

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ÇARPIMSAL MODÜLLER

NESLİHAN SÜZEN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ.DR.GÜRSEL YEŞİLOT**

İSTANBUL, 2013

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇARPIMSAL MODÜLLER

Neslihan SÜZEN tarafından hazırlanan tez çalışması 19.07.2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Murat ALAN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Ünsal TEKİR

Marmara Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu çalışma, birimli ve değışmeli halkalarda çarpımsal modülleri ve bunların alt modüllerini incelemeye yönelik bir çalışmadır.

Öncelikle tez çalışmam süresince beni yönlendiren, yardımlarını benden esirgemeyen ve çalışmamın daha anlaşılır hale gelmesini sağlayan danışman hocam Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT 'a çok teşekkür ederim.

Yine bu süreçte değerli destekleri ve yapıcı eleştirileri ile çalışmalarına katkı sağlayan hocam Arş. Gör. Neslihan Ayşen ÖZKİRİŞÇİ ve sevgili arkadaşım Deniz GÜL SÖNMEZ 'e teşekkür ederim. Ayrıca beni destekleyen, bana güvenen ve yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2013

Neslihan SÜZEN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT	vii
BÖLÜM 1.....	1
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2.....	3
HALKALAR ve MODÜLLER	3
2.1 Ön Bilgiler.....	3
2.2 Halkalar	3
2.3 Modüller	9
BÖLÜM 3.....	15
DEĞİŞMELİ HALKALARDA ÇARPIMSAL MODÜLLER.....	15
3.1 Çarpımsal Modüller.....	15
3.2 Çarpımsal Modüllerin Bazı Özellikleri	28
3.2.1 Çarpımsal Modüllerin Maximal Alt Modülleri	32
3.2.2 Çarpımsal Modüllerin Asal Alt Modülleri	38
3.2.3 Sonlu Üretilmiş Çarpımsal Modüller.....	46
3.2.4 Çarpımsal Modüllerin Alt Modüllerinin Radikali	58
BÖLÜM 4.....	65
SONUÇ VE ÖNERİLER	65
KAYNAKLAR.....	66
ÖZGEÇMİŞ.....	67

SİMGE LİSTESİ

$ann(M)$	M modülünün sıfırlayıcısı (anihilatörü)
$\text{Çek } f$	f fonksiyonunun çekirdeği
$\oplus$	Direkt Toplam
$\sqrt{I}$	I idealinin radikali
$\cong$	İzomorfizma
$J(R) = J$	R halkasının Jacobson radikali
$\langle m \rangle$	m elemanı ile üretilmiş alt modül
$rad M$	M modülünün radikali
$T(M)$	M modülünün burulmalı alt modülü
$M - rad N$	M modülünün N alt modülünün M -radikali
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$(\Rightarrow):$	Gereklilik
$(\Leftarrow):$	Yeterlilik

ÇARPIMSAL MODÜLLER

Neslihan SÜZEN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Çarpımsal modüller, 1974 yılında Mehdi tarafından tanımlanan bir yapıdır. Ancak 1981 yılında, Barnard tarafından farklı bir yol ile tanımlanmıştır. Bundan sonraki çalışmalarda bu tanım dikkate alınmıştır.

Bu çalışmada değişmeli halkalarda çarpımsal modülleri incelemek için öncelikle halka ve modül teorisi anlatılmıştır. Sonraki bölümde ilk olarak değişmeli bir halka üzerinde çarpımsal modül tanımı ve genel özellikleri verilmiştir. Ayrıca bir modülün çarpımsal olabilmesi için bazı gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Daha sonra maximal ve asal idealler için verilen bazı sonuçların çarpımsal modüllerin asal alt modülleri ve maximal alt modülleri için de sağlanıp sağlanmadığı araştırılmış ve özel olarak çarpımsal modüllerin sonlu üretilmiş olma durumları incelenmiştir. Son olarak çarpımsal modüllerin alt modüllerinin radikalleri karakterize edilerek bu kısım tamamlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Çarpımsal modüller, halka teorisi, modül teorisi, maximal alt modül, asal alt modül, radikal.

MULTIPLICATION MODULES

Neslihan SÜZEN

Department of Mathematic

MSc. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Multiplication modules which was introduced by Mehdi in 1974, is a structure in module theory. However, in 1988, defined in a different way by Barnard. Since then, this definition has been considered.

In this study, firstly ring and module theory were described for research in multiplication modules in commutative ring. In the next part, initially, definition and basic properties of multiplication module over commutative ring were given. Furthermore, some necessary and sufficient conditions for a module to be multiplication were given. Then, whether some results on prime and maximal ideals also hold for prime and maximal submodules of multiplication modules were investigated and particularly finitely generated multiplication modules were examined. Finally, in this part, radical of submodules of multiplication modules was characterized.

Keywords: Multiplication modules, ring theory, module theory, maximal submodules, prime submodules, radical.

1.1 Literatür Özeti

Çarpımsal modüller Mehdi tarafından 1974 yılında tanımlanan bir yapıdır. Mehdi bir modülün çarpımsal alt modüllerinin çarpımsal olması ile açıklamıştır [1].

1981 yılında Barnard çarpımsal modülleri Mehdi 'den farklı bir yol ile tanımlamıştır [2]. Çarpımsal modüller ile ilgili yapılan çalışmaların çoğunda bu tanım dikkate alınmıştır [3],[4],[5],[8],[9]. Barnard çalışmasında halkalar için bilinen Nakayama Lemma'daki sonlu üretilmişlik şartı yerine çarpımsal modül olma şartını getirerek yeniden ispat yapmıştır.

1988 yılında El-Bast ve Smith verilen bu tanıma bağlı kalarak çarpımsal modüller ile ilgili temel teoremleri ifade ederek ispatlamışlardır [3]. Bu çalışmada El-Bast ve Smith değişmeli ve birimli halkalar üzerindeki modüllerin çarpımsal olması için gerek ve yeter koşulları vermişlerdir. Özellikle bu modüllerin sonlu üretilmiş veya devirli olma durumlarını araştırmışlardır. Makalede ayrıca çarpımsal modüllerin asal alt modülleri ile ilgili de temel teoremler ve ispatları verilmiştir.

Yine 1988 yılında Smith çarpımsal modüllerin temel teoremlerini farklı ispatlarını vermiştir [4]. Ayrıca Smith bu çalışmasında değişmeli bir halkanın idealleri ve çarpımsal modüllerin alt modülleri arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

Ali, 2008 yılında yayınladığı makalede bir idealin radikali için bilinen karakterizasyona benzer bir karakterizasyonu sonlu üretilmiş çarpımsal bir modülün alt modülünün M-radikali için yapmıştır [5].

Elbette çalışma alanları bu kadarla sınırlı değildir. Çarpımsal modüllerin idempotent ve nilpotent alt modülleri, projektif ve flat modüller ile birleştirilmesi gibi daha nice konularda çalışmalar yapılmıştır fakat bu çalışmada bu konuları incelemeyeceğimiz için bunların ayrıntılarına burada değinmeyeceğiz.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez, modül teorisi alanında çalışan veya çalışmaya başlayan herkesin yararlanması amacıyla hazırlanmıştır. Bu amaçla öncelikle temel halkalar teorisi kısaca anlatılacak ve modül teorisinin temel kavramları verilecektir. Daha sonra ise çarpımsal modüller ayrıntılı bir şekilde incelenecektir. Bu çalışmada çarpımsal modüllerin alt modülleri ile halkanın idealleri arasındaki benzerlikleri incelemeyi amaçlıyoruz. Halkalar teorisindeki bazı temel teoremleri çarpımsal modüller için vermeye çalışacağız.

1.3 Hipotez

Birimli ve değişmeli bir halkanın idealleri ile çarpımsal modüllerin alt modülleri arasında benzerlikler vardır. Halkalar için Cohen Teoremi ve Nakayama Lemma gibi bazı temel teoremler, birimli ve değişmeli bir halkada çarpımsal modüller için de sağlanır. Ayrıca modül teorisinde bazı teoremlerde modüllerin sonlu üretilmiş olma şartı yerine çarpımsal modül olma şartı getirildiğinde teorem halen sağlandığı gösterilebilir.

BÖLÜM 2

HALKALAR ve MODÜLLER

Bu bölümde bir sonraki bölümde kullanılmak amacıyla bazı kavramlar tanıtılacaktır.

2.1 Ön Bilgiler

Tanım 2.1 S bir küme ve $\leq$, S üzerinde bir bağıntı olmak üzere $(S, \leq)$ sistemi

- i) Her $a \in S$ için $a \leq a$ (yansıma özelliği)
- ii) $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$ (ters simetri özelliği)
- iii) $a \leq b$ ve $b \leq c$ iken $a \leq c$ (geçişme özelliği)

özelliklerini sağlıyor ise S 'ye **sıralı küme** denir. Eğer $(S, \leq)$ sıralı kümesinde her $a, b \in S$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$ ise bu sıralı kümeye **tam sıralı** denir [6].

Tanım 2.2 Sıralı bir kümede bir elemanın kendinden kesin büyük başka bir eleman yoksa bu elemana **maximal eleman** denir [6].

Tanım 2.3 Sıralı bir kümenin tam sıralı bir alt kümesine **zincir** denir [6].

Lemma 2.1 (Zorn Lemma) Boştan farklı bir S sıralı kümesinin, her zincirinin S de bir üst sınırı varsa, S sıralı kümesinin en az bir maximal elemanı vardır [6].

2.2 Halkalar

Tanım 2.4 R boş olmayan bir küme olsun. R üzerindeki $(+)$ ve $(\cdot)$ ikili işlemleri için, aşağıdaki özellikleri sağlayan $(R, +, \cdot)$ sıralı üçlüsüne **halka** denir.

- i) $(R, +)$ abelyan bir grup,
- ii) Her $a, b, c \in R$ için, $(a.b).c = a.(b.c)$ (birleşme özelliği),
- iii) Her $a, b, c \in R$ için, $a.(b+c) = a.b + a.c$ ve $(a+b).c = a.c + b.c$ (çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği)

Ek olarak ;

- Her $a, b \in R$ için $a.b = b.a$ ise R 'ye **değişmeli halka**,
- Her $a \in R$ için $1_R.a = a.1_R = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ elemanı varsa, R 'ye **birimli halka** denir [6].

Buradan itibaren $a.b = ab$ yazılacaktır ve halkalarımız birimli ve değişmeli olacaktır.

Teorem 2.1 $(R, +, .)$ bir halka olsun. Öyleyse aşağıdakiler sağlanır.

- i) Her $a \in R$ için $a.0_R = 0_R.a = 0_R$ dir.
- ii) Her $a, b \in R$ için $a.(-b) = -ab = (-a)b$ dir.
- iii) Her $a, b \in R$ için $(-a).(-b) = ab$ dir.
- iv) Her $a, b, c \in R$ için $a(b-c) = ab - ac$ ve $(b-c)a = ba - ca$ dir [6].

Tanım 2.5 Halka sadece 0_R dan ibaret ise yani $0_R = 1_R$ ise halkaya **trivial halka** denir [6].

Tanım 2.6 R bir halka ve $a \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olacak biçimde bir $0 \neq b \in R$ varsa, a elemanına halkanın **sıfır böleni** denir [6].

Tanım 2.7 R bir halka ve $0_R \neq a \in R$ olsun. $ab = 1_R$ olacak şekilde $b \in R$ varsa, a elemanına **terslenebilir veya birimsel eleman** denir [6].

Tanım 2.8 R birimli ve değişmeli bir halka ve $1_R \neq 0_R$ olsun. Eğer R 'nin 0_R dan başka sıfır böleni yoksa, R 'ye bir **tamlık bölgesi** denir [6].

Tanım 2.9 Birimli ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanının tersi varsa halkaya **cisim** denir [6].

Tanım 2.10 Bir R halkasında $a \in R$ için, $a^2 = a$ ise a elemanına **idempotent eleman** denir [6].

Tanım 2.11 R bir halka $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun.

1. Her $a, b \in I$ için $a - b \in I$ ve

2. Her $a \in I$ ve her $r \in R$ için $ra \in I$

ise I 'ya R 'nin bir **ideali** denir.

$0 = \{0_R\}$ ve R 'nin kendisi her zaman bir ideal olduğundan, trivial olmayan her halkanın en az iki ideali vardır. R 'nin kendinden farklı her idealine **has ideali** denir [6].

Örnek 2.1 Tamsayılar halkası $\mathbb{Z}$ 'in idealleri toplamsal alt gruplarından ibarettir [7].

Teorem 2.2 R bir halka ve $I_i (i \in \Lambda)$, R 'nin ideallerinin boştan farklı bir topluluğu olsun. O zaman $\bigcap_{i \in \Lambda} I_i$ de R 'nin bir idealidir [6].

Tanım 2.12 A, R halkasını bir alt kümesi olsun. R 'nin A 'yı kapsayan en küçük idealine A 'nın ürettiği ideal denir ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir. $A = \{a\}$ tek elemanlı bir küme ise $\langle A \rangle = \langle a \rangle$ ya a 'nın ürettiği **temel ideal** denir. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sonlu bir küme ise $\langle A \rangle$ 'ya **sonlu üretilmiş bir ideal** ve A 'ya da bir **üreteç sistemi** denir [6].

Tanım 2.13 Her ideali bir temel ideal olan halkaya **temel ideal halkası** denir [6].

Önerme 2.1 R halkasının bir cisim olması için gerek ve yeter koşul R 'nin 0 ve R 'den başka hiçbir idealinin olmamasıdır [6].

Tanım 2.14 R bir halka , I ve J iki ideal olsun.

$I + J = \{a + b : a \in I, b \in J\}$ 'ye I ve J ideallerinin toplamı ve

$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i : a_i \in I, b_i \in J \text{ ve } n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ 'ye I ve J ideallerinin çarpımı denir. IJ ve

$I + J$ de R 'nin idealleridir [6].

Tanım 2.15 R ve S iki halka olsun . Her $a, b \in R$ için

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ ve } f(ab) = f(a)f(b)$$

koşullarını sağlayan $f : R \rightarrow S$ fonksiyonuna bir **halka homomorfizması** denir.

Eğer bir homomorfizma 1-1 ise **monomorfizma** , örten ise **epimorfizma** ve hem 1-1 hem de örten ise **izomorfizma** adı verilir.

$$\text{Çekf} = \{r \in R : f(r) = 0\}$$

kümesine f 'nin **çekirdeği** denir. Çekf , R 'nin bir idealidir [6].

Tanım 2.16 I, R halkasının bir ideali olsun. $\pi : R \rightarrow R/I$, $\pi(r) = r + I$ ile tanımlı fonksiyon bir örten homomorfizmadır. π 'ye **doğal (natürel) homomorfizma** denir [7].

Teorem 2.3 (1.izomorfizma Teoremi) Eğer $f : R \rightarrow S$ bir örten halka homomorfizması ise $f : R/\text{Çekf} \cong f(R) = S$ dir [7].

Tanım 2.17 P, R halkasının bir has ideali olsun. $a, b \in R$ için, $ab \in P$ olması $a \in P$ veya $b \in P$ olmasını gerektiriyorsa P 'ye bir **asal ideal** denir [6].

Önerme 2.2 R bir halka olsun. $P \subset R$ idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul R/P bölüm halkasının bir tamlık bölgesi olmasıdır [8].

Teorem 2.4 (M.Isaac's Teorem) R bir halka olsun. R 'nin her asal ideali temel ideal ise R bir temel ideal halkasıdır [10].

Tanım 2.18 I, R halkasının bir ideali olsun.

$$\sqrt{I} = \{r \in R : \text{bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } r^n \in I\}$$

kümesi R halkasının I 'yı kapsayan bir idealidir. Bu ideale I idealinin **radikali** denir ve $\sqrt{I}$ ile gösterilir [6].

Önerme 2.3 I, R halkasının bir ideali olsun. I idealinin radikali R 'nin I 'yı kapsayan bütün P asal ideallerinin arakesitidir [6].

Teorem 2.5 I, R halkasını bir has ideali olsun. R 'nin $I \subseteq J \subseteq R$ koşulunu sağlayan her J ideali için , $I = J$ veya $J = R$ oluyorsa I 'ya R 'nin **maximal ideali** denir [6].

Teorem 2.6 R bir halka ve $M \neq R$ bir ideali olsun. M 'nin R 'nin bir maximal ideali olması için gerek ve yeter koşul her $x \in R - M$ için $M + \langle x \rangle = R$ olmasıdır [7].

Örnek 2.2 F bir cisim ise tek maximal ideali 0 dır [6].

Önerme 2.4 R bir halka olsun. $M \subset R$ idealinin maximal olması için gerek ve yeter koşul R/M bölüm halkasının bir cisim olmasıdır [6.]

Sonuç 2.1 Her maximal ideal asaldir [6].

Teorem 2.7 Sıfırdan farklı her R halkasında en az bir tane maximal ideal vardır [8].

Sonuç 2.2 J, R 'nin bir has ideali ise J 'yi kapsayan bir maximal ideal vardır [6].

Tanım 2.19 R halkasının tek bir tane maximal ideali varsa , R 'ye bir **lokal (yerel)** halka denir [6].

Örnek 2.3 F bir cisim ise tek maximal ideali 0 olduğundan, bir yerel halkadır [6].

Tanım 2.20 R halkasının tüm maximal ideallerinin arakesitine **Jacobson Radikali** denir ve $J(R)$ ile gösterilir [6].

Örnek 2.4 $J(\mathbb{Z}_{12}) = (\overline{6})$ dır.

Çözüm. $\mathbb{Z}_{12}$ nin maximal idealleri

$$I = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \text{ ve } J = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$$

dir. Böylece $J(\mathbb{Z}_{12}) = I \cap J = \{\overline{0}, \overline{6}\} = (\overline{6})$ elde edilir.

Önerme 2.5 $a \in R$ elemanın, Jacobson radikalinde olması için gerek ve yeter koşul her $r \in R$ için , $1 - ar \in R$ elemanın birimsel olmasıdır [8].

Tanım 2.21 I, R halkasını bir ideali olsun. $I \subseteq P$ asal ideali için, $I \subseteq P' \subset P$ olacak şekilde hiçbir P' asal ideali yoksa P 'ye I 'nin bir **minimal asal ideali** denir. Özel olarak, $I = 0$ idealinin minimal asallarına da R 'nin minimal asalları denir [6].

Örnek 2.5 Bir tamlık bölgesinin minimal asalları 0 dan ibarettir [6].

Teorem 2.8 $n \geq 2$ olmak üzere , $I_1, I_2, \dots, I_n$ ler R halkasının idealleri olsun. Her $i \neq j$ için $I_i + I_j = R$ ($i, j = 1, \dots, n$) ise

$$I_1 I_2 \dots I_n = I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n \text{ dir [6].}$$

Teorem 2.9 (Çin Kalan Teoremi) $n \geq 2$ olmak üzere, $I_1, I_2, \dots, I_n$ ler R halkasının idealleri olsun. Her $i \neq j$ için $I_i + I_j = R$ ($i, j = 1, \dots, n$) ise $r \in R$ olmak üzere,

i) $f(r) = (r + I_1, \dots, r + I_n)$ ile tanımlanan $f : R \rightarrow R/I_1 \times \dots \times R/I_n$ homomorfizması örtendir.

ii) $R/I_1 I_2 \dots I_n \cong R/I_1 \times \dots \times R/I_n$ izomorftur [6].

