun bir eğriye dayanarak hareket etmesiyle oluşturulan regle yüzeyler ve bu yüzeylere ait birçok tanım, teorem, kavram ve özelliklere Öklid ve Öklid dışı geometri çalışmalarında sıklıkla rastlanmaktadır.

Regle yüzeylerden mühendisliklerde, bilgisayar programları ve mimari gibi birçok alanda faydalanılmaktadır. Bunlara örnek olarak CAD (Computer Aided Design) ve CAM (Computer Aided Manufacturing) verilebilir. Regle yüzeylerin özel bir hali olan açılabilir regle yüzeyler ise otomobil, gemi ürünlerinin üretilmesinde, hareket analizinde, katı cisim simülasyonu ve nesne tanıma sistemlerinde kullanılmaktadır [3].

Regle yüzeyler üzerinde çeşitli çatılarda tanımlanmıştır. Regle yüzeyde geodezik çatı Ravani [4] tarafından verilmiştir. H. Hilmi Hacısalihoğlu [5] regle yüzeyleri kendi tanımladığı $\{T, e, n\}$ çatısına göre incelemiş ve bu çatıya göre regle yüzeylerin karakteristik özelliklerinden bahsetmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Tezin amacı E^3 Öklid uzayında regle yüzeyler konusunda temel bir kaynak oluşturmaktır. Bu nedenle ilk olarak yüzey üzerinde tanımlanan herhangi bir çatıdan bağımsız olarak regle yüzeyler anlatılmıştır. Ayrıca tezin orijinal bölümünde ise regle

yüzey üzerinde tanımlanan Darboux çatısına göre yüzeyin karakteristik özellikleri incelenmiştir.

1.3 Hipotez

Bu tezde, H.Hilmi Hacısalihoğlu' nun [5] "Diferensiyel Geometri" kitabındaki regle yüzeyler ile ilgili çalışması baz alınarak E^3 Öklid uzayında regle yüzeyler üzerinde Darboux çatısı tanımlanmıştır. Bu çatıya göre regle yüzeyin karakteristik özelliklerinden ve yüzey üzerindeki Darboux çatısı ile Frenet çatısı arasındaki ilişkiden bahsedilmiştir. Özel durum olarak H.Hilmi Hacısalihoğlu' nun [5]' de tanımladığı ve A. Tutar ve A. Sarıoğlu'nun [6]'da kullandığı $\{T, e, n\}$ dik çatısı elde edilmiştir.

TEMEL KAVRAMLAR**2.1 Afin Uzay ve Öklid Uzayı**

Tanım 2.1 $A \neq \emptyset$ bir küme ve $V, \mathbb{R}$ cismi üzerinde n –boyutlu bir vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned} f : A \times A &\rightarrow V \\ (P, Q) &\rightarrow f(P, Q) = \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlanıyorsa A' ya V vektör uzayı ile birleşen n –boyutlu *afin uzay* denir. A1) ve A2) aksiyomlarına *afin aksiyomları* denir, [7,8].

$$\mathbf{A1)} \quad \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R) \text{ veya } \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

$$\mathbf{A2)} \quad \forall P \in A, \forall \alpha \in V \text{ için } \overrightarrow{PQ} = \alpha \text{ olacak şekilde bir tek } Q \in A \text{ vardır.}$$

Örnek 2.1 $V = \mathbb{R}^n$ (vektör uzayı) ve $A = \mathbb{R}^n$ (sıralı n –lilerin kümesi) olmak üzere

$A = \mathbb{R}^n$ kümesi $V = \mathbb{R}^n$ vektör uzayı ile birleşen bir afin uzaydır, [7,8]

Not 2.1

- V vektör uzayında $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ olacak şekilde bir $\vec{0}$ vektörü varken afin uzayda benzer özelliğe sahip bir nokta yoktur, [7,8].
- V vektör uzayının elemanları vektörler iken V ile birleşen A afin uzayının elemanları bir kümenin sıradan elemanlarıdır. Bu nedenle A afin uzayının elemanlarına *noktalar* denir, [7,8].

Not 2.2

- $\text{boy}A = \text{boy}V$, [7,8].
- A1) aksiyomu gereğince; afin uzayda iki nokta bir vektör belirtir, [7,8].
- A2) aksiyomu gereğince; afin uzayda bir nokta seçilirse uzaydaki her nokta bir vektör belirtir, [7,8].

Tanım 2.2 V n -boyutlu bir vektör uzayı ve A, V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör sistemi V 'in bir bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ kümesine A afin uzayının bir *afin çatısı* denir. P_0 noktasına çatının *başlangıç noktası*, $P_1, P_2, \dots, P_n$ noktasına da afin çatının *birim noktaları* veya *uç noktaları* denir, [7,8].

Teorem 2.1 A, V vektör uzayı ile birleşen n – boyutlu bir afin uzay olsun. A' da belli bir $P_0 \in A$ noktası tespit edildiğinde başlangıç noktası P_0 olan bir afin çatı vardır, [7,8].

Sonuç 2.1 Bir A afin uzayında bir afin çatı verildiğinde bu afin çatıya karşılık gelen bir afin koordinat sistemi bulunabilir, [7,8].

Örnek 2.2

$$\left. \begin{array}{l} P_0 = (0, 0, \dots, 0) \\ P_1 = (1, 0, \dots, 0) \\ \vdots \\ P_n = (0, 0, \dots, 1) \end{array} \right\} \text{ olmak üzere } \{P_0, P_1, \dots, P_n\} \text{ nokta } (n+1) \text{ lisi } \mathbb{R}^n \text{ afin uzayında bir afin}$$

çatıdır, [7,8].

Tanım 2.3 A, V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay ve $B \subset A$ olsun. $P \in B$ için $W_p(B) = \{\overrightarrow{PX} : X \in B\}$ kümesi V nin bir alt uzayı ise B ye A nın bir *afin alt uzayı* denir, [8].

Tanım 2.4 A, V vektör uzayı ile birleşen n – boyutlu bir afin uzay olsun. Eğer V vektör uzayı bir iç çarpım uzayı ise A afin uzayına *Öklid Uzayı* denir, [7,8].

Örnek 2.3 $A = \mathbb{R}^n$ kümesinin $V = \mathbb{R}^n$ ile birleşen n – boyutlu reel afin uzay olduğunu biliyoruz. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

iç çarpım fonksiyonu ile birlikte bir iç çarpım uzayı olduğundan $\mathbb{R}^n$ uzayı Öklid uzayıdır. Öklid uzayı E^n ile gösterilir, [7,8].

Tanım 2.5 $P_0, P_1, \dots, P_n \in E^n$ için $\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \overrightarrow{P_0 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}\}$ sistemi $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ sistemine E^n de bir *Öklid çatısı* denir, [7,8].

Not 2.3 Her Öklid çatısı bir afin çatı iken her afin çatı bir Öklid çatısı değildir, [7,8].

Tanım 2.6 E^n bir afin uzay olduğundan $P_0 \in E^n$ için başlangıç noktası P_0 olan bir $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ afin çatısı vardır. $\forall P \in E^n$ için $\overrightarrow{P_0 P} = \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{P_0 P_i}$, $a_i \in \mathbb{R}$ yazılabilir. O halde,

$$x_i : E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow x_i(p) = a_i, 1 \leq i \leq n$$

olmak üzere $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ afin koordinat sistemi bulunabilir. Bu afin koordinat sistemine *Öklid(dik) koordinat sistemi* denir, [7,8].

Tanım 2.7 X bir küme olsun.

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) \text{ fonksiyonu}$$

- 1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$
- 2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 3) $d(x, y) = d(y, x)$
- 4) $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerini sağlıyorsa d ye X üzerinde bir *metrik* ve (X, d) ikilisine de bir *metrik uzay* denir, [7,8].

Örnek 2.4

$$d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(X, Y) \rightarrow d(X, Y) = \|\overrightarrow{XY}\|$$

uzaklık fonksiyonu E^n de bir metrik olup bu metriğe *Öklid metriği* adı verilir, [7,8].

Tanım 2.8 E^n , n –boyutlu Öklid uzayı ve $X, Y, Z \in E^n$ farklı noktalar olsun.

$\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \in \mathbb{R}^n$ vektörleri arasındaki *açı* θ olmak üzere, $(0 \leq \theta \leq \pi)$

$$\cos \theta = \frac{\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle}{\|\overrightarrow{XY}\| \|\overrightarrow{XZ}\|}$$

ile tanımlıdır. Ayrıca $\overrightarrow{XY} \perp \overrightarrow{XZ}$ olması için gerek ve yeter şart $\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle = 0$ olmasıdır, [7,8].

Teorem 2.2 Bir E^n Öklid uzayında bir $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ koordinat sistemi bir dik koordinat sistemi olması için gerek ve yeter şart $A, B \in E^n$ noktalarının $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ koordinat sistemine göre koordinatları $A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ olmak üzere A ve B noktaları arasındaki uzaklığın

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}$$

olmasıdır.

Eğer $\{\overrightarrow{P_0 P_i}\}$ ortonormal baz değilse $\langle \overrightarrow{P_0 P_i}, \overrightarrow{P_0 P_j} \rangle = g_{ij} \neq \delta_{ij}$ ise

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij} (b_i - a_i)(b_j - a_j)}$$

dir, [7,8].

2.2 Diferensiyellenebilir Fonksiyonlar

2.2.1 k-yıncı Sınıftan Diferensiyellenebilir Fonksiyonlar

Tanım 2.9 E^n Öklid uzayı, $U \subset E^n$ açık alt küme olsun. Eğer $f: U \subset E^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu k . mertebeden kısmi türevlere sahip ve bu türevler sürekli ise f fonksiyonuna k . mertebeden diferensiyellenebilir fonksiyon adı verilir.

k – yıncı sınıftan diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^k(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir ve $C^k(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f: U \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^k\}$ ile tanımlanır, [7].

Not 2.4

- Özel olarak f sadece sürekli ise $f \in C^0(U, \mathbb{R})$ dir. U üzerinde C^1 sınıfından fonksiyonlara özel olarak *0-form* adı verilir.

- Eğer $f \in C^k$ ve $k \in \mathbb{N}$ ise f ye C^∞ sınıfındandır denir ve C^∞ sınıfından fonksiyonların kümesi

$C^\infty(U, \mathbb{R}) = \{f: U \subset E^n \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^k, k \in \mathbb{N}\}$ ile tanımlanır.

- $\varphi: U \subset E^n \rightarrow E^m$

$$P \rightarrow \varphi(P) = (f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P))$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada f_i fonksiyonlarına φ nin *koordinat fonksiyonları* denir. φ fonksiyonunun f_i koordinat fonksiyonları için $f_i \in C^k(E^n, \mathbb{R}), 1 \leq i \leq m$ veya $f_i = x_i \circ \varphi \in C^k(U, \mathbb{R})$ ise $\varphi: U \subset E^n \rightarrow E^m$ fonksiyonuna C^k sınıfındandır denir ve $\varphi \in C^k(E^n, E^m)$ ile gösterilir, [7].

Tanım 2.10 U ve V, E^n de iki açık alt küme olsun. $\varphi: U \rightarrow V$ dönüşümü için

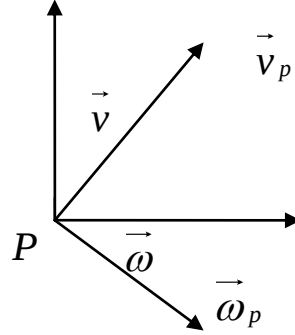
- $\varphi \in C^k(U, V)$
- φ^{-1} var

- $\varphi^{-1} \in C^k(V, U)$

özellikleri sağlanırsa φ ye *diffeomorfizm* denir, [7].

2.2.2 Tanjant Vektörler ve Tanjant Uzaylar

Tanım 2.11 A, V vektör uzayı ile birleşen n –boyutlu bir afin uzay olsun. $P \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için $(P, \vec{v}) = \vec{v}_p$ ikilisine A afin uzayında bir *tanjant vektör* denir.



Şekil 2. 1 Tanjant vektör

P noktasının tanjant vektörlerinin kümesi $T_A(P)$ ile gösterilir ve

$$T_A(P) = \{ \vec{v}_p = (P, \vec{v}) : P \in A, \vec{v} \in V \}$$

şeklinde tanımlanır, [7].

Tanım 2.12 A, V vektör uzayı ile birleşen n – boyutlu bir afin uzay olsun.

$\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ A afin uzayda bir afin çatı olmak üzere $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ kümesi V nin

bir bazıdır. $\vec{v}_p = \overrightarrow{PQ} \in V$ olduğundan $\vec{v}_p = \overrightarrow{PQ} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}$, $\lambda_i \in \mathfrak{F}$ yazılabilir. Burada

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ n-lisine $\vec{v}_p \in T_A(P)$ tanjant vektörünün *koordinatları* veya *bileşenleri* denir

ve $\vec{v}_p = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)|_p$ ile gösterilir, [7].

Teorem 2.3 $\{T_A(P), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. Bu uzaya A afin uzayının

P noktasındaki *tanjant vektörlerinin uzayı* veya kısaca *tanjant uzay* denir.

Özel olarak $A = E^n$ alınırsa $T_{E^n}(P)$; $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. $\forall \vec{v}_p \in T_{E^n}(P)$ tanjant vektörü için $\vec{v}_p = (a_1, a_2, \dots, a_n)|_p$ ile verilen $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sayılarına $\vec{v}_p$ vektörünün *Öklid koordinatları* denir, [7].

Tanım 2.13 E^n , $\mathbb{R}^n$ iç çarpım uzayı ile birleşen Öklid uzayı olmak üzere

$$\left. \begin{array}{l} E_0 = (0, 0, \dots, 0) \\ E_1 = (1, 0, \dots, 0) \\ \vdots \\ E_n = (0, 0, \dots, 1) \end{array} \right\}$$

için $\{\overrightarrow{E_0 E_1}, \overrightarrow{E_0 E_2}, \dots, \overrightarrow{E_0 E_n}\}$ sistemi $\mathbb{R}^n$ de bir ortonormal bazdır.

$$\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{E_0} = (1, 0, \dots, 0) \Big|_{E_0=0} = \overrightarrow{E_0 E_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_{E_0} = (0, \dots, 1) \Big|_{E_0=0} = \overrightarrow{E_0 E_n} \end{array}$$

alınırsa $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_0, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_0 \right\}$ sistemi $T_{E^n}(O)$ uzayının bir bazıdır. Özel olarak $O = P$

alınırsa $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_P, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_P \right\}$ sistemi $T_{E^n}(P)$ uzayının bir bazıdır. Bundan dolayı $P \in E^n$

ve $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ için

$$\vec{v}_p = (P, \vec{v}) = \overrightarrow{PQ} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{E_0 E_i}$$

veya

$$\vec{v}_p = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

yazılabilir. Burada λ değerlerine $\vec{v}_p$ *tanjant vektörünün koordinatları* adı verilir, [7].

2.2.3 Vektör Alanları ve Vektör Alanlarının Uzayı

Tanım 2.14 $\forall P \in E^n$ noktaları üzerindeki tanjant uzayların birleşimi $\bigcup_{p \in E^n} T_{E^n}(p)$ ile gösterilsin.

$$\begin{aligned} \Pi : \bigcup_{p \in E^n} T_{E^n}(p) &\rightarrow E^n \\ \vec{v}_p &\rightarrow \Pi(\vec{v}_p) = p \end{aligned}$$

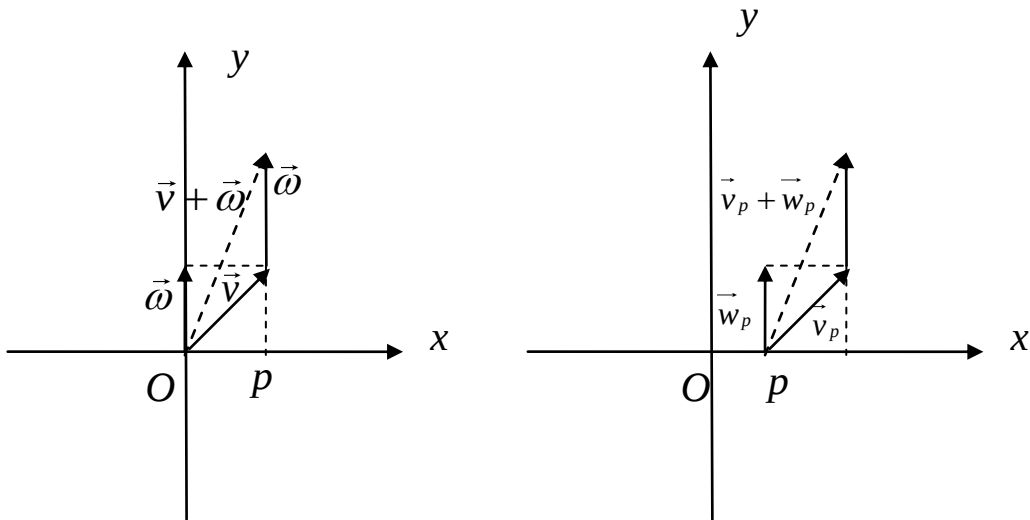
dönüşümü tanımlayalım. $\Pi \circ X : E^n \rightarrow E^n$ özdeşlik dönüşümü olacak şekilde,

$$\begin{aligned} X : E^n &\rightarrow \bigcup_{p \in E^n} T_{E^n}(p) \\ p &\rightarrow X_p \end{aligned}$$

dönüşümüne E^n de bir *vektör alanı* denir. Yani, E^n üzerindeki bir X vektör alanı, $\forall P \in E^n$ noktasına $T_{E^n}(p)$ nin bir X_p tanjant vektörünü karşılık getiren bir fonksiyon olarak düşünülebilir. E^n de bütün vektör alanlarının kümesi $\chi(E^n)$ ile gösterilir ve

$$\chi(E^n) = \left\{ X \mid X : E^n \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} \bigcup_{p \in E^n} T_{E^n}(p) \right\}$$

şeklinde tanımlanır, [7].



Şekil 2.2 Tanjant vektörlerde toplama

Teorem 2.4 $\{\chi(E^n), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına *vektör alanlarının uzayı* denir, [7].

Tanım 2.15 $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\forall X \in \chi(E^n), \forall P \in E^n$ için

$$(fX)(P) = f(P) \overrightarrow{X_p}$$

şeklinde tanımlı işleme *bir reel değerli fonksiyon ile bir vektör alanının çarpımı* denir. Burada, $f(P) \in \mathbb{R}$ ve $\overrightarrow{X_p} \in T_{E^n}(p)$ olduğundan $f(P) \overrightarrow{X_p} \in T_{E^n}(P)$ dir. O halde $fX \in \chi(E^n)$ dir, [7].

Tanım 2.16 E^n de bir Öklid çatısı $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ olsun. Bu durumda $\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \overrightarrow{P_0 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}\}$ $\mathbb{R}^n$ nin bir ortonormal bazıdır. $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ Öklid çatısına karşılık gelen Öklid koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} : E^n &\rightarrow \bigcup T_{E^n}(P) \\ p &\rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}(P) = (P, \overrightarrow{P_0 P_i}) \end{aligned}$$

tanımlanırsa $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(E^n)$ dir. Burada $\overrightarrow{P_0 P_i} = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{in})$ olarak seçilirse, yani

$$\overrightarrow{P_0 P_1} = (1, 0, \dots, 0), \dots, \overrightarrow{P_0 P_n} = (0, 0, \dots, 1) \text{ ise}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p &= (1, 0, \dots, 0) \Big|_p \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p &= (0, 1, \dots, 0) \Big|_p \\ &\vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p &= (0, 0, \dots, 1) \Big|_p \end{aligned} \right\}$$

yazılabilir. Buradan $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ sistemi $\chi(E^n)$ nin bir bazıdır. Bu baza $\chi(E^n)$,

nin *standart bazı* denir, [7].

$\text{boy } E^n = \text{boy } T_{E^n}(p) = \text{boy } \chi(E^n) = n$ şeklindedir, [7].

2.2.4 Yöne Göre Türev ve Kovaryant Türev

Tanım 2.17 Bir $P \in E^n$ noktasında türevlenebilen reel değerli fonksiyonların kümesi $C(P, \mathbb{R})$ ile gösterilir. $\forall P \in E^n$ için $f \in C(P, \mathbb{R})$ ise f ye E^n 'de diferensiyellenebilir denir. E^n 'de türevlenebilir fonksiyonların kümesi $C(E^n, \mathbb{R})$ ile gösterilir, [7].

Teorem 2.5 $\{C(E^n, \mathbb{R}), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına *reel değerli fonksiyonların vektör uzayı* denir, [7].

Tanım 2.18 $\{C(E^n, \mathbb{R}), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \otimes, \odot\}$ yedilisi bir cebirdir. Bu cebire reel değerli *diferensiyellenebilir fonksiyonların cebiri* denir, [7].

Tanım 2.19 $\vec{v}_p \in T_{E^n}(P)$ olmak üzere $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonunun $\vec{v}_p$ tanjant vektörü doğrultusundaki türevi $\vec{v}_p[f]$ ile gösterilir ve

$$\vec{v}_p[f] = \left. \frac{d}{dt} [f(P + t\vec{v})] \right|_{t=0}$$

ile tanımlanır, [7].

Teorem 2.6 $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ vektörü, $P \in E^n$ noktası ve $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilsin.

$$\vec{v}_p[f] = \sum_{i=1}^n v_i \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_P$$

şeklindedir, [7].

Teorem 2.7 $\forall f, g \in C(E^n, \mathbb{R}), \forall \vec{v}_p, \vec{u}_p \in T_{E^n}(P), \forall a, b \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır, [7].

$$1) (a\vec{v}_p + b\vec{u}_p)[f] = a\vec{v}_p[f] + b\vec{u}_p[f]$$

$$2) \vec{v}_p[af + bg] = a\vec{v}_p[f] + b\vec{v}_p[g]$$

$$3) v_p[f \cdot g] = v_p[f]g(p) + f(p)v_p[g]$$

Sonuç 2.2 2) şıkkından $\forall f, g \in C(E^n, \mathbb{R}), \forall \vec{v}_p \in T_{E^n}(p), \forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\vec{v}_p[af + bg] = a\vec{v}_p[f] + b\vec{v}_p[g]$$

olmak üzere $af + bg \in C(E^n, \mathbb{R})$ ve $a\vec{v}_p[f], b\vec{v}_p[g] \in \mathbb{R}$ için $a\vec{v}_p[f] + b\vec{v}_p[g] \in \mathbb{R}$

olduğundan $\vec{v}_p : C(E^n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyondur. Yani; her tanjant vektörü

$C(E^n, \mathbb{R})$ den $\mathbb{R}$ ye bir lineer dönüşümdür. O halde $\vec{v}_p \in \text{Hom}(C(E^n, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ dir, [7].

Tanım 2.20 $X \in \chi(E^n), f \in C(E^n, \mathbb{R})$ olsun. $\forall P \in E^n$ için $(X[f])(p) = \vec{X}_p[f]$ ile tanımlı $X[f] \in C(E^n, \mathbb{R})$ fonksiyonuna f fonksiyonunun X vektör alanı yönündeki türevi denir. O halde,

$$\begin{aligned} X : C(E^n, \mathbb{R}) &\rightarrow C(E^n, \mathbb{R}) \\ f &\rightarrow X(f) : E^n \rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow (X(f))(P) = X_p[f] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır, [7].

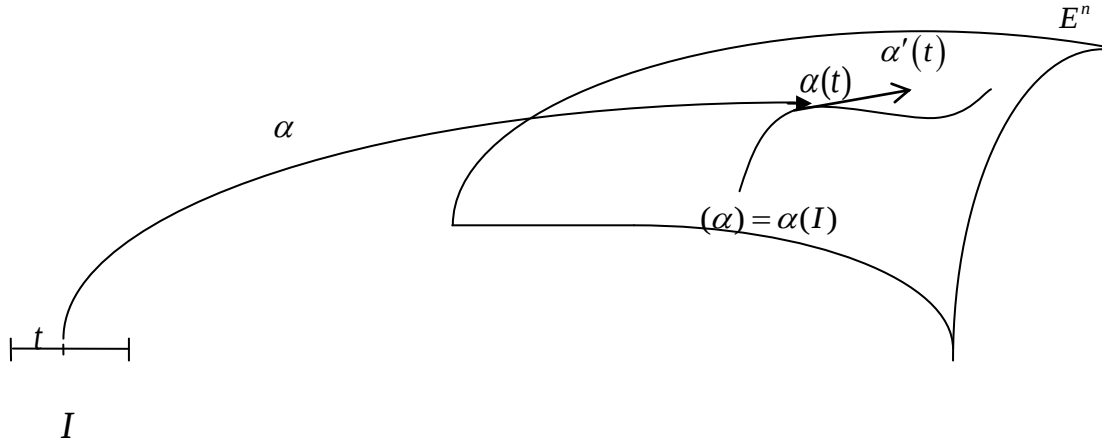
Teorem 2.8 $\forall X, Y \in \chi(E^n), \forall f, g, h \in C(E^n, \mathbb{R}), \forall a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır, [7].

$$1) (fX + gY)[h] = fX[h] + gY[h],$$

$$2) X[af + bg] = aX[f] + bX[g],$$

$$3) X[fg] = X[f]g + fX[g].$$

Tanım 2.21 $I, \mathbb{R}$ nin açık alt aralığı $\alpha : I \rightarrow E^n, \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere $\alpha(I) \subset E^n$ alt kümesine E^n de eğri (parametrik eğri) denir, [7,9].



Şekil 2. 3 Parametrik eğri

$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \right) \Big|_{\alpha(t)}$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki *hız vektörü*

denir ve

$$(\alpha(t), \alpha'(t)) = \alpha'(t) \Big|_{\alpha(t)} = \frac{d\alpha}{dt} \Big|_{\alpha(t)} \in T_{\alpha(I)}(\alpha(t))$$

şeklindedir, [7,9].

Teorem 2.9 α, E^n de bir eğri ve $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun.

Bu durumda,

$$\alpha'(t)[f] = \frac{d(f(\alpha))}{dt} = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)$$

şeklindedir, [7].

Tanım 2.22 $\alpha'(t)[f] = D_{\alpha'(t)}f$ türevine $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\alpha(t)$ eğrisi yönündeki *yöne göre türevi* veya eğriye göre *kovaryant türevi* denir, [7].

Tanım 2.23 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \chi(E^n)$ verilsin. $P \in E^n$ noktası için $\overrightarrow{X_P}, \overrightarrow{Y_P} \in T_{E^n}(P)$ olmak üzere $x_i, y_i : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları C^∞ – sınıfından ise $X, Y \in \chi(E^n)$ vektör alanları da C^∞ – sınıfındandır denir, [7].

Teorem 2.10 $Y = \sum y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $U \subset E^n$ açık alt kümesi üzerinde diferensiyellenebilir

vektör alanı olsun. $P \in U \subset E^n$, $X_P \in T_{E^n}(P)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} D_{X_P} Y &= (X_P[y_1], X_P[y_2], \dots, X_P[y_n]) \\ &= \sum_{i=1}^n X_P[y_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_P \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır, [7].

Teorem 2.11 E^n de iki vektör alanı $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $W = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \chi(E^n)$

olsun. Bu durumda, $x_i : E^n \rightarrow \mathbb{R}$, $w_i : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ şeklindedir. E^n de C^∞ – sınıfından iki vektör alanı $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ olmak üzere

$$y_i : E^n \rightarrow \mathbb{R}, z_i : E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır, [7].

$$1) D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$$

$$2) D_{X+W} Y = D_X Y + D_W Y$$

$$3) D_{f(P)X} Y = f(P) D_X Y, f : E^n \rightarrow \mathbb{R}, P \in E^n$$

$$4) D_X(fY) = X(f)Y + fD_X Y, f \in C(E^n, \mathbb{R})$$

Tanım 2.24 C^∞ eğrisi ve bir $Y \in \chi(E^n)$ de α eğrisine kısıtlanmış bir vektör alanı olsun. Eğrinin hız vektör alanı da T olmak üzere α eğrisi boyunca $D_T Y = 0$ ise Y vektör alanına α eğrisi boyunca *paralel vektör alanı* denir. Eğer $D_T T = 0$ ise α eğrisine *geodezik eğri* denir.

O halde,

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \text{ ve } T_P = \frac{d\alpha}{dt} \Big|_P = \left(\frac{d\alpha_1}{dt} \Big|_P, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \Big|_P \right) \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned}
D_T T|_P &= \left(T_P \left[\frac{d\alpha_1}{dt} \right], \dots, T_P \left[\frac{d\alpha_n}{dt} \right] \right) \\
&= \left(\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}, \dots, \frac{d^2\alpha_n}{dt^2} \right) \Big|_P \\
&= \frac{d^2\alpha}{dt^2} \Big|_P \\
&= \alpha''(t) \Big|_P
\end{aligned}$$

bulunur, [7].

Tanım 2.25 V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$[,]: V \times V \rightarrow V, (\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow [\bar{x}, \bar{y}]$$

dönüşümü,

- 1) Bilineer
- 2) Alterne özelliği $\forall x, y \in V, [\bar{x}, \bar{y}] = -[\bar{y}, \bar{x}]$
- 3) Jacobien özdeşliği: $[\bar{x}, [\bar{y}, \bar{z}]] + [\bar{y}, [\bar{z}, \bar{x}]] + [\bar{z}, [\bar{x}, \bar{y}]] \equiv 0$

özelliklerini sağlıyor ise $[,]$ dönüşümüne K üzerinde bir *Lie operatörü* veya *parantez operatörü* denir. Bu durumda V vektör uzayına da *Lie cebiri* denir, [7].

Teorem 2.12 $X(E^n)$ üzerinde,

$$\begin{aligned}
[,]: X(E^n) \times X(E^n) &\rightarrow X(E^n) \\
(X, Y) &\rightarrow [X, Y]: C(E^n, \mathbb{R}) \rightarrow C(E^n, \mathbb{R}) \\
f &\rightarrow [X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir Lie operatörüdür ve $X(E^n)$ vektör alanları uzayı bir Lie cebiridir, [7].

Teorem 2.13 $\forall X, Y, Z \in \chi(E^n)$ için D, E^n kovaryant türev operatörü ve $[,]$ de $\chi(E^n)$ üzerinde Lie operatörü olmak üzere

$$1) D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

$$2) X_p [\langle Y, Z \rangle] = \langle D_{X_p} Y, Z \rangle|_p + \langle Y, D_{X_p} Z \rangle|_p$$

şeklindedir, [7].

Tanım 2.26

$$\begin{aligned} \text{Grad } f &= \nabla : C(E^n, \mathbb{R}) \rightarrow \chi(E^n) \\ f &\rightarrow \overline{\nabla f} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona *gradient fonksiyonu* denir ve kısaca

$$\text{Grad} = \overline{\nabla f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

şeklinde yazılabilir, [7,9].

2.3 Eğriler Teorisi

Tanım 2.27 $I \subseteq \mathbb{R}$, $I = (a, b)$ açık alt aralık olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow E^n \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda $\alpha(I) \subset E^n$ alt kümesine E^n de *diferensiyellenebilir* veya *parametrik eğri* denir. Ayrıca (I, α) ikilisine eğrinin *koordinat komşuluğu* denir. Buradaki I alt kümesine *eğrinin parametrik aralığı* ve $t \in I$ reel sayısına da eğrinin *parametresi* denir. Bir eğri $\alpha(I) \subset E^n$ şeklinde veya kısaca (α) ile gösterilir. $\alpha_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarına (α) eğrisinin *koordinat fonksiyonları* adı verilir, [7,9].

Tanım 2.28 E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \rightarrow E^n$ fonksiyonunun koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olmak üzere $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)) \subset E^n$ yazılabilir. Buradan elde edilen

$$\frac{d\alpha}{dt}|_t = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}|_t, \frac{d\alpha_2}{dt}|_t, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}|_t \right) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \right)|_t$$

vektörüne M eğrisinin $\alpha(t) \in M$ noktasındaki *hız vektörü* denir. Bir diğer ifadeyle, $(\alpha'(t), \alpha(t)) = \alpha'(t)|_{\alpha(t)} \in T_{E^n}(\alpha(t))$ vektörüne M eğrisinin $\alpha(t)$ noktasında (I, α) komşuluğuna göre *hız vektörü* denir, [7,9].

2.3.1 Skalar Hız Fonksiyonu ve Skalar Hız

Tanım 2.29 E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\|: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

ile tanımlı fonksiyonu M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre *skalar hız fonksiyonu* ve $\|\alpha'(t)\| \in \mathbb{R}$ reel sayısına da M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki *skalar hızı* denir, [7].

Tanım 2.30 E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. M nin $s \in M$ noktasındaki hız vektörü birim ise yani $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M 'ye *birim hızlı eğri* denir.

Eğer M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğunda birim hızlı ise $s \in I$ parametresine eğrinin *yay parametresi* denir, [7].

Tanım 2.31 Her noktada hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye *regüler eğri* denir. $\forall t$ için $\alpha'(t) \neq 0$ oluyorsa ya da $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ ise α ya *regüler eğri* denir, [7].

