

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ALT MODÜLLERİN YARI RADİKALLERİ

ELİF ÖZEL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. GÜRSEL YEŞİLOT**

İSTANBUL, 2013

ÖNSÖZ

Bu çalışma birimli ve değışmeli halkalarda asal alt modülleri ve bunların diğeri modüllerle olan ilişkilerini inceleme ve yarı asal alt modüllerin bazı özellikleri hakkında bilgi vermeye yönelik bir çalışmadır.

Tez çalışmam süresince beni yönlendiren, yardımlarını benden esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT' a çok teşekkür ederim.

Ayrıca bu süreçte çalışmalarına katkı sağlayan hocam Arş. Gör. Neslihan Ayşen ÖZKİRİŞÇİ ye teşekkürü bir borç bilirim. Yine bu süreçte maddi ve manevi desteklerini eksik etmeyen ve her zaman yanımda olan aileme çok teşekkür ederim.

Kasım, 2013

Elif ÖZEL

İÇİNDEKİLER

	SAYFA
SİMGE LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
BÖLÜM 1	1
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Bulgular	3
BÖLÜM 2	4
BÖLÜM 3	23
BÖLÜM 4	59
SONUÇ VE ÖNERİLER	59
KAYNAKLAR	60
ÖZGEÇMİŞ	62

SİMGE LİSTESİ

$Ann(M)$	M modülünün sıfırlayıcısı
$\mathcal{K}ekf$	f fonksiyonunun çekirdeği
$\oplus$	direkt toplam
$\prod$	direkt çarpım
$\sqrt{I}$	I idealinin radikali
$\cong$	izomorfizma
$J(R) = J$	R halkasının Jacobson radikali
$\langle m \rangle$	m elemanı ile üretilmiş alt modül
$radM$	M modülünün radikali
$T(M)$	M modülünün burulmalı alt modülü
$M - radN$	M modülünün N asal alt modülünün radikali
$\mathbb{Q}$	rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	karmaşık sayılar kümesi
$(\Rightarrow):$	gereklilik
$(\Leftarrow):$	yeterlilik
$\leq$	küçük eşit
$\cap$	kesişim
$\cup$	birleşim
$\sum$	toplam
H_n^m	$m \times n$ tipindeki matris kümesi
$Ass(K)$	K alt modülüne ilişkin asal idealler
$Z(M)$	M üzerindeki sıfır bölenler kümesi
$S - radN$	N yarı asal alt modülünün yarı radikali

ALT MODÜLLERİN YARI RADİKALLERİ

Elif ÖZEL

Matematik Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Bu çalışmada değişmeli halkalarda asal ve yarı asal alt modülleri incelemek için öncelikle halka ve modüllerle ilgili genel bilgiler verilmiştir. 3. bölümde değişmeli bir halka üzerindeki asal alt modül tanımı ve genel özellikleri verilmiştir. Daha sonra asal alt modüllerin noetherian modüllerle, serbest modüllerle ve asalımsı alt modüllerle olan ilişkileri araştırılmıştır. Son olarak yarı asal alt modüller araştırılmış ve yarı asal alt modüllerin genel özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Halka teorisi, modül teorisi, asal alt modül, yarı asal alt modül, yarı radikal

SEMI RADICALS OF SUBMODULES IN MODULES

Elif ÖZEL

Department of Mathematic

MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Gürsel YEŞİLOT

In this study, firstly ring and module theory were described for research in prime and semiprime submodules in commutative ring. In the 3. part, definition and basic properties of prime submodules in a commutative ring were given. Then,, the relation between prime submodules, noetherian modules, free modules and primary modules were researched. Finally, semiprime submodules and their basic properties were examined.

Keywords: Ring theory, module theory, prime submodules, semiprime submodules, semi radical

1.1 Literatür Özeti

2009 yılında F. Çallıalp ve Ü. Tekir, “ Değişmeli Halkalar ve Modüller” adlı kitapta halkalar ve modüller ile ilgili temel tanım, teorem ve özellikleri incelemiş ve asal alt modüller, çarpımsal modüller, noetherian ve artinian modülleri anlatmıştır [1]

2003 yılında R. Ameri “ On the Prime Submodules of Multiplication Modules” adlı makalesinde çarpımsal bir modülün asal ve yarı asal alt modülleri ile ilgili bazı özellikleri ispatlamıştır [2].

2007 yılında D. S. Malik, Sen J. N. ve M. K. Introduction to Abstract Algebra isimli kitabında grup, halka, modül ve vektör uzayı kavramlarını incelemişlerdir [3]

1988 de C. P. Lu “M- radicals of Submodules in Modules” adlı makalesinde asal alt modüller ve radikalleri ile ilgili bazı özellikleri incelemiştir [4].

2003 yılında D. P. Yılmaz “On Prime Submodules of Finitely Generated Free Modules” adlı makalesinde sonlu üretilmiş serbest modüllerin asal alt modülleri ile ilgili bilgi vermiştir [5].

2009 yılında R. J. Nezhad ve M. H. Naderi çarpımsal modüllerin asal ve yarı asal alt modülleri ile ilgili temel tanım ve teoremleri vermiştir [6].

2012 yılında G. Yeşilot ve M. Özavşar Soyut Cebir Çözümlü Problemleri adlı kitabında grup, halka, cisim yapıları hakkında inceleme yapmışlardır [7].

1984 yılında C. P. Lu “Prime Submodules of Modules” adlı makalesinde asal alt modüller ile ilgili temel özellikleri vermiş, maksimal P- asal alt modüllerini,

genişletilmiş IM alt modüllerini ve noetherian modüllerin asal alt modüllerini incelemiştir [8].

1992 yılında R. L. McCasland ve M. E. Moore “Prime Submodules” adlı makalesinde serbest modüllerin asal alt modülleri üzerinde inceleme yapmıştır [9].

D.G. Northcott 1968 yılında “Lessons on rings and multiplicities” adlı kitabında halkalar ile ilgili temel bilgiler vermiş ve modüller, alt modüller, serbest modüller, asalımsı modüller, noetherian halka ve modüller ile ilgili bilgi vermiştir [10].

I.Kaplansky 1970 yılında “Commutative Algebra” adlı kitabında modüller ve idealler ile ilgili temel oluşturmak amaçlı bir çalışma yapmıştır[11].

2008 yılında H. A. Tavallae ve R. Varmazyar yarı asal alt modül tanımını yapmış yarı asal alt modüllerin temel özelliklerini vermiştir. Ayrıca asal alt modüller ile olan ilişkisini de incelemiştir [12].

2000 yılında R. Y. Sharp “Steps in Commutative Algebra” isimli kitabında halkalar, alt halkalar, idealler ve modüller ile ilgili temel bilgiler vermiştir [13].

H.Hacısalihoglu 1975 yılında “Lineer Cebir” adlı kitabında vektör uzayları ile ilgili temel özellikleri vermiş ve daha sonra modül tanımını vermiştir [14].

Elbette bu çalışma alanları bu kadarla sınırlı değildir. Asal alt modüllerin projektif, flat modüller ile birleştirilmesi gibi daha nice konularla çalışma yapılmıştır. Fakat bu çalışmada bu konuları incelemeyecek ve bunların ayrıntılarına burada değinmeyeceğiz.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez, modül teorisi alanında çalışan herkesin yararlanması amacıyla hazırlanmıştır. Halka teorisi ve modül teorisi ile ilgili temel kavramlar verilecektir. Daha sonra asal alt modüller konusu ayrıntılı bir şekilde anlatılacaktır. Asal alt modüllerin diğer modüller ile ilişkileri verilecektir. Daha sonra yarı asal alt modüller ile ilgili bilgi verilecek ve asal alt modüllerde sağlanan bazı özelliklerin yarı asal alt modüllerde de benzer şekilde sağlandığını göstermeye çalışacağız.

1.3 Hipotez

Birimli ve değişmeli bir halkanın asal idealleri ile asal alt modüller arasında benzerlikler vardır. Halkalar için Cohen Teoremi gibi bazı temel teoremler birimli ve değişmeli bir halkada asal alt modüller için de sağlanır. Ayrıca asal alt modüller için sağlanan temel özelliklerin yarı asal alt modüller için de sağlandığı gösterilebilir.

BÖLÜM 2

2.1 Ön Bilgiler

Tanım 2. 1 S bir küme ve $\leq$, S üzerinde bir bağıntı olmak üzere $(S, \leq)$ sistemi

i) Yansıma özelliği: Her $a \in S$ için $a \leq a$

ii) Ters simetri özelliği: $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$

iii) Geçişme özelliği: $a \leq b$ ve $b \leq c$ iken $a \leq c$

özelliklerini sağlıyor ise S ye **kısmi sıralı küme** denir. Eğer $(S, \leq)$ sıralı kümesinde her $a, b \in S$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$ ise bu sıralı kümeye **tam sıralı** denir. [1]

Tanım 2. 2 Sıralı bir kümede bir elemanın kendisinden kesin büyük başka bir eleman yoksa bu elemana **maksimal eleman** denir. [1]

Tanım 2. 3 Sıralı bir kümenin tam sıralı alt kümesine **zincir** denir. [1]

Lemma 2. 1 (Zorn Lemma) Boştan farklı bir S sıralı kümesinin, her zincirinin S de bir üst sınırı varsa, S sıralı kümesinin en az bir maksimal elemanı vardır. [1]

2.2 Halkalar

Tanım 2.2.1 R boş olmayan bir küme olsun. R üzerindeki $(+)$ ve $(.)$ ikili işlemleri için, aşağıdaki özellikleri sağlayan $(R, +, .)$ üçlüsüne **halka** denir.

i) $(R, +)$ abelyan bir grup,

ii) Her $a, b, c \in R$ için , $(a.b).c = a.(b.c)$ (birleşme özelliği),

iii) Her $a.b.c \in R$ için , $a.(b+c) = a.b + a.c$ ve $(a+b).c = a.c + b.c$ (çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği)

Ek olarak;

Her $a, b \in R$ için $a.b = b.a$ ise R ' ye **değişmeli halka** ,

Her $a \in R$ için $1_R.a = a.1_R = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ elamanı varsa, R ' ye **birimli halka** denir. [1]

Buradan itibaren $a.b = ab$ yazılacaktır ve halkalarımız birimli değişimli olacaktır.

Teorem 2.2.1 $(R, +, .)$ bir halka olsun. Öyle ise aşağıdakiler sağlanır.

i) Her $a \in R$ için $a.0_R = 0_R.a = 0_R$ dir.

ii) Her $a, b \in R$ için $a.(-b) = -ab = (-a)b$ dir.

iii) Her $a, b \in R$ için $(-a).(-b) = ab$ dir.

iv) Her $a, b, c \in R$ için $a(b-c) = ab - ac$ ve $(b-c)a = ba - ca$ dir. [1]

Tanım 2.2.2 Halka sadece 0_R dan ibaret ise yani $0_R = 1_R$ ise halkaya **trivial halka** denir. [1]

Tanım 2.2.3 R bir halka ve $a \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olacak biçimde bir $0 \neq b \in R$ varsa, a elemanına halkanın **sıfır bölene** denir. [1]

Tanım 2.2.4 R bir halka ve $0_R \neq a \in R$ olsun. $ab = 1_R$ olacak şekilde $b \in R$ varsa, a elemanına **terslenebilir veya birimsel eleman** denir. [1]

Tanım 2.2.5 R birimli ve değişmeli bir halka ve $1_R \neq 0_R$ olsun. Eğer R 'nin 0_R dan başka sıfır bölene yoksa, R 'ye bir **tamlık bölgesi** denir. [1]

Tanım 2.2.6 Birimli ve değişimli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanın tersi varsa halkaya **cisim** denir. [1]

Örnek 2.2.1 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ adi toplama ve çarpma işlemine göre birer cisimdirler fakat $\mathbb{Z}$ bir cisim değildir.

Tanım 2.2.7 Bir R halkasında $a \in R$ için, $a^2 = a$ ise a elemanına **idempotent eleman** denir. $\forall a \in R$ için, $a^k = 0$ olacak şekilde bir $k > 0$ tamsayısı bulunabilirse a elemanına **nilpotent eleman** denir. [1]

Tanım 2.2.8 R bir halka $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun.

1. Her $a, b \in I$ için $a - b \in I$ ve

2. Her $a \in I$ ve her $r \in R$ için $ra \in I$

ise I 'ya R 'nin bir **ideali** denir.

$0 = \{0_R\}$ ve R 'nin kendisi her zaman bir ideal olduğundan, trivial olmayan her halkanın en az iki ideali vardır. R 'nin kendinden farklı her idealine **has ideal** denir. [1]

Örnek 2.2.2 Tamsayılar halkası $\mathbb{Z}$ 'nin idealleri toplamsal alt gruplarından ibarettir. [7]

Teorem 2.2.2 R bir halka ve $I_i (i \in \Lambda)$, R 'nin ideallerinin boştan farklı bir topluluğu olsun. O zaman $\bigcap_{i \in \Lambda} I_i$ de R 'nin bir idealidir. [1]

Tanım 2.1.1 A, R halkasının bir alt kümesi olsun. R 'nin A 'yı kapsayan en küçük idealine A 'nın ürettiği ideal denir ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir. $A = \{a\}$ tek elemanlı bir küme ise $\langle A \rangle = \langle a \rangle$ ya a 'nın ürettiği **temel ideal** denir. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sonlu bir küme ise $\langle A \rangle$ 'ya **sonlu üretilmiş bir ideal** ve A 'ya da bir **üreteç sistemi** denir. [1]

Tanım 2.2.9 Her ideali bir temel ideal olan halkaya **temel ideal halkası** denir. [1]

Önerme 2.2.1 R halkasının bir cisim olması için gerek ve yeter koşul R 'nin 0 ve R 'den başka hiçbir idealinin olmamasıdır. [1]

Tanım 2.2.9 R bir halka, I ve J iki ideal olsun.

$I + J = \{a + b : a \in I, b \in J\}$ 'ye I ve J ideallerinin toplamı ve

$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i : a_i \in I, \text{ ve } b_i \in J, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ 'ye I ve J ideallerinin çarpımı denir. IJ ve $I + J$ de R 'nin idealleridir. [1]

Tanım 2.2.10 R ve S iki halka olsun. Her $a, b \in R$ için

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ ve } f(ab) = f(a)f(b)$$

koşullarını sağlayan $f : R \rightarrow S$ fonksiyonuna bir **halka homomorfizması** denir.

Eğer bir homomorfizma 1-1 ise **monomorfizma**, örten ise **epimorfizma** ve hem 1-1 hem de örten ise **izomorfizma** adı verilir.

$$\text{Çekf} = \{r \in R : f(r) = 0\}$$

kümesine f 'nin **çekirdeği** denir. Çekf , R 'nin bir idealidir. [1]

Tanım 2.2.11 I, R halkasının bir ideali olsun. $\pi : R \rightarrow R/I$, $\pi(r) = r + I$ ile tanımlı fonksiyon bir örten homomorfizmadır. π ' ye **doğal (naturel) homomorfizma** denir. [7]

Teorem 2.2.3 (1.İzomorfizma Teoremi) Eğer $f : R \rightarrow S$ bir örten halka homomorfizması ise $f : R/\text{Çekf} \cong f(R) = S$ 'dir. [7]

Tanım 2.2.12 P, R halkasının bir has ideali olsun. $a, b \in R$ için, $ab \in P$ olması $a \in P$ veya $b \in P$ olmasını gerektiriyorsa P 'ye bir **asal ideal** denir. [1]

Örnek 2.2.3 p , $\mathbb{Z}$ de bir asal ve n de bir bir pozitif tam sayı olsun. $\langle p^n \rangle$ nin bir asal ideal olduğunu gösterelim. $ab \in \langle p^n \rangle$ ve $a \notin \langle p^n \rangle$ olsun. Bir $r \in \mathbb{Z}$ vardır öyle ki $ab = rp^n$ dir. p^n ; a yı bölmediğinden p böler b ve böylece bazı $q \in \mathbb{Z}$ için $b = qp$ dir. Böylece $b^n \in \langle p^n \rangle$ dir. [3]

Önerme 2.2.2 P , R halkasının bir asal ideali ve $I_1, I_2, \dots, I_n$ de R halkasının bir takım idealleri olsunlar. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktirler.

1) Bir $j = 1, 2, \dots, n$ için, $P \supseteq I_j$

$$2) P \supseteq \bigcap_{i=1}^n I_k$$

$$3) P \supseteq \prod_{i=1}^n I_k \text{ dir. [1]}$$

Önerme 2.2.3 R bir halka olsun. $P \subset R$ idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul R/P bölüm halkasının bir tamlık bölgesi olmasıdır. [1]

Tanım 2.2.12 I, R halkasının bir ideal olsun.

$$\sqrt{I} = \{r \in R : \text{bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } r^n \in I\}$$

kümesi R halkasının I ' yı kapsayan bir idealdir. Bu ideale I idealinin **radikali** denir ve $\sqrt{I}$ ile gösterilir. [1]

Önerme 2.24 I, R halkasının bir ideal olsun. I idealinin radikali R ' nin I ' yı kapsayan bütün P asal ideallerinin arakesitidir. [1]

Önerme 2.2.5 R bir halka ve I bir ideali olsun. I idealinin radikali, I yı kapsayan tüm asal ideallerin kesişimidir: [1]

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in V(I)} P$$

Sonuç 2.2.1 R bir halka olsun. Nil radikal

$$\sqrt{0} = N(R) = \bigcap_{P \in \text{Spec}} P \text{ dir. [1]}$$

Teorem 2.2.4 I, R halkasını bir has ideali olsun. R ' nin $I \subseteq J \subseteq R$ koşulunu sağlayan her J ideali için , $I = J$ veya $J = R$ oluyorsa I ' ya R 'nin **maksimal ideali** denir. [1]

Teorem 2.2.5 R bir halka ve $M \neq R$ bir ideal olsun. M ' nin R 'nin bir maksimal ideali olması gerek ve yeter koşul her $x \in R - M$ için $M + \langle x \rangle = R$ olmasıdır. [7]

Örnek 2.2.4 F bir cisim ise tek maksimal ideali 0 dır. [1]

Önerme 2.2.6 R bir halka olsun. $M \subset R$ idealinin maksimal olması için gerek ve yeter koşul R/M bölüm halkasının bir cisim olmasıdır. [1]

Sonuç 2.2.2 Her maksimal ideal asaldir. [1]

Teorem 2.2.6 Sıfırdan farklı her R halkasında en az bir tane maksimal ideal vardır. [13]

Sonuç 2.2.3 J, R 'nin bir has ideali ise J 'yi kapsayan bir maksimal ideal vardır. [1]

Tanım 2.2.13 R halkasının tek bir tane maksimal ideali varsa, R 'ye bir **lokal (yerel)** halka denir. [1]

Örnek 2.2.5 F bir cisim ise tek maksimal ideali 0 olduğundan, bir yerel halkadır. [1]

Tanım 2.2.14 R halkasının tüm maksimal ideallerinin arakesitine **Jacobson Radikali** denir ve $J(R)$ ile gösterilir. [1]

Örnek 2.2.6 $J(\mathbb{Z}) = \bigcap_{p \in \mathbb{Z} \text{ asal}} (p) = 0$ dir. [1]

Önerme 2.2.7 $a \in R$ elemanın, Jacobson radikalinde olması için gerek yeter koşul her $r \in R$ için, $1 - ar \in R$ elemanının birimsel olmasıdır. [13]

Tanım 2.2.15 I, R halkasının bir ideali olsun. $I \subseteq P$ asal ideali için, $I \subseteq P' \subset P$ olacak şekilde hiçbir P' asal ideali yoksa P 'ye I 'nın bir **minimal asal ideali** denir. Özel olarak, $I = 0$ idealinin minimal asalları 0 dan ibarettir. [1]

Teorem 2.2.7 $n \geq 2$ olmak üzere, $I_1, I_2, \dots, I_n$ ler R halkasının idealleri olsunlar. Her $i \neq j$ için $I_i + I_j = R$ ($i, j = 1, \dots, n$) ise

$I_1 I_2 \dots I_n = I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n$ dir. [1]

Teorem 2.2.8 (Çin Kalan Teoremi) $n \geq 2$ olmak üzere, $I_1, I_2, \dots, I_n$ ler R halkasının idealleri olsun. Her $i \neq j$ için $I_i + I_j = R$ ($i, j = 1, \dots, n$) ise $r \in R$ olmak üzere,

i) $f(r) = (r + I_1, \dots, r + I_n)$ ile tanımlanan $f : R \rightarrow R/I_1 \times \dots \times R/I_n$ homomorfizması örtendir.

ii) $R/I_1 I_2 \dots I_n \cong R/I_1 \times \dots \times R/I_n$ izomorftur. [1]

Tanım 2.2.16 I ve J , R 'nin iki ideali olsun. $(I : J) = \{r \in R : rJ \subseteq I\} \subseteq I$ kümesini tanımlayalım.

$$(0 : J) = \{r \in R : rJ = 0\}$$

ile tanımlanan kümeye J 'nin **sıfırlayıcısı** denir ve $Ann(J)$ ile gösterilir. [13]

Tanım 2.2.17 R bir tamlık bölgesi ve F, R 'nin kesir cismi olsun. I, R modül F 'nin bir alt modülü olmak üzere $\alpha I \subseteq R$ olacak şekilde $0 \neq \alpha \in R$ varsa I 'ya R 'nin **kesirsel ideali** denir. I kesirsel ideal ise $IJ = R$ olacak şekilde J ideali varsa I 'ya **terslenebilir ideal** denir. [1]

Örnek 2.2.7 $R = \mathbb{Z}$ ve $F = \mathbb{Q}$ için $I = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ ise $I, \mathbb{Z}$ 'nin kesirsel ideali ve terslenebilir idealdir.