Tanım 2.22 I ve J , R 'nin iki ideali olsun. $(I : J) = \{r \in R : rJ \subseteq I\}$ kümesini tanımlayalım.

$$(0 : J) = \{r \in R : rJ = 0\}$$

le tanımlanan kümeye J 'nin **sıfırlayıcısı** denir ve $ann(J)$ ile gösterilir [8].

Tanım 2.23 A, R 'nin bir ideali olsun. $B \subseteq A$ koşulunu sağlayan R 'nin her B ideali için $B = AC$ olacak şekilde bir C ideali varsa A 'ya **çarpımsal ideal** denir [3].

Tanım 2.24 R bir tamlık bölgesi ve F, R 'nin kesir cismi olsun. I, R -modül F 'nin bir alt modülü olmak üzere $xI \subseteq R$ olacak şekilde $0 \neq x \in R$ varsa I 'ya R 'nin **kesirsel ideali** denir. I kesirsel ideal ise $IJ = R$ olacak şekilde J ideali varsa I 'ya **terslenebilir ideal** denir [6].

Örnek 2.6 $R = \mathbb{Z}$ ve $F = \mathbb{Q}$ için $I = \frac{1}{4}\mathbb{Z}$ ise $I, \mathbb{Z}$ 'in kesirsel ideali ve terslenebilir idealdir.

Tanım 2.25 R halkasını ideallerinin her artan

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$$

zinciri sonlu adımda durursa, R 'ye **Noetherian halka** denir [6].

Teorem 2.10 (Cohen Teoremi): R halkasının bütün asal idealleri sonlu üretilmiş olsun. Bu durumda R noetheriandır [6].

Tanım 2.26 R halkasını ideallerinin her azalan

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$$

zinciri sonlu adımda durursa R 'ye **Artinian Halka** denir [6].

2.3 Modüller

Tanım 2.27 $(M, +)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. M deki elemanlar ile R deki elemanların skaler çarpımı, $R \times M \rightarrow M$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyor ise, M 'ye R üzerinde bir **modül** veya kısaca **R - modül** denir [6].

- i. Her $r \in R$ ve her $m, m' \in M$ için, $r(m + m') = rm + rm'$
- ii. Her $r, r' \in R$ ve her $m \in M$ için, $(r + r')m = rm + rm'$
- iii. Her $r, r' \in R$ ve her $m \in M$ için, $(rr')m = r(r'm)$
- iv. Her $m \in M$ için, $1_R m = m$

Örnek 2.7

1. Her R halkasını, skaler çarpımı halkadaki çarpım olarak, kendisi üzerinde bir R - modül olarak düşünebiliriz.

2. I , R halkasının bir ideali ise I bir R - modüldür.

3. I , R halkasının bir ideali ise $R \times R/I \rightarrow R/I$ skaler çarpımı, $(r, s + I) \mapsto rs + I$ ile tanımlanarak R/I bir R - modül yapılabilir.

4. V , K cismi üzerinde bir vektör uzayı ise V 'yi bir K - modül olarak düşünebiliriz [6].

Tanım 2.28 R bir halka, M bir R - modül ve $N \subseteq M$ boş olmayan bir alt küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan N kümesine M 'nin bir **alt modülü** denir.

- i. Her $n_1, n_2 \in N$ için $n_1 + n_2 \in N$ ve
- ii. Her $r \in R$ ve $n \in N$ için $rn \in N$

M 'nin 0 ve M dışındaki alt modüllerine **has alt modülü** denir .

Önerme 2.6 M bir R - modül ve $N \subseteq M$ olsun. N 'nin bir alt modül olması için gerek ve yeter koşul her $r, r' \in R$ ve her $m, m' \in M$ için $rm + rm' \in N$ olmasıdır [6].

Örnek 2.8 R halkasını R - modül olarak düşündüğümüzde, alt modüller R 'nin idealleridir [6].

Tanım 2.29 M bir R -modül ve $X \subseteq M$ bir alt küme olsun. X alt kümesini kapsayan tüm alt modüllerin arakesitine X 'in ürettiği alt modül denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir.

$m \in M$ olmak üzere $\{m\}$ 'nin ürettiği alt modül

$$\langle m \rangle = Rm = \{rm : r \in R\}$$

'ye m ile üretilmiş alt modül denir. Eğer $M = \langle m \rangle$ ise M 'ye **devirli modül** denir.

$X \subseteq M$ sonlu bir alt küme olmak üzere $M = \langle X \rangle$ ise M 'ye **sonlu üretilmiş modül** denir. $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ sonlu küme ise

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i x_i : r_i \in R \text{ ve } x_i \in X, i=1, \dots, n \right\} = Rx_1 + Rx_2 + \dots + Rx_n \text{ dir.}$$

Önerme 2.7 R bir halka , I bir ideali ve M bir R -modül olsun.

$$IM = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i m_i : r_i \in I \text{ ve } m_i \in M, i=1, 2, \dots, n \text{ ve } n \in \mathbb{N} \right\}$$

ile gösterelim. Şu halde IM, M 'nin bir R - alt modülüdür ve aşağıdakiler sağlanır.

i) I ve J , R 'nin iki ideali ise $I(JM) = (IJ)M$ dir.

ii) $I = Ra$ bir temel ideal ise $IM = (Ra)M = \{am : m \in M\}$ dir [6].

Önerme 2.8 R bir halka, M bir R -modül, N bir alt modülü ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ bir alt küme olsun.

$$(N : X) = \{r \in R : rX \subseteq N\}$$

ile gösterelim. $(N : X)$, R 'nin bir idealidir [6].

Tanım 2.30 M bir R -modül ve N bir alt modül olsun. $(N : M) = \{r \in R : rM \subseteq N\}$

kümesini tanımlayalım.

$$(0 : M) = \{r \in R : rM = 0\}$$

ile tanımlanan kümeye de M 'nin **sıfırlayıcısı** denir ve $ann(M)$ ile gösterilir.

$(N : M) = ann(M/N)$ olduğu açıktır. Ayrıca $(N : M), R$ 'nin bir idealidir [6].

Tanım 2.31 M bir R -modül olsun.

$$Ann(M) = \{r \in R : rM = 0\} = 0$$

ise M modülüne **sadık (faithful) modül** denir [6].

Önerme 2.9 R bir halka , M bir R -modül, $\{N_i\}$ ler ve N alt modülleri ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ bir alt kümesi olsun.

1. $\left(\bigcap_{i \in I} N_i : X\right) = \bigcap_{i \in I} (N_i : X)$
2. $\left(N : \sum_{i \in I} N_i\right) = \bigcap_{i \in I} (N : N_i)$
3. N ve N' iki alt modül için $ann(N + N') = ann(N) \cap ann(N')$

sağlanır [6].

Önerme 2.10 M bir R -modül ve N , M 'nin alt modülü olsun. $R \times M/N \rightarrow M/N$ skaler çarpımını $(r, m + N) \mapsto rm + N$ ile tanımlayarak , M/N bölüm modülü bir R -modül yapılabilir [6].

Önerme 2.11 M bir R -modül ve I, R 'nin $I \subseteq ann(M)$ şartını sağlayan bir ideali olsun. O zaman $M, R/I$ bölüm halkası üzerinde bir modüldür [6].

Lemma 2.2 M bir R -modül ve I, R 'nin bir ideali olsun. Bu durumda,

- i. $I \subseteq ann(M/IM)$ dir.
- ii. $M/IM, R/I$ üzerinde bir modüldür [8].

Lemma 2.3 I ve J, R 'nin iki ideali ve M bir R -modül olsun. Eğer $I \subseteq J$ ise $IM \subseteq JM$ dir.

Lemma 2.4 (Genel Determinant Argümanı) M sonlu üretilmiş bir R -modül ve I, R 'nin bir ideali olmak üzere $M = IM$ olsun. Bu durumda $(1-a)M = 0$ olacak şekilde bir $a \in I$ vardır.

Önerme 2.12 I, R halkasının bir ideali ve M sonlu üretilmiş bir R -modül olsun. Bu durumda $\sqrt{\text{ann}(M/IM)} = \sqrt{\text{ann}(M) + I}$ sağlanır.

Önerme 2.13 I, R halkasının bir ideali ve M bir R -modül ve K, M 'nin bir alt modülü olsun. Bu durumda $I(K:M) = (IK:M)$ sağlanır.

Tanım 2.32 R bir halka, M ve N de R -modül olsun. $f: M \rightarrow N$ fonksiyonu, her $m, m' \in M$ için, $f(m+m') = f(m) + f(m')$ ve her $r \in R$ ve $m \in M$ için $f(rm) = rf(m)$ koşullarını sağlıyorsa f 'ye bir **modül homomorfizması** veya **R -homomorfizma** denir.

Bir homomorfizma bire bir ise **monomorfizma**, örten ise **epimorfizma** ve hem bire bir hem örten ise **izomorfizma** denir [6].

Teorem 2.11 R bir halka $f: M \rightarrow N$ bir R modül homomorfizması olsun.

- i) $f(0_M) = 0_N$ ve $f(-m) = -f(m)$ dir.
- ii) $\text{Çek} f = \{m \in M : f(m) = 0_N\}$ kümesi M 'nin bir alt modülüdür.
- iii) $f(M) = \text{Im } f$, N 'nin bir alt modülüdür.

Teorem 2.12 (Homomorfizma Teoremi) R bir halka $f: M \rightarrow N$ bir R modül homomorfizması olsun. $M/\text{Çek} f \cong \text{Im } f$ dir [8].

Önerme 2.14 M devirli bir R -modül ise $M \cong R/\text{ann}(M)$ dir [6].

Tanım 2.33 R bir halka ve M bir R -modül olsun. M 'nin alt modüllerinin her artan $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_n \subseteq \dots$

zinciri sonlu adımda durursa M 'ye **noetherian modül** denir [6].

Önerme 2.15 R bir halka ve M bir R - modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. M noetherian modüldür.
2. M 'nin her alt modülü sonlu üretilmiştir.
3. M 'nin alt modüllerinin ailesi $\emptyset \neq S$ nin bir maximal elemanı vardır [6].

Tanım 2.34 R bir halka ve M bir R - modül olsun. M 'nin alt modüllerinin her azalan $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_n \supseteq \dots$

zinciri sonlu bir adımda durursa M ye **Artinian Modül** denir [6].

Önerme 2.16 R bir halka ve M bir R - modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. M artinian modüldür.
2. M 'nin alt modüllerinin ailesi $\emptyset \neq S$ nin bir minimal elemanı vardır [6].

Teorem 2.13 M bir noetherian R -modül olsun. Bu durumda $R/\text{ann}(M)$ noetherian bir halkadır [6].

Teorem 2.14 Her artinian halka noetheriandır [6].

Teorem 2.15 I, R halkasının bir ideali ve M sonlu üretilmiş R -modül olsun. $x \in R$ için $xM \subseteq IM$ ise $(x^n + y)M = 0$ ($n \geq 0$) olacak şekilde $y \in I$ vardır [6].

Sonuç 2.3 I, R halkasının bir ideali ve M sonlu üretilmiş R -modül olsun. Bu durumda $M = IM$ ise $(1 + y)M = 0$ olacak şekilde $y \in I$ vardır [6].

Lemma 2.5 (Nakayama Lemma) M sonlu üretilmiş bir R -modül olsun. J, R 'nin jacobson radikali olmak üzere $I \subseteq J$ olsun. Bu durumda $M = IM$ olması $M = 0$ olmasını gerektirir [6].

Tanım 2.35 R bir tamlık bölgesi ve M bir R -modül olsun.

$$T(M) = \{m \in M : rm = 0 \text{ olacak şekilde bir } 0 \neq r \in R \text{ var}\}$$

alt modülüne M 'nin **burulmalı alt modülü** denir. $T(M)=M$ ise M 'ye **burulmalı modül**, $T(M)=0$ ise M 'ye **serbest burulmalı modül** denir [6].

R bir tamlık bölgesi değil ise $T(M)$ 'nin R -modül M 'nin bir alt modülü olduğunu söyleyemeyiz. Gerçekten $\mathbb{Z}_6$ -modül $\mathbb{Z}_6$ da $\bar{2}$ ve $\bar{3}$ elemanları burulmalı olmasına rağmen $\bar{2} + \bar{3} = \bar{5}$ elemanı burulmalı değildir.

DEĞİŞMELİ HALKALARDA ÇARPIMSAL MODÜLLER

Bu bölüm boyunca birimli ve değişmeli halka üzerinde çalışılacaktır.

3.1 Çarpımsal Modüller

Bu bölümde birimli ve değişmeli bir halka üzerinde çarpımsal modüller ele alınacak ve bir modülün çarpımsal olması için bazı gerek ve yeter koşullar verilecektir.

Tanım 3.1 M bir R -modül olsun. M 'nin her N alt modülü için $N = IM$ olacak şekilde R 'nin bir I ideali varsa, M 'ye **çarpımsal modül** denir [2].

Örnek 3.1 Çarpımsal idealler çarpımsal modüldür [3].

Örnek 3.2 Her halka kendi üzerinde bir çarpımsal modüldür.

Çünkü R halkasının her I ideali $I = IR$ biçiminde yazılabilir.

Örnek 3.3 R 'nin terslenebilir idealleri çarpımsal R -modüldür:

I, R 'nin terslenebilir bir ideali olsun. O zaman $IJ = R$ olacak şekilde bir J ideali vardır. N, I 'nin bir alt modülü olsun. Bu durumda,

$$NIJ = NJI = NR = N \text{ ve } N \subseteq I$$

olduğundan $NJ \subseteq IJ = R$ olur. Böylece NJ , R 'nin bir idealidir ve I çarpımsal R -modüldür.

Örnek 3.4 $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ -modül olarak çarpımsal değildir:

$\mathbb{Q}$ bir çarpımsal modül olsa idi, $\mathbb{Z} = \mathbb{Q}I$ olacak şekilde $\mathbb{Z}$ in bir I ideali bulunurdu.

- Eğer $I = 0$ ise $\mathbb{Z} = 0$ dir.
- Eğer $I \neq 0$ ise $\mathbb{Z} = \mathbb{Q}I = \mathbb{Q}$ dur.

Her iki durumda da çelişki elde edileceğinden $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ -modül olarak çarpımsal değildir.

Önerme 3.1 Devirli modüller çarpımsal modüldür [6].

İspat. M devirli R -modül ve N, M 'nin bir alt modülü olsun. Bir $m \in M$ için $M = Rm$ dir. $I = \{r \in R : rm \in N\}$ kümesi ele alınsın.

$$r_1, r_2 \in I \text{ için } (r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m \in N \quad \text{ve} \quad r \in R, a \in I \text{ için } (ra)m = r(am) \in N$$

olduğundan I, R 'nin bir idealidir. Şimdi $N = IM$ olduğunu gösterelim. Bir $m \in M$ için $M = Rm$ olduğundan her $n \in N$ için $n = rm$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Buradan $r \in I$ ve $n = rm \in IM$ dir. Öyleyse $N \subseteq IM$ bulunur. Diğer taraftan $IM \subseteq N$ olduğu açıktır. O halde eşitlik sağlanır. $\square$

Önerme 3.2 M çarpımsal bir R -modül ve N, M 'nin alt modülü olsun. O zaman

$$N = (N : M)M \tag{3.1}$$

sağlanır [6].

İspat. M çarpımsal modül olduğundan $N = AM$ olacak şekilde R 'nin bir A ideali vardır. $AM \subseteq N$ olduğundan $A \subseteq (N : M)$ dir. Buradan $N = AM \subseteq (N : M)M$ bulunur. Tersine, $r \in (N : M)$ olsun. O zaman $rM \subseteq N$ ve buradan $(N : M)M \subseteq N$ dir. Her iki kapsamadan (3.1) sağlanır. $\square$

Sonuç 3.1 M 'nin çarpımsal R -modül olması için gerek ve yeter koşul M 'nin her N alt modülü için $N = (N : M)M$ olmasıdır [6].

Önerme 3.3 M bir R -modül olsun. M 'nin çarpımsal olması için gerek ve yeter koşul her $m \in M$ için $Rm = IM$ olacak şekilde R 'nin bir I idealinin olmasıdır [3].

İspat. $(\Rightarrow)$: M çarpımsal modü olsun. Rm, M 'nin alt modülü olduğundan $Rm = IM$ olacak şekilde R 'nin bir I ideali vardır.

($\Leftarrow$): Her $m \in M$ için $Rm = IM$ olacak şekilde R 'nin bir I idealinin olduğunu varsayalım. N, M 'nin bir alt modülü olsun. $\forall x \in N$ için $Rx = I_x M$ olacak şekilde R 'nin bir I_x ideali vardır. $I = \sum I_x$ olsun. Böylece $IM = N$ olur. Gerçekten, $\forall x \in N$ için,

$$x \in Rx = I_x M \subseteq IM$$

olduğundan $N \subseteq IM$ dir. $IM = (\sum I_x)M \subseteq N$ olduğu açıktır. Buradan $IM = N$ ve böylece M çarpımsal modüldür. $\square$

Şimdi Nakayama Lemma 'da M 'nin sonlu üretilmiş olma şartı yerine çarpımsal modül olma şartını getirelim.

Önerme 3.4 M çarpımsal bir R -modül olsun. J, R 'nin Jacobson radikali ve $I \subseteq J$ olmak üzere $M = MI$ ise $M = 0$ dır [2].

İspat. $x \in M$ olsun. M bir çarpımsal modül olduğundan $Rx = AM$ olacak biçimde R 'nin bir A ideali vardır. O halde

$$Rx = AM = AIM = IAM = Ix$$

dir. Buradan $x = ax$ olacak biçimde bir $a \in I \subseteq J$ vardır. J , Jacobson radikali olduğundan $1 - a$ birimseldir. $(1 - a)x = 0$ ise $x = 0$ ve böylece $M = 0$ elde edilir. $\square$

Önerme 3.5 R lokal bir halka olsun. R 'nin her çarpımsal modülü devirlidir [2].

İspat. R bir lokal halka ve $\bar{M}$ maximal ideal olsun. $0 \neq M$ bir çarpımsal R -modül ise, $M \neq \bar{M}M$ dir. Eğer $M = \bar{M}M$ olsa idi, R 'nin tek maximal ideali olduğundan $J(R) = \bar{M}$ dir. $\bar{M} \subseteq J(R)$ ve $M = \bar{M}M$ ise Önerme 3.4 den $M = 0$ olur ve $0 \neq M$ seçimi ile çelişirdi. Bir $x \in M - \bar{M}M$ elemanı alalım. M çarpımsal modül olduğundan $Rx = IM$ olacak şekilde bir I ideali vardır ve $I \not\subseteq \bar{M}$ dir. Eğer $I \subseteq \bar{M}$ olsa idi, $IM \subseteq \bar{M}M$ ve $x \in Rx = IM$ olduğundan $x \in \bar{M}M$ olurdu. Böylece $x \in M - \bar{M}M$ seçimi ile çelişirdi.

Değişmeli halkada her has ideal bir maximal idealde kapsanır. $\bar{M}, R$ 'nin tek maximal ideali olduğundan, $I \not\subseteq \bar{M}$ olması $I = R$ olmasını gerektirir. Öyleyse $Rx = IM$ olduğundan $M = Rx$ dir ve M devirlidir. $\square$

Teorem 3.1 Çarpımsal modüllerin homomorf görüntüsü de çarpımsal modüldür [9].

