

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BELİRLİ DİZİ UZAYLARININ HER YÖNDE DÜZGÜN KONVEKS
YAPISI VE BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ**

NURDAN KURU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. VATAN KARAKAYA**

İSTANBUL, 2013

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BELİRLİ DİZİ UZAYLARININ HER YÖNDE DÜZGÜN KONVEKS
YAPISI VE BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Nurdan KURU tarafından hazırlanan tez çalışması 14/08/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Vatan Karakaya
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Vatan Karakaya
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ömer Gök
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Necip Şimşek
İstanbul Ticaret Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması sürecinde beni yönlendiren, bilgi ve yardımını esirgemeyen, maddi ve manevi desteğini her zaman hissettiğim değerli hocam Prof. Dr. Vatan KARAKAYA' ya saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca verdiğim kararlarda hep yanımda olan, benden ilgi ve alakasını hiçbir zaman esirgemeyen aileme, özellikle annem ve babama sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Son olarak bu süreçte yaşadığım sıkıntılarda beni dinleyen ve motive eden, sevgi ve dostluklarını her zaman hissettiğim arkadaşlarıma sonsuz teşekkürler.

Temmuz, 2013

Nurdan KURU

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	v
ÇİZELGE LİSTESİ.....	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	viii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti.....	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Hipotez.....	3
BÖLÜM 2	
TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	4
2.1 Temel Tanımlar.....	4
2.2 Dizi Uzayları.....	10
2.3 Banach Uzaylarında Temel Geometrik Kavramlar.....	11
2.4 Temel Teoremler ve Eşitsizlikler.....	16
BÖLÜM 3	
BELİRLİ DİZİ UZAYLARININ HER YÖNDE DÜZGÜN KONVEKS YAPISI VE BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ.....	33
3.1 $\ell_p(u, v)$ Uzayının Bazı Geometrik Özellikleri.....	33
3.2 $\ell_p(u, v)$ Uzayının Her Yönde Düzgün Konveks Yapısı	36
3.3 $\ell(p, u, v)$ Uzayının Bazı Geometrik Özellikleri	40
3.4 $\ell(p, u, v)$ Uzayının Her Yönde Düzgün Konveks Yapısı	47
3.5 $\ell_p(u, v)$ ve $\ell(p, u, v)$ Uzaylarının Diğer Geometrik Yapıları.....	50
BÖLÜM 4	
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	55
KAYNAKLAR	57
ÖZGEÇMİŞ	61

SİMGE LİSTESİ

bs	Sınırlı Serilerin Uzayı
B_X	X Uzayının Kapalı Birim Yuvarı
C	Kompleks Sayılar Kümesi
c	Yakınsak Diziler Uzayı
c_0	Sıfıra Yakınsak Diziler Uzayı
cs	Yakınsak Serilerin Uzayı
$diam(X)$	X Uzayının Çapı
$\varepsilon_0(X)$	Konvekslik Katsayısı
$\varepsilon_{0,z}(X)$	Yönlü Konvekslik Katsayısı
$\mathbb{K}$	R veya C Cismi
ℓ_1	Mutlak Yakınsak Serilerin Uzayı
ℓ_p	p. Kuvvetten Mutlak Yakınsak Serilerin Uzayı
ℓ_∞	Sınırlı Diziler Uzayı
N	$\{0,1,2,\dots\}$ Sayılar Kümesi
$\mathfrak{R}$	Reel Sayılar Kümesi
ρ	Konveks modül
S_X	X Uzayının Birim Küresi
w	Tüm Reel veya Kompleks Terimli Diziler Uzayı
$x_n \rightarrow x$	Yakınsama
$x_n \xrightarrow{w} x$	Zayıf Yakınsama
X^*	X Uzayının Dual Uzayı
X^{**}	X Uzayının İkinci Dual Uzayı
$\delta_X(\varepsilon), \delta(\varepsilon)$	Konvekslik Modülü
$\delta(z, \varepsilon), \delta_X(\rightarrow z, \varepsilon)$	Her Yönde Düzgün Konvekslik Modülü

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 2.1 ℓ_2 Uzayında Düzgün Konveksliğin Temsili	13
Çizelge 3.1 Her yönde düzgün konveks yapıda x seçimi	36
Çizelge 3.2 Her yönde düzgün konveks yapıda y seçim	37
Çizelge 3.3 Her yönde düzgün konveks yapının temsili	38

ÖZET

BELİRLİ DİZİ UZAYLARININ HER YÖNDE DÜZGÜN KONVEKS YAPISI VE BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Nurdan KURU

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Bazı dizi uzaylarının geometrik özelliklerinin incelendiği bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Banach uzaylarının geometrik özellikleri ile ilgili çalışmaların bir literatür özeti verilmiş ve bu çalışmanın amacı belirtilmiştir.

İkinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $\ell_p(u, v)$ ve $\ell(p, u, v)$ dizi uzaylarının konveks, kesin konveks, düzgün konveks ve her yönde düzgün konvekslik yapısı incelenmiş, diğer geometrik özellikleriyle ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

Son bölüm olan dördüncü bölümde ise uzayların sağladığı ispat edilen bütün geometrik yapıları listelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dizi uzayları, Banach uzay geometrisi, her yönde düzgün konvekslik, düzgün konvekslik, kesin konvekslik.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

THE UNIFORMLY CONVEX IN EVERY DIRECTION STRUCTURE AND SOME GEOMETRICAL PROPERTIES OF CERTAIN SEQUENCE SPACES

Nurdan KURU

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

This study, which deals with the geometrical properties of some sequence spaces, consists of four chapter.

In the first chapter, a literature review of studies concerned with Banach space geometry and the aim of this study is given.

In the second chapter, the principal definitions and theorems that used in other chapters are given.

In the third chapter, the convexity, strictly convexity, uniformly convexity and uniformly convex in every direction structure of the sequence spaces $\ell_p(u, v)$, $\ell(p, u, v)$ is studied and some consequences about other geometrical structures of these spaces are obtained.

In the last chapter, all of the geometrical structures of $\ell_p(u, v)$, $\ell(p, u, v)$ which are proved in the third chapter are listed.

Key Words: Sequence spaces, Banach space geometry, uniformly convex in every direction, uniformly convex, strictly convex.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE

1.1 Literatür Özeti

Son yıllarda dizi uzayları ve bu uzayların geometrik yapıları ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Dizi uzaylarının topolojik özelliklerinin yanı sıra geometrik özellikleri de önem kazanmış, böylelikle pek çok kavram açıklık kazanmıştır. Bu yapılarla alakalı çalışmaların bazıları aşağıda verilmiştir.

Kesin konveks Banach uzay ilk olarak 1936 yılında Clarkson [1] tarafından tanıtılmıştır. Aynı zamanda düzgün konvekslik üzerinde de çalışan Clarkson, L_p uzayının $1 < p < \infty$ iken düzgün konveks yapıda olduğunu kanıtlamıştır [1].

Clarkson [1] tarafından düzgün konveks uzayları tanımlamada kullanılan konvekslik modülü daha sonra tanımlanan çok sayıda modül için başlangıç niteliğindedir. 1970 yılında Goebel [2] tarafından bu modüle bağlı konvekslik karakteristiği tanımlanmıştır. Smulian 1939 yılındaki çalışmasında, zayıf düzgün rotundluk ve zayıf-yıldız düzgün rotundluk modülünü ele almıştır [3]. 1955 yılında Lovaglia [4] tarafından yerel konvekslik modülü tanıtılmış ve bu modüle bağlı konvekslik karakteristiği oluşturulmuştur. 1967 yılında Gurarii [5], yeni bir konvekslik modülü oluşturmuştur.

Her yönde düzgün konvekslik kavramı ise Garkavi [6] tarafından, her sınırlı altkümesi en fazla bir Cebayev merkezine sahip normlu lineer uzayları karakterize etme amacıyla tanıtılmıştır. Daha sonra Zizler [7], Day, James, Swaminathan [8] ve Fakhoury [9] düzgün rotundluğun bu genellemesi üzerinde çalışmalar yapmıştır [10]. Day, James, Swaminathan [8] çalışmalarında her yönde düzgün konvekslik yapısını yönlü konvekslik modülü ile değil, gerek ve yeter şartı veren bir teorem yardımıyla ele almıştır.

Normal ve düzgün normal yapı, sabit nokta teorisi çalışmalarında büyük önem taşımaktadır [11]. Pek çok çalışmada Banach uzaylarının normal yapısı, konvekslik modülleri ya da konvekslik katsayıları kullanılarak ele alınmıştır. Goebel [2], X Banach uzayının konvekslik modülü $\delta(1) > 0$ ise normal yapıda olduğunu kanıtlamıştır. 21 yıl sonra Gao ve Lau [12], $\delta(3/2) > 1/4$ ise uzayın düzgün normal yapıda olduğunu göstermişlerdir. Bu sonuçları genelleyerek Gao [13], $\varepsilon \in [0,1]$ olacak şekilde bazı ε değerleri için $\delta(1 + \varepsilon) > \varepsilon/2$ ise uzayın düzgün normal yapıda olduğunu ispatlamıştır [14].

Opial [15], kendi adıyla bilinen Opial özelliğini tanımlamış, bu özelliğin ℓ_p ($1 < p < \infty$) uzaylarında sağlanıp, $L_p[0, 2\pi]$ uzaylarında sağlanmadığını göstermiştir. Düzgün Opial özelliği Prus [16] tarafından 1992 yılında tanımlanmıştır. 1980 yılında Huff [17] yaklaşık olarak düzgün konvekslik kavramını tanımlamıştır. Ayrıca, her yaklaşık olarak düzgün konveks Banach uzayının düzgün Kadec-Klee özelliğine sahip ve refleksif yapıda olduğunu göstermiştir.

Cesaro dizi uzayları (ces_p) ve özellikleri pek çok çalışmaya konu olmuştur. 1970 yılında Shue [18], Cesaro dizi uzaylarını normla birlikte ilk defa tanımlamıştır. Liu, Wu ve Lee [19] 1936 yılında Kadec-Klee ve yerel düzgün rotund olma özelliklerini, Cui, Hudzik ve Pluciennik [20] 1997 yılında p -tipde Banach-Saks özelliğini incelemişlerdir. Normlu Cesaro dizi uzaylarının paranormlu dizi uzaylarına genellenmesi ise Sanhgan ve Suantai [21] tarafından yapılmıştır. Genelleştirilmiş dizi uzaylarının düzgün Opial özelliğini Petrot ve Suntai [22] çalışmıştır. 2007 yılında Karakaya [23], Lacunary içerikli dizi uzayını Luxemburg normla birlikte tanıtmış, rotundluk ve Kadec-Klee özelliklerini incelemiştir. Bu uzayın (β) ve düzgün Opial özellikleri ise Mongkolkeha ve Kumam [24] tarafından 2011 yılında incelenmiştir. 1997 yılında Khan ve Rahman [25], $ces[(p_n), (q_n)]$ dizi uzayını tanıtmış, bu uzayın vektör değerli dizi uzayına genelleştirilmesi ise 2005 yılında Mursaleen ve Khan [26] tarafından yapılmıştır. Şimşek ve Karakaya [27], $ces[(p_n), (q_n)]$ paranormlu dizi uzayını, $ces(X, p_n, q_n)$ vektör değerli uzayına genelleştirmiş, Kadec-Klee ve rotund olma özelliklerini incelemişlerdir. Savaş, Karakaya ve Şimşek [28], tanımladıkları $\ell(p)$ -tipde dizi uzayının bazı topolojik özelliklerinin yanı sıra p -tipde Banach-Saks ve Gurarii konvekslik modülü ile ilgili özelliklerini incelemişlerdir.

Leinder [29], (V, λ) -toplanabilirliği de la Vallee ortalamalarıyla 1965 yılında tanımlamıştır. 2000 yılında Malkowsky ve Savaş [30], 2010 yılında Savaş, Şimşek ve Karakaya [31], de la Vallee-Poussin ortalamalarıyla doğan yeni dizi uzayları tanımlamıştır. 2011 yılında Şimşek [32], 2010 yılındaki çalışmalarında [30] tanımlayıp bazı topolojik ve geometrik özelliklerini inceledikleri dizi uzayının düzgün Opial ve $k - NUC$ gibi geometrik özelliklerini çalışmıştır. Malkowsky ve Savaş [33], genelleştirilmiş ağırlıklı ortalamaları kullanarak yeni bir dizi uzayı tanımlamışlardır. Altay ve Başar [34], bu dizi uzayından esinlenerek paranormlu bir dizi uzayı tanımlamışlardır. Şimşek ve Karakaya [35] 2009 yılındaki çalışmalarında $\ell_p(u, v, p)$ modüler dizi uzayını tanımlayarak Kadec-Klee ve Opial özelliklerini incelemişlerdir.

1.2 Tezin Amacı

Tezin amacı birçok uygulama alanı olan bazı geometrik kavramların tanıtılması, birbirleriyle olan ilişkilerinin incelenmesi ve bazı dizi uzayları üzerinde uygulamalarının verilmesidir. Özellikle düzgün konvekslik ve her yönde düzgün konvekslik yapılarının konvekslik modülleri yardımıyla incelenmesi, bu modüller kullanılarak uzayın diğer yapılarıyla ilgili sonuçlar elde edilmesi hedeflenmiştir.

1.3 Hipotez

$\ell_p(u, v)$ ve $\ell(p, u, v)$ ($1 < p < \infty$) uzaylarının konveks, kesin konveks, düzgün konveks ve her yönde düzgün konveks yapılarının incelenmesi ve her yönde düzgün konvekslik için konvekslik modülü bulunması hedeflenmiştir. Çalışmada bu yapıların birbirleriyle ve diğer bazı geometrik yapılarla bağlantıları ele alınmış ve bu bağlantılar yardımıyla $\ell_p(u, v)$ ve $\ell(p, u, v)$ ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Temel Kavramlar

Bu bölümde daha sonra kullanılacak olan fonksiyonel analizin temel kavramlarına yer verilmiştir.

Tanım 2.1 (Lineer Uzay) X boştan farklı bir küme ve $\mathbb{K}$ reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X \text{ ve } \cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$$

ikili işlemleri aşağıda verilen özellikleri sağlıyorsa X cümlesine $\mathbb{K}$ üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) adı verilir [36].

Her $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ve $x, y, z \in X$ için

$$(L1) \ x + y = y + x$$

$$(L2) \ x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$(L3) \ x + \theta = x \text{ olacak şekilde } \theta \in X \text{ vardır.}$$

$$(L4) \text{ Her bir } x \in X \text{ için } x + (-x) = \theta \text{ olacak şekilde } (-x) \in X \text{ vardır.}$$

$$(L5) \ 1.x = x$$

$$(L6) \ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(L7) \ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$(L8) \ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

Tanım 2.2 (Alt Vektör Uzayı) Y , X vektör uzayının boştan farklı bir altkümesi olsun. Her $y_1, y_2 \in Y$ ve α, β skalerleri için $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$ sağlanıyorsa Y ye X vektör uzayının alt uzayı denir [37].

Tanım 2.3 (Metrik Uzay) Boş olmayan bir X kümesi ve bir

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y)$$

fonksiyonu verilsin. Eğer bu d fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için

$$(M1) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$(M3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adını alır ve bu durumda (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir [38].

Tanım 2.4 (Normlu Vektör Uzayı) X bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

$$x \rightarrow \|x\|$$

fonksiyonu her $x, y \in X$ ve her $a \in \mathbb{K}$ için

$$(N1) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta;$$

$$(N2) \quad \|ax\| = |a|\|x\|;$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı adı verilir [38].