2.3.2 Parametre Değişimi

Tanım 2.32 E^n de bir M eğrisi (I, α) ve (J, β) koordinat komşulukları ile verilsin.

$$\begin{aligned} h: \alpha^{-1} \circ \beta: J &\rightarrow I \\ s &\rightarrow h(s) = t \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna M nin bir *parametre değişimi* denir. Yani; M nin I ile verilen t parametresinin, M nin J ile verilen s parametresiyle değişimidir.

$h = \alpha^{-1} \circ \beta$ için $h(s) = (\alpha^{-1} \circ \beta)(s) \Rightarrow \beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$ olmak üzere $\beta(s) = \alpha(h(s))$ veya $\beta(s) = \alpha(t)$ elde edilir, [7].

Teorem 2.14 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) ve (J, β) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned} h: \alpha^{-1} \circ \beta: J &\rightarrow I \\ s &\rightarrow h(s) = t \end{aligned}$$

parametre değişimi ise

$$\beta(s) = \frac{dh}{ds} \alpha'(h(s))$$

dir, [7].

Not 2.3 E^n de bir M eğrisinin bir $s \in M$ noktasında birden fazla hız vektörü vardır. Fakat bu vektörler arasında daima bir lineer bağıntı vardır, [7].

Tanım 2.33 M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $a, b \in I$ olmak üzere M eğrisinin a dan b ye yay-uzunluğu, eğrinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki uzaklığa karşılık gelen

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt, \quad t \in I$$

reel sayısına denir. Kolayca görülebileceği gibi bu değer koordinat komşuluğundan bağımsızdır, [7].

Teorem 2.15 Bir regüler eğrinin birim hızlı olacak şekilde bir koordinat komşuluğu vardır. Yani; her regüler eğri kendi yay parametresi cinsinden ifade edilebilir, [7].

2.3.3 Serret - Frenet Vektörleri

Tanım 2.34 E^n Öklid uzayında bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. M

nin hız vektörü $\alpha'(t)|_{\alpha(t)} = \sum \frac{d\alpha_i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} |_{\alpha(t)}$ şeklinde yazılabilir.

$$\alpha': M \rightarrow \bigcup_{\forall P \in M} T_M(P)$$

$$P = \alpha(t) \rightarrow \alpha'(t)$$

dönüşümünü göz önüne alalım.

$$\pi: \bigcup_{\forall P \in M} T_M(P) \rightarrow M$$

$$\alpha'(t) \rightarrow \alpha(t) = P$$

olmak üzere,

$$\pi \circ \alpha'(t) = I_M : M \xrightarrow{\text{özdeşlik}} M$$

olduğu aşıkardır. Bu durumda, α' , M eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır. α' vektör alanına, M eğrisinin, (I, α) koordinat komşuluğuna göre *teğet vektör* alanı denir, [7].

Tanım 2.35 M, E^n de $M \subset E^n$ altkümesine kısıtlarsak

$$D|_{\chi(M)} : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow D_X Y$$

olmak üzere $D_{\alpha'(t)} = \frac{d}{dt}$ ile gösterilsin. Buradan $D_{\alpha'} \alpha' = \frac{d\alpha'}{dt}$ elde edilir.

$$D_{\alpha'} \alpha' = \left(\alpha' \left[\frac{d\alpha_1}{dt} \right], \dots, \alpha' \left[\frac{d\alpha_n}{dt} \right] \right)$$

$$= \left(\frac{d^2 \alpha_1}{dt^2}, \dots, \frac{d^2 \alpha_n}{dt^2} \right)$$

$$= (\alpha_1'', \dots, \alpha_n'') = \alpha''(t) \in \chi(M)$$

Benzer şekilde devam edilirse,

$$D_{\alpha'} \alpha' = \alpha''$$

$$D_{\alpha'} \alpha'' = \alpha'''$$

$\vdots$

$$D_{\alpha'} \alpha^{(n-1)} = \alpha^{(n)} \text{ elde edilir. Buradan}$$

$\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(n)} \in \chi(M)$ olduğu açıktır. Ayrıca

$\alpha'(t)|_{\alpha(t)}, \dots, \alpha^{(n)}(t)|_{\alpha(t)} \in T_M(\alpha(t))$ bulunur. Bu türev vektör alanlarına eğrinin *yüksek mertebeden türevleri* denir. Bu vektörlerin her biri vektör alanı veya verilen bir $\alpha(t) \in M$ noktasında bir tanjant vektörüdür.

Bu vektör alanlarından r -tanisinin lineer bağımsız olduğunu kabul edelim. Yani $\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)} \in \chi(M)$ olmak üzere $S = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ lineer bağımsız olsun. Bu durumda $\alpha^{(r+1)}, \dots, \alpha^{(n)} \in S_p\{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ yazılabilir.

$\text{boy} E^n = \text{boy}(\chi(E^n)) = \text{boy}(\chi^*(E^n)) = n$, $S = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ lineer bağımsız olduğundan bu S sistemine Gram-Schmidt metodu uygulanabilir.

$$\begin{aligned} E_1 &= \alpha' \\ E_2 &= \alpha'' - \frac{\langle \alpha'', E_1 \rangle}{\langle E_1, E_1 \rangle} E_1 \\ &\vdots \\ E_r &= \alpha^{(r)} - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\langle \alpha^{(r)}, E_k \rangle}{\langle E_k, E_k \rangle} E_k \end{aligned}$$

olmak üzere $\{E_1, E_2, \dots, E_r\}$ sistemi bir ortogonal sistemdir. Buradan

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{E_1}{\|E_1\|} \\ V_2 &= \frac{E_2}{\|E_2\|} \\ &\vdots \\ V_r &= \frac{E_r}{\|E_r\|} \end{aligned} \right\} \text{ olmak üzere } \{V_1, V_2, \dots, V_r\} \text{ ortonormal sistemi elde edilir. Yani}$$

$$\langle V_i, V_j \rangle = \delta_{ij} \text{ şeklindedir, [7].}$$

Tanım 2.36 E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ kümesi lineer bağımsız iken elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal vektör alanları sisteminin M nin $\alpha(t) \in M$ noktasındaki *Serret-Frenet r -ayaklısı* veya *Frenet çatısı* denir. Burada $\forall \alpha(t) \in M$ için $V_i, 1 \leq i \leq r$ vektörlerinin her birine bir *Frenet vektörü* denir, [7].

2.3.4 Frenet Formülleri ve Eğrilikler

Tanım 2.37 M, E^n de (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanmış bir eğri olsun. $s \in I$ için $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_i(s)\}$ olsun. $1 \leq i \leq r$ için

$$k_i : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona M eğrisinin i . Frenet eğrilik fonksiyonu, $k_i \in \mathbb{R}$ sayısına da M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki i . Frenet eğriliği denir, [7].

Burada $V_i'(s); V_i(s)$ Frenet vektörlerinin s ye göre türevi denir. V_i ler birer vektör alanıdır ve $\alpha'(t) \in \alpha(M) \subset \alpha(E^n)$. Ayrıca D, E^n de kovaryant türev operatörü olduğundan

$$D_{\alpha'}(V_i) \in \mathcal{X}(E^n).$$

$D_{\alpha'} = \frac{d}{ds}$ olduğundan, bir vektör alanının α' ye göre yöne göre türevi, eğrinin parametreye göre türevidir ve

$$D_{\alpha'}(V_i) = \frac{dV_i}{ds} = V_i'(s)$$

şeklinde tanımlanır, [7].

Teorem 2.16 M, E^n de (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanmış bir eğri olsun. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_i(s)\}$ olsun. Eğer eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilikleri $k_i(s)$ ise

$$i. V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$$

$$ii. V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s)$$

$$iii. V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$$

eşitlikleri gerçekleşir. Bu formüllere *Frenet Formülleri* denir, [7].

$$D_{\alpha'}(V_i) = \frac{dV_i}{ds} = V_i'(s)$$

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ \vdots \\ V_{r-1}' \\ V_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$n = 3$ özel halinde (2.1) matrisi

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu durumda eğrinin 1- inci eğriliği olan $k_1(s)$ değerine *eğrilik*, eğrinin 2- inci eğriliği olan $k_2(s)$ değerine *burulma* adı verilir, [7].

Tanım 2.38 E^3 de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin ve M' nin parametresi s bir yay-parametresi olsun. Bu halde,

$$V_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|} = T = \alpha'$$

$$V_2 = \frac{E_2}{\|E_2\|} = N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$$

$$V_3 = \frac{E_3}{\|E_3\|} = B = T \times N$$

şeklinde tanımlanır ve T, N, B vektörlerine *Frenet vektörleri* adı verilir, [7].

Tanım 2.39 $\mathbb{R}^3$ de $\alpha: I \rightarrow E^3$ de birim hızlı eğrisi için

$$T(s) = \alpha'(s)$$

ile verilen $T(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *birim teğet vektörü* denir, [7,10].

Tanım 2.40 $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi için;

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

eşitliği ile tanımlı $N(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *asli normal vektörü* denir. N vektör alanına α eğrisinin *asli normal vektör alanı* denir, [7,10].

Tanım 2.41 $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi için;

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliğiyle tanımlı $B(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *binormal vektörü* denir. B vektör alanına α eğrisinin *binormal vektör alanı* denir, [7,10].

Teorem 2.17 $\alpha : I \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri T, N, B olmak üzere $\{T, N, B\}$ ortonormal sistemdir, [7,9,10].

Tanım 2.42 $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için birim vektör alanları T, N, B her noktada birbirine ortogonaldır. $\{T, N, B\}$ üçlüsüne α eğrisi üzerinde *Frenet çatı alanı* denir, [7,9,10].

Tanım 2.43 $\forall s \in I$ için $\kappa(s) = k_1(s) = \|T'(s)\|$ şeklinde tanımlanır. κ fonksiyonu α eğrisinin *eğrilik fonksiyonu* ve $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ reel sayısına da α nın $\alpha(s)$ noktasındaki *eğriliği* denir, [7].

Sonuç 2.4 $\forall s \in I$ için $\kappa(s) \geq 0$.

Teorem 2.18 $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi $\kappa > 0$ eğrilikli ve τ burulmalı birim hızlı eğri olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

elde edilir. Bu formüllere *Frenet formülleri(denklemeleri)* denir, [7,9,10].

Teorem 2.19 α, E^3 de birim hızlı eğri ve α nın $\kappa > 0$ eğriliği ve τ burulması olsun.

$$\tau(s) = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \times \alpha''' \rangle}{\langle \alpha'', \alpha'' \rangle}, \quad \kappa = \|\alpha''(s)\|$$

şeklindedir, [7,10].

Teorem 2.20 $\alpha : (a, b) \rightarrow E^3$, bir regüler eğri ve $\kappa \neq 0$ olsun.

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \quad N = B \times T, \quad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}, \quad \kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

şeklindedir, [7,10].

Teorem 2.21 C ve C^* iki uzay eğrisi denktir $\Leftrightarrow$ yay uzunluğu parametresine göre $\alpha, \alpha^* : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrileri $\kappa(s) = \kappa^*(s)$, $\tau(s) = \tau^*(s)$, $\forall s \in [0, L]$ özelliklerine sahip olmasıdır. Bir diğer ifadeyle $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$, $(s > 0)$ iki fonksiyon olsun. s yay uzunluğu, $\kappa(s)$ eğriliği, $\tau(s)$ burulması olacak şekilde bir tek eğri ($\mathbb{R}^3$ pozisyonuna ait tek) vardır, [7].

Tanım 2.44 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi için

$$W(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$$

vektörüne *Darboux vektörü* denir.

$$w(s) = \frac{W(s)}{\|W(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}} (\tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s))$$

vektörüne ise α eğrisinin *Darboux göstergesi* denir. Bu vektör aslında $\{T, N, B\}$ Frenet üç ayaklısının her s anında bir ani helis hareketi yaptığı eksendir, [7].

Geometrik yorumu: E^3 de bir nokta α eğrisi boyunca hareket ettirildiğinde bu noktanın Frenet üçlüsü $\{T, N, B\}$ orijin etrafında hareket eder. Bu hareket Frenet hareketi olarak adlandırılır. Frenet hareketindeki ani değişimin olduğu eksene Darboux eksenini denir. Bu ani değişimin ekseni Darboux vektörüdür, [7].

Tanım 2.45 M eğrisi E^3 de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, bir $\bar{U}$ sabit vektörü ile sabit açı yapıyorsa, M 'ye bir *eğilim çizgisi* (helis) ve $sp\{\bar{U}\}$ ya da M eğilim çizgisinin *eğilim ekseni* denir, [7].

$$\langle T, \bar{U} \rangle = \|T\| \cdot \|\bar{U}\| \cdot \cos \theta = \cos \theta$$

Teorem 2.22 E^3 de $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisi verilsin. κ ve τ , eğriliği ve burulması olmak üzere $\kappa \neq 0$ için $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisinin helis olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\tau}{\kappa}$ 'nın sabit olmasıdır, [7].

Tanım 2.46 M eğrisi E^3 de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ 'ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ noktasında M 'nin 1. ve 2. eğrilikleri $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ olmak üzere,

$$H: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow H(s) = \frac{\kappa(s)}{\tau(s)}$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna M 'nin *Harmonik eğriliği* denir, [7].

2.3.5 E^3 de Özel Düzlemler

Tanım 2.47 M , E^3 de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri ve eğrinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Frenet vektörleri $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olsun. $Sp\{T(s), N(s)\}$ uzayına M eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki *oskulator düzlemi* denir.

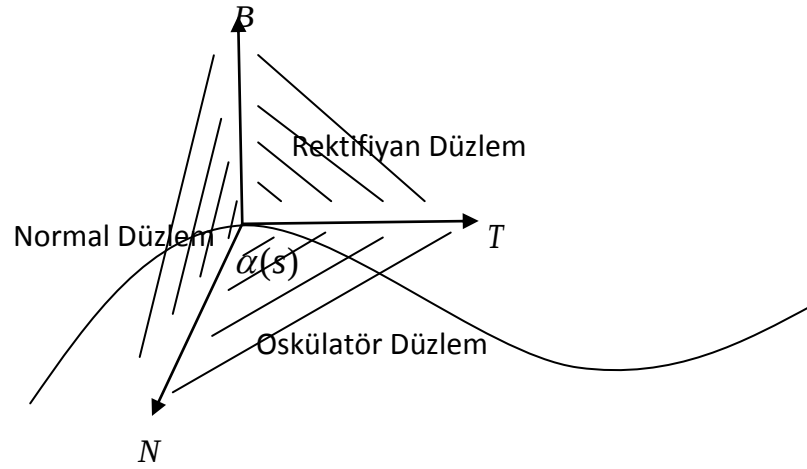
Düzlem üzerinde temsili bir nokta X olmak üzere, $\det[\alpha(s)X, T(s), N(s)] = 0$ eşitliği ile veya $\langle \overrightarrow{\alpha(s)X}, T(s) \times N(s) \rangle = 0$ veya $\langle \overrightarrow{\alpha(s)X}, B(s) \rangle = 0$ eşitlikleri ile de elde edilir, [7].

Tanım 2.48 M , E^3 de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri ve eğrinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Frenet vektörleri $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olsun. $Sp\{N(s), B(s)\}$ uzayına M eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki *normal düzlemi* denir.

Düzlem üzerinde temsili bir nokta X olmak üzere, $\det(\alpha(s)X, N(s), B(s)) = 0$ eşitliği ile veya $\langle \overrightarrow{\alpha(s)X}, N(s) \times B(s) \rangle = 0$ veya $\langle \overrightarrow{\alpha(s)X}, T(s) \rangle = 0$ eşitlikleri ile de elde edilir, [7].

Tanım 2.49 M, E^3 de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri ve eğrinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Frenet vektörleri $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olsun. $Sp\{B(s), T(s)\}$ uzayına M eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki *rektifiyan düzlemi* denir.

Düzlem üzerinde temsili bir nokta X olmak üzere, $\det(\alpha(s)X, B(s), T(s)) = 0$ eşitliği ile veya $\langle \overrightarrow{\alpha(s)X}, B \times T \rangle = 0$ veya $\langle \overrightarrow{\alpha(s)X}, N \rangle = 0$ eşitlikleri ile de elde edilir, [7].

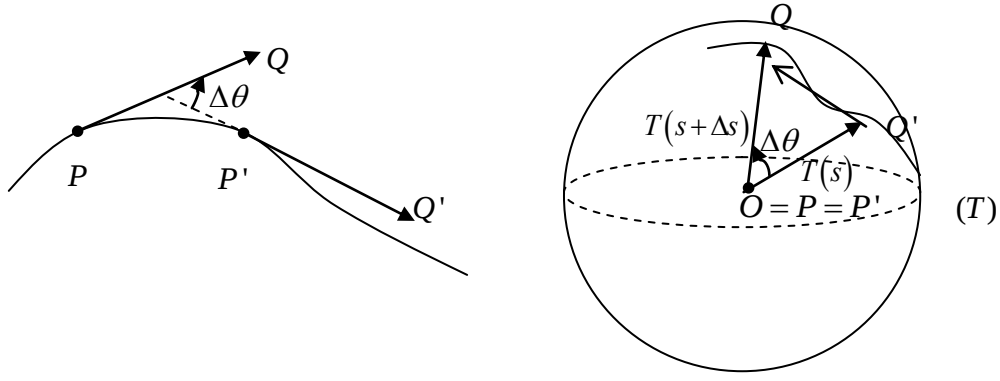


Şekil 2. 4 E^3 de özel düzlemler

2.3.6 Bir Eğrinin Küresel Göstergeleri

Tanım 2.50 E^3 de bir α eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. α 'nın birim teğet vektörü T olmak üzere $\overrightarrow{PQ} = T$ alındığında, P noktası α eğrisini çizerken, Q noktasının birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye α 'nın 1. küresel göstergesi veya *teğetler göstergesi* denir.

α eğrisinin teğetler göstergesini (T) ile gösterirsek denklemi $\alpha_T = T$ olur; parametresine s_T dersek $s_T \neq s$ olup yay -elementi ise $ds_T = \|T'\| ds$ dir.



Şekil 2. 5 Teğetler göstergesi

$\Delta\theta$ açısına, *kotengenz açısı*; $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ oranına, α eğrisinin P noktasındaki *ortalama eğriliği*; $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$ değerine de α 'nın P noktasındaki *eğriliği* denir, [7].

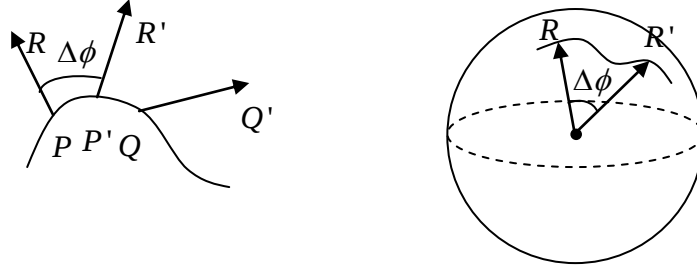
Teorem 2.23 Bir α eğrisinin eğriliği; teğetler göstergesinin yay elementinin esas eğrisinin yay elementine oranı olarak tanımlanıp $\frac{d\theta}{ds} = \kappa$ şeklindedir, [7].

Tanım 2.51 E^3 de bir α eğrisinin birim aslî normal N olsun. α eğrisi çizilirken $\vec{N}$ vektörünün uç noktaları kümesinin birim küre yüzeyi üzerinde meydana getirdiği eğriye α eğrisinin *2. küresel göstergesi* veya *aslî normaller göstergesi* denir.

α eğrisinin normaller göstergesini (N) ile gösterirsek denklemi $\alpha_N = N$ olur; parametresine s_N dersek $s_N \neq s$ olup yay-elementi ise $ds_N = \|N'\| ds$ 'dir, [7].

Tanım 2.52 E^3 de bir α eğrisinin bir P noktasındaki binormal vektörü $B = \overline{PR}$ ve komşu iki binormal vektörü arasındaki açı $\Delta\theta$ olmak üzere P noktası α eğrisini çizerken R noktasının birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye α eğrisinin *3. küresel göstergesi* veya *binormaller göstergesi* denir.

α eğrisinin binormaller göstergesini (B) ile gösterirsek denklemi $\alpha_B = B$ olur ve parametresine s_B dersek $s_B \neq s$ olup yay-elementi ise $ds_B = \|B'\| ds$ 'dir, [7].



Şekil 2. 6 Binormaller göstergesi

$\frac{\Delta\phi}{\Delta s}$ oranına α eğrisinin P noktasındaki *ortalama burulması* denir ve

$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds}$ değerine de α eğrisinin P noktasındaki *burulması* denir, [7].

Teorem 2.24 Bir α eğrisinin burulması; binormaller göstergesinin yay elementinin esas eğrinin yay elementine oranı olarak tanımlanıp $\frac{d\phi}{ds} = \tau$ şeklindedir, [7].

2.4 Yüzeyler Teorisi

2.4.1 E^3 Öklid Uzayında Yüzey

Tanım 2.53

$$M = \left\{ \begin{array}{l} X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n \mid f : U \subset E^n \xrightarrow{\text{diferensiyellenebilir}} \mathbb{R} \\ X \longrightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c = \text{sbt}, \forall P \in M, \overline{\nabla f}|_P \neq \vec{0} \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlı kümeye E^n de $(n-1)$ boyutlu yüzey veya $(n-1)$ -yüzey denir, [5].

Özel Durumlar

- E^2 de 1-yüzeye *düzlemsel eğri*,
- E^3 de 2-yüzeye sadece *yüzey*,
- E^n de $(n-1)$ -yüzeye, $n > 3$ olması durumunda *hiperyüzey* denir, [5].

Teorem 2.25 E^n de M hiperyüzeyi verilsin. f M yi tanımlamada kullanılan diferensiyellenebilir fonksiyonu için

$$\overline{\nabla f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \text{grad} f \text{ olmak üzere } \forall P \in M, \forall \vec{v}_p \in T_M(P), \langle \vec{v}_p, \overline{\nabla f}|_P \rangle = 0.$$

Yani M hiperyüzeyinin P noktasındaki gradient vektörü, hiperyüzeyin P noktasındaki normal vektörüdür, [5].

Tanım 2.54 $U \subset E^2$ bir bağlantılı açık küme ve $\phi: U \subset E^2 \rightarrow E^3$ bir regüler dönüşüm ($\text{rank} \phi = \text{boy} U = 2$) olsun. Eğer $\phi: U \rightarrow \phi(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\phi(U)$ kümesine E^3 de bir regüler yüzey denir.

Yani $\phi: U \subset E^2 \rightarrow E^3$ dönüşümü

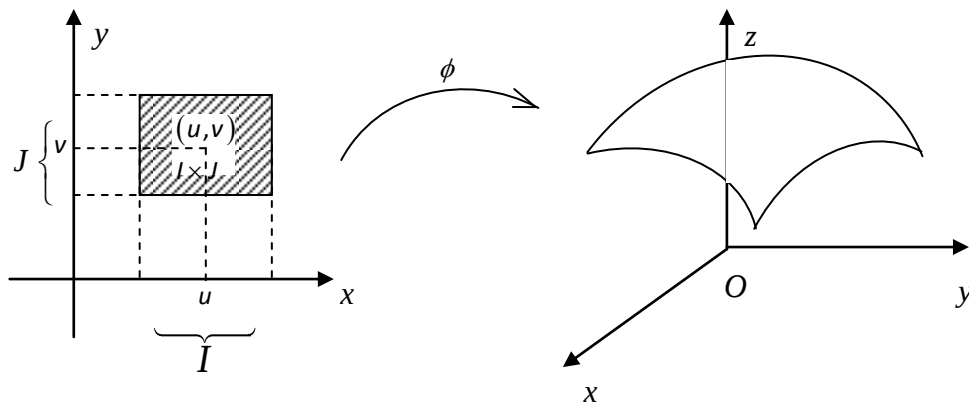
1) ϕ , 1-1,

2) ϕ , regüler,

3) ϕ^{-1} , fonksiyonu sürekli,

özelliklerini sağlıyorsa $\phi(U) \subset E^3$ 'e E^3 de bir regüler yüzey denir.

$U \subset E^2$ alalım. $U = I \times J$ olmak üzere,



Şekil 2. 7 E^3 de yüzey

$$\phi: I \times J \rightarrow E^3$$

$$(u, v) \rightarrow \phi(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$$

dönüşümü tanımlayalım. Bu dönüşüme *türev dönüşümü* denir.

$$\phi_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$\text{rank} \phi_* = 2$ olması için

$$\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \end{bmatrix}, \frac{\partial \phi}{\partial v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix} \right\} \text{ lineer bağımsız olmalıdır.}$$

$\phi(I \times J) = M \subset E^3$ yüzey olması için gerek ve yeter koşul $\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\}$ 'ın lineer bağımsız olmasıdır, [9].

Tanım 2.55 M yüzeyi üzerinde birim normal vektör alanı varsa M 'ye *yönlendirilebilir yüzey* denir, [5].

Yönlendirilebilir yüzey için $+n$, $-n$ olmak üzere iki türlü yönlendirme yapılabilir.

Yönlendirilemeyen yüzeyler:

1) Möbius şeridi

2) Klein şişesi

Tanım 2.56 M , E^3 de bir yüzey olsun. $\alpha: I \xrightarrow{\text{dif. bilir}} M$ eğri olsun. n , M 'nin birim normal vektör alanı olmak üzere α eğrisi $\forall t \in I$ için $\alpha''(t) = \lambda(t)n(t)\big|_{\alpha(t)}$ diferensiyel denklemi sağlıyorsa α 'ya M 'de bir *jeodezik (geodezik) eğri* denir, [5].

2.4.2 Şekil Operatörü

Tanım 2.57 M , E^3 de bir yüzey olsun.

$$\begin{aligned} D: \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow D_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü,

$$1) D_{fX+gY}Z = fD_XZ + gD_YZ$$

$$2) D_X(fY) = (D_X f)Y + fD_XY$$

özelliklerini sağlıyorsa D 'ye *afin konneksiyon* denir.

$$3) D_XY - D_YX = [X, Y]$$

$$4) X[\langle Y, Z \rangle] = \langle D_XY, Z \rangle + \langle D_XZ, Y \rangle$$

şartlarını da sağlıyorsa D operatörüne *Riemann konneksiyonu* denir, [5].

Tanım 2.58 $n = (a_1, a_2, a_3)$, M 'nin birim normal vektör alanı; $\chi(M)$, M 'nin vektör alanları uzayı; $T_M(P)$, M 'nin P noktasındaki tanjant uzayı ve D, E^n de Reimann konneksiyonu olmak üzere yüzeyin n birim normaline bağlı olarak

$$S(X) = D_Xn = (X[a_1], X[a_2], X[a_3]) \quad \text{veya} \quad S(X) = -D_Xn = -(X[a_1], X[a_2], X[a_3])$$

veya

$$S(X_p) = D_{X_p}n = (X_p[a_1], X_p[a_2], X_p[a_3])$$

veya

$$S(X_p) = -D_{X_p}n = -(X_p[a_1], X_p[a_2], X_p[a_3])$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne yüzeyin *şekil operatörü* veya *Weingarten dönüşümü* denir, [5,9].

Teorem 2.26 M, E^3 de bir yüzey olsun.

1) M nin S şekil operatörü

$$\begin{array}{ll} S: \chi(M) \rightarrow \chi(M) & \text{veya} \quad S: \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\ X \rightarrow S(X) = D_Xn & X \rightarrow S(X) = -D_Xn \end{array}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümdür.

2) S lineerdir.

3) S self-adjoint(simetrik) dönüşümdür, [5,9].

Teorem 2.27

$$\begin{aligned}\phi: I \times J &\rightarrow E^3 \\ (u, v) &\rightarrow \phi(u, v)\end{aligned}$$

diferensiyellenebilir olmak üzere $\phi(I \times J) = M$ yüzeyi verilsin. $-n, M'$ nin birim normal vektör alanı olmak üzere yüzeyin normalinin işaretine bağlı olarak

$$S(\phi_u) = -\frac{\partial n}{\partial u} = -n_u, \quad S(\phi_v) = -\frac{\partial n}{\partial v} = -n_v$$

dir, [5].

Tanım 2.59

$$\begin{aligned}\phi: I \times J \subset E^2 &\rightarrow E^3 \\ (u, v) &\rightarrow \phi(u, v)\end{aligned}$$

diferensiyellenebilir fonksiyonu yardımıyla

$$\phi(I \times J) = M$$

yüzeyi verilsin. $T_M(P) = sp\{\phi_u|_P, \phi_v|_P\}$, $\chi(M) = sp\{\phi_u, \phi_v\}$ olmak üzere

$S: \chi(M) \xrightarrow[\text{süreklî}]{\text{lineer}} \chi(M)$ dönüşümünün $\{\phi_u, \phi_v\}$ bazına göre matrisi,

$$S = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\|\phi_u\|^3 \|\phi_v\|} \det(\phi_{uu}, \phi_u, \phi_v) & \frac{-1}{\|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2} \det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v) \\ \frac{-1}{\|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2} \det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v) & \frac{-1}{\|\phi_u\| \|\phi_v\|^3} \det(\phi_{vv}, \phi_u, \phi_v) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır, [5].

2.4.3 Temel Formlar

Tanım 2.60 M, E^3 de yüzey olmak üzere,

$$\begin{aligned}I^q: \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\rightarrow I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan I^q foksiyonuna M yüzeyinin q . temel formu denir.

- $q=1$ için 1. temel form: $I(X,Y)=\langle X,Y \rangle$ olup iç-çarpım fonksiyonudur.
- $q=2$ için 2. temel form: $II(X,Y)=\langle S(X),Y \rangle$
- $q=3$ için 3. temel form: $III(X,Y)=\langle S^2(X),Y \rangle=\langle S(X),S(Y) \rangle$

şeklindedir, [5].

Tanım 2.61 $M \subset E^3$ regüler yüzeyi verilsin. $\vec{u}_p, M$ nin birim tanjant vektörü olsun. $\vec{u}_p$ doğrultusundaki M nin $k_n(\vec{u}_p)$ *normal eğriliği*

$$k_n(\vec{u}_p)=\langle S(\vec{u}_p),\vec{u}_p \rangle \quad (2.24)$$

ile tanımlanır. Daha genel olarak, $\vec{v}_p, P \in M$ noktasında sıfırdan farklı tanjant vektör olmak üzere

$$k_n(\vec{v}_p)=\frac{\langle S(\vec{v}_p),\vec{v}_p \rangle}{\|\vec{v}_p\|^2} \quad (2.25)$$

ile tanımlanır, [5].

2.4.4 Şekil Operatörünün Cebirsel Değişmezleri

Tanım 2.62 M, E^3 de yüzey ve $S|_p:T_M(P) \rightarrow T_M(P)$ şekil operatörü olsun. $S(\vec{X}_p)=\lambda \vec{X}_p$ eşitliğini sağlayan λ sayılarına M yüzeyinin *asli eğrilikleri*, $\vec{X}_p$ vektörüne λ 'ya karşılık gelen *asli vektör(asli doğrultu)* denir, [5].

Teorem 2.28 M yüzeyinin asli eğrilikleri ve asli doğrultuları $T_M(P)$ vektör uzayının bazından bağımsızdır, [5].

Tanım 2.63 M, E^3 de bir yüzey olsun.

$$\begin{aligned} K:M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow K(P)=\det S_p \end{aligned}$$

fonksiyonuna M 'nin *Gauss eğrilik fonksiyonu*, $K(P) \in \mathbb{R}$ sayısına da M 'nin P noktasındaki *Gauss eğriliği* denir, [5].

Teorem 2.29 M yüzeyinin Gauss eğriliği baz seçiminden bağımsızdır, [5].

Tanım 2.64 M, E^3 de bir yüzey olsun.

$$H : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow H(P) = \text{iz}S(P)$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna M 'nin ortalama eğrilik fonksiyonu, $H(P)$ sayısına da M 'nin P noktasındaki *ortalama eğriliği* denir, [5].

Teorem 2.30 E^3 deki bir M yüzeyinin H ortalama eğriliği baz seçiminden bağımsızdır, [5].

Tanım 2.65 E^3 de H ortalama eğriliği sıfır olan regüler yüzeylere *minimal yüzey* denir, [9].

Tanım 2.66 E^3 de K Gauss eğriliği sıfır olan regüler yüzeylere *flat yüzey* denir, [9].

Tanım 2.67 M, E^3 de bir yüzey ve M üzerinde bir eğri α olsun. α 'nın teğet vektör alanı T ve M 'nin şekil operatörü S olsun. Eğer T vektör alanı α eğrisi boyunca S 'nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir *eğrilik çizgisidir*, [5].

Tanım 2.68 M, E^3 de bir yüzey olsun. $P \in M$ noktasındaki M 'nin şekil operatörü S_P olmak üzere,

- i) $S_P = \lambda I_{n-1}$ ise $P \in M$ noktasına M 'nin *umbilik noktası* denir.
- ii) $S_P = 0$ ise $P \in M$ noktasına M 'nin *düzlemsel(flat) nokta* denir, [5].

Tanım 2.69 M, E^3 de bir yüzey ve $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü S olsun. $\forall X_P, Y_P \in T_M(P)$ için,

$$\langle S(X_P), Y_P \rangle = 0$$

ise bu iki tanjant vektörüne *eşleniktirler* denir.

Bir $X_P \neq \vec{0}$ tanjant vektörü için,

$$\langle S(X_P), X_P \rangle = 0$$

ise X_p doğrultusuna, M 'nin P noktasındaki bir *asimptotik doğrultusu* ve X_p 'yi $\forall P \in \alpha$ noktasında teğet vektörü kabul eden α eğrisine M üzerinde bir *asimptotik çizgi* denir, [9].