İspat. M, R halkası üzerinde bir çarpımsal modül, $f: M \rightarrow M'$ bir R -modül homomorfizması ve $K = f(M)$ olsun. $k \in K$ olmak üzere $k = f(m)$ olacak biçimde $m \in M$ vardır. M bir çarpımsal modül olduğundan $Rm = IM$ olacak şekilde R 'nin bir I ideali mevcuttur. O halde,

$$Rk = Rf(m) = f(Rm) = f(IM) = If(M) = IK$$

ve böylece K çarpımsal R -modül olur. $\square$

Sonuç 3.2 M çarpımsal R -modül ve N, M 'nin alt modülü olsun. O zaman M/N de çarpımsal R -modüldür.

İspat. $f: M \rightarrow M/N$ örten bir R -modül homomorfizmasıdır. Teorem 3.1 den M/N de çarpımsal bir R -modüldür. $\square$

Tanım 3.2 M bir R -modül ve P, R 'nin maximal ideali olsun.

$$T_p(M) = \{m \in M : (1-p)m = 0 \text{ bazı } p \in P \text{ için}\}$$

kümesini tanımlayalım. $T_p(M), M$ 'nin alt modülüdür. Çünkü $m_1, m_2 \in T_p(M)$ için $(1-p_1)m_1 = 0$ ve $(1-p_2)m_2 = 0$ olacak şekilde $p_1, p_2 \in P$ vardır. $p = p_1 + p_2 - p_1p_2$ seçilirse ; $(1-p)(m_1 + m_2) = 0$ ve $m_1 + m_2 \in T_p(M)$ olur. $r \in R, m \in T_p(M)$ için $(1-p)(rm) = r(1-p)m = 0$ olduğundan $rm \in T_p(M)$ dir [3].

Tanım 3.3 M bir R -modül ve P, R 'nin bir maximal ideali olsun.

$$(1-p)M \subseteq Rm$$

olacak şekilde $p \in P$ ve $m \in M$ varsa M 'ye P - devirli (P - cyclic) denir [3].

Teorem 3.2 M bir R -modül olsun. M 'nin çarpımsal modül olması için gerek ve yeter koşul R 'nin her P maximal ideali için $T_p(M) = M$ veya M 'nin P -devirli olmasıdır [3].

İspat. $(\Rightarrow)$: M çarpımsal R -modül olduğunu kabul edelim. P, R 'nin bir maximal ideali olsun. $M = PM$ olduğunu varsayalım. $m \in M$ olsun. Önerme 3.3 den $Rm = AM$ olacak şekilde R 'nin bir A ideali vardır. Böylece

$$Rm = AM = APM = PAM = Pm$$

ve $\exists p \in P$ için $m = pm$ olur. Buradan $(1-p)m = 0$ ve $m \in T_p(M)$ elde edilir. $T_p(M) \subseteq M$ olduğu açıktır. O halde $T_p(M) = M$ olur. Şimdi $M \neq PM$ olduğunu varsayalım. $PM \subseteq M$ olduğundan $M \not\subseteq PM$ dir. En az bir $x \in M$ için $x \notin PM$ olur. M çarpımsal olduğundan $Rx = BM$ olacak şekilde R 'nin bir B ideali vardır. $B \not\subseteq P$ dir. Eğer $B \subseteq P$ olsa idi,

$$x \in Rx = BM \subseteq PM$$

ve $x \in PM$ olurdu. $x \notin PM$ seçimi ile çelişirdi. P, R 'nin bir maximal ideali olduğundan $1-q \in B$ olacak biçimde $q \in P$ vardır. Gerçekten $B \not\subseteq P$ olduğu için bir $a \in B (a \notin P)$ vardır. P maksimal ideal ise $P+(a) = R$ ve bir $q \in P$ için $q+ra=1$ dir. Buradan da $1-q=ra \in B$ dir. O halde $1-q \in B$ ise ,

$$(1-q)M \subseteq BM = Rx$$

ve böylece M, P -devirli olur.

$(\Leftarrow)$: R 'nin her P maximal ideali için $T_p(M) = M$ veya M 'nin P -devirli olduğunu kabul edelim. N, M 'nin alt modülü ve $I = (N : M)$ ideali olsun. (3.1) in sağlandığını gösterelim. $(N : M)$ 'nin tanımından $IM \subseteq N$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $y \in N$ olsun.

$$K = \{r \in R \mid ry \in IM\}$$

R 'nin bir idealidir. $K = R$ olduğunu gösterelim. $0 \in K$ olduğundan $K \neq \emptyset$ dir. $K \neq R$ olduğunu varsayalım. O zaman $K \subseteq Q$ olacak biçimde R 'nin bir Q maksimal ideali vardır. Eğer $M = T_Q(M)$ ise $(1-s)y=0$ olacak biçimde $s \in Q$ vardır ve böylece $1-s \in K \subseteq Q$ çelişkisi elde edilir. Hipotezden $M = T_Q(M)$ değil ise M , Q -devirlidir. $(1-t)M \subseteq Rz$ olacak şekilde $t \in Q$ ve $z \in M$ vardır. $(1-t)N$, Rz 'nin alt modülüdür ve R 'nin

$$J = \{r \in R : rz \in (1-t)N\}$$

ideali için $(1-t)N = Jz$ yazılabilir. Gerçekten de $Jz \subseteq (1-t)N$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $x \in (1-t)N$ olsun. $x = (1-t)s$ olacak biçimde $s \in N$ vardır. $(1-t)N$, Rz 'nin alt modülü olduğundan $x = az$ olacak biçimde $a \in R$ vardır.

$$x = az = (1-t)s \in (1-t)N$$

ve $a \in J$ olur. O halde $x = az \in Jz$ ve böylece $(1-t)N \subseteq Jz$ sağlanır. Öyleyse $(1-t)N = Jz$ dir. Dolayısıyla

$$(1-t)JM = J(1-t)M \subseteq Jz = (1-t)N \subseteq N$$

ise $J(1-t) \subseteq (N : M) = I$ dir. Buradan

$$(1-t)^2 y \in (1-t)^2 N = (1-t)(1-t)N = (1-t)Jz \subseteq Jz \subseteq IM$$

ve $(1-t)^2 y \in IM$ dir. Böylece $(1-t)^2 \in K \subseteq Q$ ve Q 'nun ideal olması ile çelişir. Öyleyse $K = R$ ve $y \in IM$ olur. Buradan $(N : M)M = N$ ve Sonuç 3.1 den M çarpımsal modüldür. $\square$

Sonuç 3.3 M bir R -modül ve bazı $m_\lambda \in M$ ($\lambda \in \Lambda$) için $M = \sum_{\lambda \in \Lambda} Rm_\lambda$ olsun. M 'nin çarpımsal modül olması için gerek ve yeter koşul $\forall \lambda \in \Lambda$ için $Rm_\lambda = I_\lambda M$ olacak şekilde R 'nin I_λ ($\lambda \in \Lambda$) ideallerinin var olmasıdır [3].

İspat. $(\Rightarrow)$: Gereklik M çarpımsal olduğundan açıktır.

($\Leftarrow$): $\forall \lambda \in \Lambda$ için $Rm_\lambda = I_\lambda M$ olacak biçimde R 'nin I_λ ($\lambda \in \Lambda$) ideallerinin var olduğunu kabul edelim. P , R 'nin bir maksimal ideali olsun. $\exists \mu \in \Lambda$ için $I_\mu \not\subseteq P$ olduğunu varsayalım. P maksimal ideal ise $R = I_\mu + P$ dir. Buradan $1_R - q \in I_\mu$ olacak şekilde $q \in P$ mevcuttur ve

$$(1_R - q)M \subseteq I_\mu M = Rm_\mu$$

dir. Böylece M , P -devirlidir. Şimdi $\forall \lambda \in \Lambda$ için $I_\lambda \subseteq P$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $I_\lambda M = Rm_\lambda \subseteq PM$ ve böylece

$$M = \sum_{\lambda \in \Lambda} Rm_\lambda \subseteq PM$$

dir. Buradan $PM = M$ dir. Herhangi bir $\lambda \in \Lambda$ için,

$$Rm_\lambda = I_\lambda M = I_\lambda PM = I_\lambda MP = Pm_\lambda$$

ve bir $p \in P$ için $(1 - p)m_\lambda = 0$ dir. Öyleyse $m_\lambda \in T_p(M)$ ve $M = T_p(M)$ elde edilir.

Teorem 3.2 den M çarpımsal modüldür. $\square$

Sonuç 3.4 I , R halkasının bir çarpımsal ideali ve M bir çarpımsal R -modül olsun. IM bir çarpımsal R -modüldür [3].

İspat. P , R 'nin bir maksimal ideali olsun. Eğer $I = T_p(I)$ veya $M = T_p(M)$ ise $IM = T_p(IM)$ dir. Çünkü, $T_p(I) = \{r \in I : (1 - p_1)r = 0 \text{ bazı } p_1 \in P \text{ için}\} = I$ veya

$$T_p(M) = \{m \in M : (1 - p_2)m = 0 \text{ bazı } p_2 \in P \text{ için}\} = M \text{ ise } p = p_1 + p_2 - p_1 p_2 \text{ seçilirse,}$$

$$(1 - p)x = (1 - p)r_1 m_1 + \dots + (1 - p)r_n m_n = 0$$

olur. Buradan

$$T_p(IM) = \left\{ x = \sum_{i=1}^n r_i m_i \in IM : (1 - p)x = 0 \text{ bazı } p \in P \text{ için} \right\} = IM$$

dir. Şimdi $M \neq T_p(M)$ ve $I \neq T_p(I)$ olsun. Teorem 3.2 den $(1-q_1)I \subseteq Ra$ ve $(1-q_2)I \subseteq Rm$ olacak şekilde $q_1, q_2 \in P$ ve $a \in I, m \in M$ vardır. $q = q_1 + q_2 - q_1q_2$ için $(1-q)IM \subseteq Rma$ elde edilir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}(1-q)IM &= (1-(q_1 + q_2 - q_1q_2))IM = (1-q_1)IM - q_2(1-q_1)IM \\ &= (1-q_1)(1-q_2)IM = (1-q_1)I(1-q_2)M \subseteq R(am)\end{aligned}$$

ve buradan da IM , P -devirlidir. Teorem 3.2 den IM çarpımsal modüldür. $\square$

Sonuç 3.5 M bir R -modül olsun. $J(R) = J$, R 'nin Jacobson radikali olmak üzere,

i) M çarpımsal R -modüldür.

ii) M/JM çarpımsal R -modüldür.

iii) R 'nin her P maksimal ideali için M/PM devirlidir.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) gerçekleşir. Eğer M sonlu üretilmiş ise (iii) $\Rightarrow$ (i) de sağlanır [3].

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii): JM , M 'nin alt modülü olduğundan Sonuç 3.2 den $f: M \rightarrow M/JM$ örten homomorfizmasında M çarpımsal ise M/JM çarpımsaldır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $R' = R/J$ ve $M' = M/JM$ olsun. P , R 'nin bir maksimal ideali ve $P' = P/J$ olsun. Bu durumda P' , R' 'nin bir maksimal ideali olur. Teorem 3.2 den $T_p(M') = M'$ veya M', P' -devirli olur. Eğer $T_p(M') = M'$ ise, $M' = P'M'$ dir yani

$$M = PM + JM = PM$$

dir. Böylece $M/PM = 0$ bulunur. Eğer M', P' -devirli ise,

$$(1-p)M \subseteq Rm + JM \subseteq Rm + PM$$

dir ($p \in P, m \in M$) ve buradan da $M = Rm + PM$ olur. Her iki durumda da M/PM devirlidir.

(iii) $\Rightarrow$ (i): M 'nin sonlu üretilmiş olduğunu kabul edelim. Q , R 'nin bir maksimal ideali olsun. R 'nin her P maksimal ideali için M/P_M devirli olduğundan $M/Q_M = \langle Rx + QM \rangle$ olacak biçimde $x \in M$ vardır. Buradan $M = Rx + QM$ ve

$$M/Rx = Q(M/Rx)$$

olur. M/Rx sonlu üretilmiş olduğundan, Genel Determinant Argümanı 'ndan $(1-q)M/Rx = 0$ olacak biçimde $q \in Q$ vardır. Böylece $(1-q)M \subseteq Rx$ ve M , Q -devirli olur. Teorem 3.2 den M çarpımsal modüldür. $\square$

Önerme 3.6 $I_\alpha (\alpha \in \Lambda)$, R 'nin boş olmayan idelleri topluluğu ve M bir R -modül olsun. O zaman

$$\left(\sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha\right)M = \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha M\right) \quad (3.2)$$

dir [3].

İspat. Her $\alpha \in \Lambda$ için $I_\alpha M \subseteq \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha\right)M$ olduğundan

$$\left(\sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha M\right) \subseteq \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha\right)M$$

dir. Tersine, $a_\alpha \in I_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ olmak üzere $\left(\sum_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha\right)m \in \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha\right)M$ için ,

$$\left(\sum_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha\right)m = \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha m\right) \in \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha M\right)$$

olduğundan $\left(\sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha\right)M \subseteq \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha M\right)$ dir. Her iki kapsamadan (3.2) sağlanır. $\square$

Burada $\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha\right)M = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (I_\alpha M)$ ifadesi genel olarak doğru değildir. Ancak çarpımsal modüller için bazı şartlar altında ifade gerçekleşir.

Teorem 3.3 M sadık bir R -modül ve $I_\alpha (\alpha \in \Lambda)$, R 'nin boş olmayan herhangi bir idealler topluluğu olsun. M 'nin çarpımsal olması için gerek ve yeter koşul

$$i) \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (I_{\alpha} M) = \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} I_{\alpha} \right) M \quad (3.3)$$

ve

ii) M 'nin herhangi bir N alt modülü için $N \subset AM$ koşulunu sağlayan R 'nin A ideali için, $B \subset A$ ve $N \subseteq BM$ şartlarını sağlayan bir B idealinin olmasıdır [3].

İspat. i) M 'nin bir çarpımsal modül olduğunu kabul edelim. $I_{\alpha} (\alpha \in \Lambda)$, R 'nin herhangi bir idealler topluluğu ve $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} I_{\alpha} = I$ olsun. Her $\alpha \in \Lambda$ için

$$\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} I_{\alpha} \right) M \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (I_{\alpha} M) \text{ olduğundan } IM \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (I_{\alpha} M) \text{ dir. Diğer taraftan } x \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (I_{\alpha} M)$$

ve

$$K = \{r \in R : rx \in IM\}$$

olsun. $K = R$ olduğunu gösterelim. $K \neq R$ olduğunu kabul edelim. O zaman $K \subseteq P$ olacak biçimde R 'nin bir P maksimal ideali vardır. $x \notin T_p(M)$ dir. Eğer $x \in T_p(M)$ olsaydı, $\exists p \in P$ için $(1-p)x = 0$ ve $1-p \in K \subseteq P$ olurdu ve çelişki elde edilirdi. $x \notin T_p(M)$ ise Teorem 3.2 den M, P - devirli olur. Yani $(1-p)M \subseteq Rm$ olacak şekilde $p \in P, m \in M$ elemanları vardır. O zaman $x \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (I_{\alpha} M)$ ise

$$(1-p)x \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (I_{\alpha} (1-p)M) \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (I_{\alpha} M)$$

dir. Her $\alpha \in \Lambda$ için $(1-p)x = a_{\alpha}m$ olacak şekilde $a_{\alpha} \in I_{\alpha}$ vardır. Bir $\beta \in \Lambda$ seçelim $\forall \alpha \in \Lambda$ için, $a_{\alpha}m = a_{\beta}m$ ve böylece $(a_{\beta} - a_{\alpha})m = 0$ dir. O halde,

$$(1-p)(a_{\beta} - a_{\alpha})M = (a_{\beta} - a_{\alpha})(1-p)M \subseteq (a_{\beta} - a_{\alpha})Rm = 0$$

ve buradan da $(1-p)(a_{\beta} - a_{\alpha}) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak

$$(1-p)a_{\beta} = (1-p)a_{\alpha} \in I_{\alpha}$$

ve böylece $(1-p)a_{\beta} \in I_{\alpha}$ dir. Öyleyse $(1-p)a_{\beta} \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} I_{\alpha} = I$ bulunur. O halde

$$(1-p)^2 x = (1-p)a_\alpha m = (1-p)a_\beta m \in IM$$

ve $(1-p)^2 x \in IM$ dir. K 'nin tanımından $(1-p)^2 \in K \subseteq Q$ bulunur ve çelişki elde edilir. Sonuç olarak $K = R$ dir yani $x \in IM$ dir.

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} (I_\alpha M) \subseteq IM = \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha \right) M$$

elde edilir. Her iki kapsamadan (3.3) sağlanır.

ii) N, M 'nin bir alt modülü ve A, R 'nin $N \subset AM$ koşulunu sağlayan bir ideali olsun. $N = CM$ olacak biçimde R 'nin bir C ideali vardır. $B = A \cap C$ olsun. $B \subset A$ olduğu açıktır. i) den

$$N \subseteq AM \cap CM = (A \cap C)M = BM$$

dir. Sonuç olarak $N \subseteq BM$ dir. Tersine, i) ve ii) nin sağlandığını varsayalım. N, M 'nin bir alt modülü olsun.

$$S = \{I \mid I, R \text{ 'nin ideali ve } N \subseteq IM\}$$

kümesini tanımlayalım. $R \in S$ olduğu açıktır. $I_\alpha (\alpha \in \Lambda)$, S 'deki ideallerin boştan farklı bir topluluğu olsun. i) den $A = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha \in S$ minimal eleman ve $N \subseteq AM$ dir.

$N \neq AM$ olduğunu varsayalım. ii) den $B \subset A$ ve $N \subseteq BM$ olacak şekilde B ideali vardır. Öyleyse $B \in S$ olur ve bu durum A 'nın minimal olması ile çelişir. O halde $N = AM$ olur ve buradan da M çarpımsal modüldür. $\square$

Önerme 3.7 M bir R -modül ve $R' = R / \text{ann}(M)$ olsun. M 'nin çarpımsal R -modül olması için gerek ve yeter koşul M 'nin sadık çarpımsal $R' = R / \text{ann}(M)$ -modül olmasıdır [6].

İspat. $(\Rightarrow)$: $I + \text{ann}(M) / \text{ann}(M)$, $R' = R / \text{ann}(M)$ nin ideali olmak üzere, M 'nin her N alt modülü için

$$N = \left(\frac{I + \text{ann}(M)}{\text{ann}(M)} \right) M = IM$$

dir. Böylece M çarpımsal $R' = \frac{R}{\text{ann}(M)}$ -modüldür. Şimdi, M 'nin sadık

$R' = \frac{R}{\text{ann}(M)}$ - modül olduğunu gösterelim. Gerçekten,

$$\text{ann}(M) = \{ r + \text{ann}(M) \in R' \mid (r + \text{ann}(M))M = O_M \}$$

ve $(r + \text{ann}(M))M = rM = O_M$ olduğundan $r \in \text{ann}(M)$ dir. Öyleyse $\text{ann}(M) = 0_{R'}$

dir. O halde M sadık çarpımsal $R' = \frac{R}{\text{ann}(M)}$ -modüldür.