Tanım 2.5 (Yarı Norm) X , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde lineer bir uzay olsun. Eğer $q : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa q dönüşümüne bir yarınorm, (X, q) ikilisine ise bir yarınormlu uzay denir [36].

$$i) \quad q(\lambda x) = |\lambda|q(x),$$

$$\text{ii) } q(x+y) \leq q(x) + q(y).$$

Tanım 2.6 (Paranormlu Uzay) X , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\lambda \in \mathbb{K}$ ve $x, y \in X$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa g 'ye bir paranorm ve (X, g) ikilisine de paranormlu uzay denir [30].

$$\text{i) } g(\theta) = 0,$$

$$\text{ii) } g(x) = g(-x),$$

$$\text{iii) } g(x+y) \leq g(x) + g(y),$$

$$\text{iv) } \lambda \rightarrow \lambda_0 \text{ ve } g(x - x_0) \rightarrow 0 \text{ iken } g(\lambda x - \lambda_0 x_0) \rightarrow 0$$

Tanım 2.7 (Modül) X bir vektör uzayı olsun. Eğer $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa modül olarak adlandırılır:

$$\text{i) } \rho(x) = 0 \text{ olması için gerek ve yeter şart } x = 0 \text{ olmasıdır.}$$

$$\text{ii) } |\alpha| = 1 \text{ olacak şekilde her } \alpha \in F \text{ ve her } x \in X \text{ için } \rho(\alpha x) = \rho(x) \text{ sağlanır.}$$

$$\text{iii) } \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1 \text{ ve bütün } x, y \in X \text{ iken } \rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y) \text{ olur.}$$

Eğer (iii) özelliği aşağıdaki özellikle yer değiştirebiliyorsa ρ konveks modüldür:

$$\text{iv) } \alpha + \beta = 1 \text{ olacak şekilde bütün } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \text{ için } \rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \rho(x) + \beta \rho(y) \text{ [39].}$$

Tanım 2.8 (Luxemburg Normu) $p = (p_k)$, her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k \geq 1$ şeklinde pozitif ve sınırlı reel sayılar dizisi olsun. $Ces(p)$ nin aşağıdaki şekilde tanımlı bütün $x = (x_k)$ reel dizilerinin uzayı olduğunu farzedelim:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{n=1}^k |x_n|^{p_k} \right) < \infty.$$

$$x \in Ces(p) \text{ için } \rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{n=1}^k |x_n|^{p_k} \right) \text{ olsun. } \rho \text{ bir modüldür ve}$$

$$\|x\| = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanan norma Luxemburg normu adı verilir [40].

Tanım 2.9 (Uzaklık, Çap) (X, d) bir metrik uzay ve $A, B \subset X$ in altkümeleri olsun.

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\},$$

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\},$$

$$d(A) = \sup\{d(a, a') : a, a' \in A\}$$

olarak tanımlandığında $d(x, A)$ x ve A arasındaki, $d(A, B)$ A ve B arasındaki uzaklıktır. $d(A)$ ise A kümesinin çapı olarak ifade edilir [36].

Tanım 2.10 (Sınırlı Küme) Bir metrik uzayın A altkümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart sonlu bir çapa sahip olması, yani $d(A) < \infty$ olmasıdır. Aksi halde sınırsız olarak adlandırılır [36].

Tanım 2.11 (Komşuluk) (X, d) bir metrik uzay ve $a \in X$ olsun. O halde, $r > 0$ için

$$S(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

a merkezli ve r yarıçaplı bir komşuluk (ya da açık yuvar, açık küre) olarak adlandırılır [36].

Tanım 2.12 (Açık Küme, Kapalı Küme) (X, d) bir metrik uzay olsun. $G \subset X$ in açık olması için gerek ve yeter şart G nin her noktasının komşuluğunun G de olmasıdır. Yani, eğer $x \in G$ ise öyle bir $r > 0$ vardır ki $S(x, r) \subset G$ dir.

(X, d) metrik uzayındaki bir kümenin kapalı olması için gerek ve yeter şart kümenin tümleyeninin açık olmasıdır [36].

Tanım 2.13 (Yakınsak Dizi) (x_n) reel sayılar dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı için $n > n_0$ iken

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

sağlanıyorsa (x_n) dizisi x e yakınsar denir ve $x_n \rightarrow x$ ya da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir [41].

Tanım 2.14 (Cauchy Dizisi) (X, d) bir metrik uzay, (x_n) X uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir [42].

Tanım 2.15 (Tam Uzak) (X, d) metrik uzakında her Cauchy dizisi yakınsıyorsa (yani, limiti X in bir elemanı ise) X uzakına tam uzak adı verilir [37].

Tanım 2.16 (Banach Uzak) Tam normlu uzaya Banach uzak denir [37].

Tanım 2.17 (Tam Paranormlu Uzak) Bir (X, g) paranormlu uzakında, alınan her Cauchy dizisi bu uzakın bir noktasına yakınsıyorsa (X, g) uzakına tam paranormlu uzak denir [36].

Tanım 2.18 (Lineer Fonksiyonel) X lineer bir uzak olmak üzere $f : X \rightarrow C$ dönüşümüne bir fonksiyonel denir.

Eğer her $x, y \in X$ için $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ eşitsizliği gerçekleşiyorsa f fonksiyoneline alt toplamsal, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ eşitsizliği gerçekleşiyorsa toplamsaldır denir.

Eğer her $x \in X$ ve her λ skaleri için $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ ise f fonksiyoneli homojendir denir.

Homojen ve alt toplamsal olan bir fonksiyonele alt lineer, toplamsal ve homojen olan bir fonksiyonele ise lineer fonksiyonel denir.

Her $x \in X$ için $|f(x)| \leq K \cdot \|x\|$ olacak şekilde bir $K > 0$ reel sayısı varsa $f : X \rightarrow C$ dönüşümüne sınırlı lineer fonksiyonel denir. Sınırlı bir lineer fonksiyonelin normu;

$$\|f\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

olarak verilir [36].

Tanım 2.19 (Süreklı Dual Uzak) X normlu bir uzak olsun. X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan $B(X, R)$ cümlesi

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq \theta}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

normu ile bir Banach uzak oluşturur. Bu uzaya X in dual uzakı denir ve X^* ile gösterilir [36].

Tanım 2.20 (İkinci Dual) X^* , X Banach uzayının duali olmak üzere $B(X^*, R)$ uzayına X uzayının ikinci duali denir ve X^{**} ile gösterilir. X^{**} da bir Banach uzayıdır [36].

Tanım 2.21 (Refleksif Uzay) X normlu bir uzay olmak üzere $X^{**} = X$ ise X uzayına refleksif uzay denir [36].

Tanım 2.22 (Zayıf Yakınsaklık) X bir normlu uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Her $f \in X^*$ için $n \rightarrow \infty$ iken $f(x_n) \rightarrow f(x)$ sağlanıyorsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ e zayıf yakınsar denir ve $x_n \xrightarrow{w} x$ olarak gösterilir [37].

Tanım 2.23 (Kuvvetli Yakınsaklık) X bir normlu lineer uzay ve $\{x_n\} \in X$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisi kuvvetli yakınsak olarak adlandırılır [37].

Tanım 2.24 (Konveks Fonksiyon) Sürekli bir $f : R \rightarrow R$ fonksiyonunun konveks olması için gerek şart $\forall x, y \in R$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

olmasıdır [43].

Tanım 2.25 (Minkowski Eşitsizliği) Sonlu sayıda, hepsi sıfır olmayan x_i, y_i ve $p > 1$ için aşağıdaki eşitsizliğe Minkowski eşitsizliği denir.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{1/p} \quad [44]$$

Tanım 2.26 Bu çalışmada $(X, \|\cdot\|)$ bir reel Banach uzayı olmak üzere sırasıyla B_X ve S_X ile X uzayının kapalı birim yuvarı ve birim küresi gösterilmiştir. Yani,

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

ve

$$S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

olarak ele alınacaktır.

2.2 Dizi Uzayları

Tanım 2.27 (Dizi Uzayları) Kompleks ve reel değerli tüm $x = (x_k)$ dizilerinin cümlesi w olarak gösterilmek üzere;

$x = (x_k), y = (y_k) \in w$ ve α bir sabit olsun.

$x + y = (x_k + y_k)$ ve $\alpha x = (\alpha x_k)$

şeklinde tanımlanan işlemler altında w bir lineer uzaydır.

Literatürde yer alan bazı iyi bilinen dizi uzayları aşağıda verilmiştir.

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty \right\}$$

$$c = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = l, l \in \mathbb{R} \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \right\}$$

$$\ell_1 = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty \right\}$$

$$\ell_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\} \quad (1 < p < \infty)$$

$$cs = \left\{ x \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n |x_k| \right| = 0 \right\}$$

$$bs = \left\{ x \in w : \sup \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| < \infty \right\}$$

Bu uzaylar sırasıyla sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak, mutlak yakınsak, p-yakınsak, yakınsak serilerin ve sınırlı serilerin uzayı olarak adlandırılır. Bu uzaylardan ℓ_∞ , c , c_0 uzayları $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$ normu altında birer Banach uzaylarıdır. Aynı şekilde ℓ_1 ve ℓ_p

uzayları sırasıyla $\|x\|_1 = \sum_k |x_k|$ ve $\|x\|_p = \left(\sum_k |x_k|^p \right)^{1/p}$ normları ile birer Banach uzaylarıdır. Bu uzaylar arasında

$$\ell_1 \subset \ell_p \subset \ell_q \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty \quad (1 < p < q < \infty)$$

şeklinde bir kapsama bağıntısı olup, aşağıda verildiği gibi bir norm eşitsizliği geçerlidir.

$$\|x\|_1 \geq \|x\|_p \geq \|x\|_q \geq \|x\|_\infty$$

[36], [45]

Tanım 2.28 Bu çalışmada yapısı incelenen uzaylar aşağıda verilmiştir.

İlk olarak normlu $\ell_p(u, v)$ ($1 < p < \infty$) uzayı

$$\ell_p(u, v) = \left\{ x \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i x_i \right|^p < \infty \right\}$$

şeklinde elemanlara sahip olup, $x \in \ell_p(u, v)$ için norm

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i x_i \right|^p \right)^{1/p}$$

olarak tanımlanmıştır [34].

İkinci uzay olan $\ell(p, u, v)$ ($1 < p < \infty$) paranormlu uzayı ise

$$\ell(p, u, v) = \left\{ x \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i x_i \right|^{p_k} < \infty \right\}$$

olarak tanımlanmıştır ve $x \in \ell(p, u, v)$ için kullanılan Luxemburg normu aşağıdaki şekildedir:

$$\|x\| = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}, \quad \rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i x_i \right|^{p_k}$$

[34].

Bu uzay için $H = \sup\{p_k\}$ olmak üzere $M = \max\{1, H\}$ olarak kullanılacaktır.

$\ell(p, u, v)$ paranormlu uzayının bazı yapıları Karakaya ve Şimşek tarafından incelenmiş, uzayın Kadec-Klee ve düzgün opial özelliğine sahip olduğu ispatlanmıştır [35].

2.3 Banach Uzaylarında Temel Geometrik Kavramlar

Bu bölüm, çalışmanın temelini oluşturan geometrik kavramların tanıtımına ayrılmıştır.

Tanım 2.29 (Konveks Yapı) X lineer bir uzayın altkümesi olsun. X uzayının konveks olması için gerek ve yeter şart $x, y \in X$, $\lambda + \mu = 1$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ iken $\lambda x + \mu y \in X$ olmasıdır.

Konveksliğin geometrik olarak tanımlanması da mümkündür.

$$L(x, y) = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

x ve y yi birleştiren doğru parçası olsun. Öyleyse X uzayının konveks olması için gerek ve yeter şartın X in x ve y yi içerdiği zaman $L(x, y)$ yi de içermesi olduğu söylenebilir [36].

Tanım 2.30 (Kesin Konvekslik, Rotundluk) Herhangi bir X Banach uzayının kesin konveks (rotund) olması için gerek şart aşağıdaki içermenin bütün $x, y \in X$ için geçerli olmasıdır:

$$\left. \begin{array}{l} \|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1 \\ \|x - y\| > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1. \quad [46]$$

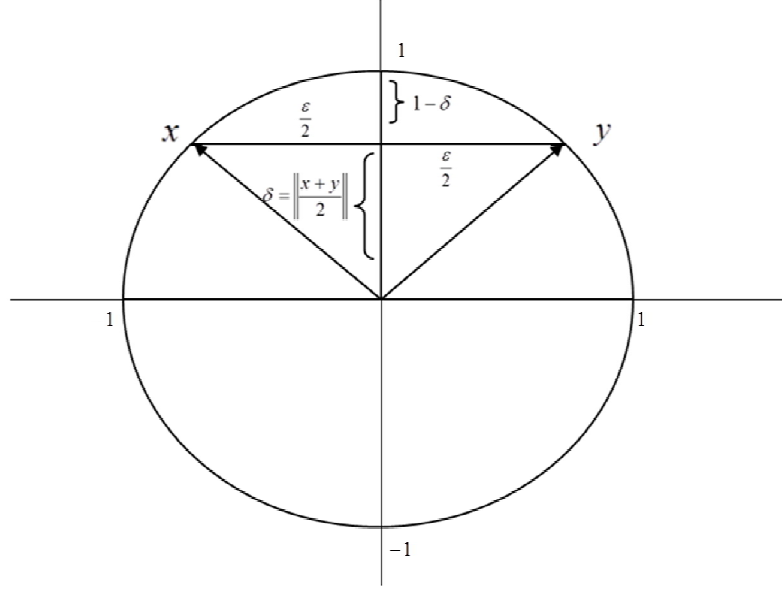
Başka bir ifadeyle, X Banach uzayının kesin konveks olması için gerek şart, $x, y \in S_X$ ve $x \neq y$ iken her $\lambda \in (0,1)$ için aşağıdaki eşitsizliğin sağlanmasıdır:

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < 1. \quad [47]$$

Tanım 2.31 (Düzgün Konvekslik) Herhangi bir X Banach uzayının düzgün konveks olması için gerek şart her $x, y \in S_X$ ve $0 < \varepsilon \leq 2$ için bir $\delta(\varepsilon) > 0$ var olmasıdır öyle ki

$$\left. \begin{array}{l} \|x\| = 1 \\ \|y\| = 1 \\ \|x - y\| \geq \varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon). \quad [1]$$

Örnek 2.1 ℓ_2 uzayı düzgün konvekstir.



Şekil 2.1 ℓ_2 Uzayında Düzgün Konveksliğin Temsili

ℓ_2 için aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}\delta^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 &= 1 \\ \Rightarrow \delta^2 &= 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow \delta &= \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}.\end{aligned}$$

Böylece ℓ_2 uzayı için konvekslik modülü oluşturulmuş oldu.

$p > 2$ olarak ele alındığında konvekslik modülü

$$\delta = \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}$$

olur.

Tanım 2.32 (Clarkson Konvekslik Modülü) Herhangi bir X Banach uzayı için konvekslik modülü fonksiyonu $\delta_X : [0,2] \rightarrow [0,1]$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{\|x+y\|}{2} : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \varepsilon \right\}. \quad [3]$$

Yani, $\delta_X(\varepsilon)$ herhangi bir $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki içermelerin daima doğru olduğu en büyük sayıdır: $x, y \in X$ için,

$$\left. \begin{array}{l} \|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1 \\ \|x - y\| \geq \varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta_X(\varepsilon). \quad [11]$$

Belirli bir X uzayı üzerinde çalışırken $\delta_X(\varepsilon)$ yerine $\delta(\varepsilon)$ ifadesi de kullanılabilir. Konvekslik modülü δ_X , $[0, 2]$ aralığında konveks ve $\varepsilon = 2$ için sürekli olmayabilir [47].

Konvekslik modülü iki-boyutlu karaktere sahiptir, yani $\varepsilon \in [0, 2]$ için

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf \delta_E(\varepsilon) \quad (2.1)$$

şeklinde X uzayının bütün iki-boyutlu alt uzayları üzerinden infimum alınarak tanımlanabilir [11].

Tanım 2.33 (Konvekslik Karakteristiği) Herhangi bir X Banach uzayı için konvekslik katsayısı ε_0 aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(X) = \sup\{\varepsilon \geq 0 : \delta(\varepsilon) = 0\}. \quad [2]$$

Konvekslik karakteristiği, X in birim küresinin üzerinde ya da yeterince yakınında bulunan parçalarının uzunluklarını sınırlayan bir değerdir.

Tanım 2.34 (Her Yönde Düzgün Konvekslik) $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayı ve $\|z\| = 1$ olan belli bir $z \in X$ için, X in $z \in X$ yönünde konvekslik modülü $\delta : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonudur ve

$$\delta(z, \varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{\|x + y\|}{2} : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, x - y = \varepsilon z \right\}.$$

şeklinde tanımlanır. Her $\varepsilon > 0$ ve $z \in X$ için $\delta(z, \varepsilon) > 0$ sağlanıyorsa X uzayına her yönde düzgün konveks denir [48], [11].

Yönlü konvekslik modülü $\delta(z, \varepsilon)$ veya $\delta(\rightarrow z, \varepsilon)$ şeklinde gösterilebilir.