Önerme 2.2.8 R halkasının bir I ideali için, aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1) $I = \sqrt{J}$ olacak şekilde bir $J \in I(R)$ bulunabilir.
- 2) I , R 'nin bir takım asal ideallerinin arakesitidir.
- 3) $I = \sqrt{I}$

dir. [1]

Tanım 2.2.18 Yukarıdaki önermenin denk koşullarından birini sağlayan ideale **radikal ideal** denir. [1]

Tanım 2.2.19 R değişmeli bir halka ve Q , R 'nin bir ideali olsun. $\forall a, b \in R$, $ab \in Q$ ve $a \notin Q$ olması pozitif bir n tam sayısı için $b^n \in Q$ olmasını sağlıyorsa Q 'ya **asalımsı ideal** denir. [3]

Teorem 2.2.9 Q , değişmeli bir R halkasında bir ideal olsun. O zaman

- 1) $\sqrt{Q}$, R 'nin bir ideali ve $\sqrt{Q} \supseteq Q$,
- 2) Eğer Q bir asalımsı ideal ise $\sqrt{Q}$ bir asal idealdir. [3]

Tanım 2.2.20 Q , R halkasının bir asalımsı ideali olsun. P asal ideali için $P = \sqrt{Q}$ ise Q 'ya **P -asalımsı ideal** denir. [3]

Örnek 2.2.8 i , pozitif bir tam sayı olsun. $\mathbb{Z}$ de bir p asalı için $\langle p^i \rangle$, $\langle p \rangle$ - asalımsıdır. $\langle p \rangle = \sqrt{\langle p^i \rangle}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a \in \sqrt{\langle p^i \rangle}$ olsun. Bir pozitif n tam sayısı vardır öyle ki $a^n \in \langle p^i \rangle$ dir. Böylece, bazı $r \in \mathbb{Z}$ için $a^n = rp^i$ dir. Buradan $p \mid a$ ve $a \in \langle p \rangle$ dir. $\sqrt{\langle p^i \rangle} \subseteq \langle p \rangle$ elde edilir. Tersine, $a \in \langle p \rangle$ olsun. $t \in \mathbb{Z}$ vardır öyle ki $a = tp$ dir. Bu eşitlikten $a^i = t^i p^i \in \langle p^i \rangle$ olur. $a \in \sqrt{\langle p^i \rangle}$ ve $\langle p^i \rangle \subseteq \sqrt{\langle p^i \rangle}$ elde edilir. Eşitlik elde edilir. [3]

Teorem 2.2.10 Q ve P , R halkasının idealleri olsunlar. Q asalımsıdır ve $P = \sqrt{Q}$ dir ancak ve ancak

i) $Q \subseteq P \subseteq \sqrt{Q}$ ve

ii) $ab \in Q, a \notin Q$ olması $b \in P$ olmasını sağlar. [3]

Tanım 2.2.21 I , R halkasının bir ideali ve her $i=1,2,...,n$ için Q_i ler P_i - asalımsı idealler olmak üzere,

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$$

şeklinde yazılabiliyorsa, bu yazılışa I ' nın bir **asalımsı ayrışımı** ve I idealine de **ayrışabilir ideal** denir. Ayrıca, aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa bu ayrışım **minimal asalımsı ayrışım** denir.

1) $P_1, P_2, \dots, P_n$ ler R nin farklı asal idealleridirler.

2) Her $j=1,2,...,n$ için, $\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n Q_i \not\subseteq Q_j$ dir. [3]

Tanım 2.2.22 I , R halkasının ayrışabilir bir ideali ve I ' nın bir minimal asalımsı ayrışımı, $i=1,2,...,n$ ve $\sqrt{Q_i} = P_i$ olmak üzere,

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$$

olsun. n elemanlı $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ kümesine, I ya **ilişkin asal idealler kümesi** denir ve $Ass(I) = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ ile gösterilir. [1]

Tanım 2.2.23 R bir tamlık bölgesi ve $S = R \setminus \{0\}$ olarak alınırsa, $S^{-1}R$ de sıfır bölen yoktur ve 0 dan farklı her eleman birimsel olduğundan cisimdir. $S^{-1}R$ ye R nin **kesir cismi** denir. [1]

Örnek 2.2.9 $\mathbb{Z}_m$ deki birimsel elemanların kümesi, yani tüm sıfır bölen olmayan elemanlar kümesi $S = \mathbb{Z}_m^*$ üzere, $S^{-1}\mathbb{Z}_m^*$ yi belirleyelim.

Her $t \in S$ için, $\frac{a}{b} = \frac{at}{bt}$ olur. S nin elemanları birimsel olduğundan, herbir $\frac{a}{b}$ yi $\frac{a^*}{1}$ olarak ifade edebiliriz. [1]

Tanım 2.2.24 R halkasını ideallerinin her artan

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$$

zinciri sonlu adımda durursa, R ' ye **Noetherian halka** denir. [1]

Teorem 2.2.11 R halkasını ideallerinin her azalan

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$$

zinciri sonlu adımda durursa R ' ye **Artinian Halka** denir. [1]

Örnek 2.2.10 Her cisim artinian halkadır. [1]

Teorem 2.2.12 Her artinian tamlık bölgesi cisimdir. [1]

Sonuç 2.2.4 Artinian halkanın her asal ideali maksimaldir. [1]

Sonuç 2.2.5 R artinian halkasında nil radikal ve jacobson radikali aynıdır, yani $N(R) = J(R)$ dir. [1]

Teorem 2.2.13 (Cohen Teoremi) Her asal ideali sonlu üretilmiş bir halka noetheriandır. [1]

Tanım 2.2.25 Bir iç işleme göre V bir abel grubu ve H da iki işlemi sırasıyla toplama ve çarpma olan bir cisim olsun. V üzerinde bir dış işlem olarak tanımlanan ve aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir $H \times V \rightarrow V$ dönüşümünün var olduğunu kabul edelim. Bu halde V kümesine H cismi üzerinde bir **vektör uzayı** denir.

- 1) $H \times V \rightarrow V$ dönüşümü V üzerindeki $V \times V \rightarrow V$ iç işlemi üzerine dağılılabildir.
- 2) $H \times V \rightarrow V$ dönüşümü H daki $+: H \times H \rightarrow H$ iç (toplama) işlemi üzerine dağılılabildir.
- 3) $H \times V \rightarrow V$ dönüşümü H daki $(.): H \times H \rightarrow H$ iç (çarpım) işlemi ile birleşebilir.
- 4) $H \times V \rightarrow V$ dönüşümünün birim elemanı H üzerindeki $(.): H \times H \rightarrow H$ iç (çarpma)

2.3 Modüller

Tanım 2.3.1 $(M, +)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. M deki elemanlar ile R deki elemanların skaler çarpımı , $R \times M \rightarrow M$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyor ise , M ' ye R üzerinde bir **modül** veya kısaca **R - modül** denir. [1]

- i) Her $r \in R$ ve her $m, m' \in M$ için, $r(m + m') = rm + rm'$
- ii) Her $r, r' \in R$ ve her $m \in M$ için, $(r + r')m = rm + r'm$
- iii) Her $r, r' \in R$ ve her $m \in M$ için, $(rr')m = r(r'm)$
- iv) Her $m \in M$ için , $1_R m = m$

Örnek 2.3.1

1. Her R halkasını, skaler çarpımı halkadaki çarpım olarak, kendisi üzerindeki bir R - modül olarak düşünebiliriz. [1]
2. I , R halkasının bir ideali ise I bir R - modüldür. [1]

3. I, R halkasının bir ideali ise $R \times R/I \rightarrow R/I$ skaler çarpımı , $(r, s+I) \mapsto rs+I$ ile tanımlanarak R/I bir R - modül yapılabilir. [1]

4. V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ise V ' yi bir K - modül olarak düşünebiliriz. [1]

5. H birimi 1 olan değişimli bir halka olsun. H üzerinde tanımlanan

$$[a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in H \text{ şeklindeki bütün } m \times n \text{ matrislerin kümesi } H_n^m \text{ olsun.}$$

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \quad \text{tanımlayarak } H_n^m \text{ yi bir } H \text{ - modül yapabiliriz. [14]}$$

$$c[a_{ij}] = [ca_{ij}], c \in H$$

Tanım 2.3.2 R bir halka , M bir R - modül ve $N \subseteq M$ boş olmayan bir alt küme olsun. N de kendi başına bir R - modül ise N ye M nin **alt modülü** denir. [1]

Örnek 2.3.2 M modülünün kendisi ve sıfırdan ibaret $\{0_M\} = 0$ alt kümesi M nin bir alt modülüdür. [1]

Örnek 2.3.3 R halkasını R - modül olarak düşündüğümüzde, alt modülleri R nin idealleridir. [1]

Önerme 2.3.1 R - modül M nin boş olmayan bir $N \subseteq M$ alt kümesinin alt modül olması için gerek ve yeter koşul her $r, r' \in R$, her $m, m' \in N$ için, $rm + r'm' \in N$ olmasıdır. [1]

Tanım 2.3.3 M bir R - modül ve $X \subseteq M$ bir alt küme olsun. X alt kümesini kapsayan, tüm alt modüllerin arakesitine X in **ürettiği alt modül** denir ve (X) ile gösterilir. [1]

Örnek 2.3.4

1) $X = \emptyset$ ise $(X) = \{0_M\}$,

2) $X \neq \emptyset$ ise $(X) = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i x_i : r_i \in R \text{ ve } x_i \in X, i=1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\}$

3) $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sonlu bir küme ise,

$$(X) = \left\{ \sum_{i=1}^m r_i x_i : r_i \in R \text{ ve } x_i \in X, i=1, 2, \dots, m \right\} = Rx_1 + Rx_2 + \dots + Rx_m \text{ olduğu açıktır. [1]}$$

Tanım 2.3.4 M bir R - modül, $m \in M$ olsun. $\{m\}$ nin ürettiği alt modül

$(m) = Rm = \{rm : r \in R\}$ ye m ile **üretilmiş alt modül** denir. Eğer $M = (m)$ olacak şekilde bir $m \in M$ bulunabilirse, M ye **devirli modül** denir. $X \subseteq M$ sonlu bir küme olmak üzere, $M = (X)$ ise M ye **sonlu üretilmiş modül** denir. [1]

Örnek 2.3.5 R halkası, $R = R.1_R$ olduğundan, R - modül olarak devirlidir. [1]

Önerme 2.3.1 R bir halka, I bir ideali ve M bir R - modül olsun.

$$IM = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i m_i : r_i \in I \text{ ve } m_i \in M, i=1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\} \text{ ile gösterelim.}$$

1) IM , M nin bir R - alt modülüdür.

2) I ve I' , R nin iki ideali ise $I(I'M) = (II')M$

3) $I = Ra$ temel ideal ise $IM = (Ra)M = \{am : m \in M\}$ dir. [1]

Önerme 2.3.2 R bir halka, M bir R - modül, N bir alt modülü ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ bir alt küme olsun.

$$(N : X) = \{r \in R : rX \subseteq N\} \text{ ile gösterelim.}$$

1) $(N : X)$, R ' nin idealidir.

2) $(N : X) = (N : (X))$ dir. [1]

Tanım 2.3.5 R bir halka, M bir R - modül ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ bir alt küme olsun.

$$(0 : X) = \{r \in R : rX = 0\} \text{ idealine } X \text{ in } \textbf{sıfırlayıcısı} \text{ denir ve } Ann(X) \text{ ile gösterilir. [1]}$$

Tanım 2.3.6 R bir halka, M bir R - modül olsun.

$$(0 : M) = \{r \in R : rM = 0\}$$

ideale M modülünün **sıfırlayıcısı** denir ve $Ann(M)$ ile gösterilir. Eğer $Ann(M) = 0$ ise M modülüne **sadık (faithfully) modül** denir. [1]

Teorem 2.3.1 R bir halka, M bir R -modül, $\{N_i\}$ ler ve N alt modülleri ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ bir alt kümesi olsun.

$$i) \left(\bigcap_{i \in I} N_i : X \right) = \bigcap_{i \in I} (N_i : X),$$

$$ii) \left(N : \sum_{i \in I} N_i \right) = \bigcap_{i \in I} (N : N_i)$$

iii) N ve N' alt modülleri için, $Ann(N + N') = Ann(N) \cap Ann(N')$ dir. [1]

Önerme 2.3.3 R bir halka ve M bir R -modül, I da R nin bir ideali olsun. $I \subseteq Ann(M)$ ise,

$R/I \times M \rightarrow M$ skaler çarpımını $(r + I, m) \rightarrow rm$ ile tanımlayarak R -modül M bir R/I -modül yapılabilir. [1]

Önerme 2.3.4 R bir halka ve M bir R -modül ve N de M nin bir alt modülü olsun. $R \times M/N \rightarrow M/N$ skaler çarpımını $(r, m + N) \rightarrow rm + N$ ile tanımlayarak, M/N toplamsal bölüm grubu, bir R -modül yapılabilir. M/N ye **bölüm modülü** denir. [1]

Tanım 2.3.7 R bir halka, M ve N de R -modül olsunlar. Bir $f : M \rightarrow N$ fonksiyonu, her $m, m' \in M$ için,

$$f(m + m') = f(m) + f(m'),$$

her $r \in R$ ve her $m \in M$ için, $f(rm) = rf(m)$ koşullarını sağlıyorsa, f ye bir **modül homomorfizması** veya **R -homomorfizma** denir.

Bir homomorfizma bire bir ise **monomorfizma**, örten ise **epimorfizma** ve hem bire bir hem örten ise **izomorfizma** denir. M den M ye homomorfizmalara **endomorfizma**, M den M ye izomorfizmalara da **otomorfizma** denir. [1]

Tanım 2.3.8(Doğal Homomorfizma) R bir halka, M bir R -modül ve N bir alt modülü olsun. $p : M \rightarrow M/N$, $p(m) = m + N$ ile tanımlı fonksiyon bir örten homomorfizmadır. Bu fonksiyona **doğal homomorfizma** denir. [1]

Teorem 2.3.2(Homomorfizma Teoremi) R bir halka ve $f : M \rightarrow N$ bir homomorfizma olsun. $M / \text{Çek} f \cong f(M) = \text{Im } f$ dir. [13]

Teorem 2.3.3(1. İzomorfizma Teoremi) R bir halka, M_1 ve M_2 , R - modül M nin iki alt modülü ve $M_1 \subseteq M_2$ olsun. Bu taktirde, M_2 / M_1 de M / M_1 in bir alt modülüdür. Ayrıca,

$$\left(\frac{M}{M_1} \right) / \left(\frac{M_2}{M_1} \right) \cong \frac{M}{M_2} \text{ dir. [1]}$$

Teorem 2.3.4(2. İzomorfizma Teoremi) R bir halka, M bir R -modül ve M_1 ile M_2 de iki alt modül olsunlar. Bu taktirde,

$\psi : \frac{M_1}{(M_1 \cap M_2)} \rightarrow \frac{(M_1 + M_2)}{M_2}$, $m + (M_1 \cap M_2) \rightarrow m + M_2$ ile tanımlı fonksiyon bir izomorfizmadır. [1]

Örnek 2.3.6 M bir R -modül ve $m \in M$ olsun. $g_m : R \rightarrow Rm$, $g_m(r) = rm$ ile tanımlı fonksiyon bir örten homomorfizmadır ve çekirdeği, $\text{Ann}(m)$ dir. Şu halde , $\frac{R}{\text{Ann}(m)} \cong Rm$ dir. [1]

Tanım 2.3.9 Sıfırdan farklı bir modülün, sıfır ve kendinden başka hiçbir alt modülü yoksa, bu modüle **basit modül** denir. [1]

Örnek 2.3.7 Cisim kendisi üzerinde bir basit modüldür. [1]

Tanım 2.3.10 Bir M modülünün has bir alt modülü N olsun. M nin N yi kapsayan N den başka hiçbir has alt modülü yoksa N ye bir **maksimal alt modül** denir. [1]

Tanım 2.3.11 Bir M modülünün 0 dan farklı bir alt modülü N olsun. M nin, N de kapsanan 0 dan başka hiçbir alt modülü yoksa, N ye bir **minimal alt modül** denir. [1]

Örnek 2.3.8 R bir halka, M bir R - modül ve N bir alt modülü olsun. N nin bir maksimal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $\frac{M}{N}$ nin bir basit modül olmasıdır. [1]

Örnek 2.3.9 R bir halka, M bir R - modül ve N bir alt modülü olsun. N nin bir minimal alt modül olması için gerek ve yeter koşul N nin bir basit modül olmasıdır. [1]

Önerme 2.3.5 R bir halka ve M bir R - modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1) M bir basit R - modül $\Leftrightarrow$ her $0 \neq m \in M$ için, $M = Rm$,
- 2) M bir basit R - modül ise her $0 \neq m \in M$ için $\text{Ann}(m)$, R nin bir maksimal idealidir. [1]

Tanım 2.3.12 R bir halka ve $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesi, bir R - modüller ailesi olsun. Her $i \in I$ bileşeni $m_i \in M_i$ olmak üzere,

$\prod M_i = \{(m_i) : m_i \in M_i, i \in I\}$ Kartezyen çarpım kümesini alalım. Toplama ve çarpım işlemlerini bileşen bileşen tanımlayarak;

$$(m_i) + (m'_i) = (m_i + m'_i) \text{ ve } r(m_i) = (rm_i)$$

işlemleri altında, $\prod M_i$ bir R -modüldür. R - modül $\prod M_i$ ye, $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesinin **direkt çarpımı** denir. Bu çarpımda, bileşenlerinden ancak sonlu tanesi sıfır olmayan elemanların oluşturduğu alt küme de bir alt modüldür. Bu alt modüle de $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesinin **direkt toplamı** denir ve $\oplus_{i \in I} M_i$ ile gösterilir. [1]

Tanım 2.3.13 R bir halka, M bir R - modül ve $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesi, M nin bir R -alt modüller ailesi olsun.

