

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

FRENET EĞRİSİ İLE BAĞLANTILI EĞRİLER VE UYGULAMALARI

NESİBE GÜRHAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. MUSTAFA DÜLDÜL**

İSTANBUL, 2013

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FRENET EĞRİSİ İLE BAĞLANTILI EĞRİLER VE UYGULAMALARI

Nesibe GÜRHAN tarafından hazırlanan tez çalışması 05/08/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU
Bahçeşehir Üniversitesi

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve desteğini gördüğüm; büyük bir özenle çalışmalarımı yönlendiren ve sonuçlandırılması için hiçbir desteğini esirgemeyen çok kıymetli ve saygıdeğer hocam Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Güven, anlayış ve desteklerini her zaman yanımda hissettiğim aileme minnet ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım sırasında bana maddi ve manevi destek olan tüm arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

Ağustos, 2013

Nesibe GÜRHAN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÖZET.....	viii
ABSTRACT	x
BÖLÜM 1.....	1
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Orijinal Katkı.....	2
BÖLÜM 2.....	4
TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1 Afin Uzay ve Öklid Uzay	4
2.2 Tanjant Vektörler ve Tanjant Uzaylar	6
2.3 Vektör Alanları ve Vektör Alanlarının Uzayı.....	6
2.4 Eğriler Teorisi	7
2.5 Bir Eğrinin Küresel Göstergeleri	9
2.6 Yüzeyler Teorisi	11
2.7 Şekil Operatörünün Cebirsel Değişmezleri	13
2.8 $\mathbb{E}^4$ de Temel Kavramlar	15
BÖLÜM 3.....	19
FRENET EĞRİSİ İLE BAĞLANTILI EĞRİLER VE UYGULAMALARI	19
3.1 Asli-doğrultu Eğrileri ve Asli-donor Eğrileri.....	19
3.2 PD-rektifiyan Eğriler ve Bertrand Eğrileri.....	26
BÖLÜM 4.....	30
FRENET EĞRİSİ İLE BAĞLANTILI EĞRİLER- II	30
4.1 Asli-doğrultu Eğrisi ve İnvolütü	30
4.2 Asli-doğrultu Eğrisi ve Teğetler Göstergesi.....	32
4.2.1 Asli-doğrultu Eğrisinin Teğetler Göstergesi	32
4.2.2 Teğetler Göstergesinin Asli-doğrultu Eğrisi	34

4.3	W – doğrultu Eğrileri.....	35
4.3.1	W – rektifiyan Eğriler.....	40
4.3.2	W – doğrultu Eğrisi İçin Örnekler	41
BÖLÜM 5.....		45
YÜZEY EĞRİLERİ İLE BAĞLANTILI EĞRİLER.....		45
5.1	V – doğrultu Eğrisi	45
5.1.1	V – doğrultu Eğrisi İçin Örnekler	51
BÖLÜM 6.....		60
$\mathbb{E}^4$ DE FRENET EĞRİSİ İLE BAĞLANTILI EĞRİLER VE UYGULAMALARI		60
6.1	Asli-doğrultu Eğrileri	60
6.2	B_1 – doğrultu Eğrileri.....	63
6.3	B_2 – doğrultu Eğrileri	65
6.3.1	B_2 – rektifiyan Eğriler	68
BÖLÜM 7.....		71
SONUÇ VE ÖNERİLER		71
KAYNAKLAR.....		72
ÖZGEÇMİŞ.....		74

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar kümesi
$\mathbb{E}^n$	n -boyutlu Öklid uzayı
κ	$\mathbb{E}^3$ de Eğrilik
τ	$\mathbb{E}^3$ de Burulma
κ_n	Normal eğrilik
κ_g	Geodezik eğrilik
τ_g	Geodezik burulma
W	Birim Darboux vektörü
X	Vektör alanı
X_p	Tanjant vektör
k_1	$\mathbb{E}^4$ de 1.eğrilik
k_2	$\mathbb{E}^4$ de 2.eğrilik
k_3	$\mathbb{E}^4$ de 3.eğrilik
$\ \cdot \ $	Norm
$\langle , \rangle$	Öklid iç Çarpımı
γ_T	γ eğrisinin teğetler göstergesi
$X(u, v)$	Yüzeyin parametrik denklemi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2. 1 Teğetler göstergesi	10
Şekil 4. 1 Genel helisin W – doğrultu eğrisi	42
Şekil 4. 2 Slant helisin W – doğrultu eğrisi	44
Şekil 5. 1 Silindir üzerinde helisin V – doğrultu eğrisi	53
Şekil 5. 2 Silindirin dik kesit çemberinin V – doğrultu eğrisi	55
Şekil 5. 3 Koni üzerindeki bir eğrinin V – doğrultu eğrisi	57
Şekil 5. 4 $z = 0$ düzlemindeki parabolün V – doğrultu eğrisi	59

FRENET EĞRİSİ İLE BAĞLANTILI EĞRİLER VE UYGULAMALARI

Nesibe GÜRHAN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Bu tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde literatür özeti ve tezin amacı verilmiştir.

İkinci bölümde eğriler ve yüzeyler ile ilgili bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde bir Frenet eğrisiyle bağlantılı eğrilerin tanımları ve bunların çeşitli karakterizasyonları ile uygulamaları tanıtılmıştır.

Dördüncü, beşinci ve altıncı bölümler tezin orijinal kısımlarıdır.

Dördüncü bölümde asli-doğrultu eğrilerinin involütleri ile teğetler göstergesi araştırılmıştır. Daha sonra, W – doğrultu eğrisi ile W – rektifiyan eğri tanımlanmış ve bu eğrilerle ilgili bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

Beşinci bölümde, yüzey üzerinde bulunan bir eğri için V – doğrultu eğrisi tanımlanmış ve elde edilen bu bağlantılı eğrilerin eğrilikleri arasındaki ilişkiler incelenerek çeşitli örnekler verilmiştir.

Altıncı bölümde ise $\mathbb{E}^4$ de asli doğrultu eğrisi, B_1 – doğrultu eğrisi, B_2 – doğrultu eğrisi ve B_2 – rektifiyan eğri tanımları yapılmış ve bu eğrilerin bazı karakterizasyonları elde edilmiştir.

Yedinci bölüm ise sonuç ve önerilerden oluşmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Frenet eğrisi, asli-doğrultu eğrisi, genel helis, slant helis, rektifiyan eğri, W – doğrultu eğrisi, V – doğrultu eğrisi

ASSOCIATED CURVES OF A FRENET CURVE AND THEIR APPLICATIONS

Nesibe GÜRHAN

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL

This thesis consists of seven sections. In the first section literature summary and the purpose of the thesis are given.

The second section includes some basic concepts of the curves and surfaces.

In the third section, the definitions of associated curves of a Frenet curve and their various characterizations with applications are introduced.

The fourth, fifth and sixth sections are original part of the thesis.

In the fourth section, the involutes and the tangential indicatrix of principal-direction curve are investigated. Later, W – direction curve and W – rectifying curve are defined and some characterizations of these curves are given.

In the fifth section, V – direction curve is defined for a curve that lies on a surface and by examining the relationship between curvatures of these associated curves, some examples are given.

In the sixth section, the definitions of principal-direction curve, B_1 – direction curve, B_2 – direction curve and B_2 – rectifying curve are defined in $\mathbb{E}^4$ and some characterizations of these curves are obtained.

Seventh section consists of conclusions and suggestions.

Keywords: Frenet curve, principal-direction curve, general helix, slant helix, rectifying curve, W – direction curve, V – direction curve.

1.1 Literatür Özeti

Diferensiyel geometride 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de eğriler teorisi en temel çalışma alanlarından biridir. Eğriler teorisinde ise son yıllarda en çok ilgi çeken eğriler helisler, slant helisler ve rektifiyan eğrilerdir [1-5]. Bunun yanında verilen bir eğriyle bağlantılı olan eğriler yaygın bir şekilde çalışılmaktadır. Bu eğriler arasında en çok çalışılanlar Bertrand eğri çiftleri, Mannheim partner eğrileri, küresel göstergeler ve involüt-evolüt eğri çiftleridir. Bu bağlantılı eğriler esas eğriyi karakterize edebilir ve onun davranışını açıklayabilir [6-8].

Gaston Darboux tarafından keşfedilen ve bir eğri boyunca Frenet çatısının ani dönme eksenini belirleyen $\omega = \tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}$ Darboux vektör alanı da diferensiyel geometride uzay eğrileri için önemli bir yere sahiptir.

B. Y. Chen 2003 yılında konum vektörü daima kendi rektifiyan düzleminde kalan eğrileri rektifiyan eğri olarak tanımlamış ve rektifiyan eğrilerin bazı karakterizasyonlarını vermiştir. Bu karakterizasyonlardan rektifiyan eğrilerin konum vektörlerinin daima Darboux vektörü doğrultusunda olduğunu elde etmiş ve bu nedenle rektifiyan eğrileri, kinematik olarak konum vektörleri eğrinin her bir noktasında ani dönme eksenini belirleyen eğriler olarak yorumlamıştır [9, 10].

J. H. Choi ve Y. H. Kim 2012 yılında integral eğrileri yardımıyla, verilen bir Frenet eğrisi için bazı bağlantılı eğriler tanımlamışlardır. Bu bağlantılı eğrileri asli-doğrultu eğrisi, binormal doğrultu eğrisi, asli-donor eğrisi, binormal-donor eğrisi ve PD-rektifiyan eğri olarak sıralayabiliriz. Genel helisleri ve slant helisleri asli-doğrultu eğrileri yardımıyla

karakterize ederek, bir düzlemsel eğriden genel helis ve slant helis elde etmek için kullanışlı bir metot vermişlerdir. Ayrıca, PD-rektifiyan eğri sayesinde Bertrand eğrisi için yeni bir karakterizasyon elde etmişlerdir [11].

K. İlarslan ve E. Nešović 2008 yılında $\mathbb{E}^4$ de rektifiyan eğrileri, konum vektörü daima asli normal vektörünün ortogonal tümleyeninde bulunan eğriler olarak tanımlamış ve eğrilikleri yardımıyla bu tür eğrileri karakterize etmişlerdir [12].

M. Önder vd. 2008 yılında $\mathbb{E}^4$ de ikinci binormal vektörü (B_2) sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğrileri B_2 –slant helis olarak tanıtmış ve bu eğrilerin özelliklerini belirlemişlerdir [13].

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasının amacı, 3-boyutlu Öklid uzayında verilen bir Frenet eğrisiyle bağlantılı eğrilere ek olarak bazı yeni bağlantılı eğriler tanımlamak ve bu yeni tanımlanan bağlantılı eğriler arasındaki ilişkileri araştırmaktır. Ayrıca, yönlendirilebilir bir yüzey üzerinde alınan bir eğriyle aynı yüzey üzerinde kalan bir bağlantılı eğri tanımlayarak, bu eğrilerin yüzeye ait eğrilikleri arasındaki ilişkileri incelemektir. Son olarak, 4-boyutlu Öklid uzayında bir Frenet eğrisinin Frenet vektörlerinin integral eğrileri olarak yeni bağlantılı eğriler oluşturmak ve bunların karakterizasyonlarını belirlemektir.

1.3 Orijinal Katkı

Bu çalışmada, öncelikle 3-boyutlu Öklid uzayında bir Frenet eğrisinin birim Darboux vektör alanı ($\mathbf{W}$) yardımıyla $\mathbf{W}$ – doğrultu eğrisi tanımlanmış ve bu eğrilerin eğrilikleri arasındaki ilişki elde edilmiştir. Daha sonra $\mathbf{W}$ – rektifiyan eğri tanımı yapılarak, sadece bir genel helis için $\mathbf{W}$ – rektifiyan eğrinin bulunabileceği gösterilmiştir. Bunun yanı sıra, 3-boyutlu Öklid uzayında yüzey üzerinde alınan birim hızlı bir γ eğrisinin $\{\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{U}\}$ Darboux çatı alanındaki $\mathbf{V}$ teğet-normal vektör alanının integral eğrisi olan ve γ eğrisiyle aynı yüzey üzerinde kalan $\mathbf{V}$ – doğrultu eğrisi tanımlanarak, bu eğrilerin yüzeye ait eğrilikleri arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Diğer taraftan, 4-boyutlu Öklid uzayında bir Frenet eğrisi için asli-doğrultu eğrisi, B_1 – doğrultu eğrisi, B_2 – doğrultu eğrisi ve B_2 – rektifiyan eğri tanımları yapılmış ve bu eğrilerin bazı karakterizasyonları elde edilmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremlere değinilecektir. Tanım ve teoremler için ağırlıklı olarak [14-18] nolu kaynaklar kullanılacaktır.

2.1 Afin Uzay ve Öklid Uzay

Tanım 2.1 A boş olmayan bir küme ve V , n -boyutlu bir vektör uzayı olsun. Bir

$f : A \times A \rightarrow V$ dönüşümü

A1) $\forall P, Q, R \in A$ için, $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$,

A2) $\forall P \in A$, $\forall \alpha \in V$ için, $f(P, Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ vardır

özelliklerini sağlıyorsa A ya V ile birleşen **afin uzay** denir.

Tanım 2.2 V n -boyutlu bir vektör uzayı ve A , V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay

olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör sistemi V 'nin bir bazı

ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ kümesine A afin uzayının bir **afin çatısı** denir. P_0 noktasına çatının

başlangıç noktası, $P_1, P_2, \dots, P_n$ noktalarına da afin çatının birim noktaları veya uç noktaları denir.

Tanım 2.3 V , n -boyutlu bir reel iç-çarpım uzayı olsun. V ile birleşen A afin uzayına n -boyutlu **Öklid uzayı** denir.

$V = \mathbb{R}^n$ standart reel vektör uzayında, $X = (x_1, \dots, x_n)$ ve $Y = (y_1, \dots, y_n)$ olmak üzere

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \rightarrow \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

standart iç-çarpımı (Öklid iç-çarpımı) tanımlı olduğunda, $V = \mathbb{R}^n$ iç-çarpım uzayı ile birleşen $A = \mathbb{R}^n$ afin uzayına **n-boyutlu standart Öklid uzayı** denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir.

Tanım 2.4 $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{E}^n$ noktaları için $\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \overrightarrow{P_0 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}\}$ vektör sistemi $\mathbb{R}^n$ iç-çarpım uzayının bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ kümesine $\mathbb{E}^n$ de bir **Öklid çatısı** denir. Her Öklid çatısı bir afin çatıdır.

Tanım 2.5 $\mathbb{E}^n$ bir afin uzay olduğundan $P_0 \in \mathbb{E}^n$ için başlangıç noktası P_0 olan bir $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ afin çatısı vardır. $\forall P \in \mathbb{E}^n$ için $\overrightarrow{P_0 P} = \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{P_0 P_i}$, $a_i \in \mathbb{R}$ yazılabilir. O

halde,

$$x_i : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow x_i(P) = a_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

ile tanımlı $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ afin koordinat sistemi bulunabilir. Bu afin koordinat sistemine **Öklid(dik) koordinat sistemi** denir.

Tanım 2.6 $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayı, $U \subset \mathbb{E}^n$ açık alt küme olsun. Eğer $f : U \subset \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu k . mertebeden kısmi türevlere sahip ve bu türevler sürekli ise f fonksiyonuna k . mertebeden **diferensiyellenebilir fonksiyon** adı verilir.

k . sınıftan diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^k(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir ve

$$C^k(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ ve } f \text{ fonksiyonu } k \text{ . mertebeden diferensiyellenebilir}\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.7 U ve V , $\mathbb{E}^n$ de iki açık alt küme olsun. $\varphi : U \rightarrow V$ dönüşümü için

$$\blacksquare \varphi \in C^k(U, V)$$

$$\blacksquare \varphi^{-1} \text{ var}$$

$$\blacksquare \varphi^{-1} \in C^k(V, U)$$

özellikleri sağlanırsa φ ye **diffeomorfizm** denir.

2.2 Tanjant Vektörler ve Tanjant Uzaylar

A , V vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu bir afin uzay olsun. $P \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için $(P, \vec{v}) = \vec{v}_P$ ikilisine A afin uzayında bir **tanjant vektör** denir.

$P \in A$ noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesi $T_A(P)$ ile gösterilir ve

$$T_A(P) = \{ \vec{v}_P = (P, \vec{v}) : P \in A, \vec{v} \in V \}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.8 A , V vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu bir afin uzay olsun. A afin uzayda bir afin çati $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ olmak üzere $\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}\}$ kümesi V nin bir bazıdır.

$\vec{v}_P = \overrightarrow{PQ} \in V$ olduğundan $\vec{v}_P = \overrightarrow{PQ} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i}$, $\lambda_i \in \mathfrak{S}$ yazılabilir. Burada $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

n -lisine $\vec{v}_P \in T_A(P)$ tanjant vektörünün koordinatları veya bileşenleri denir ve

$\vec{v}_P = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)_P$ ile gösterilir.

Teorem 2.1 $T_A(P)$ kümesi reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzaya A afin uzayının P noktasındaki tanjant vektörlerinin uzayı veya kısaca **tanjant uzay** denir.

2.3 Vektör Alanları ve Vektör Alanlarının Uzayı

Tanım 2.9 $\forall P \in \mathbb{E}^n$ noktaları üzerindeki tanjant uzayların birleşimi $\bigcup_{P \in \mathbb{E}^n} T_{\mathbb{E}^n}(P)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \pi : \bigcup_{P \in \mathbb{E}^n} T_{\mathbb{E}^n}(P) &\rightarrow \mathbb{E}^n \\ \vec{v}_P &\rightarrow \pi(\vec{v}_P) = P \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. $\pi \circ X : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ özdeşlik dönüşümü olacak şekilde,

$$\begin{aligned} X : \mathbb{E}^n &\rightarrow \bigcup_{P \in \mathbb{E}^n} T_{\mathbb{E}^n}(P) \\ P &\rightarrow \vec{X}_P \end{aligned}$$

dönüşümüne $\mathbb{E}^n$ de bir **vektör alanı** denir. O halde, $\mathbb{E}^n$ üzerindeki bir X vektör alanı, $\forall P \in \mathbb{E}^n$ noktasına $T_{\mathbb{E}^n}(P)$ tanjant uzayının bir $\vec{X}_P$ tanjant vektörünü karşılık getiren bir fonksiyon olarak düşünülebilir. $\mathbb{E}^n$ de tanımlı bütün vektör alanlarının kümesi $\chi(\mathbb{E}^n)$ ile gösterilir ve

$$\chi(\mathbb{E}^n) = \left\{ X \mid X : \mathbb{E}^n \rightarrow \bigcup_{P \in \mathbb{E}^n} T_{\mathbb{E}^n}(P) \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2 $\chi(\mathbb{E}^n)$ kümesi reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına **vektör alanlarının uzayı** denir.

2.4 Eğriler Teorisi

Tanım 2.10 $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere,

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^n$$

fonksiyonu diferensiyellenebilirse $\gamma(I) \subset \mathbb{E}^n$ alt kümesine $\mathbb{E}^n$ de (I, γ) koordinat komşuluğu ile tanımlanmış bir **diferensiyellenebilir eğri** adı verilir.

Tanım 2.11 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için, $\gamma'(s) \neq \vec{0}$ ise γ eğrisine **regüler eğri** denir.

Tanım 2.12 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için, $\|\gamma'(s)\| = 1$ ise γ eğrisine **birim hızlı eğri**, s parametresine de **yay uzunluğu parametresi** denir.

Tanım 2.13 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisi için

$$T(s) = \gamma'(s)$$

ile tanımlanan T vektör alanına γ eğrisinin **birim teğet vektör alanı** denir.

Tanım 2.14 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisi için, $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ ile tanımlanan

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna, γ eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. Belli bir $s_0 \in I$ için $\kappa(s_0) \in \mathbb{R}$ sayısına eğrinin $\gamma(s_0)$ noktasındaki **eğriliği** denir.

Tanım 2.15 $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$$

ile tanımlı N vektör alanına γ eğrisinin **asli normal vektör alanı** denir.

Tanım 2.16 $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

ile tanımlı B vektör alanına γ eğrisinin **binormal vektör alanı** denir.