Her yönde düzgün konvekslik modülü için karakteristik aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\varepsilon_{0,z}(X) = \sup\{\varepsilon : \delta(z, \varepsilon) = 0\}. \quad [45]$$

Tanım 2.35 (Yerel Düzgün Konvekslik) X bir Banach uzay olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $x \in S_X$ için,

$$\|x - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta \quad (\forall y \in X)$$

olacak şekilde $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ varsa X uzayına yerel düzgün konveks adı verilir.

X Banach uzayı için yerel konvekslik modülü her $x \in S_X$ ve $0 < \varepsilon \leq 2$ için aşağıdaki şekildedir:

$$\delta_X(x, \varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{\|x + y\|}{2} : y \in S_X, \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}.$$

Açıkça görülmektedir ki, bir X Banach uzayının yerel düzgün konveks olması için her $x \in S_X$ ve $0 < \varepsilon \leq 2$ için $\delta(x, \varepsilon) > 0$ olması gerekmektedir [47], [49].

Tanım 2.36 (Yarıçap, Chebyshev Yarıçapı, Chebyshev Merkezi) X Banach uzayının herhangi A, B altkümeleri için:

$$r_x(A) = \sup\{\|x - y\| : y \in A\} \quad (x \in X);$$

$$r_B(A) = \inf\{r_x(A) : x \in B\};$$

$$C_B(A) = \{x \in B : r_x(A) = r_B(A)\}.$$

$r_x(A)$ sayısına A nın x elemanına ait yarıçapı, $r_B(A)$ ve $C_B(A)$ ye sırasıyla A nın B ye ait Chebyshev yarıçapı ve Chebyshev merkezi adı verilir.

$A = B$ olduğu durumda bu son iki ifade için $r(A)$ ve $C(A)$ kullanılır ve B ye ait ibare kaldırılır [11].

Tanım 2.37 (Yarıçapsal, Yarıçapsal Olmayan Nokta) $r_x(A) = \text{diam} A$ yi sağlayan x noktasına yarıçapsal nokta denir. Bu şekilde olmayan noktalara ise yarıçapsal olmayan nokta adı verilir [11].

Tanım 2.38 (Normal Yapı) Bir X Banach uzayının kapalı, konveks bir C altkümesinin normal yapı özelliğine sahip olması için gerek şart C nin herhangi sınırlı, konveks, tek noktadan farklı bir K altkümesinin yarıçapsal olmayan nokta içermesidir.

Eğer X in her sınırlı kapalı konveks altkütmesi normal yapıdaysa, X normal yapıdadır denir [50].

Tanım 2.39 (Düzgün Normal Yapı) X bir Banach uzay olsun. Eğer X in her sınırlı, kapalı, konveks C altkütmesi $h \in (0,1)$ iken

$$\sup \{ \|z - x\| : x \in C \} \leq h \cdot \text{diam}(C)$$

olacak şekilde bir z noktası içeriyorsa X uzayına düzgün normal yapıdadır denir [51], [52].

Tanım 2.40 (Düzgün Karesel Olmayan Yapı) Herhangi bir X Banach uzayında birim yuvardan seçilen x ve y elemanları için

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta \text{ ya da } \left\| \frac{x-y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$$

olacak şekilde $\delta > 0$ varsa uzaya düzgün karesel olmayan yapıdadır denir [53].

Tanım 2.41 (Kadec-Klee Noktası) $n \rightarrow \infty$ ve $\|x_n\| \rightarrow 1$ şartını sağlayan $(x_n) \in X$ için $x_n \xrightarrow{w} x$ iken $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ sağlanıyorsa $x \in S_X$ noktası Kadec-Klee noktası (H-noktası) olarak adlandırılır [54].

Tanım 2.42 (Kadec-Klee) S_X in her noktası B_X için bir H-noktası ise X Banach uzayına Kadec-Klee özelliğine sahiptir denir [54].

2.4 Temel Teoremler ve Eşitsizlikler

Bu bölümde daha sonra kullanılacak olan temel teoremler ve eşitsizliklere yer verilecektir.

Teorem 2.1 Her kesin konveks uzay konvektir.

Teorem 2.2 Düzgün konveks her uzay kesin konvektir. Dahası, sonlu boyutlu uzaylarda bu iki yapı denktir [11].

İspat X düzgün konveks Banach uzay olsun. Bu takdirde, $x, y \in S_X$ ve $0 < \varepsilon \leq 2$ için

$$\left. \begin{array}{l} \|x\| = 1 \\ \|y\| = 1 \\ \|x - y\| \geq \varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır. Yani, $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, $\|x - y\| > 0$ iken $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$ her zaman sağlanır. Böylece uzay kesin konvektir.

Teorem 2.3 Düzgün konveks her uzay her yönde düzgün konvektir, ancak her yönde düzgün konveks her uzay düzgün konveks olmak zorunda değildir [11].

Teorem 2.4 Her yönde düzgün konveks her uzay kesin konvektir [47].

Teorem 2.5 X bir Banach uzay ve konvekslik modülü δ ve konvekslik karakteristiği ε_0 olsun. Öyleyse δ , $[0, 2)$ aralığı üzerinde sürekli ve $[\varepsilon_0, 2]$ aralığı üzerinde kesin artandır [11].

İspat Öncelikle X uzayının iki boyutlu olduğu farz edilecektir; böylece uzayın birim yuvarı $\Re^2$ de kapalı, sınırlı, konveks ve 0 noktasında simetriktir. Farz edelim ki $u, v \in X$ ve $\|u\| = \|v\| = 1$ olsun.

$$\delta_{u,v}(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \varepsilon, x-y = \lambda u, x+y = \mu v \right\}$$

olarak tanımlandığında $\delta_{u,v}(\varepsilon)$ nin konveks bir fonksiyon olduğu açıktır. Dolayısıyla,

$$\delta_{u,v}(\varepsilon) = \inf \{ \delta_{u,v}(\varepsilon) : \|u\| = 1, \|v\| = 1, u \neq \pm v \} \quad (2.2)$$

sağlanır. $a \in (0, 2)$ ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [0, a]$ olarak seçildiğinde $\delta_{u,v}(\varepsilon)$ nin konveksliği aşağıdaki eşitsizliği gerektirir:

$$\frac{\delta_{u,v}(\varepsilon_2) - \delta_{u,v}(\varepsilon_1)}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \leq \frac{\delta_{u,v}(2) - \delta_{u,v}(a)}{2 - a} \leq \frac{1}{2 - a}.$$

Bu ifade $\delta_{u,v}(\varepsilon)$ yönlü modülünün $[0, a]$ aralığında yarı sürekli bir aile oluşturur. (2.1)

ve (2.2) den dolayı herhangi bir X Banach uzayı ve $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq a < 2$ için,

$$\delta_x(\varepsilon_2) - \delta_x(\varepsilon_1) \leq \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2 - a}$$

yazılabilir. δ_x azalmayan, konveks $\delta_{u,v}$ fonksiyonlarının infimumu olduğundan dolayı δ_x fonksiyonu $[\varepsilon_0, 2]$ aralığı üzerinde kesin konvektir.

Teorem 2.6 Herhangi bir X Banach uzayının kesin konveks olması için gerek ve yeter şart $\delta(2)=1$ olmasıdır [11].

İspat $\delta(2)=1$ ve $x, y \in X$ için $\|x\| = \|y\| = \|(x+y)/2\| = 1$ olsun. Bu takdirde

$$\left\| \frac{x-y}{2} \right\| = \left\| \frac{x+(-y)}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\|x - (-y)\|) = 1 - \delta(2) = 0$$

olur. Böylece $x = y$ elde edilir ve X kesin konvektir.

Diğer taraftan, X uzayının kesin konveks ve $\|x\| = \|y\| = \|(x-y)/2\| = 1$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca $x \neq -y$ olsun. Bu takdirde $1 = \|(x-y)/2\| = \|(x+(-y))/2\| < 1$ çelişkisi elde edilir. Böylece $x = -y$ sağlanır ve $\delta(2)=1$ olur.

Önerme 2.1 Normlu bir uzayın rotund (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart iki boyutlu alt uzaylarının her birinin rotund (kesin konveks) olmasıdır [55].

Teorem 2.7 Herhangi bir X uzayının düzgün konveks olması için gerek ve yeter şart konvekslik modülünün her $\varepsilon \in (0,2]$ için $\delta_X(\varepsilon) > 0$ olmasıdır [11].

İspat X düzgün konveks bir Banach uzay olsun. Bu takdirde her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki bütün $x, y \in X$ için $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ ve $\|x-y\| \geq \varepsilon$ iken

$$0 < \delta_X(\varepsilon) \leq 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|$$

olur. Böylece, konvekslik modülünün tanımından dolayı $\delta_X(\varepsilon) > 0$ sağlanır.

Yeter şartı ispatlamak için X , δ_X modülüne sahip bir Banach uzay ve her $\varepsilon \in (0,2]$ için $\delta_X(\varepsilon) > 0$ olsun. Belirli bir $\varepsilon \in (0,2]$ değeri için $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ ve $\|x-y\| \geq \varepsilon$ olacak şekilde $x, y \in X$ alındığında

$$0 < \delta_X(\varepsilon) \leq 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|$$

yazılabilir ki bu da $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$ olmasını gerektirir. Burada $\delta(\varepsilon) = \delta_X(\varepsilon)$ (yani x ve y den bağımsız) olur ve uzay düzgün konvektir.

Teorem 2.8 Herhangi bir X uzayının düzgün konveks olması için gerek ve yeter şart $\varepsilon_0(X) = 0$ olmasıdır [11], [47].

İspat Bu şart her $\varepsilon \in (0,2]$ için $\delta_X(\varepsilon) > 0$ olmasını gerektirdiğinden Teorem 2.6 ya benzer bir şekilde ispatlanır.

Teorem 2.9 X bir Banach uzay iken aşağıdaki şartlar denktir:

a.) X düzgün konvektir.

b.) X deki iki $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizisi için,

$$\|x_n\| \leq 1, \|y_n\| \leq 1 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n\| = 2 \text{ ise } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0 \quad (2.3)$$

sağlanır [47].

İspat $(a) \Rightarrow (b)$ X uzayı düzgün konveks ve $\{x_n\}, \{y_n\}$; her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n\| = 2$ olacak şekilde X uzayından iki dizi olsun. Çelişki elde etmek amacıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| \neq 0$ olduğunu farz edelim. O halde bazı $\varepsilon > 0$ için

$$\|x_{n_i} - y_{n_i}\| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\{n_i\}$ indeks kümesi vardır.

X düzgün konveks olduğundan öyle bir $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki

$$\|x_{n_i} + y_{n_i}\| \leq 2(1 - \delta(\varepsilon)) \quad (2.4)$$

sağlanır. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n\| = 2$ olduğu bilindiğinden (2.4) de yerine yazıldığında

$$2 \leq 2(1 - \delta(\varepsilon))$$

elde edilir ve bu ifade çelişki verir.

$(b) \Rightarrow (a)$ (2.3) deki şartların sağlandığı varsayalım. Eğer X düzgün konveks değilse, $\varepsilon > 0$ için

$$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \|x - y\| \leq 2(1 - \delta(\varepsilon))$$

durumunu sağlayacak bir $\delta(\varepsilon) > 0$ bulunamaz.

O halde X de aşağıdaki şartları sağlayan $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri bulunabilir

(i) $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1,$

$$(ii) \|x_n + y_n\| \geq 2(1 - 1/n),$$

$$(iii) \|x_n - y_n\| \geq \varepsilon.$$

(ii) den dolayı $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n\| = 2$ sağlanır ve bu durumda $\|x_n - y_n\| \geq \varepsilon$ olması hipotezle çelişir. Yani, X uzayı düzgün konveks olmalıdır.

Teorem 2.10 Aşağıdakilerden her biri normlu lineer bir X uzayının her yönde düzgün konveks olması için gerek ve yeter şarttır.

(i) Eğer X de

$$a.) \|x_n\| = \|y_n\| = 1, (\forall n)$$

$$b.) x_n - y_n = \alpha_n z, (\forall n)$$

c.) $\|x_n + y_n\| \rightarrow 2$, olacak şekilde $\{x_n\}, \{y_n\}$ dizileri ve sıfırdan farklı z elemanı varsa $\alpha_n \rightarrow 0$ olur.

(ii) Eğer X de

$$d.) \|x_n\| \leq 1, \|y_n\| \leq 1, (\forall n)$$

$$e.) x_n - y_n \rightarrow z,$$

$$f.) \|x_n + y_n\| \rightarrow 2,$$

olacak şekilde $\{x_n\}, \{y_n\}$ dizileri varsa $z = 0$ sağlanır.

(iii) X deki sınırlı bir $\{x_n\}$ dizisi için

$$2^{p-1} (\|x_n + z\|^p + \|x_n\|^p) - \|2x_n + z\|^p \rightarrow 0$$

sağlayacak hiçbir sıfırdan farklı z yoktur.

(iv) X deki her sıfırdan farklı z için, öyle bir pozitif Δ vardır ki $\|x\| \leq 1$ ve $\|x + z\| \leq 1$

iken $\left\|x + \frac{1}{2}z\right\| < 1 - \Delta$ sağlanır [8].

Teorem 2.11 Her düzgün konveks Banach uzay refleksiftir [47].

İspat X düzgün konveks bir Banach uzay olsun. $S_{X^*} := \{j \in X^* : \|j\|_* = 1\}$ X^* da birim yuvar ve $f \in S_{X^*}$ olsun. $\{x_n\}$ in S_X de $f(x_n) \rightarrow 1$ şeklinde bir dizi olduğunu kabul edelim. $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy olduğunu göstermek istiyoruz. $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy olmadığını farz edelim. $\{x_n\}$ in $\{x_{n_i}\}, \{x_{n_j}\}$ şeklinde iki alt dizisi için $\|x_{n_i} - x_{n_j}\| \geq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ in varlığını kabul edelim. X uzayının düzgün konveks olması $\|(x_{n_i} + x_{n_j})/2\| < 1 - \delta$ şeklinde $\delta(\varepsilon) > 0$ in varlığını garanti eder.

$$\left| f\left(\frac{x_{n_i} + x_{n_j}}{2}\right) \right| \leq \|f\|_* \left\| \frac{x_{n_i} + x_{n_j}}{2} \right\| < \|f\|_* (1 - \delta) = 1 - \delta$$

ve $f(x_n) \rightarrow 1$ çelişki verir. Böylece $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir ve $x_n \rightarrow x$ şeklinde $x \in X$ vardır. $x \in S_X$ olduğu açıktır. Buradan,

$$\|x\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 1$$

yazabiliriz. James teoremi kullanılarak (bir Banach uzayın refleksif olması için gerek ve yeter şartın her $f \in S_{X^*}$ için, $f(x) = 1$ olacak şekilde $x \in S_X$ in varlığı olduğunu söyler) X uzayının refleksif olduğu doğrulanır.

Teorem 2.12 Her düzgün konveks Banach uzay yerel düzgün konvektir [47].

Teorem 2.13 Her yerel düzgün konveks uzay kesin konvektir [47].

Teorem 2.14 Düzgün konveks yapıda bir Banach uzayın her kapalı, konveks, sınırlı C altkümesi normal yapıdadır [47].

İspat D, C nin $diam(D) > 0$ şeklinde kapalı, konveks bir altkümesi ve x_1 , D de keyfi bir eleman olsun. $\|x_1 - x_2\| \geq d/2$ şeklinde bir $x_2 \in D$ seçildiğinde D konveks olduğu için $(x_1 + x_2)/2 \in D$ olur. $x_0 = (x_1 + x_2)/2$ olsun. Düzgün konvekslikten dolayı,

$$\|u\| \leq r, \|v\| \leq r \text{ ve } \|u - v\| \geq \varepsilon > 0 \Rightarrow \left\| \frac{u + v}{2} \right\| \leq \left(1 - \delta_x \left(\frac{\varepsilon}{r} \right) \right) r$$

yazılabilir. Böylece her $x \in D$ için

$$\|x - x_0\| = \left\| x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| = \left\| \frac{(x - x_1) + (x - x_2)}{2} \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq d \left(1 - \delta_X \left(\frac{d}{2d} \right) \right) \\
&= d \left(1 - \delta_X \left(\frac{1}{2} \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$\delta_X \left(\frac{1}{2} \right) > 0$ olduğundan

$$\|x - x_0\| < d$$

olur. Sonuç olarak,

$$\sup \{ \|x - x_0\| : x \in D \} < \text{diam}(D).$$

Teorem 2.15 Düzgün konveks her uzay normal yapıdadır [47].

İspat Teorem 2.15 ten dolayı sağlanır.