($\Leftarrow$): M sadık çarpımsal R' - modül olsun. M 'nin her N alt modülü için,

$N = \left(\frac{A}{\text{ann}(M)} \right) M = AM$ olacak şekilde $\text{ann}(M) \subseteq A$ koşulunu sağlayan R' 'nün bir

$\frac{A}{\text{ann}(M)}$ ideali vardır. Böylece M çarpımsal R - modüldür. $\square$

Önerme 3.7 ile sadık çarpımsal modüller ile ilgili sonuçlar sadık olmayan çarpımsal modüllere genişletilebilir.

Şimdi Teorem 3.3 ü sadık olmayan çarpımsal modüllere genişletelim.

Sonuç 3.6 M bir R -modül ve $I_\alpha (\alpha \in \Lambda)$, R 'nin boştan farklı herhangi bir idealler topluluğu olsun. M 'nin çarpımsal olması için gerek ve yeter koşul

$$i) \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (I_\alpha M) = \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} [I_\alpha + \text{ann}(M)] \right) M \quad (3.4)$$

ve

ii) M 'nin herhangi bir N altmodülü için $N \subset AM$ koşulunu sağlayan R 'nin A ideali için, $B \subset A$ ve $N \subseteq BM$ şartlarını sağlayan bir B idealinin olmasıdır [3].

İspat. M 'nin çarpımsal bir R -modül olduğunu varsayalım. $R' = R/ann(M)$ olmak üzere M sadık çarpımsal $R' = R/ann(M)$ -modül dür. $\{I_\alpha + ann(M)\}$,

$R' = R/ann(M)$ nin idealleri olmak üzere Teorem 3.3 den

$$\bigcap [(I_\alpha + ann(M))]M = \left(\bigcap [I_\alpha + ann(M)] \right)M$$

bulunur. Buradan da Teorem 3.3 ün ispatına benzer şekilde (3.4) ve ii) sağlanır. $\square$

Tanım 3.4 M bir R -modül olsun. N_α , M 'nin alt modüllerinin boştan farklı bir topluluğu ve $\bigcap N_\alpha = 0$ ($\alpha \in \Lambda$) olsun. Λ^* , Λ 'nın sonlu alt kümesi olmak üzere $\bigcap_{\alpha \in \Lambda^*} N_\alpha = 0$ ise M 'ye **sonlu eş üretilmiş (finitely cogenerated)** denir [3].

R halkası R -modül olarak sonlu eş üretilmiş ise R halkasına sonlu eş üretilmiş denir.

Sonuç 3.7 M sadık çarpımsal R -modül olsun. O zaman M 'nin sonlu eş üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul R 'nin sonlu eş üretilmiş olmasıdır [3].

İspat. $(\Rightarrow)$: M 'nin sonlu eş üretilmiş olduğunu varsayalım. I_α ($\alpha \in \Lambda$) R 'nin ideallerinin boştan farklı bir topluluğu ve $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha = 0$ olsun. Teorem 3.3 den

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} (I_\alpha M) = 0 \text{ dir. } M \text{ sonlu eş üretilmiş olduğundan } \bigcap_{\alpha \in \Delta} (I_\alpha M) = 0 \text{ olacak şekilde } \Delta$$

nin bir Δ alt kümesi vardır. Teorem 3.3 den $\left(\bigcap_{\alpha \in \Delta} I_\alpha \right)M = 0$ ve M sadık R -modül olduğundan $\bigcap_{\alpha \in \Delta} I_\alpha \in ann(M) = 0$ ve $\bigcap_{\alpha \in \Delta} I_\alpha = 0$ dır. Buradan da R sonlu eş üretilmiştir.

$(\Leftarrow)$: R 'nin sonlu eş üretilmiş olduğunu varsayalım. N_α ($\alpha \in \Lambda$) , M 'nin alt modüllerinin boştan farklı bir topluluğu ve $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} N_\alpha = 0$ olsun. $\forall \alpha \in \Lambda$ için $N_\alpha = A_\alpha M$ olacak şekilde R 'nin A_α idealleri vardır. (3.3) den,

$$\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right)M = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha M) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} N_\alpha$$

ve M sadık modül ise $\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right) = 0$ olur. Hipotezden $\left(\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha\right) = 0$ olacak şekilde Δ nın sonlu Δ alt kümesi vardır. (3.3) den ,

$$\bigcap_{\alpha \in \Delta} N_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \Delta} (A_\alpha M) = \left(\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha\right) M = 0$$

bulunur. Böylece M sonlu eş üretilmiş olur. $\square$

3.2 Çarpımsal Modüllerin Bazı Özellikleri

Teorem 3.4 M bir çarpımsal R -modül ve X , R -modül olsun. $\phi: M \rightarrow X \oplus X$ bir epimorfizma ise $X = 0$ dır [3].

İspat. $\varphi(x, y) = x$ ile tanımlanan $\varphi: X \oplus X \rightarrow X$ dönüşümü ve $\psi(x, y) = y$ ile tanımlanan $\psi: X \oplus X \rightarrow X$ dönüşümü birer epimorfizmadır. ϕ, φ, ψ birer epimorfizma olduğundan $\varphi \circ \phi: M \rightarrow X$ ve $\psi \circ \phi: M \rightarrow X$ de epimorfizmadır. $N_1 = \text{Çek}(\varphi \circ \phi)$ ve $N_2 = \text{Çek}(\psi \circ \phi)$ olsun.

$$M/\text{Çek}(\varphi \circ \phi) = M/N_1 \cong X \quad \text{ve} \quad M/\text{Çek}(\psi \circ \phi) = M/N_2 \cong X \quad \text{olduğundan}$$

$$M/N_1 \cong M/N_2 \cong X$$

dir. Burada $f: M/N_1 \rightarrow M/N_2$ izomorfizmasını $m, m' \in M$ olmak üzere

$$f(m + N_1) = m' + N_2 \quad \text{olarak tanımlayalım. } a \in \text{ann}(M/N_1) \text{ olsun. Bu durumda}$$

$$a(M/N_1) = \bar{0} \quad \text{ve} \quad af^{-1}(M/N_2) = f^{-1}(a(M/N_1)) = \bar{0}$$

olur. Buradan da $a(M/N_2) = \bar{0}$ ve dolayısıyla $a \in \text{ann}(M/N_2)$ elde edilir. Benzer

şekilde $b \in \text{ann}(M/N_2)$ için,

$$b(M/N_2) = bf(M/N_1) = f(b(M/N_1)) = \bar{0} \quad \text{ve} \quad b(M/N_1) = \bar{0}$$

bulunur. Böylece $b \in \text{ann}(M/N_1)$ ve

$$\left(\text{ann}\left(\frac{M}{N_1}\right) \right) M = \left(\text{ann}\left(\frac{M}{N_2}\right) \right) M$$

dir. M çarpımsal bir modül olduğu için (3.1) den

$$N_1 = (\text{ann}(M/N_1))M = (\text{ann}(M/N_2))M = N_2$$

olur. Böylece $N_1 = N_2$ bulunur. $x \in X$ olsun. ϕ örten olduğundan $\phi(m) = (0, x)$ olacak biçimde $m \in M$ vardır. $\varphi(0, x) = 0$ olduğundan $\varphi \circ \phi(m) = 0$ ve $m \in \text{Çek}(\varphi \circ \phi) = \text{Çek}(\psi \circ \phi)$ elde edilir. $\psi \circ \phi(m) = (0, x) = x = 0$ ve dolayısıyla $X = 0$ dir. $\square$

$M_\alpha (\alpha \in \Lambda)$, R -modüllerin boştan farklı bir topluluğu olsun. $\alpha \in \Lambda$ için $\bar{M}_\alpha$, $M = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ 'nin $\bigoplus_{\alpha \neq \beta} M_\beta$ alt modüllerini gösterebilir. Bu durumda $M = M_\alpha \oplus \bar{M}_\alpha$ dir.

Teorem 3.5 $M_\alpha (\alpha \in \Lambda)$, R -modüllerin boştan farklı bir topluluğu olsun. $M = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ 'nın çarpımsal R -modül olması için gerek ve yeter koşul

i) Her $\alpha \in \Lambda$ için M_α çarpımsal R -modül olması ve

ii) Her $\alpha \in \Lambda$ için $A_\alpha M_\alpha = M_\alpha$ ve $A_\alpha \bar{M}_\alpha = 0$ olacak şekilde R 'nin bir A_α idealinin var olmasıdır [3].

İspat. ($\Rightarrow$): i) M 'nin çarpımsal R -modül olduğunu kabul edelim. $f : M_\alpha \oplus \bar{M}_\alpha \rightarrow M_\alpha$ örten homomorfizmadır ve $\text{Çek } f = \bar{M}_\alpha$ dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \text{Çek } f &= \{(m, \bar{m}) \in M_\alpha \oplus \bar{M}_\alpha : m = 0\} \\ &= \{(0, \bar{m}) \in M_\alpha \oplus \bar{M}_\alpha : m = 0\} = \bar{M}_\alpha \end{aligned}$$

dir. Buradan da $f : M_\alpha \oplus \bar{M}_\alpha / \bar{M}_\alpha \cong M_\alpha$ ve dolayısıyla

$$M_\alpha \oplus \bar{M}_\alpha / \bar{M}_\alpha = M / \bar{M}_\alpha \cong M_\alpha \quad (3.5)$$

dir. M çarpımsal olduğundan homomorf görüntüsünde çarpımsal olacağından $M / \bar{M}_\alpha$ çarpımsaldır ve (3.5) izomorfizmasından M_α da çarpımsaldır.

ii) $\alpha \in \Lambda$ olsun. M çarpımsal ise $M_\alpha = A_\alpha M$ olacak şekilde A_α idealleri vardır.

$$M_\alpha = A_\alpha M = A_\alpha M_\alpha \oplus A_\alpha \bar{M}_\alpha \quad \text{ve} \quad M_\alpha \cap \bar{M}_\alpha = 0 \quad \text{olduğundan}$$

$$A_\alpha \bar{M}_\alpha \subseteq M_\alpha \cap \bar{M}_\alpha = 0 \quad \text{ve} \quad A_\alpha M_\alpha = M_\alpha \quad \text{dır.}$$

($\Leftarrow$): i) ve ii) sağlansın ve P, R 'nin maximal ideali olsun. Eğer $T_P(M_\alpha) = M_\alpha$ ($\alpha \in \Lambda$) ise

$$T_P(M_\alpha) = \{m_\alpha \in M_\alpha : (1-p)m_\alpha = 0 \text{ bazı } p \in P \text{ için}\} = M_\alpha$$

olduğundan $T_P(M) = M$ dir. $\exists \beta \in \Lambda$ için $T_P(M_\beta) \neq M_\beta$ olsun. M_β çarpımsal olduğundan M_β , P -devirlidir. $(1-p)M_\beta \subseteq Rm$ olacak biçimde $p \in P, m \in M$ elemanları vardır. $A_\beta M_\beta = M_\beta$ ve $A_\beta \bar{M}_\beta = 0$ ise,

$$M_\beta = A_\beta M_\beta \oplus A_\beta \bar{M}_\beta = A_\beta (M_\beta \oplus \bar{M}_\beta) = A_\beta M$$

dir. Buradan da

$$(1-p)A_\beta M = (1-p)M_\beta \subseteq Rm$$

olur. $A_\beta \subseteq P$ ise, $M_\beta = M_\beta A_\beta \subseteq P M_\beta \subseteq M_\beta$ böylece $P M_\beta = M_\beta$ dir. Buradan $T_P(M_\beta) = M_\beta$ ve çelişki elde edilir. Öyleyse $A_\beta \not\subseteq P$ dir. O halde $(1-p)A_\beta \not\subseteq P$ bulunur. P maximal olduğundan $(1-p)A_\beta + P = R$ dir. Buradan

$$(1-p)A_\beta M + PM = RM$$

elde edilir. $(1-p)A_\beta M = (1-p)M_\beta \subseteq Rm$ olduğundan

$$RM = (1-p)A_p M + PM \subseteq Rm + PM \quad \text{ve} \quad M - PM \subseteq Rm$$

bulunur. Dolayısıyla $(1-p)M \subseteq Rm$ yani M, P - devirlidir. Teorem 3.2 den M çarpımsal R -modüldür. $\square$

Teorem 3.5 sonlu üretilmiş modüller için farklı şekilde yazılabilir. X sonlu üretilmiş bir R -modül ve I, R 'nin $X = IX$ koşulunu sağlayan bir ideali ise Genel Determinant Argümanı'ndan $(1-a)X = 0$ olacak şekilde $a \in I$ mevcuttur. Dolayısıyla aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 3.8 $M_\alpha (\alpha \in \Lambda)$, sonlu üretilmiş R -modüllerin boştan farklı bir topluluğu ve $M = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ olsun. M 'nin çarpımsal R -modül olması için gerek ve yeter koşul M_α 'nın çarpımsal modül ve $\text{ann}(M_\alpha) + \text{ann}(\overline{M_\alpha}) = R$ olmasıdır [3].

İspat. $(\Rightarrow)$: M çarpımsal R -modül ve $\forall \alpha \in I$ için M_α sonlu üretilmiş bir R -modül olsun. Teorem 3.5 ten $I_\alpha M_\alpha = M_\alpha$ olacak şekilde R 'nin I_α idealleri vardır. Genel Determinant Argümanı 'ndan $\forall \alpha \in \Lambda$ için $(1-a_\alpha)M_\alpha = 0$ olacak şekilde $a_\alpha \in I_\alpha$ elemanları vardır. Buradan da $(1-a_\alpha) \in \text{ann}(M_\alpha)$ dir. Teorem 3.5 ten $I_\alpha \overline{M_\alpha} = 0$ ve $I_\alpha \subseteq \text{ann}(\overline{M_\alpha})$ bulunur. Böylece $\forall \alpha \in \Lambda$ için $a_\alpha \in \text{ann}(\overline{M_\alpha})$ dir. $1 = (1-a_\alpha) + a_\alpha \in \text{ann}(M_\alpha) + \text{ann}(\overline{M_\alpha})$ ve $R = \text{ann}(M_\alpha) + \text{ann}(\overline{M_\alpha})$ olur.

$(\Leftarrow)$: M_α çarpımsal R -modül ve $\text{ann}(M_\alpha) + \text{ann}(\overline{M_\alpha}) = R$ olsun. $M_\alpha \text{ann}(M_\alpha) + M_\alpha \text{ann}(\overline{M_\alpha}) = M_\alpha$ ve $M_\alpha \text{ann}(M_\alpha) = 0$ ise,

$$M_\alpha \text{ann}(\overline{M_\alpha}) = M_\alpha$$

dir. $\overline{M_\alpha} \text{ann}(\overline{M_\alpha}) = 0$ olduğundan Teorem 3.5 ten M çarpımsal R -modüldür. $\square$

Sonuç 3.9 Özel olarak, indis kümesi sonlu olsun. $M_i (1 \leq i \leq n)$ sonlu üretilmiş R -modüllerin sonlu topluluğu ise $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ nin çarpımsal olması için

gerek ve yeter koşul M_i ($1 \leq i \neq j \leq n$) 'nin çarpımsal modül ve $ann(M_i) + ann(M_j) = R$ ($1 \leq i \neq j \leq n$) olmasıdır [3].

İspat. ($1 \leq i \neq j \leq n$) için , $ann(\bar{M}_i) = ann(\bigoplus_{i \neq j} M_j) = \bigcap_{i \neq j} ann(M_j)$ dir. Sonuç 3.8 den

$$ann(M_i) + ann(\bar{M}_i) = ann(M_i) + \bigcap_{i \neq j} ann(M_j) = R \subseteq ann(M_i) + ann(M_j)$$

ve böylece $ann(M_i) + ann(M_j) = R$ ($1 \leq i \neq j \leq n$) elde edilir. $\square$

Sonuç 3.10 M_i ($1 \leq i \leq n$) devirli R -modüllerin sonlu topluluğu ve $M = M_1 \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ olsun. $M = M_1 \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ nin çarpımsal olması için gerek ve yeter koşul M 'nin devirli olmasıdır [3].

İspat. ($\Rightarrow$): M çarpımsal modül olsun. ($1 \leq i \leq n$) için $A_i = ann(M_i)$ olmak üzere Sonuç 3.9 dan $A_i + A_j = R$ ($1 \leq i \neq j \leq n$) dir. $\forall i$ için $M_i \cong R / ann(M_i)$ dir. Gerçekten $g : R \rightarrow M_i$ dönüşümünü $r \in R$ ve $m \in M$ için $r \mapsto rm$ örten homomorfizma olarak tanımlarsak,

$$\check{C}ekg = \{r \in R : g(r) = rx = 0\}$$

olduğundan $r \in ann(M_i)$ ve dolayısıyla $\check{C}ekg = ann(M_i)$ dir. Buradan da $M_i \cong R / ann(M_i)$ bulunur. Çin Kalan Teoremi 'nden

$$M \cong R / A_1 \oplus \dots \oplus R / A_n \cong R / A_1 \cap \dots \cap A_n$$

ve böylece M devirli modüldür.

($\Leftarrow$): Devirli modüller çarpımsal olduğundan sağlanır. $\square$

3.2.1 Çarpımsal Modüllerin Maximal Alt Modülleri

Tanım 3.5 K , M 'nin has bir alt modülü olsun. $K \subseteq N \subseteq M$ olması ya $K = N$ ya da $N = M$ olmasını gerektiriyor ise K 'ya M 'nin **maximal alt modülü** denir.

Teorem 3.6 M , sıfırdan farklı çarpımsal bir R -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i) M 'nin her has modülü M 'nin bir maximal alt modülünde kapsanır.
- ii) K 'nın bir maximal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $K = PM \neq M$ olacak şekilde R 'nin bir P maximal idealinin olmasıdır [3].

İspat. i) Sıfırdan farklı her çarpımsal modülün bir maximal alt modül içerdiğini gösterelim. M , sıfırdan farklı çarpımsal bir R -modül ve $0 \neq m \in M$ olsun.

$$I = \{r \in R : rm = 0\}$$

kümesi R 'nin bir has idealidir. O zaman $I \subseteq P$ olacak şekilde R 'nin bir P maximal ideali vardır. $M = PM$ ise $Rm = Pm$ ve buradan $(1-p)m = 0$ olacak şekilde bir $p \in P$ elemanı vardır. I 'nin tanımından $(1-p) \in I \subseteq P$ dir ve bu P 'nin has ideal olması ile çelişir. Öyleyse $M \neq PM$ dir. M/PM , R/P cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. M çarpımsal R -modül olduğundan M/PM de R/P cismi üzerinde çarpımsal olur. R/P cisim olduğundan M/PM 'nin alt modülleri $\bar{0}$ ve kendisidir. Dolayısıyla PM , M 'nin maximal alt modülüdür. Böylece sıfırdan farklı her çarpımsal modül maximal altmodül içerir. N , M 'nin has alt modülü olsun. M çarpımsal ise $M/N \neq 0$ de çarpımsaldır. Sıfırdan farklı her çarpımsal modül bir maximal alt modül içerdiğinden dolayı $M/N \neq 0$ nin de bir maximal alt modülü vardır. K/N , M/N içinde maximal alt modül olsun. $N \subseteq K+N \subset M$ ve $K+N$, M 'nin maximal alt modülü olur. Dolayısıyla M 'nin N has modülü M 'nin $K+N$ maximal alt modülünde kapsanır .