Tanım 2.17 $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için $\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$ ile tanımlı

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna γ eğrisinin **burulma fonksiyonu** denir. Belli bir $s_0 \in I$ için $\tau(s_0) \in \mathbb{R}$ sayısına eğrinin $\gamma(s_0)$ noktasındaki **burulması** denir.

Tanım 2.18 $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için T, N, B birim vektör alanları her noktada birbirine ortogonaldır. $\{T, N, B\}$ üçlüsüne γ eğrisi üzerinde **Frenet çatı alanı** denir.

Tanım 2.19 $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ iki eğri olsun. $\forall t \in I$ için $\beta(t) = F(\alpha(t))$ olacak şekilde $\mathbb{E}^3$ de bir F izometrisi varsa bu iki eğriye **kongruenttir (eşdeğerdir)** denir.

Tanım 2.20 Eğriliği $\kappa > 0$ ve burulması τ olan $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisi için

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

eşitlikleri sağlanır. Bu formüllere **Frenet formülleri** denir.

Tanım 2.21 Karşılıklı noktalarda aynı asli normale sahip olan eğri çiftine **Bertrand eğri çifti** denir.

Teorem 2.3 γ bir Bertrand eğrisidir $\Leftrightarrow a\kappa + b\tau = 1$, $a, b \neq 0$ (sabit) denklemi sağlanır.

Tanım 2.22 γ ve γ^* , $\mathbb{E}^n$ de sırasıyla, (I, γ) ve (I, γ^*) koordinat komşulukları ile verilen iki eğri olsun. $\gamma(s)$ ve $\gamma^*(s)$ noktalarında γ ve γ^* eğrilerinin Frenet r-ayaklıları sırasıyla, $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ ve $\{V_1^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$ olmak üzere,

$$\langle V_1(s), V_1^*(s) \rangle = 0$$

oluyorsa γ^* eğrisine γ eğrisinin **involütü**, γ eğrisine de γ^* eğrisinin **evolütü** denir.

Teorem 2.4 γ ve γ^* iki eğri ve γ^* , γ eğrisinin involütü ve γ , γ^* eğrisinin evolütü ise; γ eğrisinin eğrilik fonksiyonları k_i , γ^* eğrisinin eğrilik fonksiyonları k_i^* arasında

$$(k_i^*)^2(s) = \frac{k_1^2(s) + k_2^2(s)}{k_1^2(s)(c-s)^2}$$

ilişkisi vardır.

Tanım 2.23 Teğet vektör alanı sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğriye **genel helis** denir. Eğrinin birim teğet vektör alanı T ve sabit bir doğrultu U olmak üzere, $\langle T, U \rangle = \cos \theta$, ($\theta = \text{sabit}$) dir.

Teorem 2.5 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi bir genel helistir $\Leftrightarrow \frac{\tau}{\kappa}$ değeri sabittir.

Tanım 2.24 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için $\kappa(s) > 0$ ve $\tau(s) \neq 0$ ifadelerinin her ikisi de sabitse γ eğrisine **daireesel helis** denir.

Tanım 2.25 Normal vektör alanı sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğriye **slant helis** denir. Eğrinin normal vektör alanı N ve sabit bir doğrultu U olmak üzere, $\langle N, U \rangle = \cos \theta$, ($\theta = \text{sabit}$) dir.

Tanım 2.26 Bir $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin konum vektörü daima kendi rektifiyan düzleminde kalıyorsa bu eğriye **rektifiyan eğri** denir. γ bir rektifiyan eğri ise konum vektörü

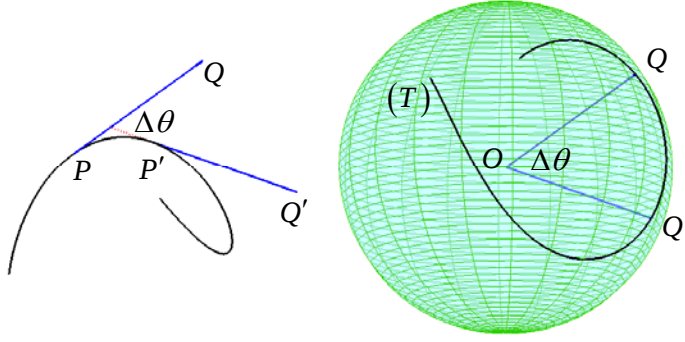
$$\gamma(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s)$$

denklemini sağlar (λ ve μ herhangi diferensiyellenebilir fonksiyonlardır) [9].

2.5 Bir Eğrinin Küresel Göstergeleri

Tanım 2.27 $\mathbb{E}^n$ de bir α eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. α 'nın birim teğet vektör alanı T olmak üzere $\overrightarrow{PQ} = T$ alındığında, P noktası α eğrisini çizerken, Q noktasının birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye α 'nın 1. küresel göstergesi veya **teğetler göstergesi** denir (Şekil 2.1).

α eğrisinin teğetler göstergesini (T) ile gösterirsek denklemi $\alpha_T = T$ olur. Teğetler göstergesinin yay parametresine s_T dersek $s_T \neq s$ olup, yay-elementi ise $ds_T = \|T'\| ds$ dir.



Şekil 2. 1 Teğetler göstergesi

Teorem 2.6 Bir α eğrisinin eğriliği, teğetler göstergesinin yay elementinin esas eğrinin yay elementine oranıdır, yani $\frac{d\theta}{ds} = \kappa$ dir.

Tanım 2.28 $\mathbb{E}^3$ de bir α eğrisinin asli normal vektör alanı N olsun. α eğrisi çizilirken N vektörünün uç noktalarının birim küre yüzeyi üzerinde meydana getirdiği eğriye α eğrisinin 2. küresel göstergesi veya **asli normaller göstergesi** denir.

α eğrisinin normaller göstergesini (N) ile gösterirsek denklemi $\alpha_N = N$ olur. Normaller göstergesinin yay parametresine s_N dersek $s_N \neq s$ olup, yay-elementi ise $ds_N = \|N'\| ds$ dir.

Tanım 2.29 $\mathbb{E}^3$ de bir α eğrisinin binormal vektör alanı B olsun. α eğrisi çizilirken B vektörünün uç noktalarının birim küre yüzeyi üzerinde meydana getirdiği eğriye α eğrisinin 3. küresel göstergesi veya **binormaller göstergesi** denir.

α eğrisinin binormaller göstergesini (B) ile gösterirsek denklemi $\alpha_B = B$ olur. Binormaller göstergesinin yay parametresine s_B dersek $s_B \neq s$ olup, yay-elementi ise $ds_B = \|B'\| ds$ dir.

Tanım 2.30 $\mathbb{E}^n$ de bir parametrik eğri

$$\begin{aligned} \gamma : I &\rightarrow \mathbb{E}^n \\ s &\rightarrow \gamma(s) \end{aligned}$$

olsun. $X \in \chi(\mathbb{E}^n)$ olmak üzere $\forall s \in I$ için $\frac{d\gamma}{ds} = X(\gamma(s))$ oluyorsa, γ eğrisine X vektör alanının bir **integral eğrisi** denir.

Tanım 2.31 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olsun.

$\omega = \tau T + \kappa B$ vektör alanına γ eğrisinin **Darboux vektör alanı** denir.

$$W(s) = \frac{\omega(s)}{\|\omega(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}} (\tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s))$$

vektörüne ise γ eğrisinin **Darboux göstergesi** denir. Bu vektör $\{T, N, B\}$ üç ayaklısının her s anında bir ani helis hareketi yaptığı eksendir.

2.6 Yüzeyler Teorisi

Tanım 2.32 Bir $M \subset \mathbb{E}^3$ kümesi verilsin. $\forall P \in M$ noktası için, görüntüsü P noktasının M deki komşuluğunu kapsayan ve $D \subset \mathbb{E}^2$ açık kümesi üzerinde tanımlı bir $X : D \rightarrow M$ dönüşümü

- i) birebir,
- ii) regüler,
- iii) $X^{-1} : X(D) \rightarrow D$ fonksiyonu sürekli

olacak şekilde bulunabiliyorsa, M kümesine $\mathbb{E}^3$ de bir **yüzey** denir.

Teorem 2.7 $\mathbb{E}^3$ de bir $M : f(x, y, z) = c$ alt kümesi bir yüzeydir $\Leftrightarrow \forall P \in M$ için $\nabla f(P) \neq \vec{0}$ dır.

Tanım 2.33 M , $\mathbb{E}^3$ de bir yüzey olsun. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\gamma : I \rightarrow M$ diferensiyellenebilir fonksiyonuna M **yüzeyi üzerinde bir eğri** denir.

Tanım 2.34 $M \subset \mathbb{E}^3$ bir yüzey olsun. $\vec{v}_p \in T_{\mathbb{E}^3}(P)$ tanjant vektörü P noktasından geçen ve yüzey üzerinde kalan bir eğrinin hız vektörü oluyorsa, $\vec{v}_p$ tanjant vektörüne M yüzeyinin P noktasında bir **teğet vektörü** denir. Yüzeyin $P \in M$ noktasındaki bütün teğet vektörlerinin kümesi M yüzeyinin P noktasındaki **teğet düzlemi** olarak adlandırılır ve $T_M(P)$ ile gösterilir.

Tanım 2.35 $M \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi boyunca bir V vektör alanı verilsin. $\forall P \in M$ noktasına bir $V(P) = \vec{v}_p$ teğet vektörü karşılık getiren V vektör alanına M yüzeyi boyunca bir **teğet vektör alanı** denir.

Tanım 2.36 $M \subset \mathbb{E}^3$ bir yüzey ve $P \in M$ bir nokta olsun. P noktasındaki $T_M(P)$ teğet düzlemine dik olan bir U_p tanjant vektörüne M yüzeyinin P noktasındaki **normal vektörü** denir.

Tanım 2.37 $M \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi boyunca bir U vektör alanı verilsin. Eğer $\forall P \in M$ için elde edilen $U(P) = \vec{u}_p$ tanjant vektörü M yüzeyinin bir normal vektörü oluyorsa, U vektör alanına M yüzeyi boyunca bir **normal vektör alanı** denir.

Tanım 2.38 M yüzeyi üzerinde bir birim normal vektör alanına M üzerinde bir **yönlendirme**, üzerinde bir yönlendirme seçilmiş olan yüzeye de **yönlendirilebilir yüzey** denir.

Bütün kuadrik yüzeyler birer yönlendirilebilir yüzeydir. Yönlendirilemeyen yüzeyler için örnekler Möbius şeridi ve Klein şişesidir.

Tanım 2.39 $M, \mathbb{E}^3$ de bir yüzey ve M 'nin birim normal vektör alanı N olsun. $\alpha: I \rightarrow M$ eğrisi $\forall t \in I$ için $\alpha''(t) = \lambda(t)N_\alpha$ diferansiyel denklemini sağlıyorsa α 'ya M üzerinde bir **geodezik eğri** denir.

Tanım 2.40 $M, \mathbb{E}^3$ de bir yüzey ve M 'nin birim normal vektör alanı N olsun. $\mathbb{E}^3$ de Riemann konneksiyonu D olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = -D_X N$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne M 'nin **şekil operatörü** veya **Weingarten dönüşümü** denir.

Tanım 2.41 $M \subset \mathbb{E}^3$ regüler yüzeyi verilsin.

$$k_n(\vec{u}_p) = \langle S(\vec{u}_p), \vec{u}_p \rangle$$

ile tanımlanan $k_n(\vec{u}_p) \in \mathbb{R}$ sayısına M yüzeyinin $\vec{u}_p$ birim teğet vektörü doğrultusundaki **normal eğriliği** denir.

Daha genel olarak, herhangi bir $\vec{v}_p \in T_M(P)$ teğet vektörü için

$$k_n(\vec{v}_p) = \frac{\langle S(\vec{v}_p), \vec{v}_p \rangle}{\|\vec{v}_p\|^2}$$

ile tanımlanır.

2.7 Şekil Operatörünün Cebirsel Değişmezleri

Tanım 2.42 $M, \mathbb{E}^3$ de bir yüzey ve M 'nin P noktasındaki şekil operatörü $S_p : T_M(P) \rightarrow T_M(P)$ olsun. $S(X_p) = \lambda X_p$ eşitliğini sağlayan λ sayılarına M yüzeyinin P noktasındaki **asli eğrilikleri**, X_p vektörüne de λ 'ya karşılık gelen **asli doğrultu** denir.

Teorem 2.8 M yüzeyinin asli eğrilikleri ve asli doğrultuları $T_M(P)$ teğet uzayının bazından bağımsızdır.

Tanım 2.43 $M, \mathbb{E}^3$ de bir yüzey olsun.

$$K : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow K(P) = \det S_p$$

fonksiyonuna M 'nin **Gauss eğrilik fonksiyonu**, $K(P) \in \mathbb{R}$ sayısına da M 'nin P noktasındaki **Gauss eğriliği** denir.

Teorem 2.9 M yüzeyinin Gauss eğriliği baz seçiminden bağımsızdır.

Tanım 2.44 $M, \mathbb{E}^3$ de bir yüzey olsun.

$$H : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow H(P) = \text{iz} S_p$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna M 'nin ortalama eğrilik fonksiyonu, $H(P)$ sayısına da M 'nin P noktasındaki **ortalama eğriliği** denir.

Teorem 2.10 $\mathbb{E}^3$ deki bir M yüzeyinin H ortalama eğriliği baz seçiminden bağımsızdır.

Tanım 2.45 $\mathbb{E}^3$ de H ortalama eğriliği sıfır olan regüler yüzeylere **minimal yüzey** denir.

Tanım 2.46 $\mathbb{E}^3$ de K Gauss eğriliği sıfır olan regüler yüzeylere **flat yüzey** denir.

Tanım 2.47 M , $\mathbb{E}^3$ de bir yüzey ve M üzerinde bir eğri α olsun. α 'nın teğet vektör alanı T ve M 'nin şekil operatörü S olsun. Eğer T vektör alanı α eğrisi boyunca S 'nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir **eğrilik çizgisi** denir.

Tanım 2.48 M , $\mathbb{E}^3$ de bir yüzey olsun. $P \in M$ noktasındaki M 'nin şekil operatörü S_P olmak üzere,

- i) $S_P = \lambda I_{n-1}$ ise $P \in M$ noktasına M 'nin **umbilik noktası** denir,
- ii) $S_P = 0$ ise $P \in M$ noktasına M üzerinde **düzlemsel(flat) nokta** denir.

Tanım 2.49 M , $\mathbb{E}^3$ de bir yüzey ve $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü S_P olsun.

$\forall X_P, Y_P \in T_M(P)$ için $\langle S(X_P), Y_P \rangle = 0$ ise bu iki tanjant vektörüne **eşleniktir** denir. Bir $X_P \neq \vec{0}$ tanjant vektörü için, $\langle S(X_P), X_P \rangle = 0$ ise X_P doğrultusuna, M 'nin P noktasındaki bir **asimptotik doğrultusu** ve X_P 'yi $\forall P \in \alpha$ noktasında teğet vektörü kabul eden α eğrisine M üzerinde bir **asimptotik çizgi** denir.

Tanım 2.50 M , $\mathbb{E}^3$ de bir yüzey ve M üzerinde birim hızlı bir eğri γ olsun. γ eğrisinin birim teğet vektör alanı T , yüzeyin γ eğrisine kısıtlanmış birim normal vektör alanı U ve $V = U \times T$ olmak üzere γ eğrisi boyunca tanımlanan $\{T, V, U\}$ ortonormal sistemine **Darboux çatı alanı** denir.

γ eğrisinin T birim teğet vektör alanı Frenet ve Darboux çatılarının her ikisinde de ortak olduğundan, U, V, N, B vektör alanları eğrinin her bir noktasında aynı düzlemde bulunurlar. Bu yüzden bu iki çatı arasında, V ile N arasındaki açı θ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} T \\ V \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ilişkisi vardır. Bu ise Frenet çatısının T etrafında θ açılık dönme yapması sonucunda Darboux çatısı elde edildiği anlamına gelir.

Darboux – çatısına göre türev denklemleri ise

$$\begin{bmatrix} T' \\ V' \\ U' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ V \\ U \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada k_n , yüzeyin T doğrultusundaki normal eğriliği; k_g , eğrinin geodezik eğriliği ve τ_g de eğrinin geodezik burulması olarak adlandırılır. Buna göre;

$$\text{yüzeyin normal eğriliği } k_n = \langle S(T), T \rangle = -\langle U', T \rangle = \langle U, T' \rangle = \kappa \langle U, N \rangle = \kappa \sin \theta,$$

$$\text{eğrinin geodezik eğriliği } k_g = \langle T', V \rangle = \langle \kappa N, V \rangle = \kappa \langle V, N \rangle = \kappa \cos \theta,$$

$$\text{eğrinin geodezik burulması } \tau_g = \langle S(T), V \rangle = -\langle U', V \rangle = \tau + \theta'$$

şeklinde dir.

Uyarı 2.1 $k_g = 0 \Leftrightarrow \alpha$ eğrisi yüzey üzerinde geodezik eğridir.

$$k_n = 0 \Leftrightarrow \alpha \text{ eğrisi yüzey üzerinde asimptotik eğridir.}$$

$$\tau_g = 0 \Leftrightarrow \alpha \text{ eğrisi yüzey üzerinde asli eğridir.}$$

2.8 $\mathbb{E}^4$ de Temel Kavramlar

Tanım 2.51 $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayının standart bazı $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olsun. $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 x_i e_i$, $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^4 y_i e_i$

ve $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^4 z_i e_i$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} \times \mathbf{z} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

ile tanımlanır [19, 20].

Vektörel çarpımın bazı özellikleri:

- $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ vektörleri lineer bağımsız ise $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \times \mathbf{z}$ vektörü $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ vektörlerine dik bir vektör belirtir.
- $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \times \mathbf{z} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x} \times \mathbf{z}$
- $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ vektörleri lineer bağımlı ise vektörel çarpımın sonucu sıfır vektörüdür.
- $\lambda(\mathbf{x} \times \mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\lambda\mathbf{x}) \times \mathbf{y} \times \mathbf{z} = \mathbf{x} \times (\lambda\mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} \times (\lambda\mathbf{z})$

Tanım 2.52 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda

$$T(s) = \gamma'(s)$$

ile tanımlanan T vektör alanına eğrinin **teğet vektör alanı** denir.

Tanım 2.53 $\mathbb{E}^4$ de birim hızlı $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi için, $\gamma''(s) \neq 0$ olmak üzere

$$N(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$$

ile tanımlı N vektör alanına γ eğrisinin **asli normal vektör alanı** denir.

Tanım 2.54 $\mathbb{E}^4$ de birim hızlı $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi için

$$k_1(s) = \sqrt{\langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle}$$

ile tanımlı $k_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna γ eğrisinin **birinci eğrilik fonksiyonu** denir. Belli bir

$s_0 \in I$ için $k_1(s_0) \in \mathbb{R}$ sayısına da eğrisinin $\gamma(s_0)$ noktasındaki **birinci eğriliği** denir.

Tanım 2.55 $\mathbb{E}^4$ de birim hızlı $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi için

$$B_2(s) = \frac{\gamma'(s) \times \gamma''(s) \times \gamma'''(s)}{\|\gamma'(s) \times \gamma''(s) \times \gamma'''(s)\|}$$

ile tanımlı B_2 vektör alanına γ eğrisinin **ikinci binormal vektör alanı** denir [21].

Tanım 2.56 $\mathbb{E}^4$ de birim hızlı $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi için

$$B_1(s) = B_2(s) \times T(s) \times N(s)$$

ile tanımlı B_1 vektör alanına γ eğrisinin **birinci binormal vektör alanı** denir [21].

Tanım 2.57 $\mathbb{E}^4$ de birim hızlı $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi için

$$k_2(s) = \frac{\langle B_1(s), \gamma'''(s) \rangle}{k_1(s)}$$

ile tanımlanan $k_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna γ eğrisinin **ikinci eğrilik fonksiyonu** denir. Belli bir $s_0 \in I$ için $k_2(s_0) \in \mathbb{R}$ sayısına da γ eğrisinin $\gamma(s_0)$ noktasındaki **ikinci eğriliği** denir [21].