Önerme 2.2 X bir Banach uzay ve C , X in $\text{diam}(C) > 0$ şeklinde konveks, sınırlı altkümesi olsun. O halde, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $x_0 \in C$ vardır ki bazı $z \in S_X$ için

$$\sup \{ \|x - x_0\| : x \in C \} \leq d \left(1 - \delta_X \left(z, \frac{d - \varepsilon}{d} \right) \right)$$

sağlanır [47].

İspat Verilen $d > \varepsilon > 0$ için $\|x_1 - x_2\| \geq d - \varepsilon$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in C$ seçilsin.

$x_0 := (x_1 + x_2)/2$ ve $z := (x_1 - x_2)/\|x_1 - x_2\|$ olarak belirlensin. $\|x - x_1\| \leq d, \|x - x_2\| \leq d$ ve $(x - x_1) - (x - x_2) = x_1 - x_2 = z\|x_1 - x_2\|$ olur. Bundan dolayı

$$\|x - x_0\| = \left\| x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| \leq d \left(1 - \delta_X \left(z, \frac{d - \varepsilon}{d} \right) \right)$$

sağlanır.

Teorem 2.16 Her yönde düzgün konveks her uzay normal yapıdadır [47].

İspat X her yönde düzgün konveks olduğundan, her $z \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $\delta_z(\varepsilon) > 0$ sağlanır. Önerme 2.2 ve $\delta_z(\varepsilon)$ un sürekli olmasından dolayı X normal yapıdadır.

Teorem 2.17 X bir Banach uzay olsun. Eğer X in konvekslik modülü δ için $\delta(1) > 0$ sağlanıyorsa (yani, $\varepsilon_0(X) < 1$ ise) X uzayı normal yapıdadır [11].

İspat $K \subset X$ kapalı ve konveks bir altküme ve $\text{diam}K = d > 0$ olsun. $d - \mu > \varepsilon_0(X).d$ olacak şekilde bir $\mu > 0$, $\|u - v\| \geq d - \mu$ olacak şekilde $u, v \in K$ seçilsin ve $z = \frac{1}{2}(u + v)$ olsun. Öyleyse, herhangi bir $x \in K$ için $\|u - v\| \geq d - \mu$ iken $\|x - u\| \leq d$, $\|x - v\| \leq d$ olur. Sonuç olarak,

$$\|x - z\| \leq \left[1 - \delta\left(\frac{d - \mu}{d}\right) \right] d$$

sağlanır ve $\delta\left(\frac{d - \mu}{d}\right) > 0$ olduğundan z , K nın yarıçapsal olmayan bir noktasıdır.

Teorem 2.18 Herhangi bir X Banach uzayı için $\delta(3/2) > 1/4$ ise X normal yapıdadır [13], [12].

Teorem 2.19 X bir Banach uzay olsun. Eğer $0 \leq \varepsilon \leq 1$ olacak şekilde her ε için $\delta(1 + \varepsilon) > \varepsilon/2$ sağlanıyorsa X normal yapıdadır [13].

Teorem 2.20 Eğer her yönde düzgün konvekslik katsayısı $\varepsilon_{0,x}(x) < 1$ ise $(X, \|\cdot\|)$ normal yapıdadır [3], [2].

Teorem 2.21 Düzgün konveks her uzay düzgün normal yapıdadır [47].

İspat X bir Banach uzay olsun. X uzayının kapalı, konveks, sınırlı ve $d = \text{diam}(C) > 0$ olacak şekilde herhangi bir C altkümesi için öyle bir $x_0 \in C$ vardır ki (2.5) den dolayı

$$\|x - x_0\| \leq d \left(1 - \delta_x\left(\frac{1}{2}\right) \right)$$

sağlanır. Böylece $\alpha = 1 - \delta_x\left(\frac{1}{2}\right) < 1$ iken,

$$\sup \{ \|x - x_0\| : x \in C \} < \alpha \cdot \text{diam}(C)$$

olur. Sonuç olarak X düzgün normal yapıdadır.

Teorem 2.22 Herhangi bir X Banach uzayı için $\delta(1) > 0$ ise X düzgün normal yapıdadır [13].

Teorem 2.23 Herhangi bir X Banach uzayı için $\delta(3/2) > 1/4$ ise X düzgün normal yapıdadır [13], [12].

Teorem 2.24 X bir Banach uzay olsun. Eğer $0 \leq \varepsilon \leq 1$ olacak şekilde her ε için $\delta(1 + \varepsilon) > \varepsilon/2$ sağlanıyorsa X düzgün normal yapıdadır [13].

Teorem 2.25 Eğer bazı $\varepsilon \in \left(0, \frac{3}{2}\right]$ için $\delta_X(\varepsilon) > \frac{1}{6}\varepsilon$ sağlanıyorsa $(X, \|\cdot\|)$ düzgün normal yapıdadır [3], [12].

Teorem 2.26 Her $\varepsilon \in [0, 1]$ için $\delta_X(1 + \varepsilon) > \varepsilon$ ise $(X, \|\cdot\|)$ düzgün normal yapıdadır [3], [13].

Teorem 2.27 Bazı $\varepsilon \in (0, 2]$ için $\delta_X(\varepsilon) > \delta_h(\varepsilon) := \max\left\{0, \frac{\varepsilon - 1}{2}\right\}$ sağlanıyorsa $(X, \|\cdot\|)$ düzgün normal yapıdadır [3], [16].

Teorem 2.28 X bir Banach uzay olsun. X in düzgün nonsquare olması için gerek ve yeter şart $\varepsilon_0(x) < 2$ olmasıdır [11].

Teorem 2.29 Her düzgün konveks Banach uzayı Kadec-Klee özelliğine sahiptir [47].

İspat X düzgün konveks bir Banach uzay olsun. $\{x_n\}$, X de $x_n \xrightarrow{w} x$ ve $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ şeklinde bir dizi olsun. Eğer $x = 0$ ise, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$ olur ki böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ sağlanır.

$x \neq 0$ olsun. Gösterilmek istenen $x_n \rightarrow x$ olduğudur. Çelişki elde etmek için

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq x$, yani $\frac{x_n}{\|x_n\|} \not\rightarrow \frac{x}{\|x\|}$ olduğu farz edilsin. O halde, her $\varepsilon > 0$ için $\{x_n / \|x_n\|\}$ dizisinin $\{x_{n_i} / \|x_{n_i}\|\}$ altdizisi vardır öyle ki

$$\left\| \frac{x_{n_i}}{\|x_{n_i}\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| \geq \varepsilon > 0$$

sağlanır. X düzgün konveks olduğundan

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{x_{n_i}}{\|x_{n_i}\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq 1 - \delta$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır. $x_n \xrightarrow{w} x$ ve $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ olması $x_n / \|x_n\| \xrightarrow{w} x / \|x\|$ olmasını gerektirdiğinden dolayı

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\| \frac{x_{n_i}}{\|x_{n_i}\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq 1 - \delta$$

sağlanır ve bu çelişkidir. Sonuç olarak, $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ e kuvvetli yakınsar.

Teorem 2.30 $\ell(p, u, v)$ uzayı üzerindeki Luxemburg norm genel norma indirgenebilir, yani

$$\|x\| = \|x\|_{\ell_p(u, v)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_k x_k \right|^p \right)^{1/p}.$$

İspat Bütün $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ ise

$$\begin{aligned} \|x\| &= \inf \left\{ \lambda : \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{u_k \sum_{i=1}^k v_k x_k}{\lambda} \right|^p \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda : \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_k x_k \right|^p \leq \lambda^p \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda : \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_k x_k \right|^p \right)^{1/p} \leq \lambda \right\} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_k x_k \right|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

sağlanır.

Önerme 2.3 $x \in \ell(p, u, v)$ olsun.

- (i) $0 < a < 1$ ise $a^M \rho\left(\frac{x}{a}\right) \leq \rho(x)$.
- (ii) $0 < a < 1$ ise $\rho(ax) \leq a\rho(x) \leq \rho(x)$.
- (iii) $a \geq 1$ ise $\rho(x) \leq a^M \rho\left(\frac{x}{a}\right)$.
- (iv) $a \geq 1$ ise $\rho(x) \leq a\rho(x) \leq \rho(ax)$.

İspat Burada (i) ve (ii) nin ispatı verilecektir. (iii) ve (iv) için ispat benzer şekilde yapılmaktadır.

İlk olarak $0 < a < 1$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $a^M \leq a^{p_k}$ olduğu açıktır. Öyleyse,

$$\begin{aligned}
 \rho(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i x_i \right|^{p_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i \left(a \frac{x_i}{a} \right) \right|^{p_k} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} a^{p_k} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i \left(\frac{x_i}{a} \right) \right|^{p_k} \\
 &\geq \sum_{k=1}^{\infty} a^M \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i \left(\frac{x_i}{a} \right) \right|^{p_k} \\
 &= a^M \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i \left(\frac{x_i}{a} \right) \right|^{p_k} \\
 &= a^M \rho\left(\frac{x}{a}\right)
 \end{aligned}$$

Ve

$$\begin{aligned}
 \rho(ax) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i (ax_i) \right|^{p_k} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} a^{p_k} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i x_i \right|^{p_k} \\
 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i x_i \right|^{p_k} \\
 &= a\rho(x) \\
 &\leq \rho(x)
 \end{aligned}$$

olur. Yani $a^M \rho\left(\frac{x}{a}\right) \leq \rho(x)$ ve $\rho(ax) \leq a\rho(x) \leq \rho(x)$ sağlanır.

Önerme 2.4 $x \in \ell(p, u, v)$ olsun.

- (i) $\|x\| < 1$ ise $\rho(x) \leq \|x\|$.
- (ii) $\|x\| > 1$ ise $\rho(x) \geq \|x\|$.
- (iii) $\|x\| = 1$ için gerek ve yeter şart $\rho(x) = 1$ olmasıdır.
- (iv) $\|x\| < 1$ için gerek ve yeter şart $\rho(x) < 1$ olmasıdır.
- (v) $\|x\| > 1$ için gerek ve yeter şart $\rho(x) > 1$ olmasıdır.

İspat (i) ε , $0 < \varepsilon < 1 - \|x\|$ şeklinde bir reel sayı olsun. Bu durum $\|x\| + \varepsilon < 1$ olmasını gerektirir. Norm tanımından dolayı öyle bir $\lambda > 0$ vardır ki $\|x\| + \varepsilon > \lambda > \|x\|$ ve $\rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1$ sağlanır. O halde önerme 2.3 (iv) ve Önerme 2.3 (ii) kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \rho(x) &\leq \rho\left(\left(\frac{\|x\| + \varepsilon}{\lambda}\right)x\right) \\ &= \rho\left((\|x\| + \varepsilon)\frac{x}{\lambda}\right) \\ &\leq (\|x\| + \varepsilon)\rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \\ &\leq (\|x\| + \varepsilon). \end{aligned}$$

Yani her $\varepsilon \in (0, 1 - \|x\|)$ için $\rho(x) \leq (\|x\| + \varepsilon)$ sağlanır. $A = \{\|x\| + \varepsilon : 0 < \varepsilon < 1 - \|x\|\}$ olarak alındığında $\|x\| = \inf A$ olur. $\rho(x)$ A'nın alt sınırı olduğundan, $\rho(x) \leq \|x\|$ olur.

(ii) ε , $0 < \varepsilon < \frac{\|x\| - 1}{\|x\|}$ şeklinde bir reel sayı olsun. Bu durum $1 < (1 - \varepsilon)\|x\| < \|x\|$ olmasını gerektirir. Norm tanımı ve Önerme 2.3 (ii) kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$1 < \rho\left(\frac{x}{(1-\varepsilon)\|x\|}\right) \\ \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)\|x\|} \rho(x) .$$

Yani her $\varepsilon \in \left(0, \frac{\|x\|-1}{\|x\|}\right)$ için $(1-\varepsilon)\|x\| \leq \rho(x)$ dir. $A = \left\{(1-\varepsilon)\|x\| : 0 < \varepsilon < \frac{\|x\|-1}{\|x\|}\right\}$ olarak alındığında $\|x\| = \sup A$ olur. $\rho(x)$ A'nın üst sınırı olduğundan, $\|x\| \leq \rho(x)$ sağlanır.

(iii) $(\Rightarrow)$ $\|x\| = 1$ ve ε pozitif bir reel sayı olsun. Öyle bir $\lambda > 0$ vardır ki $1 + \varepsilon > \lambda > \|x\| = 1$ ve $\rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1$ sağlanır. Önerme 2.3 (iii) den aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\rho(x) \leq \lambda^M \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \\ \leq \lambda^M \\ \leq (1 + \varepsilon)^M .$$

Yani her $\varepsilon > 0$ için $[\rho(x)]^{1/M} \leq 1 + \varepsilon$ ve $\rho(x) \leq 1$ olur.

$\rho(x) < 1$ ise $\rho(x) < a^M < 1$ olacak şekilde $a \in (0,1)$ seçilebilir. Önerme 2.3 (i) ve $\rho(x) < a^M$ kullanılarak

$$\rho\left(\frac{x}{a}\right) \leq \frac{1}{a^M} \rho(x) \\ < 1$$

yazılabilir ve böylece $\|x\| \leq a$ elde edilir. Fakat $a < 1$ olduğundan $\|x\| < 1$ çelişki verir.

Bu nedenle $\rho(x) = 1$ olmalıdır.

$(\Leftarrow)$ $\rho(x) = 1$ olsun. Norm tanımından $\|x\| \leq 1$ dir. Eğer $\|x\| < 1$ ise $\rho(x) \leq \|x\| < 1$ çelişki verir. Sonuç olarak $\|x\| = 1$ olmalıdır.

(iv) $(\Rightarrow) \|x\| < 1$ olsun. Önerme 2.4 (i) den $\rho(x) < 1$ sağlanır.

$(\Leftarrow) \|x\| \geq 1$ olsun. $\|x\| = 1$ ise Önerme 2.3 (iii) den $\rho(x) = 1$, $\|x\| > 1$ ise Önerme 2.4 (ii) den $\rho(x) > 1$ sağlanır. Sonuç olarak $\rho(x) \geq 1$ dir.

(v) Önerme 2.4 (iii) ve (iv) maddelerinin sonucudur.

Önerme 2.5 $x \in \ell(p, u, v)$ olsun.

(i) $0 < a < 1$ ve $\|x\| > a$ ise $\rho(x) > a^M$.

(ii) $a \geq 1$ ve $\|x\| < a$ ise $\rho(x) < a^M$.

İspat (i) $0 < a < 1$ ve $\|x\| > a$ olsun. Önerme 2.4 (v) ve Önerme 2.3 (i) birlikte göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \|x\| > 1 &\Rightarrow \left\| \frac{x}{a} \right\| > 1 \\ &\Rightarrow \rho\left(\frac{x}{a}\right) > 1 \\ &\Rightarrow a^M \rho\left(\frac{x}{a}\right) > a^M \\ &\Rightarrow \rho(x) > a^M \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu nedenle $\|x\| > a \Rightarrow \rho(x) > a^M$ sağlanmalıdır.

(ii) $a \geq 1$ ve $\|x\| < a$ olsun. Önerme 2.4 (iv) ve Önerme 2.3 (iii) dikkate alınarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x}{a} \right\| < 1 &\Rightarrow \rho\left(\frac{x}{a}\right) < 1 \\ &\Rightarrow a^M \rho\left(\frac{x}{a}\right) < a^M \\ &\Rightarrow \rho(x) < a^M. \end{aligned}$$

Bu nedenle $\|x\| < a \Rightarrow \rho(x) < a^M$ olmasını gerektirir.

Önerme 2.6 $a, b \in R^+$ ve $2 \leq p < \infty$ iken aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

i) $a^p + b^p \leq (a^2 + b^2)^{p/2},$

ii) $(a^2 + b^2)^{p/2} \leq 2^{(p-2)/2} (a^p + b^p)$ [47].