- ii) P , R 'nin maximal ideali ve $M \neq PM$ ise i) nin ispatından PM , M 'nin maximal alt modülüdür. Tersine K , M 'nin maximal alt modülü ise $Q = \text{ann}\left(\frac{M}{K}\right)$, R 'nin maximal idealidir. Eğer Q , R 'nin maximal ideali olmazsa $Q \subset P$ olacak şekilde R 'nin P maximal ideali vardır. En az bir $p \in P$ için $p \notin Q$ vardır.

$$QM = \text{ann}\left(\frac{M}{K}\right)M = K$$

olduğundan $pM \not\subseteq K$ dir. K maximal olduğundan $pM + K = M$ ve böylece

$$M = pM + QM = (Rp + Q)M \subseteq PM$$

dir. Her $m \in M$ için $(1-p)m = 0$ olacak şekilde $p \in P$ vardır. Özel olarak $x \in M - K$ alalım. $x \notin K$ ve K maximal olduğundan $Rx + K = M$ dir. Buradan

$$(1-p)Rx + (1-p)K = (1-p)M$$

olur. $(1-p)M = (1-p)K \subseteq K$ ise ,

$$(1-p) \in (K : M) = Q \subset P$$

dir ve çelişki elde edilir. Öyleyse Q maximal ideal ve $K = \text{ann}(M/K)M = QM$ dir. $\square$

Tanım 3.6 M bir R -modül olsun. M 'nin **radikali**, eğer M 'nin maximal alt modülleri mevcut ise bu maximal alt modüllerinin kesişimi, diğer durumda M olarak tanımlanır ve $\text{rad } M$ ile gösterilir.

Sonuç 3.11 M çarpımsal R -modül olsun. N, M 'nin $M = N + \text{rad } M$ olacak şekilde bir alt modülü ise $M = N$ dir [3].

İspat. $M \neq N$ olsun. Teorem 3.6 i) den $N \subseteq K$ olacak şekilde bir K maximal alt modülü vardır. $\text{rad } M$ maximal alt modüllerin kesişimi olduğundan $\text{rad } M \subseteq K$ ve $N \subseteq K$ olduğu için $M = N + \text{rad } M \subseteq K$ dir. Dolayısıyla $M = K$ ve buradan da çelişki elde edilir. $M = N$ bulunur. $\square$

M bir R -modül ve $\tilde{M}$, R 'nin maximal ideallerinin topluluğu olsun.

$$P_1(M) = \{P \in \tilde{M} : M \neq PM\} \quad \text{ve} \quad P_2(M) = \{P \in \tilde{M} : \text{ann}(M) \subseteq P\}$$

olarak tanımlansın. $P_1(M) \subseteq P_2(M)$ dir. Gerçekten, $P \in P_1(M)$ ise $M \neq PM$ dir.

$P \in \tilde{M}$ ve $\text{ann}(M) \not\subseteq P$ olsun. P maximal ideal olduğundan $R = \text{ann}(M) + P$ dir.

Buradan $P \subseteq \text{ann}(M) + P = R$ ve $PM + \text{ann}(M)M = RM$ olur. $\text{ann}(M)M = 0$

olduğundan $PM = M$ ve çelişki elde edilir. $\text{ann}(M) \subseteq P$ bulunur. Eğer M sıfırdan farklı çarpımsal R -modül ise Teorem 3.6 ii) den $P_1(M) \neq 0$ dir.

Şimdi,

$$J_1(M) = \bigcap \{P : P \in P_1(M)\} \quad \text{ve} \quad J_2(M) = \bigcap \{P : P \in P_2(M)\}$$

kümelerini tanımlayalım. J, R 'nin Jacobson radikali olmak üzere,

$$J \subseteq J_2(M) \subseteq J_1(M)$$

olduğu açıktır. M sadık çarpımsal R -modül ise $J = J_2(M)$ dir [3].

Teorem 3.7 M çarpımsal R -modül olsun. O zaman $\text{rad } M = J_1(M)M = J_2(M)M$ dir [3].

İspat. $M \neq 0$ olsun. Teorem 3.6 ve Sonuç 3.6 dan

$$\begin{aligned} \text{rad } M &= \bigcap \{PM : P \in P_1(M)\} \\ &= \bigcap \{[P + \text{ann}(M)]M : P \in P_1(M)\} \\ &= \left[\bigcap \{P + \text{ann}(M) : P \in P_1(M)\} \right] M = J_1(M)M \supseteq J_2(M)M \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca Sonuç 3.6 dan ,

$$J_2(M)M = \bigcap \{PM : P \in P_2(M)\}$$

dir. $Q \in P_2(M)$ için eğer $M = QM$ ise , $\text{rad } M \subseteq M = QM$ olur. $M \neq QM$ ise, $Q \in P_1(M)$ ve $\text{rad } M \subseteq QM$ dir. Böylece her iki durumda da $\text{rad } M \subseteq J_2(M)M$ olur. Sonuç olarak $\text{rad } M = J_1(M)M = J_2(M)M$ elde edilir. $\square$

Teorem 3.8 M çarpımsal R -modül olsun. M 'nin sonlu sayıda maximal alt modülü var ise M devirlidir [3].

İspat. K_i ler M nin sonlu sayıda maximal alt modülleri olsun. M çarpımsal R -modül ise Sonuç 3.5 ten M/K_i devirlidir. Çin Kalan Teoremi 'nden

$$M/RadM = M/\bigcap_{i=1}^n K_i = M/K_1 \oplus \dots \oplus M/K_n$$

ve buradan $M/radM$ devirli modüllerin sonlu direk toplamıdır. $M/radM$ çarpımsal R -modül olduğundan ve Sonuç 3.10 dan $M/radM$ devirlidir. Buradan $M = Rm + radM$ olacak şekilde $m \in M$ vardır. Öyleyse Sonuç 3.11 den $M = Rm$ ve M devirlidir. $\square$

Sonuç 3.12 Artinian çarpımsal modüller devirlidir [3].

İspat. M bir artinian çarpımsal R -modül ve S , M 'nin maximal alt modüllerinin sonlu kesişimi olan bir alt modül topluluğu olsun. Hipotezden M artinian ise S 'nin minimal elemanı vardır. Teorem 3.6 dan bu minimal eleman $P_i (1 \leq i \leq n)$ maximal idealleri için $P_1M \cap P_2M \cap \dots \cap P_nM$ biçimindedir ve $M \neq P_iM (1 \leq i \leq n)$ dir. K, M 'nin maximal alt modülü olsun. Teorem 3.6 dan $K = PM$ olacak şekilde P maximal ideali vardır. $P_1M \cap P_2M \cap \dots \cap P_nM$ minimal eleman olduğundan

$$P_1M \cap P_2M \cap \dots \cap P_nM = P_1M \cap P_2M \cap \dots \cap P_nM \cap PM$$

dir. Böylece

$$(P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n)M \subseteq PM$$

bulunur.

$$A = (P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n)$$

ise $AM \subseteq PM$ dir. Buradan $A \subseteq P$ elde edilir. Eğer $A \not\subseteq P$ olsa idi, $R = A + P$ ve

$$M = AM + PM \subseteq PM = K$$

olur ve $M \subseteq K$ 'dan çelişki elde edilirdi. $A \subseteq P$ ise bir i ($1 \leq i \leq n$) için $P_i \subseteq P$ olur ve P_i maximal olduğundan $P_i = P$ dir. $P_i M = PM = K$ ve $P_i M = K$ bulunur. Sonuç olarak M 'nin sonlu sayıda maximal alt modülü vardır. Teorem 3.8 den M devirlidir. $\square$

Teorem 3.9 M çarpımsal R -modül olsun. R noetherian (artinian) ise M de noetherian (artinian) dır [6].

İspat. $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$

M 'nin alt modüllerinin artan bir zinciri olsun. Bu durumda

$$(N_1 : M) \subseteq (N_2 : M) \subseteq \dots$$

R 'nin ideallerinin artan bir zinciri olur. R noetherian olduğundan $(N_k : M) = (N_{k+1} : M)$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. M çarpımsal R -modül olduğundan

$$N_k = (N_k : M)M = (N_{k+1} : M)M = N_{k+1}$$

ve M de noetherian olur. $\square$

Eğer R bir artinian halka ise o zaman herhangi bir çarpımsal R - modül de artinian olduğundan ve Sonuç 3.12 den bu R - modül devirlidir. M , R halkası üzerinde bir artinian çarpımsal R -modül olsun. Sonuç 3.12 den devirlidir ve $R/\text{ann}(M) \cong M$

olduğundan $R/\text{ann}(M)$ modülü de artiniandır. Özel olarak, Eğer R 'nin sadık artinian çarpımsal modülü varsa R artiniandır.

Bununla birlikte her artinian halka noetheriandır. Eğer $R/\text{ann}(M)$ halkası artinian ise aynı zamanda noetheriandır. Buradan $R/\text{ann}(M) \cong M$ artiniandır ve M noetheriandır. Artinian çarpımsal modüller aynı zamanda noetherian olur ve sonlu uzunluğa sahip olurlar.

3.2.2 Çarpımsal Modüllerin Asal Alt Modülleri

Tanım 3.7 R halka, M R -modül ve N, M 'nin bir alt modülü olsun. $\forall r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in N$ olması $m \in N$ veya $r \in (N:M)$ olmasını gerektiriyorsa N 'ye M 'nin **asal alt modülü** denir.

Örnek 3.5 R 'nin her asal ideali, R -modül R 'nin asal alt modülüdür:

P, R 'nin asal ideali olsun. $r, a \in R$ için $ra \in P$ ve $a \notin P$ olsun. P, R 'nin asal ideali olduğundan $r \in P \subseteq (P:R)$ olur. O halde P, R -modül R 'nin asal alt modülüdür. Tersine R -modül R 'nin bütün asal alt modülleri, R 'nin asal idealleridir. K, R 'nin asal alt modülü ve $a, b \in R$ için $ab \in K$, $a \notin K$ olsun. K asal olduğundan $b \in (K:R)$ ve

$$bR \subseteq (K:R)R = K$$

dir. Dolayısıyla $b \in K$ ve K, R 'nin asal ideali olur.

Örnek 3.6 $T(M) \neq M$ ise, o zaman $T(M), M$ 'nin bir asal alt modülüdür:

$r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in T(M)$ ve $r \notin (T(M):M)$ olsun. Bu durumda, $a(rm) = 0$ olacak şekilde $a \in R - \{0\}$ vardır ve $rM \not\subseteq T(M)$ dir. $0 \neq a(rM) = (ar)M$ olduğundan $r \neq 0$ olur. O halde,

$$(ar)m = a(rm) = 0$$

ve $ar \in R - \{0\}$ dır. Böylece $m \in T(M)$ bulunur.

Teorem 3.10 M bir R -modül ve K, M 'nin alt modül olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i) K 'nin asal olması için gerek ve yeter koşul $P = (K:M)$ idealinin R 'nin asal ideali ve M/K 'nin serbest burulmalı R/P -modül olmasıdır.
- ii) $(K:M), R$ 'nin maximal ideali ise K, M 'nin asal alt modülüdür.

İspat. i) K, M 'nin asal alt modül olsun. $x, y \in R$ için, $xy \in (K : M)$ ve $y \notin (K : M)$ olsun. Buradan $xyM \subseteq K$ yani $\forall m \in M$ için $xym \in K$ dir. R değişmeli olduğundan $xym = y(xm) \in K$ dir. K asal ve $y \notin (K : M)$ olduğundan $\forall m \in M$ için $xm \in K$ ve buradan $x \in (K : M)$ dir. Dolayısıyla $(K : M)$, R 'nin asal idealidir. $m + K \in T(M/K)$ olsun. O zaman $\exists r + P \in (R/P) - P$ için

$$(r + P)(m + K) = K$$

olur. Buradan da $rm + K = K$ ve $r \notin P$ olur. K, M 'nin asal alt modülü olduğundan $m \in K$ olur ve böylece M/K , serbest burulmalı R/P - modül olur. Tersine, $P = (K : M)$ ideali R 'nin asal ideali ve M/K 'nin serbest burulmalı R/P -modül olduğunu varsayalım. $r \in R$ ve $m \in K$ için $rm \in K$ ve $r \notin (K : M)$ olsun. O zaman $(r + P)(m + K) = K$ yani $m + K \in T(M/K)$ olur. M/K serbest burulmalı olduğundan $m \in K$ ve böylece K, M 'nin asal alt modülü olur.

ii) $(K : M)$, R 'nin maximal ideali olsun. $r \in R$ ve $m \in K$ için $rm \in K$ ve $r \notin (K : M)$ olsun. $P = (K : M)$, R 'nin maximal ideali ise R/P cisim ve $M/K, R/P$ -vektör uzayı olur. $rm \in K$ ise $(r + P)(m + K) = K$ ve buradan

$$(r + P)^{-1}(r + P)(m + K) = K$$

olur. O halde $m \in K$ ve böylece K, M 'nin bir asal alt modülü olur. $\square$

Önerme 3.8 M bir R -modül olsun. M 'nin her maximal alt modülü asaldır.

İspat. N, M 'nin maximal alt modülü olsun. $x \in M$ ve $r \in R$ için $rx \in N$ ve $x \notin N$ olsun. N maximal alt modül olduğundan $N + Rx = M$ ve buradan

$$rM = r(N + Rx) \subseteq rN + Rxr \subseteq N$$

elde edilir. Buradan da $r \in (N : M)$ dir. Dolayısıyla N asal alt modüldür. $\square$

Lemma 3.1 P, R 'nin asal ideali ve M sadık çarpımsal bir R -modül olsun. $a \in R, x \in M$ olmak üzere $ax \in PM$ olsun. O zaman $a \in P$ veya $x \in PM$ dir [3].

İspat. $ax \in PM$ ve $a \notin P$ olduğunu varsayalım.

$$K = \{r \in R : rx \in PM\}$$

R 'nin ideali olsun. $K \neq R$ olduğunu kabul edelim. O zaman $K \subseteq Q$ olacak biçimde R 'nin bir Q maximal ideali vardır. $x \notin T_Q(M)$ dir. Eğer $x \in T_Q(M)$ olsa idi, $(1-q)x=0$ ve $(1-q) \in K \subseteq Q$ olurdu. Teorem 3.2 den M, Q -devirlidir. Yani $(1-q)M \subseteq Rm$ olacak şekilde $m \in M, q \in Q$ vardır. Özel olarak, $\exists s \in R, p \in P$ için $(1-q)x = sm$ ve $(1-q)ax = pm$ dir. Buradan $asm = pm$ ve $(as-p)m = 0$ dir. $as-p \in \text{ann}(m)$ elde edilir. $(1-q)M \subseteq Rm$ olduğundan

$$((1-q)\text{ann}(M))M \subseteq R(\text{ann}(M))m = 0$$

dir. $((1-q)\text{ann}(M))M = 0$ olması M sadık olduğundan $(1-q)\text{ann}(M) = 0$ olmasını gerektirir ve böylece $(1-q)(as-p) = 0$ elde edilir. Buradan $(1-q)as = (1-q)p \in P$ olur. Fakat $P \subseteq K \subseteq Q$ ve buradan $s \in P$ ve

$$(1-q)x = sm \in PM$$

olur. Böylece $(1-q) \in K \subseteq Q$ dur ve bu Q 'nun ideal olması ile çelişir. O halde $K = R$ ve $x \in PM$ elde edilir. $\square$

Sonuç 3.13 M sadık çarpımsal R -modül ve P, R 'nin $M \neq PM$ olacak şekilde asal ideali olsun. PM asal alt modüldür [3].

İspat. $a \in R, x \in M$ olsun. $ax \in PM$ ve $a \notin (PM : M)$ olduğunu varsayalım. $P \subseteq (PM : M)$ olduğundan $a \notin P$ dir. Lemma 3.1 den $x \in PM$ olur. Böylece PM asal alt modüldür. $\square$

Sonuç 3.14 M çarpımsal R -modül ve N, M 'nin alt modülü olsun. Aşağıdakiler denktir:

i) N asaldir.

ii) $\text{ann}\left(\frac{M}{N}\right)$ asal idealdir.

iii) $\text{ann}(M) \subseteq P$ olacak şekilde bazı P asal idealleri için $N = PM$ dir [6].

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii): $ab \in (N:M)$ ve $b \notin (N:M)$ olsun. $ab \in (N:M)$ olduğundan $abM \subseteq N$ ve $b \notin (N:M)$ den $bM \not\subseteq N$ dir. $t \in N$ için $abt \in N$ ve $bt \notin N$ dir. Buradan da $a \in (N:M)$ olur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $(N:M) = P$ asal ideal olsun. M çarpımsal olduğundan Önerme 3.2 den

$$PM = (N:M)M = N$$

dir. Şimdi $\text{ann}(M) \subseteq P$ olduğunu gösterelim. $x \in \text{ann}(M)$ ise $xM = 0 \subseteq N$ dir ve buradan $x \in (N:M)$ bulunur.

(iii) $\Rightarrow$ (i): M sadık çarpımsal $\frac{R}{\text{ann}(M)}$ -modüldür. $\frac{P}{\text{ann}(M)}$, $\frac{R}{\text{ann}(M)}$ 'nin asal ideali ve

$$\left(\frac{P}{\text{ann}(M)}\right)M = PM = N$$

dir. Sonuç 3.13 den PM asal alt modüldür. Böylece N asal alt modüldür. $\square$

M çarpımsal R -modül olsun. $\text{ann}(M) \neq R$ olduğundan $\text{ann}(M) \subseteq P$ olacak şekilde R 'nin P maximal ideali vardır. Teorem 3.6 dan $M \neq PM$ dir. Sonuç 3.14 ten PM , M 'nin asal alt modülüdür.

Sonuç 3.15 A, R 'nin bir ideali, P, R 'nin asal ideali ve M çarpımsal R -modül olsun. $\text{ann}(M) \subseteq P$ olmak üzere $AM \subseteq PM$ ise $A \subseteq P$ veya $M = PM$ dir [6].

İspat. $AM \subseteq PM$ ve $A \not\subseteq P$ olsun. $a \in A - P$ olacak şekilde $a \in R$ elemanı vardır. $a + \text{ann}(M) \notin P + \text{ann}(M)$ ve $\forall m \in M$ için

$$(a + \text{ann}(M))m = am \in AM \subseteq PM = \left(\frac{P}{\text{ann}(M)}\right)M$$

olur. M sadık bir $R/\text{ann}(M)$ - modül olduğundan Lemma 3.1 den

$$m \in \left(\frac{P}{\text{ann}(M)} \right) M = PM$$

dir. Buradan da $M = PM$ bulunur. $\square$

Önerme 3.9 M çarpımsal R -modül ve P, M 'nin asal alt modülü olsun. M 'nin N_1, N_2 alt modülleri için $N_1 \cap N_2 \subseteq P$ ise $N_1 \subseteq P$ veya $N_2 \subseteq P$ dir.