- 1) $M = \sum_{i \in I} M_i$, yani, her $m \in M$ elemanı, $m_i \in M_i$ olmak üzere sonlu toplam olarak, $m = \sum_{i \in I} m_i$ şeklinde yazılabiliyor ve
- 2) Bu yazılış ancak tek türlü ise M , $\{M_i\}_{i \in I}$ alt modüllerinin **iç direkt toplamı** denir ve $M = \oplus_{i \in I} M_i$ ile gösterilir. [1]

Tanım 2.3.14 R bir halka, M bir R -modül ve $S = \{y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de M nin bir üreteç sistemi olsun. Her $m \in M$ elemanı, $r_\alpha \in R$, $y_\alpha \in S$ olmak üzere, $m = \sum_{\alpha \in I} r_\alpha y_\alpha$ şeklinde sonlu bir toplam olarak yazılabiliyor ve bu yazılış tek türlü oluyorsa, $S = \{y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ye M nin bir **tabanı** denir. M modülüne de bir **serbest modül** denir. [1]

Örnek 2.3.10 Her R halkası kendisi üzerinde bir serbest modüldür. Taban olarak, $\{1_R\}$ alınabilir. [1]

Örnek 2.3.11 Her vektör uzayı bir serbest modüldür. Çünkü her vektör uzayının bir tabanı vardır. [1]

Tanım 2.3.15 R bir tamlık bölgesi ve M bir R -modül olsun. $m \in M$ elemanı için $rm = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq r \in R$ varsa, m ye M nin bir **burulmalı elemanı**

$$T(M) = \{m \in M : rm = 0 \text{ olacak şekilde bir } 0 \neq r \in R \text{ var}\}$$

alt modülüne de M nin **burulmalı alt modülü** denir. $T(M) = M$ ise M ye **burulmalı modül** $T(M) = 0$ ise M ye **serbest burulmalı modül** denir. [1]

Örnek 2.3.12 V , F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Şu halde V bir serbest burulmalı modüldür. $\lambda \in V$, $0 \neq f \in F$ ve $\lambda f = 0$ olsun. F bir cisim olduğundan $f^{-1} \in F$ dir. $\lambda f f^{-1} = 0$ ve $\lambda = 0$ elde edilir. [1]

Önerme 2.3.6 R bir tamlık bölgesi ve M bir serbest R -modül olsun. M bir serbest burulmalı R -modüldür. [1]

İspat M bir $S = \{x_j\}_{j \in J}$ tabanlı serbest R -modül ve $x \in T(M)$ olsun. Şu halde $ax = 0$ olacak şekilde $0 \neq a \in R$ vardır. $x = \sum_{j \in J} a_j x_j$ olsun. Böylece $0 = ax = \sum_{j \in J} (aa_j) x_j$ olur. S bir taban olduğundan, her $j \in J$ için $aa_j = 0$ olur. R bir tamlık bölgesi olduğundan, her $j \in J$ için $a_j = 0$ olur. Sonuç olarak $x = 0$ ve böylece M bir serbest burulmalı R -modüldür.

Tanım 2.3.16 R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir has alt modülü olsun. Her $r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in N$ ve $m \notin N$ olması bir $t > 0$ tam sayısı için $r^t \in (N : M)$ olmasını gerektiriyorsa, yani,

$r \in R, m \in M$ için, $rm \in N$ iken $r \in \sqrt{(N : M)}$ veya $m \in N$ ise N ye **asalımsı alt modül** denir. [1]

Örnek 2.3.13 R bir halka olsun. Her R -modül R nin asalımsı alt modülleri asalımsı idealleridir. [1]

Önerme 2.3.7 M bir R - modül ve N , M nin bir asalımsı alt modülü olsun. Şu halde $(N : M) = \text{Ann}\left(\frac{M}{N}\right)$, R nin bir asalımsı idealidir. [1]

Tanım R bir halka, M bir R - modül ve N , M nin bir asalımsı alt modülü olsun. $\sqrt{(N : M)} = P$ ise N ye P -asal idealine **ilişkin asalımsı alt modül** veya kısaca P -**asalımsı** alt modül denir. [1]

Önerme 2.3.8 R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir has alt modülü olsun. R nin bir P ideali için, aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa, P bir asal ideal ve N de M nin bir P -asalımsı alt modülüdür.

- i) Her $r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in N$ ve $m \notin N$ olması $r \in P$ olmasını gerektirir.
- ii) $r \in P$ ise bir k pozitif tam sayısı için $r^k M \subseteq N$ dir.[1]

Tanım 2.3.17 R bir halka, M bir R -modül ve K , M nin bir alt modülü olsun. K , M nin sonlu sayıda asalımsı alt modüllerinin kesişimi olarak yazılabiliyorsa K , M de **asalımsı ayrışma** sahiptir veya K **ayrışabilir bir alt modül** denir. [1]

Tanım 2.3.18 R bir halka, M bir R -modül ve K , M nin bir asalımsı ayrışımı mevcut olan bir alt modül olsun. Her $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ için, N_i bir P_i -asalımsı alt modül olmak üzere, K nın

$$K = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_s$$

minimal asalımsı ayrışımını alalım. Şu halde, her $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ için P_i ler farklıdır. Ayrıca $P_1, P_2, \dots, P_s$ asal idealleri, K tarafından tek türlü belirlidir. $P_1, P_2, \dots, P_s$ asal ideallerine, M nin K alt modülüne **ilişkin asal idealleri** denir ve $\text{Ass}(K) = \{P_1, P_2, \dots, P_s\}$ ile gösterilir. [1]

Tanım 2.3.19 R bir halka, M bir R -modül olsun. M nin alt modüllerinin her artan $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_n \subseteq \dots$ zinciri sonlu bir adımda durursa M ye **Noetherian modül** denir. [1]

Örnek 2.3.13 $\mathbb{Z}$ - modül $\mathbb{Z}$ noetherian modüldür. [1]

Örnek 2.3.14 $\mathbb{Z}$ - modül $\mathbb{Q}$ noetherian değildir. Gerçekten, $\left(\frac{1}{2}\right) \subset \left(\frac{1}{4}\right) \subset \left(\frac{1}{8}\right) \subset \dots$ bir sonsuz zincirdir. [1]

Tanım 2.3.20 R bir halka ve M bir R -modül olsun.

$Z(M) = \{r \in R : \text{bir } 0 \neq m \in M \text{ için, } rm = 0\}$ kümesine, M üzerindeki **sıfır bölenler** kümesi denir. [1]

Tanım 2.3.21 R bir halka ve M bir R - modül olsun. M nin alt modüllerinin her azalan $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_n \supseteq \dots$

zinciri sonlu bir adımda durursa M ye **artinian modül** denir. [1]

Örnek 2.3.15 $\mathbb{Z}$ - modül $\mathbb{Z}$ artinian değildir. Çünkü $\mathbb{Z}$ nin alt modüllerinin azalan zinciri sonlanmaz. [19]

Örnek 2.3.16 $\mathbb{Z}$ - modül $\mathbb{Z}_m$ sonlu olduğundan artiniandır. [1]

Teorem 2.3.5 F bir cisim ve V , F cismi üzerinde vektör uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- i) V sonlu boyutlu F - uzayıdır.
- ii) V artinian F - modüldür. [1]

Tanım 2.3.22 R bir halka, M bir R -modül olsun. M nin her N alt modülü için $N = IM$ olacak şekilde, R halkasının bir I ideali varsa, M ye bir **çarpımsal modül** denir. [1]

Örnek 2.3.17 Her devirli modül çarpımsal modüldür. [1]

$M = Rm$ bir devirli R - modül ve N , M nin herhangi bir alt modülü ise $(N : M)M \subseteq N$ olduğu açıktır. $n \in N$ olsun. $M = Rm$ olduğundan, $n = sm$ olacak şekilde bir $s \in R$ vardır. Böylece $Rn = sRm = sM \subseteq N$ olur. Şu halde $s \in (N : M)$ ve $n = sm \in (N : M)M$ bulunur. Böylece $N \subseteq (N : M)M$ olur. Sonuç olarak, $N = (N : M)M$ dir.

Önerme 2.3.9 R bir halka, M bir çarpımsal R -modül ve N , M nin bir alt modülü ise $N = (N : M)M$ dir. [1]

Lemma 2.3.1 R bir halka M , sadık çarpımsal R -modül ve P , R halkasının bir asal ideali olsun. $a \in R$ ve $x \in M$ olmak üzere, $ax \in PM$ ise $a \in P$ veya $x \in PM$ dir. [1]

ASAL ALT MODÜLLER

Tanım 3.1 R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir has alt modülü olsun. Her $r \in R$ ve $m \in M$ için, $rm \in N$ olması $m \in N$ veya $r \in (N:M)$ olmasını gerektiriyorsa N ye R -modül M nin bir **asal alt modülü** denir. [1]

Örnek 3.1 R halkasının her asal ideali R -modül R nin bir asal alt modülüdür. [1]

Örnek 3.2 R bir tamlık bölgesi olmak üzere $T(M)$, R -modül M nin has burulmalı alt modülü ise M nin bir asal alt modülüdür. Gerçekten, $0 \neq r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere, $rm \in T(M)$ ise $trm = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq t \in R$ vardır. R tamlık bölgesi olduğundan $rt \neq 0$ ve böylece $m \in T(M)$ olur. [1]

Örnek 3.3 Bir vektör uzayının her has alt modülü asaldır. V , K cisim üzerinde bir vektör uzayı ve W , V nin bir alt uzayı olsun. Her $k \in K$, $v \in V$ için $kv \in W$ olsun. K bir cisim olduğundan $k^{-1} \in K$ dir. $k^{-1}kv \in W$ ve $v \in W$ bulunur. [1]

Örnek 3.4 R bir halka, I_1, I_2 ve P idealleri olsun. P asal ve $I_1 \cap I_2 \subseteq P$ ise $I_1 \subseteq P$ veya $I_2 \subseteq P$ olduğunu biliyoruz. Bu özelliği asal alt modüller için genel olarak söyleyemeyiz. Gerçekten, $\mathbb{Z}$ - modül $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ yi göz önüne alalım. Şu halde $(0,0)$ asal alt modül ve $(\mathbb{Z} \times 0) \cap (0 \times \mathbb{Z}) = (0,0)$ olur. Fakat, $\mathbb{Z} \times 0 \not\subseteq (0,0)$ ve $0 \times \mathbb{Z} \not\subseteq (0,0)$ dir. [1]

Lemma 3.1 R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir has alt modülü olsun. N alt modülünün asal olması için gerek ve yeter koşul $(N:M)$ nin, R halkasının asal ideali olması ve M/N nin bir serbest burulmalı $R/(N:M)$ -modül olmasıdır. [1]

İspat ($\Rightarrow$): N , R -modül M nin bir asal alt modülü ve $a, b \in R$ olmak üzere, $ab \in (N:M)$ ve $b \notin (N:M)$ olsun. Şu halde $abM \subseteq N$ ve $bM \not\subseteq N$ olur. Böylece $abt \in N$ ve $bt \notin N$ olacak şekilde $t \in M$ vardır. N , R -modül M nin bir asal alt modülü olduğu için, $a \in (N:M)$ olur. Böylece $(N:M)$ bir asal idealdir.

M/N nin serbest burulmalı $R/(N:M)$ - modül olduğunu gösterelim. $\bar{0} \neq \bar{r} \in R/(N:M)$ ve $\bar{m} \in M/N$ olmak üzere $\bar{r}\bar{m} = \bar{0}$ olsun. Şu halde $rm \in N$ ve $r \notin (N:M)$ olur. N asal alt modül olduğundan, $m \in N$ ve böylece $\bar{m} = \bar{0}$ olur.

($\Leftarrow$): M/N bir serbest burulmalı $R/(N:M)$ -modül olsun. N nin asal alt modül olduğunu gösterelim. $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $rm \in N$ ve $r \notin (N:M)$ olsun. Şu halde $\bar{r}\bar{m} = \bar{0}$ ve $\bar{r} \neq \bar{0}$ olur. M/N bir serbest burulmalı $R/(N:M)$ -modül olduğundan $\bar{m} = \bar{0}$ ve böylece $m \in N$ olur. N , R - modül M nin bir asal alt modülüdür.

Önerme 3.1 R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir asalımsı alt modülü olsun. Şu halde N nin bir asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $(N:M)$ nin, R halkasının bir asal ideali olmasıdır. [1]

İspat ($\Rightarrow$): Lemma 3. 1 den açıktır.

($\Leftarrow$): $(N:M)$, R halkasının asal ideali olsun. $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $rm \in N$ ve $m \notin N$ kabul edelim. N asalımsı alt modül olduğu için bir n tam sayısı için $r^n \in (N:M)$ olur. $(N:M)$, R halkasının asal ideali olduğu için, $r \in (N:M)$ olur. Sonuç olarak N , M nin bir asal alt modülüdür.

Önerme 3.2 R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir has alt modülü olsun. Eğer $(N:M)$, R halkasının bir maksimal ideali ise N , M nin bir asal alt modülüdür. Özel olarak, $IM \neq M$ olacak şekilde, R halkasının her I maksimal ideali için IM , M nin bir asal alt modülüdür. [1]

İspat $(N:M) = P$, R halkasının maksimal ideali olduğu için M/N , R/P cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Şu halde M/N bir serbest burulmalı R/P - modüldür. Lemma 3. 1 den N , M nin bir asal alt modülüdür.

$I \subseteq (IM : M)$ olduğu açıktır. Fakat I , R halkasının maksimal ideali ise, $I = (IM : M)$ olur. Şu halde IM , M nin bir asal alt modülüdür.

Teorem 3.1 R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir has alt modülü olsun. N nin bir asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul R halkasının bir I ideali ve M nin bir D alt modülü için $ID \subseteq N$ olmasının, $I \subseteq (N : M)$ veya $D \subseteq N$ olmasıdır. [1]

İspat ($\Rightarrow$): N , R -modül M nin asal alt modülü olsun. I , R halkasının bir ideali ve D , M nin bir alt modülü olmak üzere, $ID \subseteq N$ fakat $D \not\subseteq N$ olduğunu kabul edelim. $a \in I$ alalım. Şu halde $ad \in N$ ve $d \notin N$ olacak şekilde bir $d \in D$ vardır. N asal alt modül olduğu için, $a \in (N : M)$ olur. Sonuç olarak $I \subseteq (N : M)$ olduğu görülür.

($\Leftarrow$): N nin bir asal alt modül olduğunu ispatlayalım. $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere, $rm \in N$ ve $m \notin N$ olsun. Şu halde $(r)(m) \subseteq N$ ve $(m) = Rm \not\subseteq N$ olur. Hipotezden, $(r) \subseteq (N : M)$ ve böylece $r \in (N : M)$ olur.

Önerme 3.3 R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir maksimal alt modülü ise N asaldir. [1]

İspat N , M nin bir maksimal alt modülü olsun. $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere, $rm \in N$ fakat $m \notin N$ olsun. Şu halde maksimallik koşulundan $N + Rm = M$ dir. Böylece

$rM = rN + Rrm \subseteq N$, yani $r \in (N : M)$ olur. Böylece N , M nin bir asal alt modülüdür.

Sonuç 3.1 M sonlu üretilmiş bir modül ise M nin her has alt modülünü kapsayan bir asal alt modül vardır. [1]

Önerme R bir halka, $\{N_i : i \in I\}$, R -modül M nin asal alt modüllerinin boştan farklı bir ailesi ve bu aile tam sıralı olsun. Şu halde $\bigcap_{i \in I} N_i$, M nin bir asal alt modülüdür. Eğer M sonlu üretilmiş ise $\bigcup_{i \in I} N_i$, M nin bir asal alt modülüdür. [1]

İspat $N = \bigcap_{i \in I} N_i$ olsun. Şu halde N , M nin bir has alt modülüdür. $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere, $rm \in N$ fakat, $m \notin N$ olsun. Böylece $m \notin N_i$ olacak şekilde $i \in I$

vardır. N_i asal alt modül olduğu için, $r \in (N_i : M)$ olur. j , I nın herhangi bir elemanı olmak üzere, $N_i \subseteq N_j$ ise $r \in (N_j : M)$ olduğu açıktır. Öbür yandan $N_j \subseteq N_i$ ise $rm \in N_j$ ve $m \notin N_j$ olduğundan $r \in (N_j : M)$ olur. Sonuç olarak $r \in (N : M)$ olur.

$K = \bigcup_{i \in I} N_i$ olsun. M sonlu üretilmiş olduğundan K bir has alt modüldür. $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere, $rm \in K$ fakat, $m \notin K$ olsun. Bir $i \in I$ için $rm \in N_i$ ve $m \notin N_i$ olur. N_i asal alt modül olduğu için, $r \in (N_i : M) \subseteq (K : M)$ olur. Böylece K asal alt modüldür.

Tanım 3.2 R bir halka, M bir R - modül ve N , M nin bir alt modülü olsun. Eğer bir P asal alt modülü için, $N \subseteq P$ ve P bu özellikteki en küçük alt modül ise P ye N alt modülünün bir **minimal asal alt modülü** denir. (0) alt modülünün bir minimal asal alt modülüne de, M nin bir minimal asal alt modülü denir. [1]

Önerme 3. 4 R bir halka, M bir R - modül olsun. N , M nin bir has alt modülü ve P de N yi kapsayan bir asal alt modül ise N nin P de kapsanan bir minimal asal alt modülü vardır. [1]

İspat N yi kapsayan ve P de kapsanan bütün asal alt modüllerin kümesini Ω ile gösterelim. Şu halde $P \in \Omega$ ve böylece $\Omega \neq \emptyset$ olur. Ω da ters kapsama bağıntısının verdiği sıralamayı alalım. Ω dan alınan her zincirin bu sıralama bağıntısına göre, bir en küçük üst sınırı vardır. Çünkü, zincirdeki tüm asal alt modüllerin arakesiti de bir asal alt modüldür. Şu halde Zorn Lemmaya göre, Ω nın bir maksimal elemanı vardır. Bir maksimal eleman C olsun. $C \in \Omega$ olduğu için, C asal alt modül ve $N \subseteq C \subseteq P$ dir. Eğer, $N \subseteq D \subseteq C$ olacak şekilde, bir D asal alt modülü varsa $D \in \Omega$ ve $C \leq D$ olur. C , Ω da maksimal olduğundan $C = D$ olur. Sonuç olarak C , N alt modülünün minimal asal alt modülüdür.