2.4.5 Yüzey Üzerinde Darboux Çatı

M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha: I \rightarrow M$ şeklinde tanımlı yüzey üzerinde bir eğri olsun. (α) eğrisinin birim teğet vektör alanı T ve yüzeyin birim normal vektör alanı n ve $n \times T = g$ şeklinde tanımlı olmak üzere elde edilen $\{T, g, n\}$ dik çatısına yüzey üzerinde *Darboux- çatı alanı* adı verilir.

Yüzey üzerindeki α eğrisi için $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı tanımlanabilir. Burada Frenet çatısı ile Darboux çatısında T teğet vektörü ortaktır. Bu nedenle N, B, g, n vektörleri aynı düzlem üzerinde bulunur. Darboux çatısındaki g birim vektörü ile α eğrisinin normal vektör alanı N arasındaki açı θ olmak üzere, Frenet çatısının T vektörü etrafında $\theta = \theta(s)$ açısı kadar döndürülmesiyle Darboux çatısı elde edilir. Bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$g = a_{11}N + a_{12}B$ şeklinde yazarsak,

$$\langle g, N \rangle = \|g\| \cdot \|N\| \cdot \cos \theta = \cos \theta$$

$$\langle g, B \rangle = \|g\| \cdot \|B\| \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta$$

ve $n = b_{11}N + b_{12}B$ şeklinde yazarsak,

$$\langle n, N \rangle = \|n\| \cdot \|N\| \cdot \cos \left(-\left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right) = -\sin \theta$$

$$\langle n, B \rangle = \|n\| \cdot \|B\| \cdot \cos \theta = \cos \theta$$

elde edilir. Bu sonuçları matris formunda düzenlersek,

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ n \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} N &= g \cos \theta - n \sin \theta \\ B &= g \sin \theta + n \cos \theta \end{aligned} \quad (2.28)$$

biçimindedir.

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

$\{T, g, n\}$ Darboux çatısı için T', g', n' türev denklemlerini bulmak için,

$$\left. \begin{aligned} T' &= a_{11}T + a_{12}g + a_{13}n \\ g' &= a_{21}T + a_{22}g + a_{23}n \\ n' &= a_{31}T + a_{32}g + a_{33}n \end{aligned} \right\} (*) \text{ yazılabilir.}$$

$\{T, g, n\}$ ortonormal sistem olduğundan a_{ij} katsayılarını bulmak için,

- $\langle T, T \rangle = 1$ olduğundan $\langle T', T \rangle = 0$ olup $a_{11} = 0$ olup, ayrıca $a_{12} = \langle T', g \rangle = A$ ve $a_{13} = \langle T', n \rangle = B$ yazılabilir.
- $\langle g, g \rangle = 1$ olduğundan $\langle g', g \rangle = 0$ olup $a_{22} = 0$ olup, ayrıca $a_{21} = \langle g', T \rangle = -\langle T', g \rangle = -A$ ve $a_{23} = \langle g', n \rangle = C$ yazılabilir.
- $\langle n, n \rangle = 1$ olduğundan $\langle n', n \rangle = 0$ olup $a_{33} = 0$ olup, ayrıca $a_{31} = \langle n', T \rangle = -\langle T', n \rangle = -B$ ve $a_{32} = \langle n', g \rangle = -\langle g', n \rangle = -C$ yazılabilir.

Böylece elde edilen a_{ij} değerleri yerine yazılır ve matris formunda düzenlenirse,

$$\begin{bmatrix} T' \\ g' \\ n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A & B \\ -A & 0 & C \\ -B & -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix}$$

sistemi elde edilecektir.

Teorem 2.30 M, E^3 'de bir yüzey olsun. Bu yüzey üzerinde tanımlanan Darboux çatısına ait türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ g' \\ n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

biçimindedir. Burada κ_g geodezik eğrilik, κ_n normal eğrilik ve τ_g geodezik burulmadır, [9,12].

İspat Frenet çatısına göre türev denklemlerinden $T' = \kappa N$ olduğu açıktır. Burada (2.28) denklemindeki N ifadesi kullanılırsa

$$T' = \kappa N = \kappa(g \cos \theta - n \sin \theta) = \kappa \cos \theta g - \kappa \sin \theta n$$

elde edilir. (2.26)' de verilen $g = N \cos \theta + B \sin \theta$ ifadesinin türevi alınıp (2.28) ifadesi ve Frenet türev denklemleri yardımıyla

$$g' = -N\theta' \sin \theta + N' \cos \theta + B\theta' \cos \theta + B' \sin \theta$$

veya

$$\begin{aligned} g' &= -(g \cos \theta - n \sin \theta)\theta' \sin \theta + (-\kappa T + \tau B) \cos \theta + (g \sin \theta + n \cos \theta)\theta' \cos \theta + (-\tau N) \sin \theta \\ g' &= -g\theta' \sin \theta \cos \theta + n\theta' \sin \theta \sin \theta - T\kappa \cos \theta + B\tau \cos \theta + g\theta' \cos \theta \sin \theta + n\theta' \cos \theta \cos \theta - N\tau \sin \theta \\ g' &= -g\theta' \sin \theta \cos \theta + n\theta' \sin^2 \theta - T\kappa \cos \theta + (g \sin \theta + n \cos \theta)\tau \cos \theta + g\theta' \cos \theta \sin \theta + n\theta' \cos^2 \theta \\ &\quad - (g \cos \theta - n \sin \theta)\tau \sin \theta \\ g' &= -\kappa \cos \theta T + (\tau + \theta')n \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.26)' de verilen $n = -N \sin \theta + B \cos \theta$ ifadesinin türevi alınıp (2.28) ifadesi ve Frenet türev denklemleri yardımıyla

$$n' = -N\theta' \cos \theta - N' \sin \theta - B\theta' \sin \theta + B' \cos \theta$$

veya

$$\begin{aligned} n' &= -(g \cos \theta - n \sin \theta)\theta' \cos \theta - (-\kappa T + \tau B) \sin \theta - (g \sin \theta + n \cos \theta)\theta' \sin \theta + (-\tau N) \cos \theta \\ n' &= -g\theta' \cos^2 \theta + n\theta' \cos \theta \sin \theta + T\kappa \sin \theta - g\tau \sin^2 \theta - n\tau \cos \theta \sin \theta - g\theta' \sin^2 \theta \\ &\quad - n\theta' \cos \theta \sin \theta - g\tau \cos^2 \theta + n\tau \cos \theta \sin \theta \\ n' &= \kappa \sin \theta T - (\tau + \theta')g \end{aligned}$$

elde edilir.

Yüzeyin şekil operatörü S olmak üzere,

$$\kappa_n = \langle S(T), T \rangle = -\langle n', T \rangle = \langle n, T' \rangle = -\kappa \sin \theta \quad \text{şeklinde tanımlı yüzeyin normal eğriliği}$$

$$\kappa_g = \langle T', g \rangle = \langle \kappa N, g \rangle = \kappa \langle g, N \rangle = \kappa \cos \theta \quad \text{şeklinde tanımlı yüzeyin geodezik eğriliği}$$

$$\tau_g = \langle S(T), g \rangle = -\langle n', g \rangle = \langle n, g' \rangle = \tau + \theta' \quad \text{şeklinde tanımlı yüzeyin geodezik burulması}$$

ifadeleri yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} T' \\ g' \\ n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix}$$

şeklinde matris formu elde edilir.

Burada θ aynı zamanda oskütatör düzlemi ile teğet düzlem arasındaki açıdır.

M yüzeyi üzerindeki $\alpha: I \rightarrow M$ eğrisinin 1. eğrilik fonksiyonu olan κ olmak üzere $\vec{k} = \kappa \vec{N}$ ile tanımlanan eğrilik vektörü ile, $\vec{g}$ ve $\vec{n}$ doğrultularına izdüşümleri olan bu vektörler arasında

$$\vec{k} = \vec{k}_n + \vec{k}_g$$

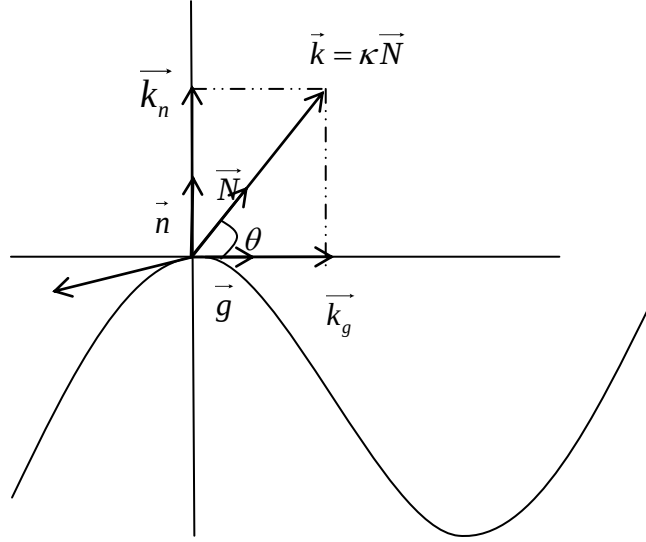
bağıntısı vardır.

$$\vec{k}_n = \kappa_n \vec{n}, \quad \vec{k}_g = \kappa_g \vec{g}$$

şeklinde tanımlıdırlar.

Yüzeyin normal eğriliği κ_n , T teğet vektör alanı ile n yüzeyin normalinin gerdiği düzlemin yüzey ile arakesit eğrisinin eğriliğidir. Yüzeyin geodezik eğriliği κ_g ise eğrinin teğet düzleme izdüşüm eğrisinin eğriliğidir.

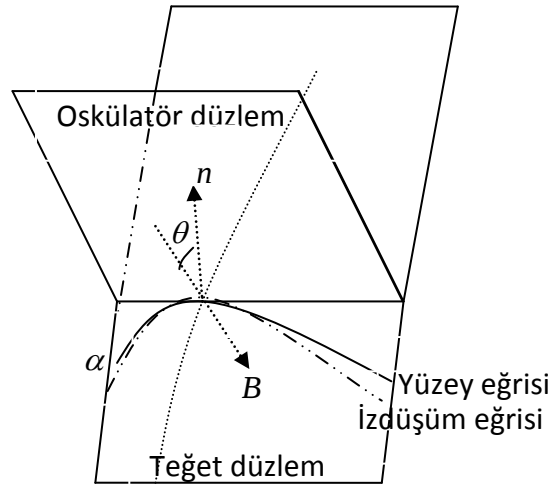
$\vec{k}_n$ normal eğrilik vektörünün büyüklüğü $\kappa_n = |\kappa \sin \theta|$ normal eğriliği ve $\vec{k}_g$ geodezik eğrilik vektörünün büyüklüğü $\kappa_g = |\kappa \cos \theta|$ geodezik eğriliği verir. Eğrilik vektörü, normal ve teğetsel eğrilik vektörlerinin toplamıdır.



Şekil 2. 8 Eğrilik vektörü

Yüzey eğrisinin geodezik burulması τ_g , yüzey üzerindeki $\alpha: I \rightarrow M$ eğrisinin doğrultusuna göre teğet düzlemin dönüklüğünü gösteren bir ölçüttür. Oskülatör düzlemi dönüklüğünün yay değişimine göre olan olan burulma τ ve oskülatör düzlemi ile teğet düzlem arasındaki açı değişiminin yay uzunluğuna oranı olan $\frac{d\theta}{ds}$ toplamına eşittir.

$$\tau_g = \tau + \frac{d\theta}{ds}$$



Şekil 2. 9 Yüzey eğrisi ve teğet düzlem üzerindeki izdüşümü

Darboux çatısına karşılık gelen türev matrisin bileşenleri göz önüne alınırsa, çatının Darboux ani dönme vektörü

$$\vec{\omega} = \tau_g \vec{T} + \kappa_n \vec{g} + \kappa_g \vec{n}$$

biçimindedir. Darboux çatısı, her anda, bu vektör etrafında bir dönme hareketi yapar.

Buna göre darboux türev formülleri, bu vektör yardımıyla

$$\vec{T}' = \omega \times \vec{T}$$

$$\vec{g}' = \omega \times \vec{g}$$

$$\vec{n}' = \omega \times \vec{n}$$

biçiminde tek türlü olarak ifade edilir.

Eğer, yüzey üzerindeki eğri birim hızlı değil ise Darboux türev formülleri

$$\vec{T}' = \gamma \kappa_g \vec{g} + \gamma \kappa_n \vec{n}$$

$$\vec{g}' = -\gamma \kappa_g \vec{T} + \gamma \tau_g \vec{n}$$

$$\vec{n}' = -\gamma \kappa_n \vec{T} - \gamma \tau_g \vec{g}$$

şeklindedir. Burada γ eğrinin hızıdır, [11,12].

Sonuç 2.5 $\kappa_g = 0 \Leftrightarrow (\alpha)$ eğrisi yüzey üzerinde geodezik eğridir.

$\kappa_n = 0 \Leftrightarrow (\alpha)$ eğrisi yüzey üzerinde asimptotik eğridir.

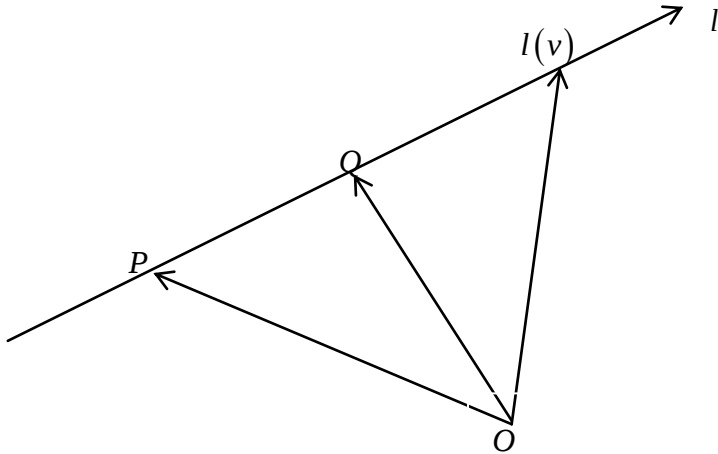
$\tau_g = 0 \Leftrightarrow (\alpha)$ eğrisi yüzey üzerinde asal eğridir.

REGLE YÜZEYLERDE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde E^3 Öklid uzayında herhangi bir çatıdan bağımsız olarak regle yüzeyler ve karakteristik özellikleri verilmiştir. Bu bölüm [4-6], [13-14] kaynakları baz alınarak anlatılmıştır.

3.1 Regle Yüzey

Tanım 3.1 E^3 Öklid uzayında doğruların 1-parametrelili bir ailesine E^3 de bir *regle yüzey*, bu ailedeki her bir doğruya da regle yüzeyin *doğrultmanı* veya *ana doğrusu* denir.



Şekil 3. 1 E^3 de doğru

E^3 Öklid uzayında P ve Q noktalarından geçen bir doğru l olmak üzere l' nin parametrik denklemi, $v \in \mathbb{R}$ parametre olmak üzere

$$l(v) = P + v(Q - P)$$

şeklindedir.

l doğrusu tarafından çizilen 1-parametrelili yörünge $\varphi(u, v)$ ile gösterilirse, bu regle yüzeyin parametrik denklemi,

$$\varphi(u, v) = P(u) + v(Q(u) - P(u))$$

veya

$$\varphi(u, v) = P(u) + ve(u)$$

şeklinde yazılabilir, [4, 13].

Tanım 3.2 E^3 de $\varphi(u, v) = P(u) + ve(u)$ parametrik denklemiyle verilen bir regle yüzey olsun. l doğrusu regle yüzeyi oluştururken P noktası da u değişkenli bir eğri çizer. Bu eğriye regle yüzeyin *dayanak eğrisi*, $e(u) = Q(u) - P(u)$ vektörünün $\|P - Q\|$ yarıçaplı küre üzerinde çizdiği eğriye regle yüzeyin *küresel gösterge eğrisi* ve $e(u)$ vektörüne de yüzeyin *küresel gösterge vektörü* denir.

l doğrultmanı üzerinde P ve Q dan farklı iki nokta seçilirse, regle yüzeyin küresel gösterge eğrisi, (e) yarıçaplı bir küre yüzeyi üzerinde aynı küresel eğri olacaktır. Bu durumda küresel gösterge eğrisi, l üzerinde seçilen noktalardan bağımsızdır, [4,13].

Örnek 3.1 $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in E^3 \mid x_3 = x_1 x_2\}$ semer yüzeyi bir regle yüzeydir.

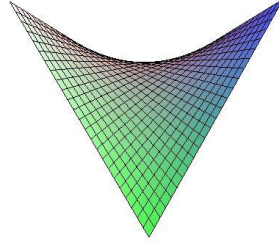
$x_1 = s$, $x_2 = v$ ve $x_3 = sv$ olarak yazılabileceğinden

$$\varphi(s, v) = (s, v, sv)$$

şeklinde yazılabilir. Yüzeyi dayanak eğrisi ve küresel gösterge eğrisi cinsinden ifade etmek istersek

$$\begin{aligned} \varphi(s, v) &= (s, 0, 0) + v\sqrt{1+s^2} \left(0, \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \right), \quad v\sqrt{1+s^2} = k \\ \varphi(s, v) &= (s, 0, 0) + k \left(0, \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \right), \quad \|e(s)\| = 1 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir, [5].

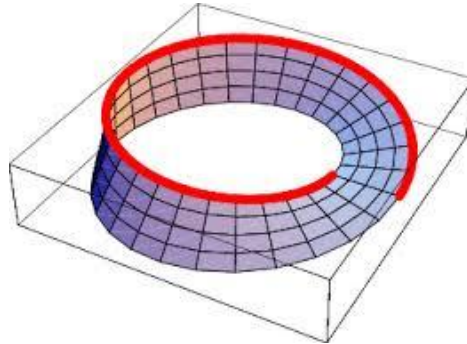


Şekil 3. 2 Semer yüzeyi

Örnek 3.2 $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ ve $e(s) = \left(\cos \frac{s}{2} \cos s, \cos \frac{s}{2} \sin s, \sin \frac{s}{2} \right)$ olmak üzere

$$\varphi(s, v) = (\cos s, \sin s, 0) + v \left(\cos \frac{s}{2} \cos s, \cos \frac{s}{2} \sin s, \sin \frac{s}{2} \right)$$

şeklinde tanımlanan Möbiüs şeridi bir regle yüzeydir, [14].



Şekil 3. 3 Möbiüs şeridi

Örnek 3.3 $z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ şeklinde kartezyen denklemi ile tanımlanan Plücker koniği bir regle yüzeydir.

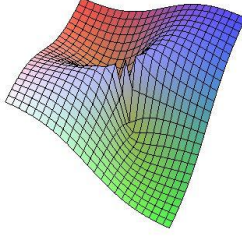
Yüzeyin parametrik denklemi

$$\varphi(s, v) = \left(s, v, \frac{2sv}{s^2 + v^2} \right)$$

şeklindedir. Kutupsal koordinatlarda ise,

$$\varphi(s, v) = (0, 0, \sin 2\theta) + r(\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

şeklinde tanımlanan bir regle yüzeydir, [14].



Şekil 3. 4 Plücker koniği

Tanım 3.3 Regle yüzeyin dayanak eğrisi tek değildir. Bu nedenle doğrultmanların her birini kesen ve yüzey üzerinde yatan bir $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi alınabilir.

$s \in I$ yay parametresi ve $\|e(s)\|=1$ olmak üzere φ' nin parametrik denklemi

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$$

şeklindedir, [4,13].

Bir regle yüzey aşağıdaki şekillerde parametrelendirilebilir.

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$$

veya

$$\varphi(s, v) = \alpha(v) + se(v)$$

Özel olarak her iki şekilde de parametrelendirilebilen regle yüzeylere *çift regle yüzey* adı verilir, [14].

Sonuç 3.1 E^3 de bir regle yüzey, bir e doğrusunun $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi boyunca hareketi ile elde edilen $\varphi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ yüzeyi olarak tanımlanabilir. α eğrisine regle yüzeyin *dayanak eğrisi* ve e ye de yüzeyin *küresel gösterge eğrisi, anadoğrusu* veya *doğrultman vektörü* adı verilir, [4,5,13,14].

Not 3.1 M bir regle yüzey ve $P \in M$ olsun. P noktasından geçen ve her noktasında, o noktadan geçen doğrultmana dik olan birim hızlı bir

$$\begin{aligned}\delta: I &\rightarrow M \\ s &\rightarrow \delta(s)\end{aligned}$$

eğrisi bulunabilir. δ' 'nın teğet vektör alanı T ve doğrultmanlara teğet vektör alanı e olsun.

$$\varphi(s, v) = \delta(s) + ve(s)$$

M regle yüzeyi için bir parametrizasyondur. Bu durumda δ eğrisi boyunca yüzeye dik birim normal vektör alanı n olmak üzere $\{T, e, n\}$ ortonormal çatısı elde edilir,[5].

Tanım 3.4 $\varphi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ denklemi ile tanımlı regle yüzey üzerinde yatan tüm eğrilerin teğet doğrultuları

$$d\varphi = \varphi_s ds + \varphi_v dv \quad (3.1)$$

dir. Ayrıca regle yüzeyin bir Q noktasındaki teğet düzlemi, teğet düzlemde X temsili bir nokta olmak üzere,

$$\langle \overrightarrow{XQ}, \varphi_s \times \varphi_v \rangle = \det(\overrightarrow{XQ}, \varphi_s, \varphi_v) = 0$$

bağıntısından elde edilir.

Ayrıca regle yüzeyin e doğrultman vektörü için $\langle e, \varphi_s \times \varphi_v \rangle = \det(e, \varphi_s, \varphi_v) = 0$ olduğundan e doğrultman vektörü teğet düzlemde yatmaktadır, [4,13].

Teorem 3.1 E^3 de $\varphi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ denklemiyle bir regle yüzey verilsin. Bu durumda yüzeyin doğrultmanları hem asimptotik ve hem de geodezik çizgilerdir, [5,6].

İspat M, E^3 de verilen regle yüzeyi için, $e \in \mathcal{X}(M)$ bir teğet vektör alanı olsun. Her bir doğrultman bir doğru olduğundan, E^3 ' de bir geodeziktir. Dolayısıyla $D_e e = \vec{0}$ yazılır.

Yüzeyin Gauss denkleminde, $\overline{D}_e e = D_e e + \langle S(e), e \rangle n$ ifadesinde $D_e e = \vec{0}$ eşitliği kullanılırsa,

$$\overline{D}_e e = \langle S(e), e \rangle n$$

elde edilir.

$D_e e \in T_M$, $n \in T_M^\perp$, ve $T_M \cap T_M^\perp = \{\vec{0}\}$ olduğundan, $\overline{D_e e} = \vec{0}$ ve $\langle S(e), e \rangle = \vec{0}$

olması gerekir. $\overline{D_e e} = \vec{0}$ olduğundan, M 'nin doğrultmanları, M 'nin geodezik çizgileri olur. $\langle S(e), e \rangle = \vec{0}$ olması ise bu doğrultmanların asimptotik çizgiler olduğunu gösterir.

Teorem 3.2 M, E^3 de $\varphi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ denklemleriyle verilen bir regle yüzey ve yüzeyin Gauss eğrilik fonksiyonu K olmak üzere, $\forall P \in M$ için yüzeyin Gauss eğriliği $K(P) \leq 0$ şeklindedir, [5,6,14].

İspat I.Yol: Yüzeyin P noktasındaki doğrultmanın teğet vektör alanı e olsun. Teğet uzayın $\{e, X\}$ ortonormal bazını ele alalım. Bu baza göre, yüzeyin S şekil operatörüne karşılık gelen matris,

$$S = \begin{bmatrix} \langle S(e), e \rangle & \langle S(X), e \rangle \\ \langle S(e), X \rangle & \langle S(X), X \rangle \end{bmatrix}$$

dir. Burada Teorem 3.1 gereğince $\langle S(e), e \rangle = \vec{0}$ ve S şekil operatörünün simetrik olduğu kullanılırsa,

$$K = \det S = -(\langle S(e), X \rangle)^2$$

$$K \leq 0$$

elde edilir, [5,6].

II.Yol: Bir yüzey için yüzeyin K Gauss eğriliğini I .Temel Form ve II . Temel Formun katsayıları cinsinden ifade etmek için,

$$\begin{aligned} \varphi(s, v) &= \alpha(s) + ve(s) \\ \varphi_s &= \alpha_s + ve_s \\ \varphi_v &= e \\ \varphi_{ss} &= \alpha_{ss} + ve_{ss} \\ \varphi_{vv} &= 0 \\ \varphi_{sv} &= e_s \end{aligned} \tag{3.2}$$

türevlerini kullanarak, I . Temel formunun katsayıları

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle$$

$$F = \langle \varphi_s, \varphi_v \rangle$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$$

ve II .Temel Formunun katsayıları $W = \sqrt{EG - F^2} \neq 0$ olmak üzere,

$$L = \frac{1}{W} \det(\varphi_s, \varphi_v, \varphi_{ss})$$

$$M = \frac{1}{W} \det(\varphi_s, \varphi_v, \varphi_{sv})$$

$$N = \frac{1}{W} \det(\varphi_s, \varphi_v, \varphi_{vv})$$

şeklindedir. Bu ifadeleri kullanırsak yüzeyin Gauss eğriliği $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$ şeklinde

tanımlı olduğundan (3.2) türev denklemlerini kullanırsak $N = \frac{1}{W} \det(\varphi_s, \varphi_v, \varphi_{vv}) = 0$

bulunur. Böylece yüzeyin Gauss eğriliği $K = -\frac{M^2}{EG - F^2} \leq 0$ elde edilir, [14].

Teorem 3.3 Bir regle yüzeyin flat yüzey olabilmesi için gerek ve yeter koşul yüzeyin II . temel formunun katsayısı olan M değerinin sıfır olmasıdır, [14].

İspat ($\Rightarrow$): Kabul edelim ki regle yüzey flat yüzey olsun. Bu durumda yüzeyin Gauss eğriliği her noktada sıfır olur. Regle yüzeyin Gauss eğriliği de,

$$K = -\frac{M^2}{EG - F^2} \leq 0$$

şeklinde tanımlı olduğundan regle yüzeyin II . Temel formun katsayısı olan M değeri sıfır olur.

($\Leftarrow$): Kabul edelim ki regle yüzeyin II . Temel formunun katsayısı olan M değerinin sıfır olsun. Bu durumda

$$K = -\frac{M^2}{EG - F^2} \leq 0$$

şeklinde tanımlanan Gauss eğriliği sıfırdır. Buradan yüzey bir flat yüzeydir.

Tanım 3.5 $\alpha:(a,b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ şeklinde tanımlı bir eğrinin teğet vektörü $\alpha'(s)$ için,

$$\varphi(s,v) = \alpha(s) + v\alpha'(s)$$

şeklinde tanımlanan regle yüzeye *teğet açılabilir regle yüzey* adı verilir, [14].

Teorem 3.4 $\forall P \in (a,b)$ için $\alpha:(a,b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisinin 1. eğriliği $\kappa(P) \neq 0$ olacak şekilde tanımlanan $\varphi(s,v) = \alpha(s) + v\alpha'(s)$ teğet açılabilir yüzeyi, α eğrisinin noktaları haricinde her noktada regülerdir, [14].

İspat $\varphi(s,v) = \alpha(s) + v\alpha'(s)$ şeklinde tanımlı bir teğet açılabilir yüzey için elde edilen,

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_s = \alpha_s + v\alpha_{ss} \\ \varphi_v = \alpha_s \end{array} \right\} \text{ olmak üzere } \|\varphi_s \times \varphi_v\| = v\alpha_{ss} \times \alpha_s \text{ eşitliği } \kappa(P) \neq 0 \text{ olması durumunda}$$

sıfırdan farklı olacağından, regle yüzey $\forall P \in \alpha$ için $\kappa(P) \neq 0$ olmak üzere α eğrisinin noktaları haricinde her noktada regülerdir. Çünkü $v=0$ durumunda α eğrisinin noktaları elde edilir ve bu değer de regülerliği bozar.

Teorem 3.6 $\varphi(s,v) = \alpha(s) + v\alpha'(s)$ şeklinde tanımlı bir teğet açılabilir yüzeyi flat yüzeydir, [14].

İspat $\varphi(s,v) = \alpha(s) + v\alpha'(s)$ teğet açılabilir yüzeyi için K Gauss eğriliğini *I. Temel Form* ve *II. Temel Formun* katsayıları cinsinden ifade etmek istersek,

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_s = \alpha_s + v\alpha_{ss} \\ \varphi_v = \alpha_s \\ \varphi_{ss} = \alpha_{ss} + v\alpha_{sss} \\ \varphi_{vv} = 0 \\ \varphi_{sv} = \alpha_{ss} \end{array} \right\} \text{ eşitlikleri için}$$

$$K = -\frac{M^2}{EG - F^2} \leq 0 \text{ şeklinde tanımlı Gauss eğriliğinin, teğet açılabilir yüzeyin II. Temel}$$

formunun katsayısı için $M = \frac{1}{W} \det(\varphi_s, \varphi_v, \varphi_{sv}) = 0$ olduğundan $K = 0$ olur ve böyle teğet açılabilir regle yüzeylerin flat yüzey olduğu elde edilir.

Teorem 3.7 $\alpha:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\rightarrow E^3$ ve $a<0<b$ olacak şekilde tanımlı birim hızlı bir eğri olmak üzere $\varphi(s,v)=\alpha(s)+v\alpha'(s)$ teğet açılabilir regle yüzeyi tanımlansın. Kabul edelim ki, α eğrisi, 0 noktasında diferensiyellenebilir ve $\kappa(0)\neq 0$ ve $\tau(0)\neq 0$ olsun. Bu durumda α eğrisinin $\alpha(0)$ noktasında dik bir düzlem ile yüzeyin arakesiti, $\alpha(0)$ noktası uç noktası olan bir yarı-kubik parabolüdür, [14].

İspat α birim hızlı bir eğri olduğundan $\|\alpha'\|=1$ dir ve dolayısıyla aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} \alpha'(s) &= T(s) \\ \alpha''(s) &= \kappa(s)N(s) \end{aligned} \right\} \text{ olmak üzere,}$$

$$\begin{aligned} \alpha'''(s) &= -\kappa^2(s)T(s) + \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)\tau(s)B(s) \\ \alpha^{(4)}(s) &= -3\kappa(s)\kappa'(s)T(s) + (-\kappa^3(s) + \kappa''(s) - \kappa(s)\tau^2(s))N(s) + (2\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s))B(s) \end{aligned}$$

elde edilir.

α eğrisini $\alpha(0)$ noktasında Taylor serisine açarsak, burada "O" kalan terim göstermek üzere

$$\alpha(0) = \alpha_0, \kappa(0) = \kappa_0, \tau(0) = \tau_0, T(0) = T_0, B(0) = B_0 \text{ ve } N(0) = N_0$$

$$\alpha(s) = \alpha_0 + s\alpha_0' + \frac{s^2}{2!}\alpha_0'' + \frac{s^3}{3!}\alpha_0''' + \frac{s^4}{4!}\alpha_0^{(4)} + O(s^5)$$

Türev değerlerini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \alpha_0 + \left(s - \frac{s^3}{6} - \frac{s^4}{8}\kappa_0\kappa_0' \right) T_0 + \left(\frac{s^2}{2}\kappa_0 + \frac{s^3}{6}\kappa_0' + \frac{s^4}{24}(-\kappa_0^3 + \kappa_0'' - \kappa_0\tau_0^2) \right) N_0 \\ &\quad + \left(\frac{s^3}{6}\kappa_0\tau_0 + \frac{s^4}{24}(2\kappa_0'\tau_0 + \kappa_0\tau_0') \right) B_0 + O(s^5) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikten türev alırsak,

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= \left(1 - \frac{s^2}{2}\kappa_0^2 - \frac{s^3}{2}\kappa_0\kappa_0' \right) T_0 + \left(s\kappa_0 + \frac{s^2}{2}\kappa_0' + \frac{s^3}{6}(-\kappa_0^3 + \kappa_0'' - \kappa_0\tau_0^2) \right) N_0 \\ &\quad + \left(\frac{s^2}{2}\kappa_0\tau_0 + \frac{s^3}{6}(2\kappa_0'\tau_0 + \kappa_0\tau_0') \right) B_0 + O(s^4) \end{aligned}$$

teğet vektörü elde edilir. α eğrisinin teğet açılabilir regle yüzeyi Tanım 3.5 'den $\varphi(s, v) = \alpha(s) + v\alpha'(s)$ şeklinde tanımlı olduğundan $\alpha(s)$ ve $\alpha'(s)$ değerlerini yerine yazarsak yüzeyin denklemi

$$\begin{aligned}\varphi(s, v) = & \alpha_0 + \left(s - \frac{s^3}{6} + v - v \frac{s^2}{2} \kappa_0^2 - v \frac{s^3}{2} \kappa_0 \kappa_0' \right) T_0 \\ & + \left(\frac{s^2}{2} \kappa_0 + \frac{s^3}{6} \kappa_0' + v s \kappa_0 + v \frac{s^2}{2} \kappa_0' + v \frac{s^3}{6} \left(-\kappa_0^3 + \kappa_0'' - \kappa_0 \tau_0^2 \right) \right) N_0 \\ & + \left(\frac{s^3}{6} \kappa_0 \tau_0 + v \frac{s^2}{2} \kappa_0 \tau_0 + v \frac{s^3}{6} \left(2\kappa_0' \tau_0 + \kappa_0 \tau_0' \right) \right) B_0 + O(s^4)\end{aligned}$$

elde edilir. α eğrisine α_0 noktasında dik olan bir düzlemle yüzeyin arakesitini belirlemek istersek, eğrinin teğetine dik olacağından T_0 değeri 0 olmalıdır. Bu durumda v değerini çözersek,

$$v = - \frac{s - \frac{1}{6} s^3 \kappa_0^2 + O(s^4)}{1 - \frac{1}{2} s^2 \kappa_0^2 - \frac{1}{2} s^3 \kappa_0 \kappa_0' + O(s^4)} = -s - \kappa_0^2 \frac{s^3}{3} + O(s^4)$$

elde edilir.