Tanım 2.58 $\mathbb{E}^4$ de birim hızlı $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi için

$$k_3(s) = \frac{\langle B_2(s), \gamma^{(4)}(s) \rangle}{k_1(s)k_2(s)}$$

ile tanımlanan $k_3 : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna γ eğrisinin **üçüncü eğrilik fonksiyonu** denir. Belli bir $s_0 \in I$ için $k_3(s_0) \in \mathbb{R}$ sayısına da γ eğrisinin $\gamma(s_0)$ noktasındaki **üçüncü eğriliği** denir [21].

Uyarı 2.2 $\mathbb{E}^4$ de bir eğri için

k_1 birinci eğriliği eğrinin teğet doğrusundan,

k_2 ikinci eğriliği eğrinin düzlemsel eğriden,

k_3 üçüncü eğriliği de eğrinin üç boyutlu eğriden

ayırılma miktarıdır. Dolayısıyla, $\mathbb{E}^4$ de bir γ eğrisi için

$k_1 = 0 \Leftrightarrow \gamma$ bir doğrudur,

$k_2 = 0 \Leftrightarrow \gamma$ bir düzlemsel eğridir,

$k_3 = 0 \Leftrightarrow \gamma, \mathbb{E}^4$ uzayının 3-boyutlu alt uzayında yatan bir eğridir.

Tanım 2.59 $\mathbb{E}^4$ de birim hızlı $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi için birim vektör alanları T, N, B_1, B_2 her noktada birbirine ortogonaldır. Bu durumda $\{T, N, B_1, B_2\}$ dördlüsü γ eğrisi üzerinde bir çatı alanı oluşturur. Bu çatı alanına **Frenet çatı alanı** denir.

Uyarı 2.3 $\mathbb{E}^4$ de birim hızlı $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi için Frenet formülleri

$$T' = k_1 N,$$

$$N' = -k_1 T + k_2 B_1,$$

$$B_1' = -k_2 N + k_3 B_2,$$

$$B_2' = -k_3 B_1$$

şeklindedir [22].

Tanım 2.60 $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında konum vektörü daima asli normal vektör alanı olan N nin ortogonal tümleyeninde bulunan eğriye **rektifiyan eğri** denir. O halde, bir $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi rektifiyan eğri ise konum vektörü daima

$$\gamma(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B_1(s) + \nu(s)B_2(s)$$

eşitliğini sağlar (λ , μ ve ν diferensiyellenebilir fonksiyonlardır) [12].

Tanım 2.61 $\mathbb{E}^4$ de sıfırdan farklı k_1 , k_2 , k_3 eğriliklerine sahip birim hızlı bir $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisinin birim teğet vektör alanı T ve herhangi bir sabit birim doğrultu U olsun. Eğer T , sabit U doğrultusuyla sabit açı yapıyorsa, yani $\langle T, U \rangle = \cos \theta$, ($\theta = \text{sabit}$) oluyorsa γ eğrisine bir **genel helis** denir. $\mathbb{E}^4$ de bir genel helis

$$\frac{k_1^2}{k_2^2} + \left[\frac{1}{k_3} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \right]^2 = c(\text{sabit})$$

karakterizasyonuna sahiptir [23].

Tanım 2.62 $\mathbb{E}^4$ de sıfırdan farklı k_1 , k_2 , k_3 eğriliklerine sahip birim hızlı bir $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ olsun. Herhangi bir birim uzunluklu sabit doğrultu U olmak üzere eğrinin B_2 ikinci binormal vektör alanı sabit U doğrultusuyla sabit açı yapıyorsa, yani $\langle B_2, U \rangle = \cos \theta$, ($\theta = \text{sabit}$) oluyorsa γ eğrisine bir B_2 – **slant helis** denir. Bir B_2 – slant helis

$$\frac{k_3^2}{k_2^2} + \left[\frac{1}{k_1^2} \frac{d}{ds} \left(\frac{k_3}{k_2} \right) \right]^2 = c(\text{sabit})$$

karakterizasyonuna sahiptir [13].

FRENET EĞRİSİ İLE BAĞLANTILI EĞRİLER VE UYGULAMALARI

3.1 Asli-doğrultu Eğrileri ve Asli-donor Eğrileri

Tanım 3.1 Birim hızlı bir γ eğrisi için $\gamma'' \neq 0$ oluyorsa, bu eğriye **Frenet eğrisi** denir.

$\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ bir Frenet eğrisi ve γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olsun. γ Frenet eğrisi için bir V vektör alanı

$$V(s) = u(s)T(s) + v(s)N(s) + w(s)B(s), \quad u^2(s) + v^2(s) + w^2(s) = 1, \quad (3.1)$$

şeklinde verilsin. Böylece, I aralığında tanımlı V vektör alanının bir integral eğrisi olan $\bar{\gamma}(s)$ birim hızlı bir eğridir.

Uyarı 3.1 $V(s)$ vektör alanının integral eğrisi olan $\bar{\gamma}$ eğrisinin yay uzunluğu parametresi $\bar{s} = s + c$ (c sabit) şeklindedir. Böylece, genelliği bozmadan $\bar{s} = s$ olarak alınabilir. $\bar{\gamma}$ integral eğrisi $\mathbb{E}^3$ de ötelemeye bağlı olarak tek türdür, yani $\bar{\gamma}$ bir başlangıç noktası yardımıyla belirlenir.

Tanım 3.2 $N(s)$ asli normal vektör alanının integral eğrisine γ eğrisinin **asli- doğrultu eğrisi**, $B(s)$ binormal vektör alanının integral eğrisine **binormal-doğrultu eğrisi** denir.

$$\gamma(s) \text{ Frenet eğrisinin asli-doğrultu eğrisi } \bar{\gamma}(s) \text{ ise } N(\bar{\gamma}(s)) = \bar{\gamma}'(s) \Big|_{\bar{\gamma}(s)},$$

$$\gamma(s) \text{ Frenet eğrisinin binormal-doğrultu eğrisi } \hat{\gamma}(s) \text{ ise } B(\hat{\gamma}(s)) = \hat{\gamma}'(s) \Big|_{\hat{\gamma}(s)}.$$

Uyarı 3.2 Bir asli-doğrultu eğrisi $u(s) = w(s) = 0$, $v(s) = 1$ olan $V(s)$ vektör alanının bir integral eğrisidir. Bir binormal-doğrultu eğrisi $u(s) = v(s) = 0$, $w(s) = 1$ olan $V(s)$ vektör alanının bir integral eğrisidir.

$\mathbb{E}^3$ de verilen bir Frenet eğrisinin asli-doğrultu eğrisini bulmak için (3.1) den elde edilen $V(\bar{\gamma}(s)) = \bar{\gamma}'(s) \Big|_{\bar{\gamma}(s)}$ diferansiyel denkleminin çözülmesi gerekir. Eğer $\gamma(s)$ sabit eğrilikli ya da sabit burulmalı ise buna gerek yoktur.

Uyarı 3.3 γ , $\mathbb{E}^3$ de $\kappa_0 \neq 0$ sabit eğrilikli bir Frenet eğrisi ve γ eğrisinin asli doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ ise $N(\bar{\gamma}(s)) = \bar{\gamma}'(s) \Big|_{\bar{\gamma}(s)}$ ve $N = \frac{T'}{\kappa_0} = \frac{1}{\kappa_0} \gamma''(s)$ olacağından $\bar{\gamma}'(s) = \frac{1}{\kappa_0} \gamma''(s)$ veya $\bar{\gamma}(s) = \frac{1}{\kappa_0} \gamma'(s) + \bar{c}$ bulunur.

γ , $\mathbb{E}^3$ de $\tau_0 \neq 0$ sabit burulmalı bir Frenet eğrisi ve γ eğrisinin asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ ise $N(\bar{\gamma}(s)) = \bar{\gamma}'(s) \Big|_{\bar{\gamma}(s)}$ ve $N = -\frac{1}{\tau_0} B'$ olacağından $\bar{\gamma}'(s) = -\frac{1}{\tau_0} B'(s)$ veya $\bar{\gamma}(s) = -\frac{1}{\tau_0} B(s) + \bar{c} = -\frac{1}{\tau_0 \kappa(s)} \gamma'(s) \times \gamma''(s) + \bar{c}$ bulunur.

Teorem 3.1 γ bir Frenet eğrisi ve $\bar{\gamma}$ de $V(s)$ vektör alanının bir integral eğrisi olsun. $\bar{\gamma}$ eğrisinin asli-doğrultu eğrisi γ dır ancak ve ancak $u(s) = 0$, $v(s) = -\cos(\int \tau ds) \neq 0$, $w(s) = \sin(\int \tau ds)$ olmasıdır [11].

İspat: $u^2(s) + v^2(s) + w^2(s) = 1 \Rightarrow uu' + vv' + ww' = 0$.

$$V(s) = u(s)T(s) + v(s)N(s) + w(s)B(s) \Rightarrow V'(s) = u'T + uT' + v'N + vN' + w'B + wB'$$

$$\Rightarrow V'(s) = (u' - v\kappa)T + (u\kappa + v' - \tau w)N + (w' + \tau v)B.$$

$\bar{\gamma}$, $V(s)$ in integral eğrisi olduğundan $V(\bar{\gamma}(s)) = \bar{\gamma}'(s)$ yazılabilir. Buradan;
 $V'(s) = \bar{\gamma}''(s) = \bar{T}'(s) = \bar{\kappa}(s)\bar{N}(s)$ olur.

$(\Rightarrow) \bar{\gamma}$ eğrisinin asli-doğrultu eğrisi γ ise; $\bar{N}(\gamma(s)) = \gamma'(s) = T(s)$ olacağından
 $V'(s) = \bar{\kappa}(s)\bar{N}(s) = \bar{\kappa}(s)T(s) = (u' - v\kappa)T(s) + (u\kappa + v' - \tau w)N(s) + (w' + \tau v)B(s)$ dir.

Bu son eşitlikten

$$\begin{cases} u' - v\kappa \neq 0 \\ u\kappa + v' - \tau w = 0 \\ v\tau + w' = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

elde edilir. $v\tau + w' = 0$ denklemini w ile çarpar ve $uu' + vv' + ww' = 0$ eşitliğinde yerine yazarsak $uu' + vv' = \tau wv$ bulunur. $u\kappa + v' - \tau w = 0$ denklemini v ile çarpar ve $uu' + vv' = \tau wv$ denkleminde yerine koyarsak $\kappa uv - uu' = u \underbrace{(\kappa v - u')}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow u = 0$ olur.

Böylece, (3.2) den $\begin{cases} v' - \tau w = 0 \\ v\tau + w' = 0 \end{cases}$ elde edilir. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümü

$u(s) = 0$, $v(s) = -\cos(\int \tau ds) \neq 0$, $w(s) = \sin(\int \tau ds)$ şeklindedir.

($\Leftarrow$) $u(s) = 0$, $v(s) = -\cos(\int \tau ds) \neq 0$, $w(s) = \sin(\int \tau ds)$ olsun. Bu ifadeler

$$V'(s) = (u' - v\kappa)T + (u\kappa + v' - \tau w)N + (w' + \tau v)B$$

eşitliğinde yerine yazılırsa $V'(s) = \underbrace{\cos(\int \tau ds)\kappa(s)}_{\lambda(s)}T(s) = \lambda(s)T(s)$ bulunur.

$\bar{\gamma}(s)$, $V(s)$ in integral eğrisi olduğundan $V(\bar{\gamma}(s)) = \bar{\gamma}'(s)$ yazılabilir. Buradan

$$V'(s) = \bar{\gamma}''(s) \Rightarrow V'(s) = \bar{T}'(s) = \bar{\kappa}(s)\bar{N}(s) \text{ olup, } \bar{\kappa}(s)\bar{N}(s) = \lambda(s)T(s) \text{ elde edilir.}$$

Böylece, $\bar{N}(s) = T(s)$, yani $\bar{\gamma}(s)$ nin asli-doğrultu eğrisi $\gamma(s)$ dir.

Tanım 3.3 $-\cos(\int \tau ds)N(s) + \sin(\int \tau ds)B(s)$ vektör alanının integral eğrisine γ eğrisinin **asli-donor eğrisi** denir.

Asli-donor eğrisi kavramı, basit eğrilerden karmaşık eğriler oluşturmak için kullanışlıdır.

Teorem 3.2 γ , $\mathbb{E}^3$ de κ ve τ burulmasına sahip bir Frenet eğrisi ve γ eğrisinin asli doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olsun. $\bar{\gamma}$ nin eğriliği ve burulması aşağıdaki gibidir [11]:

$$\bar{\kappa} = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}, \quad \bar{\tau} = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

İspat : Uyarı 3.1 gereğince $\bar{\gamma}$ ve γ için s parametresini aynı yay uzunluğu parametresi olarak kullanabiliriz. γ eğrisinin asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olsun. Öyleyse;

$$N(\bar{\gamma}(s)) = \bar{\gamma}'(s) = \bar{T}(s) \Rightarrow \bar{T}' = N' = -\kappa T + \tau B \text{ olacağından}$$

$$\bar{\kappa} = \left\| \bar{T}' \right\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

bulunur. Buradan,

$$\bar{N} = \frac{\bar{T}'}{\bar{\kappa}} = \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B, \quad \bar{B} = \bar{T} \times \bar{N} = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T$$

olur. $\bar{B}$ vektör alanının türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{B}' = \left(\frac{\kappa\tau' - \tau\kappa'}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \right) (\kappa T - \tau B)$$

elde edilir. O halde

$$\bar{\tau} = -\left\langle \bar{B}', \bar{N} \right\rangle = \frac{\tau'\kappa - \tau\kappa'}{\kappa^2 + \tau^2} = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

elde edilir.

Sonuç 3.1 γ , $\mathbb{E}^3$ de eğriliği κ ve burulması τ olan bir Frenet eğrisi ve $\bar{\gamma}$ de γ eğrisinin asli-doğrultu eğrisi olsun. Böylece;

$$\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

sağlanır. Bu sonuç; genel helis ve slant helisler çalışılırken yaygın olarak kullanılır.

Teorem 3.3 γ , eğriliği $\bar{\kappa}$ ve burulması $\bar{\tau}$ olan bir $\bar{\gamma}$ eğrisinin asli-donor eğrisi ise, γ eğrisinin eğriliği ve burulması

$$\kappa(s) = \bar{\kappa}(s) \left| \cos \left(\int \bar{\tau}(s) ds \right) \right|, \quad \tau(s) = \bar{\kappa}(s) \sin \left(\int \bar{\tau}(s) ds \right)$$

ile verilir [11].

Tanım 3.4 γ bir Frenet eğrisi, γ nın asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ ve $\bar{\gamma}$ nın asli-doğrultu eğrisi $\bar{\bar{\gamma}}$ olsun. Bu durumda $\bar{\bar{\gamma}}$ eğrisine γ nın **ikinci asli-doğrultu eğrisi** denir.

Teorem 3.4 Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir [11]:

- a) γ Frenet eğrisi $\mathbb{E}^3$ de bir genel helistir.
- b) γ bir düzlemsel eğrinin asli-donor eğrisidir.
- c) γ nın asli-doğrultu eğrisi bir düzlemsel eğridir.

İspat :

$(a \Rightarrow c)$ γ Frenet eğrisi $\mathbb{E}^3$ de bir genel helis olsun. Bu durumda $\frac{\tau}{\kappa}$ sabittir. γ

eğrisinin asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ ise $\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = 0 \Rightarrow \bar{\tau} = 0$ olup, $\bar{\gamma}$ bir düzlemsel eğridir.

$(c \Rightarrow b)$ γ eğrisinin asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ bir düzlemsel eğri olsun. Teorem 3.1 ve Tanım 3.3 gereğince γ nın asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ ise $\bar{\gamma}$ nın asli-donor eğrisi γ olduğundan γ bir düzlemsel eğrinin asli-donor eğrisidir.

$(b \Rightarrow a)$ γ , bir $\bar{\gamma}$ düzlemsel eğrisinin asli-donor eğrisi olsun. $\bar{\tau} = 0$ olup,

$\kappa(s) = \bar{\kappa}(s) \left| \cos \left(\int \bar{\tau}(s) ds \right) \right|$ ve $\tau(s) = \bar{\kappa}(s) \sin \left(\int \bar{\tau}(s) ds \right)$ eşitlikleri kullanılırsa

$\frac{\tau}{\kappa} = c$ (sabit) elde edilir. O halde, γ Frenet eğrisi $\mathbb{E}^3$ de bir genel helistir.

Sonuç 3.2 $\bar{\bar{\gamma}}(s) = (x(s), y(s), 0)$ birim hızlı bir düzlemsel eğri olsun. $a \neq 0$ ve b birer sabit olmak üzere, $\bar{\bar{\gamma}}$ eğrisinin $\bar{\gamma}$ asli-donor eğrisi

$$\bar{\gamma}(s) = (ay(s), -ax(s), bs), \quad a^2 + b^2 = 1,$$

ile verilir. Ayrıca $\bar{\gamma}$; eğriliği $\bar{\kappa}(s) = |a| \sqrt{[x''(s)]^2 + [y''(s)]^2}$ ve burulması $\bar{\tau}(s) = b \sqrt{[x''(s)]^2 + [y''(s)]^2}$ olan bir genel helistir.

Teorem 3.5 Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir [11]:

- a) γ Frenet eğrisi, $\mathbb{E}^3$ de bir slant helistir.
- b) γ , $\mathbb{E}^3$ de bir genel helisin asli-donor eğrisidir.
- c) γ bir düzlemsel eğrinin ikinci asli-donor eğrisidir.
- d) γ nın asli-doğrultu eğrisi, $\mathbb{E}^3$ de bir genel helistir.
- e) γ nın ikinci asli-doğrultu eğrisi bir düzlemsel eğridir.

İspat :

$(a \Rightarrow b)$ γ Frenet eğrisi, $\mathbb{E}^3$ de bir slant helis olsun. Bu durumda,

$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = c(\text{sabit})$ yazılabilir. γ eğrisinin asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olsun. Bu

durumda $\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$ ve $\bar{\gamma}$ eğrisinin asli-donor eğrisi γ dır. Buradan

$\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = c(\text{sabit})$ elde edilir. O halde $\bar{\gamma}$ bir genel helistir. Böylece γ eğrisi bir genel helisin asli-donor eğrisidir.

$(b \Rightarrow c)$ γ , $\mathbb{E}^3$ de bir $\bar{\gamma}$ genel helisinin asli-donor eğrisi olsun. Teorem 3.4 gereğince $\bar{\gamma}$ eğrisi bir düzlemsel eğrinin asli-donor eğrisidir. Böylece, γ bir düzlemsel eğrinin ikinci asli-donor eğrisidir.

$(c \Rightarrow d)$ γ bir $\bar{\gamma}$ düzlemsel eğrisinin ikinci asli-donor eğrisi olsun.

$$\begin{array}{ccc} \bar{\gamma} & \xrightarrow{\text{asli-donor-eğrisi}} & \bar{\gamma} \xrightarrow{\text{asli-donor-eğrisi}} \gamma \\ \downarrow \text{düzlemsel} & & \end{array}$$

alınırsa Teorem 3.4 den düzlemsel bir eğrinin asli-donor eğrisi genel helis olduğu için, γ eğrisinin asli-doğrultu eğrisi olan $\bar{\gamma}$ bir genel helistir.

$(d \Rightarrow e)$ γ eğrisinin asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$, $\mathbb{E}^3$ de bir genel helis olsun.

Teorem 3.4 gereğince $\bar{\gamma}$ eğrisinin asli-doğrultu eğrisi bir düzlemsel eğri olacağından, γ nın ikinci asli-doğrultu eğrisi bir düzlemsel eğridir.

$(e \Rightarrow a)$ γ eğrisinin ikinci asli-doğrultu eğrisi bir düzlemsel eğri olsun.