İspat. $N_1 \cap N_2 \subseteq P$ ise $(N_1 \cap N_2 : M) \subseteq (P : M)$ dir ve buradan

$$(N_1 : M) \cap (N_2 : M) = (N_1 \cap N_2 : M) \subseteq (P : M)$$

olur. O zaman

$$(N_1 : M)(N_2 : M) \subseteq (N_1 : M) \cap (N_2 : M) \subseteq (P : M)$$

dir. $(P : M), R$ 'nin asal ideali olduğundan $(N_1 : M) \subseteq (P : M)$ veya

$(N_2 : M) \subseteq (P : M)$ olur. M çarpımsal R -modül olduğundan Sonuç 3.1 den

$$N_1 = (N_1 : M)M \subseteq (P : M)M = P$$

veya

$$N_2 = (N_2 : M)M \subseteq (P : M)M = P$$

bulunur. $\square$

Bu önerme çarpımsal olmayan modüller için her zaman doğru değildir.

Örnek 3.7 $R = \mathbb{Z}$ olsun. $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ çarpımsal olmayan bir modüldür. $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 'nin $N_1 = \mathbb{Z} \times \{0\}$ ve $N_2 = \{0\} \times \mathbb{Z}$ alt modüllerini alalım. Bu durumda $N_1 \cap N_2 = (0, 0)$ dir.

Burada $P = (0, 0)$ asal ancak $N_1 \not\subseteq P$ ve $N_2 \not\subseteq P$ dir.

Teorem 3.11 M sadık çarpımsal R -modül ve M 'nin her asal alt modülü devirli olsun.

Ra , R 'nin maximal ideali olmak üzere, $a \in R - \{0\}$ bir sıfır bölen ise M 'nin her alt modülü de devirlidir [10].

İspat. M 'nin devirli olduğunu göstermemiz yeterlidir. Çünkü M sadık modül olduğundan $\text{ann}(M)=0$ dır. $R/\text{ann}(M) \cong M$ izomorfizmasından $R \cong M$ dir.

Hipotezden M 'nin her asal alt modülü devirlidir. Buradan R 'nin her asal ideali temel idealdir. M.Isaac's Teoremi 'nden R 'nin her ideali temel idealdir. Buradan da M 'nin her alt modülü devirlidir. $Ra = P$, R 'nin bir maximal ideali ise PM , M 'nin bir maximal alt modülüdür. M çarpımsal modül olduğundan $PM = Rx$ olacak şekilde $x \in M$ vardır. $y \in M - PM$ olsun. PM maximal alt modül olduğundan

$$M = PM + Ry = Rx + Ry$$

dir. $P = (Rx : M)$ olduğu için $ay = bx$ olacak şekilde $b \in R$ vardır ve $b \notin P$ dir. $b \in P$ olsa idi, bazı $r \in R$ için $b = ra$ olurdu. Buradan

$$bx = rax = ay \text{ ve } (a(rx - y)) = 0$$

bulunur. $a \in R$, sıfırdan farklı bir sıfır bölen olduğundan $rx - y = 0$ ve $rx = y \in PM$. Böylece çelişki elde edilirdi. $b \notin P$ ve P maximal ideal olduğundan $Ra + Rb = R$ dir. Buradan da $\alpha \in R, \beta \in R$ için $\alpha a + \beta b = 1$ olur.

$$x = a(\alpha x + \beta y)$$

dir. Gerçekten $ay = bx$ olduğundan $\beta ay = \beta bx$ ise $\beta ay - \beta bx = 0$ ve buradan

$$\beta ay - \beta bx = x - x$$

dir. Öyleyse $\beta ay + x - \beta bx = x$ ve $\beta ay + x(1 - \beta b) = x$ elde edilir. Dolayısıyla $\beta ay + \alpha ax = x$ ve böylece $x = a(\alpha x + \beta y)$ bulunur. Benzer şekilde $y = b(\alpha x + \beta y)$ olur. Böylece ,

$$M = R(\alpha x + \beta y)$$

dir. Sonuç olarak M devirlidir. $\square$

Tanım 3.8 M bir R -modül ve N, M 'nin alt modülü olsun. M 'nin her $0 \neq K$ alt modülü için $N \cap K \neq 0$ oluyorsa N 'ye **asli alt modül (essential submodule)** denir. R -modül R 'nin bir asli alt modülüne **asli ideal (essential ideal)** denir [3].

Tanım 3.9 M bir R -modül ve N, M 'nin alt modülü olsun. M 'nin her $0 \neq P$ asal alt modülü için $N \cap P \neq 0$ oluyorsa N 'ye **yarı asli alt modül (semi – essential submodule)** denir [11].

Örnek 3.8 R 'nin her asli alt modülü yarı asli alt modülüdür. Ters her zaman doğru değildir. $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}_{12}$ nin $(\bar{6})$ alt modülü yarı aslidir. Ancak asli değildir.

Teorem 3.12 M sadık çarpımsal R - modül ve N, M 'nin alt modülü olsun. N 'nin asli alt modül olması için gerek ve yeter koşul $N = EM$ olacak şekilde R 'nin bir E asli idealinin olmasıdır [3].

İspat. ($\Rightarrow$): N, M 'nin bir asli alt modülü olsun. M çarpımsal modül olduğundan $N = AM$ olacak şekilde R 'nin bir A ideali vardır. R 'nin bazı B idealleri için $A \cap B = 0$ olsun. Teorem 3.3 den

$$N \cap (BM) = AM \cap BM = (A \cap B)M = 0$$

ve N asli olduğundan $BM = 0$ dir. Buradan $B \in \text{ann}(M)$ ve M sadık olduğundan $B = 0$ dir. Öyleyse A, R 'nin asli idealidir.

($\Leftarrow$): E, R 'nin bir asli ideali ve K, M 'nin $(EM) \cap K = 0$ olacak şekilde bir alt modülü olsun. M çarpımsal olduğundan $K = CM$ olacak şekilde R 'nin bir C ideali vardır. Böylece,

$$(E \cap C)M \subseteq EM \cap K = 0$$

dir. M sadık olduğu için $E \cap C = 0$ dir. Buradan E asli ise $C = 0$ elde edilir. Böylece $K = 0$ bulunur ve $EM = N$ aslidir. $\square$

Teorem 3.13 M sadık çarpımsal R - modül ve N, M 'nin alt modülü olsun. N 'nin yarı asli alt modül olması için gerek ve yeter koşul $N = EM$ olacak şekilde R 'nin bir E yarı asli idealinin olmasıdır [11].

Önerme 3.10 M bir R -modül ve N_1, N_2 M 'nin iki alt modülü ve N_1, N_2 'nin bir alt modülü olsun. N_1, M 'nin bir yarı asli alt modülü ise N_2 de M 'nin bir yarı asli alt modülüdür [11].

Teorem 3.14 M sadık çarpımsal R - modül ve N, M 'nin bir alt modülü olsun. N 'nin yarı asli alt modül olması için gerek ve yeter koşul her $x \in M$ için $(N : x)$ 'in R 'nin bir yarı asli ideali olmasıdır [11].

İspat. $(\Rightarrow)$: N yarı asli alt modül olsun. Teorem 3.13 ten $(N : M)$, R 'nin bir yarı asli idealidir. Her $x \in M$ için $(N : M) \subseteq (N : x)$ olduğundan Önerme 3.2 den

$$N = (N : M)M \subseteq (N : x)M$$

dir. Önerme 3.10 dan $(N : x)M, M$ 'nin bir yarı asli alt modülüdür. Teorem 3.13 den $(N : x)$, R 'nin bir yarı asli idealidir.

$(\Leftarrow)$: Her $x \in M$ için $(N : x)$ 'in R 'nin bir yarı asli ideali olduğunu varsayalım. $0 \neq P$, M 'nin bir asal alt modülü ve $y \in P$ olsun. $(N : y)$ de bir yarı asli idealdir. M çarpımsal olduğundan $P = BM$ olacak şekilde R 'nin B asal ideali vardır. Buradan $(N : y) \cap B \neq 0$ dır. M sadık ise Teorem 3.3 ten

$$(N : y)M \cap BM \neq 0$$

ve buradan $N \cap P \neq 0$ bulunur. Sonuç olarak N, M 'nin yarı asli alt modülüdür. $\square$

Tanım 3.10 R bir halka, M bir R -modül ve N, M 'nin bir alt modülü olsun. Eğer bir P asal alt modülü için , $N \subseteq P$ ve P bu özellikteki en küçük alt modül ise P 'ye N alt modülünün bir **minimal asal alt modülü** denir. (0) alt modülünün bir minimal asal alt modülüne de , M 'nin bir mininmal asal alt modülü denir.

Teorem 3.15 M sadık çarpımsal R - modül ve N, M 'nin bir asal alt modülü olsun. Eğer N minimal asal alt modül değil ise N yarı asli alt modüldür [11].

İspat. M çarpımsal modül ve N, M 'nin asal alt modülü olduğundan Sonuç 3.14 ten $\text{ann}(M) \subseteq B$ olacak şekilde R 'nin bir B asal ideali vardır ve $N = BM$ dir.

$0 \neq P$, M nin $N \cap P = 0$ olacak şekilde bir asal alt modülü olsun. Hipotezden N minimal asal değildir. Dolayısıyla M 'nin bir L minimal asal alt modülü vardır ve $L \subset N$ dir. Öyleyse R 'nin $\text{ann}(M) \subseteq A$ olacak şekilde bir A minimal asal ideali mevcuttur ve $L = AM \neq M$ dir. Buradan

$$(B \cap (P:M))M = BM \cap (P:M)M = N \cap P = 0$$

elde edilir. M sadık olduğundan $B \cap (P:M) = 0$ ve $B \cap (P:M) \subseteq A$ dir. A asal ideal olduğundan $B \subseteq A$ veya $(P:M) \subseteq A$ dir. Eğer $B \subseteq A$ ise $BM \subseteq AM$ dir. Buradan $N \subseteq L$ ve çelişki bulunur. Eğer $(P:M) \subseteq A$ ise $(P:M)M \subseteq AM$ dir. Öyleyse $P \subseteq L \subseteq N$ elde edilir ve buradan da $0 = N \cap P = P$ çelişkisi bulunur. Sonuç olarak $N \cap P \neq 0$ ve N yarı aslidir. $\square$

3.2.3 Sonlu Üretilmiş Çarpımsal Modüller

Teorem 3.16 R birimli değişmeli halka ve M sadık çarpımsal R - modül olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktir:

- i) M sonlu üretilmiştir.
- ii) A ve B, R 'nin $AM \subseteq BM$ koşulunu sağlayan idealleri ise $A \subseteq B$ dir.
- iii) M 'nin her N alt modülü için $N = IM$ olacak şekilde R 'nin tek bir I ideali vardır.
- iv) R 'nin herhangi bir A has ideali için $M \neq AM$ dir.
- v) R 'nin herhangi bir P maximal ideali için $M \neq PM$ dir [3].

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii): M sonlu üretilmiş olduğunu kabul edelim. A ve B, R 'nin $AM \subseteq BM$ koşulunu sağlayan idealleri ve $a \in A$ olsun.

$$K = \{r \in R : ra \in B\}$$

R 'nin bir idealidir. $K \neq R$ olduğunu varsayalım. O zaman $K \subseteq P$ olacak şekilde R 'nin bir P maximal ideali vardır. $M = PM$ olduğunu kabul edelim. M sonlu üretilmiş olduğundan, Genel Determinant Argümanı'ndan $(1-p)M = 0$ olacak şekilde

$p \in P$ vardır. $(1-p) \in \text{ann}(M)$ ve M sadık bir R -modül olduğundan $p=1$ olur, bu bir çelişkidir. O halde $M \neq PM$ olur ve Teorem 3.2 den $(1-q)M \subseteq Rm$ olacak biçimde $m \in M$ ve $q \in P$ elemanları vardır. Özel olarak,

$$(1-q)am \in (1-q)AM \subseteq (1-q)BM = B(1-q)M \subseteq Bm$$

ve böylece $b \in B$ için $(1-q)am - bm = 0$ dir. Buradan $[(1-q)a - b]m = 0$ ve $(1-q)a - b \in \text{ann}(m)$ bulunur. Fakat, $(1-q)\text{ann}(m) \subseteq \text{ann}(M) = 0$ ve böylece

$$(1-q)[(1-q)a - b] = 0$$

olur. Buradan

$$(1-q)^2 a = (1-q)b \in B$$

elde edilir. Bu durum $(1-q)^2 \in K \subseteq P$ olmasını gerektirir. Bu çelişkidir. Böylece $K = R$ ve $a \in B$ bulunur. Buradan $A \subseteq B$ dir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): I ve J , R 'nin $N = IM = JM$ olacak şekilde iki ideali olsun. $IM \subseteq JM$ ve $JM \subseteq IM$ olduğundan ii) den $I \subseteq J$ ve $J \subseteq I$ dir. Buradan $I = J$ dir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): R 'nin herhangi bir A has ideali için $M = AM$ olsun.

$$N = AM = M = RM$$

ise iii) den $A = R$ olur. O halde R 'nin herhangi bir A has ideali için $M \neq AM$ dir.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Açıktır.

(v) $\Rightarrow$ (i): R 'nin her P maximal ideali için $M \neq PM$ olduğunu varsayalım. Q , R 'nin bir maximal ideali olsun. $M \neq QM$ olduğundan $m \notin QM$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. M çarpımsal modül olduğundan

$$Rm = \left(\text{ann}\left(\frac{M}{Rm}\right) \right) M$$

dir. $\text{ann}\left(\frac{M}{Rm}\right) \not\subseteq Q$ olmalıdır. Eğer $\text{ann}\left(\frac{M}{Rm}\right) \subseteq Q$ olsa idi,

$$Rm = \left(\text{ann}\left(\frac{M}{Rm}\right) \right) M \subseteq QM$$

olurdu. Bu durum $m \notin QM$ olması ile çelişirdi. $I = \sum_{m \in M} \text{ann}\left(\frac{M}{Rm}\right)$ ve $I \subset R$ olsun.

Bu durumda $I \subseteq P$ olacak şekilde R 'nin bir P maximal ideali vardır. O halde her $m \in M$ için $\text{ann}\left(\frac{M}{Rm}\right) \subseteq P$ olur. Bu bir çelişkidir. Böylece

$$R = \sum_{m \in M} \text{ann}\left(\frac{M}{Rm}\right)$$

elde edilir. O halde $1 = r_1 + \dots + r_n$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$, $m_i \in M$ ve $r_i \in \text{ann}\left(\frac{M}{Rm_i}\right)$

elemanları mevcuttur. $\text{ann}\left(\frac{M}{Rm_i}\right) M = Rm_i$ olduğundan her $x \in M$ için

$$x = r_1 x + \dots + r_n x \in Rm_1 + \dots + Rm_n$$

olur ve buradan $M = Rm_1 + \dots + Rm_n$ elde edilir. Yani M sonlu üretilmiştir. $\square$

Sonuç 3.16 A ve B, R halkasının iki ideali ve M sonlu üretilmiş çarpımsal R -modül olsun. Bu durumda $AM \subseteq BM$ olması için gerek ve yeter koşul $A \subseteq B + \text{ann}(M)$ olmasıdır [4].

İspat. $(\Leftarrow)$: Yeterlilik açıktır.

$(\Rightarrow)$: $AM \subseteq BM$ olduğunu varsayalım. $R' = R / \text{ann}(M)$ olsun.

$A' = A + \text{ann}(M) / \text{ann}(M)$ ve $B' = B + \text{ann}(M) / \text{ann}(M)$, R' nin iki ideali olsun.

Buradan $A'M \subseteq B'M$ olur. M sadık R' -modül olduğundan Teorem 3.16 dan $A' \subseteq B'$ olur. Böylece $A \subseteq B + \text{ann}(M)$ bulunur. $\square$

Teorem 3.17 M bir sonlu üretilmiş sadık çarpımsal R -modül ve N, M 'nin bir alt modülü olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) N 'nin çarpımsal modül olması için gerek ve yeter koşul N 'nin her K alt modülü için $(K:N)(N:M)=(K:M)$ olmasıdır.

ii) R 'nin her I ideali için $I=(IM:M)$ dir.

iii) N 'nin çarpımsal olması için gerek ve yeter koşul $(N:M)$ 'nin çarpımsal ideal olmasıdır.

iv) A, R 'nin bir ideali olsun. AM 'nin çarpımsal modül olması için gerek ve yeter koşul A 'nın bir çarpımsal ideal olmasıdır [4].

İspat. i) $(\Rightarrow)$: N 'nin çarpımsal modül olduğunu kabul edelim. K, N 'nin bir alt modülü ise (3.1) den $K=(K:M)M$, $K=(K:N)N$ ve $N=(N:M)M$ dir. Buradan $K=(K:N)(N:M)M=(K:M)M$ dir. Sonuç 3.16 dan $(K:N)(N:M)=(K:M)$ bulunur.

$(\Leftarrow)$: N 'nin her K alt modülü için $(K:N)(N:M)=(K:M)$ olsun. O halde

$$K=(K:M)M=(K:N)(N:M)M=(K:N)N$$

ve böylece N çarpımsal modül olur.

ii) R 'nin her I ideali için IM , M 'nin bir alt modülüdür. Öyleyse $IM=(IM:M)M$ ve Sonuç 3.16 dan $I=(IM:M)$ dir.

iii) $(\Leftarrow)$: $I=(N:M)$ çarpımsal ideal ise $IM=(N:M)M=N$ çarpımsal modüldür.

$(\Rightarrow)$: N çarpımsal modül ve $B \subseteq (N:M)$ olacak şekilde bir ideal olsun. Buradan $BM \subseteq N$ dir. i) ve ii) den $B=(BM:M)=(BM:N)(N:M)$ ve böylece $(N:M)$ bir çarpımsal idealdir.

iv) $(\Leftarrow)$: Sonuç 3.4 den açıktır.

$(\Rightarrow)$: ii) ve iii) den elde edilir. $\square$

Sonuç 3.17 M bir sonlu üretilmiş sadık çarpımsal R -modül ve A ve B , R halkasının iki ideali olsun. $AM = BM$ olması için gerek ve yeter koşul $A = B$ olmasıdır.

İspat. Sonuç 3.16 dan açıktır. $\square$

Şimdi Teorem 3.17 ve Sonuç 3.17 deki sonlu üretilmiş ve sadık olma şartı yerine serbest burulmalı R -modül olma şartını getirelim.

Önerme 3.11 M bir serbest burulmalı çarpımsal R -modül ve I , J herhangi iki ideal olsun.

i) $IM = JM$ olması için gerek ve yeter koşul $I = J$ olmasıdır.

ii) R 'nin her I ideali için $I = (IM : M)$ dir [12].

İspat. i) $(\Rightarrow)$: $x \in M - T(M)$ olsun. R 'nin bazı K idealleri için $Rx = KM$ dir.

$Ix = IRx = IKM = KIM = KJM = JKM = JRx = Jx$ dir. Öyleyse her $a \in I$ için $b_i \in J$

olmak üzere $ax = \sum_{i=1}^n b_i x$ olur. $\left(a - \sum_{i=1}^n b_i\right)x = 0$ ve $x \notin T(M)$ olduğundan

$a - \sum_{i=1}^n b_i = 0$ ve $a = \sum_{i=1}^n b_i \in J$ dir. Böylece $I \subseteq J$ elde edilir. Benzer şekilde $J \subseteq I$

bulunur.