Sonuç 3. 2 Sonlu üretilmiş modülün her has alt modülü, en az bir minimal asal alt modüle sahiptir. [1]

Sonuç 3. 3 Bir modülün her asal alt modülü en az bir minimal asal alt modül içerir. [1]

Tanım 3. 3 R bir halka, M bir R - modül ve N , M nin bir has alt modülü olsun. N , M nin bir has alt modülü olsun. N yi kapsayan asal alt modüller varsa, N yi kapsayan tüm asal alt modüllerin kesişimine, N alt modülünün M - **radikali** denir. Bu radikal, $rad_M N$ veya kısaca $rad N$ ile gösterilir. Eğer N yi kapsayan asal alt modül yoksa,

$rad_M N = M$ olarak tanımlanır. Özel olarak, $rad_M M = M$ olur. $rad_M(0)$ radikaline M nin radikali denir. $rad_M N = N$ ise N ye **radikal alt modül** denir. [1]

Önerme 3.5 M bir R - modül ve N ile L alt modülleri olsun. Şu halde aşağıdakiler sağlanır.

1. $N \subseteq radN$,
2. $rad(radN) = radN$,
3. $rad(N \cap L) \subseteq radN \cap radL$,
4. R halkasının her I ideali için, $rad(IM) = rad(\sqrt{I}M)$,
5. $\sqrt{(N:M)} \subseteq ((radN):M)$ dir.
6. M sonlu üretilmiş bir R - modül ise $radN = M$ olması için gerek ve yeter koşul $N = M$ olmasıdır. [1]

İspat 1. Radikal tanımından açıktır.

2. $x \in N$ olsun. $N \subseteq radN$ olduğundan $x \in radN$ dir. Dolayısıyla $x \in rad(radN)$ bulunur. Tersine $y \in rad(radN)$ olsun. $y \in radN$ olduğu açıktır. Dolayısıyla eşitlik elde edilir.

3. $x \in rad(N \cap L)$ olsun. Tanımdan x , $N \cap L$ yi kapsayan asal alt modüllerin kesişimindedir.

x , N yi kapsayan asal alt modüllerdedir. Buradan $x \in radN$ elde edilir.

x , L yi kapsayan asal alt modüllerdedir. Buradan $x \in radL$ elde edilir. Sonuç olarak, $x \in radN \cap radL$ bulunur.

4. $I \subseteq \sqrt{I}$ ise $IM \subseteq \sqrt{I}M$ ve böylece $rad(IM) \subseteq rad(\sqrt{I}M)$ dir. Tersine, $x^n \in \sqrt{I}$ olsun. O zaman $x^{nm} \in I$ olacak şekilde $n, m \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $m \in M$ olsun. $x^n m \in \sqrt{I}M$ dir. $(x^n m)^m = x^{nm} m^m \in IM$ elde edilir. $\sqrt{I}M \subseteq IM$ ve $rad(\sqrt{I}M) \subseteq rad(IM)$ bulunur. Böylece eşitlik elde edilir.

5. Eğer $N = radM$ ise açıktır. Aksi halde, N yi kapsayan bir K alt modülü var ve $(K:M)$, $(N:M)$ yi kapsayan bir asal idealdir. Şu halde, $\sqrt{(N:M)} \subseteq (K:M)$, yani

$\sqrt{(N:M)}M \subseteq K$ dir. Bu kapsama, N yi kapsayan her K asal ideali için doğru olduğundan $\sqrt{(N:M)}M \subseteq \text{rad}N$ yani $\sqrt{(N:M)}M \subseteq ((\text{rad}N):M)$ elde edilir.

6. $N = M$ ise tanımdan $\text{rad}N = M$ dir. Tersine, $\text{rad}N = M$ ise N yi kapsayan asal alt modül yoktur. Dolayısıyla $N = M$ dir.

Teorem 3.2 R bir halka, M sonlu üretilmiş bir R - modül ve N ile L alt modülleri olsun. Şu halde $\text{rad}N + \text{rad}L = M \Leftrightarrow N + L = M$ olmasıdır. [1]

İspat $(\Rightarrow)$: $\text{rad}N + \text{rad}L = M$ ve $N + L \neq M$ kabul edelim. M sonlu üretilmiş olduğundan $N + L \subseteq T$ olacak şekilde bir maksimal T alt modülü vardır. T maksimal olduğundan asaldır. T asal olduğundan, $N \subseteq T$ olması $\text{rad}N \subseteq T$ ve $L \subseteq T$ olması $\text{rad}L \subseteq T$ olmasını gerektirir. Şu halde $\text{rad}N + \text{rad}L \subseteq T$ olur. Bu ise varsayımımızla çelişir.

$(\Leftarrow)$: $N \subseteq \text{rad}N$ ve $L \subseteq \text{rad}L$ olduğundan, $N + L = M$ olması

$\text{rad}N + \text{rad}L = M$ olmasını gerektirir.

M bir R - modül olmak üzere, 1) $J(R)M \subseteq \text{rad}M$

2) $\text{nil}(R)M \subseteq \text{rad}(0) \subseteq \text{rad}M$ dir. [4]

İspat 1) $\forall r \in J(R), m \in M$ için $rm \in M$ dir.

2) $\forall r \in \text{nil}(R)$ için $r^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $\forall m \in M$ için $rm \in \text{nil}(R)M$ olur. Buradan $r^n m \in (0)$ ve $r^n m \in \text{rad}(0)$ elde edilir.

$(0) \subseteq M$ olduğundan $\text{rad}(0) \subseteq M$ olduğu açıktır.

Teorem 3. 3 R bir artinian halka ve M bir R - modül olsun. O zaman

1) $\text{rad}M = J(R)M$ ve 2) $\text{rad}M = M$ nin asal radikalidir. [4]

İspat 1) R bir artinian halka olduğundan $\text{nil}(R) = J(R)$ dir. Ayrıca; $\text{nil}(R)M \subseteq \text{rad}M$ olduğunu biliyoruz. Buradan $J(R)M \subseteq \text{rad}M$ elde edilir. Tersine, $m \in M$ alalım. $m \in \text{rad}M$ dir. $m \in J(R)M$ dir çünkü modül için tanımlanan

fonksiyonun görüntü kümesinden seçtiğimiz m elemanı $J(R)M$ ye düşer. Dolayısıyla eşitlik elde edilir.

2) $radM = J(R)M = nil(R)M \subseteq rad(0) \subseteq radM$ olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 3. 4 R bir halka ve $I_1, I_2, \dots, I_n$ ler R nin idealleri olsun.

$$rad(I_1 \dots I_m) = rad(I_1 \cap \dots \cap I_m) \text{ dir. [11]}$$

İspat $rad(I_1 \dots I_m) \subseteq rad(I_1 \cap \dots \cap I_m)$ olduğu açıktır. Tersine, $\alpha \in radI_1 \cap \dots \cap radI_m$ olsun. $1 \leq i \leq m$ iken $\forall i$ için bir n_i tamsayısı vardır öyle ki $\alpha^{n_i} \in I_i$ dir. $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ olsun. O zaman $\alpha^n = \alpha^{n_1} \alpha^{n_2} \dots \alpha^{n_m}$ dir. $\alpha^n \in I_1 I_2 \dots I_m$ dir. Dolayısıyla $\alpha \in rad(I_1 \dots I_m)$ olur. Eşitlik elde edilir.

Önerme 3.6 M bir R - modül olsun. I da R nin bir ideali olsun. O zaman pozitif bir n tamsayısı için $radI^n M = radIM$ dir. [4]

İspat Teorem 3.4 den $\sqrt{I^n} = \sqrt{I}$ dir.

Önerme 3.5 in 4. şikkından $radIM = rad\sqrt{I}M$ olduğunu biliyoruz. $radI^n M = rad\sqrt{I^n} M = rad\sqrt{I}M = radIM$ bulunur.

Önerme 3. 7 Eğer Q , R - modül M nin bir p - asalımsı alt modülü ise $radQ = rad(Q + pM)$ dir. [4]

İspat $Q \subseteq Q + pM$ olduğundan $radQ \subseteq rad(Q + pM)$ elde edilir. Tersine, $radQ = \bigcap_{i \in I} P_i$ olsun. Burada P_i ler Q yu içeren p_i - asal alt modüldür. $p = \sqrt{(Q:M)} \subseteq p_i$ ve $pM \subseteq p_i M$ dir. $Q + pM \subseteq p_i M + Q \subseteq p_i M + P_i = P_i$ elde edilir. Buradan $rad(Q + pM) \subseteq \bigcap_{i \in I} P_i = radQ$ elde edilir.

Önerme 3. 8 M sonlu üretilmiş bir R - modül ve m , R nin bir maksimal ideali olsun. Eğer Q , M nin m - asalımsı alt modülü ise $radQ$ bir m - asal alt modüldür. [4]

İspat m maksimal ideal olduğundan ve Q , m - asalımsı olduğundan $m = \sqrt{(Q:M)} \subseteq (radQ:M)$ ve $(radQ:M) = R$ yada $(radQ:M) = m$ olmalı.

Eğer $(radQ : M) = R$ ise $radQ = M$ olur ve buradan $Q = M$ bulunur. M sonlu üretilmiş olduğundan çelişki elde edilir. Böylece $(radQ : M) = m$ olur.

Lemma 3. 2 N ve L , R - modül M nin alt modülleri olsunlar ve P de M nin p - asal alt modülü olsun öyle ki $N \cap L \subseteq P$ olsun. Eğer $(N : M) \not\subseteq p$ ise o zaman $L \subseteq P$ dir. [4]

İspat $l \in L$ ve $r \in (N : M) - p$ olsun. O zaman $rl \in N \cap L \subseteq P$ ve P , p - asal olduğundan $r \notin (P : M) = p$ dir. $r \notin p$ olduğundan $l \in P$ yani $L \subseteq P$ dir.

Önerme 3. 9 A , R halkasının bir ideali ve N de R - modül M nin bir alt modülü olsun. Eğer P , M nin $AM \cap N \subseteq P$ şartını sağlayan bir p - asal alt modülü ise $AM \subseteq P$ ya da $N \subseteq P$ dir. [4]

İspat P , R nin asal ideali ve $((AM \cap N) : M) \subseteq (P : M) = p$ olduğundan $(AM : M) \subseteq p$ ya da $(N : M) \subseteq p$ dir.

Eğer $(AM : M) \not\subseteq p$ ise lemma3.2 den $N \subseteq P$ dir.

Önerme 3.10 N ile L , R -modül M nin, $N \cap L \subseteq P$ iken $N \subseteq P$ ya da $L \subseteq P$ şartını sağlayan alt modülleri ve P , M nin herhangi bir asal alt modülü olsun. O zaman $rad(N \cap L) = radN \cap radL$ dir. [4]

İspat $rad(N \cap L) \subseteq radN \cap radL$ olduğunu önerme 3. 5. 3 den biliyoruz. Tersine, eğer $rad(N \cap L) = M$ ise $radN = radL = M$ ve $rad(N \cap L) = radN \cap radL = M$ dir. Eğer $rad(N \cap L) \neq M$ ise $N \cap L \subseteq P$ olacak şekilde bir P asal alt modülü vardır. Hipotezden $N \subseteq P$ ya da $L \subseteq P$ iken $radN \subseteq P$ ya da $radL \subseteq P$ dir. $radN \cap radL \subseteq P$ dir. Buradan eşitlik elde edilir.

Yukarıdaki iki önermeden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3. 4 M bir R - modül olsun. O zaman A , R nin bir ideali ve N , M nin bir alt modülü iken $rad(AM \cap N) = radAM \cap radN$ dir. [4]

Önerme 3. 11 V bir vektör uzayı olsun. O zaman V nin L_1, L_2 alt uzayları için $rad(L_1 \cap L_2) = radL_1 \cap radL_2$ dir. [4]

İspat V nin bütün alt uzayları (0) - asal alt modül olduğundan istenen elde edilir.

Tanım 3.4 M bir R -modül ve N de M nin bir alt modülü olsun. $\forall r \in R$ için $rM \cap N = rN$ ise N alt modülüne M nin **saf(pure) alt modülü** denir. [8]

Örnek3.5 $R = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Z}, N = 2\mathbb{Z}$ olsun. $\forall r \in R$ için $rM \cap N = r\mathbb{Z} \cap 2\mathbb{Z} = r2\mathbb{Z}$ dir.

Dolayısıyla N saf(pure) alt modüldür.

Örnek3.6 $R = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, N = \mathbb{Z}(a, 0)$ ve $a \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

$rM \cap N = r(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times 0) = r(\mathbb{Z} \times 0)$ dir. Dolayısıyla N saf(pure) alt modüldür.

Sonuç 3.4 M serbest burulmalı bir R -modül olsun. N de M nin bir öz alt modülü olsun. N saf(pure) alt modüldür $\Leftrightarrow N, M$ de asaldır ve $(N : M) = (0)$ dir. [8]

İspat $(\Rightarrow)$: N saf(pure) alt modül olsun. $r \in (N : M)$ ise $rM \subseteq N$ ve $rN = rM \cap N = rM$ dir. $rm = rn$ olacak şekilde bir $n \in N$ vardır. $r(m - n) = 0$ ise $m - n \neq 0$ olduğundan $r = 0$ olur ve $(N : M) = 0$ elde edilir. $\forall r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in N$ olsun. $rm \in rM \cap N = rN$ dir. Bir $n \in N$ için $rm = rn$ ise $r(m - n) = 0$ dir. M burulmalı olduğundan $r = 0$ ise $r \in (N : M)$ veya $m - n = 0$ ise $m = n \in N$ dir. Böylece N asal alt modüldür.

$(\Leftarrow)$: Tersine, $r \neq 0$ olsun. $rN \subseteq rM$ ise $rN \subseteq rM \cap N$ dir. Şimdi $x \in rM \cap N$ olsun. $x = rm = n$ olacak şekilde $m \in M, n \in N$ vardır. $rm \in N$ ise $r \in (N : M) = 0$ veya $m \in N$ dir. $r \neq 0$ ise $m \in N$ ve $x = rm \in N$ ise $rM \cap N \subseteq N$ dir. Eşitlik elde edilir.

Sonuç 3.5 $Z(M), M$ üzerindeki sıfır bölenlerin kümesi olsun.

(0) R -modül M nin bir asal alt modülüdür $\Leftrightarrow Ann(M) = Z(M)$ dir. [8]

İspat $Z(M) = \{r \in R : rm = 0 \forall m \neq 0\}$ ve $Ann(M) = \{r \in R : rm = 0 \forall m \in M \text{ için}\}$ dir.

$(\Rightarrow)$: $r \in Z(M)$ alalım. O zaman her $0 \neq m \in M$ için $rm = 0$ ve aynı zamanda $r \cdot 0 = 0$ dir. Buradan $r \in Ann(M)$ dir. Tersine, $\forall m \in M$ için $rm = 0 \in (0)$ ve $m \notin (0)$ olur. (0) asal alt modül olduğundan $r \in ((0):M)$ yani $r \in Z(M)$ dir.

$(\Leftarrow)$: $Ann(M) = Z(M)$ olduğunu kabul edelim. $\forall r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in (0)$ ve $m \notin (0)$ olsun. Bu durumda $rm = 0$ ve $m \neq 0$ dir. Dolayısıyla $rM \subseteq (0)$ dir. Buradan $r \in ((0):M)$ elde edilir.

Tanım 3.5(Von Neumann Regüler Halkası) R bir halka olmak üzere $\forall a \in R$ için $a = axa$ olacak biçimde bir $x \in R$ varsa R ye **Von Neumann regüler halkası** denir.

Örnek 3. 7 Bütün cisimler bir Von Neumann regüler halkadır.

Önerme 3. 6 Eğer M bir Von Neumann regüler halkasında bir modül ise bütün asalımsı alt modülleri asaldır. [8]

İspat M Von Neumann regüler halkasında bir modül olsun. $\forall r \in R$ için, $r = rxr$ olacak şekilde bir $x \in R$ vardır. N, M nin bir asalımsı alt modülü olsun. $\forall r \in R, m \in M$ için $rm \in N$ ve $m \notin N$ olduğunu kabul edelim. O zaman $r^n \in (N:M)$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır. $rm \in N$ ve $r = rxr$ olduğundan $(rxr)m \in N$ dir.

$(rxr)m \in N$ ve $m \notin N$ olduğundan $(rxr) \in \sqrt{(N:M)}$ dir. $(rxr)^n \in (N:M)$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır. $r^n x^n r^n \in (N:M)$ ve $r^n x^n r^n M \subseteq N$ dir. $rxr(rxr)^{n-1} M \subseteq N$ ve modül tanımından $(rxr)^{n-1} M \subseteq M$ elde edilir. Buradan $(rxr) \in (N:M)$ ve $(rxr)M \subseteq N$ bulunur. Buradan $r \in (N:M)$ elde edilir. Dolayısıyla N asal alt modüldür.

Teorem 3.3 $M, (N:M) = P$ eşitliğini sağlayan bir R -modül ve N, M nin bir öz alt modülü olsun. Aşağıdakiler denktir:

- a) N, M nin asal alt modülüdür.
- b) M/P bir serbest burulmalı R/P - modüldür.
- c) $\forall r \in R - P$ için $(N:(r)) = N$ dir.

d) $\forall J \not\subseteq P$ ideali için $(N : J) = N$ dir.

e) $\forall e \in M - N$ için $(N : (e)) = P$ dir.

f) M nin N yi içeren bütün L alt modülleri için $(N : L) = P$ dir

g) $\text{Ass}\left(\frac{M}{N}\right) = \{P\}$

h) $P = Z\left(\frac{M}{N}\right)$ [8]

İspat a) $\Rightarrow$ b) Önerme 3. 2 de ispatlandı.

b) $\Rightarrow$ c) $N \subseteq (N : (r))$ dir. $\frac{M}{N}$ nin serbest burulmalı $\frac{R}{P}$ - modül olduğunu kabul edelim. Keyfi $r \in R - P$ için $m \in (N : (r))$ olsun. $rm \in N$ ve buradan $(r + P)(m + N) = 0$ dir. $r \notin P$ ve $\frac{M}{N}$ serbest burulmalı $\frac{R}{P}$ modül olduğundan $m \in N$ dir. $(N : (r)) \subseteq N$ dir. Buradan eşitlik elde edilir.

c) $\Rightarrow$ d) $N \subseteq (N : J)$ olduğu açıktır. $\forall r \in R - P$ için $(N : (r)) = N$ olsun. J, R nin $J \not\subseteq P$ koşulunu sağlayan bir ideali olsun. O zaman bir $x \in J - P$ vardır öyle ki $(N : (x)) = N$ dir. Şimdi $m \in (N : J)$ olsun. O zaman $Jm \subseteq N$ dir. Buradan $xm \in N$ elde edilir. $m \in (N : (x)) = N$ olduğundan $m \in N$ dir. $(N : J) \subseteq N$ bulunur. Dolayısıyla eşitlik elde edilir.

d) $\Rightarrow$ e) $\forall J \not\subseteq P$ ideali için $(N : J) = N$ olsun. $e \in M - N$ alalım. $P \subseteq (N : (e))$ olduğu açıktır. $r \in (N : (e))$ olsun. O zaman $re \in N$ dir. Eğer $r \notin P$ ise $e \in (N : (r)) = N$ dir. Buradan bir çelişki elde edilir. Böylece $r \in P$ yani $(N : (e)) \subseteq P$ dir. Dolayısıyla istenen elde edilir.

e) $\Rightarrow$ f) $\forall e \in M - N$ için $(N : (e)) = P$ olsun.