$\gamma \xrightarrow{\text{asli-doğrultu eğrisi}} \bar{\gamma} \xrightarrow{\text{asli-doğrultu eğrisi}} \bar{\bar{\gamma}}$ alınırsa $\bar{\bar{\gamma}}$ düzlemsel olduğundan Teorem 3.4 gereğince $\bar{\gamma}$ bir genel helistir, yani $\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = c$ (sabit). Ayrıca, Teorem 3.2 den

$$\bar{\kappa} = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \quad \text{ve} \quad \bar{\tau} = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \quad \text{olduğu göz önüne alınırsa} \quad \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = c \quad \text{ise}$$

$$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = c \quad (\text{sabit}) \quad \text{bulunur. O halde } \gamma \text{ bir slant helistir.}$$

Sonuç 3.3 $\mathbb{E}^3$ de, $\bar{\gamma}$ genel helisinin asli-donor eğrisi olarak γ slant helisi, $a \neq 0$ ve b birer sabit ve $a^2 + b^2 = 1$ olmak üzere,

$$\gamma(s) = \int_0^s \gamma'(s) ds = \left(- \int_0^s \left[\cos \left(\int_0^\sigma \bar{\tau}(t) dt \right) \cos \left(\frac{1}{a} \int_0^\sigma \bar{\kappa}(t) dt \right) - b \sin \left(\int_0^\sigma \bar{\tau}(t) dt \right) \sin \left(\frac{1}{a} \int_0^\sigma \bar{\kappa}(t) dt \right) \right] d\sigma, \right.$$

$$\left. - \int_0^s \left[\cos \left(\int_0^\sigma \bar{\tau}(t) dt \right) \sin \left(\frac{1}{a} \int_0^\sigma \bar{\kappa}(t) dt \right) + b \sin \left(\int_0^\sigma \bar{\tau}(t) dt \right) \cos \left(\frac{1}{a} \int_0^\sigma \bar{\kappa}(t) dt \right) \right] d\sigma, a \int_0^s \sin \left(\int_0^\sigma \bar{\tau}(t) dt \right) d\sigma \right)$$

şeklinde oluşturulabilir.

Sonuç 3.4 $\bar{\bar{\gamma}}(s) = (x(s), y(s), 0)$ birim hızlı bir düzlemsel eğri olsun. Bu takdirde, $\bar{\bar{\gamma}}$ eğrisinin ikinci asli-donor eğrisi

$$\gamma(s) = \left(- \int_0^s \left[\cos \left(\int_0^\sigma b \bar{\kappa}(t) dt \right) x'(t) - b \sin \left(\int_0^\sigma b \bar{\kappa}(t) dt \right) y'(t) \right] d\sigma, \right.$$

$$\left. \left[- \int_0^s \cos \left(\int_0^\sigma b \bar{\kappa}(t) dt \right) y'(t) + b \sin \left(\int_0^\sigma b \bar{\kappa}(t) dt \right) x'(t) \right] d\sigma, a \sin \left(\int_0^\sigma b \bar{\kappa}(t) dt \right) d\sigma \right)$$

ile verilir.

Uyarı 3.4 Sonuç 3.4, $\mathbb{E}^3$ de bir düzlemsel eğriden bir slant helis oluşturmak için kullanışlı bir metot vermektedir. Bazı slant helis örnekleri bulmak için bu kolay bir metottur.

3.2 PD-rektifiyan Eğriler ve Bertrand Eğrileri

Bu bölümde $\mathbb{E}^3$ de PD-Rektifiyan eğrileri tanımlanacak ve Bertrand eğrilerinin asli-doğrultu eğrileri olarak karakterize edilecektir.

B.Y.Chen, $\mathbb{E}^3$ de bir Rektifiyan eğriyi, konum vektörü daima Rektifiyan düzleminde olan bir uzay eğrisi olarak tanımlamış ve bazı geometrik özelliklerini çalışmıştır [9].

$\mathbb{E}^3$ de sıfırdan farklı bir burulmaya sahip γ eğrisinin Bertrand eşi ise karşılıklı noktalarda aynı asli normale sahip eğri olarak tanımlanır. Bir γ eğrisi Bertrand eğrisidir $\Leftrightarrow a$ ve b sıfırdan farklı sabitler olmak üzere $a\kappa + b\tau = 1$ olmasıdır.

Tanım 3.5 $\bar{\gamma}$, $\mathbb{E}^3$ de $\bar{\tau} \neq 0$ olan bir Frenet eğrisi ve $\bar{\gamma}$ nin asli-donor eğrisi γ olsun. Eğer $\bar{\gamma}$ nin konum vektörü daima asli-donor eğrisi olan γ nin rektifiyan düzleminde kalıyorsa, $\bar{\gamma}$ eğrisi **PD-rektifiyan eğri** olarak adlandırılır.

Teorem 3.6 $\bar{\gamma}$, $\mathbb{E}^3$ de bir Frenet eğrisi ve $\bar{\gamma}$ nin asli-donor eğrisi γ olsun. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir [11]:

a) $\bar{\gamma}$ bir PD-rektifiyan eğridir.

b) $a \in \mathbb{R}^+$ bir sabit olmak üzere $\bar{\gamma}$ eğrisi $\bar{\tau}(s) = \frac{-\bar{\kappa}'(s)}{\bar{\kappa}(s)\sqrt{a\bar{\kappa}^2(s)-1}}$ denklemini

sağlayan sıfırdan farklı eğrilik ve burulmaya sahip bir Frenet eğrisidir.

c) $\bar{\gamma}$ nin konum vektörü daima kendi normal düzleminde dir.

d) γ bir Bertrand eğrisidir. Ayrıca, $\bar{\gamma}$ küresel eğridir.

İspat:

$(a \Rightarrow b)$ $\bar{\gamma}$ bir PD-rektifiyan eğri olsun. $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ sıfırdan farklı fonksiyonlar olmak üzere,

$$\bar{\gamma}(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s) \quad (3.3)$$

yazılabilir. $\bar{\gamma}$ eğrisinin asli-donor eğrisi γ olduğundan,

$$\left[-\cos\left(\int \bar{\tau} ds\right)\bar{N}(s) + \sin\left(\int \bar{\tau} ds\right)\bar{B}(s) \right](\gamma(s)) = \gamma'(s) \text{ eşitliği kullanılırsa,}$$

$$T(s) = -\cos\left(\int \bar{\tau} ds\right)\bar{N}(s) + \sin\left(\int \bar{\tau} ds\right)\bar{B}(s),$$

$$N(s) = \pm \bar{T}(s)$$

$$B(s) = \sin\left(\int \bar{\tau} ds\right)\bar{N}(s) + \cos\left(\int \bar{\tau} ds\right)\bar{B}(s)$$

olup, bunlar (3.3) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(s) = \lambda(s) & \left[-\cos\left(\int \bar{\tau} ds\right)\bar{N}(s) + \sin\left(\int \bar{\tau} ds\right)\bar{B}(s) \right] \\ & + \mu(s) \left[\sin\left(\int \bar{\tau} ds\right)\bar{N}(s) + \cos\left(\int \bar{\tau} ds\right)\bar{B}(s) \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir. Bu ifadenin türevi alınır,

$$\begin{aligned} \bar{T}(s) = -\bar{\kappa}(s) & \left[-\lambda(s)\cos\left(\int \bar{\tau} ds\right) + \mu(s)\sin\left(\int \bar{\tau} ds\right) \right] \bar{T}(s) \\ & + \left[\lambda'(s)\cos\left(\int \bar{\tau} ds\right) - \mu'(s)\sin\left(\int \bar{\tau} ds\right) \right] \bar{N}(s) \\ & + \left[\lambda'(s)\sin\left(\int \bar{\tau} ds\right) + \mu'(s)\cos\left(\int \bar{\tau} ds\right) \right] \bar{B}(s) \end{aligned}$$

olacağından

$$\lambda'(s) = \mu'(s) = 0, \quad \bar{\kappa}(s) \left[\lambda(s)\cos\left(\int \bar{\tau} ds\right) - \mu(s)\sin\left(\int \bar{\tau} ds\right) \right] = 1 \quad (3.5)$$

bulunur. Böylece $\lambda = \mu = \text{sabit}$ olup, $\tan \alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ alınır $\sin\left(\int \bar{\tau} ds - \alpha\right) = \frac{1}{\bar{\kappa}(s)\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$

bulunur. Buradan,

$$\bar{\tau}(s) = \frac{-\bar{\kappa}'(s)}{\bar{\kappa}(s)\sqrt{a\bar{\kappa}^2(s)-1}}, \quad a = \lambda^2 + \mu^2, \quad (3.6)$$

elde edilir.

$(b \Rightarrow c)$ $a \in \mathbb{R}^+$ bir sabit olmak üzere $\bar{\gamma}$ eğrisi (3.6) denklemini sağlayan sıfırdan farklı eğrilik ve burulmaya sahip bir Frenet eğrisi olsun. (3.4) ifadesi düzenlenirse

$$\bar{\gamma}(s) = \left[-\lambda(s)\cos\left(\int \bar{\tau} ds\right) + \mu(s)\sin\left(\int \bar{\tau} ds\right) \right] \bar{N}(s) + \left[\lambda(s)\sin\left(\int \bar{\tau} ds\right) + \mu(s)\cos\left(\int \bar{\tau} ds\right) \right] \bar{B}(s)$$

olup, $\bar{\gamma}$ eğrisinin konum vektörü daima kendi normal düzleminde.

$(c \Rightarrow d)$ $\bar{\gamma}$ eğrisinin konum vektörü daima kendi normal düzleminde bulunsun. O halde

$$\bar{\gamma}(s) = \lambda(s)\bar{N}(s) + \mu(s)\bar{B}(s) \text{ olup, bu ifadenin türevi alınırsa,}$$

$$\bar{T}(s) = \left[\lambda'(s) - \mu(s)\bar{\tau}(s) \right] \bar{N}(s) - \left[\lambda(s)\bar{\tau}(s) + \mu'(s) \right] \bar{B}(s) - \lambda(s)\bar{\kappa}(s)\bar{T}(s)$$

veya

$$-\lambda(s)\bar{\kappa}(s) = 1, \quad \lambda'(s) - \mu(s)\bar{\tau}(s) = 0, \quad \lambda(s)\bar{\tau}(s) + \mu'(s) = 0$$

olmalıdır. Buradan elde edilen $\bar{\kappa}(s) = -\frac{1}{\lambda(s)}$ ve $\bar{\tau}(s) = \frac{\lambda'(s)}{\mu(s)} = -\frac{\mu'(s)}{\lambda(s)}$ ifadeleri

küresel eğriyi karakterize eden $\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = \left(\frac{\bar{\kappa}'}{\bar{\kappa}^2 \bar{\tau}} \right)'$ diferansiyel denklemini, [24],

sağladığından, $\bar{\gamma}$ bir küresel eğridir.

Ayrıca, $\kappa(s) = \bar{\kappa}(s) \left| \cos\left(\int \bar{\tau} ds\right) \right|$ ve $\tau(s) = \bar{\kappa}(s) \sin\left(\int \bar{\tau} ds\right)$ eşitliklerini

$\bar{\kappa}(s) \left[\lambda(s)\cos\left(\int \bar{\tau} ds\right) - \mu(s)\sin\left(\int \bar{\tau} ds\right) \right] = 1$ denkleminde yerine yazarak,

$\varepsilon\lambda\kappa + \mu\tau = 1$, $\varepsilon = \pm 1$, bulunur. Yani, γ bir Bertrand eğrisidir.

$(d \Rightarrow a)$ γ bir Bertrand eğrisi ve $\bar{\gamma}$ bir küresel eğri olsun. Bu durumda γ eğrisinin eğrilik ve burulması arasında $a\kappa + b\tau = 1$, (a, b sıfırdan farklı sabitler) eşitliği vardır.

Ayrıca $\bar{\gamma}$ nin asli-donor eğrisi γ olduğundan, $\kappa(s) = \bar{\kappa}(s) \left| \cos\left(\int \bar{\tau} ds\right) \right|$ ve

$\tau(s) = \bar{\kappa}(s) \sin\left(\int \bar{\tau}(s) ds\right)$ eşitliklerinin var olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikler $a\kappa + b\tau = 1$ denkleminde yerine yazılırsa $\bar{\kappa}(s) \left[a \left| \cos\left(\int \bar{\tau} ds\right) \right| + b \sin\left(\int \bar{\tau} ds\right) \right] = 1$ ve $a' = b' = 0$ sağlanır. Bu ise (3.5) denklemdir. $\bar{\gamma}$ bu denklemi sağlıyorsa, $\bar{\gamma}(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s)$ denklemini de sağlar.

O halde, $\bar{\gamma}$ bir PD-rektifiyan eğridir.

FRENET EĞRİSİ İLE BAĞLANTILI EĞRİLER-II

Çalışmamızın orijinal kısmını oluşturan bu ilk bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında asli-doğrultu eğrilerinin involütleri ve teğetler göstergesi incelenecek, W – doğrultu eğrisi ile W – rektifiyan eğri tanımları yapılacak ve bunlarla ilgili bazı karakterizasyonlar verilecektir.

4.1 Asli-doğrultu Eğrisi ve İnvolütü

Teorem 4.1 Bir γ Frenet eğrisinin asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ dir $\Leftrightarrow \gamma$ ve $\bar{\gamma}$ eğrileri bir involüt-evolüt eğri çifti oluşturur.

İspat: $(\Rightarrow)$ γ eğrisinin asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ ve γ nın Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$, $\bar{\gamma}$ nin Frenet vektörleri $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ olsun. γ nın asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ ise $N = \bar{\gamma}' = \bar{T}$ olup, $\langle T, \bar{T} \rangle = \langle T, N \rangle = 0$, yani $\langle T, \bar{T} \rangle = 0$ bulunur. Böylece, γ ve $\bar{\gamma}$ eğrileri bir involüt-evolüt eğri çifti oluşturur.

$(\Leftarrow)$ γ ve $\bar{\gamma}$ eğrileri bir involüt-evolüt eğri çifti olsun. Bu durumda,

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) + (c-s)\gamma'(s)$$

yazılabilir[14]. Buradan türev alınırsa

$$\bar{\gamma}'(s) = \gamma'(s) - \gamma'(s) + (c-s)\gamma''(s) = (c-s)\gamma''(s) = (c-s)\kappa(s)N(s),$$

yani, $\bar{T} = N$ elde edilir. O halde, γ eğrisinin asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ dir.

Teorem 4.2 γ eğrisinin asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ ve involütü β olsun. $\bar{\gamma}$ nin involütü $\bar{\beta}$ ise β ve $\bar{\beta}$ eğrileri de involüt-evolüt eğri çiftidir.

İspat: β eğrisinin Frenet elemanları $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}, \hat{\kappa}, \hat{\tau}\}$ ve $\bar{\beta}$ eğrisinin Frenet elemanları $\{T_*, N_*, B_*, \kappa_*, \tau_*\}$ olsun.

γ eğrisinin asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olduğundan, $N = \bar{\gamma}' = \bar{T}$ dir.

γ eğrisinin involütü β olduğundan $\beta(s) = \gamma(s) + (c-s)\gamma'(s)$ yazılabilir. Buradan türev alınırsa $\beta'(s) = T - T + (c-s)\kappa N$ yani

$$\hat{T} = N$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $\bar{\gamma}$ eğrisinin involütü $\bar{\beta}$ olduğundan $\bar{\beta}(s) = \bar{\gamma}(s) + (c-s)\bar{\gamma}'(s)$ veya $\bar{\beta}(s) = \bar{\gamma}(s) + (c-s)N$ olup, türev alınırsa

$$\begin{aligned} \bar{\beta}'(s) &= \underbrace{\bar{\gamma}'(s)}_{=N} - N + (c-s)(-\kappa T + \tau B) \\ &= -\kappa(c-s)T + \tau(c-s)B \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$T_* = \frac{\bar{\beta}'}{\|\bar{\beta}'\|} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}(-\kappa T + \tau B)$$

şeklindedir.

$\langle \hat{T}, T_* \rangle = \left\langle N, \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}(-\kappa T + \tau B) \right\rangle = 0$ olduğundan, β ve $\bar{\beta}$ eğrileri de involüt-evolüt eğri çiftidir.

4.2 Asli-doğrultu Eğrisi ve Teğetler Göstergesi

Bu bölümde, γ eğrisinin asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olmak üzere, $\bar{\gamma}$ eğrisinin teğetler göstergesi ile γ eğrisinin teğetler göstergesinin asli-doğrultu eğrileri incelendi.

4.2.1 Asli-doğrultu Eğrisinin Teğetler Göstergesi

γ eğrisinin asli-doğrultu eğrisi olan $\bar{\gamma}$ olduğundan $N(\bar{\gamma}(s)) = \bar{\gamma}'(s) = \bar{T}(s)$ dir.

$\bar{\gamma}$ eğrisinin teğetler göstergesi $\bar{\gamma}_T$ olsun. $\bar{\gamma}_T$ eğrisinin $\{\bar{T}_T, \bar{N}_T, \bar{B}_T, \bar{\kappa}_T, \bar{\tau}_T\}$ Frenet elemanlarını bulalım.

$$\bar{\gamma}_T = \bar{T} = N \quad \Rightarrow \quad \bar{\gamma}_T' = N' = -\kappa T + \tau B$$

olup, $\left\| \bar{\gamma}_T' \right\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ dir. Böylece

$$\bar{T}_T = \frac{\bar{\gamma}_T'}{\left\| \bar{\gamma}_T' \right\|} = \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B$$

olur.

$$\bar{\gamma}_T'' = (-\kappa T + \tau B)' = -\kappa' T - \kappa T' + \tau' B + \tau B' = -\kappa' T - (\kappa^2 + \tau^2) N + \tau' B,$$

$$\bar{\gamma}_T' \times \bar{\gamma}_T'' = \begin{vmatrix} T & N & B \\ -\kappa & 0 & \tau \\ -\kappa' & -(\kappa^2 + \tau^2) & \tau' \end{vmatrix} = \tau(\kappa^2 + \tau^2) T + (\kappa\tau' - \kappa'\tau) N + \kappa(\kappa^2 + \tau^2) B,$$

$$\begin{aligned} \left\| \bar{\gamma}_T' \times \bar{\gamma}_T'' \right\| &= \sqrt{\tau^2 (\kappa^2 + \tau^2)^2 + \kappa^2 (\kappa^2 + \tau^2)^2 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2} \\ &= \sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)^3 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2} \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\bar{B}_T = \frac{\bar{\gamma}_T' \times \bar{\gamma}_T''}{\left\| \bar{\gamma}_T' \times \bar{\gamma}_T'' \right\|} = \frac{1}{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)^3 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2}} \left\{ \tau(\kappa^2 + \tau^2)T + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)N + \kappa(\kappa^2 + \tau^2)B \right\}$$

$$\bar{N}_T = \bar{B}_T \times \bar{T}_T = \frac{1}{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)^4 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2(\kappa^2 + \tau^2)}} \left\{ \tau(\kappa\tau' - \kappa'\tau)T - (\kappa^2 + \tau^2)^2 N + \kappa(\kappa\tau' - \kappa'\tau)B \right\}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\bar{K}_T = \frac{\left\| \bar{\gamma}_T' \times \bar{\gamma}_T'' \right\|}{\left\| \bar{\gamma}_T' \right\|^3} = \frac{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)^3 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2}}{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)^3}}$$

ve

$$\bar{\gamma}_T''' = (-\kappa'' + \kappa^3 + \tau^2\kappa)T + (-3\kappa\kappa' - 3\tau\tau')N + (-\kappa^2\tau - \tau^3 + \tau'')B$$

kullanılırsa

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_T &= \frac{\det \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_T' & \bar{\gamma}_T'' & \bar{\gamma}_T''' \end{pmatrix}}{\left\| \bar{\gamma}_T' \times \bar{\gamma}_T'' \right\|^2} \\ &= \frac{1}{(\kappa^2 + \tau^2)^3 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2} \begin{vmatrix} -\kappa & 0 & \tau \\ -\kappa' & -(\kappa^2 + \tau^2) & \tau' \\ -\kappa'' + \kappa^3 + \tau^2\kappa & -3\kappa\kappa' - 3\tau\tau' & -\kappa^2\tau - \tau^3 + \tau'' \end{vmatrix} \\ &= \frac{\kappa^3\tau'' - \tau^3\kappa'' + \kappa\tau(\tau\tau'' - \kappa\kappa'') + (3\tau\tau' + 3\kappa\kappa')(\tau\kappa' - \tau'\kappa)}{(\kappa^2 + \tau^2)^3 + (\kappa\tau' - \tau\kappa')^2} \end{aligned}$$

bulunur.