İspat a ya da b den birinin 0 olma durumunda iki şart da sağlanmaktadır. Bu nedenle ispat $a \neq 0, b \neq 0$ için yapılacaktır.

i) $\frac{a^2}{a^2 + b^2} \leq 1$ ve $\frac{b^2}{a^2 + b^2} \leq 1$ sağlandığı bilindiğinden

$$\begin{aligned} \frac{a^p}{(a^2 + b^2)^{p/2}} + \frac{b^p}{(a^2 + b^2)^{p/2}} &= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} \right)^{p/2} + \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} \right)^{p/2} \\ &\leq \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

sağlanır.

ii) $p = 2$ için sağlandığı açıktır. Bu nedenle $p > 2$ olarak ele alınacaktır. $p' := p/2 > 1$ ve $q' = p'/(p'-1) = p/(p-2)$ alındığında $1/p' + 1/q' = 1$ olur. Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\leq \left((a^2)^{p'} + (b^2)^{p'} \right)^{1/p'} (1^{q'} + 1^{q'})^{1/q'} \\ &= 2^{(p-2)/p} (a^p + b^p)^{2/p}, \end{aligned}$$

elde edilir, yani

$$(a^2 + b^2)^{p/2} \leq 2^{(p-2)/2} (a^p + b^p)$$

sağlanır.

Teorem 2.31 $x, y \in \ell_p$ olsun. ℓ_p ($p \geq 2$) üzerindeki norm aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar

Burada $q = \frac{p}{p-1}$ sağlanır.

(i) $2(\|x\|^p + \|y\|^p) \leq \|x + y\|^p + \|x - y\|^p \leq 2^{p-1}(\|x\|^p + \|y\|^p);$

$$(ii) \ 2\left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)^{q-1} \leq \|x+y\|^q + \|x-y\|^q;$$

$$(iii) \ \|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq 2\left(\|x\|^q + \|y\|^q\right)^{p-1}.$$

$1 < p \leq 2$ için eşitsizlikler ters olarak sağlanır [1].

Teorem 2.32 $\ell_p(u, v)$ ($2 \leq p < \infty$) uzayında her $x, y \in \ell_p(u, v)$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq 2^{p-1}(\|x\|^p + \|y\|^p).$$

İspat Önerme 2.6 den $a, b \in \mathfrak{R}^+$ ve $2 \leq p < \infty$ iken

$$\begin{aligned} |a+b|^p + |a-b|^p &\leq \left(|a+b|^2 + |a-b|^2\right)^{p/2} \\ &\leq \left(2|a|^2 + 2|b|^2\right)^{p/2} \\ &= 2^{p/2} \left(|a|^2 + |b|^2\right)^{p/2} \\ &\leq 2^{p/2} 2^{(p-2)/2} \left(|a|^p + |b|^p\right) \\ &= 2^{p-1} \left(|a|^p + |b|^p\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

sağlanır.

Böylece $x = \{x_i\}_{i=1}^\infty, y = \{y_i\}_{i=1}^\infty \in \ell_p(u, v)$ için

$$\sum_{i=1}^\infty \left| u_i \sum_{k=1}^i v_k x_k + u_i \sum_{k=1}^i v_k y_k \right|^p + \sum_{i=1}^\infty \left| u_i \sum_{k=1}^i v_k x_k - u_i \sum_{k=1}^i v_k y_k \right|^p \leq 2^{p-1} \left(\sum_{i=1}^\infty \left| u_i \sum_{k=1}^i v_k x_k \right|^p + \sum_{i=1}^\infty \left| u_i \sum_{k=1}^i v_k y_k \right|^p \right)^{p/2}$$

yazılabilir ki bu da $x, y \in \ell_p(u, v)$ ($2 \leq p < \infty$) iken aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu gösterir:

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq 2^{p-1}(\|x\|^p + \|y\|^p).$$

Teorem 2.33 $a, b \in \mathfrak{R}^+$ ve $2 \leq p < \infty$ iken aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$|a+b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p). \tag{47}$$

İspat (2.6) dan dolayı $a, b \in \mathfrak{R}^+$ ve $2 \leq p < \infty$ iken

$$|a+b|^p + |a-b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$$

sağlandığını biliyoruz. Dolayısıyla,

$$|a+b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p) - |a-b|^p$$

$$|a+b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$$

sağlanır.

**BELİRLİ DİZİ UZAYLARININ HER YÖNDE DÜZGÜN
KONVEKS YAPISI VE BAZI GEOMETRİK
ÖZELLİKLERİ**

Bu bölümde, Tanım 2.27 de tanıtilan $\ell_p(u, v)$ ve $\ell(p, u, v)$ uzaylarının konveks, kesin konveks, düzgün konveks ve her yönde düzgün konveks yapıları incelenecektir.

$\ell_p(u, v)$ normlu uzayının düzgün konveks ve her yönde düzgün konveks yapıları için konvekslik modülü oluşturulacak ve bazı geometrik özellikleri ile ilgili sonuçlara ulaşılabilecektir. Benzer şekilde paranormlu bir uzay olan $\ell(p, u, v)$ için de konvekslik modülü oluşturulacak ve bazı geometrik özellikleri ile ilgili sonuçlar elde edilecektir.

3.1 $\ell_p(u, v)$ Uzayının Bazı Geometrik Özellikleri

Uzayın konveks, kesin konveks ve düzgün konveks yapıda olabilmesi için sağlaması gereken özellikler ikinci bölümde verilmiştir. Bu özelliklere dayanarak $\ell_p(u, v)$ uzayının yapısı aşağıda incelenecektir.

Teorem 3.1 $\ell_p(u, v)$ konvektir.

İspat $x, y \in \ell_p(u, v)$ olsun. Tanım 2.29 dan dolayı $\ell_p(u, v)$ uzayının konveks olabilmesi için her $x, y \in \ell_p(u, v)$ için $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \ell_p(u, v)$ olması gerekmektedir.

$x, y \in \ell_p(u, v)$ ise uzayın elemanlarının tanımı gereği $\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i x_i \right|^p < \infty$ ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i y_i \right|^p < \infty \text{ sağlanır.}$$

Öyleyse,

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i [(1 - \lambda)x_i + \lambda y_i] \right|^p.$$

Teorem 2.33 kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} &\leq 2^{p-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i (1 - \lambda)x_i \right|^p + \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i \lambda y_i \right|^p \right) \\ &\leq 2^{p-1} (1 - \lambda)^p \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i x_i \right|^p + 2^{p-1} \lambda^p \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i y_i \right|^p \\ &< \infty \end{aligned}$$

Böylece, $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \ell_p(u, v)$ sağlanır ve $\ell_p(u, v)$ konvektir.

Teorem 3.2 $\ell_p(u, v)$ kesin konvektir.

İspat Tanım 2.30 dan dolayı kesin konveksliği incelemek için $\ell_p(u, v)$ uzayından

$\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| > 0$ olacak şekilde iki eleman alalım.

$\ell_p(u, v)$ uzayının norm tanımından dolayı $\|x\| \leq 1$ ise $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i x_i \right|^p \right)^{1/p} \leq 1$, yani

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i x_i \right|^p \leq 1 \text{ sağlanır.}$$

Benzer şekilde, $\|y\| \leq 1$ ise $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i y_i \right|^p \right)^{1/p} \leq 1$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i y_i \right|^p \leq 1$ sağlanır.

Son olarak $\|x - y\| > 0$ şartı $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i (x_i - y_i) \right|^p \right)^{1/p} > 0$ durumudur ve en az bir i

değeri için $(x_i - y_i) > 0$ olmasını gerektirir. Yani alınan herhangi x ve y elemanları için $x \neq y$ olmalıdır.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i x_i \right|^p \leq 1, \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i y_i \right|^p \leq 1 \text{ ve } x \neq y \text{ iken } \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 \text{ olduğunu göstermek}$$

istiyoruz. Önerme 2.1 den normun iki boyutta incelenmesi yeterli olacaktır.

$$\|x + y\| = \left(|u_1 v_1 (x_1 + y_1)|^p + |u_2 v_1 (x_1 + y_1) + u_2 v_2 (x_2 + y_2)|^p \right)^{1/p}$$

Teorem 2.33 kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilmiştir. $x \neq y$ şartından dolayı $\leq$ işareti yerine $<$ işareti alınacaktır.

$$\begin{aligned} &< \left[2^{p-1} \left(|u_1 v_1 x_1|^p + |u_1 v_1 y_1|^p \right) + 2^{p-1} \left(|u_2 v_1 x_1 + u_2 v_2 x_2|^p + |u_2 v_1 y_1 + u_2 v_2 y_2|^p \right) \right]^{1/p} \\ &< \left[2^{p-1} \left(|u_1 v_1 x_1|^p + |u_1 v_1 y_1|^p + |u_2 v_1 x_1 + u_2 v_2 x_2|^p + |u_2 v_1 y_1 + u_2 v_2 y_2|^p \right) \right]^{1/p} \\ &< \left[2^{p-1} \left(|u_1 v_1 x_1|^p + |u_2 v_1 x_1 + u_2 v_2 x_2|^p + |u_1 v_1 y_1|^p + |u_2 v_1 y_1 + u_2 v_2 y_2|^p \right) \right]^{1/p} \\ &< \left(2^{p-1} \cdot 2 \right)^{1/p} \\ &< 2 \end{aligned}$$

Böylece $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = \frac{1}{2} \|x+y\| < 1$ sağlanır ve $\ell_p(u, v)$ uzayı kesin konvektir.

Teorem 3.3 $\ell_p(u, v)$ düzgün konvektir.

İspat Tanım 2.31 kullanılarak uzayın düzgün konveks yapıyı sağladığını göstermek amacıyla $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, $\|x - y\| \geq \varepsilon$ iken $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < \delta$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ in varlığı gösterilecektir.

Teorem 2.32 deki eşitsizliği kullanarak

$$\|x + y\|^p + \|x - y\|^p \leq 2^{p-1} (\|x\|^p + \|y\|^p)$$

yazılabilir. $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartlarından dolayı $\|x + y\|^p + \varepsilon^p \leq 2^{p-1} \cdot 2$, yani $\|x + y\|^p \leq 2^p - \varepsilon^p$ sağlanır.

Şekil 2.1 de verilen ilişkiden dolayı $\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} < 1$ yazılabilir ve her $\varepsilon > 0$

için $\delta(\varepsilon) > 0$ sağlanır.

Böylece, $\ell_p(u, v)$ düzgün konvektir.

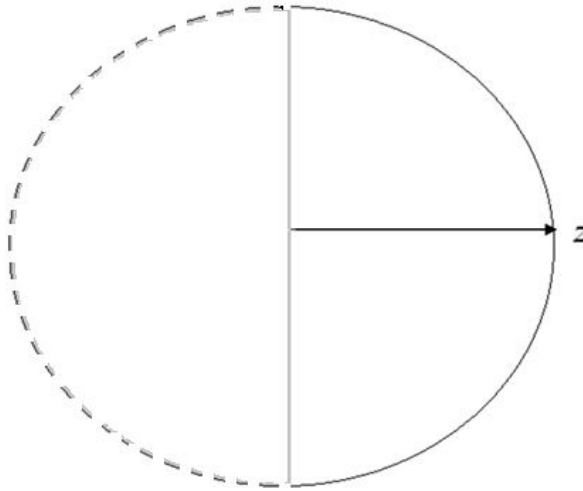
3.2 $\ell_p(u, v)$ Uzayının Her Yönde Düzgün Konveks Yapısı

Bu adımda $\ell_p(u, v)$ uzayının her yönde düzgün konveks yapıda olduğu ispatlanacaktır.

Tanım 2.34 den her yönde düzgün konveks olmanın birim yuvardan alınan herhangi ayrık iki x ve y elemanları ve normu bir olan z elemanı için, $x - y = \varepsilon z$ iken

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta \text{ olacak şekilde } \delta(z, \varepsilon) \text{ in varlığı olduğu bilinmektedir.}$$

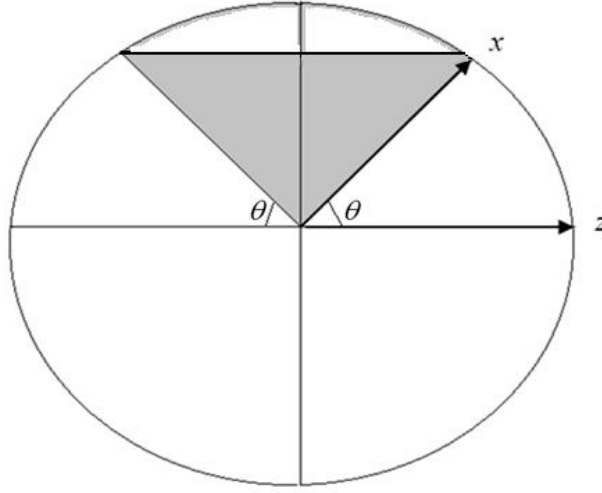
Düzgün konveks yapıdan farkı ise belirli bir yön vererek x ve y lerin seçimine kısıtlama getirilmesidir, çünkü düzgün konvekslikte bulunan $\delta(\varepsilon)$ birim yuvardaki ayrık bütün x ve y ler için sağlanır. z yi belirledikten sonra seçilen x elemanı Şekil 3.1 de gösterildiği gibi seçilmelidir, aksi halde $x - y = \varepsilon z$ şeklinde birim yuvardan bir y elemanı bulunamaz.



Şekil 3.1 Her yönde düzgün konveks yapıda x seçimi

(x , kesik çizgilerle gösterilen kısım dışındaki yerlerden seçilebilir.)

Buradaki farkı yaratan yön kavramı z ve x in arasındaki açıyla ifade edilirse (θ); y nin birim yuvardan olabilmesi için x ve y arasındaki açının maksimum alacağı değer $\pi - 2\theta$ olmalıdır. Aşağıdaki şekilde, belirli bir z ve x için y nin seçimine ilişkin kısıtlama belirtilmiştir.



Şekil 3.2 Her yönde düzgün konveks yapıda y seçimi
(y , sadece koyu renkle gösterilen kısımdan seçilmelidir.)

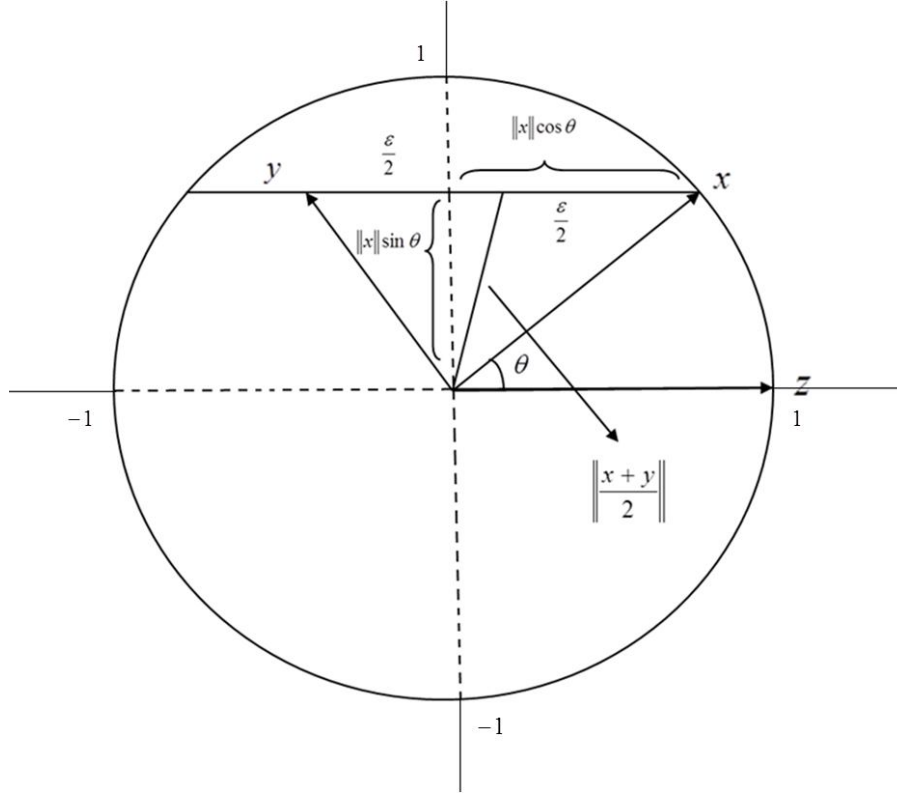
Teorem 2.3 den dolayı düzgün konveks yapıda olmanın her yönde düzgün konveks olmayı gerektirdiği bilinmektedir. Bu nedenle, konvekslik modülü her yönde düzgün konvekslik modülü olarak kullanılabilir, ancak bahsedildiği gibi her yönde düzgün konveks yapıda olmak için elemanlar belirli kısıtlamalarla seçildiğinden yapıya özel modül bulmak daha faydalı olacaktır.

Bu şartlar altında $\ell_p(u, v)$ uzayının her yönde düzgün konvekslik özelliği sağlayıp sağlamadığı incelenecektir.

Aşağıdaki teoremin ispatını iki farklı şekilde vereceğiz.