Bu değeri N_0 ve B_0 in katsayılarında yerine yazarsak, $x \rightarrow N_0$ vektörünün katsayısı ve $y \rightarrow N_0$ vektörünün katsayısı olmak üzere, x, y nin kapalı denklemi için $8\tau_0^2 x^3 + 9\kappa_0 y^2 = 0$ yarı-kubik parabolü elde edilir.

Teorem 3.8 $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri ve bu eğrinin teğet açılabilir yüzeyi $\varphi(s, v) = \alpha(s) + v\alpha'(s)$ olsun. Bu durumda yüzeyin I . Temel formunun katsayıları sadece eğrinin 1. eğriliği olan κ değerine bağlıdır, [14].

İspat $\varphi(s, v) = \alpha(s) + v\alpha'(s)$ Teğet açılabilir yüzeyinin I . Temel Formunun katsayıları,

$$\left. \begin{aligned}\varphi_s &= \alpha_s + v\alpha_{ss} = T + v\kappa N \\ \varphi_v &= \alpha' = \alpha_s\end{aligned} \right\} \text{ olmak üzere bu değerleri}$$

$$\left. \begin{aligned} E &= \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle \\ F &= \langle \varphi_s, \varphi_v \rangle \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \end{aligned} \right\} \text{ eşitliklerinde yerine yazarsak, } \left. \begin{aligned} E &= \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = 1 + v^2 \kappa^2 \\ F &= \langle \varphi_s, \varphi_v \rangle = 1 \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 1 \end{aligned} \right\}$$

elde edilir. Dolayısıyla yüzeyin I . Temel formunun katsayıları sadece eğrinin 1. eğriliği olan κ değerine bağlıdır.

Tanım 3.6 $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ şeklinde tanımlı bir eğrinin normal vektör alanı $N(s)$ için,

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vN(s)$$

şeklinde tanımlanan regle yüzeye *normal regle yüzey* adı verilir, [14].

Tanım 3.7 $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ şeklinde tanımlı bir eğrinin binormal vektör alanı $B(s)$ için,

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vB(s)$$

şeklinde tanımlanan regle yüzeye *binormal regle yüzey* adı verilir, [14].

Tanım 3.8 $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ şeklinde tanımlı bir eğri ve $q \in E^3$ de sabit bir vektör için,

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vq$$

şeklinde tanımlanan regle yüzeye *genelleştirilmiş silindir* adı verilir, [14].

Teorem 3.9 $\varphi(s, v) = \alpha(s) + vq$ şeklinde tanımlı bir genelleştirilmiş silindir regle yüzeyi $\alpha' \times q \neq 0$ olduğu her noktada regülerdir, [14].

İspat $\varphi(s, v) = \alpha(s) + vq$ şeklinde tanımlı bir genelleştirilmiş silindir yüzeyi için elde edilen,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_s &= \alpha_s \\ \varphi_v &= q \end{aligned} \right\} \text{ olmak üzere } \|\varphi_s \times \varphi_v\| = \alpha_s \times q \text{ eşitliğinden dolayı } \alpha' \times q \neq 0 \text{ olduğu her}$$

noktada regülerdir.

Teorem 3.10 $\varphi(s, v) = \alpha(s) + vq$ şeklinde tanımlı bir genelleştirilmiş silindir regle yüzeyi flat yüzeydir, [14].

İspat $\varphi(s, v) = \alpha(s) + vq$ genelleştirilmiş silindir regle yüzeyi için K Gauss eğriliğini I . Temel Form ve II . Temel Formun katsayıları cinsinden ifade etmek istersek,

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_s = \alpha_s \\ \varphi_v = q \\ \varphi_{ss} = \alpha_{ss} \\ \varphi_{vv} = 0 \\ \varphi_{sv} = 0 \end{array} \right\} \text{eşitlikleri için}$$

genelleştirilmiş silindir yüzeyinin II . Temel formunun katsayısı

$M = \frac{1}{W} \det(\varphi_s, \varphi_v, \varphi_{sv}) = 0$ olduğundan $K = -\frac{M^2}{EG - F^2} \leq 0$ şeklinde tanımlı Gauss eğriliği $K = 0$ olur ve böyle genelleştirilmiş silindir regle yüzeylerinin flat yüzey olduğu elde edilir.

Tanım 3.9 $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ şeklinde tanımlı bir eğri ve $q \in E^3$ de sabit bir vektör için,

$$\varphi(s, v) = q + v\alpha(s)$$

şeklinde tanımlanan regle yüzeye *genelleştirilmiş koni* ve $q \in E^3$ noktasına da koninin köşe noktası adı verilir, [14].

Teorem 3.11 $\varphi(s, v) = q + v\alpha(s)$ şeklinde tanımlı bir genelleştirilmiş koni yüzeyi $v\alpha \times \alpha'$ ifadesinin sıfırdan farklı olduğu her noktada regüler ve köşe noktalarında regüler değildir, [14].

İspat $\varphi(s, v) = q + v\alpha(s)$ şeklinde tanımlı bir genelleştirilmiş koni yüzeyi için elde edilen,

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_s = v\alpha_s \\ \varphi_v = \alpha \end{array} \right\} \text{olmak üzere } \|\varphi_s \times \varphi_v\| = v\alpha_s \times \alpha \text{ eşitliğinden dolayı } v\alpha \times \alpha' \neq 0 \text{ olduğu her}$$

noktada regülerdir ve $v = 0$ için elde edilen köşe noktalar için regüler değildir.

Teorem 3.12 $\varphi(s, v) = q + v\alpha(s)$ şeklinde tanımlı bir genelleştirilmiş koni regle yüzeyi flat yüzeydir, [14].

İspat $\varphi(s, v) = q + v\alpha(s)$ genelleştirilmiş koni için K Gauss eğriliğini I .Temel Form ve II . Temel Formun katsayıları cinsinden ifade etmek istersek,

$$\varphi_s = v\alpha_s$$

$$\varphi_v = v\alpha$$

$$\varphi_{ss} = v\alpha_{ss}$$

$$\varphi_{vv} = 0$$

$$\varphi_{sv} = \alpha_s$$

eşitlikleri için genelleştirilmiş koni yüzeyinin II . Temel formunun katsayısı

$$M = \frac{1}{W} \det(\varphi_s, \varphi_v, \varphi_{sv}) = 0 \text{ olduğundan } K = -\frac{M^2}{EG - F^2} \leq 0 \text{ şeklinde tanımlı Gauss}$$

eğriliği $K = 0$ olur ve böylece genelleştirilmiş koni regle yüzeylerinin flat yüzey olduğu elde edilir.

Örnek 3.4 Koni, E^3 de bir regle yüzeydir.

Dayanak eğrisi, $\alpha(s)$ ve tepe noktası P olan yüzeyin denklemi başlangıç noktası O olmak üzere,

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + v\overrightarrow{P\alpha(t)}, \quad \forall t \in I, v \in \mathbb{R}$$

veya daha basit bir eşitlik gelmesi için

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + (v+1)\overrightarrow{P\alpha(t)}$$

yazılabilir.

$$P = (p_1, p_2, p_3), \quad \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

$$\overrightarrow{OX} = \{(p_1 + (v+1)(\alpha_1(t) - p_1), (p_2 + (v+1)(\alpha_2(t) - p_2), (p_3 + (v+1)(\alpha_3(t) - p_3))\}$$

denklemini düzenlersek

$$\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow E^3$$

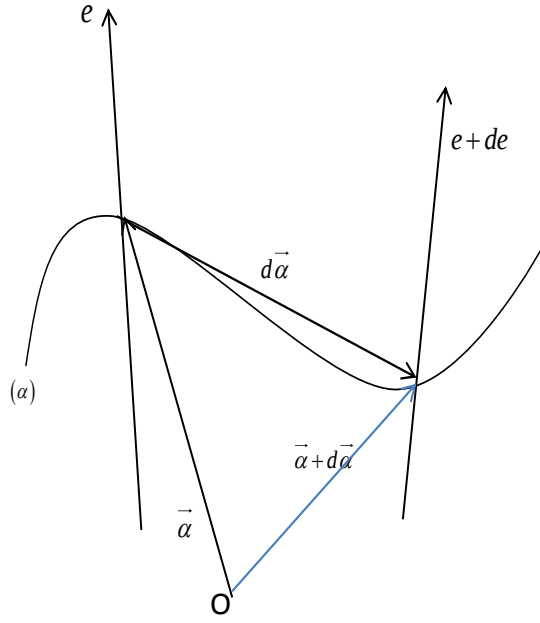
$$\varphi(t, v) = \{(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) + v(\alpha_1(t) - p_1, \alpha_2(t) - p_2, \alpha_3(t) - p_3)\}$$

$$\varphi(t, v) = \alpha(t) + v\overrightarrow{P\alpha(t)}$$

şeklinde bir regle yüzey elde edilir, [5].



55



Şekil 3. 6 Regle yüzeyin dağılma parametresi

Dayanak eğrisinin komşu iki noktası $\overrightarrow{\alpha(s)}$ ve $\overrightarrow{\alpha(s)} + \overrightarrow{d\alpha(s)}$ olduğundan bu noktalardaki anadoğrular arasındaki en kısa uzaklık $\overrightarrow{d\alpha(s)}$ vektörünün, ortak dik birim doğrultu vektörü

$$\frac{e \times e_s}{\|e_s\|}$$

üzerindeki izdüşümüdür. Böylece en kısa uzaklık k ile gösterilirse,

$$k = \left\langle \overrightarrow{d\alpha}, \frac{e \times e_s}{\|e_s\|} \right\rangle = \frac{\det(d\alpha, e, e_s)}{\|e_s\|}$$

olarak bulunur. Eğer doğrultmanların küresel göstergelerini göz önüne alırsak, bu göstergelerin yay elementi olan

$$d\psi = \left\| \frac{de}{ds} \right\| ds = \|e_s\| ds$$

komşu iki doğrultman arasındaki açı olarak tanımlanabilir. Böylece regle yüzeyin dağılma parametresi için,

$$P_e = \frac{k}{d\psi} = \frac{\frac{\det(d\alpha, e, e_s)}{\|e_s\|}}{\|e_s\| ds} = \frac{\det(\frac{d\alpha}{ds}, e, e_s)}{\|e_s\|^2} = \frac{\det(\alpha_s, e, e_s)}{\|e_s\|^2} \quad (3.3)$$

bulunur, [4-6],[13-14].

3.3 Açılabilir Regle Yüzey

Tanım 3.11 Regle yüzeyinin komşu iki doğrultmanı kesişiyorsa regle yüzeye *açılabilir regle yüzey* adı verilir.

Komşu doğrultmanların her bir çifti bir düzlem belirleyeceğinden açılabilir regle yüzey, *düzlemlerin 1 – parametrelili ailesi* olarak da adlandırılabilir.

Açılabilir regle yüzeyde ailenin her bir düzlemi doğrultman boyunca yüzeye değdiğinden teğet düzlem doğrultmanının bütün noktalarında aynı olacaktır. Buradan yola çıkarak regle yüzeylerin açılabilirliği için ikinci bir tanımdan bahsedebiliriz, [13].

Tanım 3.12 Regle yüzeyinin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise, regle yüzeye *açılabilir regle yüzey* adı verilir, [13].

Sonuç 3.2 Regle yüzeyin normali, doğrultmanlar boyunca paralel kalıyorsa bu regle yüzey açılabilir. Bu nedenle bir regle yüzey açılabilir ise $S(e) = \overline{D}_e n = 0$ olacağından Teorem 3.2 gereğince $K = 0$ bulunur. Demek ki; açılabilir bir regle yüzeyin Gauss eğrilik fonksiyonu sıfırdır, [5].

Teorem 3.13 Regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır, [4,5,13].

İspat ($\Rightarrow$): M , $\varphi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ denklemiyle verilen regle yüzeyinin komşu iki anadoğrusu $l = e$ ve $l^* = e + de = e + e_s ds$ olsun. M açılabilir olduğundan anadoğrular boyunca teğet düzlem aynıdır. Dolayısıyla yüzeyin bu iki doğrultman boyunca normali $e \times e_s ds$ doğrultusundadır ve dayanak eğrisinin birim teğet vektör alanı α_s olmak üzere, $\langle \alpha_s, e \times e_s \rangle = \det(\alpha_s, e, e_s) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla dağılma parametresi sıfırdır.

$(\Leftarrow)$: M yüzeyi için $P_e = 0$ ise komşu iki anadoğrusu $l = e$ ve $l^* = e + de = e + e_s ds$ için en kısa uzaklık sıfır olacaktır. Yani komşu anadoğrular kesişecektir ve dolayısıyla regle yüzey açılabilir olacaktır.

Not 3.2 Bir diferensiyellenebilir eğrinin teğetinin oluşturduğu regle yüzeyin dağılma parametreleri sıfır olduğundan yüzey açılabilir regle yüzeydir. Fakat eğrinin normallerinin ve binormallerinin oluşturduğu regle yüzey açılabilir olmak zorunda değildir, [14].

Tanım 3.13 $\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow E^3$

$$(s, v) \rightarrow \varphi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$$

regle yüzeyi için, $\forall s \in I$ için

$$\varphi(s + T, v) = \varphi(s, v)$$

olacak şekilde $T > 0$ tamsayısı varsa, *regle yüzeye kapalıdır* denir.

$$\varphi(s + T, v) = \alpha(s + T) + ve(s + T) = \alpha(s) + ve(s) = \varphi(s, v)$$

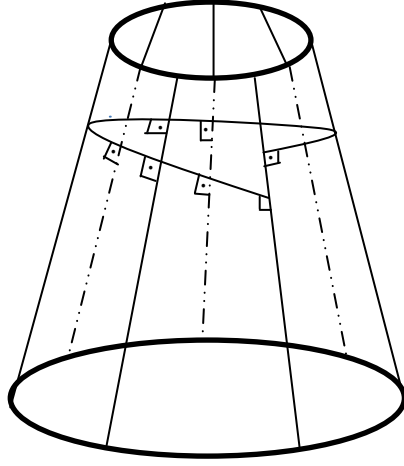
olduğundan kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri ve anadoğruların küresel gösterge eğrileri de kapalıdır. Bir diğer ifade ile bir periyod sonra her anadoğru kendisi üzerine gelir, [4,5,13].

3.4 Ortogonal Yörünge

Tanım 3.14 Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin anadoğrularının her birini dik kesen eğriye regle yüzeyin *ortogonal yörüngesi* adı verilir. Bir regle yüzeyin ortogonal yörüngesi

$$\langle e, d\varphi \rangle = 0 \quad (3.4)$$

bağıntısı ile elde edilir, [5].



Şekil 3. 7 Regle yüzeyin ortogonal yörüngesi

3.5 Striksiyon Eğrisi

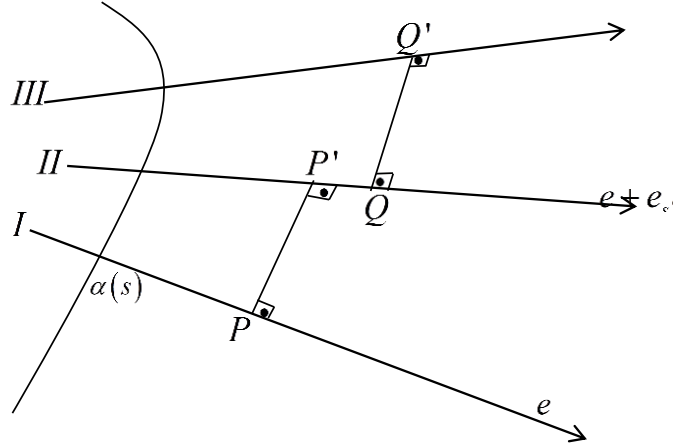
Tanım 3.15 Bir regle yüzeyde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına *striksiyon(merkez veya boğaz) noktası* denir, [5].

Tanım 3.16 Bir regle yüzeyin, anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken striksiyon noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin *striksiyon eğrisi(çizgisi)* denir.

Bir regle yüzeyin striksiyon noktasını $c(s)$ ile gösterirsek, striksiyon noktasının $\overrightarrow{c(s)}$ vektörünün yer vektörü, dayanak eğrisinin $\overrightarrow{\alpha(s)}$ yer vektörü, $e(s)$ doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine olan $\bar{u}$ uzaklığı cinsinden,

$$c(s, \bar{u}) = \alpha(s) + \bar{u}e(s) \quad (3.5)$$

şeklinde ifade edilebilir. $\bar{u}$ parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultman cinsinden bulunabilir. Regle yüzeyin ilk ikisi $\overrightarrow{e(s)}$ ve $\overrightarrow{e(s)} + d\overrightarrow{e(s)}$ olan komşu üç anadoğrusu verilsin.



Şekil 3. 8 Regle yüzeyin striksiyon eğrisi

P, P' ve Q, Q' komşu anadoğruların ortak dikmelerinin anadoğrular üzerindeki ayakları olsunlar. İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi

$$e \times (e + e_s ds) = e \times e_s ds$$

bağıntısından dolayı $e \times e_s$ vektörüne paraleldir. Limit halinde $\overrightarrow{PQ}$ vektörü $\overrightarrow{PP'}$ ile çakışacak ve striksiyon eğrisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla,

$$\langle e, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0, \quad \langle e + e_s ds, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0,$$

olacağından

$$\langle e_s, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0 \quad (3.6)$$

elde edilir. Ayrıca (3.5) denkleminde dayanak eğrisinin s yay parametresine göre türevi alınıp ve (3.6) eşitliği kullanılırsa,

$$\left\langle e_s, \frac{dc}{ds} \right\rangle = 0$$

için

$$\left\langle e_s, T + \frac{d\bar{u}}{ds} e + \bar{u} e_s \right\rangle = 0$$

veya

$$\langle e_s, T \rangle + \bar{u} \|e_s\|^2 = 0$$

yazılabilir. Buradan

$$\bar{u} = -\frac{\langle e_s, T \rangle}{\langle e_s, e_s \rangle} \quad (3.7)$$

bulunur. Böylece striksiyon eğrisinin yer vektörü için (3.5) eşitliğinden,

$$\vec{c}(s) = \vec{\alpha}(s) - \frac{\langle e_s(s), T(s) \rangle}{\langle e_s(s), e_s(s) \rangle} e(s) \quad (3.8)$$

elde edilir, [5,6].

Sonuç 3.3

- Eğer $\langle e_s, e_s \rangle = \|e_s\|^2 = 0$ ise regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu durumda yüzey silindir olacaktır, [5].
- $\bar{u} = -\frac{\langle e_s, T \rangle}{\langle e_s, e_s \rangle} = 0$ olması durumunda ise regle yüzeyin striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olacaktır, [5].

Tanım 3.17 Striksiyon eğrisiz regle yüzeye *tanjant yüzey* adı verilir, [13].

Tanım 3.18 $\varphi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ şeklinde tanımlı bir regle yüzey için $e \times e_s \neq 0$ olması durumunda regle yüzeye *silindirik olmayan regle yüzey* adı verilir. Doğrultmanlar silindirik olmayan regle yüzeylerde her zaman doğrultu değiştirirler. Her zaman aynı doğrultu da hareket etmezler, [14].

Teorem 3.14 Silindirik olmayan bir regle yüzeyin striksiyon eğrisi dayanak eğrisinin seçiminden bağımsızdır, [14].

İspat α ve β , $\varphi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ regle yüzeyinin iki farklı dayanak eğrisi olsun. Bu durumda,

$$\alpha(s) + ve(s) = \beta(s) + w(v)e(s)$$

olacak şekilde w fonksiyonu yazılabilir. Bu α ve β dayanak eğrilerine karşılık gelen striksiyon eğrileri c ve $\bar{c}$ olmak üzere,

$$c(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \alpha_s(s), e_s(s) \rangle}{\langle e_s(s), e_s(s) \rangle} e(s)$$

ve

$$\bar{c}(s) = \beta(s) - \frac{\langle \beta_s(s), e_s(s) \rangle}{\langle e_s(s), e_s(s) \rangle} e(s)$$

yazılabilir. Bu iki striksiyon eğrisinin farkını alırsak,

$$c(s) - \bar{c}(s) = \alpha(s) - \beta(s) - \frac{\langle (\alpha_s(s) - \beta_s(s)), e_s(s) \rangle}{\langle e_s(s), e_s(s) \rangle} e(s) \quad (3.9)$$

elde edilir.

$\alpha(s) + v e(s) = \beta(s) + w(v) e(s)$ olduğundan

$$\alpha(s) - \beta(s) = (w(v) - v) e(s) \quad (3.10)$$

elde edilir. Bu eşitliğin s parametresine göre türev alınırsa,

$$(\alpha_s(s) - \beta_s(s)) = (w(v) - v) e_s(s) \quad (3.11)$$

bulunur. (3.10) ve (3.11) denklemleri (3.9) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$c(s) - \bar{c}(s) = (w(v) - v) e(s) - \frac{\langle (w(v) - v) e_s(s), e_s(s) \rangle}{\langle e_s(s), e_s(s) \rangle} e(s)$$

veya

$$c(s) - \bar{c}(s) = (w(v) - v) e(s) - (w(v) - v) \frac{\langle e_s(s), e_s(s) \rangle}{\langle e_s(s), e_s(s) \rangle} e(s)$$

veya

$$c(s) - \bar{c}(s) = 0$$

elde edilir. Buradan $c = \bar{c}$ bulunur.

Teorem 3.15 Silindirik olmayan açılabilir regle yüzeyin doğrultman vektörü $e(s)$, $c(s)$ striksiyon eğrisinin teğet vektörüdür, [4,13].

İspat Regle yüzeyin dayanak eğrisi striksiyon eğrisi olarak alınır,

$$\langle \alpha_s(s), e_s(s) \rangle = \langle c_s(s), e_s(s) \rangle = 0$$

yazılır. Ayrıca regle yüzey açılabilir olduğundan dağılma parametresinin sıfır olabilmesi için,

$$\det(c_s, e, e_s) = \langle c_s, e \times e_s \rangle = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$c_s // e$$

olur.

Teorem 3.16 Silindirik olmayan bir regle yüzey striksiyon eğrisi cinsinden $\varphi(s, v) = c(s) + ve(s)$ şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda regle yüzey $v \neq 0$ durumunda veya $v = 0$ iken $P_e \neq 0$ durumunda regüler olur, [14].

İspat Yüzeyin dayanak eğrisi striksiyon eğrisi olduğundan $c_s \perp e_s$ dir. Ayrıca $c_s \times e$ vektörü için,

$$\left. \begin{array}{l} c_s \times e \perp e \\ c_s \times e \perp c_s \end{array} \right\} \text{ eşitlikleri yazılabilir ve } \left. \begin{array}{l} e_s \perp e \\ e_s \perp c_s \end{array} \right\} \text{ eşitliğini de kullanırsak } c_s \times e // e_s \text{ elde}$$

edilir.

$$P_e = \frac{\langle c_s \times e, e_s \rangle}{\langle e_s, e_s \rangle} \text{ olmak üzere iç çarpımın geometrik yorumunu kullanırsak } c_s \times e = P_e e_s$$

şeklinde elde edilir.

$\varphi(s, v) = c(s) + ve(s)$ regle yüzeyi için

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_s = c_s + ve_s \\ \varphi_v = e \end{array} \right\} \text{ olmak üzere } \varphi_s \times \varphi_v = c_s \times e + ve_s \times e = P_e e_s + ve_s \times e \text{ elde edilir.}$$

Bu son eşitliğin normunun sıfırdan farklı olmasında regle yüzey regüler olacağından,

$$\|\varphi_s \times \varphi_v\| = P_e^2 \|e_s\|^2 + v^2 \|e_s\|^2 = (P_e^2 + v^2) \|e_s\|^2 \neq 0 \text{ olmalıdır. Bu durumda regle yüzey}$$

$v \neq 0$ durumunda veya $v = 0$ iken $P_e \neq 0$ durumunda regülerdir.

Teorem 3.17 Silindirik olmayan bir regle yüzey striksiyon eğrisi cinsinden $\varphi(s, v) = c(s) + ve(s)$ şeklinde tanımlı olsun. Yüzeyin Gauss eğrilik fonksiyonu K yüzeyin her noktasında sıfırdan küçüktür ve yüzeyin Gauss eğrilik fonksiyonunu dağılma parametresi P_e cinsinden ifadesi

$$K = - \left(\frac{(P_e)^2}{(P_e^2 + v^2)^2} \right) \quad (3.12)$$

şeklindedir, [14].

İspat Bir regle yüzeyin Gauss eğrilik fonksiyonu

$$K = - \frac{M^2}{EG - F^2}$$

şeklinde tanımlandığından silindirik olmayan ve striksiyon eğrisi cinsinden tanımlanmış bir regle yüzey için

$$\left. \begin{aligned} \varphi_s &= c_s + v e_s \\ \varphi_v &= e \\ \varphi_{sv} &= e_s \end{aligned} \right\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = \|c_s\|^2 + v^2 \|e_s\|^2, \quad F = \langle \varphi_s, \varphi_v \rangle = \langle c_s, e \rangle, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 1, \quad EG - F^2 = (P_e^2 + v^2) \|e_s\|^2 \\ M &= \frac{\det(\varphi_s, \varphi_v, \varphi_{sv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\det(\varphi_{sv}, \varphi_s, \varphi_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\langle \varphi_{sv}, \varphi_s \times \varphi_v \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\langle e_s, c_s \times e + v e_s \times e \rangle}{\sqrt{(P_e^2 + v^2) \|e_s\|^2}} = \frac{P_e \|e_s\|^2}{\sqrt{(P_e^2 + v^2) \|e_s\|^2}} = \frac{P_e \|e_s\|}{\sqrt{(P_e^2 + v^2)}} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$K = - \frac{\left(\frac{P_e \|e_s\|}{\sqrt{(P_e^2 + v^2)}} \right)^2}{(P_e^2 + v^2) \|e_s\|^2} = - \left(\frac{P_e^2}{(P_e^2 + v^2)^2} \right)$$

elde edilir.

Sonuç 3.4 Silindirik olmayan regle yüzeylerde, yüzeyin Gauss eğriliği her zaman sıfırdan küçüktür, [14].

Teorem 3.18 Silindirik olmayan bir regle yüzey striksiyon eğrisi cinsinden $\varphi(s, v) = c(s) + v e(s)$ şeklinde tanımlı olsun. Yüzeyin dağılma parametresi P_e ve Gauss eğrilik fonksiyonu K olmak üzere aşağıdaki ifadeler gerçekleşir, [14].

1) Doğrultman boyunca $v \rightarrow \infty$ iken $K \rightarrow 0$ e gider.

2) $K = 0 \Leftrightarrow P_e = 0$

3) Yüzeyin dağılma parametresi P_e hiçbir noktada tanımsız olmasın, bu durumda K Gauss eğrilik fonksiyonu süreklidir ve $v=0$ olduğunda yani striksiyon eğrisi üzerinde $|K|$ fonksiyonu maksimum değerini alır ve $|K| = \frac{1}{P_e^2}$ şeklinde tanımlıdır, [5,6]

İspat

1) Doğrultman boyunca $v \rightarrow \infty$ iken limit alırsak,

$$\lim_{v \rightarrow \infty} - \left(\frac{(P_e)^2}{(P_e^2 + v^2)^2} \right) = 0$$

elde edilir dolayısıyla $K \rightarrow 0$ olacaktır.

$$\mathbf{2)} K = - \frac{(P_e)^2}{(P_e^2 + v^2)^2} = 0 \Leftrightarrow P_e = 0$$

3) Yüzeyin dağılma parametresi P_e hiçbir noktada tanımsız olmadığını kabul edelim, bu durumda K Gauss eğrilik fonksiyonu sürekli olması aşıkardır.

$$|K| = \frac{(P_e)^2}{(P_e^2 + v^2)^2} \text{ şeklindedir ve bu fonksiyonun maksimum olabilmesi için}$$

ifadenin paydasını küçülmemiz gerektiğinde $v=0$ elde edilir. Bu durumda $|K|$

fonksiyonu maksimum değerini alır ve $|K| = \frac{1}{P_e^2}$ şeklinde tanımlı olur.

Teorem 3.19 $\varphi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$, $\|e\| = 1$ şeklinde tanımlı bir flat regle yüzey için,

1) Eğer $\alpha'(s) = 0$ ise regle yüzey bir konidir.

2) Eğer $e'(s) = 0$ ise regle yüzey bir silindirdir.

3) Eğer $\alpha'(s) \neq 0, e'(s) \neq 0$ ikisi birden sıfırdan farklı ise bu durumda regle yüzey striksiyon eğrisinin teğet açılabilir regle yüzeyidir, [14].

İspat

1) Eğer $\alpha'(s) = 0$ ise $\alpha' = q \in \mathbb{R}^3$ olacak şekilde sabit bir vektördür dolayısıyla regle yüzey bir koni olur.

2) Eğer $e'(s) = 0$ ise $e' = q \in \mathbb{R}^3$ olacak şekilde sabit bir vektördür dolayısıyla regle yüzey bir silindir olur.

3) Dayanak eğrisinin striksiyon eğrisi olabilmesi için $\langle \alpha_s, e_s \rangle = 0$ olmalıdır. Ayrıca regle yüzey flat yüzey olduğundan yüzeyin Gauss eğriliği $K = 0$ olmalıdır.

$$K = -\frac{(P_e)^2}{(P_e^2 + v^2)^2} = 0 \Leftrightarrow P_e = 0 \text{ olduğundan } \det(\alpha_s, e, e_s) = 0 \text{ olmalı böylece}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_s \perp e_s \\ \alpha_s \perp e \times e_s \end{array} \right\} \text{ olmak üzere } \alpha_s // e \text{ elde edilir. Sonuç olarak regle yüzey striksiyon}$$

eğrisinin teğet açılabilir regle yüzeyidir.

Örnek 3.5 $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in E^3 \mid x_3 = x_2 \sin x_1, \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ yüzeyinin regle yüzey olduğunu gösterelim. Ayrıca striksiyon eğrisinin genel denklemini ve açılabilir olup olmadığını inceleyelim.

$x_1 = s, x_2 = v$ ve $x_3 = v \sin s$ olarak yazılabileceğinden $\psi(s, v) = (s, v, v \sin s)$ şeklinde yazılabilir.

Yüzeyi dayanak eğrisi ve küresel gösterge eğrisi cinsinden ifade etmek istersek

$$\varphi(s, v) = (s, 0, 0) + v(0, 1, \sin s), \quad \|e(s)\| = \sqrt{1 + \sin^2 s}$$

veya

$$\varphi(s, v) = (s, 0, 0) + v \left(0, \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 s}}, \frac{\sin s}{\sqrt{1 + \sin^2 s}} \right), \quad \|e(s)\| = 1$$

şeklinde yazılabilir.

Yüzeyin striksiyon eğrisi ise

$$c(s) = \alpha(s) - \frac{\langle e_s(s), T(s) \rangle}{\langle e_s(s), e_s(s) \rangle} e(s)$$

şeklinde tanımlı olduğundan $\langle e_s(s), T(s) \rangle = 0$ olduğundan $c(s) = \alpha(s)$ şeklinde elde edilir. Yani yüzeyin striksiyon eğrisi dayanak eğrisidir.

Yüzeyin dağılma parametresi

$$P_e = \frac{\det(\alpha_s, e, e_s)}{\|e_s\|^2}$$

bağıntısından $P_e = \frac{1}{\cos s} \neq 0$ olduğundan regle yüzey açılabilir değildir, [5].

3.6 Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları

Tanım 3.19 H/H' kapalı uzay hareketinde H uzayında seçilen her doğru H' de kapalı bir regle yüzey çizer. Bir

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + v e(s)$$

regle yüzeyinin doğrultmanların dik yörüngeleri için $\langle e, d\varphi \rangle = 0$ yazılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \langle e, d\alpha \rangle &= 0 \\ \langle e, d\alpha + dve + edv \rangle &= 0 \\ \langle e, d\alpha \rangle + dv \|e\|^2 &= 0 \\ \langle e, d\alpha \rangle &= -dv \end{aligned}$$

bulunur ve bu ifadenin α kapalı eğrisi boyunca integrali olan,

$$\oint_{(\alpha)} \langle e, d\alpha \rangle = \oint_{(\alpha)} -dv \quad (3.13)$$

ile tanımlanan

$$\begin{aligned} L_e : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow L_e(v) = -\oint_{(\alpha)} dv \end{aligned} \quad (3.14)$$

fonksiyonuna kapalı regle yüzeyin *açılım uzunluğu (adımı) fonksiyonu* denir.