4.2.2 Teğetler Göstergesinin Asli-doğrultu Eğrisi

γ nin teğetler göstergesi γ_T nin asli-doğrultu eğrisi β_T ve Frenet elemanları $\{T_T, N_T, B_T, \kappa_T, \tau_T\}$ olsun. β_T eğrisinin $\{t_T, n_T, b_T, \kappa_T^*, \tau_T^*\}$ Frenet elemanlarını bulalım.

γ_T nin asli-doğrultu eğrisi β_T olduğundan β_T, N_T nin integral eğrisidir, yani, $N_T(\beta_T) = \beta_T'$.

Ayrıca γ nin teğetler göstergesi olan γ_T eğrisi için, $N_T = \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B$

olduğunu biliyoruz. Öyleyse; $N_T = \beta_T' = t_T$ olmak üzere,

$$t_T = \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B$$

bulunur. Buradan

$$t_T' = \left(\frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \right)' T - \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T' + \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \right)' B + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B'$$

olup, $\left(\frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \right)' = \frac{\kappa\tau\tau' - \kappa'\tau^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}$ ve $\left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \right)' = \frac{\tau'\kappa^2 - \tau\kappa\kappa'}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$t_T' = \left(\frac{\kappa\tau\tau' - \kappa'\tau^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \right) T - \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} N + \left(\frac{\tau'\kappa^2 - \tau\kappa\kappa'}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \right) B$$

elde edilir. Böylece,

$$\kappa_T^* = \|t_T'\| = \sqrt{\frac{(\kappa\tau\tau' - \kappa'\tau^2)^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^3} + \frac{(\tau'\kappa^2 - \tau\kappa\kappa')^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^3} + \kappa^2 + \tau^2} = \sqrt{\frac{(\tau'\kappa - \tau\kappa')^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^2} + \kappa^2 + \tau^2},$$

$$n_T = \frac{t_T'}{\kappa_T^*} = \frac{1}{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)^4 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2(\kappa^2 + \tau^2)}} \left\{ \tau(\kappa\tau' - \kappa'\tau)T - (\kappa^2 + \tau^2)^2 N + \kappa(\kappa\tau' - \kappa'\tau)B \right\},$$

$$b_T = t_T \times n_T = \frac{1}{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)^3 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2}} \left\{ \tau(\kappa^2 + \tau^2)T + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)N + \kappa(\kappa^2 + \tau^2)B \right\}$$

elde edilir. $c = \sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)^3 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2}$ olmak üzere

$$b_T' = \left[\frac{\tau'c - \tau c'}{c^2} - \frac{\kappa(\kappa\tau' - \tau\kappa')}{c} \right] T + \left[\frac{(\kappa\tau' - \tau\kappa')'c - (\kappa\tau' - \tau\kappa')c'}{c^2} \right] N + \left[\frac{\tau(\kappa\tau' - \tau\kappa')}{c} + \frac{\kappa'c - \kappa c'}{c^2} \right] B$$

ve

$$\tau_T^* = -\langle b_T', n_T \rangle$$

eşitliklerinden

$$\tau_T^* = \frac{(\kappa\tau' - \tau\kappa')(\tau'c - \tau c' + \kappa'c - \kappa c')}{c^3 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} - \left(\frac{\kappa\tau' - \tau\kappa'}{c} \right)' \cdot \frac{(\kappa^2 + \tau^2)^2}{c \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

bulunur.

4.3 W – doğrultu Eğrileri

Tanım 4.1 γ bir Frenet eğrisi ve γ nın birim Darboux vektör alanı W olmak üzere, W vektör alanının integral eğrisine γ eğrisinin W – **doğrultu eğrisi** denir.

γ Frenet eğrisinin birim Darboux vektör alanı $W = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}(\tau T + \kappa B)$ olmak üzere; γ

Frenet eğrisinin W – doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ ise

$$W(\bar{\gamma}(s)) = \bar{\gamma}'(s)$$

yazılabilir.

O halde, $\bar{\gamma}$ birim hızlı bir eğridir. $W(s)$ vektör alanının integral eğrisi olan $\bar{\gamma}$ eğrisinin yay uzunluğu parametresi $\bar{s} = s + c$ (c sabit) şeklindedir. Böylece, genelliği bozmadan $\bar{s} = s$ olarak alınabilir.

Uyarı 4.1 Düzlemsel bir eğri için ($\tau = 0$) $W = B$ olacağından, W – doğrultu eğrisi, eğrinin binormal doğrultu eğrisine karşılık gelir. Ayrıca düzlemsel eğrilerin W – doğrultu eğrisi eğrinin üzerinde bulunduğu düzleme dik olan bir doğrudur.

Teorem 4.3 Eğriliği $\kappa > 0$ ve burulması τ olan γ eğrisinin W – doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olsun. $\bar{\gamma}$ eğrisinin eğriliği $\bar{\kappa}$ ve burulması $\bar{\tau}$

$$\bar{\kappa} = \frac{|\tau\kappa' - \tau'\kappa|}{\kappa^2 + \tau^2}, \quad \bar{\tau} = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

ile verilir.

İspat: γ eğrisinin W – doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ için $W(\bar{\gamma}(s)) = \bar{\gamma}'(s)$ olduğunu biliyoruz.

Böylece

$$\bar{T} = W \text{ yani}$$

$$\bar{T} = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} \bar{T}' &= \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \right)' T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T' + \left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \right)' B + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B' \\ &= \frac{\tau'(\kappa^2 + \tau^2) - \tau(\kappa\kappa' + \tau\tau')}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} T + \frac{\kappa'(\kappa^2 + \tau^2) - \kappa(\kappa\kappa' + \tau\tau')}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} B \\ &= \frac{\tau'\kappa^2 + \tau'\tau^2 - \tau\kappa\kappa' - \tau^2\tau'}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} T + \frac{\kappa'\kappa^2 + \kappa'\tau^2 - \kappa^2\kappa' - \kappa\tau\tau'}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} B \end{aligned}$$

veya

$$\bar{T}' = \frac{\kappa(\tau'\kappa - \tau\kappa')}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} T + \frac{\tau(\tau\kappa' - \tau'\kappa)}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} B$$

elde edilir. Buradan, γ eğrisinin W – doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ nin eğriliği

$$\bar{\kappa} = \left\| \bar{T}' \right\| = \sqrt{\frac{\kappa^2 (\tau' \kappa - \tau \kappa')^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^3} + \frac{\tau^2 (\tau \kappa' - \tau' \kappa)^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^3}}$$

veya

$$\bar{\kappa} = \frac{|\tau \kappa' - \tau' \kappa|}{\kappa^2 + \tau^2}$$

şeklindedir.

$$\bar{N} = \frac{\bar{T}'}{\bar{\kappa}} = \frac{\frac{\kappa (\tau' \kappa - \tau \kappa')}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} T + \frac{\tau (\tau \kappa' - \tau' \kappa)}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} B}{\frac{|\tau \kappa' - \tau' \kappa|}{\kappa^2 + \tau^2}}$$

eşitliğinden $\bar{\gamma}$ nin asli normal vektör alanı

$$\bar{N} = \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B$$

olarak bulunur. $\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N}$ olduğundan, $\bar{\gamma}$ eğrisinin binormal vektör alanı

$$\bar{B} = \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B \right) \times \left(\frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B \right) = - \left(\frac{\tau^2}{\kappa^2 + \tau^2} + \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \right) N$$

veya

$$\bar{B} = -N$$

şeklindedir. $\bar{B}' = -N' = \kappa T - \tau B$ ve $\bar{\tau} = -\langle \bar{B}', \bar{N} \rangle$ olduğundan

$$\bar{\tau} = -\left\langle \kappa T - \tau B, \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B \right\rangle = -\left(\frac{-\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} - \frac{\tau^2}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \right)$$

veya

$$\bar{\tau} = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

elde edilir.

Teorem 4.4 γ eğrisinin W – doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olmak üzere, $\bar{\gamma}$ bir genel helistir $\Leftrightarrow \gamma$ bir slant helistir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\bar{\gamma}$ bir genel helis olsun. O halde $\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = c$ olup, bir önceki teorem gereğince

$$\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\frac{|\tau\kappa' - \tau'\kappa|}{\kappa^2 + \tau^2}} = \frac{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}{|\tau\kappa' - \tau'\kappa|} = c \quad (4.1)$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}{|\tau'\kappa - \tau\kappa'|} = c \Rightarrow \frac{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}{\kappa^2 \left| \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \right|} = c \Rightarrow \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left| \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \right| = \frac{1}{c}$$

olduğundan

$$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = c_1 (\text{sabit})$$

bulunur. Böylece γ bir slant helistir.

$(\Leftarrow)$ γ bir slant helis olsun. Bu durumda $\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = c(\text{sabit})$ olup, (4.1) den

$$\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = \frac{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}{\tau'\kappa - \tau\kappa'} = \frac{1}{c} = \text{sabit}$$

olacağından $\bar{\gamma}$ bir genel helistir.

Teorem 4.5 Düzlemsel olmayan bir γ eğrisinin W – doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olsun. γ bir genel helistir $\Leftrightarrow \bar{\gamma}$ bir doğrudur.

İspat: $(\Rightarrow)$ γ bir genel helis olsun. O halde $\frac{\tau}{\kappa} = c(\text{sabit}) \Rightarrow \tau = c\kappa$ olup, bir önceki

teorem gereğince $\bar{\kappa} = \frac{|\tau\kappa' - \tau'\kappa|}{\kappa^2 + \tau^2}$ eşitliğinde $\tau = c\kappa$ yerine yazılırsa $\bar{\kappa} = 0$ elde edilir,

yani $\bar{\gamma}$ bir doğrudur.

$(\Leftarrow)$ $\bar{\gamma}$ bir doğru olsun. O halde $\bar{\kappa} = \frac{|\tau\kappa' - \tau'\kappa|}{\kappa^2 + \tau^2} = 0$ eşitliğinden $\tau\kappa' - \tau'\kappa = 0$ veya

$\frac{\tau\kappa' - \tau'\kappa}{\kappa^2} = 0$ yazılabilir. Buradan $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$ olacağından $\frac{\tau}{\kappa} = c(\text{sabit})$ elde edilir.

Böylece γ bir genel helistir.

Tanım 4.2 γ bir Frenet eğrisi olmak üzere, γ nın W – doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ ve $\bar{\gamma}$ nin W – doğrultu eğrisi $\bar{\bar{\gamma}}$ olsun. Bu durumda $\bar{\bar{\gamma}}$ eğrisine γ eğrisinin **ikinci W – doğrultu eğrisi** denir.

Sonuç 4.1 γ bir slant helis ise γ nın ikinci W – doğrultu eğrisi bir doğrudur.

Not: W – doğrultu eğrisi ile asli-doğrultu eğrisi arasındaki ilişkileri inceleyelim:

- γ nın W – doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ ve $\bar{\gamma}$ eğrisinin Frenet elemanları $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}, \bar{\kappa}, \bar{\tau}\}$, γ nın asli-doğrultu eğrisi $\hat{\gamma}$ ve $\hat{\gamma}$ nın Frenet elemanları $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}, \hat{\kappa}, \hat{\tau}\}$ olsun. Bu durumda,

$$\bar{T} = \hat{B}, \quad \bar{N} = \hat{N}, \quad \bar{B} = -\hat{T}, \quad \bar{\kappa} = |\hat{\tau}|, \quad \bar{\tau} = \hat{\kappa}$$

eşitlikleri vardır.

- γ bir Frenet eğrisi ve γ nın W – doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olsun. $\bar{\gamma}$ nin asli normal $\bar{N}$ olmak üzere, W – doğrultu eğrisinin Frenet çatısının $\bar{N}$ etrafında 90° döndürülmesiyle asli-doğrultu eğrisinin Frenet çatısı elde edilir.

- W – doğrultu eğrisi bir genel helistir $\Leftrightarrow$ Asli-doğrultu eğrisi bir genel helistir.

- W – doğrultu eğrisi bir rektifiyan eğridir $\Leftrightarrow$ Asli-doğrultu eğrisi bir rektifiyan eğridir.

4.3.1 W – rektifiyan Eğriler

Tanım 4.3 γ bir Frenet eğrisi ve γ nın W – doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olsun. $\bar{\gamma}$ eğrisinin konum vektörü daima γ eğrisinin rektifiyan düzleminde yatıyorsa, $\bar{\gamma}$ eğrisine W – **rektifiyan eğri** denir.

Teorem 4.6 γ bir Frenet eğrisi olmak üzere, $\bar{\gamma}$ bir W – rektifiyan eğri ise, γ genel helistir.

İspat: $\bar{\gamma}$ bir W – rektifiyan eğri olsun. Tanım gereğince $\lambda(s), \mu(s)$ sıfırdan farklı fonksiyonlar olmak üzere,

$$\bar{\gamma}(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s)$$

şeklinde yazılabilir. O halde,

$$\bar{\gamma}' = \lambda'T + \lambda T' + \mu'B + \mu B' = \lambda'T + \lambda\kappa N + \mu'B - \mu\tau N$$

eşitliğinden

$$\bar{T} = \lambda'T + (\lambda\kappa - \mu\tau)N + \mu'B$$

bulunur.

Diğer taraftan, γ nın W – doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olduğundan $W = \bar{\gamma}' = \bar{T}$ yazılabileceğinden

$$\bar{T} = W = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}B$$

olduğu kullanılırsa,

$$\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}B = \lambda'T + (\lambda\kappa - \mu\tau)N + \mu'B$$

veya

$$\lambda\kappa - \mu\tau = 0, \quad \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = \lambda', \quad \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = \mu'$$

elde edilir. Buradaki ikinci ve üçüncü eşitlikler kullanılırsa $\lambda'\kappa - \mu'\tau = 0$ elde edilir.

Böylece

$$\left. \begin{array}{l} -\mu' / \quad \lambda\kappa - \mu\tau = 0 \\ \mu / \quad \lambda'\kappa - \mu'\tau = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -\kappa\lambda\mu' + \kappa\lambda'\mu = 0$$

veya

$$\lambda'\mu - \lambda\mu' = 0$$

bulunur. Buradan $\mu d\lambda - \lambda d\mu = 0$ veya $\int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int \frac{d\mu}{\mu}$ eşitliğinden $\ln \lambda = \ln \mu + \ln c$, yani

$$\frac{\lambda}{\mu} = c(\text{sabit})$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\lambda\kappa - \mu\tau = 0$ eşitliğinden $\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\lambda}{\mu}$ yazılabileceğinden

$\frac{\tau}{\kappa} = c(\text{sabit})$ bulunur. O halde, γ bir genel helistir.

4.3.2 W – doğru Eğrisi İçin Örnekler

1) $\gamma(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$ birim hızlı eğrisinin W – doğru eğrisini bulalım.

$$\gamma'(s) = T(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\gamma''(s) = \left(-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right),$$

$$\Rightarrow \kappa(s) = \|\gamma''(s)\| = \frac{1}{2},$$

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} = \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right),$$

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle = -\left\langle \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{2} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right), \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right) \right\rangle$$

$$\Rightarrow \tau(s) = -\left(-\frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

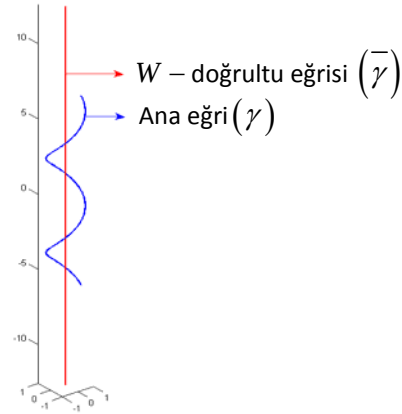
olduğundan

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}} (\tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T(s) + B(s)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

elde edilir. γ nın W – doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ ise $W(s) = \bar{\gamma}'(s)$ olacağından $\bar{\gamma}'(s) = (0, 0, 1)$ yani

$$\bar{\gamma}(s) = (c_1, c_2, s + c_3) , (c_1, c_2, c_3 \text{ birer sabit})$$

bulunur (Şekil 4.1).



Şekil 4. 1 Genel helisin W – doğrultu eğrisi ($c_1 = c_2 = c_3 = 0$ için)

2) $\gamma(s) = \left(-\frac{3}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{1}{6} \cos\left(\frac{3s}{2}\right), -\frac{3}{2} \sin\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{1}{6} \sin\left(\frac{3s}{2}\right), \sqrt{3} \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right)$ birim hızlı

slant helisinin W – doğrultu eğrisini bulalım.

$$\gamma'(s) = T(s) = \left(\frac{3}{4} \sin\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{3s}{2}\right), -\frac{3}{4} \cos\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3s}{2}\right), -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right),$$

$$\gamma''(s) = \left(\frac{3}{8} \cos\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{3}{8} \cos\left(\frac{3s}{2}\right), \frac{3}{8} \sin\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{3}{8} \sin\left(\frac{3s}{2}\right), -\frac{\sqrt{3}}{4} \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right),$$

$$\Rightarrow \kappa(s) = \|\gamma''(s)\| = \sqrt{\frac{3}{8}(1 + \cos(s))} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right),$$

$$N = \frac{T'}{\kappa} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3(1 + \cos(s))}} \left(\frac{3}{8} \cos\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{3}{8} \cos\left(\frac{3s}{2}\right), \frac{3}{8} \sin\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{3}{8} \sin\left(\frac{3s}{2}\right), -\frac{\sqrt{3}}{4} \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right)$$

$$N(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{\cos\left(\frac{s}{2}\right)} \left(\frac{1}{4} \cos\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3s}{2}\right) \right), \frac{\sqrt{3}}{\cos\left(\frac{s}{2}\right)} \left(\frac{1}{4} \sin\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{3s}{2}\right) \right), -\frac{1}{2} \right)$$

$$B(s) = \left(-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right) \left(2 \cos^2\left(\frac{s}{2}\right) - 3 \right), \sin^3\left(\frac{s}{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right)$$

$$\Rightarrow \tau(s) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{s}{2}\right)$$

bulunur. Böylece

$$W(s) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}} (\tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s))$$

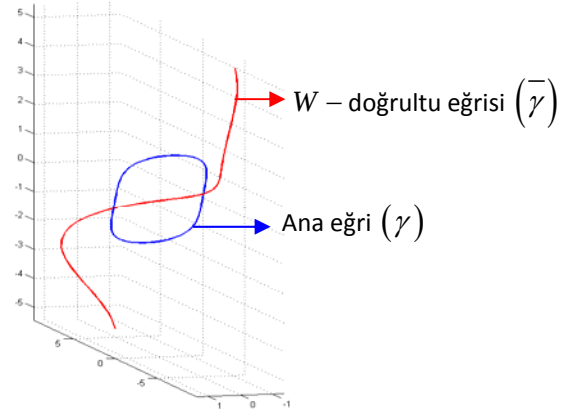
$$= \left(-\frac{1}{8} \left(9 + 24 \cos\left(\frac{s}{2}\right) + 6 \cos(s) + \cos(2s) \right), \frac{1}{2} \sin(s), \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

olup, $W(s) = \bar{\gamma}'(s)$ eşitliğinden

$$\bar{\gamma}(s) = \left(\int \left(-\frac{9}{8} - 3 \cos\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{3}{4} \cos(s) - \frac{1}{8} \cos(2s) \right) ds, \frac{1}{2} \int \sin(s) ds, \frac{\sqrt{3}s}{2} \right)$$

$$\bar{\gamma}(s) = \left(-\frac{9s}{8} - 6\sin\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{3}{4}\sin(s) - \frac{1}{16}\sin(2s), -\frac{1}{2}\cos(s), \frac{\sqrt{3}s}{2} \right) + (c_1, c_2, c_3)$$

elde edilir (c_1, c_2, c_3 birer sabit) (Şekil 4.2).



Şekil 4. 2 Slant helisin W – doğrultu eğrisi ($c_1 = c_2 = c_3 = 0$ için)

YÜZEY EĞRİLERİ İLE BAĞLANTILI EĞRİLER

5.1 V – doğrultu Eğrisi

Tanım 5.1 $\mathbb{E}^3$ de yönlendirilmiş M yüzeyi üzerinde bir eğri γ olmak üzere, γ eğrisinin birim teğet vektör alanı T , yüzeyin γ eğrisine kısıtlanmış birim normal vektör alanı U ve $V = U \times T$ olmak üzere, $\{T, V, U\}$ Darboux çatısını gözönüne alalım.