Teorem 3.4 $\ell_p(u, v)$ uzayı her yönde düzgün konveks yapıdadır.

İspat I Burada amaç yukarıda bahsedilen şartları sağlayan bir $\delta(z, \varepsilon)$ oluşturmaktır. Belirtilen şartların geometrik olarak karşılıklarını anlayabilmek amacıyla aşağıdaki birim yuvar kullanılabilir:



Şekil 3.3 Her yönde düzgün konveks yapının temsili

$x, y \in \ell_p(u, v)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p = \left| \|x\| \cos(\theta) - \frac{\varepsilon}{2} \right|^p + \|x\| |\sin \theta|^p$$

Başka bir ifadeyle, $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = \left(\left| \|x\| \cos(\theta) - \frac{\varepsilon}{2} \right|^p + \|x\| |\sin \theta|^p \right)^{1/p}$ olur. İspatı tamamlamak

için $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$ olacak şekilde $\delta(z, \varepsilon)$ modülünün varlığını göstermeliyiz. Bu

durumda, Tanım 2.34 ile birlikte, $\delta(z, \varepsilon) = 1 - \left(\left| \|x\| \cos(\theta) - \frac{\varepsilon}{2} \right|^p + \|x\| |\sin \theta|^p \right)^{1/p}$

yazabiliriz. Elemanlar birim yuvardan seçildiğine göre eşitlik

$\delta(z, \varepsilon) = 1 - \left(\left| \cos(\theta) - \frac{\varepsilon}{2} \right|^p + |\sin \theta|^p \right)^{1/p}$ şeklinde düzenlenebilir. Yön kavramına ve ε

değerine bağlı bir δ nın varlığı gösterildiğinden $\ell_p(u, v)$ uzayı her yönde düzgün konveks yapıdadır.

İspat II Uzayın her yönde düzgün konveks yapıyı sağladığını göstermek amacıyla ikinci ispat Teorem 2.10 kullanılarak yapılacaktır. Bu teoremin herhangi bir maddesinin sağlanması uzayın her yönde düzgün konveks yapıda olduğunu söylemek için yeterlidir.

(I) ve (II) durumlarının sağlandığını göstermek amacıyla Teorem 2.9 dan yararlanılacaktır. Uzayın düzgün konveks yapıda olduğu Teorem 3.3 de ispatlandığından Teorem 2.9 gereği:

X deki iki $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizisi için,

$$\|x_n\| \leq 1, \|y_n\| \leq 1 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n\| = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

sağlanır. Normun özelliklerinden $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - y_n = 0$ olmalıdır ki bu da (I) için $\alpha_n \rightarrow 0$ olmasını, (II) için $z = 0$ olmasını gerektirir.

III) $2^{p-1}(\|x_n + z\|^p + \|x_n\|^p) - \|2x_n + z\|^p \rightarrow 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $z \in X$ olduğunu varsayalım.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{p-1}(\|x_n + z\|^p + \|x_n\|^p) - \|2x_n + z\|^p) = 0 \text{ olduğu açıktır.}$$

Teorem 1.3 deki eşitsizlik kullanılarak

$$2^{p-1}(\|x_n + z\|^p + \|x_n\|^p) \geq \|2x_n + z\|^p$$

yazılabilir. z sıfırdan farklı kabul edildiğinden $x_n + z \neq x_n$ dır ve yukarıdaki eşitsizlik

$$2^{p-1}(\|x_n + z\|^p + \|x_n\|^p) > \|2x_n + z\|^p$$

olarak düzenlenebilir.

Öyleyse,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{p-1}(\|x_n + z\|^p + \|x_n\|^p) - \|2x_n + z\|^p) > \lim_{n \rightarrow \infty} (\|2x_n + z\|^p - \|2x_n + z\|^p)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{p-1}(\|x_n + z\|^p + \|x_n\|^p) - \|2x_n + z\|^p) > 0$$

elde edilir, çelişkiden dolayı sıfırdan farklı bir z elemanı mevcut değildir.

(IV) X deki herhangi bir sıfırdan farklı z elemanı için, öyle bir pozitif Δ vardır ki $\|x\| \leq 1$ ve $\|x + z\| \leq 1$ iken $\left\|x + \frac{1}{2}z\right\| < 1 - \Delta$ sağlanır.

Herhangi bir sıfırdan farklı z için $\|x\| \leq 1$ ve $\|x+z\| \leq 1$ olsun. Sonuç 2.1 den dolayı $1 < p < \infty$ iken aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\|a+b\|^p + \|a-b\|^p \leq 2^{p-1} (\|a\|^p + \|b\|^p).$$

Burada $a = \frac{x}{2}$ ve $b = \frac{x+z}{2}$ seçildiğinde

$$\left\| \frac{x}{2} + \frac{x+z}{2} \right\|^p + \left\| \frac{x}{2} - \frac{x+z}{2} \right\|^p \leq 2^{p-1} \left(\left\| \frac{x}{2} \right\|^p + \left\| \frac{x+z}{2} \right\|^p \right)$$

$$\left\| x + \frac{z}{2} \right\|^p + \left\| \frac{z}{2} \right\|^p \leq 2^{p-1} \left(\left\| \frac{x}{2} \right\|^p + \left\| \frac{x+z}{2} \right\|^p \right)$$

elde edilir. Seçilen x ve z için $\frac{x}{2} \neq \frac{x+z}{2}$ sağlandığı için $\leq$ işareti yerine $<$ işareti kullanılmalıdır. Son olarak, $\|x\| \leq 1, \|x+z\| \leq 1$ ve z in sıfırdan farklı olduğu ($\|z\| \neq 0$) bilindiğinden

$$\left\| x + \frac{z}{2} \right\|^p < 2^{p-1} \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} \right) - \frac{\|z\|^p}{2^p}$$

$$\left\| x + \frac{z}{2} \right\| < \left(1 - \frac{\|z\|^p}{2^p} \right)^{1/p}$$

sağlanır. $\Delta = 1 - \left(1 - \frac{\|z\|^p}{2^p} \right)^{1/p}$ seçilerek her sıfırdan farklı z için pozitif bir delta bulunabilir.

Böylece $\ell_p(u, v)$ her yönde düzgün konveks yapıdadır.

Sonuç olarak uzayın her yönde düzgün konveks yapıda olduğu yapıya ait modül oluşturularak ve teorem yardımıyla iki şekilde ispatlanmıştır.

3.3 $\ell(p, u, v)$ Uzayının Bazı Geometrik Özellikleri

Uzayın konveks, kesin konveks ve düzgün konveks yapıda olabilmesi için sağlaması gereken özellikler ikinci bölümde verilmiştir. Bu özelliklere dayanarak $\ell(p, u, v)$

uzayının bu yapıları sağladığı $\ell_p(u, v)$ uzayına benzer bir şekilde aşağıda ispatlanacaktır.

$\ell(p, u, v)$ için $H = \sup\{p_k\}$ olmak üzere $M = \max\{1, H\}$ olarak kullanılacaktır.

Teorem 3.5 $\ell(p, u, v)$ konvektir.

İspat $x, y \in \ell(p, u, v)$ olsun. Tanım 2.29 dan dolayı $\ell(p, u, v)$ nin konveks olabilmesi için $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \ell(p, u, v)$ olmalıdır.

$x, y \in \ell(p, u, v)$ ise uzayın elemanlarının tanımı gereği $\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i x_i \right|^{P_k} < \infty$ ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i y_i \right|^{P_k} < \infty \text{ sağlanır.}$$

Buradan,

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i [(1 - \lambda)x_i + \lambda y_i] \right|^{P_k}.$$

Teorem 2.33 kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} &\leq 2^{M-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i (1 - \lambda)x_i \right|^{P_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i \lambda y_i \right|^{P_k} \right) \\ &\leq 2^{M-1} (1 - \lambda)^M \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i x_i \right|^{P_k} + 2^{M-1} \lambda^M \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i y_i \right|^{P_k} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Böylece, $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \ell(p, u, v)$ sağlanır ve $\ell(p, u, v)$ konvektir.

Teorem 3.6 $\ell(p, u, v)$ kesin konvektir.

İspat Tanım 2.30 dan dolayı kesin konveksliği incelemek için $\ell(p, u, v)$ uzayından $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| > 0$ olacak şekilde iki eleman alınacaktır.

$$\|x\| \leq 1 \text{ ise Önerme 2.4 den } \rho(x) \leq 1, \text{ yani } \rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i x_i \right|^{P_k} \leq 1 \text{ sağlanır.}$$

$$\text{Benzer şekilde, } \|y\| \leq 1 \text{ ise } \rho(y) \leq 1 \text{ ve } \rho(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i y_i \right|^{P_k} \leq 1 \text{ sağlanır.}$$

Son olarak $\|x - y\| > 0$ şartını incelersek; $\rho(x - y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i (x_i - y_i) \right|^{p_k} > 0$

durumdur ve en az bir i değeri için $(x_i - y_i) > 0$ olmasını gerektirir. Yani alınan herhangi x ve y elemanları için $x \neq y$ olmalıdır.

Önerme 2.4 den $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$ in sağlanması için gerek ve yeter şartın $\rho\left(\frac{x+y}{2}\right) < 1$ in

sağlanması olduğunu bilindiğinden $\rho\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i \left[\frac{x_i + y_i}{2} \right] \right|^{p_k} < 1$ olduğunu

göstermek yeterli olacaktır.

Önerme 2.1 den dolayı uzayın iki boyutta incelenmesi yeterli olacaktır.

$$\rho\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left| u_1 v_1 \left(\frac{x_1 + y_1}{2} \right) \right|^{p_1} + \left| u_2 v_1 \left(\frac{x_1 + y_1}{2} \right) + u_2 v_2 \left(\frac{x_2 + y_2}{2} \right) \right|^{p_2}$$

Teorem 2.33 deki eşitsizlik kullanılarak

$$< 2^{p_1-1} \left(\left| u_1 v_1 \frac{x_1}{2} \right|^{p_1} + \left| u_1 v_1 \frac{y_1}{2} \right|^{p_1} \right) + 2^{p_2-1} \left(\left| u_2 v_1 \frac{x_1}{2} + u_2 v_2 \frac{x_2}{2} \right|^{p_2} + \left| u_2 v_1 \frac{y_1}{2} + u_2 v_2 \frac{y_2}{2} \right|^{p_2} \right)$$

yazılabilir. Yani,

$$< \frac{2^{p_1-1}}{2^{p_1}} \left(|u_1 v_1 x_1|^{p_1} + |u_1 v_1 y_1|^{p_1} \right) + \frac{2^{p_2-1}}{2^{p_2}} \left(|u_2 v_1 x_1 + u_2 v_2 x_2|^{p_2} + |u_2 v_1 y_1 + u_2 v_2 y_2|^{p_2} \right)$$

$$< \frac{1}{2} \left(|u_1 v_1 x_1|^{p_1} + |u_1 v_1 y_1|^{p_1} + |u_2 v_1 x_1 + u_2 v_2 x_2|^{p_2} + |u_2 v_1 y_1 + u_2 v_2 y_2|^{p_2} \right)$$

$$< \frac{1}{2} (\rho(x) + \rho(y)) = 1$$

Böylece $\rho\left(\frac{x+y}{2}\right) < 1$, yani $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = \frac{1}{2} \|x+y\| < 1$ sağlanır ve $\ell(p, u, v)$ uzayı kesin

konvektir.

Uzayın düzgün konveksliği gösterilmeden önce ispatıyla ilgili bir önerme verilecektir.

$\ell_p(u, v)$ uzayı için kullanılan eşitsizliklerin, norm tanımından dolayı $\ell(p, u, v)$

uzayında sağlanmamaktadır. Bu önermeyle $\ell(p, u, v)$ için yeni bir eşitsizlik oluşturulacaktır.

Önerme 3.1 $\ell(p, u, v)$ ($2 \leq p < \infty$) uzayı için

$$\rho\left(\frac{x+y}{2}\right) + \rho\left(\frac{x-y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\rho(x) + \rho(y))$$

sağlanır.

İspat Teorem 2.33 de verilen eşitsizliği kullanarak aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

(i) $a = u_1 v_1 \frac{x_1}{2}$, $b = u_1 v_1 \frac{y_1}{2}$ ve $p_1 \in [2, \infty)$ alındığında;

$|a+b|^{p_1} + |a-b|^{p_1} \leq 2^{p_1-1}(|a|^{p_1} + |b|^{p_1})$ eşitsizliğinde yerine konduğunda aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} \left|u_1 v_1 \frac{x_1}{2} + u_1 v_1 \frac{y_1}{2}\right|^{p_1} + \left|u_1 v_1 \frac{x_1}{2} - u_1 v_1 \frac{y_1}{2}\right|^{p_1} &\leq 2^{p_1-1} \left(\left|u_1 v_1 \frac{x_1}{2}\right|^{p_1} + \left|u_1 v_1 \frac{y_1}{2}\right|^{p_1} \right) \\ &\leq \frac{2^{p_1-1}}{2^{p_1}} (|u_1 v_1 x_1|^{p_1} + |u_1 v_1 y_1|^{p_1}) \\ &\leq \frac{1}{2} (|u_1 v_1 x_1|^{p_1} + |u_1 v_1 y_1|^{p_1}) \end{aligned}$$

(ii) $a = u_2 v_1 \frac{x_1}{2} + u_2 v_2 \frac{x_2}{2}$, $b = u_2 v_1 \frac{y_1}{2} + u_2 v_2 \frac{y_2}{2}$ ve $p_2 \in [2, \infty)$ alındığında;

$|a+b|^{p_2} + |a-b|^{p_2} \leq 2^{p_2-1}(|a|^{p_2} + |b|^{p_2})$ eşitsizliği kullanılarak yukarıdakine benzer bir sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} \left| \left(u_2 v_1 \frac{x_1}{2} + u_2 v_2 \frac{x_2}{2} \right) + \left(u_2 v_1 \frac{y_1}{2} + u_2 v_2 \frac{y_2}{2} \right) \right|^{p_2} + \left| \left(u_2 v_1 \frac{x_1}{2} + u_2 v_2 \frac{x_2}{2} \right) - \left(u_2 v_1 \frac{y_1}{2} + u_2 v_2 \frac{y_2}{2} \right) \right|^{p_2} \\ \leq 2^{p_2-1} \left(\left| u_2 v_1 \frac{x_1}{2} + u_2 v_2 \frac{x_2}{2} \right|^{p_2} + \left| u_2 v_1 \frac{y_1}{2} + u_2 v_2 \frac{y_2}{2} \right|^{p_2} \right) \\ \leq \frac{2^{p_2-1}}{2^{p_2}} (|u_2 v_1 x_1 + u_2 v_2 x_2|^{p_2} + |u_2 v_1 y_1 + u_2 v_2 y_2|^{p_2}) \\ \leq \frac{1}{2} (|u_2 v_1 x_1 + u_2 v_2 x_2|^{p_2} + |u_2 v_1 y_1 + u_2 v_2 y_2|^{p_2}). \end{aligned}$$

(i) ve (ii) nin sonuçları kullanıldığında;

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{x+y}{2}\right) + \rho\left(\frac{x-y}{2}\right) &= \left|u_1 v_1 \left(\frac{x_1}{2} + \frac{y_1}{2}\right)\right|^{p_1} + \left|u_2 v_1 \left(\frac{x_1}{2} + \frac{y_1}{2}\right) + u_2 v_2 \left(\frac{x_2}{2} + \frac{y_2}{2}\right)\right|^{p_2} \\
&\quad + \left|u_1 v_1 \left(\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2}\right)\right|^{p_1} + \left|u_2 v_1 \left(\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2}\right) + u_2 v_2 \left(\frac{x_2}{2} - \frac{y_2}{2}\right)\right|^{p_2} \\
&\leq \frac{1}{2} \left(|u_1 v_1 x_1|^{p_1} + |u_1 v_1 y_1|^{p_1} \right) + \frac{1}{2} \left(|u_2 v_1 x_1 + u_2 v_2 x_2|^{p_2} + |u_2 v_1 y_1 + u_2 v_2 y_2|^{p_2} \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \left(|u_1 v_1 x_1|^{p_1} + |u_1 v_1 y_1|^{p_1} + |u_2 v_1 x_1 + u_2 v_2 x_2|^{p_2} + |u_2 v_1 y_1 + u_2 v_2 y_2|^{p_2} \right) \\
&\leq \frac{1}{2} (\rho(x) + \rho(y))
\end{aligned}$$

elde edilir.