M nin $N \not\subseteq L$ şartını sağlayan bütün alt modülleri

$$\text{ için } P \subseteq (N : L) \text{ dir } (N : L) = \left(N : \left(\sum_{l \in L} Rl \right) \right) = \bigcap_{l \in L} (N : Rl) = P$$

f) $\Rightarrow$ g) M nin bütün $N \not\subseteq L$ koşulunu sağlayan L alt modülleri için $(N : L) = P$ olsun. $Q \in \text{Ass}\left(\frac{M}{N}\right)$ olsun. N, Q asalımsı olduğundan $Q = \sqrt{(N : M)}$ dir. Ayrıca

$(N : M) = \text{Ann}\left(\frac{M}{N}\right)$ olduğundan $Q = \sqrt{\text{Ann}\left(\frac{M}{N}\right)}$ dir. O zaman bazı $x \in M - N$ için $Q = \sqrt{\text{Ann}(x + N)}$ bulunur. Buradan $Q = \text{Ann}(x + N)$ dir. $N \not\subseteq \langle x \rangle + N$ ve $\langle x \rangle + N$, M nin bir alt modülüdür. Hipotezden $(N : (\langle x \rangle + N)) = P$ dir. Buradan $P(\langle x \rangle + N) \subseteq N$ ve $Px \subseteq N$ dir. Böylece $P \subseteq \text{Ann}(x + N) = Q$ bulunur. Tersine $r \in Q = \text{Ann}(x + N)$ olsun. O zaman bazı $x \in M - N$ için $rx \in N$ dir. Böylece $r(\langle x \rangle + N) \subseteq N$ ve $r \in (N : (\langle x \rangle + N)) = P$ dir. Buradan $Q \subseteq P$ bulunur. Eşitlik elde edilir.

g) $\Rightarrow$ h) $\text{Ass}\left(\frac{M}{N}\right) = P$ yani $\forall m \in M - N$ için $P = \text{Ann}(m + N)$ dir. $P \subseteq Z\left(\frac{M}{N}\right)$ olduğu açıktır. Şimdi $x \in Z\left(\frac{M}{N}\right)$ olsun. Bazı $m \in M - N$ için $xm \in N$ dir. Böylece bazı $x \in M - N$ için $x \in \text{Ann}(m + N)$ dir. Buradan $x \in P$ elde edilir ve $Z\left(\frac{M}{N}\right) \subseteq P$ dir. Dolayısıyla eşitlik elde edilir.

h) $\Rightarrow$ a) $P = Z\left(\frac{M}{N}\right)$ olsun. $\forall r \in R$, $m \in M - N$ için $rm \in N$ şartı sağlansın. Dahası $r \in Z\left(\frac{M}{N}\right) = P = (N : M)$ dir. Böylece $rM \subseteq N$ dir. $r \in (N : M)$ bulunur. Buradan N , M nin asal alt modülüdür.

Önerme 3.7 a) N , R -modül M nin bir asalımsı alt modülü olsun. O zaman N asaldır ancak ve ancak $(N : M)$, R nin bir asal idealidir. **b)** M nin bir P -asalımsı K alt modülünü içeren P -asal alt modülü varsa o zaman K da P -asaldır. [8]

Önerme 3.8 M bir R -modül ve N , M nin bir öz alt modülü, m de R nin bir maksimal ideali olsun. O zaman N , m -asaldır $\Leftrightarrow mM \subseteq N$ dir. Sonuç olarak N , M nin bir m -asal alt modülü ise M nin N yi içeren bütün öz alt modülleri m -asaldır. [8]

İspat ($\Rightarrow$): N , M nin bir m -asal alt modülü olsun. O zaman $(N : M) = m$ dir. Buradan $m \subseteq (N : M)$ dir. Kolon tanımından $mM \subseteq N$ dir.

$(\Leftarrow)$: $mM \subseteq N$ olsun. Kolon tanımından $m \subseteq (N:M)$ olur. m maksimal ideal idi. Dolayısıyla $m = (N:M)$ elde edilir. m maksimal olduğundan asal idealdir aynı zamanda. Buradan N, m -asal alt modül elde edilir. Sonuç olarak N, M nin bir m -asal alt modülü ve K, M nin bir alt modülü olsun öyle ki $N \subseteq K$ şartı sağlansın. İspatın ilk kısmından $mM \subseteq N \subseteq K$ dir. Böylece K, M nin bir m -asal alt modülüdür.

Önerme 3.9 M bir R -modül ve N, M nin bir maksimal alt modülü olsun. N asal alt modüldür ve $(N:M), R$ nin bir maksimal idealidir. [8]

İspat N, M nin bir maksimal alt modülü olsun. M/N bir cisimdir. Dolayısıyla M/N bir basit R -modüldür. Bütün basit modüller devirli olduğundan M/N bir basit devirli R -modüldür yani bazı $\bar{m} \in M/N$ için $M/N = R\bar{m}$ ve $Ann(\bar{m}) = Ann(M/N) = (N:M)$ maksimaldir. Maksimal ise asaldır koşulundan N bir asal alt modüldür.

Sonuç 3.6 M sonlu üretilmiş bir modül olsun. O zaman M nin bütün öz alt modülleri bir asal alt modül tarafından içerilir. [8]

İspat M sonlu üretilmiş bir modül ve N, M nin bir öz alt modülü olsun. Sonlu üretilmiş bir modülün bütün öz alt modülleri bir maksimal alt modül tarafından kapsanır. Maksimal ise asaldır koşulundan istenen elde edilir.

3.1.Maksimal P -Asal Alt Modülleri

Tanım 3.1.1 M bir R -modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. Eğer N, M nin bir P -asalımsı alt modülü ve M nin herhangi bir P -asalımsı alt modülü tarafından içerilmiyorsa N ye **maksimal P -asalımsı** alt modül denir.[8]

Önerme 3.1.1 E bir R -modül ve N, E nin bir P -asalımsı alt modülü ve A, R nin bir ideali olsun. Eğer $A \not\subseteq (N:E)$ ise $(N:A), E$ nin bir P -asalımsı alt modülüdür. [10]

İspat $\forall r \in R$ ve $x \in E$ olsun. $\alpha \in A$ ve $\alpha x \notin N$ olsun. O zaman $r(\alpha x) = \alpha(rx) \in N$ ve $\alpha x \notin N$ dir. Buradan $r \in P$ dir.

Şimdi $r \in P$ olduğunu varsayalım. Bir pozitif m tamsayısı vardır öyle ki $r^m E \subseteq N \subseteq (N : A)$ dir. Yani $(N : A)$, E nin bir P -asalımsı alt modülüdür.

Önerme 3.1.2 M bir R -modül ve N , M nin bir maksimal P -asalımsı alt modülüdür $\Leftrightarrow N, M$ nin bir maksimal P -asal alt modülüdür. [8]

İspat $(\Rightarrow)$: N , M nin bir maksimal P -asalımsı alt modül olsun. Eğer $r \notin (N : M)$ ise önerme 3.1.1 den $(N : (r))$ bir P -asalımsı alt modüldür. Ayrıca $(N : (r)) = N$ olduğunu teorem 3.3 den biliyoruz. N maksimal olduğundan aynı zamanda asaldır. Böylece $(N : M)$ asal ideal olduğundan $(N : M) = \sqrt{(N : M)} = P$ olduğundan N , M nin bir maksimal P -asal alt modülüdür.

$(\Leftarrow)$: N , M nin bir maksimal P -asal alt modülü olsun. $(N : M) = P$ dir. N asal alt modül ise asalımsı alt modüldür. Dolayısıyla N asalımsı bir alt modüldür. Buradan istenen elde edilir.

3.2 Genişletilmiş IM Alt Modülleri

Bu bölümde R -modül M nin genişletilmiş IM alt modüllerini inceleyeceğiz. Burada I , R nin asal ya da asalımsı idealleridir.

Teorem 3.2.1: R bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. M, n eleman tarafından üretilmiş bir R -modül olsun. $x \in R$ ve $xM \subseteq IM$ ise bir $y \in I$ için $(x^n + y)M = 0$ dir. [11]

İspat $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemanları M yi üretsinsin. $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $xa_i \in xM \subseteq IM$ ve

$y_{ij} \in I$ olmak üzere $xa_i = \sum_{j=1}^n y_{ij} a_j$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}
(x - y_{11})a_1 - y_{12}a_2 - \dots - y_{1n}a_n &= 0 \\
-y_{21}a_1 + (x - y_{22})a_2 - \dots - y_{2n}a_n &= 0 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
-y_{n1}a_1 - y_{n2}a_2 - \dots + (x - y_{nn})a_n &= 0
\end{aligned}$$

denklem sistemini elde ederiz. Katsayıların determinantı bütün a_i leri dolayısıyla M yi sıfırlar. Bu determinant $x^n + y$ şeklindedir.

Önerme 3.2.1 M sonlu üretilmiş bir R -modül ve I, R nin bir radikal ideali olsun. O zaman $(IM : M) = I \Leftrightarrow \text{Ann}(M) \subseteq I$

İspat: $(\Rightarrow)$: $(IM : M) = I$ olsun. $\text{Ann}(M) = \{r \in R : rM = 0\}$ ve $(IM : M) = \{r \in R : rM \subseteq IM\}$ dir. İlk kısım açıktır.

$(\Leftarrow)$: $\text{Ann}(M) \subseteq I$ ve $r \in R$ olsun öyle ki r elemanı $(IM : M)$ de içerilsin. Eğer M , n eleman tarafından üretildi ise bir $y \in I$ vardır öyle ki $r^n + y \in \text{Ann}(M) \subseteq I$ dir. Buradan $r^n \in I$ ve $(IM : M) \subseteq \sqrt{I}$ dir. I radikal ideal olduğundan $(IM : M) \subseteq \sqrt{I} = I$ dir. Böylece $(IM : M) \subseteq I$ bulunur. $I \subseteq (IM : M)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla eşitlik elde edilir. [8]

Sonuç 3.2.1 P , R nin sonlu üretilmiş bir asal ideali olsun öyle ki $\text{Ann}(P) \subseteq P$ olsun. O zaman $(P^2 : P) = \text{Ann}\left(\frac{P}{P^2}\right) = P$ dir. [8]

İspat $\text{Ann}(P) \subseteq P$ ise bir önceki önermeden $(P^2 : P)$ dir. Buradan $(P^2 : P) = P$ elde edilir.

Sonuç 3.2.2 P, R nin $\text{Ann}(P) \subseteq P$ şartını sağlayan sonlu üretilmiş bir asal ideali olsun. Aşağıdakiler denktir:

- a) P^2 , R nin bir P -asalımsı idealidir.
- b) P^2 , R -modül P nin bir P -asalımsı alt modülüdür.

c) P^2 , R -modül P nin bir P -asal alt modülüdür. [8]

İspat: a) $\Rightarrow$ b) P^2 , R nin bir P -asalımsı ideali olsun. O zaman sonuç 3. 2. 1 den P^2 , R -modül P nin bir P -asal alt modülüdür. Asal ise asalımsı olduğundan P^2 , R -modül P nin bir P -asalımsı alt modülüdür.

b) $\Rightarrow$ c) P^2 , R -modül P nin bir P -asalımsı alt modülü olsun. Sonuç 1 den $(P^2 : P) = P$ dir. Önerme 3. 7 den $(P^2 : P)$, $(P^2 : P) = P$ yi içeren bir P -asalımsı alt modül olduğundan P^2 , R -modül P nin bir P -asal alt modülüdür.

c) $\Rightarrow$ a) Asalımsı ideal ve alt modül tanımından açıktır.

Sonuç 3.2.3 Eğer M sonlu üretilmiş bir R -modül ve m, R nin $Ann(M)$ yi kapsayan bir maksimal ideali ise $mM \neq M$ dir öyle ki mM , M nin bir asal alt modülüdür. [8]

İspat M sonlu üretilmiş bir R -modül olsun. Kabulden $Ann(M) \subseteq m$ dir. m maksimal ideal olduğundan aynı zamanda asal idealdir. Önerme 3.2.1 den $Ann(M) \subseteq m$ ve $(mM : M) = m$ olduğundan $(mM : M)$ de bir asal idealdir. Dolayısıyla mM , M nin bir asal alt modülüdür.

3.3. Noetherian Modüllerin Asal Alt Modülleri

Lemma 3.3.1 M bir R -modül ve N de bir alt modülü olsun. Eğer aşağıdaki iki koşuldan biri sağlanıyorsa N sonlu üretilmiştir.

a) $N + rM$ ve $(N : r)$ alt modülleri sonlu olacak şekilde bir $r \in R$ vardır.

b) $N + Rm$ ve $(N : m)$ alt modülleri sonlu üretilmiş olacak şekilde bir $m \in M$ vardır.[1]

İspat a) $m \rightarrow rm$ ile tanımlı fonksiyon altında, $(N : r) \rightarrow N \cap rM$ bir örten homomorfizmadır. Şu halde $(N : r)$ sonlu üretilmiş ise $N \cap rM$ de sonlu üretilmiştir.

$N + rM$ sonlu üretilmiş ise 2. izomorfizma teoreminden

$$(N + rM) / rM \cong N / (N \cap rM)$$

olduğundan, $N/(N \cap rM)$

de sonlu üretilmiştir. Buradan N alt modülünün sonlu üretilmiş olduğu bulunur.

b) $r \rightarrow rm$ ile tanımlı fonksiyon altında, $(N : m) \rightarrow N \cap Rm$ bir örten homomorfizmadır. İzomorfizma teoreminden $(N + Rm)/Rm \cong N/(N \cap Rm)$ olduğu göz önüne alınarak istenen elde edilir.

Önerme 3.3.1 N, R -modül M nin bir öz alt modülü olsun. N nin sonlu üretilmiş olmadığını ve bütün alt modüller arasında maksimal olduğunu varsayalım. O zaman N bir asal alt modüldür. [8]

İspat Eğer $r \in R - (N : M)$ ise $N \subseteq (N : (r))$ dir. Şu halde $N + rM, N$ nin maksimalliğinden sonlu üretilmiştir. $N \neq (N : (r))$ ise N nin maksimal oluşundan de $(N : (r))$ sonlu üretilmiştir. Yukarıdaki lemmadan N nin sonlu üretilmiş olduğu anlaşılır. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $N = (N : (r))$ dir yani N bir asal alt modüldür.

Son ispatlanan lemma ve önermeden halkalar için bilinen COHEN teoremini modüller için ifade eden aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.3.1 R bir halka, M sonlu üretilmiş bir R -modül olsun. M nin noetherian olması için gerek ve yeter koşul her asal alt modülünün sonlu üretilmiş olmasıdır. [1]

İspat H.I.Karakas ın “On Noetherian Modules” isimli makalesinde ispatlanmıştır.

3.4 Serbest Modüllerin Asal Alt Modülleri

Sonuç 3.4.1 F tabanı $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ olan bir serbest R -modül olsun. B, F nin alt modülü olsun. O zaman $(B : F) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (B : a_\lambda)$ dir. [9]

İspat $(B : F) = \{r \in R : rF \subseteq B\}$ dir. $rF \subseteq B$ ise $r\{a_\lambda\} \subseteq B$ ve $r \in (B : a_\lambda)$ elde edilir. $r \in \bigcap (B : a_\lambda)$ sonucuna ulaşılır. Tersine, $r' \in \bigcap (B : a_\lambda)$ olsun. $r' \in \bigcap (B : a_j)$ olacak

şekilde bir $j \in \Lambda$ vardır. $r'a_j \subseteq B$ dir. a_j ler F nin tabanı olduğundan $r'F \subseteq B$ ve $r' \in (B:F)$ elde edilir. Buradan eşitlik bulunur.

Sonuç 3.4.2 M bir R -modül ve N de bir alt modülü olsun. O zaman, $N, M R/AnnM$ - modülünde asaldir $\Leftrightarrow N, M R$ -modülünde asaldir. [9]

İspat $N, M R/AnnM$ - modülünde asal olsun. O zaman $\forall r + AnnM \in R/AnnM$ ve $\forall m \in M$ için $(r + AnnM)m \in N$ iken $m \in N$ ya da $(r + AnnM) \in (N:M)$ dir.

$(r + AnnM)m \in N$ ise $rm + AnnMm \in N$ dir. $\forall r' \in AnnM$ için $rm + r'm \in N$ dir. $rm \in N$ iken $m \in N$ yada $(r + AnnM) \in (N:M)$ dir. $rm \in N$ iken $m \in N$ ise $N, M R$ -modülünde asaldir. $rm \in N$ iken $(r + AnnM) \in (N:M)$ ise $(r + AnnM)M \subseteq N$ dir. $rM + AnnMM \subseteq N$ dir. $\forall r' \in AnnM$ için $rM + r'M \subseteq N$ dir. Buradan $rM \subseteq N$

ve $r \in (N:M)$ elde edilir. Dolayısıyla $N, M R$ -modülünde asaldir. Diğer taraf açıktır.

Teorem 3.4.1 B, F nin alt modülü olsun. K da R halkasının kesir cismi olsun. Eğer $KB \neq KF$ ise $(B:F) = 0$ dır. [9]

İspat F , serbest R - modül olduğundan $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ gibi bir tabanı vardır. $\lambda \in \Lambda$ için $KB \neq KF$ olduğundan $Ka_\lambda \cap KB = 0$ dir. Böylece $(B:a_\lambda) = 0$ dir. Tersisi doğru değildir.

Örnek: $F = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots$, $\mathbb{Z}$ -modül ve $B = 2\mathbb{Z} \oplus 4\mathbb{Z} \oplus \dots$ olsun. $(B:F) = 0$ dır. Çünkü $(r\mathbb{Z}, r\mathbb{Z}, \dots) \subseteq (2k, 4k, \dots)$ şartını sağlayan r ler bulunamaz. Dolayısıyla $(B:F) = 0$

elde edilir. Fakat $\mathbb{Q}$ rasyonel sayıları için $\mathbb{Q}B = \mathbb{Q}F$ dir. Tersini F sonlu boyutlu olduğunda ve B de F de asalımsı olduğunda düşünebiliriz. [9]

Teorem 3.4.2 Eğer F sonlu boyutlu bir serbest R -modül ve B, F nin $KB = KF$ şartını sağlayan bir alt modülü ise $(B:F) \neq 0$ dır. [9]

İspat $KB = KF$ olsun. F serbest R -modül olduğundan $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ gibi bir tabanı vardır. .