Darboux çatısının türev formülleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ V' \\ U' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ V \\ U \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada κ_g geodezik eğrilik, κ_n normal eğrilik ve τ_g geodezik burulmadır.

Tanım 5.2 $\mathbb{E}^3$ de yönlendirilmiş bir M yüzeyi üzerinde birim hızlı γ eğrisi verilsin. γ eğrisi boyunca Darboux çatısı $\{T, V, U\}$ olmak üzere, M yüzeyi üzerinde bulunan ve V vektör alanının integral eğrisi olan $\bar{\gamma}$ eğrisine, γ nın V – **doğrultu eğrisi** denir.

γ eğrisinin V – doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ ise,

$$V(\bar{\gamma}(s)) = \bar{\gamma}'(s)$$

yazılabilir.

M yüzeyi $X = X(u, v)$ parametrik denklemi ile verilsin. O halde,

$$V(s) = X_u(p(s), q(s)) \frac{dp}{ds} + X_v(p(s), q(s)) \frac{dq}{ds}$$

eşitliğini sağlayan $\bar{\gamma}(s) = X(p(s), q(s))$ eğrisi, γ eğrisinin V – doğrultu eğrisidir.

M yüzeyi $f(x, y, z) = c$ kapalı denklemi ile verilirse,

$$V(s) = \left(\bar{\gamma}'_1(s), \bar{\gamma}'_2(s), \bar{\gamma}'_3(s) \right)$$

ve $f(\bar{\gamma}_1(s), \bar{\gamma}_2(s), \bar{\gamma}_3(s)) = c$ eşitliklerini gerçekleyen $\bar{\gamma}(s) = (\bar{\gamma}_1(s), \bar{\gamma}_2(s), \bar{\gamma}_3(s))$ eğrisi, γ eğrisinin V – doğrultu eğrisidir.

Teorem 5.1 $\gamma, \mathbb{E}^3$ de M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri ve γ nın V – doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olsun. Bu durumda, γ nın geodezik eğriliği (κ_g) , normal eğriliği (κ_n) ve geodezik burulması (τ_g) ile $\bar{\gamma}$ nin geodezik eğriliği $(\bar{\kappa}_g)$, normal eğriliği $(\bar{\kappa}_n)$ ve geodezik burulması $(\bar{\tau}_g)$ arasında,

$$\bar{\kappa}_n = \tau_g \sin \theta - \kappa_g \cos \theta \quad \bar{\tau}_g = -\theta' - \kappa_n \quad \bar{\kappa}_g = \kappa_g \sin \theta + \tau_g \cos \theta$$

ilişkileri vardır. Burada; M yüzeyinin $\bar{\gamma}$ eğrisine kısıtlanmış birim normal vektör alanı $\bar{U}$ olmak üzere, T ile $\bar{U}$ arasındaki açı θ 'dır.

İspat: γ nın V – doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olduğundan $V = \bar{\gamma}' = \bar{T}$ yazabiliriz.

$\bar{\gamma}$ eğrisinin Darboux çatısını $\{\bar{T}, \bar{V}, \bar{U}\}$ ile gösterelim. $\langle \bar{U}, \bar{T} \rangle = 0$ olduğundan $\langle \bar{U}, V \rangle = 0$ yani $\bar{U} \perp V$ elde edilir. $\bar{U}$ birim vektör alanı olduğundan, T ile $\bar{U}$ arasındaki açı θ olmak üzere,

$$\bar{U} = T \cos \theta + U \sin \theta$$

yazılabilir. Buradan

$$\bar{V} = \bar{U} \times \bar{T} = (T \cos \theta + U \sin \theta) \times V$$

$$\bar{V} = U \cos \theta - T \sin \theta$$

olur. Böylece, γ nın V – doğrultu eğrisinin normal eğriliği

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}_n &= \left\langle \bar{T}', \bar{U} \right\rangle = \left\langle V', T \cos \theta + U \sin \theta \right\rangle \\ &= \left\langle -\kappa_g T + \tau_g U, \cos \theta T + \sin \theta U \right\rangle\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\bar{\kappa}_n = \tau_g \sin \theta - \kappa_g \cos \theta$$

olarak bulunur. $\bar{V} = \cos \theta U - \sin \theta T$ eşitliğinden türev alınırsa

$$\begin{aligned}\bar{V}' &= -\theta' \sin \theta U + \cos \theta (-\kappa_n T - \tau_g V) - \theta' \cos \theta T - \sin \theta (\kappa_g V + \kappa_n U) \\ &= -\theta' \sin \theta U - \kappa_n \cos \theta T - \tau_g \cos \theta V - \theta' \cos \theta T - \kappa_g \sin \theta V - \kappa_n \sin \theta U \\ &= (-\kappa_n \cos \theta - \theta' \cos \theta) T + (-\kappa_g \sin \theta - \tau_g \cos \theta) V + (-\theta' \sin \theta - \kappa_n \sin \theta) U\end{aligned}$$

olup, γ nın V – doğrultu eğrisinin geodezik burulması

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_g &= \left\langle \bar{V}', \bar{U} \right\rangle \\ &= -\kappa_n \cos^2 \theta - \theta' \cos^2 \theta - \theta' \sin^2 \theta - \kappa_n \sin^2 \theta \\ &= -\theta' (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - \kappa_n (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)\end{aligned}$$

yani

$$\bar{\tau}_g = -\theta' - \kappa_n$$

şeklinde bulunur.

γ nın V – doğrultu eğrisinin geodezik eğriliği ise

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}_g &= \left\langle \bar{T}', \bar{V} \right\rangle \\ &= \left\langle V', U \cos \theta - T \sin \theta \right\rangle \\ &= \left\langle -\kappa_g T + \tau_g U, U \cos \theta - T \sin \theta \right\rangle\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\bar{\kappa}_g = \kappa_g \sin \theta + \tau_g \cos \theta$$

olarak elde edilir.

Bu teoremin geometrik yorumlarına bakalım:

$$\bar{\kappa}_n = \tau_g \sin \theta - \kappa_g \cos \theta, \quad \bar{\tau}_g = -\theta' - \kappa_n, \quad \bar{\kappa}_g = \kappa_g \sin \theta + \tau_g \cos \theta$$

olarak elde edildi. Diğer taraftan,

$$\kappa_g = 0 \Leftrightarrow \gamma \text{ geodezik eğri,}$$

$$\kappa_n = 0 \Leftrightarrow \gamma \text{ asimptotik eğri,}$$

$$\tau_g = 0 \Leftrightarrow \gamma \text{ asli eğri}$$

olduğunu biliyoruz [15].

Sonuç 5.1

γ bir geodezik eğri olsun.

- $\bar{\gamma}$ de bir geodezik eğridir $\Leftrightarrow \gamma$ bir asli eğridir ya da $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir.
- $\bar{\gamma}$ bir asimptotik eğridir $\Leftrightarrow \gamma$ bir asli eğridir ya da $\theta = 0$ dir.

γ bir asimptotik eğri olsun.

- $\bar{\gamma}$ bir asli eğridir $\Leftrightarrow \theta$ sabit olmasıdır.

γ bir asli eğri olsun.

- $\bar{\gamma}$ bir asimptotik eğridir $\Leftrightarrow \gamma$ aynı zamanda geodezik eğridir ya da $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir.
- $\bar{\gamma}$ bir geodezik eğridir $\Leftrightarrow \gamma$ bir geodezik eğri ya da $\theta = 0$ dir.

Teorem 5.2 $\gamma, \mathbb{E}^3$ de M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri ve γ eğrisinin V –doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olsun. $\bar{\gamma}$ eğrisinin eğriliği ($\bar{\kappa}$) ve burulması ($\bar{\tau}$) ile γ eğrisinin geodezik eğriliği (κ_g), normal eğriliği (κ_n) ve geodezik burulması (τ_g) arasında

$$\bar{\kappa} = \sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}, \quad \bar{\tau} = \frac{-\kappa_n(\kappa_g^2 + \tau_g^2) - \kappa_g' \tau_g + \kappa_g \tau_g'}{\kappa_g^2 + \tau_g^2}$$

ilişkileri vardır.

İspat:

γ eğrisinin V –doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olduğundan $V = \bar{\gamma}' = \bar{T}$ yazılabilir. Böylece

$$\bar{\kappa} = \left\| \bar{T}' \right\| = \|V'\| = \left\| -\kappa_g T + \tau_g U \right\| = \sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\bar{\gamma}' = \bar{T} = V$$

$$\bar{\gamma}'' = \bar{T}' = V' = -\kappa_g T + \tau_g U$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}''' &= -\kappa_g' T - \kappa_g T' + \tau_g' U + \tau_g U' \\ &= -\kappa_g' T - \kappa_g (\kappa_g V + \kappa_n U) + \tau_g' U + \tau_g (-\kappa_n T - \tau_g V) \\ &= (-\kappa_g' - \tau_g \kappa_n) T + (-\tau_g^2 - \kappa_g^2) V + (\tau_g' - \kappa_g \kappa_n) U \end{aligned}$$

olduğundan

$$\bar{\gamma}' \times \bar{\gamma}'' = \begin{vmatrix} T & V & U \\ 0 & 1 & 0 \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \end{vmatrix} = \tau_g T + \kappa_g U$$

$$\Rightarrow \left\| \bar{\gamma}' \times \bar{\gamma}'' \right\| = \sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}$$

ve

$$\det \begin{pmatrix} \gamma', \gamma'', \gamma''' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_g' - \tau_g \kappa_n & -\tau_g^2 - \kappa_g^2 & \tau_g' - \kappa_g \kappa_n \end{vmatrix}$$

$$= -\kappa_n (\kappa_g^2 + \tau_g^2) - \kappa_g' \tau_g + \kappa_g \tau_g'$$

kullanılırsa

$$\bar{\tau} = \frac{\det \begin{pmatrix} \gamma', \gamma'', \gamma''' \end{pmatrix}}{\left\| \gamma' \times \gamma'' \right\|^2} = \frac{-\kappa_n (\kappa_g^2 + \tau_g^2) - \kappa_g' \tau_g + \kappa_g \tau_g'}{\kappa_g^2 + \tau_g^2}$$

elde edilir.

Sonuç 5.2 γ eğrisinin V -doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olmak üzere, $\bar{\gamma}$ nin geodezik eğriliğini $(\bar{\kappa}_g)$, normal eğriliğini $(\bar{\kappa}_n)$ ve geodezik burulmasını $(\bar{\tau}_g)$, γ eğrisinin eğrilik ve burulması (κ, τ) cinsinden ifade edelim:

γ eğrisinin asli normal vektör alanı ile V vektör alanı arasındaki açı φ olmak üzere,

$$\kappa_g = \kappa \cos \varphi, \quad \kappa_n = \kappa \sin \varphi, \quad \tau_g = \tau + \frac{d\varphi}{ds}$$

eşitliklerinin geçerli olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikler Teorem 5.1 de verilen sonuçlarda yerine yazılırsa

$$\bar{\kappa}_n = \tau \sin \theta + \varphi' \sin \theta - \kappa \cos \varphi \cos \theta$$

$$\bar{\tau}_g = -\theta' - \kappa \sin \varphi$$

$$\bar{\kappa}_g = \kappa \cos \varphi \sin \theta + \tau \cos \theta + \varphi' \cos \theta$$

bulunur.

5.1.1 V – doğrultu Eğrisi İçin Örnekler

1) $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ silindir yüzeyi üzerinde, $X\left(\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right) = \gamma(s)$ ile verilen

$\gamma(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)$ eğrisinin V – doğrultu eğrisini bulalım.

$X_u(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0)$ ve $X_v(u, v) = (0, 0, 1)$ olduğundan, yüzeyin birim normal vektör alanı

$$U = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = (\cos u, \sin u, 0)$$

şeklindedir. Böylece normal vektör alanının γ eğrisine kısıtlanmış

$$U(\gamma(s)) = U(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right)$$

ve γ eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$\gamma'(s) = T(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

olduğundan

$$V(s) = U(s) \times T(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

elde edilir.

Şimdi $V(s) = \bar{\gamma}'(s) = X_u(p(s), q(s))\frac{dp}{ds} + X_v(p(s), q(s))\frac{dq}{ds}$ eşitliğini sağlayan

$\bar{\gamma}(s) = X(p(s), q(s))$ eğrisini araştıralım.

$$\begin{cases} X_u(p(s), q(s)) = (-\sin p, \cos p, 0) \\ X_v(p(s), q(s)) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

olduğundan,

$$V(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = (-p' \sin p, p' \cos p, q')$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} -p' \sin p = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \\ p' \cos p = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \\ q' = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

bulunur. Buradaki birinci ve ikinci eşitliklerin kareleri alınıp, taraf tarafa toplanırsa

$$(p')^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow p' = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

veya

$$p(s) = \pm \frac{s}{\sqrt{2}} + c_1, \quad (c_1 = \text{sabit})$$

elde edilir.

$$p(s) = \frac{s}{\sqrt{2}} + c_1 \text{ alınır ve } -p' \sin p = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \text{ veya } p' \cos p = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

denkleminde yerine yazılırsa $c_1 = (2k-1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ bulunur.

$$p(s) = -\frac{s}{\sqrt{2}} + c_1 \text{ alınır ve } -p' \sin p = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \text{ veya } p' \cos p = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

denkleminde yerine yazılırsa c_1 sabiti s değişkenine bağlı çıkacağından,

$$p(s) = -\frac{s}{\sqrt{2}} + c_1 \text{ çözüm olamaz. O halde}$$

$$p(s) = \frac{s}{\sqrt{2}} + (2k-1)\pi$$

şeklindedir. Diğer taraftan, $q' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ denkleminde

$$q(s) = \frac{s}{\sqrt{2}} + c_2, \quad (c_2 = \text{sabit})$$

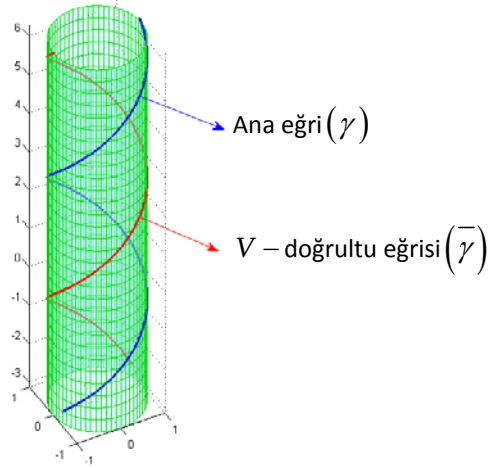
elde edilir. Böylece, γ eğrisinin V – doğrultu eğrisi

$$\bar{\gamma}(s) = X\left(p(s), q(s)\right) = X\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + (2k-1)\pi, \frac{s}{\sqrt{2}} + c_2\right)$$

eşitliğinden

$$\bar{\gamma}(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} + c_2\right)$$

elde edilir (Şekil 5.1).



Şekil 5. 1 Silindir üzerinde helisin V – doğrultu eğrisi ($c_2 = 0$ için)

2) $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ yüzeyi üzerinde, $X(s, 0) = \gamma(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ ile verilen dik kesit çemberinin V – doğrultu eğrisini bulalım.

$X_u(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0)$ ve $X_v(u, v) = (0, 0, 1)$ olduğundan, yüzeyin birim normal vektör alanı

$$U = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = (\cos u, \sin u, 0)$$

şeklindedir. Böylece normal vektör alanının γ eğrisine kısıtlanmış

$$U(\gamma(s)) = U(s) = (\cos s, \sin s, 0)$$

ve γ eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$T(s) = (-\sin s, \cos s, 0)$$

olduğundan

$$V(s) = U(s) \times T(s) = (0, 0, 1)$$

elde edilir.

Şimdi $V(s) = \bar{\gamma}'(s) = X_u(p(s), q(s)) \frac{dp}{ds} + X_v(p(s), q(s)) \frac{dq}{ds}$ eşitliğini sağlayan

$\bar{\gamma}(s) = X(p(s), q(s))$ eğrisini araştıralım.

$$\begin{cases} X_u(p(s), q(s)) = (-\sin p, \cos p, 0) \\ X_v(p(s), q(s)) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

olduğundan,

$$V(s) = (0, 0, 1) = (-p' \sin p, p' \cos p, q')$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} -p' \sin p = 0 \\ p' \cos p = 0 \end{cases} \text{ denklem sistemine göre } \sin p \text{ ve } \cos p \text{ aynı anda 0 olamayacağından}$$

$p' = 0$ elde edilir. Öyleyse $p(s) = c_1$ (sabit) dir.

$q' = 1$ eşitliğinden $q(s) = s + c_2$, ($c_2 = \text{sabit}$) elde edilir. Böylece γ eğrisinin

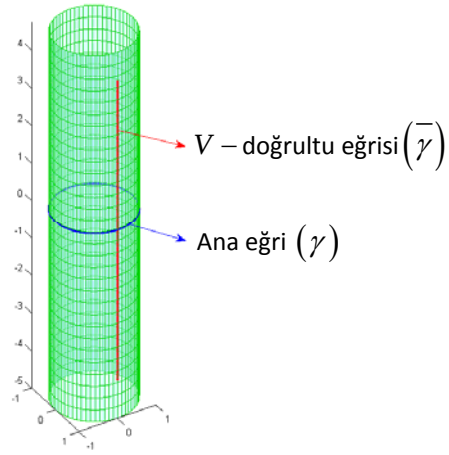
V – doğrultu eğrisi

$$\bar{\gamma}(s) = X(p(s), q(s)) = X(c_1, s + c_2)$$

eşitliğinden

$$\bar{\gamma}(s) = (\cos c_1, \sin c_1, s + c_2) = (c_3, c_4, s + c_2)$$

şeklinde silindirin ana doğruları olarak bulunur (Şekil 5.2).



Şekil 5. 2 Silindirin dik kesit çemberinin V – doğrultu eğrisi ($c_1 = c_2 = 0$ için)

3) $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ silindir yüzeyinin ana doğrularından $X(0, s) = \gamma(s) = (1, 0, s)$ doğrusunun V – doğrultu eğrisini bulalım.

$X_u(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0)$ ve $X_v(u, v) = (0, 0, 1)$ olduğundan, yüzeyin birim normal vektör alanı

$$U = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = (\cos u, \sin u, 0)$$

şeklindedir. Böylece normal vektör alanının γ eğrisine kısıtlanmış

$$U(\gamma(s)) = U(s) = (1, 0, 0)$$

ve γ eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$T(s) = (0, 0, 1)$$

oldüğundan

$$V(s) = U(s) \times T(s) = (0, -1, 0)$$

elde edilir.

Şimdi $V(s) = \bar{\gamma}'(s) = X_u(p(s), q(s)) \frac{dp}{ds} + X_v(p(s), q(s)) \frac{dq}{ds}$ eşitliğini sağlayan

$\bar{\gamma}(s) = X(p(s), q(s))$ eğrisini araştıralım.

$$V(s) = (0, -1, 0) = (-p' \sin p, p' \cos p, q')$$

$\left. \begin{array}{l} -p' \sin p = 0 \\ p' \cos p = -1 \end{array} \right\}$ denklem sisteminde $p' \neq 0$ olmalıdır. Bu durumda $\sin p = 0$ olup,

$p = k\pi, (k = 1, 2, \dots)$ bulunur. Fakat $p = k\pi \Rightarrow p' = 0$ çelişkisi elde edileceğinden bu denklem sisteminin çözümü yoktur. Dolayısıyla silindirin ana doğrularının V – doğrultu eğrisi yoktur.

4) $\mathbb{E}^3$ de $x^2 + y^2 = z^2$ dairesel konisi üzerindeki

$$\gamma(s) = \left(\frac{s}{2} \cos \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right), \frac{s}{2} \sin \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right), \frac{s}{2} \right)$$

eğrisinin V – doğrultu eğrisini bulalım.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \text{ alınırsa,}$$

$$\nabla f = (2x, 2y, -2z), \quad \|\nabla f\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

olup, yüzeyin birim normal vektör alanı

$$U = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

şeklindedir. Böylece normal vektör alanının γ eğrisine kısıtlanmış

$$U(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right), -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

ve γ eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$T(s) = \left(\frac{1}{2} \cos \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right), \frac{1}{2} \sin \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right), \frac{1}{2} \right)$$

olduğundan

$$V(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right), \frac{1}{2} \sin\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right), \frac{1}{2} \right)$$

elde edilir.