Burada eşitsizlik iki boyut üzerinden genellenmiştir. Bunun nedeni sonsuz boyut için incelendiğinde de eşitsizliği sağlamayan sonuç elde edilmemesidir. Örneğin herhangi bir k değeri için

$$\begin{aligned}
a &= u_k v_1 \frac{x_1}{2} + u_k v_2 \frac{x_2}{2} + \dots + u_k v_k \frac{x_k}{2}, \\
b &= u_k v_1 \frac{y_1}{2} + u_k v_2 \frac{y_2}{2} + \dots + u_k v_k \frac{y_k}{2}
\end{aligned}$$

ve $p_k \in [2, \infty)$ alındığında;

$$\begin{aligned}
&\left| \left(u_k v_1 \frac{x_1}{2} + u_k v_2 \frac{x_2}{2} + \dots + u_k v_k \frac{x_k}{2} \right) + \left(u_k v_1 \frac{y_1}{2} + u_k v_2 \frac{y_2}{2} + \dots + u_k v_k \frac{y_k}{2} \right) \right|^{p_k} \\
&\quad + \left| \left(u_k v_1 \frac{x_1}{2} + u_k v_2 \frac{x_2}{2} + \dots + u_k v_k \frac{x_k}{2} \right) - \left(u_k v_1 \frac{y_1}{2} + u_k v_2 \frac{y_2}{2} + \dots + u_k v_k \frac{y_k}{2} \right) \right|^{p_k} \\
&\leq 2^{p_k-1} \left(\left| u_k v_1 \frac{x_1}{2} + u_k v_2 \frac{x_2}{2} + \dots + u_k v_k \frac{x_k}{2} \right|^{p_k} + \left| u_k v_1 \frac{y_1}{2} + u_k v_2 \frac{y_2}{2} + \dots + u_k v_k \frac{y_k}{2} \right|^{p_k} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2^{p_k-1}}{2^{p_k}} \left(|u_k v_1 x_1 + u_k v_2 x_2 + \dots + u_k v_k x_k|^{p_k} + |u_k v_1 y_1 + u_k v_2 y_2 + \dots + u_k v_k y_k|^{p_k} \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \left(|u_k v_1 x_1 + u_k v_2 x_2 + \dots + u_k v_k x_k|^{p_k} + |u_k v_1 y_1 + u_k v_2 y_2 + \dots + u_k v_k y_k|^{p_k} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve her k değeri için aynı durum geçerli olduğundan, eşitsizliğin sonsuz boyutta kullanılması mümkündür.

Önerme 3.1 ile elde edilen eşitsizlik uzayın düzgün konveks ve her yönde düzgün konveks yapısına ait konvekslik modülü oluşturmada kullanılacaktır.

Teorem 3.7 $\ell(p, u, v)$ düzgün konvektir.

İspat Uzayın düzgün konveks yapıyı sağladığını göstermek amacıyla $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$,

$\|x - y\| \geq \varepsilon$ iken $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < \delta$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ ın varlığı gösterilecektir.

$\|x - y\| = \varepsilon$ ($\varepsilon \in (0, 2]$) iken $\left\| \frac{x-y}{\varepsilon} \right\| = 1$ olur ve Önerme 2.2 den $\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) = 1$ sağlanır.

İlk olarak Önerme 3.1 deki eşitsizlikte bulunan $\rho\left(\frac{x-y}{2}\right)$ ifadesi $\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$ olarak düzenlenecektir. Bunun için ε değeri iki kısımda incelenirse;

(i) $0 < \varepsilon < 1$ iken Önerme 2.3 ve $\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) = 1$ kullanılarak aşağıdaki

eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{x-y}{2}\right) &\geq \frac{1}{2^M} \rho(x-y) \\
&\geq \frac{1}{2^M} \varepsilon^M \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \\
&\geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^M
\end{aligned}$$

Önerme 3.1 deki eşitsizlikte yukarıda gösterildiği gibi $\rho\left(\frac{x-y}{2}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^M$ olarak ele

alındığında $\rho\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\rho(x) + \rho(y)) - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^M$ sağlanır.

Ayrıca $\rho(x) \leq 1, \rho(y) \leq 1$ iken

$$\rho\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^M$$

olarak ifade edilebilir.

Norma geçiş yapmak için $\lambda = \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^M\right)^{\frac{1}{M}}$ seçilirse;

$$\rho\left(\frac{\frac{x+y}{2}}{\left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^M\right)^{\frac{1}{M}}}\right) \leq \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^M\right)^{\frac{1}{M} \cdot M}} \rho\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^M} \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^M\right) \leq 1 \text{ olur.}$$

Böylece $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^M\right)^{\frac{1}{M}}$ ve $\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^M\right)^{\frac{1}{M}}$ olarak düzgün konvekslik

şartı $0 < \varepsilon < 1$ iken sağlanmış olur.

(ii) $1 < \varepsilon < 2$ iken Önerme 2.3 ve $\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) = 1$ kullanılarak aşağıdaki

eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{x-y}{2}\right) &\geq \frac{1}{2^M} \rho(x-y) \\ &\geq \frac{1}{2^M} \cdot \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \\ &\geq \frac{1}{2^M} \end{aligned}$$

Önerme 3.1 deki eşitsizlikte yukarıda gösterildiği gibi $\rho\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2^M}$ olarak ele alındığında $\rho\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\rho(x) + \rho(y)) - \frac{1}{2^M}$ sağlanır.

Ayrıca $\rho(x) \leq 1, \rho(y) \leq 1$ olduğunu bilindiğinden

$$\rho\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 1 - \frac{1}{2^M}$$

olarak ifade edilebilir.

Norma geçiş yapmak için $\lambda = \left(1 - \frac{1}{2^M}\right)^{\frac{1}{M}}$ seçildiğinde;

$$\rho\left(\frac{\frac{x+y}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2^M}\right)^{\frac{1}{M}}}\right) \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^M}\right)^{\frac{1}{M} \cdot M}} \rho\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2^M}} \left(1 - \frac{1}{2^M}\right) \leq 1 \text{ olur.}$$

Böylece $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \left(1 - \frac{1}{2^M}\right)^{\frac{1}{M}}$ ve $\delta = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^M}\right)^{\frac{1}{M}}$ olarak düzgün konvekslik şartı $1 \leq \varepsilon < 2$ iken sağlanmış olur.

Sonuç olarak uzayın konvekslik modülü aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$\delta(\varepsilon) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^M\right)^{\frac{1}{M}} & 0 < \varepsilon < 1 \\ 1 - \left(1 - \frac{1}{2^M}\right)^{\frac{1}{M}} & 1 \leq \varepsilon < 2 \end{cases}.$$

3.4 $\ell(p, u, v)$ Uzayının Her Yönde Düzgün Konveks Yapısı

Her yönde düzgün konvekslik kavramı Bölüm 3.2 de incelendiği şekilde ele alınacaktır.

Teorem 3.8 $\ell(p, u, v)$ her yönde düzgün konvektir.

İspat Her yönde düzgün konveks olmayı göstermek amacıyla $\ell(p, u, v)$ uzayındaki belli bir $\|z\| = 1$ için aşağıdaki şekilde bir $\delta(z, \varepsilon) > 0$ ($\varepsilon > 0$) bulmamız gerekmektedir:

$$\delta(z, \varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{\|x + y\|}{2} : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, x - y = \varepsilon z \right\}.$$

Önerme 2.4 den ve uzayın norm tanımından

$$\|x\| \leq 1 \quad \text{iken} \quad \rho(x) \leq 1, \quad \rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i x_i \right|^{P_k} \leq 1 \quad \text{ve} \quad \|y\| \leq 1 \quad \text{iken} \quad \rho(y) \leq 1,$$

$$\rho(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \sum_{i=1}^k v_i y_i \right|^{P_k} \leq 1 \quad \text{sağlanır.}$$

Burada düzgün konvekslikten farklı olarak eklenen şart $x - y = \varepsilon z$ olmasıdır ki, bu şartın iki tane gereği vardır: $\|x - y\| = \varepsilon$ ve alınan her x için $y = x - \varepsilon z$ olmasıdır.

Önerme 3.1 deki $\ell(p, u, v)$ için oluşturulan eşitsizlik x ve $y = x - \varepsilon z$ için kullanıldığında;

$$\rho\left(\frac{x + (x - \varepsilon z)}{2}\right) + \rho\left(\frac{x - (x - \varepsilon z)}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\rho(x) + \rho(x - \varepsilon z))$$

$$\rho\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq 1 - \rho\left(\frac{\varepsilon z}{2}\right)$$

elde edilir. Önerme 2.3 den $\rho\left(\frac{\varepsilon}{2}z\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}\rho(z) = \frac{\varepsilon}{2}$ olacağı için $\rho\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanır.

Norm yapısına geçiş yapmak için $\lambda = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/M}$ seçildiğinde

$$\rho\left(\frac{\frac{x + y}{2}}{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/M}}\right) \leq \frac{1}{\left(\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/M}\right)^M} \rho\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1$$

olur, yani $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right)^{1/M}$ dir. Böylece $\delta(z, \varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right)^{1/M}$ alındığında her yönde düzgün konvekslik şartı sağlanmış olur.

İspat II Uzayın düzgün konveks yapıyı sağladığını göstermek amacıyla ikinci ispat Teorem 2.10 kullanılarak yapılacaktır. Bu teoremin herhangi bir maddesinin sağlanması uzayın her yönde düzgün konveks yapısını ispatlamak için yeterlidir.

(I) ve (II) durumlarının sağlandığını göstermek amacıyla Teorem 2.9 dan yararlanılacaktır. Uzayın düzgün konveks yapıda olduğu Teorem 3.7 de ispatlandığından Teorem 2.9 gereği:

X deki iki $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizisi için,

$$\|x_n\| \leq 1, \|y_n\| \leq 1 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n\| = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

sağlanır. Normun özelliklerinden $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - y_n = 0$ olmalıdır ki bu da (I) için $\alpha_n \rightarrow 0$ olmasını, (II) için $z = 0$ olmasını gerektirir.

(III) $2^{p-1}(\|x_n + z\|^p + \|x_n\|^p) - \|2x_n + z\|^p \rightarrow 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $z \in X$ olduğunu varsayalım.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{p-1}(\|x_n + z\|^p + \|x_n\|^p) - \|2x_n + z\|^p) = 0 \text{ olduğu açıktır.}$$

Teorem 1.3 deki eşitsizlik kullanılarak

$$2^{p-1}(\|x_n + z\|^p + \|x_n\|^p) \geq \|2x_n + z\|^p$$

yazılabilir. z sıfırdan farklı kabul edildiğinden $x_n + z \neq x_n$ dır ve yukarıdaki eşitsizlik

$$2^{p-1}(\|x_n + z\|^p + \|x_n\|^p) > \|2x_n + z\|^p$$

olarak düzenlenebilir.

Öyleyse,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{p-1}(\|x_n + z\|^p + \|x_n\|^p) - \|2x_n + z\|^p) > \lim_{n \rightarrow \infty} (\|2x_n + z\|^p - \|2x_n + z\|^p)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{p-1}(\|x_n + z\|^p + \|x_n\|^p) - \|2x_n + z\|^p) > 0$$

elde edilir, çelişkiden dolayı sıfırdan farklı bir z elemanı mevcut değildir.

(IV) Herhangi bir sıfırdan farklı z için $\|x\| \leq 1$ ve $\|x+z\| \leq 1$ olsun. Önerme 2.4 den dolayı $\|x\| \leq 1$ iken $\rho(x) \leq 1$ ve $\|x+z\| \leq 1$ iken $\rho(x+z) \leq 1$ sağlanır. Önerme 3.1 deki eşitsizlik $x = x+z$ ve $y = x$ alarak kullanıldığında

$$\rho\left(\frac{(x+z)+x}{2}\right) + \rho\left(\frac{(x+z)-x}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\rho(x+z) + \rho(x)),$$

yani

$$\rho\left(\frac{2x+z}{2}\right) + \rho\left(\frac{z}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\rho(x+z) + \rho(x))$$

elde edilir. $\rho(x) \leq 1$ ve $\rho(x+z) \leq 1$ ve z elemanı sıfırdan farklı olduğu bilindiğinden

$$\rho\left(\frac{z}{2}\right) \neq 0 \text{ sağlanır.}$$

Buradan,

$$\rho\left(x + \frac{z}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(1+1) - \rho\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$\rho\left(x + \frac{z}{2}\right) \leq 1 - \rho\left(\frac{z}{2}\right)$$

elde edilir ve $\rho\left(x + \frac{z}{2}\right) < 1$ sağlanır.

Önerme 2.4 den dolayı $\left\|x + \frac{z}{2}\right\| < 1$ olarak ifade edilebilir ve $\left\|x + \frac{z}{2}\right\| = 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) olur.

Böylece uzaydaki her sıfırdan farklı z elemanı için $\Delta = \frac{\varepsilon}{2}$ seçtiğimizde $\left\|x + \frac{1}{2}z\right\| < 1 - \Delta$

olacak şekilde pozitif bir Δ bulunabilir.

Böylece $\ell(p, u, v)$ her yönde düzgün konveks yapıdadır.

3.5 $\ell_p(u, v)$ ve $\ell(p, u, v)$ Uzaylarının Diğer Geometrik Yapıları

Uzayların konveks, kesin konveks, düzgün konveks, her yönde düzgün konveks yapıda oldukları konvekslik ve her yönde düzgün konvekslik modülleri bulunarak 3.1 ve 3.2 bölümlerinde ispatlanmıştır.

Bu bölümde sağlandığı ispatlanan yapılar, konvekslik ve her yönde düzgün konvekslik modülleri ve ikinci bölümde verilen teoremler kullanılarak uzayların diğer geometrik özellikleri ile alakalı sonuçlar elde edilecektir.

Teorem 3.9 $\ell_p(u, v)$ uzayı normal yapıdadır.

İspat

a.) Uzayın düzgün konveks yapıda olduğu Teorem 3.3 de ispatlandığından Teorem 2.15 dan dolayı normal yapıdadır.

b.) Uzayın her yönde düzgün konveks yapıda olduğu Teorem 3.4 de ispatlandığından Teorem 2.16 den dolayı normal yapıdadır.

c.) Konvekslik modülünde $\varepsilon = 1$ alındığında $\delta(1) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} > 0$ olduğu görülmektedir. Teorem 2.17 den uzay normal yapıdadır.

Teorem 3.10 $\ell(p, u, v)$ normal yapıdadır.

İspat

a.) Uzayın düzgün konveks yapıda olduğu üçüncü bölüm Teorem 3.7 de ispatlandığından Teorem 2.15 dan dolayı normal yapıdadır.

b.) Uzayın her yönde düzgün konveks yapıda olduğu üçüncü bölüm Teorem 3.8 de ispatlandığından Teorem 2.16 dan dolayı normal yapıdadır.

c.) Konvekslik modülünde $\varepsilon = 1$ alındığında $\delta(1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^M}\right)^{\frac{1}{M}} > 0$ olduğu görülmektedir. Teorem 2.17 in sonucu olarak uzay normal yapıdadır.

d.) Uzayın her yönde düzgün konvekslik modülü $\delta(z, \varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{M}}$ olarak Teorem 3.8 de bulunmuştur. Normal yapıyı Teorem 2.20 yardımıyla ispatlamak için $\varepsilon_{0,z}(x) < 1$ olduğu ispatlanacaktır. Uzayın her yönde düzgün konvekslik karakteristiği Tanım 2.34 de $\varepsilon_{0,z}(X) = \sup\{\varepsilon : \delta(z, \varepsilon) = 0\}$ olarak tanımlanmıştır. Yani, $\delta(z, \varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{M}} = 0$

durumu incelenecektir. Burada, $\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{M}} = 1$ ise $\frac{\varepsilon}{2} = 0$ olmak zorundadır. Yani $\varepsilon_{0,z}(X) = \sup\{\varepsilon : \delta(z, \varepsilon) = 0\} = 0$ olduğundan Teorem 2.20 den dolayı uzay normal yapıdadır.

Teorem 3.11 $\ell_p(u, v)$ düzgün normal yapıdadır.

İspat

a.) Uzayın düzgün konveks yapıda olduğu üçüncü bölüm Teorem 3.3 de ispatlandığından Teorem 2.21 ten dolayı düzgün normal yapıdadır.

b.) Konvekslik modülünde $\varepsilon = 1$ alındığında $\delta(1) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} > 0$ olduğu Teorem

3.9 (c) de gösterildiğinden Teorem 2.22 den dolayı uzay düzgün normal yapıdadır.