O zaman $Ka_\lambda \cap KB \neq 0$ dir. Buradan $(B : a_\lambda) \neq 0$ dir.

$$0 \neq \prod_{i=1}^n (B : a_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^n (B : a_i) = (B : F) \neq 0 \text{ elde edilir.}$$

Teorem 3.4.3 F bir serbest R -modül olsun. B de F nin bir asalımsı alt modülü olsun. Eğer

i) $KB = KF$ ise $(B : F) \neq 0$;

ii) $KB \neq KF$ ise B asaldir. [9]

İspat: i) F bir serbest R -modül olduğundan $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ gibi bir tabanı vardır. $KB = KF$

ise $KB \cap Ka_\lambda \neq 0$ dir. $(B : a_\lambda) \neq 0$ dir. $0 \neq \prod_{i=1}^n (B : a_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^n (B : a_i) = (B : F)$ dir.

ii) $KB \neq KF$ ise $KB \cap Ka_\lambda = 0$ dir. Buradan $(B : a_\lambda) = 0$ elde edilir. 0 asal ideal olduğundan $(B : F)$ de asal idealdir. Dolayısıyla B asal alt modüldür.

Lemma 3.4.1 P , F nin $KP \neq KF$ şartını sağlayan bir alt modülü ve K, R nin kesir cismi olsun. P asaldir $\Leftrightarrow P = KP \cap F$ dir. [9]

İspat Teorem 3. 4. 1 den $(P : F) = 0$ dir. P nin asal olduğunu kabul edelim ve

$a \in KP \cap F$ olsun. O zaman $r_i, s_i \in R$ ve $s_i \neq 0$ ve $p_i \in P$ için $a = \sum_{i=1}^m \frac{r_i}{s_i} p_i$ dir.

$d = \prod_{i=1}^m s_i$ olsun. Dolayısıyla $da \in P$ dir. Fakat $d \notin (P : F)$ olduğundan $a \in P$ dir.

Buradan $KP \cap F \subseteq P$ dir. $P \subseteq KP \cap F$ olduğu açıktır. Dolayısıyla eşitlik elde edilir.

Tersine, eğer P asal değil ise $a \in F - P$ ve $0 \neq r \in R$ vardır öyle ki $ra \in P$ dir. Daha sonra $a = \frac{1}{r} ra \in KP \cap F$ ve $P \neq KP \cap F$ dir.

Teorem 3.4.4 F bir serbest R -modül olsun. B de F nin bir alt modülü ve $P = KB \cap F$ olsun. Eğer $KB \neq KF$ ise P asal ve $KP = KB$ dir. [9]

İspat $KP = K(KB \cap F) \subseteq K(KB) = KB \subseteq KP$ dir. Ayrıca $KP = KB$ olduğundan $KP \cap F = KB \cap F = P$ dir. O zaman P asaldir.

3.5. Sonlu Üretilmiş Serbest Modüllerin Asal Alt Modülleri

Tanım 3.5.1 A ve B iki küme ve R , bu iki küme arasında bir ilişki olsun.

R nin **bölgesi** $D(R)$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$\{x: x \in A \text{ ve bir } y \in B \text{ vardır öyle ki } (x, y) \in R\} [3]$$

R değişmeli bir bölge, $n \geq 3$ bir tamsayı ve $F, R^{(n)}$ de bir serbest modül olsun.

Lemma 3.5.1 $m < n$ bir tamsayı ve N, F nin bir m eleman tarafından üretilen bir alt modülü olsun. O zaman $(N : F) = 0$ dır. [5]

İspat $(N : F) \neq 0$ olduğunu varsayalım. $0 \neq r \in R$ için $rF \subseteq N$ vardır. $S = R - \{0\}$ olsun ve K, R nin kesir cismi olsun. O zaman n -boyutlu K vektör uzayı $K^{(n)} \cong S^{-1}F = S^{-1}N$ ve, $S^{-1}N$ K cismi üzerinde m eleman tarafından üretilen bir vektör uzayıdır. Böylece $n \leq m$ olur. Burada çelişki olduğundan $(N : F) = 0$ dır.

Sonuç 3.5.1 N, F nin m eleman tarafından üretilmiş bir alt modülü ve $m < n$ olsun. O zaman N, F nin bir asal alt modülüdür $\Leftrightarrow F/N$ serbest burulmalı bir R -modüldür. [5]

Önerme 3.5.1 $1 \leq i \leq n$ için $a_i \in R$ ve $R = Ra_i + \dots + Ra_n$ olsun. O zaman $R(a_1, \dots, a_n)$ serbest $F = R^{(n)}$ modülünün bir direkt toplamıdır. Dahası $R(a_1, \dots, a_n), F$ nin bir 0-asal alt modülüdür. [5]

İspat $1 \leq i \leq n$ için $s_i \in R$ vardır öyle ki $1 = s_1 a_1 + \dots + s_n a_n$ dir. $N = \{(x_1, \dots, x_n) \in F : s_1 x_1 + \dots + s_n x_n = 0\}$ olsun.

$\psi: R \rightarrow R^{(n)}$ ve $\varphi: R^{(n)} \rightarrow R$ fonksiyonlarını düşünelim. $\varphi\psi$
 $r \rightarrow r(a_1, \dots, a_n)$ ve $(r_1, \dots, r_n) \rightarrow r_1 s_1 + \dots + r_n s_n$

birim olduğundan $F = R^{(n)} = \text{Im } \psi \oplus \text{Ker } \varphi = R(a_1, \dots, a_n) \oplus N$ dir. F serbest R -modül olduğundan serbest burulmalı bir modüldür. Ayrıca $F/R(a_1, \dots, a_n)$ bölüm modülü de

serbest burulmalıdır. Serbest burulmalı olduğundan asal alt modüldür. Dahası $(R(a_1, \dots, a_n): F) = 0$ dır.

Çünkü; $r \in R^{(n)}$ için $rF \subseteq R(a_1, \dots, a_n)$ ve $(r_1, \dots, r_n)F \subseteq R(a_1, \dots, a_n)$ olacak şekilde r ler bulunamaz. Böylece $R(a_1, \dots, a_n)$, F nin bir 0-asal alt modülüdür.

Sonuç 3.5.2 $1 \leq i \leq n$ için $a_i \in R$ ve P , R nin bir asal ideali olsun öyle ki $R = Ra_1 + \dots + Ra_n + P$ olsun. O zaman, $R(a_1, \dots, a_n) + PF$ F nin bir P -asal alt modülüdür. [5]

Tanım 3.5.2 $1 \leq i \leq n$ için hepsi sıfır olmayan $a_i \in R$ olsun. Burada a_i elemanlarının ortak böleni demek bir $d \in R$ ve bazı b_i elemanları için $a_i = db_i$ dir. Dahası d, a_i lerin ortak bölenidir $\Leftrightarrow Ra_1 + Ra_2 + \dots + Ra_n \subseteq Rd$ dir. [5]

Lemma 3.5.2 $1 \leq i \leq n$ için hepsi sıfır olmayan $a_i \in R$ için $N = R(a_1, \dots, a_n)$, $F = R^{(n)}$ in bir asal alt modülüdür. Bütün a_i ler R de birimseldir. [5]

İspat d, a_i lerin ortak böleni olsun. $\forall 1 \leq i \leq n$ için $b_i \in R$ vardır öyle ki $a_i = db_i$ dir. Açıkça $d \neq 0$ ve $d(b_1, \dots, b_n) = (a_1, \dots, a_n) \in N$, $d(b_1, \dots, b_n) \in N$ ve sonuç 2. 2. den $(b_1, \dots, b_n) \in N$ dir. Bazı $r \in R$ için, $(b_1, \dots, b_n) = r(a_1, \dots, a_n)$ dir. $a_i = dra_i$ elde edilir. $1 = dr$ dir.

Teorem 3.5.1 R tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge ve hepsi sıfır olmayan $a_i \in R$ olsun. O zaman $N = R(a_1, \dots, a_n)$, $F = R^{(n)}$ in bir asal alt modülüdür $\Leftrightarrow a_i$ nin bütün ortak bölenleri R de bir birimseldir. [5]

İspat ($\Rightarrow$): Lemma 3. 5. 2 de ispatı yapıldı.

($\Leftarrow$): a_i nin bütün ortak bölenlerinin R de bir birimsel olduğunu kabul edelim. $0 \neq r \in R$, $b_i \in R$ olsun öyle ki $r(b_1, \dots, b_n) \in N$ ve bazı $s \in R$ için $r(b_1, \dots, b_n) = s(a_1, \dots, a_n)$ olsun. Böylece $rb_i = sa_i$ dir. $1 \leq j \leq n$ vardır öyle ki $a_j \neq 0$ dir. Varsayalım ki a_j , R de birimsel olsun. O zaman $s = rb_j a_j^{-1}$ ve böylece $rb_i = rb_j a_j^{-1} a_i$ olur. Buradan $b_i = b_j a_j^{-1} a_i$ dir. Bu durumda; elde edilir. Ayrıca p, a_j nin herhangi bir asal böleni olsun. $1 \leq k \leq n$ vardır öyle ki p, a_k yı bölmez. Fakat

$rb_k = sa_k$ ve $rb_j = sa_j$ olması $ra_jb_k = ra_kb_j$ yi verir öyle ki $a_jb_k = a_kb_j$ dir ve böylece, p b_j yi böler. Ayrıca $rb_j = sa_j$ olması $r\left(\frac{b_j}{p}\right) = s\left(\frac{a_j}{p}\right)$ yi verir. Buradan a_j nin b_j yi böldüğü elde edilir. Bazı $c \in R$ için $b_j = ca_j$ dir. $\forall 1 \leq i \leq n$ için $ra_ib_j = ra_jb_i$, $b_i = ca_i$ eşitliğini verir. Böylece $(b_1, \dots, b_n) = c(a_1, \dots, a_n) \in N$ dir. Buradan N, F nin asal alt modülüdür.

3.6. F nin 2-Elementla Üretilmiş Asal Alt Modülleri

Bu bölümde $F = R^{(n)}$ in bir asal alt modülü olduğu durumu inceleyeceğiz. Burada $R = Rb_1 + \dots + Rb_n$ dir. F nin L ve L' alt modüllerini düşünelim:

$$L = R(b_1, \dots, b_n) \text{ ve } L' = \{(x_1, \dots, x_n) \in F : s_1x_1 + \dots + s_nx_n = 0\} \quad \text{olsun.}$$

Burada $s_i \in R$ ve $1 = s_1b_1 + \dots + s_nb_n$ dir. Daha önceki önermelerde gördüğümüz gibi $F = L \oplus L'$ dir.

$$N = N \cap (L \oplus L') = L \oplus (N \cap L'), c = s_1a_1 + \dots + s_na_n \quad \text{olsun.} \quad O$$

$$\text{zaman } R(a - cb) \subseteq N \cap L' \quad \text{dir.} \quad a = (a_1, \dots, a_n) \text{ ve } b = (b_1, \dots, b_n)$$

$$\text{ve } N = R(a - cb) \oplus Rb \text{ dir öyle ki } N \cap L' = R(a - cb) \text{ dir. [5]}$$

Lemma 3.6.1 R değişmeli bir bölge ve N, R - modül M nin bir alt modülü olsun öyle ki M/N serbest burulmalı olsun. L de N nin bir has alt modülü olsun. O zaman L, N nin bir 0-asal alt modülüdür ancak ve ancak L, M nin bir 0-asal alt modülüdür. [5]

İspat L, M nin bir 0-asal alt modülü olsun. O zaman M/L modülü serbest

burulmalıdır ve böylece N/L de serbest burulmalıdır. Çünkü; $M/N \cong \frac{M/L}{N/L}$ dir.

Buradan L, N nin 0-asal alt modülü elde edilir. Tersine, L, N nin 0-asal alt modülü olsun. O zaman N/L ve M/N serbest burulmalı R - modüllerdir. Çünkü;

$$M/N \cong \frac{M/L}{N/L} \text{ dir. Ayrıca } M/L \text{ de serbest burulmalıdır ve } L, M \text{ nin 0-asal alt}$$

modülüdür.

Teorem 3.6.1 R tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olsun. $n \geq 3$ bir pozitif tamsayı ve $a_i, b_i \in R$ olsun öyle ki $R = Rb_1 + \dots + Rb_n$, $c = s_1a_1 + \dots + s_na_n$ olsun. Burada $s_i \in R$

ve $1 = s_1 b_1 + \dots + s_n b_n$ dir. $N = R(a_1, \dots, a_n) + R(b_1, \dots, b_n)$, $F = R^{(n)}$ nin bir asal alt modülüdür $\Leftrightarrow$ ya $a_i = cb_i$ ya da $a_i - cb_i$ nin bütün ortak bölenleri R de birimseldir. [5]

İspat Yukarıdaki notasyonla birlikte N , F nin bir asal alt modülüdür $\Leftrightarrow N \cap L'$, L nin bir asal alt modülüdür. Çünkü, $F = L \oplus L'$ ve $N = L \oplus (N \cap L')$ olması $F/N \cong L'/(N \cap L')$ olmasını gerektirir. Dahası, lemma 3.2.1 den $(N \cap L' : L') = (N : F) = 0$ dir. Lemma 3.6.1 den $N \cap L'$, L' nün bir asal alt modülüdür ancak ve ancak $N \cap L'$, F nin bir asal alt modülüdür. $N \cap L' = R(a - cb)$ dir. Böylece $N \cap L'$, F nin bir asal alt modülüdür ancak ve ancak $N \cap L' = 0$ dir. Teorem 3.5.1 den $a_i = cb_i$ ya da $a_i - cb_i$ nin bütün ortak bölenleri birimseldir.

Sonuç 3. 6. 1 M sadık çarpımsal R - modül ve P , R nin $M \neq PM$ olacak şekilde asal ideali olsun. PM asal alt modüldür. [6]

İspat $a \in R$, $x \in M$ olsun. $ax \in PM$ ve $a \notin (PM : M)$ olduğunu varsayalım. $P \subseteq (PM : M)$ olduğundan $a \notin P$ dir. Lemma 2. 3.1 den $x \in PM$ olur. Böylece PM asal alt modüldür.

Teorem 3.6.2 M çarpımsal bir R -modül olsun ve N , M ' nin bir has alt modülü olsun. Aşağıdakiler denktir.

1) N , M ' nin bir asal alt modülüdür.

2) $Ann\left(\frac{M}{N}\right)$ R nin bir asal idealidir.

3) P , R ' nin $Ann M \subseteq P$ şartını sağlayan bir asal ideali iken $N = PM$ ' dir. [6]

(1) $\Rightarrow$ (2) $ab \in (N : M)$ ve $b \notin (N : M)$ olsun. $ab \in (N : M)$ olduğundan $abM \subseteq N$ ve $bM \not\subseteq N$ dir. $abt \in N$ ve $bt \notin N$ olacak şekilde bir $t \in M$ vardır. Buradan da $a \in (N : M)$ olur.

(2) $\Rightarrow$ (3) $(N : M) = P$ asal ideal olsun. M çarpımsal olduğundan $PM = (N : M)M = N$ dir. Şimdi $Ann(M) \subseteq P$ olduğunu gösterelim. $x \in Ann(M)$ ise $xM = 0 \subseteq N$ dir ve buradan $x \in (N : M)$ bulunur.

(3) $\Rightarrow$ (1) M sadık çarpımsal $\frac{R}{\text{Ann}(M)}$ - modüldür. $\frac{P}{\text{Ann}(M)}, \frac{R}{\text{Ann}(M)}$ nin asal ideali ve $\left(\frac{P}{\text{Ann}(M)}\right)M = PM = N$ dir. Sonuç 3. 6. 1 den PM asal alt modüldür. Böylece N asal alt modüldür.

Tanım 3.6.1 M çarpımsal bir R -modül, I_1 ve I_2 , R nin idealleri, N ve K M 'nin $N = I_1$ ve $K = I_2$ M şeklindeki alt modülleri olsun. N ve K 'nin çarpımı $NK = I_1 . I_2 M$ şeklinde tanımlanır. [6]

Teorem 3. 6. 3 M bir R - modül ve P bir öz alt modülü olsun. P asaldır $\Leftrightarrow M$ nin her U, V alt modülü için $UV \subseteq P$ ise $U \subseteq P$ ya da $V \subseteq P$ dir. [2]

İspat P asal, $UV \subseteq P$, $U \not\subseteq P$ ve $V \not\subseteq P$ olsun. I, J sırasıyla U ve V nin gösterimi olsun. O zaman $UV = IJM \subseteq P$ dir. Böylece bazı $r \in I$ ve $s \in J$ için $ry \in U - P$ ve $sx \in V - P$ dir. Buradan $rsx \in P$ ve $rM \subseteq P$ dir. Bu durum kabulümüz ile çelişir. Tersine, bazı $r \in R$ ve $x \in M - P$ için $rx \in P$ fakat $rM \not\subseteq P$ olsun. O zaman bazı $m \in M$ için $rm \notin P$ dir. I, J sırasıyla rx ve m nin gösterimi olsunlar. O zaman $R(rx)(Rm) = (Rx)(Rm) = IMJM = IJM \subseteq P$ elde edilir. Hipotezden, $Rx \subseteq P$ yada $Rrm \subseteq P$ olması $x \in P$ yada $rm \in P$ olmasını sağlar. Bu da çelişkidir. Sonuç olarak P asaldır.

Sonuç 3. 6. 2 M bir R - modül ve P bir öz alt modülü olsun.

P asaldır $\Leftrightarrow \forall m, m' \in M$ için $mm' \subseteq P$ ise $m \in P$ yada $m' \in P$ dir. [2]

Teorem 3.6.4 M çarpımsal bir R -modül ve P, M 'nin bir has alt modülü olsun. Aşağıdakiler denktir:

- 1) P bir asal alt modüldür.
- 2) M 'nin bütün N ve K alt modülleri için, eğer $NK \subseteq P$ ise $N \subseteq P$ yada $K \subseteq P$ 'dir.
- 3) $\forall m, n \in M$ için, eğer $mn \subseteq P$ ise $m \in P$ yada $n \in P$ 'dir. [6]

İspat Teorem 3. 6. 4 ve sonuç 3. 6. 2 den istenen elde edilir.

Önerme 3.6.1 M çarpımsal bir R - modül ve L, M ' nin bir has alt modülü olsun. Aşağıdakiler denktir:

- 1) L, M ' nin bir asal alt modülüdür.
- 2) M ' nin her N alt modülü için, eğer $N \not\subseteq L$ ise $(L : N) = L$ ' dir.

[6]

İspat $(1) \Rightarrow (2)$ L, M 'nin bir asal alt modülü ve $N, N \not\subseteq L$ şartını sağlayan bir alt modülü olan, $m \notin L$ için $m \in (L:N)$ olduğunu varsayalım. O zaman $\forall n \in N$ için $mn \subseteq L$ dir. Fakat L bir asal alt modül ve $m \notin L$, teorem 3. 6.4 den $n \in L$ dir. Diğer bir deyişle $N \subseteq L$ dir. Bu da çelişki oluşturur.

$(2) \Rightarrow (1)$ M 'nin her N alt modülü için $N \not\subseteq L$ ve $(L:N) = L$ olsun. Aynı zamanda $m_1, m_2 \in M$ için $m_1 m_2 \subseteq L$ ve $m_1 \notin L$ olsun. $N = Rm_1 + L$ dir. $N \not\subseteq L$ böylece $(L:N) = L$ olur. Fakat $m_1 m_2 \subseteq L$ idi. Buradan $m_2 \in (L:N) = L$ dir.