$(\Leftarrow)$: Açıktır.

ii) IM , M 'nin alt modülü olduğundan $IM = (IM : M)M$ ve i) den $I = (IM : M)$ dir. $\square$

Lemma 3.2 R bir tamlık bölgesi ve M çarpımsal R -modül olsun. M 'nin serbest burulmalı modül olması için gerek ve yeter koşul M 'nin sadık modül olmasıdır [12].

İspat. $(\Leftarrow)$: $M = 0$ ise $T(M) = M$ ve $\text{ann}(M) = R \neq 0$ dir. $T(M) = M \neq 0$

olduğunu varsayalım. $0 \neq m \in T(M)$ olsun. Öyleyse bazı $0 \neq r \in R$ için $rm = 0$ dir.

M çarpımsal olduğundan $Rm = IM$ olacak şekilde bir $0 \neq I$ ideali vardır. Öyleyse

$0 = Rrm = rIM$ dir. R bir tamlık bölgesi olduğundan $0 \neq s \in I$ için $0 \neq rs \in \text{ann}(M)$

ve çelişki elde edilir.

$(\Rightarrow)$: $\text{ann}(M) \neq 0$ olsa idi, $0 \neq a \in R$ için $aM = 0$ ve buradan $T(M) = M$ olurdu. $\square$

Tanım 3.11 M bir R - modül olsun. $M = TM$ olacak şekilde R 'nin T idealler topluluğunu Γ ile gösterelim. Γ 'deki bütün ideallerin kesişimini de $\Gamma(M)$ olarak tanımlayalım.

$\Gamma(M)$, R 'nin bir idealidir [3].

Sonuç 3. 18 M sadık çarpımsal bir R - modül olsun. M 'nin sonlu üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul $\Gamma(M) = R$ olmasıdır [3].

İspat. Teorem 3.16 iv) den M 'nin sonlu üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul R 'nin her A has ideali için $M \neq AM$ olmasıdır. Öyleyse $\Gamma(M) = R$ dir. $\square$

Lemma 3.3 M sadık çarpımsal bir R - modül olsun. O zaman

i) Her $m \in M$ için $m \in \Gamma(M)m$ dir.

ii) $\Gamma(M) = \Gamma(M)^2$ dir.

iii) R 'nin her P asal ideali için $\Gamma(M) \subseteq P$ veya $R = \Gamma(M) + P$ dir [3].

İspat. i) Teorem 3.3 ten $\Gamma(M)M = M$ dir. $m \in M$ olsun. M çarpımsal olduğundan $Rm = AM$ olacak şekilde bir A ideali vardır. Buradan

$$Rm = AM = A\Gamma(M)M = \Gamma(M)m \text{ ve } m \in \Gamma(M)m \text{ dir.}$$

ii) $\Gamma(M)$ 'nin tanımından

$$M = \Gamma(M)M = \Gamma(M)M\Gamma(M) = \Gamma(M)^2 M$$

ve buradan $\Gamma(M) = \Gamma(M)^2$ dir.

iii) P, R 'nin asal ideali olsun. $M = PM$ ise $\Gamma(M) \subseteq P$ dir. $M \neq PM$ olduğunu varsayalım. $x \in M$ ve $x \notin PM$ olsun. $Rx = BM$ olacak şekilde R 'nin bir B ideali vardır. $B \not\subseteq P$ olduğunu gösterelim. Eğer $B \subseteq P$ olsa idi, $Rx = BM \subseteq PM$ ve buradan $x \in PM$ olurdu. Öyleyse $B \not\subseteq P$ dir. i) den $(1-t)x = 0$ olacak şekilde $t \in \Gamma(M)$ vardır ve buradan $(1-t)BM = 0$ dir. M sadık olduğundan

$(1-t)B=0 \subseteq P$ ve P asal ideal olduğundan $(1-t) \in P$ dir. Buradan da $R = \Gamma(M) + P$ bulunur. $\square$

Sonuç 3.19 M sadık çarpımsal bir R - modül olsun. M 'nin sonlu üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul $\Gamma(M)$ 'nin sonlu üretilmiş olmasıdır [3].

İspat. M sonlu üretilmiş ise Sonuç 3.18 den $\Gamma(M) = R$ dir. Buradan da $\Gamma(M)$ sonlu üretilmiştir. Tersine, $\Gamma(M)$ sonlu üretilmiş ve $\Gamma(M) = T$ olsun. Lemma 3.3 ii) den $T = T^2$ dir. e , R 'nin idempotent elemanı olsun. $T = T^2$ olduğundan R 'nin bazı e elemanları için $e = e.e = Re.e = Re$ ve $T = Re$ dir. Teorem 3.3 den

$$(1-e)M = (1-e)TM \text{ dir.}$$

$$(1-e)TM = (1-e)ReM = ReM - Re^2M = 0$$

ve buradan $(1-e) \in \text{ann}(M) = 0$ dir. Öyleyse $(1-e) = 0$ ve $T = R$ elde edilir. Sonuç 3.18 den M sonlu üretilmiş R - modüldür. $\square$

Önerme 3.12 M sadık çarpımsal bir R - modül olsun. M 'nin sonlu üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul R 'nin her P minimal asal ideali için $M \neq PM$ olmasıdır [3].

İspat. $(\Rightarrow)$: Teorem 3.16 dan açıktır.

$(\Leftarrow)$: M 'nin sonlu üretilmemiş olduğunu varsayalım. Teorem 3.16 dan R 'nin en az bir A has ideali için $M = AM$ dir. Yani $\Gamma(M) \neq R$ dir. Q , R 'nin $\Gamma(M) \subseteq Q$ olacak şekilde bir maximal ideali ve P , R 'nin $P \subseteq Q$ olacak şekilde bir minimal asal ideali olsun. Buradan $\Gamma(M) + P \subseteq Q$ ve Lemma 3.2 iii) den $\Gamma(M) \subseteq P$ dir. Buradan $M = PM$ bulunur. Hipotez ile çelişir. M sonlu üretilmiştir. $\square$

Sonuç 3.20 Eğer R bir tamlık bölgesi ise her sadık çarpımsal R - modül sonlu üretilmiştir.

İspat. R tamlık bölgesi ise tek minimal asal ideali 0 'dır. Önerme 3.12 den M sonlu üretilmiştir. $\square$

R halkasının bütün asal idealleri sonlu üretilmiş ise Cohen Teoremi'nden R noetheriandır. Ancak M bir R -modül ise M 'nin her asal alt modülünün sonlu üretilmiş olması M 'nin noetherian olmasını gerektirmez.

Örnek 3.9 $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismini $\mathbb{Z}$ -modül olarak alalım. $N, \mathbb{Q}$ 'nun bir asal alt modülü ve $P = (N : \mathbb{Q})$ olsun Bu durumda $P, \mathbb{Z}$ 'in bir asal ideali ve $P\mathbb{Q} \subseteq N$ olur. $N \neq \mathbb{Q}$ olduğundan $P = (0)$ dır. $N = (0)$ olduğunu gösterelim. $N \neq (0)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $ab^{-1} \in N$ olacak şekilde sıfırdan farklı a, b tam sayıları vardır. $a \notin (N : \mathbb{Q}) = 0$ ve N asal olduğundan $b^{-1} \in N$ olur. Buradan $1 \in N$ ve $\mathbb{Z} \subseteq N$ elde edilir. $N \neq \mathbb{Q}$ olduğundan $\alpha\beta^{-1} \notin N$ olacak şekilde sıfırdan farklı α, β tam sayıları vardır. Buradan $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha \in \mathbb{Z} \subseteq N$ olur. Bu durum N 'nin asal olması ile çelişir. O halde $N = (0)$ dir. Burada N sonlu üretilmiş ancak $\mathbb{Q}$ noetherian değildir [10]. $\square$

Teorem 3.18 (Çarpımsal modüller için Cohen Teoremi) R bir halka ve M çarpımsal bir R -modül olsun. M 'nin her asal alt modülü sonlu üretilmiş ise M noetheriandır [10].

İspat. $M \neq \{0\}$ olarak alalım. M çarpımsal olduğundan Teorem 3.6 dan M 'nin bir K maximal alt modülü vardır. K maximal olduğundan $M = K + Rx$ olacak şekilde bir $x \in M$ mevcuttur. Her maximal alt modül aynı zamanda asal olduğundan hipotezden K sonlu üretilmiştir. Dolayısıyla M de sonlu üretilmiş olur. M 'nin noetherian olmadığını kabul edelim.

$\Omega = \{ N : N, M \text{'nin sonlu üretilmemiş bir alt modülüdür} \}$

olsun. M noetherian olmadığından en az bir sonlu üretilmemiş alt modülü vardır. Buradan $\Omega \neq \emptyset$ ve M sonlu üretilmiş olduğundan $M \notin \Omega$ dir. Zorn Lemma'ya göre Ω 'nin bir maximal elemanı vardır. Bu maximal elemana N diyelim. M çarpımsal modül olduğundan, $I = (N : M)$ ideali için $IM = (N : M)M = N$ dir. $I \neq R$ olduğunu gösterelim. Eğer $I = R$ olsa idi, $r \in I = (N : M)$ için $rM \subseteq N \subseteq M$ buradan $N = M$ bulunur ve N 'nin sonlu üretilmemiş olması ile çelişirdi. Şimdi I 'nin asal olduğunu gösterelim. Eğer asal ideal olmaz ise, $ab \in I$ iken $a \notin I$ ve $b \notin I$ olacak şekilde $a, b \in R$

elemanları olur. Böylece $aM \not\subseteq N$ ve $bM \not\subseteq N$ olur. Buradan da $N \subseteq N + aM$ ve N , Ω 'nin maximal elemanı olduğundan $N + aM$ sonlu üretilmiştir. Bu nedenle,

$$N + aM = \sum_{i=1}^n R(t_i + as_i)$$

olacak şekilde $t_i \in N$ ve $s_i \in M$ vardır. Ayrıca, $N \subseteq (N : a)$ ve $ab \in I = (N : M)$ olduğundan $abM \subseteq N$ ve $bM \subseteq (N : a)$ dir. Buradan da $N + bM \subseteq (N : a)$ bulunur. $N \subseteq N + bM \subseteq (N : a)$ ve N , Ω 'nin maximal elemanı olduğundan $(N : a)$ da sonlu üretilmiştir. O halde,

$$(N : a) = \sum_{j=1}^m Rk_j$$

olacak biçimde $k_j \in (N : a)$ vardır. $N = \langle t_1, \dots, t_n, ak_1, \dots, ak_m \rangle$ olduğunu gösterelim.

$$\langle t_1, \dots, t_n, ak_1, \dots, ak_m \rangle \subseteq N$$

olduğu açıktır. Tersine, $y \in N$ olsun. $N \subseteq N + aM = \sum_{i=1}^n R(t_i + as_i)$ olduğundan

$$n = \sum_{i=1}^n r_i (t_i + as_i) = \sum_{i=1}^n r_i t_i + \sum_{i=1}^n a(r_i s_i)$$

ve buradan

$$n - \sum_{i=1}^n r_i t_i = a \sum_{i=1}^n (r_i s_i) \in N$$

olur. Böylece $\sum_{i=1}^n (r_i s_i) \in (N : a)$ ve $n \in \langle t_1, \dots, t_n, ak_1, \dots, ak_m \rangle$ dir. Buradan da N ,

$\langle t_1, \dots, t_n, ak_1, \dots, ak_m \rangle$ ile üretilmiş olur ve çelişki elde edilir. O halde, I asal idealdir ve $\text{ann}(M) \subseteq I$ olduğundan Sonuç 3.14 den $N = IM$ asal alt modüldür. Hipotezden N sonlu üretilmiş olur ve yine çelişki bulunur. Böylece M noetheriandır. $\square$

Teorem 3.19 M bir R -modül , $M = \sum_{\alpha \in \Lambda} M_{\alpha}$ olmak üzere $M_{\alpha} (\alpha \in \Lambda)$ M 'nin çarpımsal alt modülleri ve $A = \sum_{\alpha \in \Lambda} (M_{\alpha} : M)$ olsun. Aşağıdakiler denktir:

i) M çarpımsal modüldür.

ii) Her $\alpha \in \Lambda$ için $M_{\alpha} = (M_{\alpha} : M)M$ dir.

iii) Her $m \in M$ için $R = ann(m) + A$ dir.

iv) R 'nin her P maximal ideali için $T_P(M) = M$ veya $z \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} M_{\alpha}$ ve $p \in P$ için $(1-p)M \subseteq Rz$ dir [4].

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii): M çarpımsal ise (3.1) den $M_{\alpha} = (M_{\alpha} : M)M$ sağlanır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $m \in M$ olsun. $R \neq ann(m) + A$ olduğunu varsayalım. $ann(m) + A \subseteq Q$ olacak şekilde R 'nin bir Q maximal ideali vardır. $A \subseteq Q$ ise ii) den her $\alpha \in \Lambda$ için $M_{\alpha} \subseteq QM$ dir. Buradan $M = QM$ bulunur. Λ' , Λ 'nin sonlu alt kümesi olmak üzere $m = \sum_{\alpha \in \Lambda'} x_{\alpha}$ olacak şekilde $x_{\alpha} \in M_{\alpha} (\alpha \in \Lambda')$ elemanları vardır. $\alpha \in \Lambda'$ olsun. M_{α} çarpımsal olduğundan $Rx_{\alpha} = BM_{\alpha}$ olacak şekilde R 'nin bir B ideali vardır. Böylece

$$Rx_{\alpha} = BM_{\alpha} = B(M_{\alpha} : M)M = B(M_{\alpha} : M)QM = Qx_{\alpha}$$

olur. O halde bazı $q_{\alpha} \in Q$ için $(1-q_{\alpha})x_{\alpha} = 0$ dir. $q = 1 - \prod_{\alpha \in \Lambda'} (1-q_{\alpha}) \in Q$ olsun.

Buradan $(1-q)m = 0$ ve dolayısıyla $(1-q) \in ann(m) \subseteq Q$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Böylece $R = ann(m) + A$ sağlanır.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): P , R 'nin bir maximal ideali olsun. $T_P(M) \neq M$ olduğunu kabul edelim. $ann(m) \subseteq P$ olacak şekilde $m \in M$ vardır. iii) den $A \not\subseteq P$ ve buradan $(M_{\alpha} : M) \not\subseteq P$ olacak biçimde $\alpha \in \Lambda$ vardır. Böylece $(1-p)M \subseteq M_{\alpha}$ şartını sağlayan bir $p \in P$ vardır. Eğer $T_P(M_{\alpha}) = M_{\alpha}$ ise $T_P(M) = M$ dir. Yani M_{α} , P -devirlidir. Öyleyse $(1-p')M_{\alpha} \subseteq Ry$ olacak şekilde $y \in M_{\alpha}$ ve $p' \in P$ bulunabilir. Bu durumda ise

$$(1-p')(1-p)M \subseteq Ry \text{ olur.}$$

(iv) $\Rightarrow$ (i): Teorem 3.2 den açıktır. $\square$

Lemma 3.4 M bir R -modül ve N_1 ve N_2 , M 'nin iki alt modülü olsun. N_1 , N_2 ve $N_1 + N_2$ çarpımsal modül ise $N_1 \cap N_2$ de çarpımsal modüldür [4].

İspat. P, R 'nin $T_p(N_1 \cap N_2) \neq N_1 \cap N_2$ olacak şekilde bir maximal ideali olsun. Öyleyse $T_p(N_1) \neq N_1$, $T_p(N_2) \neq N_2$ ve $T_p(N_1 + N_2) \neq N_1 + N_2$ dir. Teorem 3.2 ve Teorem 3.19 dan $x \in N_1, y \in N_2, z \in N_1 \cup N_2$ ve $p_1, p_2, p \in P$ elemanları için $(1-p_1)N_1 \subseteq Rx$, $(1-p_2)N_2 \subseteq Ry$ ve $(1-p)(N_1 + N_2) \subseteq Rz$ olur. $z \in N_1$ olsun. Bu durumda $(1-p)y \in N_1 \cap N_2$ ve $(1-p)(1-p_2)(N_1 \cap N_2) \subseteq R(1-p)y$ dir. Öyleyse $N_1 \cap N_2$, P -devirlidir. Benzer şekilde $z \in N_2$ ise $N_1 \cap N_2$, P -devirlidir. Teorem 3.2 den $N_1 \cap N_2$ de çarpımsaldır. $\square$

Teorem 3.20 M bir R -modül ve $N_\alpha (\alpha \in \Lambda)$, M 'nin çarpımsal alt modülleri olsun.

$S = \sum_{\alpha \in \Lambda} N_\alpha$ ve $A = \sum_{\alpha \in \Lambda} (N_\alpha : S)$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

i) S çarpımsal ise M 'nin her K alt modülü için $K \cap S = \sum_{\alpha \in \Lambda} K \cap N_\alpha$ dir.

ii) S çarpımsal ise M 'nin her sonlu üretilmiş K alt modülü için

$$(S : K) = \sum_{\alpha \in \Lambda} (N_\alpha : K) \text{ dir [13].}$$

İspat. i) $\sum_{\alpha \in \Lambda} K \cap N_\alpha \subseteq K \cap S$ olduğu açıktır. $x \in K \cap S$ ve

$$H = \left\{ r \in R : rx \in \sum_{\alpha \in \Lambda} K \cap N_\alpha \right\}$$

olsun. $H \neq R$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse $H \subseteq P$ olacak şekilde R 'nin bir P maximal ideali vardır. $A \subseteq P$ ise, her $\alpha \in \Lambda$ için $(N_\alpha : S) \subseteq A$ dir ve S çarpımsal olduğundan

$$N_\alpha = (N_\alpha : S)S \subseteq PS$$

dir. Buradan $S = \sum_{\alpha \in \Lambda} N_\alpha \subseteq PS \subseteq S$ ve $S = PS$ elde edilir. $x \in S$ ve S çarpımsal

olduğundan $Rx = IS$ olacak şekilde bir I ideali vardır. Buradan

$$Rx = IS = IPS = P(IS) = Px$$

bulunur. O halde bir $p \in P$ için $(1-p)x = 0$ dir. Öyleyse $(1-p)x = 0 \in \sum_{\alpha \in \Lambda} K \cap N_\alpha$

ve $1-p \in H \subseteq P$ bulunur. Çelişki elde edilir. $A \not\subseteq P$ ise, $(N_\alpha : S) \not\subseteq P$ olacak şekilde

bir $\alpha \in \Lambda$ vardır. Buradan P maximal olduğundan bir $q \in P$ için $1-q \in (N_\alpha : S)$ dir.