Teorem 3.12 $\ell(p, u, v)$ düzgün normal yapıdadır.

İspat

a.) Uzayın düzgün konveks yapıda olduğu üçüncü bölüm Teorem 3.7 de ispatlandığından Teorem 2.21 ten dolayı düzgün normal yapıdadır.

b.) Konvekslik modülünde $\varepsilon = 1$ alındığında $\delta(1) = \left(1 - \frac{1}{2^M}\right)^{\frac{1}{M}} > 0$ olduğu Teorem

3.10 (c) de gösterildiğinden Teorem 2.22 den dolayı uzay düzgün normal yapıdadır.

Teorem 3.13 $\ell_p(u, v)$ düzgün karesel olmayan yapıdadır.

İspat Uzayın düzgün karesel olmayan yapıda olduğunu ispatlamak amacıyla $\varepsilon_0(X) < 2$ olduğu gösterilecektir. Tanım 2.33 den $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(X) = \sup\{\varepsilon \geq 0 : \delta(\varepsilon) = 0\}$ olduğu bilinmektedir. $\ell_p(u, v)$ uzayı için konvekslik modülünün 0 olduğu durum

$\delta(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$ dır. Yani, $\left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = 1$ şartı sağlanmalıdır ve bunu

sağlayan tek değer $\varepsilon = 0$ olduğu açıktır. Öyleyse $\varepsilon_0(X) < 2$ sağlanır ve Teorem 2.28 dan dolayı uzay düzgün karesel olmayan yapıdadır.

Teorem 3.14 $\ell(p, u, v)$ düzgün karesel olmayan yapıdadır.

İspat Uzayın düzgün karesel olmayan yapıda olduğunu ispatlamak amacıyla $\varepsilon_0(X) < 2$ olduğu gösterilecektir. Tanım 2.33 den $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(X) = \sup\{\varepsilon \geq 0 : \delta(\varepsilon) = 0\}$ olduğu bilinmektedir. $\ell(p, u, v)$ uzayı için konvekslik modülünün

$$\delta(\varepsilon) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^M\right)^{\frac{1}{M}} & 0 < \varepsilon < 1 \\ 1 - \left(1 - \frac{1}{2^M}\right)^{\frac{1}{M}} & 1 \leq \varepsilon < 2 \end{cases}$$

olduğu bilindiğinden iki durum olarak incelenecektir:

i) $\delta(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^M\right)^{\frac{1}{M}} = 0$ ise $\left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^M\right)^{\frac{1}{M}} = 1$ olur ve bu durum $\varepsilon = 0$ olmasını gerektirir.

ii) $\delta(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^M}\right)^{\frac{1}{M}} = 0$ ise $\left(1 - \frac{1}{2^M}\right)^{\frac{1}{M}} = 1$ olur ve bu durumu sağlayan hiçbir ε değeri mevcut değildir.

Sonuç olarak $\varepsilon_0(X) < 2$ sağlanır ve uzay, Teorem 2.28 den dolayı düzgün karesel olmayan yapıdadır.

Teorem 3.15 $\ell_p(u, v)$ refleksiftir.

İspat Uzayın düzgün konveks olduğu Teorem 3.3 ten bilindiğinden Teorem 2.11 den dolayı uzay refleksiftir.

Teorem 3.16 $\ell(p, u, v)$ refleksiftir.

İspat Uzayın düzgün konveks olduğu Teorem 3.7 de ispatlanmıştır. Bu nedenle Teorem 2.11 den dolayı uzay refleksiftir.

Teorem 3.17 $\ell_p(u, v)$ yerel düzgün konvektir.

İspat Uzayın düzgün konveks olduğu ispatlandığından Teorem 2.12 den dolayı yerel düzgün konvektir.

Teorem 3.18 $\ell(p, u, v)$ yerel düzgün konvektir.

İspat Uzayın düzgün konveks olduğu gösterildiğinden Teorem 2.12 den dolayı yerel düzgün konvektir.

Teorem 3.17 $\ell_p(u, v)$ Kadec-Klee özelliğine sahiptir.

İspat Uzayın düzgün konveks olduğu ispatlandığından Teorem 2.29 ten dolayı Kadec-Klee özelliğine sahiptir.

Teorem 3.18 $\ell(p, u, v)$ Kadec-Klee özelliğine sahiptir.

İspat Uzayın düzgün konveks olduğu ispatlandığından Teorem 2.29 den dolayı uzay Kadec-Klee özelliğine sahiptir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Sonuç bölümünde $\ell_p(u, v)$ ve $\ell(p, u, v)$ uzaylarının geometrik yapıları ve özellikleri ile ilgili elde edilen sonuçlar listelenecektir.

Sonuç 4.1 $\ell_p(u, v)$ konvektir.

Sonuç 4.2 $\ell_p(u, v)$ kesin konvektir.

Sonuç 4.3 $\ell_p(u, v)$ düzgün konvektir ve konvekslik modülü

$$\delta(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

olarak bulunmuştur.

Sonuç 4.4 $\ell_p(u, v)$ her yönde düzgün konvektir ve modülü

$$\delta(z, \varepsilon) = 1 - \left(\left| \cos(\theta) - \frac{\varepsilon}{2} \right|^p + |\sin \theta|^p \right)^{1/p}$$

olarak bulunmuştur.

Sonuç 4.5 $\ell_p(u, v)$ refleksiftir.

Sonuç 4.6 $\ell_p(u, v)$ yerel düzgün konvektir.

Sonuç 4.7 $\ell_p(u, v)$ normal yapıdadır.

Sonuç 4.8 $\ell_p(u, v)$ düzgün normal yapıyı sağlar.

Sonuç 4.9 $\ell_p(u, v)$ düzgün karesel olmayan yapıdadır.

Sonuç 4.10 $\ell_p(u, v)$ Kadec-Klee özelliğine sahiptir.

Sonuç 4.11 $\ell(p, u, v)$ konvektir.

Sonuç 4.12 $\ell(p, u, v)$ kesin konvektir.

Sonuç 4.13 $\ell(p, u, v)$ düzgün konvektir ve konvekslik modülü

$$\delta(\varepsilon) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^M\right)^{\frac{1}{M}} & 0 < \varepsilon < 1 \\ 1 - \left(1 - \frac{1}{2^M}\right)^{\frac{1}{M}} & 1 \leq \varepsilon < 2 \end{cases}$$

olarak bulunmuştur.

Sonuç 4.14 $\ell(p, u, v)$ her yönde düzgün konvektir ve modülü

$$\delta(z, \varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{M}}$$

olarak bulunmuştur.

Sonuç 4.15 $\ell(p, u, v)$ refleksiftir.

Sonuç 4.16 $\ell(p, u, v)$ yerel düzgün konvektir.

Sonuç 4.17 $\ell(p, u, v)$ normal yapıdadır.

Sonuç 4.18 $\ell(p, u, v)$ düzgün normal yapıyı sağlar.

Sonuç 4.19 $\ell(p, u, v)$ düzgün karesel olmayan yapıdadır.

Sonuç 4.20 $\ell(p, u, v)$ Kadec-Klee özelliğine sahiptir.

Sonuç 4.21 $\ell(p, u, v)$ ($2 \leq p < \infty$) uzayı için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\rho\left(\frac{x+y}{2}\right) + \rho\left(\frac{x-y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\rho(x) + \rho(y)).$$

- [1] Clarkson J.A., (1936). "Uniformly Convex Spaces", Trans. Amer. Math. Soc., 40, 396-414.
- [2] Goebel K., (1970). "Convexity of Balls and Fixed Point Theorems for Mappings with Nonexpansive Square", Compositio Mathematica, 22(3): 269-274.
- [3] Fuster E.L., (2006). "Moduli and Constants", Handbook of Metric Fixed Point Theory, 133-175.
- [4] Lovaglia A.R., (1955). "Locally Uniformly Convex Banach Spaces", Trans. Amer. Math. Soc. 78, 225-238.
- [5] Gurarii V.I., (1967). "On Differential Properties of the Convexity Moduli of Banach Spaces", Mat. Issled., 2, 141-148.
- [6] A.L. Garkavi, (1964). "The Best Possible Net and the Best Possible Cross-section of a Set in a Normed Space", Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2(39): 111-132.
- [7] V. Zizler, (1971). "On some rotundity and smoothness properties in Banach spaces", Dissertationes Math., 87, 1-37.
- [8] Day M.M., James R.C. ve Swaminathan S. (1971). "Normed Linear Spaces That Are Uniformly Convex in Every Direction", Can. J. Mat. XXIII(6): 1051-1059.
- [9] H. Fakhoury, (1974). "Directions D'uniform Convexité Dans un Space Normé", Séminaire Choquet, 14 année, n., 6.
- [10] Fernández M. ve Palacios I., (1997). "Directional Uniform Rotundity in Spaces of Essentially Bounded Vector Functions", Proceedings of Mathematical Society, 25(5): 1323-1328.
- [11] Goebel K., (1990). Topic in Metric Fixed Point Theory, Cambridge University Press., Cambridge.
- [12] Gao J. ve Lau K-S., (1991). "On Two Classes of Banach Spaces with Uniform Normal Structure", Studia Math., 99, 40-56.
- [13] Gao J., (2003). "Modulus of Convexity in Banach Spaces", Applied Mathematics Letters 16, 273-278.
- [14] Changsen Y. ve Fenghui W., (2007). "On a Generalized Modulus of Convexity and Uniform Normal Structure", Acta Mathematica Scientica, 4, 838-844.

- [15] Opial, Z., (1967). "Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings", Bull. Amer. Math. Soc. 73(4): 591–597.
- [16] Prus, S., (1991). "Some Estimates for the Normal Structure Coefficient in Banach spaces", Rendiconti del Cir. Mat. di Palermo, 40, 128-135.
- [17] R. Huff, (1980). "Banach Spaces Which are Nearly Uniformly Convex", Rocky Mountain J. Math. 10, 743-749.
- [18] Shue J.S., (1970). "Cesáro Sequence Spaces", Tamkang J. Math. 1, 143-150.
- [19] Liu Y.Q., Wu B.E. ve Lee Y.P., (1996). "Method of Sequence Spaces", Guangdong of Science and Technology Press, (in Chinese).
- [20] Cui H.A., Hudzik H. ve Pluciennik R., (1997). "Banach-Saks Property in Some Banach Sequence Spaces", Annales Math. Polinici, 65, 193-202.
- [21] Sanhgan W. ve Suantai S., (2003). "Some Geometric Properties of Cesáro Sequence Space", Kyungpook Math. J. 43, 191-197.
- [22] Petrot N. ve Suntai S., (2005). "Uniform Opial Properties in Generalized Cesáro Sequence Spaces", Nonlinear Analysis: Theory, Method & Applications, 63(8): 1116-1125.
- [23] Karakaya V. (2007). "Some Geometric Properties of Sequence Spaces Involving Lacunary Sequence", Journal of Inequalities and Applications, 81028, 1-8.
- [24] Mongkolkeha C. ve Kumam P., (2011). "Some Geometric Properties of Lacunary Sequence Spaces Related to Fixed Point Property", Abstract and Applied Analysis, (903736).
- [25] Khan F.M. ve Rahman M.F., (1997). "Infinite Matrices and Cesáro Sequence Spaces", Analysis Mathematica, 23, 3-11.
- [26] Mursaleen M. ve Khan V.A., (2005). "Generalized Cesáro Vector-Valued Sequence Space and Matrix Transformations", Information Sciences, 11-21.
- [27] Şimşek, N. Ve Karakaya, V., (2010). "On Some Geometrical Properties of Certain Vector-Valued Sequence Spaces", Far East Journal of Mathematical Sciences, 40, 189-200.
- [28] Savaş, E., Karakaya, V. ve Şimşek, N., (2009). "Some $\ell(p)$ -type New Sequence Spaces and Their Geometric Properties", Abstract and Applied Analysis, 69697, 1-12.
- [29] Leindler L., (1965). "Über Die Verallgemeinerte de la Vallée-Poussinsche Summierbarkeit Allgemeiner Orthogonalreihen", Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 16, 375-387.
- [30] Malkowsky, E. ve Savaş, E., (2000). "Some λ -sequence Spaces Defined by a Modulus", Archivium Math. Tomus 36, 219-228.
- [31] Savaş, E., Şimşek, N. ve Karakaya, V., (2010). "Some Geometric and Topological Properties of A New Sequence Spaces Defined By de la Vallée-Poussin Mean", Journal of Computational Analysis and Applications, 12(4).

- [32] Şimşek, N., (2011). "On Some Geometric Properties of Sequence Space Defined by de la Vallee-Poussin Mean", Journal of Computational Analysis and Applications, 13(3): 565-573.
- [33] Malkowsky E. ve Savaş E., (2004). "Matrix Transformations Between Sequence Spaces of Generalized Weighted Means", Appl. Math. Comput., 147(2): 333-345.
- [34] Altay B. ve Başar F., (2007). "Generalization of The Sequence Space Derived By The Weighted Mean", J. Math. Anal. Appl., 330, 174-185.
- [35] Şimşek N. ve Karakaya V., (2009). "On Some Geometrical Properties of Generalized Modular Spaces of Cesaro Type Defined by Weighted Means", Journal of Inequalities and Applications (932734).
- [36] Maddox, I.J., (1970). Elements of Functional Analysis, Cambridge University Pres., Cambridge.
- [37] Kreyszig, E., (1978). Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons Inc. New York-Chichester-Brisbane-Toronto.
- [38] Musayev, B. ve Alp M., (2000). Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Ankara.
- [39] Chareonsawan P., (2001). Some Geometrical Properties of Cesaro Sequence Spaces, Yüksek Lisans Tezi, Chang Mai University, Thailand.
- [40] Sanhan W., (2000). On Geometric Properties of Some Banach Sequence Spaces, Yüksek Lisans Tezi, Chang Mai University, Thailand.
- [41] Aliprantis C.D. ve Burkinshaw O., (1998). Principles of Real Analysis, Academic Press, California.
- [42] Şuhubi, E., (2001). Fonksiyonel Analiz, 1.Baskı, İTÜ Vakfı Yayınları.
- [43] Kaewong T., (1999). Geometry of Nakano Sequence Spaces, Yüksek Lisans Tezi, Chang Mai University, Thailand.
- [44] Minkowski, H. (1953). Geometrie der Zahlen, Chelsea.
- [45] Aliprantis C.D. ve Border K.C., (2006). Infinite Dimensional Analysis, Springer, Germany.
- [46] Prus S., (2001). "Geometrical Background of Fixed Point Theory", Handbook of Metric Fixed Point Theory, 93-132.
- [47] Agarwal R.P., O'Regan D. ve Sahu D.R., (2009). Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications, Springer, New York.
- [48] Khamsi M.A., (1989). "On Normal Structure, Fixed Point Property and Contractions of Type (γ) ", Proceedings of the American Mathematical Society, 106(4).
- [49] Reif J., (2003). "On Moduli of Convexity in Banach Spaces", Journal of Inequalities and Applications, 4, 423-433.
- [50] Khamsi M.A., (2002). "Introduction to Metric Fixed Point Theory", International Workshop on Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Shaid Beheshti University, January 20-24.

- [51] Górnicki J., (1987). "Uniformly Normal Structure and Fixed Points of Uniformly Lipschitzian Mappings", *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 28(3): 481-489.
- [52] Gillespie A.A. ve Williams B.B. (1979). "Fixed Point Theorem for Nonexpansive Mappings on Banach Spaces with Uniformly Normal Structure", *Appl. Anal.* 9, 121-124.
- [53] Pisier G., (2011). "Martingales in Banach Spaces (in connection with Type and Cotype)", Course IHP, Feb 2-8, 2011.
- [54] Şimşek, N. ve Karakaya, V., (2008). "Structure and Some Geometric Properties of Generalized Cesaro Sequence Spaces", *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 3(8): 389-399.
- [55] Megginson R.E., (1998). *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag New York Inc.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Nurdan Kuru
Doğum Tarihi ve Yeri :26.10.1989-Bakırköy
Yabancı Dili :İngilizce
E-posta :nurdannkuru@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Abant İzzet Baysal Üniversitesi	2010
Lise	Fen Bilimleri	Bağcılar Y.D.A. Lise	2007

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Kurum	Görev
2012	Bahçeşehir Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLAR

Bildiri

1. Kuru N., Karakaya V., (2013). *The Uniformly Convex in Every Direction Structure of $\ell_p(u, v)$* , International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM-2013). İstanbul, Türkiye