Önerme 3.6.2 M bir çarpımsal R - modül ve N ile L, M 'nin $L \not\subseteq N$ şartını sağlayan alt modülleri olsun. Eğer L, N 'nin bir asal alt modülü ise o zaman $(L:N)$ de M 'nin bir asal alt modülüdür. [6]

İspat Eğer L, N 'nin bir asal alt modülü ise $(L:N)$ de R 'nin bir asal idealidir ve $Ann(M) \subseteq (L:N)$ ve böylece teorem 3. 6. 2 den $(L:N)M, M$ 'nin bir asal alt modülüdür. Ayrıca $(L:N)M = (L:N)$ dir. Şimdi bu eşitliği gösterelim.

$r \in (L:N), m \in M$ ve $n \in N$ olsun.

$rn \in L$ ve $(rm)n = m(rn) \subseteq R(rn) \subseteq L$ olur. Bu nedenle $rm \in (L:N)$ ve $(L:N)M \subseteq (L:N)$ dir. Tersine $m \in (L:N)$ olsun. $\forall n \in N$ $mn \subseteq L$ dir. R 'nin $Rm = IM$ ve $Rn = JM$ şartını sağlayan I, J idealleri vardır ayrıca $IJM = mn \subseteq L$ dir.

Böylece $1 < k < t, i_k \in I$, ve $m_k \in M$ için $m = \sum_{k=1}^t i_k m_k$ dir.

Herhangi bir k için $i_k n \in i_k (Rn) = i_k (JM) \subseteq IJM \subseteq L$ dir. $i_k \in (L:N)$ dir ve bu bize $m \in (L:N)M$ olmasını sağlar. Buradan $(L:N) \subseteq (L:N)M$ dir. Dolayısıyla eşitlik elde edilir. $(L:N)$ de M 'nin bir asal alt modülüdür.

Önerme 3.6.3 M , çarpımsal bir R - modül, N, M 'nin bir maksimal alt modülü, P, M 'nin bir asal alt modülü ve $P \neq N$ olsun. Eğer L, P 'nin bir alt modülü ise $(L:N)$ de P 'nin bir alt modülüdür. [6]

İspat L, P 'nin bir alt modülü ve $m \in (L:N)$ olsun. $mN \subseteq L \subseteq P$ olur. Eğer $m \notin P$ ise $N \subseteq P$ dir. N, M nin maksimal alt modülü olduğundan $N = P$ olur. Bu durum ise kabulümüz ile çelişir. Buradan $m \in P$ olur. Dolayısıyla $(L:N) \subseteq P$ dir.

Sonuç 3.6.3 M çarpımsal R -modül, N de M 'nin bir alt modülü olsun. $Ann(N)$, M 'nin bir minimal asal alt modülüdür. [6]

İspat $\forall r \in R, m \in M$ için $rm \in Ann(N)$ olsun. $(rm)N = 0$ dir. $\forall m \in M$ için $(rM)N = 0$ olur. Böylece $rM \subseteq Ann(N)$ ve buradan $r \in (Ann(N):M)$ elde edilir. Dolayısıyla $Ann(N)$, asal alt modül elde edilir. $K \subseteq Ann(N)$ olacak şekilde bir K asal alt modülünün varlığını kabul edelim. $K \subseteq Ann(N)$ ise $(K:M) \subseteq (Ann(N):M)$ dir. M çarpımsal R -modül olduğundan $(K:M)M = (Ann(N):M)M$ ve $K = Ann(N)$ elde edilir. Dolayısıyla $Ann(N)$ minimal asal alt modüldür.

Tanım 3. 6. 2. M bir R -modül olsun ve N, M nin bir öz alt modülü olsun. Eğer R nin bütün I idealleri ve M nin bütün K alt modülleri için $I^2K \subseteq N$ olması $IK \subseteq N$ olmasını sağlarsa N ye **yarı asal** alt modül denir. [12]

Not: Bir R halkası kendi üzerinde bir R -modül olduğundan, R nin bir I öz alt modülü ve J ve K, R nin idealleri iken eğer $J^2K \subseteq I$ olması $JK \subseteq I$ olmasını sağlarsa I yarı asaldır. [12]

Örnek 3.6.2 $M = \mathbb{Z}, R = \mathbb{Z}, N = 2\mathbb{Z}, K = 6\mathbb{Z}, I = 3\mathbb{Z}$ alalım. $I^2K = 54\mathbb{Z} \subseteq N = 2\mathbb{Z}$ şartı sağlanır ve $IK = 18\mathbb{Z} \subseteq N = 2\mathbb{Z}$ olduğundan N yarı asaldır.

Teorem 3.6.5 M çarpımsal R -modül ve N, M 'nin bir alt modülü olsun. Aşağıdakiler denktir.

- 1) N bir yarı asal alt modüldür.
- 2) $\forall m \in M$ için $m^2 \subseteq N$ olması $m \in N$ olmasını sağlar.
- 3) $\sqrt{N} = N$ dir.
- 4) M/N sıfır olmayan nilpotente sahip değildir.
- 5) Her K_1, K_2 alt modülleri için $K_1K_2 \subseteq N$ olması $K_1 \cap K_2 \subseteq N$ olmasını sağlar. [6]

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) N, M 'nin bir yarı asal alt modülü ve bazı $m \in M$ için $m^2 \subseteq N$ olsun. M çarpımsal olduğundan $Rm = IM$ olacak şekilde bir I ideali vardır ve $I^2M \subseteq N$ dir. N yarı asal alt modül olduğundan $m \in Rm = IM \subseteq N$ dir. Buradan $m \in N$ elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) $N \subseteq \sqrt{N}$ olduğunu biliyoruz. $m \in \sqrt{N}$ olsun. O zaman pozitif bir k tam sayısı için $m^k \subseteq N$ dir. k 'nın bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayı olduğunu varsayalım. Eğer $k > 1$ ise iki seçenek vardır:

1. k çift olsun. $0 < l < k$ iken pozitif bir l tam sayısı için $k = 2l$ dir. Bu durumda $(m^l)^2 = m^k \subseteq N$ ve böylece $\forall m_o \in m^l$ için $m_o^2 \subseteq N$ dir. Buradan $m_o \in N$ ve $m^l \subseteq N$ dir. Bu da k 'nın seçimi ile çelişir.

2. k tek olsun. $0 < l < k$ iken pozitif bir l tam sayısı için $k = 2l + 1$ dir. Bu durumda $(m^{l+1})^2 = m^{k+1} \subseteq m^k \subseteq N$ dir. Benzer şekilde yukarıdaki gibi çelişki elde ederiz.

Buradan $k = 1$ olduğu sonucuna ulaşılır. $\sqrt{N} \subseteq N$ olur ve $\sqrt{N} = N$ eşitliği elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (4) $\sqrt{N} = N$ ve $m + N \in M/N$ nilpotent olsun. O zaman bazı pozitif k tam sayıları için $(m + N)^k = N$ dir. Buradan $m^k \subseteq N$ elde edilir. $m^k \subseteq N$ ise $m \in \sqrt{N}$ dir. Fakat $\sqrt{N} = N$ olması $m + N = N$ olmasını sağlar. Diğer bir deyişle M/N 'nin sıfırdan farklı nilpotent elemanı yoktur.

(4) $\Rightarrow$ (5) $K_1 K_2 \subseteq N$ olsun. Eğer $m \in K_1 \cap K_2$ ise $m^2 \subseteq K_1 K_2 \subseteq N$ ve $(m + N)^2 = N$ dir. Eğer M/N 'nin sıfırdan farklı nilpotent elemanı yoksa $m + N = N$ dir. Böylece $m \in N$ olur. Buradan $K_1 \cap K_2 \subseteq N$ elde edilir.

(5) $\Rightarrow$ (1) I , R 'nin bir ideali ve $I^2 M \subseteq N$ olsun. O zaman $(IM)(IM) \subseteq N$ ise (5) den dolayı $IM \subseteq N$ dir. Buradan N , M 'nin yarı asal alt modülüdür.

Sonuç 3.6.4 Çarpımsal bir modülün bütün yarı asal alt R modülleri bazı asal alt modüllerin kesişimidir. [6]

İspat M çarpımsal bir R - modül ve N , M 'nin bir yarı asal alt modülü olsun. $\sqrt{N} = N$ dir. $\sqrt{N}$ 'nin tanımından istenen elde edilir.

3.7. Alt Modüllerin Yarı Radikalleri

Lemma 3.7.1 M bir R -modül olsun ve N , M 'nin bir öz alt modülü olsun.

i) N , M 'nin bir asal alt modülüdür $\Leftrightarrow I$, R 'nin bir ideali ve D , M 'nin bir alt modülü ve $ID \subseteq N$ iken $D \subseteq N$ ya da $I \subseteq (N : M)$ dir.

ii) N, M nin bir asalımsı alt modülüdür $\Leftrightarrow R$ halkasının bütün sonlu üretilmiş idealleri ve D, M nin herhangi bir alt modülü iken, $ID \subseteq N$ iken $D \subseteq N$ ya da $I^n \subseteq (N:M)$ dir.

iii) P, R halkasının bir asal ideali olsun. N, M nin bir P -asalımsı alt modülüdür $\Leftrightarrow$ **a)** $P \subseteq \sqrt{(N:M)}$ ve **b)** $\forall c \in R/P, m \in M/N$ için $cm \notin N$ [12]

İspat i) $(\Rightarrow)$: $I \triangleleft R$ ve $D \leq M$ iken $ID \subseteq N$ ve $D \not\subseteq N$ olsun. $D \not\subseteq N$ ise bir $x \in D/N$ vardır. $r \in I$ olsun. $rx \in N$ dir. Böylece $x \notin N$ olduğundan ve N asal alt modül olduğundan $r \in (N:M)$ dir. Böylece $I \subseteq (N:M)$ bulunur.

$(\Leftarrow)$: $r \in R, a \in M$ olsun öyle ki $ra \in N$ ve $a \notin N$ olsun. $I = (r)$ ve $D = Ra$ alalım. $ID \subseteq N$ fakat $D \not\subseteq N$ dir. Böylece $I \subseteq (N:M)$ olur. Buradan $r \in (N:M)$ olur ve N asal alt modül bulunur.

ii) $(\Rightarrow)$: $D \leq M$ ve I, R nin sonlu üretilmiş bir ideali olsun öyle ki $ID \subseteq N$ şartı sağlansın. Kabulden $D \subseteq N$ ya da $ID \subseteq N$ dir. $D \not\subseteq N$ olsun ve N asalımsı alt modül olduğundan $I \subseteq \sqrt{(N:M)}$ ve pozitif bir n tamsayısı için $I^n \subseteq (N:M)$ dir.

$(\Leftarrow)$: $r \in R$ ve $x \in M$ olsun öyle ki $rx \in N$ ve $x \notin N$ alalım. $I = (r)$ ve $D = Rx$ olsun. Böylece $ID \subseteq N$ ve $D \not\subseteq N$ olur. Kabulden $I^n \subseteq (N:M)$ sonucuna ulaşılır ve $r^n \in (N:M)$ bulunur. N, M nin bir asalımsı alt modülü çıkar.

iii) $(\Rightarrow)$: N, M nin bir P -asalımsı alt modülü olsun. Tanımdan $P = \sqrt{(N:M)}$ dir. $\forall c \in R/P, m \in M/N$ için $cm \in N$ olsun. Pozitif bir n tamsayısı vardır öyle ki $c^n \in \sqrt{(N:M)}$ dir. Çünkü $m \notin N$ ve N, P -asalımsı alt modül olduğundan pozitif bir n tamsayısı için $c^n \in \sqrt{(N:M)}$ dir. Buradan $c \in \sqrt{(N:M)} = P$ bulunur. Bu da $cm \in N$ olması bir çelişki olur.

$(\Leftarrow)$: a) ve b) nin sağlandığını kabul edelim. $r \in R$ ve $m \in M$ için, $rm \in N$ olsun. b) den $m \notin N$ dir. a) dan dolayı da $r \in P$ iken $r \in \sqrt{(N:M)}$ dir. Böylece N asalımsı alt modüldür. $P = \sqrt{(N:M)}$ olduğunu göstermeliyiz. a) dan $P \subseteq \sqrt{(N:M)}$ olduğunu biliyoruz. $\sqrt{(N:M)} \subseteq P$ olup olmadığını incelemeliyiz. $r \in \sqrt{(N:M)}$ olsun. $r^n \in (N:M)$ ve $r^n M \subseteq N$ dir. N , öz alt modül olduğundan, bir $x \in M/N$ vardır.

$r^n x \in N$ ve $x \notin N$ dir. b) den $r^n \in P$ dir ve P asal olduğundan $r \in P$ dir. Böylece ispat tamamlanmış oldu.

Önerme 3.7.1 M bir R -modül olsun.

i) Eğer N, M nin bir asal alt modülü ise N yarı asal alt modüldür.

ii) Eğer N, M nin bir yarı asal alt modülü ise, $(N : M)$, R nin yarı asal idealidir. [12]

İspat i) $I \triangleleft R, K \leq M$ ve $I^2 K \subseteq N$ olsun. $I(IK) \subseteq N$ ve N asal olduğundan, $I \subseteq (N : M)$ ya da $IK \subseteq N$ dir. Fakat $(N : M) \subseteq (N : K)$ ve böylece $I \subseteq (N : K) \Rightarrow IK \subseteq N$ bulunur. N yarı asal bulundu.

ii) J ve K , R nin idealleri olsun ve $J^2 K \subseteq (N : M)$ olsun. $(J^2 K)M \subseteq N$ ve $J^2(KM) \subseteq N$ bulunur. N yarı asal olduğundan $J(KM) \subseteq N \Rightarrow JK \subseteq (N : M)$ sonuç olarak $(N : M)$ yarı asal ideal bulundu.

Örnek 3.7.1 $R = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, B = \langle (9, 0) \rangle$ olsun. $(B : M) = (0)$ olduğu açıktır. $\mathbb{Z}$ bir tamlık bölgesi olduğundan $(B : M) = (0)$ asal idealdir. Fakat B, M nin yarı asal alt modülü değildir. Çünkü $I = (3)$ ve $K = \langle (2, 0) \rangle$ alalım. [12]

$I^2 K = \{(18q, 0) : q \in \mathbb{Z}\} \subseteq B$ fakat $IK = \{(6q, 0) : q \in \mathbb{Z}\} \not\subseteq B$ dir. Yani $(B : M) = (0)$ asal olduğundan yarı asaldır fakat B yarı asal alt modül değildir. [12]

Eğer N, R nin bir yarı asal alt modülü ise ve $I \triangleleft R$, $K \leq M$ iken $I^n K \subseteq N$ iken $IK \subseteq N$ dir. [12]

Teorem 3.7.1 M bir R -modül olsun ve N, M nin bir öz alt modülü olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

i) N yarı asaldır.

ii) Bazı $r \in R$ ve $m \in M$ için $r^t m \in N$ olduğunda $rm \in N$ dir. [12]

İspat i) $\Rightarrow$ ii) $r \in R, m \in M$ ve $t \in \mathbb{Z}^+$ için, $r^t m \in N$ olsun.

$I = (r)$ ve $K = (m)$ alalım. $I^t K \subseteq N$ ve $IK \subseteq N$ olur. Buradan $rm \in N$ bulunur.

ii) $\Rightarrow$ i) $I \triangleleft R$ ve $K \leq M$ olsun öyle ki $I^2K \subseteq N$ sağlansın. $S = \{ra : r \in I, a \in K\}$ kümesini düşünelim.

$\forall r \in I, a \in K$ için, $r^2a \in I^2K \subseteq N \Rightarrow ra \in N$ dir. Böylece $S \subseteq N$ olur ve IK, M nin S ile üretilmiş bir alt modülü olduğundan $IK \subseteq N$ bulunur. Böylece N yarı asaldir.

Lemma 3.7.2 M bir çarpımsal R -modül olsun. M nin bir N alt modülü yarı asaldir $\Leftrightarrow (N : M), R$ halkasının yarı asal idealidir. [12]

İspat $(\Rightarrow)$: N yarı asal ise N nin asal ideal olduğunu gösterdik.

$(\Leftarrow)$: $I \triangleleft R, K \leq M$ olsun öyle ki $I^2K \subseteq N$ alalım.

Böylece $(I^2K : M) \subseteq (N : M) \Rightarrow I^2(K : M) \subseteq (I^2K : M)$ ve buradan $I^2(K : M)M \subseteq (N : M)$ elde edilir fakat $(N : M)$ bir yarı asal ideal olduğundan $I(K : M) \subseteq (N : M) \Rightarrow I(K : M)M \subseteq (N : M)M$ dir.

M çarpımsal modül olduğundan $IK \subseteq N$ olur. Buradan N, M nin yarı asal alt modülü bulunur.

Lemma 3.7.3 M bir çarpımsal R -modül olsun.

a) M nin bir N alt modülü asaldir $\Leftrightarrow (N : M), R$ nin asal idealidir.

b) M nin bir N alt modülü asalımsıdır $\Leftrightarrow (N : M), R$ nin asalımsı idealidir. [12]

İspat a) $(\Rightarrow)$: Lemma 3. 1 de yapıldı.

$(\Leftarrow)$: $I \triangleleft R, D \leq M$ olsun öyle ki $ID \subseteq N$ dir. $(ID : M) \subseteq (N : M)$ olur fakat $I(D : M) \subseteq (ID : M)$ ve $I(D : M) \subseteq (N : M)$ dir. $(N : M)$ asal olduğundan $I \subseteq (N : M)$ ya da $(D : M) \subseteq (N : M)$ dir. $I \not\subseteq (N : M)$ olduğunu farz edelim. O zaman $(D : M) \subseteq (N : M)$ olur. $(D : M)M \subseteq (N : M)M$ dir. Yani $D \subseteq N$ bulunur. Böylece N, M nin bir asal alt modülüdür.

b) $(\Rightarrow)$: $a, b \in R$ olmak üzere, $ab \in (N : M)$ ve $b \notin (N : M)$ olsun. Şu halde $abM \subseteq N$ ve $bM \not\subseteq N$ dir. Bir $m \in M$ için $abm \in N$ ve $bm \notin N$ dir. N asalımsı

alt modül olduğundan $a^k \in (N:M)$ olacak şekilde bir k tam sayısı vardır. Böylece istenen elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $(N:M)$, R nin bir asalımsı ideali olsun. I , R nin bir sonlu üretilmiş ideali olsun ve D , M nin bir alt modülü olsun. $ID \subseteq N$ koşulu sağlansın. Bir pozitif $n \in \mathbb{Z}^+$ için $I^n \not\subseteq (N:M)$ olduğunu farz edelim. $D \subseteq N$ olduğunu bulmamız gerekiyor. $ID \subseteq N$ ise $(ID:M) \subseteq (N:M)$ dir. $I^n \not\subseteq (N:M)$ olduğunu kabul ettik. $(N:M)$ nin de asalımsı olduğunu biliyoruz. O zaman $(D:M) \subseteq (N:M)$ bulunur. $(D:M)M \subseteq (N:M)M$ yani $D \subseteq N$ dir. Buradan N nin asalımsı alt modül olduğu bulunur.