Açılım uzunluğunun verilen tanımı bize e doğrultmanının, $\alpha = \alpha(s)$ eğrisine göre kapalı regle yüzeyi çizdiğinde, kendi doğrultusunda $-\oint_{(\alpha)} dv$ kadar ilerleyerek ilk konumu ile çakıştığını söyler.

Bu nedenle e doğrultmanının P_1 noktasından başlayan başlayan ortogonal yörüngesi, bir periyod sonra aynı e doğrultmanını P_1 den farklı P_2 noktasında keser. Ortogonal yörüngeler çıkış noktasından bağımsız olduğundan, L_e açılım uzunluğu kapalı regle yüzeyler için bir integral invarianttır, [5].

Teorem 3.20 Açılabilir kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu striksiyon eğrisinin uzunluğuna eşittir, [5].

İspat Regle yüzeyi kapalı ve açılabilir olsun. Dayanak eğrisini de striksiyon eğrisi olarak alırsak $c(s) = \alpha(s)$ olması için,

$$c(s) = \alpha(s) - \frac{\langle e_s, T \rangle}{\langle e_s, e_s \rangle} e(s)$$

denkleminde

$$\langle \alpha_s, e_s \rangle = 0 \text{ olup } \alpha_s \perp e_s \quad (3.15)$$

elde edilir ve yüzey açılabilir olduğundan

$$P_e = 0 \Rightarrow \det(\alpha_s, e, e_s) = 0 \quad (3.16)$$

eşitliği kullanılırsa (3.15) ve (3.16) denklemlerinden, $\alpha_s // e$ yani $c_s // e$ elde edilir.

Eğer dayanak eğrisinin yani striksiyon eğrisinin yay parametresi s ise

$$\frac{dc}{ds} = e \quad (3.17)$$

olarak alınabilir.

(3.17) denklemini (3.14) denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} L_e &= \oint_{(c)} \langle e, dc \rangle = \oint_{(c)} \left\langle \frac{dc}{ds}, dc \right\rangle = \oint_{(c)} \left\langle \frac{dc}{ds}, \frac{dc}{ds} \right\rangle ds \\ L_e &= \oint_{(c)} \langle c_s, c_s \rangle ds = \oint_{(c)} ds \end{aligned}$$

şeklinde açılım uzunluğu (adımı) fonksiyonu elde edilir.

Tanım 3.20 Anadoğrusunun birim doğrultman vektörü $\vec{e}$ olan bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin anadoğrularına dik bir doğrultunun bir periyod sonra ilk konumu ile yaptığı açıya regle yüzeyin açılım açısı denir ve λ_e ile gösterilir, [5].

Teorem 3.21 Anadoğrusunun birim doğrultman vektörü $\vec{e}$ olan bir kapalı regle yüzeyinin L_e açılım uzunluğu ve λ_e açılım açısı, sırası ile, $\vec{e}$ nin H/H' uzay hareketinin Steiner öteleme vektörü (Ek A, A.8) ile tanımlanan $\vec{V}$ ve Steiner dönme vektörü (Ek A,

A.7) ile tanımlanan $\vec{D}$ üzerindeki izdüşümlerine eşittir. L_e açılım uzunluğu ve λ_e açılım açısı için

$$\begin{aligned} L_e &= \langle \vec{V}, \vec{e} \rangle \\ \lambda_e &= \langle \vec{D}, \vec{e} \rangle \end{aligned} \quad (3.18)$$

elde edilir ve açılım açısı da regle yüzeyler için açılım uzunluğu gibi bir integral invariantıdır, [5].

İspat $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin $\vec{e}$ doğrultman vektörünü

$$\vec{a}_1 = \vec{e}$$

olacak şekilde bir ortonormal üç ayaklının ilk vektörünü $\vec{a}_1$ olarak alalım. Doğrultmana dik olan vektörü $\vec{a}_2$ birim vektörü olarak alırsak

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$$

şeklinde $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ ortonormal istemini elde ederiz. Bu durumda regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca hareket eden H hareketli uzayı

$$H = Sp\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} |_{\alpha(s)}$$

şeklindedir. Bir tam periyoddan sonra doğrultmanın ilk ve son konumları aynı olacağından $\vec{a}_1^*$ ve $\vec{a}_1$ ile gösterilecek olan bu konumlar için

$$\vec{a}_1^* = \vec{a}_1$$

elde edilir. Aynı şekilde üç ayaklının diğer vektörlerinin ilk ve son konumlarını, sırası ile, $\vec{a}_2, \vec{a}_3$ ve $\vec{a}_2^*, \vec{a}_3^*$ ile gösterelim. Böylece sabit sistemi $\{\vec{\alpha}(s_0); \vec{a}_1^*, \vec{a}_2^*, \vec{a}_3^*\}$ ve hareketli sistemi de $\{\vec{\alpha}(s); \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ şeklindedir. İkinci ve üçüncü eksenlerin ilk ve son konumları arasındaki açı μ ise bu durumda,

$$\begin{aligned} \vec{a}_2 &= \vec{a}_2^* \cos \mu - \vec{a}_3^* \sin \mu \\ \vec{a}_3 &= \vec{a}_2^* \sin \mu + \vec{a}_3^* \cos \mu, \quad \mu = \mu(s) \end{aligned} \quad (3.19)$$

yazılabilir. H/H' hareketinin değişimi için s yay parametresine göre diferensiyel alınırsa,

$$\begin{aligned} d\vec{a}_2 &= d\vec{a}_2^* \cos \mu - d\vec{a}_3^* \sin \mu + \left(-\vec{a}_2^* \sin \mu - \vec{a}_3^* \cos \mu \right) d\mu \\ d\vec{a}_3 &= d\vec{a}_2^* \sin \mu + d\vec{a}_3^* \cos \mu + \left(\vec{a}_2^* \cos \mu - \vec{a}_3^* \sin \mu \right) d\mu \end{aligned}$$

elde edilir. $\vec{a}_2^*$ ve $\vec{a}_3^*$ sistemde sabit olduklarından,

$$d\vec{a}_2^* = d\vec{a}_3^* = 0$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} d\vec{a}_2 &= \left(-\vec{a}_2^* \sin \mu - \vec{a}_3^* \cos \mu \right) d\mu \\ d\vec{a}_3 &= \left(\vec{a}_2^* \cos \mu - \vec{a}_3^* \sin \mu \right) d\mu \end{aligned}$$

olacağından (3.19) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} d\vec{a}_2 &= -\vec{a}_3 d\mu \\ d\vec{a}_3 &= \vec{a}_2 d\mu \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $d\mu$ çözülürse,

$$-d\mu = \langle d\vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle = -\langle \vec{a}_2, d\vec{a}_3 \rangle$$

elde edilir. Eğer bu son eşitliğin $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi boyunca integralini alırsak açılım açısının λ_e değeri

$$\lambda_e = -\oint_{(\alpha)} d\mu$$

veya

$$\lambda_e = \oint_{(\alpha)} \langle d\vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle = -\oint_{(\alpha)} \langle \vec{a}_2, d\vec{a}_3 \rangle$$

olarak elde edilir.

Ayrıca $\{\vec{\alpha}(s); \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ sisteminin değişimi için (Ek A, A. 49) nolu denklemdeki ω matrisini kullanırsak,

$$\begin{bmatrix} d\vec{a}_1 \\ d\vec{a}_2 \\ d\vec{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabileceğinden

$$\langle d\vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle = -\langle \vec{a}_2, d\vec{a}_3 \rangle = \omega_1$$

şeklinde elde edilir. Buradan açılım açısı ve

$$\lambda_e = -\oint_{(\alpha)} \omega_1 \quad (3.20)$$

olarak bulunur. Diğer taraftan H / H' hareketinin (Ek A, A. 7) denklemi ile tanımlanan Steiner dönme vektörü için

$$\vec{D} = \oint_{(\alpha)} (\omega_1 \vec{a}_1 + \omega_2 \vec{a}_2 + \omega_3 \vec{a}_3) = \vec{a}_1 \oint_{(\alpha)} \omega_1 + \vec{a}_2 \oint_{(\alpha)} \omega_2 + \vec{a}_3 \oint_{(\alpha)} \omega_3$$

ve

$$\begin{aligned} \langle \vec{D}, \vec{e} \rangle &= \langle \vec{D}, \vec{a}_1 \rangle \\ \langle \vec{D}, \vec{e} \rangle &= \oint_{(\alpha)} \omega_1 \end{aligned} \quad (3.21)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.20) ve (3.21) denklemleri kullanılırsa regle yüzeyin açılım açısı için

$$\lambda_e = \langle \vec{D}, \vec{e} \rangle = \oint_{(\alpha)} \omega_1$$

eşitliği bulunur. Ayrıca H / H' hareketinin (Ek A, A. 8) deki Steiner öteleme vektörü

$$\vec{V} = \int_{(\alpha)} d\vec{\alpha}$$

kullanırsak (3.13) numaralı denklemdeki açılım uzunluğu için $\vec{a} = \vec{e}$ olarak seçtiğimizden

$$L_e = \langle \vec{V}, \vec{e} \rangle$$

elde edilir, [5].

Sonuç 3.5 Regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca H / H' hareketinde H hareketli uzayını $H = Sp\{T, N, B\}_{\alpha(s)}$ olsun. Bu durumda hareketin Steiner dönme vektörü için

$$\vec{D} = \oint_{(\alpha)} (\tau T + \kappa B) ds \quad (3.22)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3) \in H$ doğrultusu içinde Steiner öteleme vektörü

$$\vec{V} = \int_{(\alpha)} d\vec{\alpha}$$

olduğundan

$$\vec{V} = \int_{(\alpha)} T ds \quad (3.23)$$

elde edilir, [5].

Teorem 3.22 Kapalı bir regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca $\{T, N, B\}$ Frenet vektörlerinin hareketinde, hareketin Steiner dönme vektörünün bileşenleri bu $\{T, N, B\}$ Frenet vektörlerinin temsil ettiği doğruların çizdikleri regle yüzeylerin açılım açılarından ibarettir, [5].

İspat Regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca H/H' hareketinde H hareketli uzayını $H = Sp\{T, N, B\}_{\alpha(s)}$ olsun. Bu durumda hareketin Steiner dönme vektörü

$$\vec{D} = \oint_{(\alpha)} \tau T ds + \oint_{(\alpha)} \kappa B ds$$

şeklindedir.

Dayanak eğrisinin T, N, B vektörlerinin hareket sırasında çizdikleri regle yüzeylerin açılım açıları için, sırası ile, (3.18) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \lambda_T &= \langle \vec{D}, T \rangle, \\ \lambda_T &= \oint_{(\alpha)} \tau ds; \\ \lambda_N &= \langle \vec{D}, N \rangle, \\ \lambda_N &= 0; \\ \lambda_B &= \langle \vec{D}, B \rangle, \\ \lambda_B &= \oint_{(\alpha)} \kappa ds; \end{aligned} \quad (3.24)$$

denklemleri elde edilir. Aynı şekilde açılım uzunlukları da, sırası ile,

$$\begin{aligned}
L_T &= \left\langle \oint_{(\alpha)} d\vec{\alpha}, T \right\rangle, \\
L_T &= \left\langle \oint_{(\alpha)} T ds, T \right\rangle, \\
L_T &= \oint_{(\alpha)} ds; \\
L_N &= \left\langle \oint_{(\alpha)} d\vec{\alpha}, N \right\rangle, \\
L_N &= 0; \\
L_B &= \left\langle \oint_{(\alpha)} d\vec{\alpha}, B \right\rangle, \\
L_B &= 0;
\end{aligned} \tag{3.25}$$

dir. (3.24) ve (3.25) denklemlerinden hareketin Steiner dönme vektörünün (3.22) denklemindeki ifadesi için

$$\vec{D} = \lambda_T T + \lambda_N N + \lambda_B B = \lambda_T T + \lambda_B B \tag{3.26}$$

bulunur.

Teorem 3.23 Bir $\alpha: I \rightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde H uzayındaki sabit bir e doğrusunun H' de çizdiği regle yüzeyin açılım açısı, seçilen doğrunun asli normal doğrultusundaki bileşeninden bağımsızdır, [5].

İspat $\{T, N, B\}$ sistemine bağlı şekilde hareket eden bir e doğrusunun çizmiş olduğu regle yüzeyi için, $\vec{e}$ vektörü bu sisteme göre tek türlü olarak

$$e = e_1 T + e_2 N + e_3 B, \quad e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \tag{3.27}$$

şeklindedir. Bu durumda $e_i, 1 \leq i \leq 3$ bileşenleri H uzayında sabittir. e doğrusunun çizdiği regle yüzeyin açılım açısı (3.26) ve (3.18) denklemlerinden λ_e açılım açısı

$$\begin{aligned}
\lambda_e &= \langle \vec{D}, e \rangle \\
\lambda_e &= \langle \lambda_T T + \lambda_B B, e_1 T + e_2 N + e_3 B \rangle \\
\lambda_e &= \lambda_T e_1 + \lambda_B e_3
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu durumda bir sonraki teorem de ispatlanmış olur.

Teorem 3.24 Bir $\alpha : I \rightarrow E^3$ kapalı uzay eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde H uzayındaki sabit bir e doğrusunun H' de çizdiği regle yüzeyin açılım açısı ile harekete katılan T, B Frenet vektörleri ile belirlenen doğruların H' de çizdikleri regle yüzeylerin açılım açıları arasında

$$\lambda_e = \lambda_T e_1 + \lambda_B e_3$$

lineer bağıntısı vardır, [5].

Teorem 3.25 Bir $\alpha : I \rightarrow E^3$ kapalı uzay eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde H uzayındaki sabit bir e doğrusunun H' de çizdiği regle yüzeyin açılım uzunluğu, hareketi belirten $\alpha(s)$ eğrisinin, T teğetinin çizdiği regle yüzeyin açılım uzunluğu ile e doğrusunun teğet yönündeki bileşeninin çarpımıdır, [5].

İspat e doğrusunun çizdiği regle yüzeyin L_e açılım uzunluğu için (3.18) denkleminde

$$\begin{aligned} L_e &= \oint_{(\alpha)} \langle d\alpha, e \rangle \\ L_e &= \oint_{(\alpha)} \langle Tds, e_1 T + e_2 N + e_3 B \rangle \\ L_e &= e_1 \oint_{(\alpha)} ds \end{aligned}$$

ve ayrıca (3.25) denkleminde

$$L_T = \oint_{(\alpha)} ds$$

olduğundan

$$L_e = e_1 L_T \quad (3.28)$$

elde edilir.

Teorem 3.26 Hareketli $H = Sp\{T, N, B\}$ uzayının sabit H' sabit uzayına göre kapalı ve 1-parametrelili H/H' hareketinde H uzayındaki sabit bir e doğrusunun H' uzayında çizdiği regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart bu regle yüzeyin dayanak eğrisinin, harmonik eğriliği

$$h = \frac{\kappa}{\tau} = \frac{(L_T^2 - L_e^2) \lambda_B}{(\lambda_e L_T - L_e \lambda_T) L_e} \quad (3.29)$$

olacak şekilde bir eğilim çizgisi olmasıdır, [5].

İspat $\{T, N, B\}$ sistemine bağlı olarak hareket eden bir e doğrusunun çizdiği regle yüzeyin açılabilir olması için dağılma parametresi, dolayısıyla (3.3) denklemden $\det\left(\frac{d\alpha}{ds}, e, \frac{de}{ds}\right)$ ifadesi sıfır olmalıdır. (3.27) eşitliğinden türev hesaplanırsa, e doğrusu H hareketli sisteminde sabit olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{de}{ds} &= e_1\kappa N + e_2(-\kappa T + \tau B) + e_3(-\tau N) \\ \frac{de}{ds} &= -e_2\kappa T + (e_1\kappa - e_3\tau)N + e_2\tau B\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{ds} \times e &= T \times e \\ \frac{d\alpha}{ds} &= e_2B - e_3N\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\det\left(\frac{d\alpha}{ds}, e, \frac{de}{ds}\right) &= \left\langle T \times e, \frac{de}{ds} \right\rangle \\ \det\left(\frac{d\alpha}{ds}, e, \frac{de}{ds}\right) &= \left\langle e_2B - e_3N, \frac{de}{ds} \right\rangle \\ \det\left(\frac{d\alpha}{ds}, e, \frac{de}{ds}\right) &= e_2^2\tau - e_3(e_1\kappa - e_3\tau) = 0 \\ (e_2^2 + e_3^2)\tau - e_1e_3\kappa &= 0 \\ \frac{\kappa}{\tau} &= \frac{(e_2^2 + e_3^2)}{e_1e_3}\end{aligned}$$

ve ayrıca $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$ olduğundan

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{1 - e_1^2}{e_1e_3} \quad (3.30)$$

elde edilir. Ayrıca (3.28) ve (3.29) denklemlerinden e_1 ve e_3 çözülürse

$$e_1 = \frac{L_e}{L_T} \quad (3.31)$$

$$\lambda_e = \frac{L_e}{L_T} \lambda_T + e_3 \lambda_B$$

$$e_3 = \frac{\lambda_e L_T - L_e \lambda_T}{L_T \lambda_B} \quad (3.32)$$

elde edilir. e_1 ve e_3 değerleri (3.30) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{(L_T^2 - L_e^2) \lambda_B}{(\lambda_e L_T - L_e \lambda_T) L_e}$$

bulunur. Ayrıca e doğrusu $\{T, N, B\}$ sisteminde sabit bir doğru olduğundan, bu sisteme göre bileşenleri e_1, e_2, e_3 de sabit olacak ve dolayısıyla (3.30) denkleminde

$$h = \frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit}$$

elde edilir.

Teorem 3.27 Bir $\alpha : I \rightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H / H' kapalı uzay hareketinde (α) eğrisinin harmonik eğriliği ile harekete katılan asli normal ve binormal doğrularının H' uzayında çizdikleri regle yüzeylerin dağılma parametreleri arasında

$$\left(\frac{\kappa}{\tau} \right)^2 = \frac{P_B}{P_N} - 1$$

bağıntısı vardır, [5].

İspat Bir $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi boyunca tanımlanan bir H / H' uzay hareketinde H uzayını geren $\{T, N, B\}$ Frenet vektörlerine karşılık gelen doğruların H' uzayında çizdikleri regle yüzeylerin dağılma parametrelerini hesaplayalım.

Eğrinin T birim teğet vektörüne karşılık gelen doğrunun H' uzayında çizmiş olduğu regle yüzeyin drali P_T olmak üzere (3.3) denkleminde

$$P_T = \frac{\det\left(\frac{d\alpha}{ds}, T, \frac{dT}{ds}\right)}{\left\|\frac{dT}{ds}\right\|^2} = \frac{\det\left(T, T, \frac{dT}{ds}\right)}{\left\|\frac{dT}{ds}\right\|^2} = 0$$

dir. Eğrinin N asli normal vektörüne karşılık gelen doğrunun H' uzayında çizmiş olduğu regle yüzeyin drali P_N olmak üzere (3.3) denkleminde

$$P_N = \frac{\det\left(\frac{d\alpha}{ds}, N, \frac{dN}{ds}\right)}{\left\|\frac{dN}{ds}\right\|^2} = \frac{\det(T, N, -\kappa T + \tau B)}{\|-\kappa T + \tau B\|^2}$$

$$P_N = \frac{\langle B, -\kappa T + \tau B \rangle}{(\kappa^2 + \tau^2)} = \frac{\tau}{(\kappa^2 + \tau^2)} \quad (3.33)$$

dir. Eğrinin B binormal vektörüne karşılık gelen doğrunun H' uzayında çizmiş olduğu regle yüzeyin drali P_B olmak üzere (3.3) denkleminde

$$P_B = \frac{\det\left(\frac{d\alpha}{ds}, B, \frac{dB}{ds}\right)}{\left\|\frac{dB}{ds}\right\|^2} = \frac{\det(T, B, -\tau N)}{\|-\tau N\|^2}$$

$$P_B = \frac{\langle -N, -\tau N \rangle}{\tau^2} = \frac{\tau}{\tau^2} = \frac{1}{\tau} \quad (3.34)$$

dir. Ayrıca (3.33) eşitliğinin pay ve paydası τ^2 ile bölünürse

$$P_N = \frac{1/\tau}{\left(\frac{\kappa^2}{\tau^2} + 1\right)}$$

olur. Diğer taraftan (3.34) eşitliğinden dolayı

$$P_N = \frac{P_B}{\left(\frac{\kappa^2}{\tau^2} + 1\right)}$$

$$1 + \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)^2 = \frac{P_B}{P_N}$$

$$\left(\frac{\kappa}{\tau} \right)^2 = \frac{P_B}{P_N} - 1$$

elde edilir.

Teorem 3.28 Bir $\alpha: I \rightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde (α) eğrisinin bir eğilim çizgisi olabilmesi için gerek ve yeter şart H/H' hareketine katılan asli normal ve binormal doğrularının H' uzayında çizdikleri regle yüzeylerin dağılma parametreleri arasında

$$\frac{P_B}{P_N} = \text{sabit} \quad (3.35)$$

bağıntısı sağlanmalıdır, [5].

İspat ($\Rightarrow$): Teorem 3.27 gereğince $\alpha: I \rightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' uzay hareketinde (α) eğrisinin harmonik eğriliği ile harekete katılan asli normal ve binormal doğrularının H' uzayında çizdikleri regle yüzeylerin dağılma parametreleri arasında

$$\left(\frac{\kappa}{\tau} \right)^2 = \frac{P_B}{P_N} - 1 \quad (3.36)$$

bağıntısı vardır ve (3.35) eşitliği kullanılırsa,

$$\frac{P_B}{P_N} = \text{sabit}$$

elde edilir.

$$(\Leftarrow): \frac{P_B}{P_N} = \text{sabit} \text{ ise } \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)^2 = \text{sabit}$$

olacak ve

$$\frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit}$$

olacağından (α) eğrisi bir eğilim çizgisi olur.

Teorem 3.29 Bir $\alpha: I \rightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde H uzayındaki sabit e bir doğrunun H' uzayında çizdiği regle yüzeyin açılabilir olabilmesi için gerek ve yeter şart H/H' hareketine katılan $\{e, T, N\}$ doğrularının H' uzayında çizdikleri regle yüzeylerin açılım açıları ile dağılma parametreleri arasında

$$\frac{P_B}{P_N} = \frac{(L_T^2 - L_e^2)^2 \lambda_B^2}{(\lambda_e L_T - L_e \lambda_T)^2 L_e^2} + 1 \quad (3.37)$$

bağıntısının var olmasıdır, [5].

İspat Teorem 3.26 gereğince hareketli $H = Sp\{T, N, B\}$ uzayının sabit H' sabit uzayına göre kapalı ve 1-parametrelili H/H' hareketinde H uzayındaki sabit bir e doğrusunun H' uzayında çizdiği regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart bu regle yüzeyin dayanak eğrisinin, harmonik eğriliği

$$h = \frac{\kappa}{\tau} = \frac{(L_T^2 - L_e^2) \lambda_B}{(\lambda_e L_T - L_e \lambda_T) L_e}$$

olacak şekilde bir eğilim çizgisi olmasıdır. Ayrıca Teorem 3.27 de tanımlanan

$$\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 = \frac{P_B}{P_N} - 1$$

eşitliğini de kullanırsak,

$$\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 = \left(\frac{(L_T^2 - L_e^2) \lambda_B}{(\lambda_e L_T - L_e \lambda_T) L_e}\right)^2 = \frac{P_B}{P_N} - 1$$

$$\frac{P_B}{P_N} = \frac{(L_T^2 - L_e^2)^2 \lambda_B^2}{(\lambda_e L_T - L_e \lambda_T)^2 L_e^2} + 1$$

elde edilir.

Özel durumlar

$\{T, N, B\}$ Frenet vektörlerine bağlı şekilde hareket eden

$$e = e_1 T + e_2 N + e_3 B, \quad e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$$

doğrusu için özel durumları incelersek aşağıdaki teoremler elde edilir.

Teorem 3.30 Bir $\alpha: I \rightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde H uzayında normal düzlemdeki sabit e bir doğrusunun H' uzayında çizdiği regle yüzeyin açılabilir olabilmesi için (α) eğrisinin düzlemsel bir eğri olmalıdır, [5].

İspat Eğer e doğrusu normal düzlemde ise $e_1 = 0$ olacağından (3.30) denkleminde dolayı

$$\tau(e_2^2 + e_3^2) = 0$$

elde edilir. Bu durumda ya $e_2^2 + e_3^2 = 0$ veya $\tau = 0$ olmalıdır. Bunlardan $e_2^2 + e_3^2 = 0$ olması $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$ olması ile çelişir ve mümkün değildir. Bu nedenle $\tau = 0$ olacak ve dayanak eğrisi oskülatör düzlemde kalacak yani bir düzlemsel eğri olacaktır.

Teorem 3.31 Bir $\alpha: I \rightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde H uzayında oskülatör düzlemdeki sabit e bir doğrusunun H' uzayında çizdiği regle yüzeyin açılabilir olabilmesi için (α) eğrisinin düzlemsel bir eğri veya $e = T$ olmalıdır, [5].

İspat Eğer e doğrusu oskülatör düzlemde ise $e_3 = 0$ olacağından (3.30) denkleminde dolayı

$$\tau e_2^2 = 0$$

elde edilir. Bu durumda ya $e_2 = 0$ veya $\tau = 0$ olmalıdır. $e_2 = 0$ olması durumunda $e = T$ elde edilir. $\tau = 0$ olması durumunda ise dayanak eğrisi oskülatör düzlemde kalacak yani bir düzlemsel eğri olacaktır.

Teorem 3.32 Bir $\alpha: I \rightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde H uzayında rektifiyan düzlemdeki sabit e bir doğrusunun H' uzayında çizdiği regle yüzeyin açılabilir olabilmesi için $\{e, T, N\}$ doğrularının integral invaryantları arasında

$$\frac{P_B}{P_N} = \frac{(\lambda_e L_T - L_e \lambda_T)^2}{L_e^2 \lambda_B^2} + 1$$

bağıntısı sağlanmalıdır, [5].

İspat Eğer e doğrusu rektifiyan düzlemde ise $e_2 = 0$ olacağından (3.30) denkleminde dolayı

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{e_3}{e_1}$$

bulunur. Ayrıca e_1 ve e_3 ün (3.31) ve (3.32) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\lambda_e L_T - L_e \lambda_T}{L_e \lambda_B} \quad (3.38)$$

şeklinde özel bir durum olarak elde edilir. (3.36) denkleminde $\frac{\kappa}{\tau}$ çözülerek (3.38) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{P_B}{P_N} - 1 &= \left(\frac{\lambda_e L_T - L_e \lambda_T}{L_e^2 \lambda_B^2} \right)^2 \\ \frac{P_B}{P_N} &= \frac{(\lambda_e L_T - L_e \lambda_T)^2}{L_e^2 \lambda_B^2} + 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.33 Bir $\alpha: I \rightarrow E^3$ kapalı uzay eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde (c) eğrisini striksiyon eğrisi olarak kabul eden, H uzayındaki doğruların H' uzayında oluşturdukları, regle yüzeylerin anadoğruları daima $\vec{c}$ nin rektifiyan düzleminde kalır, [5].

İspat Bir

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + v e(s), \quad \|e\| = 1$$

şeklinde tanımlı regle yüzeyi için striksiyon eğrisinin yer vektörü $\vec{c}$ ve dayanak eğrisine uzaklığı (3.7) denkleminde dolayı

$$\bar{u} = -\frac{\langle e_s(s), T(s) \rangle}{\langle e_s(s), e_s(s) \rangle}$$

olduğundan striksiyon eğrisinin dayanak eğrisi olabilmesi için $\bar{u} = 0$ yani

$$\langle e_s, T \rangle = 0 \quad (3.39)$$

olmalıdır. e doğrusunun, striksiyon eğrisi Frenet vektörlerine bağlı şekilde hareket edeceğinden doğrunun (3.27) denkleminde türev alınırsa

$$\frac{de}{ds} = D_T e = -e_2 \kappa T + (e_1 \kappa - e_3 \tau) N + e_2 \tau B$$

elde edilir. Bu ifade (3.39) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle -e_2 \kappa T + (e_1 \kappa - e_3 \tau) N + e_2 \tau B, T \rangle &= 0 \\ e_2 \kappa &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\kappa \neq 0$ olduğundan $e_2 = 0$ olmak zorundadır.

Teorem 3.34 Bir $\alpha: I \rightarrow E^3$ kapalı uzay eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde (c) eğrisini striksiyon eğrisi olarak kabul eden, H uzayındaki doğruların H' uzayında oluşturdukları, regle yüzeyin açılabilir olması için yüzey teğet açılabilir yüzey olmalıdır, [5].

İspat Teorem 3.33 gereğince bir $\alpha: I \rightarrow E^3$ kapalı uzay eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde (c) eğrisini striksiyon eğrisi olarak kabul eden, H uzayındaki doğruların H' uzayında oluşturdukları, regle yüzeylerin anadoğruları daima $\vec{c}$ nin rektifiyan düzleminde kalacağından $e_2 = 0$ şeklindedir.

Bu durumda (3.3) denkleminde yüzeyin P_e dağılma parametresini hesaplırsak

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{\det(T, e_1 T + e_3 B, (e_1 \kappa - e_3 \tau) N)}{\|(e_1 \kappa - e_3 \tau) N\|^2} \\ P_e &= \frac{\langle -e_3 N, (e_1 \kappa - e_3 \tau) N \rangle}{(e_1 \kappa - e_3 \tau)^2} \\ P_e &= \frac{-e_3}{e_1 \kappa - e_3 \tau} \end{aligned} \quad (3.40)$$

bulunur. Regle yüzeyin açılabilir olması için dağılma parametresinin sıfır olması gerektiğinden (3.40) denkleminde göre $e_3 = 0$ olmalıdır. Ayrıca $e_2 = 0$ olduğunu da kullanırsak $e_2 = e_3 = 0$ eşitliğinden

$$e_1 = 1$$

veya

$$e = T$$

elde edilir. Bu durumda yüzey teğet açılabilir yüzeydir.

Teorem 3.35 Bir $\alpha : I \rightarrow E^3$ kapalı uzay eğrisi boyunca tanımlanan bir H / H' kapalı uzay hareketinde (c) eğrisini striksiyon eğrisi olarak kabul eden, H uzayındaki doğruların H' uzayında oluşturdukları, kapalı regle yüzeyin açılım açısı λ_e striksiyon eğrisinin toplam burulmasına eşittir, [5].

İspat Teorem 3.34 gereğince $e = T$ olmalıdır. Buna göre regle yüzeyin λ_e açılım açısı için (3.18) eşitliğini kullanırsak

$$\lambda_e = \lambda_T = \langle \vec{D}, \vec{T} \rangle$$

veya

$$\lambda_e = \lambda_T = \oint \tau ds \quad (3.41)$$

elde edilir. Yani kapalı regle yüzeyin açılım açısı striksiyon eğrisinin toplam burulmasına eşittir.

Teorem 3.36 Striksiyon eğrileri küresel kapalı birer eğri olan regle yüzeylerin açılabilir olması için gerek ve yeter şart açılım açılarının sıfır olmasıdır, [5].

İspat Kapalı küresel eğrilerin toplam burulması sıfır olduğundan Teorem 3.35 gereğince (3.41) eşitliğinden

$$\lambda_e = \lambda_T = \oint \tau ds = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan striksiyon eğrisi küresel kapalı bir regle yüzey için açılım açısı

$$\lambda_e = 0$$

ise

$$\lambda_e = \lambda_T e_1 + \lambda_B e_3 = 0 \Rightarrow e_3 \oint \kappa ds = 0$$

bulunur. Buradan $e_3 = 0$ veya $\oint \kappa ds = 0$ olmalıdır. $e_3 = 0$ olması durumunda Teorem 3.33 gereğince $e_2 = 0$ olduğundan $e_1 = 1$ ve $e_1 = T$ bulunur. $\oint \kappa ds = 0$ ise $\kappa \geq 0, ds \geq 0$ olduğundan $\oint \kappa ds = 0$ integralinin içi sıfır olmalıdır, yani

$$\kappa ds = 0$$

olmalıdır. Buna göre $\kappa \neq 0$ olduğundan $ds = 0, s = \text{sabit}$ olmalıdır. Bu halde striksiyon eğrisi bir noktadan ibaret olduğundan regle yüzey bir konidir.

Teorem 3.37 Kapalı bir regle yüzeyin açılım uzunluğu striksiyon eğrisinin uzunluğuna eşit ise regle yüzey açılabilir. Bu durumda

$$\oint_{(c)} \left(\left\langle e, \frac{dc}{ds} \right\rangle - 1 \right) ds = 0$$

eşitliğinin sağlanması kapalı regle yüzeyin açılabilir olması için yeterlidir, [5].

İspat Kapalı bir regle yüzeyin açılım uzunluğu striksiyon eğrisinin uzunluğuna eşit olduğundan

$$L_e = \oint_{(c)} ds$$

eşitliği sağlanır.