Böylece $(1-q)S \subseteq N_\alpha$ olur. $x \in K \cap S$ olduğundan

$$(1-q)x \in K \cap (1-q)S \subseteq K \cap N_\alpha \subseteq \sum_{\alpha \in \Lambda} K \cap N_\alpha$$

bulunur. O halde $1-q \in H \subseteq P$ ve çelişki elde edilir. Sonuç olarak her iki durumdan

$H = R$ ve $x \in \sum_{\alpha \in \Lambda} K \cap N_\alpha$ dir. Böylece $K \cap S = \sum_{\alpha \in \Lambda} K \cap N_\alpha$ olur.

ii) $\sum_{\alpha \in \Lambda} (N_\alpha : K) \subseteq (S : K)$ olduğu açıktır. Her $m \in S$ için $R = A + ann(m)$ olduğundan

S 'nin her sonlu üretilmiş Y alt modülleri için $R = A + annY$ dir. $x \in (S : K)$ ve

$$H = \left\{ r \in R : rx \in \sum_{\alpha \in \Lambda} [N_\alpha : K] \right\}$$

olsun. $H \neq R$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse R 'nin bir P maximal ideali vardır ve

$H \subseteq P$ dir. $A \subseteq P$ ise, $x \in (S : K)$ olduğundan $xK \subseteq S$ dir. Buradan $R = A + ann(xK)$

olur. O halde $ann(xK) \not\subseteq P$ ve buradan da $1-p \in ann(xK)$ olacak şekilde bir $p \in P$

vardır. Böylece $(1-p)xK = 0$ ve

$$(1-p)x \in (0 : K) \subseteq (N_\alpha : K) \subseteq \sum_{\alpha \in \Lambda} (N_\alpha : K)$$

elde edilir. Buradan $1-p \in H \subseteq P$ ve çelişki bulunur. $A \not\subseteq P$ ise, $(N_\alpha : S) \not\subseteq P$ olacak şekilde bir $\alpha \in \Lambda$ vardır. Buradan P maximal olduğundan bir $q \in P$ için $(1-q) \in (N_\alpha : S)$ dir. Böylece $(1-q)S \subseteq N_\alpha$ olur. $xK \subseteq S$ olduğundan $(1-q)xK \subseteq (1-q)S \subseteq N_\alpha$ ve böylece

$$(1-q)x \in (N_\alpha : K) \subseteq \sum_{\alpha \in \Lambda} (N_\alpha : K)$$

bulunur. O halde $1-q \in H \subseteq P$ ve çelişki elde edilir. Her iki durumda da çelişki elde edildiğinden $H = R$ ve $x \in \sum_{\alpha \in \Lambda} (N_\alpha : K)$ dir. $\square$

3.2.4 Çarpımsal Modüllerin Alt Modüllerinin Radikali

Tanım 3.12 M sıfırdan farklı bir R -modül ve N, M 'nin bir has alt modülü olsun. O zaman M 'nin N 'yi kapsayan bütün asal alt modüllerinin kesişimi, N 'nin M -**radikali** olarak tanımlanır ve M -rad N olarak gösterilir. Eğer A, R halkasının bir ideali ise A, R -modül R olarak düşünülür ve o zaman A 'nın M -radikali, A 'yı kapsayan bütün asal ideallerin kesişimidir ve bir n pozitif tam sayısı için $r^n \in A$ koşulunu sağlayan bütün $r \in R$ elemanlarından oluşur. $\sqrt{A}$ ile gösterilir [3].

Teorem 3.21 M çarpımsal R -modül, N, M 'nin has alt modülü ve $A = (N : M)$ olsun. O zaman

$$M\text{-rad } N = (\sqrt{A})M \quad (3.6)$$

dir [3].

İspat. $\tilde{P}, A \subseteq P$ koşulunu sağlayan R 'nin bütün P asal idealleri topluluğunu gösterebiliriz. Eğer $B = \sqrt{A}$ ise, o zaman $B = \bigcap_{P \in \tilde{P}} P$ ve Teorem 3.3 den

$$BM = \bigcap_{P \in \tilde{P}} (PM)$$

olur. $P \in \tilde{P}$ olsun. Eğer $M = PM$ ise $M\text{-rad } N \subseteq PM$ dir. $M \neq PM$ ise, o zaman $N = AM \subseteq PM$ ve buradan $M\text{-rad } N \subseteq PM$ olur. Böylece $M\text{-rad } N \subseteq BM$ dir.

Tersine; K , M 'nin N 'yi kapsayan asal alt modülü olsun. Sonuç 3.14 ten $\text{ann}(M) \subseteq Q$ ve $K = QM$ olacak şekilde R 'nin bir asal ideali mevcuttur. Q bir asal ideal ve

$$AM = N \subseteq K = QM \neq M$$

olduğundan Sonuç 3.15 den $A \subseteq Q$ ve dolayısıyla $B \subseteq Q$ olur. Buradan da $BM \subseteq K$ ve $BM \subseteq M$ -rad N bulunur. Böylece (3.6) sağlanır. $\square$

Önerme 3.13 M bir R -modül ve N , M 'nin alt modülü olsun.

$$H = \left\{ m \in M : (Rm : M)^k m \subseteq N, k \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

olsun. M çarpımsal modül ise H , M 'nin alt modülüdür. Eğer M sonlu üretilmiş ise

$$H = M - \text{rad } N \text{ dir [5].}$$

İspat. M çarpımsal modül olsun. H 'nin alt modül olduğunu gösterelim.

$m_1, m_2 \in H$ olsun. Bu durumda $(Rm_1 : M)^{k_1} m_1 \subseteq N$ ve $(Rm_2 : M)^{k_2} m_2 \subseteq N$ olacak şekilde $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan $(Rm_1 : M)^{k_1} (Rm_1 : M)M \subseteq N$ ve öyleyse

$$(Rm_1 : M)^{k_1+1} \subseteq ((Rm_1 : M)^{k_1+1} M : M) \subseteq (N : M)$$

olur. Benzer şekilde $(Rm_2 : M)^{k_2+1} \subseteq (N : M)$ elde edilir. $k = k_1 + k_2 + 2$ olsun. Bu durumda, $\left[(Rm_1 : M) + (Rm_2 : M) \right]^k \subseteq (N : M)$ ve böylece

$$\left[(Rm_1 : M) + (Rm_2 : M) \right]^k M \subseteq (N : M)M = N$$

olur. Buradan da

$$\left[(Rm_1 : M) + (Rm_2 : M) \right]^{k-1} (Rm_1 + Rm_2)$$

$$= \left[(Rm_1 : M) + (Rm_2 : M) \right]^{k-1} \left[(Rm_1 : M) + (Rm_2 : M) \right] M \subseteq N \text{ ve}$$

$$\left[(Rm_1 : M) + (Rm_2 : M) \right]^{k-1} ((Rm_1 + Rm_2) : M) \subseteq (N : M)$$

olur. Benzer şekilde ,

$$\left[(Rm_1 : M) + (Rm_2 : M) \right]^{k-2} ((Rm_1 + Rm_2) : M)^2 \subseteq (N : M) \quad \text{ve}$$

$$((Rm_1 + Rm_2) : M)^k \subseteq (N : M)$$

elde edilir. O halde,

$$(R(m_1 + m_2) : M)^k \subseteq ((Rm_1 + Rm_2) : M)^k \subseteq (N : M)$$

olur ve buradan

$$(R(m_1 + m_2) : M)^k (m_1 + m_2) \subseteq ((Rm_1 + Rm_2) : M)^k M \subseteq (N : M) M = N$$

bulunur. Öyleyse $m_1 + m_2 \in H$ dir. $m \in H$ ve $r \in R$ olsun. Bu durumda

$(Rm : M)^k m \subseteq N$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan ,

$$(Rrm : M)^k rm \subseteq (Rm : M)^k m \subseteq N$$

ve $rm \in H$ olur. Öyleyse H, M 'nin alt modülüdür.

Şimdi M 'nin sonlu üretilmiş olduğunu kabul edelim. $m \in H$ olsun.

$(Rm : M)^k m \subseteq N$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan $(Rm : M)^k (Rm : M) M \subseteq N$

ve

$$(Rm : M)^{k+1} \subseteq \left[(Rm : M)^{k+1} M : M \right] \subseteq (N : M)$$

olur. O halde , $(Rm : M) \subseteq \sqrt{(N : M)}$ ve Teorem 3.21 den

$$m \in Rm = (Rm : M) M \subseteq \sqrt{(N : M)} M = M - rad N$$

elde edilir. Böylece $H \subseteq M - \text{rad } N$ dir. Tersine, $m \in M - \text{rad } N = \sqrt{(N:M)}M$ olsun. Bu durumda $Rm \subseteq \sqrt{(N:M)}M$ olur. $(\sqrt{(N:M)}M : M)M = \sqrt{(N:M)}M$ olduğundan Sonuç 3.16 dan $(\sqrt{(N:M)}M : M) = \sqrt{(N:M)} + \text{ann}(M)$ ve böylece

$$(Rm : M) \subseteq (\sqrt{(N:M)}M : M) = \sqrt{(N:M)} + \text{ann}(M) = \sqrt{(N:M)}$$

elde edilir. O halde $(Rm : M)^k \subseteq (N : M)$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan da

$$(Rm : M)^k m \subseteq (Rm : M)^k M \subseteq (N : M)M = N$$

ve $m \in H$ olur. Öyleyse $H = M - \text{rad } N$ bulunur. $\square$

Tanım 3.13 M bir R -modül ve N, M 'nin alt modülü olsun. Eğer $M - \text{rad } N = N$ ise N 'ye M 'nin **radikal alt modülü** denir. I, R 'nin bir ideali olmak üzere $\sqrt{I} = I$ ise, I 'ya R 'nin bir **radikal ideali** denir.

Önerme 3.14 M bir çarpımsal R -modül, K ve N, M 'nin iki alt modülü olsun. Bu durumda

$$\sqrt{((K \cap N) : M)} = \sqrt{(K : M)} \cap \sqrt{(N : M)} \quad \text{dir.}$$

İspat. $a \in \sqrt{((K \cap N) : M)}$ olsun. Bu durumda $a^n \in ((K \cap N) : M)$ olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı vardır. Buradan

$$a^n M \subseteq ((K \cap N) : M)M = K \cap N \subseteq K \text{ ve } a^n M \subseteq N$$

bulunur. Öyleyse $a^n \in (K : M)$ ve $a^n \in (N : M)$ dir. Buradan da $a \in \sqrt{(K : M)} \cap \sqrt{(N : M)}$ elde edilir. Tersine, $r \in \sqrt{(K : M)} \cap \sqrt{(N : M)}$ olsun. Bu durumda $r^k \in (K : M)$ ve $r^t \in (N : M)$ olacak şekilde k ve t pozitif tam sayıları vardır. Böylece $r^k M \subseteq K$ ve $r^t M \subseteq N$ olur. $n = \max\{k, t\}$ için $r^n M \subseteq K \cap N$ ve

$r \in ((K \cap N) : M)$ bulunur. Buradan da $r \in \sqrt{((K \cap N) : M)}$ olur ve $\sqrt{((K \cap N) : M)} = \sqrt{(K : M)} \cap \sqrt{(N : M)}$ sağlanır. $\square$

Teorem 3.22 M bir R -modül olsun. I, R 'nin bir ideali ve K ve N, M 'nin iki alt modülü olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) Eğer N, M 'nin radikal alt modülü ise $(N : M), R$ 'nin radikal idealidir. M 'nin çarpımsal olduğu durumda tersi de doğrudur.

ii) M sonlu üretilmiş çarpımsal R -modül olsun. $I + ann(M)$ nin R 'nin bir radikal ideali olması için gerek ve yeter koşul IM nin, M 'nin bir radikal alt modülü olmasıdır.

iii) M çarpımsal ise

$$M - rad(K \cap N) = M - rad K \cap M - rad N \text{ dir [5].}$$

İspat. i) $M - rad N, N$ 'yi kapsayan asal alt modüllerin kesişimi olduğundan P_i, N 'yi kapsayan asal alt modüller olmak üzere $N = \bigcap P_i$ olur. $A_i, (N : M)$ yi kapsayan asal idealler topluluğu olsun. Bu durumda ,

$$(N : M) = (\bigcap P_i : M) = \bigcap (P_i : M) \supseteq \bigcap A_i = \sqrt{(N : M)} \supseteq (N : M)$$

ve buradan $\sqrt{(N : M)} = (N : M)$ bulunur. Böylece $(N : M), R$ 'nin radikal idealidir.

Tersine, M çarpımsal ve $(N : M), R$ 'nin radikal ideali olsun. Teorem 3.21 den

$$N = (N : M)M = \sqrt{(N : M)}M = M - rad N$$

ve böylece N, M 'nin radikal alt modülü olur.

ii) $(\Leftarrow)$: IM, M 'nin bir radikal alt modülü olsun. Teorem 3.21 ve Önerme 2.12 den

$$(I + ann(M))M = IM = M - rad(IM) = \sqrt{(IM : M)}M = \sqrt{I + ann(M)}M$$

dir ve Sonuç 3.16 dan

$$I + ann(M) = \sqrt{I + ann(M)} + ann(M)$$

$$\text{olur. } ann(M) \subseteq \sqrt{ann(M)} \subseteq \sqrt{I + ann(M)} \text{ olduğundan, } I + ann(M) = \sqrt{I + ann(M)}$$

elde edilir.

($\Rightarrow$): $I + ann(M)$ nin R 'nin bir radikal ideali olsun. Bu durumda

$$IM = (I + ann(M))M = \sqrt{I + ann(M)}M = \sqrt{(IM : M)}M = M - rad(IM)$$

ve böylece IM nin, M 'nin bir radikal alt modülü olur.

iii) M çarpımsal ise Önerme 3.14 , Sonuç 3.6 ve Teorem 3.21 den

$$\begin{aligned} M - rad(K \cap N) &= \sqrt{((K \cap N) : M)}M = (\sqrt{(K : M)} \cap \sqrt{(N : M)})M \\ &= \left[(\sqrt{(K : M)} + ann(M)) \cap (\sqrt{(N : M)} + ann(M)) \right] M \\ &= \sqrt{(K : M)}M \cap \sqrt{(N : M)}M = M - radK \cap M - radN \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

i) deki ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Örneğin; $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ve $N = \langle (4, 0) \rangle$ olsun. Bu durumda,

$$(N : M) = 0 = \sqrt{(N : M)} \text{ ancak } M - radN = \langle (2, 0) \rangle \neq N$$

dir.

Önerme 3.15 M çarpımsal noetherian bir R -modül olsun. M 'nin herhangi bir N alt modülü için $M - radN$ asal alt modüllerin sonlu kesişimidir [5].

İspat. C, M 'nin N alt modüllerinin $M - radN$ sonlu asal alt modüllerin kesişimi olarak yazılamayan kümesi olsun. C boş ise ispat tamamlanır. C boştan farklı olsun. M noetherian olduğundan C 'nin maximal elemanı vardır. Bu maximal eleman N olsun. $M - radN$, M 'nin asal alt modülü değildir ve buradan N asal değildir. Öyleyse $am \in N$ iken $m \notin N$ ve $aM \not\subseteq N$ olacak şekilde $a \in R$ ve $m \in M$ elemanları

vardır. $K = Rm + N$ ve $L = aM + N$ olsun. K ve L, N 'yi içerir. Böylece N maximal olduğundan $K, L \notin C$ dir. Buradan M 'nin bazı P_i ve Q_j asal alt modülleri için

$$M - radK = P_1 \cap \dots \cap P_r \text{ ve } M - radL = Q_1 \cap \dots \cap Q_s$$

dir. M çarpımsal ve $N \subseteq K \cap L$ olduğundan Teorem 3.22 den

$$M - radN \subseteq M - rad(K \cap L) = M - radK \cap M - radL$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} (K : M)L &= \left[((Rm + N) : M) \right] (aM + N) = a \left[((Rm + N) : M) \right] M + \left[(Rm + N) : M \right] N \\ &= a(Rm + N) + (N : M)(Rm + N) = Ram + aN + (N : M)N + (N : M)m \\ &= Ram + aN + (N : M)N + (Rm : M)N \subseteq N \end{aligned}$$

Bu durumda

$$M - rad((K : M)L) \subseteq M - radN$$

olur. [14] Sonuç 2 den

$$M - rad((K : M)L) = M - rad((K : M)M) \cap M - radL = M - radK \cap M - radL$$

bulunur . Öyleyse

$$M - radN = M - radK \cap M - radL = P_1 \dots \cap P_r \cap Q_1 \cap \dots \cap Q_s$$

ve çelişki elde edilir. Sonuç olarak , M 'nin herhangi bir N alt modülü için $M - radN$ asal alt modüllerin sonlu kesişimidir. $\square$

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada halka ve modül teorisi anlatılarak birimli ve değişmeli bir halkanın idealleri ile çarpımsal modüllerin alt modülleri arasındaki benzerlikler kurulmuştur. Örneğin, halkalar için bilinen Cohen Teoremi ve Nakayama Lemma gibi bazı temel teoremler için çarpımsal modüllerin asal alt modülleri düşünülerek aradaki benzerlikler açık olarak gösterilmiştir.

Bunların yanı sıra, çalışmamızda sonlu üretilmiş modüller ve çarpımsal modüller arasındaki ilişkiye yer verilmiş ve ideallerin radikalleri için bilinen karakterizasyona benzer bir karakterizasyon çarpımsal modüllerin alt modüllerinin M -radikali için de sağlandığı gösterilmiştir.

Bundan sonra yapılacak olan çalışmalarda bir modülün çarpımsal modül olma şartının önemini ortaya çıkaran örnekler bulunabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Singh, S. and Mehdi, F.,(1979). "Multiplication Modules", Canad. Math. Bull., 22(1): 93-98
- [2] Barnard, A., (1981). "Multiplication Modules", Journal of Algebra, 71: 174-178.
- [3] Abd El Bast, Z. and Smith, P.F., (1988). "Multiplication Modules", Communications in Algebra, 16(4): 755-779.
- [4] Smith, P.F., (1988). "Some Remarks on Multiplications Modules", Arch. Math.,50: 223-235.
- [5] Ali, M.M., (2008). "Idempotent and Nilpotent Submodules of Multiplication Modules", Communications in Algebra, 36: 4620-4642.
- [6] Çallıalp, F. ve Tekir, Ü., (2009). Değişmeli Halkalar ve Modüller, Birsan Yayinevi, İstanbul.
- [7] Yeşilot, G. ve Özavşar, M., (2012). Soyut Cebir Çözümlü Problemleri, 1.Basım, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.
- [8] Sharp, R.Y., (2000). Steps in Commutative Algebra, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge.
- [9] Ameri, R.,(2002). "On the Prime Submodules of Multiplications Modules", Ijmms 2003, 27: 1715-1724.
- [10] Gaur, A., Kumar, A. and Parkash, A., (2007). "Prime Submodules in Multiplication Modules", International Journal of Algebra, 1(8): 375-380.
- [11] Mijbassand, A. S. and Abdullah, N. K., (2009). "Semi-Essential Submodules and Semi-Uniform Modules", Journal of Kirkuk University – Scientific Studies, 4(1): 48-58
- [12] Azizi, A.,(2008). "Principal Ideal Multiplications Modules", Algebra Colloquium, 15(4):637-648.
- [13] Ali, M.M., (2012). "Some Remarks on Multiplication and Flat Modules", Journal of Commutative Algebra, 4(1): 1-27
- [14] Lu, C. P.,(1990). "M-Radicals of Submodules in Modules 2", Math. Japonica, 35(5): 991-1001

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Neslihan SÜZEN
Doğum Tarihi ve Yeri : 28.08.1990 SAMSUN
Yabancı Dili : İngilizce , Fransızca
E-posta : suzenneslihan@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2013
Lisans	Matematik (İng.)	Abant İzzet Baysal Üniversitesi	2011
Lise	Fen Bilimleri	Vefa Anadolu Lisesi	2008