Önerme 3.7.2 $\{P_i\}_{i \in I}$ bir R - modül M nin boştan farklı yarı asallarının ailesi olsun. $P = \bigcap P_i$ de M nin bir yarı asal alt modülüdür. [12]

İspat $I \triangleleft R$, $K \leq M$ olsun öyle ki $I^2K \subseteq P = \bigcap P_i$ olsun. $I^2K \subseteq P_i$ olur. $\forall i \in I$ için P_i ler yarı asal olduğundan $I^2K \subseteq P_i \Rightarrow IK \subseteq \bigcap P_i = P$ ve P yarı asal bulunur.

R halkasının bir I ideali yarı asaldir $\Leftrightarrow I$ radikal idealdir. [12]

İspat $(\Rightarrow)$: I yarı asal ve $x \in \sqrt{I}$ olsun. Buradan pozitif bir k tamsayısı için $x^k \in I$ ve I yarı asal olduğundan $x1 = x \in I$ olur. $I \subseteq \sqrt{I}$ olduğunu zaten biliyoruz. $\forall x \in \sqrt{I}$ iken $x \in I$ oldu. $\sqrt{I} \subseteq I$ bulundu. $\sqrt{I} = I$ bulundu.

$(\Leftarrow)$: Diğer yandan $\sqrt{I}$ nin tanımından, bir alt modülün asal iken yarı asal olmasından ve yarı asal alt modüllerin kesişiminin de yarı asal olmasından I yarı asal bulunur.

Bir R - modül M nin herhangi bir B alt modülü için $radB$ yarı asal alt modüldür.

Teorem 3.7.2 M sonlu üretilmiş çarpımsal bir R - modül ve N de M nin bir öz alt modülü olsun. N yarı asaldir $\Leftrightarrow N$ radikaldir. [12]

İspat $\sqrt{(N:M)}M = rad(N:M)M$ ve M çarpımsal bir R - modül olduğundan $(N:M)N = M$ dir. Eğer N yarı asal ise $(N:M)$ de yarı asaldir. Dolayısıyla $(N:M)$ bir radikal idealdir.

$\sqrt{(N:M)}M = rad(N:M)M \Leftrightarrow (N:M)M = rad(N:M)M$ dir.

Eğer $N = \text{rad}N$ ise N , M nin bir radikal alt modülüdür yani $N = \text{rad}N = \bigcap P_i$. Burada P , M nin N yi içeren asal alt modülüdür. Asal bir alt modül yarı asal ve yarı asalların kesişimi de yarı asal olduğundan N , M nin yarı asal alt modülüdür.

Sonuç 3.7.1 M sonlu üretilmiş çarpımsal bir R - modül ve N de M nin bir öz alt modülü olsun. [12]

N yarı asaldır $\Leftrightarrow N = \bigcap P_i$ dir. Burada P_i , M nin N yi içeren asal alt modülüdür.

İspat ($\Rightarrow$): Eğer N yarı asal ise N radikaldir yani $N = \bigcap P$ dir.

($\Leftarrow$): Bir alt modülün asal ise yarı asal olması ve yarı asal alt modüllerin kesişiminin de yarı asal olmasından N yarı asaldır.

Önerme 3.7.3 Eğer M sonlu üretilmiş bir R - modül ise M nin bütün öz alt modülleri bir yarı asal alt modül tarafından kapsanır. [12]

İspat M sonlu üretilmiş bir modül ise M nin her has alt modülünü kapsayan bir bir asal alt modülü olduğunu gösterdik. Bir asal alt modül aynı zamanda yarı asal olduğundan istenen elde edilir.

Tanım 3.7.1

1) P , R - modül M nin bir yarı asal alt modülü ve N , M nin bir öz alt modülü olsun. Eğer $N \subseteq P$ ise ve bu özelliği sağlayan daha küçük bir yarı asal alt modül yoksa P **minimal** yarı asal alt modüldür. [12]

2) $0 = \langle 0_M \rangle$ nin bir yarı asalı M nin minimal yarı asalı olarak adlandırılır.

Teorem 3.7.2 M bir R - modül olsun. Eğer M nin bir N alt modülü bir yarı asal P alt modülü tarafından içerilirse P , N nin bir minimal yarı asal alt modülünü içerir. [12]

İspat Önerme 3. 4 den özelliğin asal alt modüller için sağlandığını gördük bir modül asal ise yarı asal olmasından istenen elde edilir.

Önerme 3.7.3 M sonlu üretilmiş bir modül ise bütün öz alt modülleri en az bir tane minimal yarı asal alt modüle sahiptir. [12]

İspat N , M nin bir öz alt modülü olsun. Sonlu üretilmiş bir modülün bütün öz alt modülleri bir yarı alt modülde içerilir. Böylece N , M nin bir yarı asal alt modülünün içindedir.

Sonuç 3.7.2 M bir R - modül olsun. M nin bütün yarı asal alt modülleri M nin en az bir tane minimal yarı asal alt modülünü içerir. [12]

İspat P , M nin bir yarı asal alt modülü olsun ve $N = \langle 0 \rangle$ olarak alalım. Bir önceki teoremden P , $\langle 0 \rangle$ nin bir minimal yarı asal alt modülünü içerir ve M nin bir minimal yarı asal alt modülüdür.

Tanım 3.7.2 M bir R - modül olsun ve $N \leq M$ olsun. Eğer M nin N yi içeren bir yarı asal alt modülü varsa N yi içeren bu yarı asal alt modüllerin kesişimine N nin **yarı radikali** denir. $S - rad_M N$ ya da $S - rad N$ şeklinde gösterilir. Eğer N yi içeren yarı asal alt modülü yoksa $S - rad N = M$ dir. Özel olarak, $S - rad M = M$ dir. $S - rad \langle 0 \rangle$ ' a M nin **yarı asal radikali** denir. [12]

Önerme 3.7.4 M sonlu üretilmiş bir R -modül olsun. N de M nin öz alt modülü olsun. N nin yarı radikali N nin yarı asal alt modüllerinin kesişimidir. [12]

İspat Sonlu üretilmiş bir modül en az bir tane minimal yarı asal alt modüle sahiptir. Ayrıca M bir R -modül olmak üzere N de M nin alt modülü ve P yarı asal alt modülü iken P , N nin bir minimal yarı asal alt modülünü içerir.

Teorem 3.7.4 M bir R -modül olsun. B ve C , M nin alt modülleri olsun. O zaman:

- 1) $B \subseteq S - rad B$
- 2) $S - rad B(S - rad B) = S - rad B$
- 3) $S - rad(B \cap C) \subseteq S - rad B \cap S - rad C$, bütün yarı asal P modülleri için $B \cap C \subseteq P$ iken $B \subseteq P$ ya da $C \subseteq P$ dir.
- 4) $S - rad(B + C) = S - rad(S - rad B + S - rad C)$
- 5) $\sqrt{(B : M)} \subseteq (S - rad B : M)$
- 6) Eğer M sonlu üretilmiş ise, $B = M \Leftrightarrow S - rad B = M$

7) Eğer M sonlu üretilmiş ise, $B+C=M \Leftrightarrow S-radB+S-radC=M$

8) I, R nin ideali olmak üzere, $S-radIM = S-rad\sqrt{I}M$ [12]

İspat 1) Yarı radikal tanımından açıktır.

2) Yarı asal alt modüllerin kesişimi de yarı asal olduğundan $S-radB$ de tanımından dolayı yarı asaldır. $x \in S-radB$ olsun. Yarı radikal tanımından $x \in S-rad(S-radB)$ dir. Tersine, $y \in S-rad(S-radB)$ olsun. Yine tanımdan $y \in S-radB$ dir. Dolayısıyla eşitlik elde edilir.

3) $x \in S-rad(B \cap C)$ olsun. Tanımdan dolayı $x, B \cap C$ yi kapsayan yarı asal alt modüllerin kesişimindedir. x, B yi kapsayan yarı asal alt modüllerin kesişimindedir. Dolayısıyla $x \in S-radB$ dir. x, C yi kapsayan yarı asal alt modüllerin de kesişimindedir. Dolayısıyla $x \in S-radC$ dir. Sonuç olarak $x \in S-rad(B \cap C)$ elde edilir.

4) P, M nin yarı asal alt modülü olsun öyle ki $(S-radB+S-radC) \subseteq P$ olsun. Buradan $S-radB \subseteq P$ ve $S-radC \subseteq P$ dir. Böylece $B \subseteq P$ ve $C \subseteq P$ dir. Bu da $B+C \subseteq P$ olmasını sağlar. Böylece $S-rad(B+C) \subseteq P$ ve $S-rad(B+C) \subseteq S-rad(S-radB+S-radC)$ dir. Tersine, $P, B+C \subseteq P$ şartını sağlayan bir yarı asal alt modül olsun. Buradan $B \subseteq P$ ve $C \subseteq P$ dir. Böylece $S-radB \subseteq P$ ve $S-radC \subseteq P$ ve buradan $S-radB+S-radC \subseteq P$ Fakat $S-rad(S-radB+S-radC) \subseteq P$ dir. Buradan

$S-rad(S-radB+S-radC) \subseteq S-rad(B+C)$ elde edilir.

5) Eğer $S-radB=M$ ise halkaya eşit olur. Sonuca ulaşılır. P, M nin $B \subseteq P$ olacak şekilde bir yarı asal alt modülü olsun. $(B:M) \subseteq (P:M)$ dir. P, M yarı asal olduğundan $(P:M), R$ nin yarı asal idealidir. Ayrıca $\sqrt{(P:M)} = (P:M)$ idi. $\sqrt{(B:M)} \subseteq \sqrt{(P:M)} = (P:M)$ olması $\sqrt{(B:M)}M \subseteq (P:M)M$ olmasını sağlar. P, M nin B yi kapsayan bir yarı asal alt modülü olduğundan $\sqrt{(B:M)}M \subseteq S-radB$ yani $\sqrt{(B:M)}M \subseteq (S-radB:M)$ elde edilir.

6) Eğer $B=M$ ise $S-radB=S-radM=M$ dir. Tersine, $S-radB=M$ ve $B \neq M$ olsun. M sonlu üretilmiş olduğundan bir asal içerir dolayısıyla B yi içeren bir yarı asal P alt modülü vardır. Böylece $S-radB \neq M$ olur. Bu da kabulümüz ile çelişir.

7) 4. ve 6. özelliği kullanırsak,

$B+C=M$ ancak ve ancak $S-rad(B+C)=M \Leftrightarrow$

$S - \text{rad}(S - \text{rad}B + S - \text{rad}C) = M \Leftrightarrow S - \text{rad}B + S - \text{rad}C = M$ dir.

8) Eğer M nin IM yi içeren yarı asal alt modülü yoksa $S - \text{rad}IM = M$ ve

$$I \subseteq \sqrt{I} \Rightarrow IM \subseteq \sqrt{I}M \Rightarrow S - \text{rad}IM \subseteq S - \text{rad}\sqrt{I}M \Rightarrow$$

$M \subseteq S - \text{rad}\sqrt{I}M \Rightarrow M = S - \text{rad}\sqrt{I}M = S - \text{rad}IM$ dir. Şimdi P , M nin

$IM \subseteq P$ şartını sağlayan bir yarı asal alt modülü olsun. Böylece

$I \subseteq (IM : M) \subseteq (P : M)$ ve $(P : M)$ yarı asal olduğundan $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{(P : M)} = (P : M)$ dir.

Böylece $\sqrt{I}M \subseteq P$ ve $S - \text{rad}\sqrt{I}M \subseteq P$ dir.

Böylece $S - \text{rad}\sqrt{I}M \subseteq S - \text{rad}IM$ bulunur ve eşitlik elde edilir.

Sonuç 3.7.3 M bir R -modül ve I, R nin bir ideali olsun. Bir pozitif n tam sayısı için $S - \text{rad}I^n M = S - \text{rad}IM$ dir. [12]

İspat $\sqrt{I^n} = \sqrt{I}$ dir. Bir önceki teoremin (8) şikkından $I = \sqrt{I}$ olduğunu biliyoruz.

$x \in \sqrt{I}$ olsun. Bir pozitif k tamsayısı için $x^k \in I$ olur. $x^{kn} \in I^n \Rightarrow x \in \sqrt{I^n} \Rightarrow \sqrt{I} \subseteq \sqrt{I^n}$

bulunur. Tersine, $t \in \sqrt{I^n}$ alalım. $t^m \in I^n \Rightarrow t^{\frac{m}{n}} \in I \Rightarrow t \in \sqrt{I} \Rightarrow \sqrt{I} = \sqrt{I^n}$ bulunur.

$S - \text{rad}I^n M = S - \text{rad}\sqrt{I^n} M = S - \text{rad}\sqrt{I} M = S - \text{rad}IM$ elde edilir.

Önerme 3.7.5 A bir R -modül olsun. Q da A nın bir P asalımsı alt modülü olsun. O zaman $S - \text{rad}Q = S - \text{rad}(Q + PA)$ dir. [12]

İspat $Q \subseteq Q + PA \Rightarrow S - \text{rad}Q \subseteq S - \text{rad}(Q + PA)$ bulunur. P_i ler A nın Q yu içeren

herhangi yarı asal alt modülleri olmak üzere $S - \text{rad}Q = \bigcap_{i \in I} P_i$

$P = \sqrt{(Q : A)} \subseteq \sqrt{(P_i : A)} = (P_i : A)$ olur. Böylece $PA \subseteq P_i$ elde edilir.

$PA \subseteq P_i \Rightarrow (Q + PA) \subseteq P_i \Rightarrow S - \text{rad}(Q + PA) \subseteq P_i$

$\Rightarrow S - \text{rad}(Q + PA) \subseteq \bigcap_{i \in I} P_i = S - \text{rad}Q \Rightarrow S - \text{rad}(Q + PA) = S - \text{rad}Q$ bulunur.

Tanım 3.7.3 M bir R - modül ve N , M nin yarı asal alt modülü ve $P = \sqrt{(N : M)} = (N : M)$ olsun. Eğer P , R nin asal ideali ise N , M nin yarı asal alt modülüdür. [12]

Lemma 3.7.4 M sonlu üretilmiş bir R - modül ve K , R nin maksimal ideali olsun. Eğer Q , M nin bir K -asalımsı alt modülü ise $S - rad$, K - yarı asal alt modüldür. [12]

İspat $\sqrt{(B:M)} \subseteq (S-radB:M)$ olduğunu teorem 3. 7. 4 ün (5) şikkından biliyoruz. $K = \sqrt{(Q:M)} \subseteq (S-radQ:M)$ dir. O zaman maksimallik tanımından $(S-radQ:M) = R$ ya da $(S-radQ:M) = K$ olmalı.

Eğer $(S-rad:M) = R$ ise $S-radQ = M$ dir. Böylece $Q = M$ bulunur. Bu da bir çelişkidir çünkü Q , K -asalımsı öz alt modül olarak seçildi. Bu nedenle $(S-radQ:M) = K$ olur. $S-radQ$, Q yu içeren yarı asal alt modüllerin kesişimidir. Bu kesişim de yarı asaldır. Buradan K -yarı asal bulunur.

Önerme 3.7.6 M bir R - modül olsun. $N_1, N_2, \dots, N_t$ ler M nin P yarı asal alt modülleri olsunlar. O zaman $N = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_t$ de bir P yarı asaldır. [12]

İspat $(N:M) = (N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_t : M)$ dir.

$$\begin{aligned} \text{Buradan } (N:M) &= (N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_t : M) \\ &= (N_1:M) \cap (N_2:M) \cap \dots \cap (N_t:M) = P \cap P \cap \dots \cap P = P \end{aligned}$$

elde edilir ve $(N:M) = P$ olur istenen sonuç elde edilir.

Lemma 3.7.5 M çarpımsal bir R - modül olsun. L ve N de M nin alt modülleri olsunlar. K , R nin bir asal ideali olsun ve P de M nin bir K yarı asal alt modülü olsun öyle ki $N \cap L \subseteq P$ şartı sağlansın. Eğer $(N:M) \not\subseteq K$ ise $L \subseteq P$ dir. [12]

İspat $N \cap L \subseteq P$ olduğunu kabul edelim. $(N \cap L:M) \subseteq (P:M) = K \Rightarrow (N:M) \cap (L:M) \subseteq K$ ve K, R nin bir asal ideali olduğundan $(N:M) \subseteq K$ ya da $(L:M) \subseteq K$ olmalı. $(N:M) \not\subseteq K$ kabul ettiğimizden $(L:M) \subseteq K$ buluruz. $(L:M)M \subseteq KM$ ve M çarpımsal olduğundan $L \subseteq KM$ olur. Fakat $(P:M) = K$ olması $KM \subseteq P$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $L \subseteq KM \subseteq P$ bulunur.

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada halka ve modül teorisi anlatılmış, asal alt modüller ve yarı asal alt modüllerle ilgili araştırma yapılmış ve birimli ve değişmeli bir halkanın asal idealleri ile asal alt modüller arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca asal alt modüllerin diğer modüllerle arasındaki ilişki üzerinde durulmuştur. Yarı asal alt modüller ile ilgili temel bilgiler verilerek yarı asal alt modüllerin yarı radikalleri üzerinde inceleme yapılmıştır. Ayrıca asal alt modüllerde sağlanan bazı özelliklerin yarı asal alt modüllerde de benzer şekilde sağlandığı gözlenmiştir. Bundan sonra yapılacak olan çalışmalarda bir modülün asal ve yarı asal olmasını sağlayan örnekler üzerinde çalışılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Çallıalp, F. ve Tekir, Ü. (2009). Değişmeli Halkalar ve Modüller, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- [2] R.Ameri, (2003). "On the Prime Submodules of Multiplication Modules", International Journal of Math. and Math. Science, 27: 1715-1724
- [3] Malik, D.S. Mordeson, J. N. ve Sen, M. K. , (2007). Introduction to Abstract Algebra, Scientific Word, U.S.A.
- [4] Lu, C. P., (1988). " M- Radicals of Submodules in Modules", Math. Japonica, 34: 211-219
- [5] Yılmaz, D. P. , (2003). "On Prime Submodules of Finitely Generated Free Modules", Turk J Math, 27: 329- 242
- [6] Nezhad, R. J. ve Naderi, M. H., (2009). "On Prime and Semiprime Submodules of Multiplication Modules", International Mathematical Forum, 26: 1257-1266
- [7] Yeşilot, G. ve Özavşar, M. ,(2012). Soyut Cebir Çözümlü Problemleri, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara
- [8] Lu, C. P. (1984). " Prime Submodules of Modules", Comment. Math. Univ. Sancti Pauli. , 33: 61-64
- [9] McCasland, R. L. ve Moore, M. E. , (1992). "Prime Submodules", Communications in Algebra, 20: 1803-1817
- [10] Northcott, D. G. , (1968). Lessons on Rings, Modules and Multiplicities, Cambridge University Press, Cambridge.
- [11] Kaplansky, I. , (1970). Commutative Algebra, Allyn and Bacon.

- [12] Tavallaee, H. A. ve Varmazyar, R. , (2008). “Semi Radicals of Submodules In Modules”, International Journal of Engineering Science, 19: 21-27
- [13] Sharp, R. Y. (2000). Steps in Commutative Algebra, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge
- [14] Hacısalıhoğlu, H. (1975). Lineer Cebir, Ankara

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :ELİF ÖZEL
Doğum Tarihi ve Yeri :25.05.1989, İZMİT
Yabancı Dili :İNGİLİZCE
E-posta :elif-ozel@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	MATEMATİK	Y. T. Ü.	2011
Lise	FEN	F. S. A. L.	2007