$\vec{c} = \overline{c(s)}$, $\vec{c}$ striksiyon eğrisinin bir A noktasındaki yer vektörüdür. c nin uzunluğu L ile gösterilirse

$$\begin{aligned} L_e = L &= \oint_{(c)} \langle \vec{e}, \vec{dc} \rangle \\ L_e = L &= \oint_{(c)} \left\langle \vec{e}, \frac{d\vec{c}}{ds} ds \right\rangle \end{aligned} \quad (3.42)$$

olarak yazılabilir Ayrıca

$$L = \oint_{(c)} ds = \oint_{(c)} \frac{ds^2}{ds}$$

$$L = \oint_{(c)} \frac{\langle \vec{dc}, \vec{dc} \rangle}{ds} = \oint_{(c)} \left\langle \frac{\vec{dc}}{ds}, \frac{\vec{dc}}{ds} \right\rangle ds$$

olduğundan (3.42) ifadesini

$$\oint_{(c)} \left\langle \vec{e}, \frac{\vec{dc}}{ds} \right\rangle ds = \oint_{(c)} \frac{\langle \vec{dc}, \vec{dc} \rangle}{ds^2} ds$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\oint_{(c)} \left\langle \vec{e}, \frac{\vec{dc}}{ds} \right\rangle ds - \oint_{(c)} \left\langle \frac{\vec{dc}}{ds}, \frac{\vec{dc}}{ds} \right\rangle ds = 0$$

veya

$$\oint_{(c)} \left\langle \vec{e} - \frac{\vec{dc}}{ds}, \frac{\vec{dc}}{ds} \right\rangle ds = 0 \quad (3.43)$$

elde edilir. Buradan $\frac{\vec{dc}}{ds}$, s yay parametresi olduğundan $A \in c$ noktasında M regle yüzeyinin teğet düzleminde yatan bir birim vektördür. Eğer M nin A noktasında $\vec{e}$ doğrusuna dik olan bir birim vektör $\vec{r}$ ise $\vec{e}, \frac{\vec{dc}}{ds}$ ve $\vec{r}$ aynı düzlemdedirler ve dolayısıyla

$$T_M(A) = Sp\{\vec{r}, \vec{e}\}$$

olur. Bu durumda

$$\frac{dc}{ds} = \cos \rho \vec{e} + \sin \rho \vec{r}$$

olur. Burada $\rho = \rho(s)$, s nin bir periyodik fonksiyonu olup periyodu L dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\vec{e} - \frac{\overrightarrow{dc}}{ds} &= (1 - \cos \rho) \vec{e} - \sin \rho \vec{r} \\
\left\langle \vec{e} - \frac{\overrightarrow{dc}}{ds}, \frac{\overrightarrow{dc}}{ds} \right\rangle &= (1 - \cos \rho) \cos \rho - \sin \rho^2 \\
\left\langle \vec{e} - \frac{\overrightarrow{dc}}{ds}, \frac{\overrightarrow{dc}}{ds} \right\rangle &= \cos \rho - \cos \rho^2 - \sin \rho^2 \\
\left\langle \vec{e} - \frac{\overrightarrow{dc}}{ds}, \frac{\overrightarrow{dc}}{ds} \right\rangle &= \cos \rho - 1
\end{aligned}$$

olur. Böylece (3.43) ifadesi

$$\oint_{(c)} (\cos \rho - 1) ds = 0 \quad (3.44)$$

şeklini alır.

$$-1 \leq \cos \rho \leq 1$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
-1 - 1 &\leq \cos \rho - 1 \leq 1 - 1 \\
-2 &\leq \cos \rho \leq 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

A noktası üzerinde c yi çizerken s parametresi de monoton artar. Bu nedenle s yay parametresi A noktasının monoton artan bir fonksiyonudur. Bu nedenle (3.44) denklemindeki integralin altı $\cos \rho - 1 \leq 0$ ve ds de işaret değiştirmedikten (3.44) integralinin özdeş olarak sıfır olması ancak

$$(\cos \rho - 1) ds = 0$$

olması ile mümkündür. Buradan

$$\cos \rho - 1 = 0 \quad (3.45)$$

veya

$$ds = 0 \quad (3.46)$$

olmalıdır. (3.45) olması durumunda

$$\cos \rho = 1 \Rightarrow \rho = 0$$

olur bu durumda

$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{dc}}{ds}$$

olmalıdır, bu ise M yüzeyinin açılabilir yüzey olmasıdır. (3.46) durumunda ise

$$ds = 0 \Rightarrow L = \oint_{(c)} 0 = 0$$

olacağından M yüzeyinin c striksiyon eğrisi bir noktaya büzülür ki bu durumda M yüzeyi de bir koni (açılabilir regle yüzey) olur.

Sonuç 3.6 Açılabilir regle yüzeyin açılım uzunluğu 0 ise striksiyon eğrisi bir nokta ve dolayısıyla regle yüzey bir koni olur, [5].

DARBOUX ÇATILI REGLE YÜZEYLERİN KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ

Bu bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. İlk olarak regle yüzey üzerinde Darboux çatısı tanımlanmış ve Darboux çatısı ile Frenet çatısı arasındaki ilişki verilmiştir. Daha sonra bu çatıya bağlı olarak regle yüzeyin karakteristik özelliklerinden bahsedilmiştir. Regle yüzey üzerinde tanımladığımız Darboux çatısı H. Hilmi Hacısalıhoğlu' nun [5] "Diferensiyel Geometri" kitabında tanımladığı ve A. Sarıoğlu ve A. Tutar [6] tarafından kullanılan $\{T, e, n\}$ dik çatısının genellemesidir.

4.1 Regle Yüzeylerde Darboux Çatısı

Tanım 4.1 M, E^3 de $\varphi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ denklemiyle verilen bir regle yüzey olsun. $\alpha(s)$ dayanak eğrisinin birim teğet vektör alanı $T(s)$ ve M yüzeyinin birim normal vektör alanı $n(s)$ olmak üzere,

$$T(s) = \alpha'(s) = \alpha_s \quad (4.1)$$

$$n(s) = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} = \frac{(\alpha'(s) + ve'(s)) \times e(s)}{\|(\alpha'(s) + ve'(s)) \times e(s)\|} = \frac{(\alpha_s + ve_s) \times e}{\|(\alpha_s + ve_s) \times e\|} = \frac{(\alpha_s + ve_s) \times e}{\left[\|\alpha_s + ve_s\|^2 - \langle \alpha_s, e \rangle^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

şeklinde tanımlıdır.

$g = n \times T$ şeklinde tanımlanırsa,

$$g = \frac{(\alpha_s + ve_s) \times e}{\left[\|\alpha_s + ve_s\|^2 - \langle \alpha_s, e \rangle^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \times \alpha_s$$

$$g = \frac{(v\langle \alpha_s, e_s \rangle + 1)e - \langle \alpha_s, e \rangle (\alpha_s + ve_s)}{\left[\|\alpha_s + ve_s\|^2 - \langle \alpha_s, e \rangle \right]^{\frac{1}{2}}}$$

elde edilir ve g vektörü için,

$$\|g\| = \|n \times T\| = \|n\| \|T\| \sin 90^\circ = 1$$

$$\langle T, g \rangle = 0$$

$$\langle T, n \rangle = 0$$

özellikleri sağlandığından, regle yüzeyin $\{T, g, n\}$ Darboux çatısı

$$T(s) = \alpha'(s) = \alpha_s$$

$$g(s) = \frac{(v\langle \alpha_s, e_s \rangle + 1)e - \langle \alpha_s, e \rangle (\alpha_s + ve_s)}{\left[\|\alpha_s + ve_s\|^2 - \langle \alpha_s, e \rangle \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.2)$$

$$n(s) = \frac{(\alpha_s + ve_s) \times e}{\left[\|\alpha_s + ve_s\|^2 - \langle \alpha_s, e \rangle \right]^{\frac{1}{2}}}$$

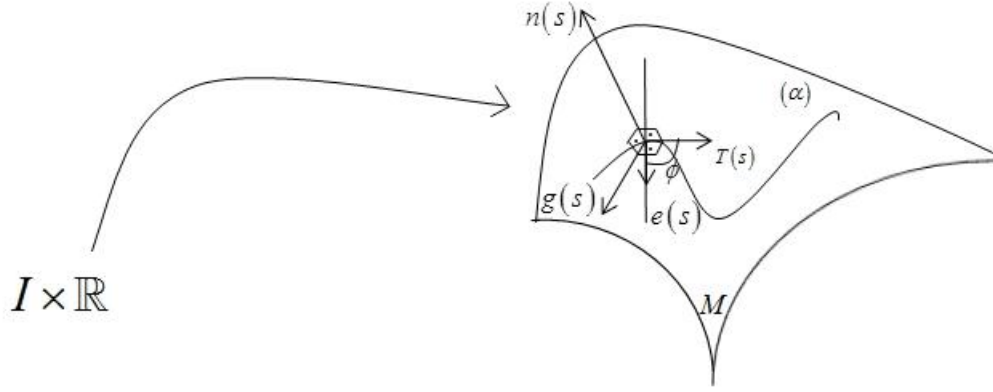
denklemleriyle tanımlanır.

Ayrıca yüzeyin e doğrultmanı için $\langle e, n \rangle = 0$ olduğundan, doğrultman vektörü teğet düzlemde bulunacağından $\{T, g\}$ sistemi tarafından gerilecektir.

Regle yüzeyin $\alpha(t)$ noktasındaki e doğrultmanı ile T teğet vektörü arasındaki açı ϕ olmak üzere,

$$e = T \cos \phi + g \sin \phi \quad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 4. 1 Regle yüzey üzerinde Darboux çatı

Özel Durumlar

- 1) $e = T \cos \phi + g \sin \phi$ eşitliğinden $\phi = 0$ alırsak $e = T$ elde edilir. Bu durumda regle yüzeyin genel denklemi $\varphi(s, v) = \alpha(s) + v\alpha'(s)$ şeklini alır, yani teğet açılabilir yüzey elde edilmiş olur. Böylece Darboux çatı

$$T(s) = \alpha'(s) = e(s)$$

$$g(s) = -\frac{e_s(s)}{\|e_s(s)\|}$$

$$n(s) = \frac{e_s(s) \times e(s)}{\|e_s(s)\|}$$

şeklinde elde edilir.

- 2) $e = T \cos \phi + g \sin \phi$ eşitliğinden $\phi = \frac{\pi}{2}$ alırsak $e \perp T$ elde edilir. Böylece (4.1)

denklemleri ile tanımlanan yüzey üzerindeki Darboux çatısı $\{T, e, n\}$ şeklini alır.

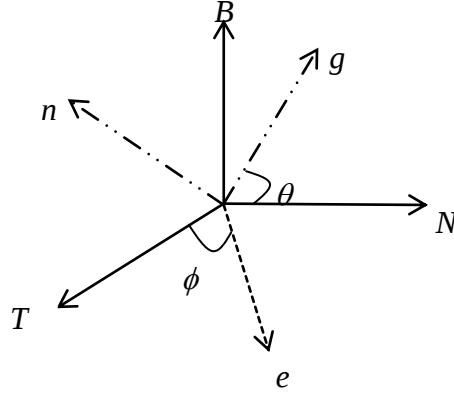
H.Hilmi Hacısalihoğlu' nun [5] ve A.Tutar ve A. Sarıoğlu' nün [6] çalışması elde edilmiş olur. Bu durumda aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

$$T(s) = \alpha'(s)$$

$$g(s) = e(s)$$

$$n(s) = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} = \frac{(\alpha_s + v e_s) \times e}{\left[\|\alpha_s + v e_s\|^2 - \langle \alpha_s, e \rangle^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

M regle yüzeyinde α dayanak eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ ve yüzeyin $\alpha(t)$ noktasındaki Darboux çatısı $\{T, g, n\}$ olmak üzere, yüzeyin g birim vektörü ile dayanak eğrisinin birim normal vektör alanı N arasındaki açı θ ve e doğrultmanı ile T teğet vektörü arasındaki açı ϕ olsun. Bu durumda çatılar ve birim doğrultman arasındaki ilişki Şekil 4.2' de verilmiştir.



Şekil 4. 2 Frenet çatısı ile Darboux çatısı arasındaki ilişki

Teorem 4.1 E^3 'de $\varphi(s, v) = \alpha(s) + v e(s)$ denkleminde verilen bir regle yüzey M olsun.

Bu regle yüzey üzerinde tanımlanan Darboux çatısına ait türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ g' \\ n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

biçimindedir. Burada κ_g geodezik eğrilik, κ_n normal eğrilik ve τ_g geodezik burulmadır.

Regle yüzeyin $e = T \cos \phi + g \sin \phi$ doğrultmanı için e_s türev denklemi,

$$e_s = -T\phi' \sin \phi + T' \cos \phi + g\phi' \cos \phi + g' \sin \phi$$

eşitliğinden

$$e_s = -\phi' \sin \phi T + \cos \phi (\kappa_g g + \kappa_n n) + \phi' \cos \phi g + \sin \phi (-\kappa_g T + \tau_g n)$$

veya

$$e_s = -\sin \phi (\kappa_g + \phi') T + \cos \phi (\kappa_g + \phi') g + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi) n \quad (4.5)$$

şeklindedir.

Tanım 4.2 M, E^3 de $\varphi(s, v) = \alpha(s) + v e(s)$ denklemiyle verilen bir regle yüzey olmak üzere, $\forall v \in \mathbb{R}$ sabit değeri için M yüzeyinin bir $\varphi(s, v = \text{sabit}) = \beta(s) : I \times \{v\} \rightarrow M$ eğrisi vardır. Bu eğrinin teğet vektör alanı ise,

$$\beta_s = \alpha_s + v e_s = T + v e_s = T^*$$

eşitliğinden

$$T^* = (1 - v \phi' \sin \phi - v \kappa_g \sin \phi) T + v \cos \phi (\kappa_g + \phi') g + v (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi) n \quad (4.6)$$

şeklinde elde edilir.

T^* teğet vektörü ile e doğrultmanı arasındaki ilişki ise

$$\langle T^*, e \rangle = \cos \phi \quad (4.7)$$

şeklindedir.

4.2 Darboux Çatılı Regle Yüzeylerde Dağılma Parametresi

Tanım 4.3 M regle yüzeyinin dağılma parametresi (3.3) eşitliğinden

$$P_e = \frac{\det(\alpha_s, e, e_s)}{\|e_s\|^2}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu eşitlikte $\{T, g, n\}$ dik çatısı için elde edilen, sırasıyla, (4.1), (4.3), (4.5) denklemlerinden α_s, e ve e_s değerleri kullanılırsa,

$$\det(\alpha_s, e, e_s) = \sin \phi (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)$$

ve

$$\|e_s\| = \left((\phi' + \kappa_g)^2 + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2 \right)^{1/2}$$

elde edilir.

Bu değerleri yüzeyin dağılma parametresinde yerine yazarsak, dağılma parametresi $\{T, g, n\}$ dik çatısı için

$$P_e = \frac{\sin \phi (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)}{\left((\phi' + \kappa_g)^2 + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2 \right)} \quad (4.8)$$

şeklinde elde edilir.

Not 4.1 Bu durumda Bölüm 3' de herhangi bir çatıdan bağımsız olarak tanımlanan dağılma parametresi $\kappa_g, \kappa_n, \tau_g$ değerleri ve ϕ açısına göre tarif edilmiş olur.

4.3 Darboux Çatılı Açılabilir Regle Yüzey

Teorem 4.2 $\varphi(s, v)$ Darboux çatılı regle yüzeyinin açılabilir olabilmesi için gerek ve yeter şart $\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi = 0$ olmalıdır.

İspat ($\Rightarrow$): $\varphi(s, v)$ Darboux çatılı regle yüzeyinin Tanım 4.2' de tanımlanan T^* teğet denklemi (4.6) eşitliği ile

$$T^* = (1 - v\phi' \sin \phi - v\kappa_g \sin \phi)T + v \cos \phi (\kappa_g + \phi')g + v(\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)n$$

şeklinde tanımlanmış olup, anadoğrular boyunca teğet düzlemin aynı kalması için yüzeyin normalinin katsayısı sıfır olmalıdır. $\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi = 0$ Bu durumda P_e dağılma parametresi sıfır olur.

($\Leftarrow$): Kabul edelim ki Darboux çatılı regle yüzeyin dağılma parametresi sıfır olsun. Böylece (4.8) eşitliğinden $\sin \phi (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi) = 0$ olmalıdır. Bu durumda $\sin \phi = 0$ veya $\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi = 0$ olmalıdır.

$\sin \phi = 0$ olması durumunda (4.3) ile verilen $e = T$ elde edilir. Böylece (4.6) denklemi ile verilen $T^* = T$ olup, anadoğrular boyunca teğet düzlem aynı kalır.

$\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi = 0$ olması durumunda ise (4.6) ile verilen

$$T^* = (1 - v\phi' \sin \phi - v\kappa_g \sin \phi)T + v \cos \phi (\kappa_g + \phi')g + v(\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)n$$

teğet denkleminde

$$T^* = (1 - v\phi' \sin \phi - v\kappa_g \sin \phi)T + v \cos \phi (\kappa_g + \phi')g$$

şeklinde olacağından teğet düzlem her zaman için yüzeyin n normaline dik olur. Bu durumda her bir anadoğru boyunca teğet düzlem aynı kalıp, Darboux çatılı regle yüzey açılabilir elde edilir.

4.4 Darboux Çatılı Regle Yüzeylerde Ortogonal Yörünge

Tanım 4.4 Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin ortogonal yörüngesi (3.4)' den $\langle e, d\varphi \rangle = 0$ bağıntısı ile tanımlı olduğundan, (3.1) eşitliğinde $\{T, g, n\}$ dik çatısını kullanılarak elde edilen, sırasıyla, (4.3), (4.5) denklemlerinden e ve e_s değerleri kullanılırsa

$$\langle T, T \cos \phi + g \sin \phi \rangle ds = -dv$$

veya

$$\cos \phi ds = -dv \quad (4.9)$$

elde edilir.

4.5 Darboux Çatılı Regle Yüzeylerde Striksiyon Eğrisi

Tanım 4.5 $\varphi(s, v)$ silindirik olmayan regle yüzeyi için striksiyon eğrisinin genel denklemi (3.7) denkleminde

$$\bar{u} = -\frac{\langle e_s(s), T(s) \rangle}{\langle e_s(s), e_s(s) \rangle}$$

olmak üzere (3.8) eşitliğinden

$$\bar{c}(s) = \bar{\alpha}(s) - \frac{\langle e_s(s), T(s) \rangle}{\langle e_s(s), e_s(s) \rangle} e(s)$$

şeklinde tanımlandığından $\{T, g, n\}$ dik çatısına göre striksiyon eğrisinin genel denklemini bulmak istersek, (4.5) eşitliği (3.7) denkleminde yerine yazılırsa, elde edilen

$$\langle e_s, T \rangle = -(\phi' + \kappa_g) \sin \phi \text{ ve } \langle e_s, e_s \rangle = (\phi' + \kappa_g)^2 + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2$$

denklemlerinden

$$\bar{u} = \frac{(\phi' + \kappa_g) \sin \phi}{(\phi' + \kappa_g)^2 + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2} \quad (4.10)$$

elde edilir.

Böylece $\varphi(s, v)$ silindirik olmayan Darboux çatılı regle yüzeyi için striksiyon eğrisi $\{T, g, n\}$ dik çatısına göre

$$c(s) = \alpha(s) + \frac{(\phi' + \kappa_g) \sin \phi}{(\phi' + \kappa_g)^2 + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2} e(s) \quad (4.11)$$

şeklindedir.

Not 4.2 Böylelikle Bölüm 3' de herhangi bir çatıdan bağımsız olarak tanımlanan regle yüzeyin striksiyon eğrisi $\kappa_g, \kappa_n, \tau_g$ değerleri ve ϕ açısına göre tarif edilmiş olur.

Teorem 4.3 $M, \varphi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ denklemiyle tanımlı silindirik olmayan kapalı bir Darboux çatılı regle yüzey olsun. M yüzeyinin ortogonal yörüngeleri boyunca ölçülen en kısa uzaklık,

$$v = \frac{(\phi' + \kappa_g) \sin \phi}{(\phi' + \kappa_g)^2 + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2}$$

değerine karşılık gelen $\beta(s): I \times \{v\} \rightarrow M$ striksiyon eğrisi boyunca ölçülen uzaklıktır.

İspat $\alpha(s_1)$ ve $\alpha(s_2)$ noktalarından geçen iki doğrultmanı göz önüne alalım. ($s_1 < s_2$)

$\beta(s)$ eğrisinin teğet vektör alanı T^* olmak üzere bu iki doğrultman arasında, bir ortogonal yörünge boyunca olan uzaklık;

$$h(v) = \int_{s_1}^{s_2} \|T^*\| ds \quad (4.12)$$

şeklindedir.

$$T^* = (1 - v(\phi' + \kappa_g) \sin \phi) T + v \cos \phi (\kappa_g + \phi') g + v (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi) n$$

olmak üzere

$$\langle T^*, T^* \rangle = \|T^*\|^2 = 1 - 2v \sin \phi (\phi' + \kappa_g) + v^2 (\phi' + \kappa_g)^2 + v^2 (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2$$

veya

$$\|T^*\| = \sqrt{1 - 2v \sin \phi (\phi' + \kappa_g) + v^2 (\phi' + \kappa_g)^2 + v^2 (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2}$$

elde edilir. Bu eşitlik (4.12) de yerine yazılırsa,

$$h(v) = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{1 - 2v \sin \phi (\phi' + \kappa_g) + v^2 (\phi' + \kappa_g)^2 + v^2 (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2} ds \quad (4.13)$$

elde edilir. $v_0 \in \mathbb{R}$ için $h(v)$ 'nin minimum değeri alması durumu, $h'(v_0) = 0$ ile sağlanacağından (4.13) denkleminde türev alırsak,

$$h'(v_0) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{-2 \sin \phi (\phi' + \kappa_g) + 2v_0 (\phi' + \kappa_g)^2 + 2v_0 (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2}{2\sqrt{1 - 2v_0 \sin \phi (\phi' + \kappa_g) + v_0^2 (\phi' + \kappa_g)^2 + v_0^2 (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2}} = 0$$

eşitliğinden köklerden biri

$$\frac{-2 \sin \phi (\phi' + \kappa_g) + 2v_0 (\phi' + \kappa_g)^2 + 2v_0 (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2}{2\sqrt{1 - 2v_0 \sin \phi (\phi' + \kappa_g) + v_0^2 (\phi' + \kappa_g)^2 + v_0^2 (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2}} = 0$$

bağıntısından

$$(-2 \sin \phi (\phi' + \kappa_g) + 2v_0 (\phi' + \kappa_g)^2 + 2v_0 (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2) = 0$$

veya

$$-\sin \phi (\phi' + \kappa_g) + v_0 (\phi' + \kappa_g)^2 + v_0 (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2 = 0$$

olmak üzere

$$v_0 = \frac{(\phi' + \kappa_g) \sin \phi}{((\phi' + \kappa_g)^2 + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2)}$$

şeklinde bulunur. Bu değer striksiyon eğrisine karşılık geldiğinden doğrultmanları dik kesecektir. Bu nedenle ortogonal yörünge olan,

$$\delta: I \rightarrow M$$

$$s \rightarrow \delta(s) = \alpha(s) + \frac{(\phi' + \kappa_g) \sin \phi}{(\phi' + \kappa_g)^2 + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2} e(s)$$

eğrisi boyunca ölçülen uzaklık, doğrultmanlar arasındaki ortogonal yörünge olan en kısa uzaklıktır.

Sonuç 4.1 $\varphi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ denklemiyle verilen silindirik olmayan Darboux çatılı kapalı M regle yüzey için, φ nin her bir doğrultmanı üzerinde, aynı zamanda doğrultmanlar arasındaki ortogonal yörünge boyunca en kısa uzaklık olan

$$v = \frac{(\phi' + \kappa_g) \sin \phi}{(\phi' + \kappa_g)^2 + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2}$$

değerine karşılık gelen noktaya o doğrultman üzerindeki *striksiyon nokta* ve ϕ yüzeyinin striksiyon noktalarının geometrik yerine de *striksiyon eğrisi* adı verilir.

Not 4.3 Teorem 4.3 H. Hilmi Hacısalihoğlu' nun [5] "Diferensiyel Geometri" kitabındaki $\{T, e, n\}$ dik çatısına göre ispatı baz alınarak yapılmıştır.

Teorem 4.4 $\varphi(s, v) = \alpha(s) + v e(s)$ denklemiyle tanımlanan silindirik olmayan Darboux çatılı regle yüzeyi için $\alpha(s)$ noktasından geçen doğrultman üzerindeki $\varphi(s, v_0)$ noktası striksiyon noktasıdır $\Leftrightarrow \alpha$ nın teğet vektör alanı T ve doğrultman vektör alanı e olmak üzere, $\varphi(s, v_0)$ noktasındaki teğet düzlemin normali e_s doğrultusundadır.

İspat ($\Leftarrow$): $\varphi(s, v_0) = \beta(s): I \times \{v_0\} \rightarrow M$ şeklinde tanımlanan eğri için teğet vektör alanının,

$$T^* = (1 - v_0(\phi' + \kappa_g) \sin \phi) T + v_0 \cos \phi (\kappa_g + \phi') g + v_0 (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi) n$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. e_s ' nin teğet düzleme normal olması nedeniyle;

$$\langle e_s, T^* \rangle = 0 \quad (4.14)$$

olacaktır.

$$e_s = -\sin \phi (\kappa_g + \phi') T + \cos \phi (\kappa_g + \phi') g + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi) n$$

eşitliğini (4.14) denkleminde yerine yazarsak,

$\langle -\sin \phi (\phi' + \kappa_g) T + \cos \phi (\kappa_g + \phi') g + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi) n, (1 - v_0(\phi' + \kappa_g) \sin \phi) T + v_0 \cos \phi (\kappa_g + \phi') g + v_0 (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi) n \rangle = 0$ bulunur. Bu denklemden v_0 değeri

$$v_0 \left[(\phi' + \kappa_g)^2 + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2 \right] = \sin \phi (\phi' + \kappa_g)$$

veya

$$v_0 = \frac{(\phi' + \kappa_g) \sin \phi}{(\phi' + \kappa_g)^2 + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2}$$

elde edilir. Böylece (4.10) denklemi de kullanılarak $\varphi(s, v_0)$ noktasının striksiyon noktası olduğu görülebilir.

($\Rightarrow$): $\alpha(s)$ noktasından geçen doğrultmanın striksiyon noktası $\varphi(s, v_0)$ olsun.

$\langle e_s, e \rangle = \langle e_s, T^* \rangle = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\langle e, e \rangle = 1 \Rightarrow T[\langle e, e \rangle] = 0 \Rightarrow \langle e, e_s \rangle = 0$$

$$\langle e_s, T^* \rangle = -\sin \phi (\phi' + \kappa_g) + v (\phi' + \kappa_g)^2 + v (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2 \quad (4.15)$$

elde edilir. $\varphi(s, v_0)$ striksiyon noktası olduğundan

$$v = \frac{(\phi' + \kappa_g) \sin \phi}{(\phi' + \kappa_g)^2 + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2}$$

eşitliği (4.15) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\langle e_s, T^* \rangle = 0$$

bulunur. Bu durumda e_s vektörü, e doğrultmanına ve T^* teğet vektör alanına diktir ve striksiyon noktasında normal durumundadır.

Teorem 4.5 $\varphi(s, v) = \alpha(s) + v e(s)$ denklemi ile tanımlı bir Darboux çatılı regle yüzey M olmak üzere, M regle yüzeyinin Gauss eğriliğinin mutlak değeri bir doğrultman boyunca üzerindeki striksiyon noktasında maksimum değerini alır.

İspat

$$\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow E^3$$

$$(s, v) \rightarrow \varphi(s, v) = \alpha(s) + v e(s)$$

ile verilen Darboux çatılı regle yüzeyin

$$K = -\frac{M^2}{EG - F^2}$$

şeklinde tanımlı K Gauss eğriliğini I . Temel Form ve II . Temel Formun katsayıları cinsinden ifade etmek için,

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \alpha_s + v e_s = (1 - v \sin \phi (\phi' + \kappa_g)) T + v \cos \phi (\phi' + \kappa_g) g + v (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi) n \\ \varphi_v &= e = T \cos \phi + g \sin \phi \\ \varphi_{sv} &= e_s = -\sin \phi (\phi' + \kappa_g) T + \cos \phi (\phi' + \kappa_g) g + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi) n \end{aligned} \quad (4.16)$$

eşitliklerini kullanılırsa,

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = \left(1 - 2v \sin \phi (\phi' + \kappa_g) + v^2 (\phi' + \kappa_g)^2 + v^2 (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2 \right) \\ F &= \langle \varphi_s, \varphi_v \rangle = \cos \phi \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \langle e, e \rangle = 1 \end{aligned} \quad (4.17)$$

ve

$$W = \sqrt{EG - F^2} \neq 0$$

olmak üzere (4.16) ve (4.17) eşitliklerinden

$$M = \frac{1}{W} \det(\varphi_s, \varphi_v, \varphi_{sv}) = \frac{(\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi) \sin^2 \phi}{\left(\left(1 - 2v \sin \phi (\phi' + \kappa_g) + v^2 (\phi' + \kappa_g)^2 + v^2 (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2 \right) - \cos^2 \phi \right)}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadeleri K Gauss eğriliğinin genel denkleminde yerine yazarsak

$$K = - \frac{(\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2 \sin^2 \phi}{\left(\left(1 - 2v \sin \phi (\phi' + \kappa_g) + v^2 (\phi' + \kappa_g)^2 + v^2 (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2 \right) - \cos^2 \phi \right)^2}$$

olarak elde edilir. K Gauss eğriliğini maksimum yapan değeri aradığımızdan v parametresine göre türev alırsak,

$$\frac{\partial K}{\partial v} = \frac{(k_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2 \sin^2 \phi \frac{\partial \left(\left(1 - 2v \sin \phi (\phi' + \kappa_g) + v^2 (\phi' + \kappa_g)^2 + v^2 (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2 \right) - \cos^2 \phi \right)^2}{\partial v}}{\left(\left(1 - 2v \sin \phi (\phi' + \kappa_g) + v^2 (\phi' + \kappa_g)^2 + v^2 (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2 \right) - \cos^2 \phi \right)^4} = 0$$

olmak üzere bu eşitliği sağlayan v değeri

$$v = \frac{(\phi' + \kappa_g) \sin \phi}{(\phi' + \kappa_g)^2 + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2}$$

şeklinde bulunur.

Bu v değerine karşılık gelen nokta striksiyon noktası olduğundan Teorem 3.18'in 3) şikkından e anadoğrusu üzerindeki K Gauss eğrilik fonksiyonu maksimum olacaktır.

Örnek 4.1 $\alpha(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cos s, 1 - \sin s, -\frac{\sqrt{6}}{3} \cos s \right)$ birim hızlı eğrisinin teğet açılabilir

regle yüzeyini, Darboux çatısını, striksiyon eğrisini ve dağılma parametresini bulunuz.

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \sin s, -\cos s, \frac{\sqrt{6}}{3} \sin s \right), \quad \|\alpha'(s)\| = 1$$

ve eğrinin teğet açılabilir regle yüzeyi $\varphi(s, v)$ olmak üzere

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + v\alpha'(s)$$

denkleminde

$$\varphi(s, v) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cos s, 1 - \sin s, -\frac{\sqrt{6}}{3} \cos s \right) + v \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \sin s, -\cos s, \frac{\sqrt{6}}{3} \sin s \right)$$

şeklinde dir. Regle yüzeyin dayanak eğrisi $\alpha(s)$ için $\alpha'(s) = T(s) = e(s)$ yüzeyin küresel gösterge eğrisidir. Bu nedenle eğrinin teğet vektörü ile doğrultman vektörü arasındaki açı "0" dır. Yani $\phi = 0$ 'dır. Böylece

Regle yüzeyin Darboux çatısı,

$$\begin{aligned} T(s) = \alpha'(s) &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \sin s, -\cos s, \frac{\sqrt{6}}{3} \sin s \right) \\ g(s) = n(s) \times T(s) &= -\frac{e_s(s)}{\|e_s\|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cos s, -\sin s, -\frac{\sqrt{6}}{3} \cos s \right) \\ n(s) &= \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} = \frac{e_s \times e}{\|e_s\|} = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Regle yüzeyin striksiyon eğrisi ise

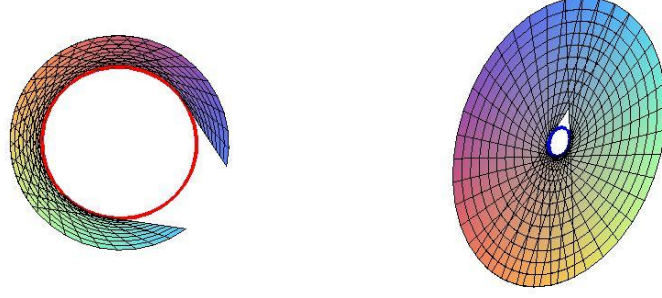
$$c(s) = \alpha(s) + \frac{(\phi' + \kappa_g) \sin \phi}{(\phi' + \kappa_g)^2 + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2} e(s)$$

şeklinde tanımlı olduğundan $\sin \phi = 0$ olmak üzere $c(s) = \alpha(s)$ şeklinde elde edilir.