γ eğrisinin V – doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ ise $\bar{\gamma}'(s) = V(s)$ olduğundan,

$$\bar{\gamma}'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right), \frac{1}{2} \sin\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right), \frac{1}{2} \right)$$

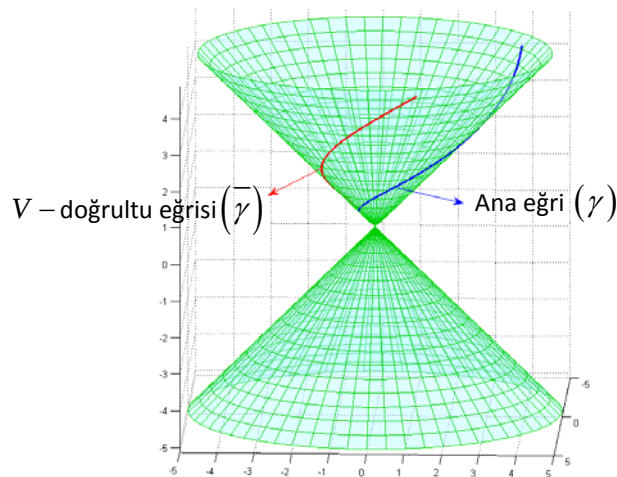
yani

$$\bar{\gamma}(s) = \left(-\frac{1}{6}s \left(\cos\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right) - 2\sqrt{2} \sin\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right) \right), -\frac{1}{6}s \left(2\sqrt{2} \cos\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right) + \sin\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right) \right), \frac{s}{2} \right)$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} (\bar{\gamma}_1')^2 + (\bar{\gamma}_2')^2 - (\bar{\gamma}_3')^2 &= \left[-\frac{1}{6}s \left(\cos\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right) - 2\sqrt{2} \sin\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right) \right) \right]^2 \\ &\quad + \left[-\frac{1}{6}s \left(2\sqrt{2} \cos\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right) + \sin\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right) \right) \right]^2 - \frac{s^2}{4} = 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $\bar{\gamma}$ yüzey üzerindedir (Şekil 5.3).



Şekil 5. 3 Koni üzerindeki bir eğrinin V – doğrultu eğrisi

Şimdi bazı düzlemsel eğrilerin V – doğrultu eğrilerine bakalım:

5) $z = 0$ düzlemindeki $\gamma(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ çemberinin V – doğrultu eğrisini bulalım.

$\gamma'(s) = (-\sin s, \cos s, 0)$ ve $\|\gamma'(s)\| = 1$ olup, γ eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$T(s) = (-\sin s, \cos s, 0)$$

ve birim normal vektör alanının γ eğrisine kısıtlanmışı

$U(s) = (0, 0, 1)$ dir. O halde,

$$V(s) = U(s) \times T(s) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin s & \cos s & 0 \end{vmatrix} = (-\cos s, -\sin s, 0)$$

elde edilir. Buradan

$$\bar{V}(s) = \gamma'(s) = (-\cos s, -\sin s, 0)$$

olup, her iki tarafın integrali alındığında, eğri $z = 0$ düzleminde olduğundan

$$\bar{\gamma}(s) = (-\sin s + c_1, \cos s + c_2, 0), \quad (c_1, c_2 \text{ sabit}) \text{ bulunur.}$$

6) $z = 0$ düzlemindeki $\gamma(s) = (s, s^2, 0)$ parabolünün V – doğrultu eğrisini bulalım.

$\gamma'(s) = (1, 2s, 0)$ ve $\|\gamma'(s)\| = \sqrt{1+4s^2}$ olduğundan γ eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$T(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4s^2}}, \frac{2s}{\sqrt{1+4s^2}}, 0 \right)$$

ve birim normal vektör alanının γ eğrisine kısıtlanmışı

$U(s) = (0, 0, 1)$ bulunur. O halde

$$V(s) = U(s) \times T(s) = (0, 0, 1) \times \left(\frac{1}{\sqrt{1+4s^2}}, \frac{2s}{\sqrt{1+4s^2}}, 0 \right) = \left(-\frac{2s}{\sqrt{1+4s^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+4s^2}}, 0 \right)$$

elde edilir. Buradan

$$V(s) = \bar{\gamma}'(s) = \left(-\frac{2s}{\sqrt{1+4s^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+4s^2}}, 0 \right)$$

olup, her iki tarafın integrali alındığında

$$\bar{\gamma}(s) = \left(-\int \frac{2s}{\sqrt{1+4s^2}} ds, \int \frac{1}{\sqrt{1+4s^2}} ds, 0 \right)$$

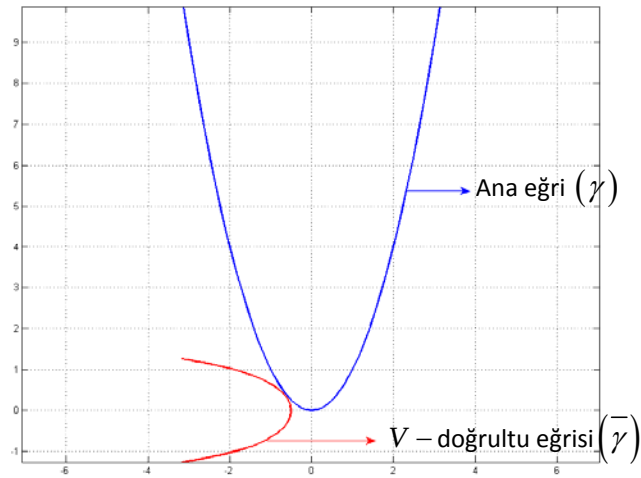
veya integraller hesaplanırsa

$$\bar{\gamma}(s) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{1+4s^2} + c_1, \frac{1}{2}\ln(2s + \sqrt{1+4s^2}) + c_2, c_3 \right), \quad (c_1, c_2, c_3 \text{ sabitler})$$

elde edilir. $\bar{\gamma}$ eğrisinin de $z = 0$ düzlemi üzerinde olması için $c_3 = 0$ olmalıdır. Böylece

$$\bar{\gamma}(s) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{1+4s^2} + c_1, \frac{1}{2}\ln(2s + \sqrt{1+4s^2}) + c_2, 0 \right), \quad (c_1, c_2 \text{ sabitler})$$

bulunur (Şekil 5.4).



Şekil 5. 4 $z = 0$ düzlemindeki parabolün V – doğrultu eğrisi ($c_1 = c_2 = 0$ için)

 $\mathbb{E}^4$ DE FRENET EĞRİSİ İLE BAĞLANTILI EĞRİLER VE UYGULAMALARI
6.1 Asli-doğrultu Eğrileri

Tanım 6.1 $\gamma, \mathbb{E}^4$ de Frenet elemanları $\{T, N, B_1, B_2, k_1, k_2, k_3\}$ olan bir Frenet eğrisi olsun. γ eğrisinin asli normal vektör alanının integral eğrisine γ eğrisinin **asli-doğrultu eğrisi** denir. γ eğrisinin asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ ise,

$$N(\bar{\gamma}(s)) = \gamma'(s)$$

yazılabilir.

Teorem 6.1 $\gamma, \mathbb{E}^4$ de k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip bir Frenet eğrisi ve γ nın asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olsun. $\bar{\gamma}$ eğrisinin eğrilikleri

$$\bar{k}_1 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

$$\bar{k}_2 = \frac{-(k_2'k_1 - k_1'k_2)^2 + k_2^2k_3^2(k_1^2 + k_2^2)}{(k_1^2 + k_2^2)\sqrt{(k_2'k_1 - k_1'k_2)^2 + k_2^2k_3^2(k_1^2 + k_2^2)}}$$

$$\bar{k}_3 = \frac{\sqrt{(k_1^2 + k_2^2)\left[(k_2'k_1 - k_1'k_2)^2 + k_2^2k_3^2(k_1^2 + k_2^2)\right]} \cdot \left(-2k_2'^2k_1k_3 + k_2'k_2(k_3'k_1 - 2k_1'k_3)\right) + k_2\left(-k_1'k_3k_2 + k_3\left(-k_2'k_1 + k_2 + k_1k_2k_3\right)\right)}{\left[(k_2'k_1 + k_1'k_2)^2 - k_2^2k_3^2(k_1^2 + k_2^2)\right]\sqrt{\left[(k_2'k_1 - k_1'k_2)^2 + k_2^2k_3^2(k_1^2 + k_2^2)\right]}}$$

olarak verilir.

İspat: γ nin Frenet elemanları $\{T, N, B_1, B_2, k_1, k_2, k_3\}$ ve $\bar{\gamma}$ nin Frenet elemanları $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3\}$ olsun.

γ nin asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olduğundan, $N(\bar{\gamma}(s)) = \bar{\gamma}'(s) = \bar{T}(s)$ yazılabilir. Buradan

$$\bar{\gamma}''(s) = \bar{T}'(s) = N'(s) = -k_1 T + k_2 B_1$$

olup, $\bar{k}_1 = \|\bar{\gamma}''\| = \|-k_1 T + k_2 B_1\|$ eşitliğinden $\bar{\gamma}$ eğrisinin birinci eğriliği

$$\bar{k}_1 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

bulunur. Böylece asli-doğrultu eğrisinin asli normal vektör alanı

$$\bar{N} = \frac{\bar{T}'}{\bar{k}_1} = \frac{-k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} T + \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} B_1$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\bar{\gamma}''' = -k_1' T - k_1 (k_1 N) + k_2' B_1 + k_2 (-k_2 N + k_3 B_2) = -k_1' T + (-k_1^2 - k_2^2) N + k_2' B_1 + k_2 k_3 B_2$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}'(s) \times \bar{\gamma}''(s) \times \bar{\gamma}'''(s) &= \begin{vmatrix} T & N & B_1 & B_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ -k_1' & -k_1^2 - k_2^2 & k_2' & k_2 k_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T & B_1 & B_2 \\ -k_1 & k_2 & 0 \\ -k_1' & k_2' & k_2 k_3 \end{vmatrix} \\ &= k_2^2 k_3 T + k_1 k_2 k_3 B_1 + (k_1' k_2 - k_2' k_1) B_2, \end{aligned}$$

$$\|\bar{\gamma}'(s) \times \bar{\gamma}''(s) \times \bar{\gamma}'''(s)\| = \sqrt{k_2^4 k_3^2 + k_1^2 k_2^2 k_3^2 + (k_1' k_2 - k_2' k_1)^2}$$

olup, asli-doğrultu eğrisinin ikinci binormal vektör alanı

$$\bar{B}_2(s) = \frac{\bar{\gamma}'(s) \times \bar{\gamma}''(s) \times \bar{\gamma}'''(s)}{\|\bar{\gamma}'(s) \times \bar{\gamma}''(s) \times \bar{\gamma}'''(s)\|} = \frac{k_2^2 k_3 T + k_1 k_2 k_3 B_1 + (k_1' k_2 - k_2' k_1) B_2}{\sqrt{k_2^4 k_3^2 + k_1^2 k_2^2 k_3^2 + (k_1' k_2 - k_2' k_1)^2}}$$

olarak elde edilir. $\bar{B}_1(s) = \bar{B}_2(s) \times \bar{T}(s) \times \bar{N}(s)$ eşitliğinden, asli-doğrultu eğrisinin birinci binormal vektör alanı

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{k_2^4 k_3^2 + k_1^2 k_2^2 k_3^2 + (k_1' k_2 - k_2' k_1)^2}} \begin{vmatrix} T & N & B_1 & B_2 \\ k_2^2 k_3 & 0 & k_1 k_2 k_3 & k_1' k_2 - k_2' k_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} & 0 \\ \frac{-k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} & 0 & \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{k_2^4 k_3^2 + k_1^2 k_2^2 k_3^2 + (k_1' k_2 - k_2' k_1)^2}} \begin{vmatrix} T & B_1 & B_2 \\ k_2^2 k_3 & k_1 k_2 k_3 & k_1' k_2 - k_2' k_1 \\ -k_1 & \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} & 0 \\ \frac{-k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} & \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{k_2^4 k_3^2 + k_1^2 k_2^2 k_3^2 + (k_1' k_2 - k_2' k_1)^2}} \left[\frac{k_1' k_2^2 - k_2' k_1 k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} T + \frac{k_1 k_2 k_1' - k_1^2 k_2'}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} B_1 - \frac{k_2^3 k_3 + k_1^2 k_2 k_3}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} B_2 \right]$$

şeklindedir. Böylece asli-doğrultu eğrisinin ikinci eğriliği $\bar{k}_2(s) = \frac{\langle \bar{B}_1(s), \bar{\gamma}'''(s) \rangle}{\bar{k}_1(s)}$

eşitliğinden

$$\bar{k}_2 = \frac{-\left(k_2' k_1 - k_1' k_2\right)^2 - k_2^2 k_3^2 (k_1^2 + k_2^2)}{(k_1^2 + k_2^2) \sqrt{\left(k_2' k_1 - k_1' k_2\right)^2 + k_2^2 k_3^2 (k_1^2 + k_2^2)}}$$

olarak bulunur. Son olarak,

$$\bar{\gamma}^{(4)}(s) = \left(-k_1'' + k_1^3 + k_1 k_2^2\right) T + \left(-3k_1 k_1' - 3k_2 k_2'\right) N + \left(-k_1^2 k_2 - k_2^3 - k_2 k_3^2 + k_2''\right) B_1 \\ + \left(2k_2' k_3 + k_2 k_3'\right) B_2$$

olup, asli-doğrultu eğrisinin üçüncü eğriliği $\bar{k}_3(s) = \frac{\langle \bar{B}_2(s), \bar{\gamma}^{(4)}(s) \rangle}{\bar{k}_1(s) \cdot \bar{k}_2(s)}$ eşitliğinden

$$\bar{k}_3 = \frac{\sqrt{(k_1^2 + k_2^2) \left[(k_2' k_1 - k_1' k_2)^2 + k_2^2 k_3^2 (k_1^2 + k_2^2) \right]}}{\left[(k_2' k_1 + k_1' k_2)^2 - k_2^2 k_3^2 (k_1^2 + k_2^2) \right] \sqrt{\left[(k_2' k_1 - k_1' k_2)^2 + k_2^2 k_3^2 (k_1^2 + k_2^2) \right]}} \left\{ \left(-2(k_2')^2 k_1 k_3 + k_2' k_2 (k_3' k_1 - 2k_1' k_3) \right) \right. \\ \left. + k_2 \left(-k_1' k_3' k_2 + k_3 \left(-k_2'' k_1 + k_2 + k_1 k_2 k_3 \right) \right) \right\}$$

bulunur.

6.2 B_1 – doğrultu Eğrileri

Tanım 6.2 $\gamma, \mathbb{E}^4$ de Frenet elemanları $\{T, N, B_1, B_2, k_1, k_2, k_3\}$ olan bir Frenet eğrisi olsun. γ eğrisinin birinci binormal vektör alanının integral eğrisine γ eğrisinin B_1 – doğrultu eğrisi denir. γ eğrisinin B_1 – doğrultu eğrisi $\hat{\gamma}$ ise,

$$B_1(\hat{\gamma}(s)) = \hat{\gamma}'(s)$$

yazılabilir.

Teorem 6.2 $\gamma, \mathbb{E}^4$ de k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip bir Frenet eğrisi ve γ eğrisinin B_1 – doğrultu eğrisi $\hat{\gamma}$ olsun. $\hat{\gamma}$ eğrisinin eğrilikleri,

$$\hat{k}_1 = \sqrt{k_2^2 + k_3^2}$$

$$\hat{k}_2 = \frac{-k_1^2 k_2^2 k_3^2 - k_1^2 k_2 k_2^3 + 2k_2 k_2' k_3 k_3' - (k_2' k_3)^2 - (k_3' k_2)^2}{\sqrt{k_2^4 k_1^2 + k_1^2 k_2^2 k_3^2 + (k_3' k_2 - k_2' k_3)^2 (k_2^2 + k_3^2)}}$$

$$\hat{k}_3 = \frac{\sqrt{k_2^2 + k_3^2} \left(2(k_2')^2 k_1 k_3 + k_2 k_2' (-2k_3' k_1 - k_1' k_3) + k_2 (-k_1' k_2 k_3' + k_3'' k_1 k_2 - k_2'' k_1 k_3 + k_1^3 k_2 k_3) \right)}{(k_3')^2 k_2 - 2k_2 k_3 k_2' k_3' + k_3^2 (k_2')^2 + k_1^2 k_2 (k_2 + k_3)}$$

ile verilir.

İspat: γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B_1, B_2, k_1, k_2, k_3\}$ ve $\hat{\gamma}(s)$ eğrisinin Frenet elemanları $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{k}_1, \hat{k}_2, \hat{k}_3\}$ olsun.

γ eğrisinin B_1 –doğrultu eğrisi $\hat{\gamma}$ olduğundan, $B_1 = \hat{\gamma}' = \hat{T}$ bulunur. Buradan

$\hat{\gamma}'' = -k_2 N + k_3 B_2$ olup, B_1 –doğrultu eğrisinin birinci eğriliği

$$\hat{k}_1 = \left\| \hat{\gamma}'' \right\| = \left\| -k_2 N + k_3 B_2 \right\| = \sqrt{k_2^2 + k_3^2}$$

bulunur. Böylece, B_1 –doğrultu eğrisinin asli normal vektör alanı

$$\hat{N}(s) = \frac{\hat{T}'(s)}{\hat{k}_1(s)} = \frac{-k_2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} N + \frac{k_3}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} B_2$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\hat{\gamma}'''(s) = -k_2' N - k_2 N' + k_3' B_2 + k_3 B_2' = k_1 k_2 T - k_2' N + (-k_2^2 - k_3^2) B_1 + k_3' B_2,$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}'(s) \times \hat{\gamma}''(s) \times \hat{\gamma}'''(s) &= \begin{vmatrix} T & N & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ k_1 k_2 & -k_2' & -k_2^2 - k_3^2 & k_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T & N & B_2 \\ 0 & -k_2 & k_3 \\ k_1 k_2 & -k_2' & k_3' \end{vmatrix} \\ &= (k_2 k_3' - k_2' k_3) T + (-k_1 k_2 k_3) N + (-k_1 k_2^2) B_2, \end{aligned}$$

$$\left\| \hat{\gamma}'(s) \times \hat{\gamma}''(s) \times \hat{\gamma}'''(s) \right\| = \sqrt{k_2^4 k_1^2 + k_1^2 k_2^2 k_3^2 + (k_3' k_2 - k_2' k_3)^2}$$

eşitliklerinden B_1 –doğrultu eğrisinin ikinci binormal vektör alanı

$$\hat{B}_2(s) = \frac{\hat{\gamma}'(s) \times \hat{\gamma}''(s) \times \hat{\gamma}'''(s)}{\left\| \hat{\gamma}'(s) \times \hat{\gamma}''(s) \times \hat{\gamma}'''(s) \right\|} = \frac{(k_2 k_3' - k_2' k_3) T + (-k_1 k_2 k_3) N + (-k_1 k_2^2) B_2}{\sqrt{k_2^4 k_1^2 + k_1^2 k_2^2 k_3^2 + (k_3' k_2 - k_2' k_3)^2}}$$

olarak bulunur. $\hat{B}_1(s) = \hat{B}_2(s) \times \hat{T}(s) \times \hat{N}(s)$ eşitliği kullanılırsa, B_1 –doğrultu eğrisinin birinci binormal vektör alanı

$$\hat{B}_1 = \frac{(-k_1 k_2 k_3^2 - k_1 k_2^3)T - \left(k_3(k_3' k_2 - k_2' k_3)\right)N + \left(-k_2(k_3' k_2 - k_2' k_3)\right)B_2}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2} \sqrt{k_2^4 k_1^2 + k_1^2 k_2^2 k_3^2 + (k_3' k_2 - k_2' k_3)^2}}$$

şeklindedir. O halde B_1 – doğrultu eğrisinin ikinci eğriliği

$$\hat{k}_2(s) = \frac{\langle \hat{B}_1(s), \hat{\gamma}'''(s) \rangle}{\hat{k}_1(s)} = \frac{-k_1^2 k_2^2 k_3^2 - k_1^2 k_2 k_2^3 + 2k_2 k_2' k_3 k_3' - (k_2' k_3)^2 - (k_3' k_2)^2}{\sqrt{k_2^4 k_1^2 + k_1^2 k_2^2 k_3^2 + (k_3' k_2 - k_2' k_3)^2} (k_2^2 + k_3^2)}$$

olup,

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}^{(4)}(s) = & \left(k_1' k_2 + 2k_1 k_2'\right)T + \left(k_1^2 k_2 - k_2'' + k_2^3 + k_2 k_3^2\right)N \\ & + \left(-3k_2 k_2' - 3k_3 k_3'\right)B_1 + \left(-k_3 k_2^2 - k_3^3 + k_3''\right)B_2 \end{aligned}$$

ve

$$\hat{k}_3(s) = \frac{\langle \hat{B}_2(s), \hat{\gamma}^{(4)}(s) \rangle}{\hat{k}_1(s) \cdot \hat{k}_2(s)}$$

eşitliklerinden B_1 – doğrultu eğrisinin üçüncü eğriliği

$$\hat{k}_3 = \frac{\sqrt{k_2^2 + k_3^2} \left(2(k_2')^2 k_1 k_3 + k_2 k_2' (-2k_3' k_1 - k_1' k_3) + k_2 (-k_1' k_2 k_3' + k_3'' k_1 k_2 - k_2'' k_1 k_3 + k_1^3 k_2 k_3) \right)}{(k_3')^2 k_2 - 2k_2 k_3 k_2' k_3' + k_3^2 (k_2')^2 + k_1^2 k_2 (k_2 + k_3)}$$

elde edilir.