Regle yüzeyin dağılma parametresi ise

$$P_e = \frac{\sin \phi (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)}{\left((\phi' + \kappa_g)^2 + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2 \right)}$$

bağıntısından $\sin \phi = 0$ olmak üzere $P_e = 0$ elde edilir. Bu nedenle regle yüzey açılabilir bir regle yüzeydir.



Şekil 4. 3 α eğrisinin teğet açılabilir regle yüzeyi

Örnek 4.2 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ tek kanatlı hiperboloidinin regle yüzey olduğunu gösteriniz ve striksiyon eğrisini, dağılma parametresini ve Darboux çatısını bulunuz.

$\alpha(u) = (a \cos u, a \sin u, 0)$ ve $e(u) = \alpha'(u) + (0, 0, c) = (-a \sin u, a \cos u, c)$ olmak üzere

$$\varphi(u, v) = (a \cos u, a \sin u, 0) + v(-a \sin u, a \cos u, c)$$

şeklinde yazılabildiğinden yüzey bir regle yüzeydir. α eğrisini birim hızlı hale getirmek için $u = \frac{s}{a}$ parametre değişimi uygulanırsa

$$\varphi(s, v) = \left(a \cos \frac{s}{a}, a \sin \frac{s}{a}, 0 \right) + v \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \sin \frac{s}{a}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cos \frac{s}{a}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right), \|e(s)\| = 1$$

şeklinde elde edilir.

$$e = T \cos \phi + g \sin \phi = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \sin \frac{s}{a}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cos \frac{s}{a}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right)$$

olmak üzere $\langle \alpha_s, e \rangle = \|\alpha_s\| \|e\| \cos \phi$ bağıntısından $\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}$ ve $\sin \phi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}$

biçiminde elde edilir. Dolayısıyla $e = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} T + \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} g$ bağıntısından Darboux

çatısının g birim vektörü

$$g(s) = (0, 0, 1)$$

şeklinde elde edilir.

Bu durumda regle yüzeyin Darboux çatısı ise

$$T(s) = \alpha'(s) = \left(-\sin \frac{s}{a}, \cos \frac{s}{a}, 0 \right)$$

$$g(s) = (0, 0, 1)$$

$$n(s) = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} = \left(\cos \frac{s}{a}, \sin \frac{s}{a}, 0 \right)$$

şeklinde elde edilir.

Darboux çatısına karşılık gelen türev denklemleri ise

$$\begin{bmatrix} T' \\ g' \\ n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \langle T', g \rangle & \langle T', n \rangle \\ \langle g', T \rangle & 0 & \langle g', n \rangle \\ \langle n', T \rangle & \langle n', g \rangle & 0 \end{bmatrix}$$

bağıntısından

$$\begin{bmatrix} T' \\ g' \\ n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Regle yüzeyin striksiyon eğrisi ise

$$c(s) = \alpha(s) + \frac{(\phi' + \kappa_g) \sin \phi}{(\phi' + \kappa_g)^2 + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2} e(s)$$

şeklinde tanımlı olduğundan $\phi' = 0$ ve $\kappa_g = \langle T'(s), g(s) \rangle = 0$ eşitliklerinden $c(s) = \alpha(s)$ şeklinde elde edilir. Yani yüzeyin striksiyon eğrisi dayanak eğrisidir.

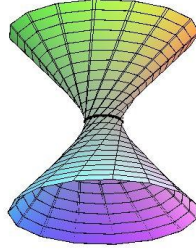
Regle yüzeyin dağılma parametresi

$$P_e = \frac{\sin \phi (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)}{((\phi' + \kappa_g)^2 + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2)}$$

bağıntısından

$$P_e = \frac{\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right) \left(-\frac{1}{a} \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} + 0 \right)}{(0+0)^2 \left(-\frac{1}{a} \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} + 0 \right)^2} = -c$$

elde edilir. Bu nedenle regle yüzey $P_e = -c = 0$ olması durumunda açılabilir bir regle yüzeydir.



Şekil 4. 4 Tek kanatlı hiperboloid regle yüzeyi

4.6 Darboux Çatılı Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları

Tanım 4.6 Kapalı regle yüzeylerde doğrultmanların dik yörüngeleri için $\langle e, d\phi \rangle = 0$ yazılır ve $\{T, g, n\}$ Darboux dik çatısı için bu değer $\cos \phi ds = -dv$ şeklindedir. Darboux çatısı kullanılarak elde edilen bu ifadenin α kapalı eğrisi boyunca integrali olan,

$$\oint_{(\alpha)} \langle e, d\alpha \rangle = \oint_{(\alpha)} -dv = \oint_{(\alpha)} \cos \phi ds$$

ile tanımlanan

$$L_e : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \rightarrow L_e(v) = -\oint_{(\alpha)} dv = \oint_{(\alpha)} \cos \phi ds \quad (4.18)$$

fonksiyon kapalı regle yüzeyin $\{T, g, n\}$ Darboux çatısına göre açılım uzunluğudur.

Açılım uzunluğunun verilen tanımı bize e doğrultmanının, $\alpha = \alpha(s)$ eğrisine göre kapalı regle yüzeyi çizdiğinde, kendi doğrultusunda $-\oint_{(\alpha)} dv = \oint_{(\alpha)} \cos \phi ds$ kadar ilerleyerek ilk konumu ile çakıştığını söyler.

Tanım 4.7 $\{T, N, B\}$ sistemine bağlı şekilde hareket eden bir e doğrusunun çizmiş olduğu regle yüzeyi için, e vektörü bu sisteme göre tek türlü olarak (3.27) denkleminde

$$e = e_1 T + e_2 N + e_3 B, \quad e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$$

şeklindedir. Bu durumda $e_i, 1 \leq i \leq 3$ bileşenleri H uzayında sabittir. Regle yüzeyin e birim doğrultman vektörü ile α eğrisinin birim teğet vektör alanı T arasındaki açı ϕ ve α eğrisinin birim normal vektör alanı N ile yüzeyin $\{T, g, n\}$ Darboux çatısındaki g vektörü arasındaki açı θ olmak üzere,

$$e = T \cos \phi + g \sin \phi, \quad g = N \cos \theta + B \sin \theta$$

eşitlikleri yazılabileceğinden e doğrusunun $\{T, N, B\}$ sistemine göre denklemi

$$e = T \cos \phi + N \sin \phi \cos \theta + B \sin \phi \sin \theta \quad (4.19)$$

elde edilir.

Teorem 4.6 $\alpha : I \rightarrow E^3$ kapalı uzay eğrisi boyunca tanımlanan bir H / H' kapalı uzay hareketinde H uzayındaki sabit bir e doğrusunun H' de çizdiği Darboux çatılı regle yüzeyin açılım açısı ile harekete katılan T, B Frenet vektörleri ile belirlenen doğruların H' de çizdikleri regle yüzeylerin açılım açıları arasında,

$$\lambda_e = \lambda_T \cos \phi + \lambda_B \sin \phi \sin \theta \quad (4.20)$$

lineer bağıntısı vardır.

İspat Darboux çatılı regle yüzeyin (4.19) denklemiyle verilen $e = T \cos \phi + N \sin \phi \cos \theta + B \sin \phi \sin \theta$ anadoğrularının açılım açısı için (3.18) ile verilen $\lambda_e = \langle \bar{D}, e \rangle$ ve (3.26) ile verilen $\bar{D} = \lambda_T T + \lambda_B B$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$\lambda_e = \langle \bar{D}, e \rangle$$

olmak üzere

$$\lambda_e = \langle \lambda_T T + \lambda_B B, T \cos \phi + N \sin \phi \cos \theta + B \sin \phi \sin \theta \rangle$$

veya

$$\lambda_e = \lambda_T \cos \phi + \lambda_B \sin \phi \sin \theta$$

bulunur.

Not 4.4 Teorem 4.6, Teorem 3.24' e Darboux çatısı uygulanması sonucu elde edilmiştir. e_1 ve e_3 değerleri θ ve ϕ açı değerleri kullanılarak verilmiştir.

Teorem 4.7 $\alpha : I \rightarrow E^3$ kapalı uzay eğrisi boyunca tanımlanan bir H / H' kapalı uzay hareketinde H uzayındaki sabit bir e doğrusunun H' de çizdiği Darboux çatılı regle yüzeyin açılım uzunluğu, hareketi belirten $\alpha(s)$ eğrisinin T teğetinin çizdiği regle yüzeyin açılım uzunluğu ile e doğrusunun teğet yönündeki bileşeninin çarpımıdır.

İspat Darboux çatılı regle yüzeyin (4.19) denklemi ile $e = T \cos \phi + N \sin \phi \cos \theta + B \sin \phi \sin \theta$ şeklinde verilen doğrusunun çizdiği regle yüzeyin L_e açılım uzunluğu için (3.18) denkleminde $L_e = \oint_{(\alpha)} \langle d\alpha, e \rangle$ eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} L_e &= \oint_{(\alpha)} \langle T ds, T \cos \phi + N \sin \phi \cos \theta + B \sin \phi \sin \theta \rangle \\ L_e &= \cos \phi \oint_{(\alpha)} ds \end{aligned}$$

bulunur ve ayrıca (3.25) denkleminde

$$L_e = \cos \phi L_T \quad (4.21)$$

elde edilir.

Not 4.5 Teorem 4.7, Teorem 3.25'e Darboux çatısı uygulanması sonucu elde edilmiştir. e_1 değeri ϕ açısı kullanılarak verilmiştir.

Teorem 4.8 $\alpha: I \rightarrow E^3$ kapalı uzay eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde $H = Sp\{T, N, B\}$ hareketli uzayındaki sabit bir e doğrusunun H' sabit uzayda çizdiği Darboux çatılı regle yüzeyin açılabilir olması için $\alpha(s)$ eğrisinin 1. eğriliği olan κ ile ikinci eğriliği τ olmak üzere harmonik eğriliği

$$h = \frac{\kappa}{\tau} = \frac{\sin^2 \phi}{\sin \phi \cos \phi \sin \theta} = \frac{(L_T^2 - L_e^2) \lambda_B}{(\lambda_e L_T - L_e \lambda_T) L_e} \quad (4.22)$$

olacak şekilde bir eğilim çizgisi olmasıdır.

İspat $\{T, N, B\}$ sistemine bağlı olarak hareket eden (4.19) denklemi ile $e = T \cos \phi + N \sin \phi \cos \theta + B \sin \phi \sin \theta$ şeklinde tanımlanan doğrunun çizdiği Darboux çatılı regle yüzeyin açılabilir olması için dağılma parametresi sıfır olmalıdır, dolayısıyla (3.3) denkleminde $\det\left(\frac{d\alpha}{ds}, e, \frac{de}{ds}\right)$ ifadesi sıfır olmalıdır. (4.19) eşitliğinden türev hesaplanırsa, e doğrusu H hareketli sisteminde sabit olduğundan

$$\frac{de}{ds} = \kappa N \cos \phi + (-\kappa T + \tau B) \sin \phi \cos \theta + (-\tau N) \sin \phi \sin \theta$$

veya

$$\frac{de}{ds} = -T \kappa \sin \phi \cos \theta + N (\kappa \cos \phi - \tau \sin \phi \sin \theta) + B \tau \sin \phi \cos \theta$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} \times e &= T \times e \\ \frac{d\alpha}{ds} \times e &= B \sin \phi \cos \theta - N \sin \phi \sin \theta \end{aligned}$$

olduğundan

$$\det\left(\frac{d\alpha}{ds}, e, \frac{de}{ds}\right) = \left\langle T \times e, \frac{de}{ds} \right\rangle$$

olmak üzere

$$\det\left(\frac{d\alpha}{ds}, e, \frac{de}{ds}\right) = \langle B \sin \phi \cos \theta - N \sin \phi \sin \theta, -T\kappa \sin \phi \cos \theta + N(\kappa \cos \phi - \tau \sin \phi \sin \theta) + B\tau \sin \phi \cos \theta \rangle$$

veya

$$\det\left(\frac{d\alpha}{ds}, e, \frac{de}{ds}\right) = \tau \sin^2 \phi \cos^2 \theta - \sin \phi \sin \theta (\kappa \cos \phi - \tau \sin \phi \sin \theta)$$

elde edilir. Regle yüzeyin açılabilir olması bu ifade için sıfır olacağından

$$\det\left(\frac{d\alpha}{ds}, e, \frac{de}{ds}\right) = \tau \sin^2 \phi - \kappa \sin \phi \cos \phi \sin \theta = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\sin^2 \phi}{\sin \phi \cos \phi \sin \theta} \quad (4.24)$$

elde edilir. Bu denklem (3.30) denkleminin Darboux çatılı regle yüzeyler için karşılığıdır.

Ayrıca (4.21) eşitliğinden $\cos \phi$ çözülürse

$$\cos \phi = \frac{L_e}{L_T} \quad (4.25)$$

elde edilir ve bu eşitlik (4.20) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \lambda_e &= \frac{L_e}{L_T} \lambda_T + \sin \phi \sin \theta \lambda_B \\ \sin \phi \sin \theta &= \frac{\lambda_e L_T - L_e \lambda_T}{L_T \lambda_B} \end{aligned} \quad (4.26)$$

bulunur. (4.25) denkleminde $\sin \phi = \frac{\sqrt{L_T^2 - L_e^2}}{L_T}$ yazılır. Bu eşitlik (4.26) da yerine

yazılırsa

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{(L_T^2 - L_e^2) \lambda_B}{(\lambda_e L_T - L_e \lambda_T) L_e} \quad (4.27)$$

bulunur. e doğrusu $\{T, N, B\}$ sisteminde sabit bir doğru olduğundan, bu sisteme göre bileşenleri de sabit olacağından dolayısıyla (4.27) denkleminde

$$h = \frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit}$$

elde edilir.

Not 4.6 Teorem 4.8, Teorem 3.26' ya Darboux çatısı uygulanması sonucu elde edilmiştir. Genel kapalı denklemler aynı olmasına rağmen ϕ ve θ açıları kullanılarak eşitlik bulunmuştur.

Teorem 4.9 $\alpha: I \rightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde H hareketli uzayındaki sabit bir e doğrusunun H' sabit uzayında çizdiği Darboux çatılı regle yüzeyin açılabilir olabilmesi için gerek ve yeter şart H/H' hareketine katılan $\{e, T, N\}$ doğrularının H' sabit uzayında çizdikleri regle yüzeylerin açılım açıları ile dağılma parametreleri arasında

$$\frac{P_B}{P_N} = \frac{(L_T^2 - L_e^2)^2 \lambda_B^2}{(\lambda_e L_T - L_e \lambda_T)^2 L_e^2} + 1 = \left(\frac{\sin^2 \phi}{\sin \phi \cos \phi \sin \theta} \right)^2 + 1 \quad (4.28)$$

bağıntısının var olmasıdır.

İspat Teorem (3.26) ile verilen hareketli $H = Sp\{T, N, B\}$ uzayının sabit H' sabit uzayına göre kapalı ve 1-parametrelili H/H' hareketinde H uzayındaki sabit bir $e = T \cos \phi + N \sin \phi \cos \theta + B \sin \phi \sin \theta$ doğrusunun H' uzayında çizdiği Darboux çatılı regle yüzeyin açılabilir olması için bu regle yüzeyin dayanak eğrisinin, harmonik eğriliği

$$h = \frac{\kappa}{\tau} = \frac{(L_T^2 - L_e^2) \lambda_B}{(\lambda_e L_T - L_e \lambda_T) L_e}$$

olacak şekilde bir eğilim çizgisi olmasıdır. Teorem 4.8 gereğince $\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\sin^2 \phi}{\sin \phi \cos \phi \sin \theta}$

olduğundan $h = \frac{\kappa}{\tau} = \frac{\sin^2 \phi}{\sin \phi \cos \phi \sin \theta} = \frac{(L_T^2 - L_e^2) \lambda_B}{(\lambda_e L_T - L_e \lambda_T) L_e}$ elde edilir. Ayrıca teorem (3.27)

deki

$$\left(\frac{\kappa}{\tau} \right)^2 = \frac{P_B}{P_N} - 1$$

eşitliğini de kullanırsak,

$$\frac{P_B}{P_N} = \frac{(L_T^2 - L_e^2)^2 \lambda_B^2}{(\lambda_e L_T - L_e \lambda_T)^2 L_e^2} + 1 = \left(\frac{\sin^2 \phi}{\sin \phi \cos \phi \sin \theta} \right)^2 + 1$$

elde edilir.

Not 4.7 Teorem 4.9, Teorem 3.28 ve 3.29' a Darboux çatısı uygulanması sonucu elde edilmiştir. Genel kapalı denklemler aynı olmasına rağmen ϕ ve θ açıları kullanılarak eşitlik bulunmuştur.

$$\{T, N, B\} \text{ sistemine bağılı şekilde hareket eden } e = T \cos \phi + N \sin \phi \cos \theta + B \sin \phi \sin \theta$$

doğrusu için özel durumları olan aşağıdaki teoremleri verelim:

Teorem 4.10 $\alpha: I \rightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde H hareketli uzayında Normal düzlemdeki sabit bir e doğrusunun H' sabit uzayında çizdiği Darboux çatılı regle yüzeyin açılabilir olabilmesi için (α) düzlemsel eğri olmalıdır.

İspat Eğer (4.19) denklemiyle tanımlanan $e = T \cos \phi + N \sin \phi \cos \theta + B \sin \phi \sin \theta$ doğrusu normal düzlemde ise

$$\cos \phi = 0$$

olur. Ayrıca (4.23) denklemden

$$\tau \sin^2 \phi = 0$$

olmalıdır. Bu durumda $\sin \phi = 0$ olamayacağından $\tau = 0$ olmalıdır. Bu durumda eğri Oskülatör düzlemde kalır ve düzlemsel bir eğridir.

Not 4.8 Teorem 4.10, Teorem 3.30' a Darboux çatısı uygulanması sonucu elde edilmiştir.

Teorem 4.11 $\alpha: I \rightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde H hareketli uzayında Oskülatör düzlemdeki sabit bir e doğrusunun H' sabit uzayında çizdiği Darboux çatılı regle yüzeyin açılabilir olabilmesi için (α) eğrisi düzlemsel bir eğri veya $e = T$ yani $\phi = 0$ olmalıdır.

İspat Eğer (4.19) denklemiyle tanımlanan $e = T \cos \phi + N \sin \phi \cos \theta + B \sin \phi \sin \theta$ doğrusu oskülatör düzlemde ise $\sin \phi \sin \theta = 0$ olmalıdır. Bu durumda $\sin \phi = 0$ veya $\sin \theta = 0$ ve regle yüzeyin açılabilir olması için (4.23) denkleminde

$$\tau \sin^2 \phi = 0$$

olmalıdır.

Eğer $\sin \phi = 0$ ise $\sin^2 \phi \tau = 0$ sağlanacağından regle yüzey açılabilir regle yüzey ve $e = T$ yani $\phi = 0$ olur.

Eğer $\sin \theta = 0$ ise $\sin^2 \phi \tau = 0$ ifadesinin sıfır olabilmesi için $\sin \phi = 0$ veya $\tau = 0$ olmalıdır. $\sin \theta = 0$ iken $\sin \phi = 0$ sıfır olursa (4.19) denkleminde $e = T$ yani $\phi = 0$ elde edilir. $\sin \theta = 0$ iken $\tau = 0$ ise eğri Oskülatör düzlemde kalır ve düzlemsel bir eğridir.

Not 4.9 Teorem 4.11, Teorem 3.31' e Darboux çatısı uygulanması sonucu elde edilmiştir.

Teorem 4.12 $\alpha: I \rightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde H hareketli uzayında Rektifiyan düzlemdeki sabit bir e doğrusunun H' sabit uzayında çizdiği Darboux çatılı regle yüzeyin açılabilir olabilmesi $e = T$ yani $\phi = 0$

veya $\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\sin \phi}{\cos \phi}$ olmalıdır.

İspat Eğer (4.19) denklemiyle tanımlanan $e = T \cos \phi + N \sin \phi \cos \theta + B \sin \phi \sin \theta$ doğrusu rektifiyan düzlemde ise $\sin \phi \cos \theta = 0$ elde edilir. Bu durumda $\cos \theta \neq 0$ iken $\sin \phi = 0$ veya $\sin \phi \neq 0$ iken $\cos \theta = 0$ veya $\sin \phi = 0$ ve $\cos \theta = 0$ olmalıdır. Regle yüzeyin açılabilir olması için (4.23) denkleminde

$$\det \left(\frac{d\alpha}{ds}, e, \frac{de}{ds} \right) = \tau \sin^2 \phi - \kappa \sin \phi \cos \phi \sin \theta = \sin \phi (\tau \sin \phi - \kappa \cos \phi \sin \theta) = 0$$

eşitliği sağlanmalıdır.

Eğer $\cos \theta \neq 0$ iken $\sin \phi = 0$ ise $e = T$ yani $\phi = 0$ bulunur.

Eğer $\sin \phi \neq 0$ iken $\cos \theta = 0$ ise $\sin \theta = 1$ olacağından $P_e = \sin \phi (\tau \sin \phi - \kappa \cos \phi) = 0$ eşitliğinden

$$\tau \sin \phi - \kappa \cos \phi = 0$$

veya

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\sin \phi}{\cos \phi}, \quad \cos \phi \neq 0$$

elde edilir.

Eğer $\sin \phi = 0$ ve $\cos \theta = 0$ olması durumunda ise $e = T$ yani $\phi = 0$ elde edilir.

Teorem 4.13 $\alpha: I \rightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde H hareketli uzayında Rektifiyan düzlemdeki sabit bir e doğrusunun H' sabit uzayında çizdiği Darboux çatılı regle yüzeyin açılabilir olabilmesi için $\{e, T, N\}$ doğrularının integral invariantları arasında

$$\frac{P_B}{P_N} = \frac{(\lambda_e L_T - L_e \lambda_T)^2}{L_e^2 \lambda_B^2} + 1 = \left(\frac{\sin \phi \sin \theta}{\cos \phi} \right)^2 + 1$$

bağıntısı sağlanmalıdır.

İspat Eğer (4.19) denklemleriyle tanımlanan $e = T \cos \phi + N \sin \phi \cos \theta + B \sin \phi \sin \theta$ doğrusu rektifiyan düzlemde ise $\sin \phi \cos \theta = 0$ yani N vektörü doğrultusundaki bileşeni sıfır olmalıdır. (4.24) denklemi bu durumda

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\sin \phi \sin \theta}{\cos \phi}, \quad \cos \phi \neq 0$$

şeklinde olacaktır. Bu durumda (3.29) eşitliği

$$h = \frac{\kappa}{\tau} = \frac{\sin \phi \sin \theta}{\cos \phi} = \frac{(\lambda_e L_T - L_e \lambda_T)}{L_e \lambda_B}$$

elde edilir. Teorem (3.27) deki

$$\left(\frac{\kappa}{\tau} \right)^2 = \frac{P_B}{P_N} - 1$$

eşitliği kullanılırsa

$$\frac{P_B}{P_N} = \left(\frac{\sin \phi \sin \theta}{\cos \phi} \right)^2 + 1$$

elde edilir.

Özel durumlar

1) Eğer $\cos \theta \neq 0$ iken $\sin \phi = 0$ ise $\frac{P_B}{P_N} = 1$ bulunur.

2) Eğer $\sin \phi \neq 0$ iken $\cos \theta = 0$ ise $\sin \theta = 1$ olacağından $\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\sin \phi}{\cos \phi}$ eşitliğinden

$$\frac{P_B}{P_N} = \frac{(\lambda_e L_T - L_e \lambda_T)^2}{L_e^2 \lambda_B^2} + 1 = \left(\frac{\sin \phi}{\cos \phi} \right)^2 + 1$$

bulunur.

3) Eğer $\sin \phi = 0$ ve $\cos \theta = 0$ olması durumunda ise $\frac{P_B}{P_N} = 1$ şeklindedir.

Not 4.10 Teorem 4.13, Teorem 3.32' ye Darboux çatısı uygulanması sonucu elde edilmiştir.

Teorem 4.14 $\alpha : I \rightarrow E^3$ kapalı uzay eğrisi boyunca tanımlanan bir H / H' kapalı uzay hareketinde H uzayındaki doğruların H' uzayında oluşturdıkları (c) eğrisini striksiyon eğrisi olarak kabul eden Darboux çatılı regle yüzeylerin anadoğruları daima $\vec{c}$ nin Rektifiyan düzleminde kalır.

İspat Bir $\varphi(s, v) = \alpha(s) + v e(s)$, $\|e\| = 1$ şeklinde tanımlı regle yüzeyi için striksiyon eğrisinin yer vektörü $\vec{c}$ ve dayanak eğrisine uzaklığı

$$\bar{u} = - \frac{\langle e_s, T \rangle}{\langle e_s, e_s \rangle}$$

olduğundan striksiyon eğrisinin dayanak eğrisi olabilmesi için $\bar{u} = 0$ yani

$$\langle e_s, T \rangle = 0 \quad (4.29)$$

olmalıdır. $e = T \cos \phi + N \sin \phi \cos \theta + B \sin \phi \sin \theta$ doğrusunun, striksiyon eğrisi Frenet vektörlerine bağlı şekilde hareket edeceğinden doğrunun denkleminde türev alınır

$$\frac{de}{ds} = D_T e = -T \kappa \sin \phi \cos \theta + N (\kappa \cos \phi - \tau \sin \phi \sin \theta) + B \tau \sin \phi \cos \theta$$

elde edilir. Burada H hareketli uzayında ϕ ve θ açıları sabittir. Ayrıca bu eşitlik (4.29) de yerine yazılırsa

$$\langle -T \kappa \sin \phi \cos \theta + N (\kappa \cos \phi - \tau \sin \phi \sin \theta) + B \tau \sin \phi \cos \theta, T \rangle = 0$$

veya

$$-\kappa \sin \phi \cos \theta = 0$$

elde edilir. Buradan $\kappa \neq 0$ olduğundan $-\sin \phi \cos \theta = 0$ olmak zorundadır. Bu durumda $e = T \cos \phi + B \sin \phi \sin \theta$ olup eğrinin Rekifiyan düzleminde kalır.

Not 4.11 Teorem 4.14, Teorem 3.33' e Darboux çatısı uygulanması sonucu elde edilmiştir.

Teorem 4.15 $\alpha : I \rightarrow E^3$ kapalı uzay eğrisi boyunca tanımlanan bir H / H' kapalı uzay hareketinde H uzayındaki doğruların H' uzayında oluşturdukları, (c) eğrisini striksiyon eğrisi olarak kabul eden Darboux çatılı regle yüzeyin açılabilir olması için yüzey teğet açılabilir yüzey olmalıdır.

İspat Teorem 4.14' e göre $\alpha : I \rightarrow E^3$ kapalı uzay eğrisi boyunca tanımlanan bir H / H' kapalı uzay hareketinde H uzayındaki doğruların H' uzayında oluşturdukları (c) eğrisini striksiyon eğrisi olarak kabul eden Darboux çatılı regle yüzeylerin anadoğruları daima $\vec{c}$ 'nin Rektifiyan düzleminde kalacağından $\sin \phi \cos \theta = 0$ şeklindedir.

Bu durumda (3.3) denkleminde yüzeyin P_e dağılma parametresini hesaplırsak

$$P_e = \frac{\det(T, T \cos \phi + B \sin \phi \sin \theta, N (\kappa \cos \phi - \tau \sin \phi \sin \theta))}{\|(\kappa \cos \phi - \tau \sin \phi \sin \theta) N\|^2}$$

veya

$$P_e = \frac{\langle -N \sin \phi \sin \theta, N(\kappa \cos \phi - \tau \sin \phi \sin \theta) \rangle}{(\kappa \cos \phi - \tau \sin \phi \sin \theta)^2}$$

veya

$$P_e = \frac{-\sin \phi \sin \theta}{(\kappa \cos \phi - \tau \sin \phi \sin \theta)} \quad (4.30)$$

bulunur. Regle yüzeyin açılabilir olması için dağılma parametresinin sıfır olması gerektiğinden (4.30) denkleminde göre $\sin \phi \sin \theta = 0$ olmalıdır. Ayrıca $\sin \phi \cos \theta = 0$ olduğunu da kullanırsak

$$\cos \phi = 1$$

veya

$$e = T$$

elde edilir. Bu durumda regle yüzey teğet açılabilir yüzeydir.

Not 4.12 Teorem 4.15, Teorem 3.34' e Darboux çatısı uygulanması sonucu elde edilmiştir.

Teorem 4.16 Striksiyon eğrisi küresel kapalı eğri olan Darboux çatılı regle yüzeylerin açılabilir olması için gerek ve yeter şart açılım açılarının sıfır olmasıdır.

İspat Kapalı küresel eğrilerin toplam burulması sıfır olduğundan Teorem 3.35 gereğince (3.41) eşitliğinden

$$\lambda_e = \lambda_T = \oint \tau ds = 0$$

elde edilir. Tersine striksiyon eğrisi küresel kapalı bir regle yüzey için açılım açısı

$$\lambda_e = 0$$

ise

$$\lambda_e = \lambda_T \cos \phi + \lambda_B \sin \phi \sin \theta = 0 \Rightarrow \sin \phi \sin \theta \oint \kappa ds = 0$$

bulunur. Buradan $\sin \phi \sin \theta = 0$ veya $\oint \kappa ds = 0$ olmalıdır. $\sin \phi \sin \theta = 0$ olması durumunda Teorem 4.15 gereğince $\cos \phi = 1$ ve $e = T$ bulunur. $\oint \kappa ds = 0$ ise $\kappa > 0, ds \geq 0$ olduğundan $\oint \kappa ds = 0$ integralinin içi sıfır olmalıdır, yani

$$\kappa ds = 0$$

olmalıdır. Buna göre $\kappa \neq 0$ olduğundan $ds = 0$, $s = \text{sabit}$ olmalıdır. Bu halde striksiyon eğrisi bir noktadan ibaret olduğundan regle yüzey bir konidir.

Not 4.13 Teorem 4.16, Teorem 3.36' ya Darboux çatısı uygulanması sonucu elde edilmiştir.

Çizelge 4. 1 Genel sonuçların karşılaştırılması

	Herhangi Bir Çatıdan Bağımsız	Darboux Çatısına Bağlı
Dağılma Parametresi	$P_e = \frac{\det(\alpha_s, e, e_s)}{\ e_s\ ^2}$	$P_e = \frac{\sin \phi (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)}{(\phi' + \kappa_g)^2 + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2}$
Striksiyon Eğrisi	$\vec{c}(s) = \vec{\alpha}(s) - \frac{\langle e_s(s), T(s) \rangle}{\langle e_s(s), e_s(s) \rangle} \vec{e}(s)$	$\vec{c}(s) = \vec{\alpha}(s) + \frac{(\phi' + \kappa_g) \sin \phi}{(\phi' + \kappa_g)^2 + (\kappa_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)^2} \vec{e}(s)$
Ortogonal Yörünge	$\langle e, d\alpha \rangle = -dv$	$\langle e, d\alpha \rangle = \cos \phi ds = -dv$
Açılım Uzunluğu	$L_e(v) = -\oint_{(\alpha)} dv$	$L_e(v) = -\oint_{(\alpha)} dv = \oint_{(\alpha)} \cos \phi ds$
e Sabit Doğrusunun $\{T, N, B\}$ Çatısına Göre Genel Denklemi	$e = e_1 T + e_2 N + e_3 B,$ $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$	$e = T \cos \phi + N \sin \phi \cos \theta + B \sin \phi \sin \theta$ $\ e\ = 1$
λ_e, λ_T ve λ_B Arasındaki İlişki	$\lambda_e = \lambda_T e_1 + \lambda_B e_3$	$\lambda_e = \lambda_T \cos \phi + \lambda_B \sin \phi \sin \theta$
L_e ile L_T Arasındaki İlişki	$L_e = e_1 L_T$	$L_e = \cos \phi L_T$

SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezin dördüncü bölümünde E^3 Öklid uzayında Darboux çatılı regle yüzeyler incelenmiş ve karakteristik özellikleri araştırılmıştır.

Tezden yola çıkarak bundan sonraki çalışmalarda ise,

1. E^3 Öklid uzayında Darboux çatısına göre regle yüzey çiftlerinin
2. L^3 Lorentz uzayında Darboux çatısına göre regle yüzeyler ve karakteristik özelliklerinin
3. L^3 Lorentz uzayında Darboux çatısına göre regle yüzey çiftlerinin

incelenmesi amaçlanmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Hlavaty, V., (1945). Differentielle linien geometrie, Uitg P. Noorhoff, Groningen.
- [2] Hoschek, J., (1973). Integral invarianten von regel flachen, Arch, Math, XXIV.
- [3] Dalkıran, G., (2008). Regle Yüzeylerin Üretilmesine Yeni Bir Yaklaşım, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Manisa.
- [4] Ravani, B. and Ku, T. S., (1991). Bertrand Offsets of Ruled Surface and Developable Surface, 23(2) : 145 – 152.
- [5] Hacısalihoğlu, H.H., (1994). Diferensiyel Geometri 2. Cilt, 2. Baskı, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Ankara.
- [6] Sarıoğlu, A. And Tutar A., (2007). On Ruled Surface in Euclidean Space E^3 , Int. J. Contemp. Math. Sci., 2(1) : 1-11.
- [7] Hacısalihoğlu, H.H., (2000). Diferensiyel Geometri 1. Cilt, 4. Baskı, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Ankara.
- [8] Hacısalihoğlu, H.H., (1998). Dönüşümler ve Geometriler, 1. Baskı, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Ankara.
- [9] O’ Neill, B., (2006). Elementary Differential Geometry Revised Second Edition, Department of Mathematics University of California, Academic Press, London.
- [10] Sabuncuoğlu, A., (2010). Diferensiyel Geometri, 3. Baskı, Nobel Yayınevi, İstanbul.
- [11] Demirel, H. ve Üstün, A., (2011). Matematiksel Jeodezi, Ders Kitabı.
- [12] Kahraman, T., (2010). Öklid ve Minkowski Uzaylarında Mannheim D- Eğrileri, Yüksek Lisans Tezi, Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Manisa.
- [13] Kasap, E., (1996). Bertrand Regle Yüzey Çiftleri ile ilgili Yeni Karakteristik Özellikler, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- [14] Gray, A., Salamon, S. and Abbena E., (2006). Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, Third Edition, Chapman and Hall/CRC.
- [15] Balcı, M., (2012). Genel Matematik 1, Sürat Üniversite Yayınları, İstanbul.
- [16] Balcı, M., (2013). Genel Matematik 2, Sürat Üniversite Yayınları, İstanbul.