6.3 B_2 – doğrultu Eğrileri

Tanım 6.3 $\gamma, \mathbb{E}^4$ de Frenet elemanları $\{T, N, B_1, B_2, k_1, k_2, k_3\}$ olan bir Frenet eğrisi olsun. γ eğrisinin ikinci binormal vektör alanının integral eğrisine γ eğrisinin B_2 – doğrultu eğrisi denir. γ eğrisinin B_2 – doğrultu eğrisi $\tilde{\gamma}$ ise,

$$B_2(\tilde{\gamma}(s)) = \tilde{\gamma}'(s)$$

yazılabilir.

Teorem 6.3 $\gamma, \mathbb{E}^4$ de k_1, k_2, k_3 eğriliklerine sahip bir Frenet eğrisi ve γ eğrisinin B_2 –doğrultu eğrisi $\tilde{\gamma}$ olsun. $\tilde{\gamma}$ eğrisinin eğrilikleri

$$\tilde{k}_1(s) = |k_3(s)|,$$

$$\tilde{k}_2(s) = -k_2(s),$$

$$\tilde{k}_3(s) = k_1(s)$$

ile verilir.

İspat: γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B_1, B_2, k_1, k_2, k_3\}$ ve $\tilde{\gamma}(s)$ eğrisinin Frenet elemanları $\{\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3\}$ olsun.

γ eğrisinin B_2 –doğrultu eğrisi $\tilde{\gamma}$ olduğundan,

$B_2 = \tilde{\gamma}' = \tilde{T}$ bulunur. Buradan $\tilde{\gamma}'' = -k_3 B_1$ olup, B_2 –doğrultu eğrisinin birinci eğriliği

$$\tilde{k}_1 = \|\tilde{\gamma}''\| = \|-k_3 B_1\| = |k_3|$$

bulunur. Böylece, B_2 –doğrultu eğrisinin asli normal vektör alanı

$$\tilde{N}(s) = \frac{\tilde{T}'(s)}{\tilde{k}_1(s)} = \frac{-k_3 B_1}{|k_3|} = \pm B_1(s)$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\tilde{\gamma}'''(s) = (-k_3)' B_1 - k_3 (-k_2 N + k_3 B_2) = (-k_3)' B_1 + k_2 k_3 N - k_3^2 B_2$$

ve

$$\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s) \times \tilde{\gamma}'''(s) = \begin{vmatrix} T & N & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \\ 0 & k_2 k_3 & -k_3' & -k_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T & N & B_1 \\ 0 & 0 & -k_3 \\ 0 & k_2 k_3 & -k_3' \end{vmatrix} = k_2 k_3^2 T$$

$$\left\| \tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s) \times \tilde{\gamma}'''(s) \right\| = \sqrt{k_2^2 k_3^4} = k_2 k_3^2$$

eşitliklerinden B_2 –doğrultu eğrisinin ikinci binormal vektör alanı

$$\tilde{B}_2(s) = \frac{\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s) \times \tilde{\gamma}'''(s)}{\left\| \tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s) \times \tilde{\gamma}'''(s) \right\|} = \frac{k_2 k_3^2 T(s)}{k_2 k_3^2} = T(s)$$

olarak bulunur. B_2 –doğrultu eğrisinin birinci binormal vektör alanı

$$\tilde{B}_1(s) = \tilde{B}_2(s) \times \tilde{T}(s) \times \tilde{N}(s) \text{ olmak üzere,}$$

$$\tilde{B}_1(s) = T(s) \times B_2(s) \times (-B_1(s)) \text{ olup,}$$

$$\tilde{B}_1(s) = \begin{vmatrix} T & N & B_1 & B_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} N & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -N(s)$$

$$\text{şeklindedir. Böylece } B_2 \text{ –doğrultu eğrisinin ikinci eğriliği, } \tilde{k}_2(s) = \frac{\langle \tilde{B}_1(s), \tilde{\gamma}'''(s) \rangle}{\tilde{k}_1(s)}$$

eşitliğinden

$$\tilde{k}_2(s) = -k_2(s)$$

bulunur.

$$\tilde{\gamma}^{(4)}(s) = (-k_1 k_2 k_3) T + (2k_2 k_3' + k_2' k_3) N + (k_2^2 k_3 + k_3^3 - k_3'') B_1 + (-3k_3 k_3') B_2$$

ve

$$\tilde{k}_3(s) = \frac{\langle \tilde{B}_2(s), \tilde{\gamma}^{(4)}(s) \rangle}{\tilde{k}_1(s) \cdot \tilde{k}_2(s)}$$

eşitliklerinden B_2 –doğrultu eğrisinin üçüncü eğriliği

$$\tilde{k}_3 = \frac{-k_1 k_2 k_3}{-k_2 k_3} = k_1$$

bulunur.

Teorem 6.4

1) $\gamma, \mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir Frenet eğrisi ve γ nın asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olsun. Bu durumda, γ bir slant helistir $\Leftrightarrow \bar{\gamma}$ bir genel helistir.

2) $\gamma, \mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir Frenet eğrisi ve γ nın B_1 –doğrultu eğrisi $\hat{\gamma}$ olsun. Bu durumda, γ bir B_1 –slant helistir $\Leftrightarrow \hat{\gamma}$ bir genel helistir.

3) $\gamma, \mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir Frenet eğrisi ve γ nın B_2 –doğrultu eğrisi $\tilde{\gamma}$ olsun. Bu durumda, γ bir B_2 –slant helistir $\Leftrightarrow \tilde{\gamma}$ bir genel helistir.

İspat: 1) γ eğrisinin asli-doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olduğundan, $N(\bar{\gamma}(s)) = \bar{\gamma}'(s) = \bar{T}(s)$ yazılabilir.

γ bir slant helistir $\Leftrightarrow \langle N, \mathbf{u} \rangle = \cos \theta$ ($\mathbf{u}$ sabit bir birim vektör ve $\theta = \text{sabit}$)

$$\Leftrightarrow \langle \bar{T}, \mathbf{u} \rangle = \cos \theta \Leftrightarrow \bar{\gamma} \text{ bir genel helistir.}$$

2) γ eğrisinin B_1 –doğrultu eğrisi $\hat{\gamma}$ olduğundan, $B_1(\hat{\gamma}(s)) = \hat{\gamma}'(s) = \hat{T}(s)$ yazılabilir.

γ bir B_1 -slant helistir $\Leftrightarrow \langle B_1, \mathbf{v} \rangle = \cos \theta$ ($\mathbf{v}$ sabit bir birim vektör ve $\theta = \text{sabit}$)

$$\Leftrightarrow \langle \hat{T}, \mathbf{v} \rangle = \cos \theta \Leftrightarrow \hat{\gamma} \text{ bir genel helistir.}$$

3) γ eğrisinin B_2 –doğrultu eğrisi $\tilde{\gamma}$ olduğundan, $B_2(\tilde{\gamma}(s)) = \tilde{\gamma}'(s) = \tilde{T}(s)$ yazılabilir.

γ bir B_2 -slant helistir $\Leftrightarrow \langle B_2, \mathbf{w} \rangle = \cos \theta$ ($\mathbf{w}$ sabit bir birim vektör ve $\theta = \text{sabit}$)

$$\Leftrightarrow \langle \tilde{T}, \mathbf{w} \rangle = \cos \theta \Leftrightarrow \tilde{\gamma} \text{ bir genel helistir.}$$

6.3.1 B_2 –rektifiyan Eğriler

Bu bölümde; $\mathbb{E}^4$ de B_2 –rektifiyan eğrileri tanımlanacak ve bu eğrilerle ilgili bazı karakterizasyonlar verilecektir.

Tanım 6.4 $\gamma, \mathbb{E}^4$ de bir Frenet eğrisi ve γ nın B_2 –doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ olsun. Eğer $\bar{\gamma}$ eğrisinin konum vektörü daima γ nın asli normalinin ortogonal tümleyeninde bulunuyorsa, yani $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\bar{\gamma} = \lambda_1 T + \lambda_2 B_1 + \lambda_3 B_2$$

oluyorsa, $\bar{\gamma}$ eğrisine B_2 –**rektifiyan eğrisi** denir.

Teorem 6.5 $\bar{\gamma}, \mathbb{E}^4$ de $\bar{k}_1(s), \bar{k}_2(s), \bar{k}_3(s)$ eğriliklerine sahip bir Frenet eğrisi olsun. $\bar{\gamma}$

bir B_2 –rektifiyan eğriye kongruenttir $\Leftrightarrow \left(\frac{c\bar{k}_3}{\bar{k}_2} \right)' + \left(s + c \int \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_3}{\bar{k}_2} ds \right) \bar{k}_1 = 0, c \in \mathbb{R}$ dir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\bar{\gamma}$ Frenet eğrisi bir B_2 –rektifiyan eğri olsun. Tanım gereğince, $\bar{\gamma} = \lambda_1 T + \lambda_2 B_1 + \lambda_3 B_2$ yazılır. Ayrıca, γ eğrisinin B_2 –doğrultu eğrisi $\bar{\gamma}$ ise $T = \bar{B}_2, B_1 = \bar{N}, B_2 = \bar{T}$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikler yerine yazılırsa $\bar{\gamma} = \lambda_1 \bar{B}_2 + \lambda_2 \bar{N} + \lambda_3 \bar{T}$ elde edilir. Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\bar{T} = \lambda_1' \bar{B}_2 + \lambda_1 (-\bar{k}_3 \bar{B}_1) + \lambda_2' \bar{N} + \lambda_2 (-\bar{k}_1 \bar{T} + \bar{k}_2 \bar{B}_1) + \lambda_3' \bar{T} + \lambda_3 (\bar{k}_1 \bar{N})$$

olup,

$$\left\{ \lambda_3' - \lambda_2 \bar{k}_1 = 1, \quad \lambda_2' + \lambda_3 \bar{k}_1 = 0, \quad -\lambda_1 \bar{k}_3 + \lambda_2 \bar{k}_2 = 0, \quad \lambda_1' = 0 \right.$$

elde edilir. Burada $\lambda_1' = 0$ eşitliğinden $\lambda_1 = c$ (sabit) olur. Ayrıca, $-\lambda_1 \bar{k}_3 + \lambda_2 \bar{k}_2 = 0$

eşitliğinden $\lambda_2 = \frac{c\bar{k}_3}{\bar{k}_2}$ olup, $\lambda_3' - \lambda_2 \bar{k}_1 = 1$ denkleminde yerine yazılırsa $\lambda_3 = s + c \int \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_3}{\bar{k}_2} ds$

elde edilir. Bulunan değerler $\lambda_2' + \lambda_3 \bar{k}_1 = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{c\bar{k}_3}{\bar{k}_2} \right)' + \left(s + c \int \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_3}{\bar{k}_2} ds \right) \bar{k}_1 = 0 \quad (6.1)$$

elde edilir.

($\Leftarrow$) $\mathbb{E}^4$ de $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$ eğriliklerine sahip ve eğrilikleri (6.1) denklemini sağlayan keyfi bir $\bar{\gamma}$ eğrisi alalım.

$$X = \bar{\gamma} - c\bar{B}_2 - \frac{c\bar{k}_3}{\bar{k}_2} \bar{N} - \left(s + c \int \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_3}{\bar{k}_2} ds \right) \bar{T}$$

eşitliğini sağlayan $X \in \mathbb{E}^4$ vektörünü göz önüne alalım.

$$X' = \bar{T} + c\bar{k}_3 \bar{B}_1 - \left(\frac{c\bar{k}_3}{\bar{k}_2} \right)' \bar{N} - \frac{c\bar{k}_3}{\bar{k}_2} (-\bar{k}_1 \bar{T} + \bar{k}_2 \bar{B}_1) - \left(1 + c \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_3}{\bar{k}_2} \right) \bar{T} - \left(s + c \int \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_3}{\bar{k}_2} ds \right) \bar{k}_1 \bar{N}$$

$$X' = \left\{ - \left(\frac{c\bar{k}_3}{\bar{k}_2} \right)' - \left(s + c \int \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_3}{\bar{k}_2} ds \right) \bar{k}_1 \right\} \bar{N} = \vec{0}$$

olacağından X bir sabit vektördür. Böylece

$$\bar{\gamma} = c\bar{B}_2 + \frac{c\bar{k}_3}{\bar{k}_2} \bar{N} + \left(s + c \int \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_3}{\bar{k}_2} ds \right) \bar{T} + X$$

yani, $\bar{\gamma}$ eğrisi X sabit vektörü tarafından belirlenen öteleme ile bir B_2 –rektifiyan eğriye kongruenttir.

Sonuç 6.1 $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$ eğriliklerinin tümünün sıfırdan farklı sabitler olduğunu kabul edelim. Bu durumda (6.1) numaralı denklem sağlanmayacağından, tamamen $\mathbb{E}^4$ de bulunan, sıfırdan farklı $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$ sabit eğriliklerine sahip bir B_2 –rektifiyan eğri yoktur.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında bazı yeni bağlantılı eğriler tanımlanmıştır. Bir Frenet eğrisinin birim Darboux vektör alanı ($\mathbf{W}$) yardımıyla $\mathbf{W}$ –doğrultu eğrisi tanımlanarak, bu eğrilerin eğrilikleri arasındaki ilişki elde edilmiştir. Ayrıca, 3-boyutlu Öklid uzayında yüzey üzerinde alınan birim hızlı bir eğrinin $\{\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{U}\}$ Darboux çatı alanındaki $\mathbf{V}$ teğet-normal vektör alanının integral eğrisi olan ve bu eğriyle aynı yüzey üzerinde kalan $\mathbf{V}$ –doğrultu eğrisi tanımlanarak, bu bağlantılı eğrilerin yüzeye ait eğrilikleri arasındaki ilişkiler verilmiştir. Son olarak, 4-boyutlu Öklid uzayında bir Frenet eğrisi için asli- doğrultu eğrisi, B_1 –doğrultu eğrisi, B_2 –doğrultu eğrisi ve B_2 –rektifiyan eğri tanımları yapılmış ve bu eğrilerin bazı karakterizasyonları elde edilmiştir.

Benzer düşünceyle; n –boyutlu Öklid uzayında bir Frenet eğrisiyle bağlantılı yeni eğriler tanımlanarak, bu eğrilerin eğrilikleri arasındaki ilişkiler araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Ali, A. T., (2012). "Position Vectors of Slant Helices in Euclidean Space $\mathbb{E}^3$ ", Journal of Egyptian Mathematical Society, 20: 1-6.
- [2] Izumiya, S. ve Takeuchi, N., (2004). "New Special Curves and Developable Surfaces", Turkish Journal of Mathematics, 28: 153-163.
- [3] Izumiya, S. ve Takeuchi, N., (2002). "Generic Properties of Helices and Bertand Curves", Journal of Geometry, 74: 97-109.
- [4] Kula, L., Ekmekci, N., Yayli, Y. ve İlarıslan, K., (2009). "Characterizations of Slant Helices in Euclidean 3-Space", Turkish Journal of Mathematics, 33: 1-13.
- [5] Kula, L. ve Yayli, Y., (2005). "On Slant Helix and Its Spherical Indicatrix", Applied Mathematics Computation, 169: 600-607.
- [6] Babaarslan, M., Tandođan, Y. A. ve Yaylı, Y., (2012). "A Note on Bertrand Curves and Constant Slope Surfaces According to Darboux Frame", Journal of Advanced Mathematical Studies, 5: 87-96.
- [7] Yılmaz, S., Özyılmaz, E. ve Turgut, M., (2010). "New Spherical Indicatrices and Their Characterizations", Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, 18: 337-354.
- [8] Ali, A. T., (2012). "New Special Curves and Their Spherical Indicatrices", Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries, 1: 28-38.
- [9] Chen, B. Y., (2003). "When Does the Position Vector of a Space Curve Always Lie in Its Rectifying Plane?", American Mathematical Monthly, 110: 147-152.
- [10] Chen, B. Y. ve Dillen, F., (2005). "Rectifying Curves as Centroides and Extremal Curves", Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, 33: 77-90.
- [11] Choi, J. H. ve Kim, Y. H., (2012). "Associated Curves of a Frenet Curve and Their Applications", Applied Mathematics and Computation, 218: 9116-9124.
- [12] İlarıslan, K. ve Nešović, E., (2008). "Some Characterizations of Rectifying Curves in the Euclidean Space $\mathbb{E}^4$ ", Turkish Journal of Mathematics, 32: 21-30.

- [13] Önder, M., Kazaz, M., Kocayiğit, H. ve Kılıç, O., (2008). “ B_2 – Slant Helix in Euclidean 4-Space $\mathbb{E}^4$ ”, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 29: 1433-1440.
- [14] Hacısalihoğlu, H. H., (2000). Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.
- [15] O’Neill, B., (1966). Elementary Differential Geometry, Academic Press, New York.
- [16] Sabuncuoğlu, A., (2010). Diferensiyel Geometri, Dördüncü Baskı, Nobel Yayınları, Türkiye.
- [17] Pressley, A., (2012). Elementary Differential Geometry, Second Edition, Springer Undergraduate Mathematics Series, London.
- [18] Kahraman, T., (2010). Öklid ve Minkowski Uzaylarında Mannheim D-Eğrileri, Yüksek Lisans Tezi, Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Manisa.
- [19] Hollasch, S. R., (1991). Four-space visualization of 4D objects, Master Thesis, Arizona State University, Arizona.
- [20] Williams, M. Z. ve Stein, F. M., (1964). “A triple product of vectors in four-space”, Mathematics Magazine 37(4): 230-235.
- [21] Aléssio, O., (2009). “Differential Geometry of Intersection Curves in $\mathbb{R}^4$ of Three Implicit Surfaces”, Computer Aided Geometric Design, 26: 455-471.
- [22] Gluck, H., (1966). “Higher curvatures of curves in Euclidean space”, American Mathematical Monthly, 73(7): 699-704.
- [23] Özdamar, E. ve Hacısalihoğlu, H. H., (1975). “A Characterization of Inclined Curves in Euclidean n-space”, Communication de La Faculte des Sciences de L’Universate d’ Ankara series A1, 24A: 15-22.
- [24] Kühnel, W., (2002). Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds, Second Edition, American Mathematical Society, Providence.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Nesibe GÜRHAN
Doğum Tarihi ve Yeri : 20.03.1988 / Fethiye
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : n.gurhan48@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik Öğretmenliği	Dokuz Eylül Üniversitesi	2011
Lise	Sayısal	Aydın/Ortaklar Anadolu Öğretmen Lisesi	2006

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2012-...	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Bildiri

1. Gürhan, N., Düldül, M., On Some Associated Curves of a Frenet Curve and W – direction Curves in Euclidean 3-space, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM 2013), pp. 341, (2013).