1 – PARAMETRELİ UZAY HAREKETLERİ

A.1 Afin Dönüşümler

Tanım A.1 $\mathfrak{S}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı V_1 ve V_2 , bu vektör uzayları ile birleşen afin uzaylar A_1 ve A_2 olmak üzere,

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $P \in A_1$ ve herhangi bir $\alpha \in V_1$ için Tanım 1.1 ile tanımlanan A2 afin aksiyomu gereğince $\alpha = \overrightarrow{PQ}$ olacak şekilde bir tek $Q \in A_1$ noktası olduğundan,

$$\psi_P : V_1 \rightarrow V_2$$

dönüşümünü

$$\psi_P(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan ψ_P dönüşümü lineer ise $\forall P_1 \in A_1$ noktası için $\psi_{P_1} = \psi_P$ şeklindedir, [5,8].

İspat A_1 Afin uzayı için afin aksiyomu gereğince, $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_1Q} = \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{P_1Q} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PP_1}$ yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafına ψ_P dönüşümünü uygularsak

$$\begin{aligned}
\psi_P(\overrightarrow{P_1Q}) &= \psi_P(\overrightarrow{PQ}) - \psi_P(\overrightarrow{PP_1}) \\
\psi_P(\overrightarrow{P_1Q}) &= \overrightarrow{f(P)f(Q)} - \overrightarrow{f(P)f(P_1)} \\
\psi_P(\overrightarrow{P_1Q}) &= \overrightarrow{f(P_1)f(Q)} \\
\psi_P(\overrightarrow{P_1Q}) &= \psi_{P_1}(\overrightarrow{P_1Q})
\end{aligned}$$

O halde $f: A_1 \rightarrow A_2$ dönüşümü için $\psi_P: V_1 \rightarrow V_2$ bir lineer dönüşüm oluyorsa ψ_P $P \in A_1$ noktasının seçilişinden bağımsızdır. Bu nedenle ψ_P yerine ψ alınabilir.

Tanım A.2 A_1 ve A_2 birer afin uzay olmak üzere $f: A_1 \rightarrow A_2$ dönüşümüne karşılık gelen $\psi: V_1 \rightarrow V_2$ dönüşümü lineer ise f ye bir *afin dönüşüm*, ψ ye de f ile birleşen *lineer dönüşüm* adı verilir, [5,8].

Tanım A.3 E_1^n ve E_2^n , sırası ile, $\mathbb{R}_1^n$ ve $\mathbb{R}_2^n$ n -boyutlu iç çarpım uzayları ile birleşen birer Öklid uzay olsunlar. Bir

$$f: E_1^n \rightarrow E_2^n$$

afin dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_1^n$ için

$$\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

çağıntısını sağlayacak şekilde bir lineer dönüşüm ile birleşiyorsa f afin dönüşümüne *izometri* adı verilir, [5,8].

Teorem A.1 Bir $f: E_1^n \rightarrow E_2^n$ dönüşümü izometri ise,

$$i) d(f(A), f(B)) = d(A, B), \forall A, B \in E_1^n$$

ii) f birebir ve örtendir

iii) E_1^n ve E_2^n Öklid uzaylarında birer koordinat sistemi sırası ile, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve

$\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ise f izometrisi $A \in O(n)$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $C, X, Y \in \mathbb{R}_1^n$ dir, [5,8].

Tanım A.4 Bir n – boyutlu Öklid uzayı E^n nin izometrilерinin kümesi $R(n)$ olmak üzere,

$$R(n) = \{ f \mid f : E^n \xrightarrow{\text{izometri}} E^n \}$$

şeklindedir. $R(n)$ de dönüşümlerin birleşimi işlemi " $\circ$ " ile gösterilirse $(R(n), \circ)$ ikilisi bir gruptur. Bu gruba *izometrilер grubu* denir, [5,8].

Tanım A.5 E^n , n – boyutlu Öklid uzayının izometrilерinden biri f olsun. E^n deki bir $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre f dönüşümünün matris ifadesi $A \in O(n)$ ve $C \in \mathbb{R}_1^n$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

şeklindedir. f dönüşümüne E^n de bir *hareket* adı verilir.

$A \in O(n)$ olduğundan

$$\det A = \mp 1$$

dir. Eğer $\det A = 1$ ise f ye direkt hareket, $\det A = -1$ ise f ye karşıt hareket adı verilir. Bu çalışmada hareket denildiğinde direkt hareketlerden bahsedilecektir. Direkt hareketlerde öteleme ve dönme şeklinde iki çeşit hareketin bileşkesinden oluşmaktadır, [5,8].

Tanım A.6 E^n Öklid uzayının bir f izometrisi için

$$f(O) = O$$

olacak şekilde bir $O \in E^n$ noktası var ise f ye " O " noktası etrafında dönme denir, [5,8].

Teorem A.2 E^n de başlangıcı $O \in E^n$ olan bir Öklid Koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. Bir

$$f : E^n \rightarrow E^n$$

izometrisi için

i) O noktası etrafında bir dönme f ise bu Öklid koordinat sistemine göre ifadesi

$$X' = AX$$

şeklindedir. Burada $A \in O(n)$ ve $X, X' \in \mathbb{R}_1^n$ dir, [5,8].

ii) f bir direkt dönmedir $\Leftrightarrow X' = AX$ ve $A \in SO(n)$ dir, [5,8].

Tanım A.7 E^n Öklid uzayının bir f izometrisi ve $\forall X \in E^n$ için

$$f(X) = X + h$$

olacak şekilde bir tek $h \in E^n$ noktası varsa f ye E^n nin h ile belirtilen bir *öteleme* denir, [5,8].

Tanım A.8 E^3 de birer vektör alanı V_1, V_2, V_3 olsun. Eğer $\forall P \in E^3$ noktası için $\{V_1, V_2, V_3\}$ sistemi P noktasındaki $T_{E^3}(P)$ tanjant uzayının bir bazı ise bu vektör alanları üçlüsüne E^3 de bir *çatı alanı* denir, [5].

Tanım A.9 $\{e_1, e_2, e_3\}$ sistemi E^3 de doğal çatı alanı ve $\{E_1, E_2, E_3\}$ sistemi de E^3 de ortonormal çatı alanı olmak üzere,

$$E = Ae, \quad A \in O(3) \quad (\text{A.2})$$

yazılabilir.

Buradan diferensiyel alırsak,

$$\begin{aligned} dE &= dAe + Ade, & de &= 0 \\ dE &= dAe \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $e = A^T E$ yazılabileceğinden, $dE = dAA^T E$ elde edilir.

$$\begin{aligned} A.A^T &= I_n \\ d(AA^T) &= 0 \\ dAA^T + AdA^T &= 0 \\ dAA^T &= -(dA.A^T)^T \\ dAA^T &= \omega \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

yazılabileceğinden

$$dE = \omega E$$

elde edilir, [5].

Teorem A.3 E^3 Öklid uzayında hareketli bir çatı alanı $\{E_1, E_2, E_3\}$ olsun. Bu takdirde, $\forall P \in E^3$ için $dE = \omega E$ şeklindedir. Burada ω , 3×3 tipinde antisimetrik bir matris olup,

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

şeklindedir. ω matrisinin $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ elemanlarına E^3 Öklid uzayındaki $\{E_1, E_2, E_3\}$ çatı alanı için bağ formları adı verilir. (A.3) denkleminde

$$dAA^T = \omega$$

veya

$$\omega = [w_{ij}], \quad A = [a_{ij}], \quad i, j = 1, 2, 3$$

olduğundan

$$w_{ij} = \sum_k da_{ik} a_{kj}^T$$

biçimindedir, [5].

A.2 Çizgiler Uzayında Hareketler

Tanım A.10 E^3 Öklid uzayında 1-parametrelili hareketlerde E^3 ün doğruları regle yüzeyleri oluşturmaktadır. E^3 de doğrular lineer nokta kümeleridir. Bu nedenle E^3 Öklid uzayını yalnızca doğrulardan meydana gelmiş olarak düşünürsek, E^3 Öklid uzayına *çizgiler uzayı* denir.

Uzayda hareketlerin tanımlanmasında referans noktasına ihtiyaç vardır. Bu noktanın sabit veya aynı noktada bulunan gözlemciye göre sabit olduğu kabul edilir. Bu noktayı $O \in E^3$ ile tanımlansın. Bu noktadaki ortonormal sistem

$$\{\vec{e}_1(O), \vec{e}_2(O), \vec{e}_3(O)\}$$

olsun. Tanımlanan bu uzayda bütün noktaların sabit kaldığını yani hareket etmediğini kabul edersek, bu durumda E^3 uzayına sabit çizgiler uzayı denir ve H' ile gösterilir.

Yani

$$H' = Sp\{\vec{e}_1(O), \vec{e}_2(O), \vec{e}_3(O)\}$$

şeklindedir.

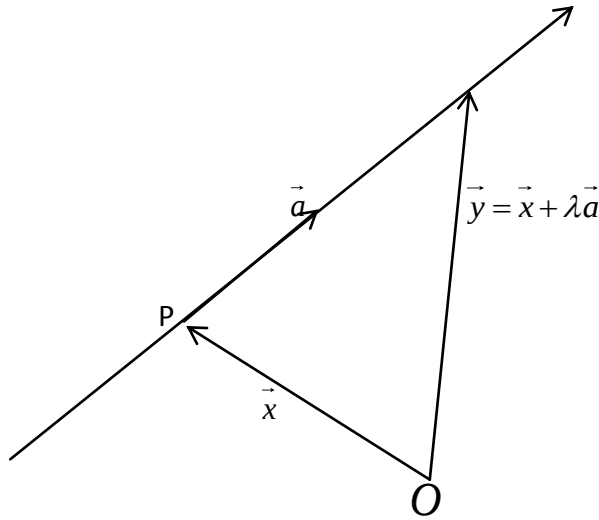
Diğer taraftan " O " noktasına göre hareketli bir nokta P olsun. Bu noktaya bağlı olarak hareket eden ortonormal sistem $\{\vec{E}_1(P), \vec{E}_2(P), \vec{E}_3(P)\}$ olmak üzere,

$$H = Sp\{\vec{E}_1(P), \vec{E}_2(P), \vec{E}_3(P)\}$$

şeklindedir.

Çizgiler uzayında noktaların hareketleri yerine doğruların hareketleri vardır. Bu nedenle uzayın en basit elemanı olarak yönlü doğrular kullanılır, [5].

Tanım A.11 Hareketli bir P noktasının $\vec{OP}$ yer vektörü ve bu noktaya yerleştirilen bir $\vec{a}$ birim vektörü ile tanımlanan doğrunun parametrik denklemi



Şekil Ek A. 1 E^3 de doğru

$$\vec{y} = \vec{x} + \lambda \vec{a}$$

şeklindedir. P noktasının doğru üzerinde keyfi bir nokta olması için,

$$\vec{a}^* = \vec{x} \times \vec{a} = \vec{y} \times \vec{a}$$

vektörel denklemi kullanılarak doğruyu $(\vec{a}, \vec{a}^*)$ çifti ile belirlenir. $\vec{a}, \vec{a}^*$ bileşenlerine normlanmış *Plücker doğru koordinatları* denir, [5].

Çizgiler uzayında hareketler üç gruba ayrılır

- 1) $(\vec{a}, \vec{a}^*)$ doğrusunun H' sabit uzayına göre hareketi
- 2) $(\vec{a}, \vec{a}^*)$ doğrusunun H hareketli uzayına göre hareketi
- 3) H hareketli uzayının H' sabit uzayına göre hareketi

Tanım A.12 H uzayının H' uzayına göre 1-parametrelili hareketine uzay hareketi denir ve H/H' ile gösterilir. H/H' hareketi O referans noktası etrafında bir dönme ve O noktasına göre bir öteleme olarak ikiye ayrılır, [5].

Tanım A.13 Eğer sabit ve hareketli çizgiler uzayında iki koordinat sistemi, sırası ile, $\{x_1', x_2', x_3'\}$ ve $\{x_1, x_2, x_3\}$ ise

$$X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere (A.1) eşitliğinden dolayı H/H' uzay hareketinin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $A \in O(3)$, $C \in \mathbb{R}_1^3$ dir, [5].

Tanım A.14 H/H' uzay hareketinin,

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinde dönmeye karşılık gelen $A \in O(3)$ ve ötelemeye karşılık gelen $C \in \mathbb{R}_1^3$ matrisleri

$$A = A(t)$$

$$C = C(t)$$

olacak şekilde bir reel t parametresinin diferensiyellenebilir fonksiyonları iseler H / H' uzay hareketine 1-parametrelili uzay hareketi denir, [5].

Tanım A.15 H / H' uzay hareketini belirleyen $A \in O(3)$ ve $C \in \mathbb{R}_1^3$ matrisleri $\forall t \in \mathbb{R}$ için,

$$A(t + 2\pi) = A(t)$$

$$C(t + 2\pi) = C(t)$$

olacak şekilde periyodik iseler H / H' uzay hareketine kapalı, aksi durumda açık hareket denir.

Kapalı bir H / H' uzay hareketinde hareketli uzayda seçilen bir noktanın H ve H' uzaylarındaki yörüngeleri de birer kapalı eğridir.

H / H' hareketinin değişimini incelemek istersek, (A.2) denkleminde,

$$E = Ae, \quad A \in O(3)$$

olduğundan

$$dE = dAe$$

şeklindedir. Buradan bağ formlarının matrisini kullanarak

$$dE = \omega E \tag{A.5}$$

elde edilir. Hareketli uzayda bir $(\vec{a}, \vec{a}^*)$ doğrusunu düşünelim. $\vec{a}$ birim doğrultman vektörünü $\forall P \in H$ için,

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\vec{a} = a^T E$$

şeklinde yazılabilir. Doğrunun hareketinin değişimi için diferensiyel alırsak,

$$d\vec{a} = da^T E + a^T dE$$

elde edilir. Ayrıca (A.5) denkleminde dolayı,

$$\begin{aligned} d\vec{a} &= da^T E + a^T \omega E \\ d\vec{a} &= (da^T + \omega^T a)^T E \end{aligned}$$

elde edilir. $(\vec{a}, \vec{a}^*)$ doğrusu H hareketli uzayında sabit bir doğru ise

$$da = 0$$

olacağından

$$d\vec{a} = a^T \omega E \tag{A.6}$$

bulunur. Eğer ω matrisinin (A.4) nolu tanımından bir $\vec{\omega}$ vektörünü,

$$\vec{\omega} = (\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3)$$

şeklinde seçecek olursak (A.6) nolu denklem

$$d\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{a}$$

şeklinde yazılabilir. Diferensiyel geometrideki Darboux dönme vektörünün rolünü oynayan $\vec{\omega}$ vektörüne H/H' hareketinin *ani Pfaff vektörü (diferensiyel vektör)* adı verilir, [5].

Tanım A.16 $\alpha: I \rightarrow E^3$ kapalı bir eğri olsun. Bir ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ çatı alanı eğriye bağlı ve ayrıca $\forall t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki hareketli çizgiler uzayı,

$$H = Sp\{E_1, E_2, E_3\}_{\alpha(t)}$$

olmak üzere, H/H' uzay hareketindeki $\vec{\omega}$ Pfaff vektörünün α eğrisi boyunca eğrisel integraliyle tanımlanan

$$\vec{D} = \oint \vec{\omega} \tag{A.7}$$

vektörüne H/H' hareketinin *Steiner dönme vektörü* denir, [5].

Tanım A.17 $\alpha : I \rightarrow E^3$ diferensiyellenebilir kapalı bir eğri ve bu eğriye bağlı bir şekilde hareket eden bir ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ sistemi H hareketli uzayı olsun.

$d\vec{\alpha} \in T_H(\alpha(t))$ olduğundan

$$d\vec{\alpha} = \sigma_1 \vec{E}_1 + \sigma_2 \vec{E}_2 + \sigma_3 \vec{E}_3$$

şeklinde tek türlü olarak ifade edilir. α eğrisi boyunca eğrisel integrali ile tanımlanan

$$\vec{V} = \int_{(\alpha)} d\vec{\alpha} \quad (\text{A.8})$$

vektörüne H / H' hareketinin *Steiner öteleme vektörü* denir, [2].

H hareketli uzayını göstermek için $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisini çizen bir $\alpha(s)$ noktasına bağlı şekilde hareket eden $\{T, N, B\}_{\alpha(s)}$ Frenet çatısını ele alalım. Bu durumda E^3 deki hareketli çizgiler uzayı H

$$H = Sp\{T, N, B\}_{\alpha(s)}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\{T, N, B\}$ sistemi α eğrisi için bir Frenet vektör alanları sistemidir. $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisinin s yay parametresine göre $\{T, N, B\}_{\alpha(s)}$ sistemine göre değişimi (A.5) numaralı denklemdeki ω matrisini kullanırsak,

$$\begin{bmatrix} dT \\ dN \\ dB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. Burada κ ve τ , sırası ile, α eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonlarıdır, [5].

ANALİZ TEMEL KAVRAMLAR
B.1 Tek Değişkenli Fonksiyonlar

Tanım B.1 A ve B iki küme olsun. A nın her bir elemanını B nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen f kuralına A dan B ye bir *fonksiyon* denir.

A dan B ye bir fonksiyon, genellikle,

$$f : A \rightarrow B$$

biçiminde gösterilir. Burada A kümesine *tanım kümesi*, B kümesine de *değer kümesi* adı verilir, [15].

Tanım B.2 Eğer f fonksiyonu, tanım kümesinin x elemanını değer kümesinin y elemanı ile eşleştirirse, x in f altındaki görüntüsü y dir denir ve

$$y = f(x)$$

biçiminde gösterilir. x tanım kümesinde değiştikçe, ona bağlı olarak y de değer kümesinde değişir. Bu nedenle $y = f(x)$ bağıntısı yardımıyla bir fonksiyon tanımlandığında x elemanına *bağımsız değişken*, y elemanına *bağımlı değişken* adı verilir, [15].

B.1.1 Tek Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik

Tanım B.3 $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, eğer $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x , a ya yaklaştığında f nin *limiti* L dir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

biçiminde gösterilir, [15].

Teorem B.1 $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $A \subset \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ birer fonksiyon ve $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ limitleri varsa

1. Her $c \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \rightarrow a} (cf)(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
4. Her $x \in A$ için $g(x) \neq 0$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ise

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

dır, [15].

Tanım B.4 $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ise f fonksiyonu a noktasında sürekli denir. Eğer $A \subset \mathbb{R}$, f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise fonksiyon A üzerinde sürekli denir, [15].

Bu tanıma göre, bir f fonksiyonunun bir a noktasında sürekli olması için,

1. f fonksiyonunun a noktasında tanımlı olmalıdır.
2. f fonksiyonunun a noktasında limiti olmalıdır.
3. f fonksiyonunun a noktasındaki limiti a noktasındaki fonksiyon değerine eşit olmalıdır, [15].

Teorem B.2 $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. f fonksiyonu a noktasında sürekli $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır, öyleki $0 < |x - a| < \delta$ bağıntısını sağlarsa her $x \in A$ için $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ dir, [15].

B.1.2 Tek Değişkenli Fonksiyonlarda Türev

Tanım B.5 $y = f(x)$ ile verilen f fonksiyonu x in bir komşuluğunda tanımlı olsun. x değişkenine göre Δx artması verildiğinde fonksiyondaki değişme miktarı

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

olur. Bu durumda, fonksiyondaki değişimin değişkendeki *değişmeye oranı*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

olacaktır. $\Delta x, h$ ile gösterilirse, bu oran

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

biçimini alır, [15].

Tanım B.6 $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ ve f de A da tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

limiti veya $x = a + h$ olacak şekilde elde edilen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Limiti varsa f fonksiyonu a noktasında *türevlenebilirdir* veya *diferensiyellenebilirdir* denir. Bu türev

$$f'(a), \frac{df}{dx}(a), Df(a)$$

sembollerinden biri ile gösterilir, [15].

$y = f(x)$ denklemi ile verilen sürekli bir f fonksiyonunun grafiği üzerinde bir A noktası alalım. Eğri üzerinde diğer bir hareketli nokta P olsun. P noktası A noktasına yaklaştığında AP kirişi konum değiştirir. P noktasının A ile çakışması durumunda AP kirişinin pozisyonuna, eğrinin A noktasındaki *teğeti* denir, [15].

Teorem B.3 Bir fonksiyon bir noktada sürekli değil ise türevli de değildir, [15].

B.1.3 Tek Değişkenli Fonksiyonlarda İntegral

Tanım B.7 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. $[a, b]$ aralığının $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ parçalanması için

$$M_k = \max \{ f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k \}$$
$$m_k = \min \{ f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k \}$$

olsun.

$$A(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \quad \text{ve} \quad \bar{U}(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$$

toplamları sırası ile, f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen *alt toplamı* ve *üst toplamı* adı verilir.

$x_k^*, [x_{k-1}, x_k]$ alt aralığında alınan herhangi bir nokta olmak üzere

$$R(f, P) = \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

toplama f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen bir *Riemann toplamı* denir.

Her P parçalanması için

$$A(f, P) \leq R(f, P) \leq \bar{U}(f, P)$$

olacağı açıktır.

Bir parçalanma inceldikçe alt toplamlar artar, üst toplamlar azalır. Alt ve üst toplamlar farkı sıfıra yaklaşır. Bu durumda $\bar{U}(f, P), A(f, P)$ ve $R(f, P)$ toplamları aynı bir I sayısına yaklaşır.

$f(x) > 0$ olduğunda, $y = f(x)$ eğrisi, Ox -ekseni, $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı alt ve üst toplamlar arasında bir sayıdır, [15].

Tanım B.8 $f, [a, b]$ üzerinde tanımlı, sınırlı bir fonksiyon ve P de $[a, b]$ aralığının herhangi bir parçalanması olsun. Eğer

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = I$$

limiti varsa, bu limite f nin a dan b ye *integrali* denir ve

$$\int_a^b f(x) dx$$

ile gösterilir. Bu durumda $f, [a, b]$ üzerinde *integrallenebilirdir* denir, [15].

Teorem B.4 $f, [a, b]$ kapalı aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Her $x \in (a, b)$ için

$$F'(x) = f(x)$$

olacak şekilde sürekli bir $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

dır, [15].

B.2 Çok Değişkenli Fonksiyonlar

Tanım B.9 D düzlemin bir bölgesi, f de D nin her bir (x, y) noktasına bir $f(x, y)$ reel sayısı karşılık getiren bir fonksiyon ise f fonksiyonuna *iki değişkenli fonksiyon* adı verilir. B uzayın bir bölgesi, f de B nin her bir (x, y, z) noktasına bir $f(x, y, z)$ sayısı karşılık getiren bir fonksiyon ise f fonksiyonuna bir *üç değişkenli fonksiyon* denir, [16].

B.2.1 Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik

Tanım B.10 $P(a, b)$ sabit bir nokta ve $\varepsilon > 0$ olsun.

$$D(P, \varepsilon) = \left\{ (x, y) : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon \right\}$$

kümesine $P(a, b)$ noktasının ε – *komşuluğu* denir, [16].

Tanım B.11 $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için, $\exists \delta > 0$ öyleki $0 < |x-a| < \delta$ ve $0 < |y-b| < \delta$ bağıntılarını sağlayan, tanım kümesindeki tüm (x, y) noktaları için $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ dur, [16].

İki değişkenli bir fonksiyonun bir (a, b) noktasındaki limiti araştırılırken şu hususlara dikkat etmek gerekir.

a) Fonksiyon (a,b) noktasında tanımlı olmayabilir. Fakat (a,b) noktası tanım kümesinin bir yığılma noktasıdır.

b) L limiti varsa bu limit (x,y) noktasının (a,b) noktasına yaklaşma şeklinden bağımsızdır. Yani (x,y) noktası (a,b) noktasına hangi eğri boyunca yaklaşırsa yaklaşsın L değeri değişmez. Eğer (x,y) noktasının (a,b) noktasına yaklaşma yoluna göre limit değişiyorsa fonksiyonun (a,b) noktasında limiti yoktur. Bu durumda f fonksiyonunun (a,b) noktasında limiti var ve L ise

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x,y) \right) = L \quad \text{ve} \quad \lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \right) = L$$

olacaktır, [16].

Teorem B.5 $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L_1$ ve $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = L_2$ limitleri var olsun.

1. Her $c \in \mathbb{R}$ için $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} cf(x,y) = c.L_1$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) + g(x,y)] = L_1 + L_2$

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y)g(x,y)] = L_1.L_2$

4. $g(x,y) \neq 0$ ve $L_2 \neq 0$ ise

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}$$

dir, [16].

Tanım B.12 f, A kümesinde tanımlı bir fonksiyon ve $(a,b), A$ kümesinin bir yığılma noktası olsun. $f, (a,b)$ tanımlı ve $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ ise f fonksiyonu (a,b) noktasında sürekli denir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise A üzerinde sürekli denir.

Bu durumda bir f fonksiyonunun (a,b) noktasında sürekli olabilmesi için

a) $f, (a,b)$ noktasında tanımlı,

b) $f, (a,b)$ noktasında limitli,

$$\text{c) } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

olmalıdır, [16].

B.2.2 Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Kısmi Türev

Tanım B.13 $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$ bir fonksiyon ve $(a,b) \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

limiti varsa bu limite f nin x değişkenine göre (a,b) noktasındaki *kısmi türevi* denir,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a,b)}, f_x(a,b)$$

sembollerinden biri ile gösterilir. Benzer şekilde

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

limiti varsa bu limite f nin y değişkenine göre (a,b) noktasındaki *kısmi türevi* denir,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b), \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a,b)}, f_y(a,b)$$

sembollerinden biri ile gösterilir, [16].

Geometrik Yorum $z = f(x,y)$ nin (a,b) noktasında x değişkenine göre kısmi türevi $z = f(x,b)$ fonksiyonunun $x=a$ noktasındaki türevidir. Benzer şekilde $z = f(x,y)$ nin (a,b) noktasında y değişkenine göre kısmi türevi $z = f(a,y)$ fonksiyonunun $y=b$ noktasındaki türevidir. Dolayısıyla $f_x(a,b), z = f(x,b)$ eğrisine $x=a$ noktasında çizilen teğetin eğimidir. Aynı şekilde $f_y(a,b), z = f(a,y)$ eğrisine $y=b$ noktasında çizilen teğetin eğimidir, [16].

Teorem B.6 $f(x,y)$ nin f_x ve f_y kısmi türevleri (x_0, y_0) noktasını içeren bir açık B bölgesinde tanımlı ve (x_0, y_0) noktasında sürekli olsunlar. (x,y) noktası (x_0, y_0) dan $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ noktasına kadar değiştiğinde $z = f(x,y)$ de meydana gelen

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

değişimi

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y \quad (\text{B.1})$$

biçiminde yazılabilir. Burada ε_1 ve ε_2 , $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ için sıfıra giden fonksiyonlardır, [16].

Tanım B.14 $f_x(x_0, y_0)$ ve $f_y(x_0, y_0)$ kısmi türevleri mevcut ve f fonksiyonu (B.1) bağıntısını sağlıyor ise f fonksiyonu (x_0, y_0) da *türevlenebilirdir (diferensiyellebilirdir)* denir. Eğer f fonksiyonu açık bir B bölgesinin her noktasında türevlenebilir ise B *üzerinde türevlenebilirdir* denir, [16].

Teorem B.6 f fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında türevlenebilir ise (x_0, y_0) da sürekli, [16].

B.2.3 Çok Değişkenli Fonksiyonlarda İntegral

Tanım B.15 B bölgesi xOy düzleminde kapalı ve sınırlı bir bölge olsun.

$$d(B) = \max\{|PQ| : P, Q \in B\}$$

sayısına B *bölgesinin çapı* denir, [16].

Tanım B.16 xOy düzleminde verilen bir B bölgesini $B_1, B_2, \dots, B_n$ gibi alt bölgelere ayırılım.

$$P = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$$

kümesine bölgesinin bir *parçalanması* denir.

$$\|P\| = \max\{d(B_1), d(B_2), \dots, d(B_n)\}$$

sayısına P *parçalanmasının normu* veya *maksimal çapı* denir. Burada $d(B_k), B_k$ bölgesinin çapını göstermektedir, [16].

Tanım B.17 B kapalı ve sınırlı bir bölge ve f bu bölge üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. B bölgesinin bir $P = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ parçalanması verildiğinde, $\Delta A_k, B_k$ bölgesinin alanını, (x_k, y_k) da B_k bölgesinin herhangi bir noktasını göstermek üzere

$$R(f, P) = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

ifadesine f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen *Riemann toplamı* veya *integral toplamı* adı verilir, [16].

Tanım B.18 Eğer

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

limiti varsa, bu limite f fonksiyonunun B üzerindeki *iki katlı integrali* denir,

$$\iint_B f(x, y) dx dy$$

ile gösterilir. $f(x, y)$ ifadesine *integrant*, B bölgesine de *integrasyon bölgesi* denir, [16].

Tanım B.19 G, xyz koordinat sisteminde bir bölge ve f de bu bölge üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. $P = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ bölgesinin bir parçalanması, (x_k, y_k, z_k) da G_k alt bölgesinin herhangi bir alt noktası olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$$

ifadesine *Riemann toplamı* veya *integral toplamı* adı verilir. Burada $\Delta V_k, G_k$ bölgesinin hacmini göstermektedir. $\|P\|$ sayısı $G_1, G_2, \dots, G_n$ alt bölgelerinin çaplarının en büyüğü olsun.

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$$

limiti varsa, bu limite f fonksiyonunun G üzerindeki *üç katlı integrali* denir,

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz$$

ile gösterilir. $f(x, y, z)$ ifadesine *integrant*, G bölgesine de *integrasyon bölgesi* denir, [16].

Tanım B.20 D , üç boyutlu uzayda bir bölge, f de bu bölge üzerinde sürekli fonksiyon ve parametrik gösterimi

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k, \quad a \leq t \leq b$$

olan C eğrisi de D bölgesi üzerinde bulunan bir düzgün eğri olsun. Bu durumda f fonksiyonu C eğrisinin her bir noktasında sürekli olur. $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, $[a, b]$ aralığının bir parçalanması olsun. C eğrisi üzerinde, $t_0, t_1, \dots, t_n$ noktalarına karşılık gelen noktalar $A_0, A_1, \dots, A_n$ ve $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ eğri parçalarının uzunlukları, sırasıyla, $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$ olsun. $\|P\| = \max\{\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n\}$ sayısına P parçalanmasının *normu* veya *maksimum çapı* denir, [16].

Tanım B.21 $M_k(x_k, y_k, z_k), A_{k-1}A_k$ eğri parçasının herhangi bir noktası olmak üzere

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta l_k$$

limiti varsa bu limite f fonksiyonunun C üzerindeki *eğrisel integrali* denir ve

$$\int_C f(x, y, z) dl$$

ile gösterilir, [16].

Eğrisel İntegralin Uygulamaları

Alan Hesabı

B bir basit bölge, C de bunun sınır eğrisi olsun. B bölgesinin alanı A ile gösterilirse

$$A = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx$$

bağıntısı ile elde edilir, [16].

Yay Uzunluğu

C düzgün bir eğri ve f de bu eğri üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Eğrisel integral tanımından

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta l_k = \int_C f(x, y, z) dl$$

olduğundan $f(x, y, z) = 1$ alınırsa sol taraftaki Δl_k ların toplamı, eğrinin l uzunluğuna eşit olacağından

$$l = \int_C dl$$

bulunur, [16].

İş Hesabı

C düzgün bir eğri, F de bu eğri üzerinde tanımlı bir vektör alanı olsun. T , eğrinin $(x(t), y(t), z(t))$ noktasındaki birim teğet vektörü olmak üzere

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_C F(x, y, z) T(x, y, z) dl$$

şeklinde tanımlı integral bir F kuvvetinin etkisi altında kalan parçacığın, C eğrisinin başlangıç noktasından bitim noktasına kadar varıncaya kadar yaptığı iştir, [16].

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Gülsüm Yeliz SAÇLI
Doğum Tarihi ve Yeri : 17.08.1988 / Kadıköy
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : yelizsaclici@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2011
Lise	Fen - Matematik	Maltepe Anadolu Lisesi	2006

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2011 - 2012	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	Asistan Öğrenci
2012 - ...	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi