

Kısmi Türevli Dif. Denklemler

Yasar Özdemir

1973

MAT / 123

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

Demirbaş No:.....0.4.1 3714

Kısmi Türevli Diferensiel Denklemler

(Yeterlik Çalışması)

Yaşar Özdemir

Matematik Asistanı



İSTANBUL - 1973

G İ R İ Ő

Diferansiel denklemler teorisi, genel olarak, adf diferansiel denklemler ve Kismf turevli diferansiel denklemler olmak uzere, iki buyuk guruba ayrilir. Konumuz olan kismf turevli diferansiel denklemler once fizik problemleri dolayisiyle d'ALEMBERT ve EULER tarafından tetkik edilmiştir. Daha ileri calismalar arasında once CAUCHY görölmektedir. Bunlardan başka LAGRANGE, LAPLACE, MONGE, AMPERE ve PFAFF tarafından yapılan calismalara rastlanılmaktadır. Bilhassa LAGRANGE'in birinci mertebeden diferansiel denklemler hakkındaki eseri bu calismaların temeli olmuştur. Fakat kismf turevli diferansiel denklemler ve kismf turevli diferansiel denklemler sistemleri ile ilgili konuların ilk kesin araştırmalarını CAUCHY'e borçluyuz. CAUCHY tarafından bulunan teoremler M. DARBOUX ve Mme KOWALEWSKI tarafından ispat edilerek, derinlik kazanmışlardır.

Değişken katsayılı diferansiel denklemlere kadar olan calisma konum dört ana bölüm halinde incelenmiştir. Birinci bölümde kismf turevli diferansiel denklemlerin tanımı, bazı şartlar altında gözönüne alınan Varlık teoremi ile CAUCHY Problemleri verilmiştir.

İkinci bölüm olarak, birinci mertebeden lineer ve lineer olmayan kismf turevli diferansiel denklemler gözönüne alınmış olup, geniş bir şekilde incelenmeğe çalışılmıştır. Bilhassa adf diferansiel denklemlerdekinden çok daha farklı olan çözüm kavramı açıklığa kavuşturulmağa çalışılmıştır. Kismf turevli diferansiel denklemler teşkiline önem verilmiş olup, geometrik bir uygulama olarak da bazı yüzeylerin kismf turevli diferansiel denklemleri elde edilmiştir. Bu bölümde son olarak CAUCHY Probleminin çözümü ele alınmış ve bununla ilgili örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölümde yüksek mertebeden sabit katsayılı kismf turevli diferansiel denklemler geniş olarak ele alınmıştır. İlgili teoremler verildikten sonra çözülmüş örnek problemler ile gerek teoremlerin ifade ettiği naââ gerekse uygulama bakımından anlaşılır olmasına çalışılmıştır. Bilhassa sabit katsayılı diferansiel denklemlerin özel çözümlerinin aranmasında mühim görülen metodlar geniş olarak verilmiş olup, çözülmüş problemlerle bu metodlar pekiştirilmiştir.

Dördüncü bölümde ise tam diferansiel denklemler ele alınmıştır. Integre edilebilme şartları üç ve daha fazla Değişken için verilerek tam diferansiel denklemlerin bir keyfi sabite bağımlı çözümleri kabul edeceği gösterilmiştir.

Faydalandığım eserlerin listesi çalışmanın sonuna eklenmiştir.



İ Ç İ N D E K İ L E R

BÖLÜM I - KISMİ TÜREVİLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERE GİRİŞ

- 1) Tanım (1) - 2) Mertebe (1) - 3) Derece (1) - 4) Lagrange Notasyonları (2) - 5) Teorem (2) - 6) Teoremin geometrik anlamı (3) - 7) Teoremi sağlamayan özel haller (4) - 8) Teoremin geometrik anlamının genişletilmesi (4) - 9) Teorem (5) - 10) Cauchy Problemi (6) - 11) Tanımın genelleştirilmesi (6)

BÖLÜM II - BİRİNCİ MERTEBEDEN KISMİ TÜREVİLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

- 12) Tanım (7) - 13) Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin teşkili (7) - 14) Keyfi sabitlerin yok edilmesi (7) - 15) Keyfi fonksiyonların yok edilmesi (8) - 16) Silindirlerin kısmi türevli diferansiyel denklemleri (11) - 17) Konilerin kısmi türevli diferansiyel denklemleri (12) - 18) Konoidlerin kısmi türevli diferansiyel denklemleri (12) - 19) Dönel yüzeylerin kısmi türevli diferansiyel denklemleri (13) - 20) Tanım (14) - 21) Tam İntegral (15) - 22) Genel İntegral (15) - 23) Tekil integral (15) - 24) Tam ve Genel İntegral arasındaki ilişki (15) - 25) (18) - 26) n Bağımsız değişkenli ikinci taraflı (homogen) lineer denklemler (19) - 27) n Bağımsız değişkenli ikinci taraflı lineer denklemler (19) - 28) Teorem (20) - 29) Teorem (24) - 30) Üç değişkenli lineer denklemler (27) - 31) Tam İntegral (29) - 32) Tip I (37) - 33) Tip II (39) - 34) Tip III (41) - 35) Tip IV - Clairaut Denklemi (42) - 36) Birinci mertebeden kısmi türevli lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü için Lagrange-Charpit metodu (43) - 37) $F(x^m, p, y^n, q) = 0$ şeklindeki denklemlerin indirgenmesi (51) - 38) $F(z^k, p, z^k, q) = 0$ şeklindeki denklemlerin indirgenmesi (53) - 39) $F(x^m z^k, p, y^n z^k, q) = 0$ şeklindeki denklemlerin indirgenmesi (55) - 40) $F(z, x^m, p, y^n, q) = 0$ şeklindeki denklemlerin indirgenmesi (55) - 41) $F(x, z^k, p) = G(y, z^k, q)$ şeklindeki denklemlerin indirgenmesi (56) - 42) Cauchy problemi (57) - 43) Cauchy Karakteristikler metodu (60) - 44) Teorem (61) - 45) Teorem (65) - 46) Teorem (65) - 47) Cauchy Problemi (66) -

BÖLÜM III - YÜKSEK MERTEBEDEN KISMİ TÜREVİLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

- 48) Yüksek Mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin teşkili (69) - 49) Keyfi sabitlerin yok edilmesi (69) - 50) Keyfi fonksiyonların yok edilmesi (71) - 51) Tamamlayıcı fonksiyon (75) - 52) Teorem (76) - 53) Teorem (76) - 54) İndirgenebilir ve indirgenemez operatörler (77) - 55) Teorem (77) - 56) Teorem (78) - 57) Teorem (79) - 58) Teorem (79) - 59) Teorem (81) - 60) Tamam-

layıcı fonksiyon (83) - 61) Bir özel integralin aranması-Metod I (87) - 62) Bir özel integralin aranması-Metod II (90) - 63) İndirgenemez denklemler (93) - 64) Teorem (93) - 65) Teorem (93) - 66) İndirgenemez denklemlerin çözümü (94) - 67) Bir özel integralin aranması-Metod III (96) - 68) Bir özel integralin aranması-Metod IV (97) - 69) Bir özel integralin aranması-Metod V (100) - 70)

BÖLÜM IV - TAM DİFERANSİEL DENKLEMLER

70) Tanım (104) - 71) Tanımıyla integre edilebilen denklemler (105) - 72) $P(x,y,z) dx + Q(x,y,z) dy + R(x,y,z) dz = 0$ denkleminin integre edilebilme şartı (106) - 73) İntegrasyon çarpanı (107) - 74) Tanımıyla integre edilebilen denklemler (108) - 75) Teorem (109) - 76) Tam İntegral (110) - 77) Geometrik Gösteriliş (111) - 78) Tam diferansiel denklemin çözümü için diğer bir metod (114) - 79) Teorem (115)

FAYDALANILAN ESERLER (120)

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

diferansiel denklemin birinci mertebesi'dendir.

Bu denklemin çözümüne ilişkin olarak

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - z = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

denklemin ikinci mertebesi'den kısmi türevli bir diferansiel denklemdir.

4. BÖLÜM - Bir kısmi türevli diferansiel denklemin derecesi diye, denkleminde en yüksek mertebeli türevin derecesi denir.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

B Ö L Ü M I

KISMI TÜREVİLİ DİFERANSİEL DENKLEMLERE GİRİŞ

1. TANIM - x, y bağımsız değişkenlerinin bilinmeyen bir fonksiyonu z olsun. Bu z fonksiyonu ile bağımsız değişkenler ve bu bağımsız değişkenlere göre alınmış kısmî türevler arasında kurulan bağıntıya kısmî türevli diferansiel denklem denir. Bu diferansiel denklemlerin genel yazılışı

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}) = 0$$

şeklinde dir.

2. MERTEBE - Bir kısmî türevli diferansiel denklemde bulunan kısmî türevlerin mertebelerinin en yükseğine kısmî türevli diferansiel denklemin mertebesi denir.

Örneğin, kısmî türevli

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

diferansiel denklemi birinci mertebe'dendir.

Titreşen tellerin denklemi olan

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

denklemi ise ikinci mertebe'den kısmî türevli bir diferansiel denklemdir.

3. DERECE - Bir kısmî türevli diferansiel denklemin derecesi diye, tam ve rasyonel hale getirilen denklemde en yüksek mertebeli türevin derece'sine denir.

Örneğin,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

kısmî türevli diferansiel denkleminde her iki yanın kübü alınırsa,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^3$$

olur. Bu ise ikinci mertebeye'den, üçüncü derece'den kısmî türevli bir diferansiel denklemdir.

4. LAGRANGE NOTASYONLARI - Kısmî türevli diferansiel denklemlerin ifadelerini basitleştirmek için aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Buna göre, birinci mertebeden iki değişkenli kısmî türevli bir diferansiel denklemin genel şekli

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

olur.

(*)

5. TEOREM - n. mertebeden kısmî türevli bir diferansiel denklemin genel integrali n tane keyfî fonksiyon ihtiva eder.

Teoremin ispatını iki bağımsız değişkenli birinci mertebeden kısmî türevli

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (1)$$

diferansiel denklemini için verelim. Bu diferansiel denklemin $\frac{\partial z}{\partial x}$ e göre

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(x, y, z, q) \quad (2)$$

şeklinde çözülebildiğini, $\varphi(x, y, z, q)$ fonksiyonunun x bağımsız değişkenine göre ilk n ardışık türevinin mevcut ve $x = 0$ için sonlu olduğunu farzedelim, (Cauchy şartları). Bu şartların varlığı halinde (2) denkleminin $x = 0$ için $\psi(y)$ fonksiyonuna eşit olan $z(x, y)$ gibi bir çözümü vardır. $z(x, y)$ fonksiyonu Mac-Laurin serisine açılırsa,

$$z(x, y) = z(0, y) + \frac{x}{1!} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x=0} + \frac{x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{x=0} + \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \right)_{x=0} + \dots + \frac{x^n}{n!} \left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n} \right)_{x=0} + \dots$$

olur. Bu son bağıntıdaki

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x=0}, \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{x=0}, \quad \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \right)_{x=0}, \quad \dots, \quad \left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n} \right)_{x=0}, \quad \dots$$

katsayıları yalnız y nin fonksiyonlarıdır. Açılımın ilk terimi olan $z(0, y)$, hipotezimize göre $\Psi(y)$ fonksiyonuna eşittir. Buna göre $z(0, y) = \Psi(y)$ hipotezi gözönünde tutularak, açılımdaki diğer katsayıların hepsi (2) bağıntısından, $x = 0$ yazılarak bulunabilir. Gerçekten, ilk n terimdeki

$$z(0, y), \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x=0}, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{x=0}, \dots, \left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n} \right)_{x=0}$$

katsayılarının bilindiğini kabul edelim ve $n+1$ ci katsayının bulunabileceğini gösterelim. Bunun için (2) bağıntısının x bağımsız değişkenine göre $n-1$ def'a türevi alınırsa

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial y \partial x^{n-1}}\right) \quad (4)$$

bulunur. Böylece $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ ifadesi

$$z(0, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial y \partial x^{n-1}}$$

ifadelerine bağımlı olarak elde edilmiş olur. İlk n terim, y bağımsız değişkeninin fonksiyonu olup, bilindikleri kabul edilmiştir. Bunlar kısaca

$$\left(\frac{\partial^k z}{\partial x^k} \right)_{x=0} = \Psi_k(y) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)) \quad (5)$$

şeklinde yazılır ve y bağımsız değişkenine göre türev alınırsa

$$\left(\frac{\partial^{k+1} z}{\partial x^{k+1}} \right)_{x=0} = \Psi'_k(y) \quad (6)$$

bulunur. $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ katsayısının bağımlı olduğu $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial y \partial x^{n-1}}$ ifa-

deleri (6) bağıntısından $x = 0$ için bulunabileceğinden, $\left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n} \right)_{x=0}$ kat-

sayısı belirtilmiş olur. Şu halde açılımın ilk teriminin bilinmesi halinde, diğer terimler de sırasıyla hesaplanabilecektir. Açılım yakınsak ise $x = 0$ için $\Psi(y)$ fonksiyonuna eşit olan $z(x, y)$ çözümü elde edilir.

6. TEOREMİN GEOMETRİK ANLAMI - $F(x, y, z, p, q) = 0$ diferansiel denkleminin $z = \varphi(x, y)$ gibi öyle bir çözümü vardır ki $z = \varphi(x, y) = 0$ integral yüzeyi $x = 0$ düzleminin verilen $z = \Psi(y)$ eğrisinden geçsin.

7. TEOREMİ SAĞLAMAYAN ÖZEL HALLER - Cauchy şartları sağlanmazsa çözüm elde edilmeyebilir.

1°) $F(x, y, z, p, q) = 0$ diferansiel denklemi $\frac{\partial z}{\partial x}$ türevini ihtiva etmezse bulunan sonuç doğru değildir. Örneğin

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z \cdot \phi'(y) + \frac{\partial z}{\partial y}$$

olur. Verilen diferansiel denklemi verilmiş olsun. Bu denklemin çözümü, $\varphi(x)$ keyfî fonksiyon olmak üzere

$$z = \varphi(x) e^y$$

dir. Bu halde z fonksiyonu $x = 0$ düzlemini keyfî olmayan

$$z = \varphi(0) e^y = C e^y$$

özel eğrileri boyunca keser.

2°) $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(x, y, z, q)$ denkleminde $x = 0$ için $\frac{\partial z}{\partial x} = \infty$ olursa

yukarıda varılan sonuç doğru değildir. Örneğin

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

diferansiel denklemi verilmiş olsun. Bu denklemin çözümü $\psi(y)$ keyfî bir fonksiyon olmak üzere

$$z = \ln [x \psi(y)]$$

dir. Bu z fonksiyonu (3) serisine açılmaz.

8. TEOREMİN GEOMETRİK ANLAMININ GENİŞLETİLMESİ - Teoremin geometrik anlamı aşağıdaki şekilde genişletilebilir :

Verilen diferansiel denklem, çözüm olarak, $z = \varphi(x, y)$ gibi bir integral yüzeyi kabul etsin. Bu takdirde $z - \varphi(x, y) = 0$ yüzeyi uzayda verilen bir eğriden geçer.

Bu eğrinin denklemleri,

$$x = \phi(y), \quad z = \psi(y) \quad (7)$$

olsunlar. ξ, η yeni bağımsız değişkenler olmak üzere,

$$\xi = x - \phi(y), \quad \eta = y \quad (8)$$

değişken değişimini yapalım ve z fonksiyonunun x ve y bağımsız değişkenlerine göre kısmî türevlerini alalım :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \phi'(y) + \frac{\partial z}{\partial \eta}$$

olur. Verilen diferansiel denklem ile (5) , (6) , (7) bağıntıları arasında yine birinci mertebeden olan

$$F_1(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}) = 0$$

diferansiel denklemi elde edilir. Varlık teoremine göre bu diferansiel denklemin

$$z = \psi(\xi, \eta)$$

gibi bir integral yüzeyi vardır. Bu integral yüzey $\xi = 0$ için

$$z = \psi(0, \eta) = \psi(\eta)$$

eğrisinden geçer. Bunun sonucu olarak $F(x, y, z, p, q) = 0$ diferansiel denklemi

$$z = \psi(x - \phi(y), y)$$

çözümünü kabul edeceğinden , $z - \psi(x - \phi(y), y) = 0$ integral yüzeyi

$$x = \phi(y), \quad z = \psi(y)$$

eğrisinden geçer.

9. TEOREM - Birinci mertebeden kısmî türevli diferansiel denklemler için verilen varlık teoremi (prg-5) herhangi bir mertebeden diferansiel denklem için de gösterilebilir.

İki serbest değişkenli ikinci mertebeden kısmî türevli

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \quad (9)$$

diferansiel denklemini gözönüne alalım. Eğer bu diferansiel denklem r ye göre çözülebilirse,

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \psi(x, y, z, p, q, s, t) \quad (10)$$

şeklinde yazılabilir. Cauchy şartlarının sağlanması halinde varlık teoremi aşağıdaki gibi ifade edilebilir :

$\Psi_1(y)$ ve $\Psi_2(y)$ keyfî fonksiyonlar olmak üzere (9) denkleminin, $x = 0$ için

$$\left(z \right)_{x=0} = \Psi_1(y), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x=0} = \Psi_2(y) \quad (11)$$

olan bir çözümü vardır.

Gerçekten, (10) diferansiel denkleminin Mac-Laurin açılımındaki bütün katsayılar, (11) bağıntısındaki şartlar gözönünde tutularak, benzer şekilde hesaplanabilir. Elde edilen açılımın yakınsak olması halinde (9) denklemi bir çözüm kabul eder.

10. CAUCHY PROBLEMİ - a⁰) $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ diferansiel denkleminin, verilen $\Psi(y)$ eğrisinden geçen ve bu eğrinin her noktasında bir teğet düzlem kabul eden $z = \varphi(x, y)$ şeklinde bir integral yüzeyi vardır.

Bu diferansiel denklem y ve z türevli lineer diferansiel denklem t türevli diferansiel denklem "adını alır. Teğet düzlemin belirtilmesi için p ve q nun belirli olması gerekir. (11) bağıntısındaki ikinci denklem p yi, birincisinin de y ye göre türevi q yû verdiğiinden, teğet düzlem belirlidir. Problem bir çözüm kabul eder.

b⁰) Daha genel olarak denilebilir ki : $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ diferansiel denkleminin uzayın verilen keyfî bir eğrisinden geçen ve yine bu eğriden geçen bir yüzeye teğet olan $z = \varphi(x, y)$ gibi bir integral yüzeyi vardır.

11. TANIMIN GENELLEŞTİRİLMESİ . İki veya daha çok bağımsız değişkenli, bir veya daha çok fonksiyonla, bu fonksiyonların herhangi bir mertebeden kısmî türevleri ve bağımsız değişkenler arasında kurulmuş olan bir bağıntıya " Kısmî türevli diferansiel denklem " denir.

$$F(x, y, z, p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n, r_1, r_2, \dots, r_n, s_1, s_2, \dots, s_n, t) = 0 \quad (12)$$

$$F_1(x, y, z, p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n, r_1, r_2, \dots, r_n, s_1, s_2, \dots, s_n, t) + F_2(x, y, z, p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n, r_1, r_2, \dots, r_n, s_1, s_2, \dots, s_n, t) = 0 \quad (13)$$

bulunur. (12), (13) ve (14) bağıntıları arasında C_1, C_2 keyfî sabitleri ile ilişki kurulabilir. Birinci mertebeden kısmî türevli

$$\varphi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

diferansiel denklemini elde edilir.

ÖRNEK 1 - a ve b keyfi iki sabit olmak üzere

$$z = a x^3 + b y^3 \quad (15)$$

fonksiyonunun kısmî türevli diferansiyel denklemini kurunuz.

B Ö L Ü M II

Verilen z fonksiyonu x ve y bağımsız değişkenlerine göre kısmî türevleri alınarak :

BİRİNCİ MERTEBEDEN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

- 12. TANIM - x, y bağımsız değişkenleri ile p, q ve z fonksiyonu arasında kurulan bağıntıya " birinci mertebeden kısmî türevli diferansiyel denklem " denir ve genel olarak

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

şeklinde gösterilir.

Bu diferansiyel denklem p ve q ya göre birinci dereceden ise " kısmî türevli lineer diferansiyel denklem " denir. Aksi halde " lineer olmayan kısmî türevli diferansiyel denklem " adını alır.

13. KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TEŞKİLİ - Kısmî türevli diferansiyel denklemler, adı diferansiyel denklemlerin teşkilinde olduğu gibi, içinde keyfi sabit veya keyfi fonksiyon bulunan, verilen bir fonksiyon ile bu fonksiyonun bağımsız değişkenlerine göre alınan kısmî türevleri arasında, bu keyfi sabit veya keyfi fonksiyonun yok edilmesi sonucu olarak teşkil edilirler.

14. KEYFİ SABİTLERİN YOK EDİLMESİ - x, y bağımsız değişkenlerinin C_1 ve C_2 gibi iki keyfi sabiti bulunduran bir z fonksiyonu

$$F(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \quad (12)$$

olsun. Bu ifadenin x ve y bağımsız değişkenlerine göre kısmî türevleri alınarak

$$f'_x(x, y, z, C_1, C_2) + f'_z(x, y, z, C_1, C_2) p = 0 \quad (13)$$

$$f'_y(x, y, z, C_1, C_2) + f'_z(x, y, z, C_1, C_2) q = 0 \quad (14)$$

bulunur. (12), (13) ve (14) bağıntıları arasında C_1, C_2 keyfi sabitlerinin yok edilmesi sonucu olarak, birinci mertebeden kısmî türevli

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0$$

diferansiyel denklemini elde edilir.

ÖRNEK 1 - a ve b keyfî iki sabit olmak üzere

$$z = a x^3 + b y^3 \quad (15)$$

fonksiyonunun kısmî türevli diferansiel denklemini kurunuz.

Verilen z fonksiyonu x ve y bağımsız değişkenlerine göre kısmî türevleri alınır : :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = 3 a x^2 \quad (16)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = 3 b y^2$$

bulunur. (16) bağıntılarından çekilen a ve b değerleri (15) bağıntısına götürülerek, birinci mertebeden kısmî türevli

$$3 z = p x + q y \quad (17)$$

diferansiel denklemi elde edilir.

ÖRNEK 2 - a ve b keyfî iki sabit olduklarına göre

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = 4 \quad (18)$$

küresinin kısmî türevli diferansiel denklemini kurunuz.

Verilen fonksiyonun x ve y bağımsız değişkenlerine göre kısmî türevleri alınır ,

$$x - a + z p = 0 \quad (19)$$

$$y - b + z q = 0$$

bulunur. (19) bağıntılarından çekilen a ve b değerleri (18) bağıntısına götürülerek, birinci mertebeden ikinci dereceden kısmî türevli

$$z^2 (p^2 + q^2 + 1) = 0 \quad (20)$$

diferansiel denklemi elde edilir.

15. KEYFİ FONKSİYONLARIN YOK EDİLMESİ - x ve y bağımsız değişkenlerinin birbirinden müstakil iki fonksiyonu u(x,y,z) ve v(x,y,z) olsunlar. φ keyfî fonksiyon olmak üzere

$$u(x,y,z) = \varphi [v(x,y,z)] \quad (21)$$

fonksiyonunu gösönüne alalım. Bu bağıntıdaki φ keyfî fonksiyonunu yok etmeğe çalışalım.

(21) bağıntısının x, y bağımsız değişkenlerine göre kısmî türevleri alınır,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p &= \frac{\partial \varphi}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p \right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q &= \frac{\partial \varphi}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q \right) \end{aligned} \quad (22)$$

diferansiel denklemleri bulunur. (22) bağıntılarının taraf tarafa bölünmesi sonucu olarak, φ keyfî fonksiyonunu bulundurmayan

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p}{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q} &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p}{\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q} \end{aligned} \quad (23)$$

veya buradan

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p \right)$$

bağıntısına varılır. Bu bağıntı gerekli işlemler yapılarak p ve q ya göre düzenlenirse,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \right) p + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} \right) q + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

sonucuna varılır. Burada

$$\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} = P(x, y, z) = P$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} = Q(x, y, z) = Q$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = R(x, y, z) = R$$

ile gösterilerek

$$P \cdot p + Q \cdot q = R \quad (24)$$

diferansiel denklemi elde edilir.

ÖRNEK 3 - φ bir keyfî fonksiyon olmak üzere,

$$x y z = \varphi(x + y + z)$$

fonksiyonunun kısmî türevli diferansiel denklemini kurunuz.

Burada $x + y + z = v$ ile gösterilirse, verilen fonksiyon

$$x y z = \varphi(v) \quad (25)$$

şeklini alır. Bu fonksiyonun x ve y bağımsız değişkenlerine göre kısmî türevleri alınır, "denir. Bu uzay eğrisine silindirin doğrultması, doğruya da silindirin doğruya ada verilmesi denir.

$$\begin{aligned} y z + x y p &= \frac{\partial \varphi}{\partial v} (1 + p) \\ x z + x y q &= \frac{\partial \varphi}{\partial v} (1 + q) \end{aligned} \quad (26)$$

diferansiel denklemleri bulunur. Bu iki bağıntının oranlanması sonucu olarak φ keyfî fonksiyonunu bulundurmayan

$$\frac{y z + x y p}{x z + x y q} = \frac{1 + p}{1 + q} \quad (27)$$

ifadesine varılır. Buradan da gerekli işlemler yapılırsa kısmî türevli

$$x (y - z) p + y (z - y) q = z (x - y) \quad (28)$$

diferansiel denklemi elde edilir.

ÖRNEK 4 - $\varphi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0 \quad (29)$

keyfî fonksiyonunu yok ediniz.

Burada $x + y + z = u$, $x^2 + y^2 + z^2 = v$ ile gösterilirlerse $\varphi(u, v) = 0$ olur. Kısmî türevler alınarak :

$$\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} (1 + p) + \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} (2x + 2z p) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} (1 + q) + \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} (2y + 2z q) = 0$$

sistemine varılır. Bu homogen sistemin aşikâr olmayan bir çözümünün olabilmesi için

$$\begin{vmatrix} 1+p & 2x + 2zp \\ 1+q & 2y + 2zq \end{vmatrix} = (1+p)(2y+2zq) - (1+q)(2x+2zp) = 0$$

olmalıdır. Buradan da gerekli işlemler yapılarak

$$(y - z) p + (z - x) q = x - y \quad (30)$$

diferansiel denklemi elde edilir.

BAZI YÜZEYLERİN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ

16. SİLİNDİRLERİN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ - Bir doğrultuya paralel kalarak, verilen bir uzay eğrisine dokunan bir doğrunun meydana getirdiği yüzeye " silindir " denir. Bu uzay eğrisine silindirin doğrultmanı, doğruya da silindirin ana doğrusu adı verilir.

$$\left[F_1(x, y, z) = 0, F_2(x, y, z) = 0 \right] \quad (26)$$

uzay eğrisine, hareketli bir $M(\alpha, \beta, 0)$ noktasında dayanan ve $\Delta(a, b, 1)$ doğrultusuna paralel olan doğrunun denklemi

$$\frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \beta}{b} = \frac{z - 0}{1} \quad (27)$$

dır. Buradan x ve y bağımsız değişkenleri

$$\begin{aligned} x &= a z + \alpha \\ y &= b z + \beta \end{aligned} \quad (28)$$

şeklinde yazılabilir. (26) ve (27) bağıntıları arasında x , y ve z yok edilirse

$$\phi(\alpha, \beta) \quad \text{veya} \quad \beta = \psi(\alpha) \quad (29)$$

bulunur. Bu kere (28) ve (29) bağıntıları arasında α ve β yok edilirse, silindirlerin denklemi olarak

$$y - b z = \psi(x - a z) \quad (30)$$

elde edilir.

Şimdi silindirlerin kısmî türevli diferansiyel denklemlerini elde etmeğe çalışalım. Bunun için (30) bağıntısının x ve y bağımsız değişkenlerine göre kısmî türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned} -b p &= [\psi'(x - a z)](1 - a p) \\ 1 - b q &= [\psi'(x - a z)](-a q) \end{aligned} \quad (31)$$

bulunur. Buradaki $\psi'(x - a z)$ keyfî fonksiyonunu yok etmek için (31) bağıntıları taraf tarafa bölünürse

$$\frac{-b p}{1 - b q} = \frac{1 - a p}{-a q}$$

olur. Buradan da

$$a p + b q = 1 \quad (32)$$

elde edilir.

17. KONİLERİN KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ - Sabit bir $M(a, b, c)$ noktasından geçen ve verilen bir uzay eğrisine dokunan bir doğrunun meydana getirdiği yüzeye " koni " denir. Sabit M noktasına koni'nin tepesi, uzay eğrisine de koni'nin doğrultmanı adı verilir.

Sabit $M(a, b, c)$ noktasından geçen doğrunun denklemi

$$\frac{x - a}{\alpha} = \frac{y - b}{\beta} = \frac{z - c}{1}$$

veya

$$x - a = \alpha (z - c) , \quad y - b = \beta (z - c) \quad (33)$$

uzay eğrisinin denklemi ise

$$\left[F_1(x, y, z) = 0, F_2(x, y, z) = 0 \right] \quad (34)$$

olsun. (33) ve (34) bağıntıları arasında x, y, z nin yok edilmesi sonucu olarak,

$$\phi(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{veya} \quad \beta = \varphi(\alpha) \quad (35)$$

bulunur. Bu kere (33) ve (35) bağıntıları arasında α ve β yok edilirse, konilerin denklemi olarak

$$\frac{y - b}{z - c} = \varphi\left(\frac{x - a}{z - c}\right) \quad (36)$$

elde edilir.

Şimdi konilerin kısmî türevli diferansiyel denklemlerini arayalım. Bunun için (36) bağıntısının sırasıyla x ve y ye göre kısmî türevlerini alalım :

$$\frac{-(y - b) p}{(z - c)^2} = \varphi'\left(\frac{x - a}{z - c}\right) \cdot \frac{(z - c) - (x - a) p}{(z - c)^2}$$

$$\frac{(z - c) - (y - b) q}{(z - c)^2} = \varphi'\left(\frac{x - a}{z - c}\right) \cdot \frac{-(x - a) q}{(z - c)^2}$$

Bu iki bağıntı taraf tarafa bölünecek olursa, artık $\varphi'\left(\frac{x - a}{z - c}\right)$ keyfî fonksiyonun/içinde bulundurmayan,

$$(x - a) p + (y - b) q = z - c \quad (37)$$

sonucuna varılır.

18. KONOİTLERİN KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ - Verilen bir düzleme paralel kalarak ve verilen bir doğru ile verilen bir uzay eğrisine dokunan bir doğrunun meydana getirdiği yüzeye " konoit " denir.

Verilen düzleme doğrultman düzlem, sabit doğru ile eğriye doğrultman ve yüzeyi meydana getiren doğruya da ana doğru denir.

xOy düzlemini, doğrultman düzleme paralel ve doğrusal doğrultmanı da z eksenini olarak alalım. Bu takdirde α ve β birer parametre olmak üzere bir ana doğrunun denklemi

$$y = \alpha x, \quad z = \beta \quad (38)$$

olur. Eğrisel doğrultman denklemi ile, ana doğrunun denklemleri arasında x , y z yok edilirse

$$\phi(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{veya} \quad \beta = \psi(\alpha) \quad (39)$$

bulunur. Konoitlerin denklemi olarak, (38) ve (39) bağıntıları arasında α ve β yok edilerek

$$z = \psi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (40)$$

elde edilir.

Konoitlerin kısmî türevli diferansiyel denklemlerini elde etmek için (40) bağıntısının sırasıyla x ve y ye göre kısmî türevleri alınır,

$$p = \psi'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{-y}{x^2} \quad (41)$$

$$q = \psi'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}$$

bulunur. Bu iki bağıntının oranlanması sonucu olarak

$$p x + q y = 0 \quad (42)$$

elde edilir.

19. DÖNEL YÜZEYLERİN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ - Verilen bir eğri yayının, sabit bir doğru etrafında döndürülmesi ile meydana gelen yüzeye "dönel yüzey" denir. Verilen eğri yayına ana çizgi, sabit doğruya da dönel eksen adı verilir.

Verilen eğri yayı üzerindeki Her nokta, merkezi dönel eksen üzerinde bulunan birer çember çizerler. Dönel eksene dik olan bu çemberlerin geometrik yeri aranılan dönel yüzeyi verir.

Koordinat sisteminin başlangıç noktasını, dönel eksen üzerinde alalım. Bu takdirde dönel eksenin denklemi

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad (43)$$

olsun. Dönel eksene dik olan bir düzlemin denklemi, β bir parametre olmak üzere

$$a x + b y + c z = \beta \quad (44)$$

dır. Merkezi orijinde olan bir kürenin denklemi ise, α bir parametre olmak üzere

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha \quad (45)$$

şeklindedir. Dönel yüzeyi meydana getiren çemberleri, dönel eksene dik olan düzlemle (44), orijin merkezli kürenin (45), arakesiti olarak gözönüne alabiliriz. Bu takdirde çemberlerin denklemi

$$\left[a x + b y + c z = \beta, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \alpha \right] \quad (46)$$

olur. Verilen eğri yayının denklemi ile çemberlerin denklemleri arasında x, y, z yok edilirse

$$\phi(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{veya} \quad \beta = \psi(\alpha) \quad (47)$$

bulunur. Dönel yüzeylerin denklemini bulmak için (44), (45), (47) bağıntıları arasında α ve β yok edilirse

$$a x + b y + c z = \psi(x^2 + y^2 + z^2) \quad (48)$$

bağıntısına varılır. "genel integral" (intégrale générale) denir.

Dönel yüzeylerin kısmî türevli diferansiel denklemlerini bulmak için (48) bağıntısının sırasıyla x ve y ye göre kısmî türevleri alınır

$$a + c p = \psi'(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (2x + 2z p) \quad (49)$$

$$b + c q = \psi'(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (2y + 2z q)$$

bulunur. Bu iki bağıntının oranlanması sonucu olarak

$$(c y - b z) p + (a z - c x) q = b x - a y \quad (50)$$

elde edilir.

BİRİNCİ MÜRTEBEDEN KISMİ TÜREVİ DİFERANSİEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

20. TANIM - $F_1(x, y, z, C_1, C_2) = 0$ veya $F_2(x, y, z, \psi(x)) = 0$ fonksiyonlarının birinden elde edilen kısmî türevli diferansiel denklem,

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (51)$$

olsun.

$$z = \psi(x, y) \quad (52)$$

şeklinde bir fonksiyon düşünelim. Eğer bu fonksiyonun x ve y ye göre kısmî türevleri ile kendisi, (51) bağıntısında sırasıyla p, q, z yerlerine

yazıldığı zaman denklemi sağlıyorsa (52) bağıntısına

$$F(x,y,z,p,q) = 0$$

diferansiel denkleminin çözümü denir.

Geometrik bakımdan bu (52) denklemi bir yüzey denklemdir. Bu yüzeye (51) deki kısmî türevli diferansiel denklemin " integral yüzeyi " denilir.

21. TAM (İNTEGREL) İNTEGRAL - Kısmî türevli bir diferansiel denklemin çözümü C_1 ve C_2 iki keyfî sabit olmak üzere,

$$f(x,y,z,C_1,C_2) = 0 \quad (53)$$

şeklinde ise, bu çözüme " tam integral " (d'intégral complète) denir.

22. GENEL İNTEGRAL - Kısmî türevli bir diferansiel denklemin çözümü, $\varphi(x,y,z)$ keyfî bir fonksiyon olmak üzere,

$$f(x, y, z, \varphi(x, y)) = 0 \quad (54)$$

şeklinde ise, bu çözüme " genel integral " (intégrale générale) denir.

23. TEKİL İNTEGRAL - Kısmî türevli diferansiel denklemin tam integralindeki C_1 ve C_2 sabitlerine özel değerler verilerek veya genel integralindeki $\varphi(x,y)$ keyfî fonksiyonuna özel bir şekil verilerek elde edilemeyen bir çözümü varsa, bu çözüme " tekil integral " (intégrale singulière) denir.

24. TAM VE GENEL İNTEGRAL ARASINDAKİ İLİŞKİ - Tam integral ile genel integral birbirlerinden tamamen farklı degillerdir. Bu iki integralin birinden diğetine daima geçilebilir.

Genel çözümde bulunan $\varphi(x,y,z)$ keyfî fonksiyonu,örneğin

$$\varphi(x,y,z) = x + C_1 y + C_2 z$$

şeklinde seçilirse, tam integrale varılır. Benzer şekilde tam integralden genel integrale geçilebilir :

$$F(x,y,z,p,q) = 0 \quad (55)$$

kısmî türevli diferansiel denkleminin bir tam integrali,

$$f(x,y,z,C_1,C_2) = 0 \quad (56)$$

olsun. Övvelce de gördüğümüz gibi (55) denklemi

$$f(x, y, z, C_1, C_2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p = 0 \quad (57)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q = 0$$

sisteminden C_1 ve C_2 nin yok edilmesi ile elde edilmiştir (Bak:Prf-14).

Şimdi (55) denkleminin bütün çözümlerini bulmak için (56) denklemindeki C_1 ve C_2 yi, (55) denklemini sağlayacak şekilde x ve y bağımsız değişkenlerinin fonksiyonları olduklarını kabul edelim. Buna göre $C_1 = C_1(x, y)$, $C_2 = C_2(x, y)$ olarak alınırsa (56) bağıntısı

$$f[x, y, z, C_1(x, y), C_2(x, y)] = 0 \quad (58)$$

şeklini alır. Bu bağıntının x ve y bağımsız değişkenlerine göre kısmî türevleri alınırsa,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial C_1} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial C_2} \cdot \frac{\partial C_2}{\partial x} = 0 \quad (59)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial f}{\partial C_1} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial C_2} \cdot \frac{\partial C_2}{\partial y} = 0$$

olur. (57) ve (59) bağıntılarından

$$\frac{\partial f}{\partial C_1} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial C_2} \cdot \frac{\partial C_2}{\partial x} = 0 \quad (60)$$

$$\frac{\partial f}{\partial C_1} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial C_2} \cdot \frac{\partial C_2}{\partial y} = 0$$

bulunur. Elde edilen bu homogen sistem birçok tarzda sağlanabilir :

$$a^o) \quad \frac{\partial C_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial C_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial C_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial C_2}{\partial y} = 0 \quad \text{iseler, } C_1 \text{ ve } C_2$$

birer sabit olurlar. Bu takdirde (56) bağıntısındaki tam integral elde edilir.

$$b^o) \quad \frac{\partial f}{\partial C_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial C_2} = 0 \quad \text{iseler bu iki bağıntı ile (56) bağıntısı ara-}$$

sında C_1 ve C_2 yok edilirse

$$\phi(x, y, z) = 0$$

bulunur. Bir keyfî fonksiyon veya keyfî sabitleri içinde bulundurmayan bu ba-

Geometrik anlamı : (56) denklemi ,iki keyfî sabit ihtiva ettiğinden ∞^2 mertebeli yüzeyler topluluğu (congruence) dur. Uzayın her bir noktasından bu yüzeyler topluluğunda ∞ yüzey geçer.Bütün bu yüzeylerin hepsinin birden teğet olduğu bir yüzey arayalım :

$\frac{\partial f}{\partial c_1} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial c_2} = 0$ ile (56) bağıntıları arasında c_1 ve c_2 yi yok etmekten ibaret olan ve $\phi(x, y, z) = 0$ fonksiyonunu veren bu problem bir zarftan ibaret olur.

c^0) $\frac{\partial f}{\partial c_1}$ ve $\frac{\partial f}{\partial c_2}$ nin her ikisi birden sıfır değillerse (60) daki homogen sistemin sağlanabilmesi için

$$\frac{D(c_1, c_2)}{D(x, y)} = 0 \quad (61)$$

olmalıdır.Bu takdirde c_1 ve c_2 arasında bir bağıntı mevcut olur. Bu bağıntı,

$$\phi(c_1, c_2) = 0 \quad \text{veya} \quad c_2 = \psi(c_1) \quad (62)$$

olsun. (56) ve (60) bağıntılarında, $c_2 = \psi(c_1)$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\frac{\partial f}{\partial c_1} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial c_2} \cdot \frac{\partial c_2}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial c_1} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial c_2} \cdot \psi'(c_1) \cdot \frac{\partial c_1}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial c_1} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial c_2} \cdot \frac{\partial c_2}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial c_1} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial c_2} \cdot \psi'(c_1) \cdot \frac{\partial c_1}{\partial y} = 0$$

veya

$$\frac{\partial c_1}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial c_1} + \frac{\partial f}{\partial c_2} \cdot \psi'(c_1) \right] = 0$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial y} \left[\frac{\partial f}{\partial c_1} + \frac{\partial f}{\partial c_2} \cdot \psi'(c_1) \right] = 0$$

bulunur. Buradan bir tek denklem olarak,

$$\frac{\partial f}{\partial c_1} + \frac{\partial f}{\partial c_2} \psi'(c_1) = 0 \quad (63)$$

bağıntısı elde edilir. (56) , (62) ve (63) bağıntıları arasında c_1 ve c_2 yok edilirse, ϕ keyfî fonksiyonunu ihtiva eden

$$\Psi(x, y, z, \varphi) = 0 \quad (64)$$

sonucuna varılır. Bu denklemle belirlenen z fonksiyonuna (55) diferansiel denkleminin genel integrali denir.

Geometrik Anlamı : (56) denklemi, iki keyfî sabit ihtiva ettiğinden ∞^2 mertebeli bir yüzeyler topluluğu (congruence) dur. Bu yüzeyler topluluğundan seçilen ∞^1 tane yüzeyin zarfı aranılacak olursa (64) ile belirlenen $\Psi(x, y, z, \varphi) = 0$ denklemi çıkacaktır. Gerçekten, $C_2 = \varphi(C_1)$ kabul etmek demek, (56) denkleminin sadece C_1 keyfî sabitini ihtiva ettiğini düşünmek demektir. Böylece ∞^2 tane olan yüzeyler topluluğundan, bir gurup yüzeyi seçmekteyiz. Bu yüzeylerin zarfını aramak ise, (56), (62) ve (63) bağıntıları arasında C_1 ve C_2 yi yok etmek demektir.

Yukarıda görüldüğü gibi, tam integral ve genel integral arasında esaslı bir fark yoktur. Gerçekten, C_1 ile C_2 arasında, diğer iki a ve b keyfî sabitlerini ihtiva eden

$$C_2 = \varphi(C_1, a, b) \quad (65)$$

bağıntısını gözönüne alalım. Bu bağıntı ile (56) ve (60) bağıntıları arasında C_1 ve C_2 nin yok edilmesi $F(x, y, z, p, q) = 0$ diferansiel denkleminin bir genel integralini verecektir. Ancak bu genel integral a ve b keyfî sabitlerine bağlı olacağından bir tam integral rolünü de oynayacaktır. C_1' ve C_2' sabit değerlerine karşı gelen önceki tam integral ise, genel integrale dahil olacak ve a ile b nin x ve y bağımsız değişkenlerinin fonksiyonu olarak alınması halinde,

$$C_2' = \varphi(C_1', a, b) \quad (66)$$

bağıntısından elde edilecek genel integral olacaktır.

Tekil integral ise geometrik anlamından da anlaşılacağı gibi bir tam integralin seçiminden tamamen bağımsızdır.

BİRİNCİ MERTEBEDEN KISMİ TÜREVİLİ LİNEER VE LİNEER OLMAYAN DİFERANSİEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM METODLARI

25. Birinci mertebeden kısmî türevli diferansiel denklemlerin çözümlerine girmeden önce, çözümle ilgili teoremlerin ispatlarında yakın ilişkileri görülecek olan

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3} = \dots = \frac{dx_n}{x_n} \quad (67)$$

adî diferansiel denklem sistemini gözönüne alalım. Burada

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

fonksiyonları $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ bağımsız değişkenlerinin analitik fonksiyonlarıdır. Adî diferansiel denklemler teorisinden bilindiği gibi, bu sistem X_i fonksiyonlarının tanımlandığı bölgenin herhangi bir noktasından geçen

$$f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = C_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

şeklindeki $n-1$ denklemi, integraller olarak kabul eder. Yine bilindiği gibi bu f_i denklemlerinin teşkil ettiği sistem tek değildir. f_i denklemleri yerine bu denklemlere bağlı olan $n-1$ sayıda F_i denklemleri konulabilir. f_i fonksiyonları nasıl seçilmiş olurlarsa olsunlar

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_i$$

denklemleri (67) sisteminin genel integralleri iseler, bu f_i fonksiyonları birinci mertebeden kısmî türevli bir diferansiel denklemi sağlarlar. Bu husus ileride gösterilecektir.

26. n BAĞIMSIZ DEĞİŞKENLİ İKİNCİ TARAFSIZ (HOMOGEN) LİNEER DENKLEMLER -

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ bağımsız değişkenlerinin

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

şeklindeki fonksiyonları $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ olsunlar. Bu bağımsız değişkenlerin bir bilinmeyen fonksiyonu z olmak üzere

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial z}{\partial x_3} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

veya

$$\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0$$

diferansiel denklemine ikinci tarafsız (Homogen) lineer denklem denir.

27. n BAĞIMSIZ DEĞİŞKENLİ İKİNCİ TARAFLI LİNEER DENKLEMLER - $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ bağımsız değişkenlerinin ve z bilinmeyen fonksiyonunun

$$X_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z); \quad z = Z(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$$

şeklindeki fonksiyonları $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ve Z olsunlar. Bu bağımsız

değişkenlerin bir bilinmeyen fonksiyonu z olmak üzere

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial z}{\partial x_3} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = z$$

veya

$$\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = z$$

diferansiel denklemine ikinci taraflı lineer denklem denir.

28. TEOREM - Birinci mertebeden kısmî türevli, n bağımsız değişkenli

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \dots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad (68)$$

diferansiel denkleminin çözümü ile

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \frac{dx_3}{X_3} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} \quad (69)$$

adî diferansiel denklem sisteminin (yardımcı sistem) çözümü birbiriyle eşdeğerlidir.

İspat : Önce (69) sisteminin bir ilk integralinin (68) diferansiel denklemini de sağladığını gösterelim.

Gerçekten, (69) sistemini sağlayan bir ilk integral,

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = C \quad (70)$$

olsun. Buradan diferansiel alınarak

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} dx_3 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (71)$$

bulunur. $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ yerine (69) bağıntısındaki orantılı değerleri yazılırsa

$$X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial x_3} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \quad (72)$$

diferansiel denklemine varılır. $x_1, x_2, \dots, x_n$ bağımsız değişkenleri arasında (70) bağıntısı varsa (69) denklemlerini sağlayan bütün $x_1, x_2, \dots, x_n$ değerleri için (72) diferansiel denklemi gerçekleşir.

O halde

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$$

ilk integrali, (68) diferansiel denkleminin de integrali olur.

Karşıt olarak, (68) denkleminin bir integrali φ olsun. $\varphi = C$ (69) sisteminin de bir integralidir.

Görsekten,

$$x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0$$

diferansiel denklemleri idantik olarak sağlanır. (69) denklemlerinin integrallerinin meydana getirdiği herhangi bir sistem için

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n = 0$$

yazılabilir. Bu ise

$$d\varphi = 0$$

demektir. Sistemin bütün integralleri için

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{sabit}$$

olur. O halde $\varphi = C$, (69) denkleminin bir integralidir.

Şimdi $f_1, f_2, \dots, f_k$, (68) denkleminin integralleri iseler ϕ bir keyfi fonksiyon olmak üzere

$$\phi = \phi(f_1, f_2, \dots, f_k) \quad (73)$$

funksiyonu da (68) denkleminin bir integralidir.

$f_1, f_2, \dots, f_k$, (68) denkleminin çözümü olduklarından

$$x_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f_i}{\partial x_3} + \dots + x_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} = 0 \quad (74)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, k)$$

olurlar. Şimdi (73) bağıntısında gözönüne alınan ϕ keyfi fonksiyonunun da (68) denkleminin bir integrali olduğunu gösterelim. Bunun için (68) denkleminde f yerine ϕ yazılırsa,

$$X_1 \left(\frac{\partial \phi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial f_3} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial f_n} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right) +$$

$$X_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi}{\partial f_3} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial f_n} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right) +$$

.....
.....

$$X_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi}{\partial f_3} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial f_n} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \right) =$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial f_1} \left(X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \dots + X_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right) +$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial f_2} \left(X_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \dots + X_n \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right) +$$

.....
.....

$$\frac{\partial \phi}{\partial f_k} \left(X_1 \frac{\partial f_k}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_k}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial f_k}{\partial x_3} + \dots + X_n \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial \phi}{\partial f_i} \left(X_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial f_i}{\partial x_3} + \dots + X_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right)$$

şeklinde yazılabilir. (74) bağıntıları gereğince bu son ifade sıfıra eşit olup, ϕ (68) diferansiel denkleminin çözümüdür.

$$X_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \dots + X_n \frac{\partial \phi}{\partial x_n} = 0$$

yazılabilir,

Daha genel olarak (68) denkleminin $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ gibi (n-1) tane birbirinden farklı integrali olsunlar. Bu takdirde

$$f = \phi(f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$$

fonksiyonu (68) denkleminin genel integrali olur.

Gerçekten, bunun bir genel integral olduğunu gösterelim. $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ den başka ψ integrali mevcut olsun. Bu takdirde n bilinmeyenli ve n denklemden meydana gelen,

$$X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \dots + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0$$

$$X_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial f_i}{\partial x_3} + \dots + X_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

homogen sistemi elde edilir. Bu homogen sistemin aşıkâr çözümüden başka bir çözümünün olabilmesi için ,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

katsayılar determinanti sıfır olmalıdır. Bu determinant kısaca

$$\frac{D(\psi, f_1, f_2, \dots, f_{n-1})}{D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)} = 0$$

şeklinde de yazılabilir. Bu ise kendi aralarında mustakil olan f_1 fonksiyonları ile ψ fonksiyonu arasında, bağımsız değişkenlere tabi olmayan bir bağıntının varlığını ifade eder. Dolayısıyla

$$\eta(\psi, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}) = 0$$

şeklinde bir bağıntı mevcut olur. Buradan ψ fonksiyonunun f_1 fonksiyonlarından biri olduğu hesaplanabilir. Şu halde (68) denkleminin bütün integrallerini bulmak için (69) sisteminin genel integrallerini bulmak gerekecektir. Bu integraller

$$f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2, \quad f_3 = C_3, \quad \dots, \quad f_{n-1} = C_{n-1}$$

iseler, ϕ keyfî fonksiyon olmak üzere, (68) diferansiel denkleminin genel integrali

$$f = \phi(f_1, f_2, f_3, \dots, f_{n-1})$$

olur.

Ö R N E K :

$$(x_1+1) \frac{\partial z}{\partial x_1} + (x_2+2) \frac{\partial z}{\partial x_2} + (x_3+3) \frac{\partial z}{\partial x_3} + \dots + (x_n+n) \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

diferansiel denkleminin genel integralini bulunuz.

Yardımcı sistem

$$\frac{dx_1}{x_1+1} = \frac{dx_2}{x_2+2} = \frac{dx_3}{x_3+3} = \dots = \frac{dx_n}{x_n+n}$$

dir. Buradan bulunan

$$\frac{x_2+2}{x_1+1} = C_1, \quad \frac{x_3+3}{x_1+1} = C_2, \quad \dots, \quad \frac{x_n+n}{x_1+1} = C_{n-1}$$

ifadeleri ilk integraller olurlar. ϕ bir keyfî fonksiyon olmak üzere,

$$z = \phi\left(\frac{x_2+2}{x_1+1}, \frac{x_3+3}{x_1+1}, \dots, \frac{x_n+n}{x_1+1}\right)$$

fonksiyonu genel integral olur.

29. TEOREM - Birinci mertebeden kısmî türevli, n bağımsız değişkenli

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \dots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = Z \quad (75)$$

lineer diferansiel denkleminin integrasyonu ikinci tarafsız diferansiel denklemin integrasyonuna getirilebilir. Burada, X_i ve Z fonksiyonları $x_1, x_2, \dots$

.., x_n bağımsız değişkenlerinin ve f bilinmeyen fonksiyonunun, fonksiyonlarıdır.

İ s p a t : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ bağımsız değişkenlerinin, f bilinmeyen fonksiyonu

$$\phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, f) = 0 \quad (76)$$

kapalı fonksiyonu ile verilmiş olsun. Şimdi bu ϕ fonksiyonunu, (75) denklemini sağlayacak şekilde belitmeğe çalışalım. Bunun için (76) denklemi ile verilen ϕ fonksiyonunun $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ bağımsız değişkenlerine göre kısmî türevleri alınır

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_n} + \frac{\partial \phi}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

bulunur. Kısaca

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

şeklinde de yazabileceğimiz bu bağıntılardan çekilen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}}{\frac{\partial \phi}{\partial f}}$$

değerleri (75) diferansiel denklemine götürülürse,

$$x_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \dots + x_n \frac{\partial \phi}{\partial x_n} + z \frac{\partial \phi}{\partial f} = 0 \quad (77)$$

homogen denkleme varılır. Bu denklemin integrasyonu ise daha önce görüldüğü gibi

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3} = \dots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{df}{z} \quad (78)$$

sisteminin integraline denk'tir. (78) sisteminin birbirinden farklı ilk n integrali

$$f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, f) = C_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

olsun. Bu takdirde (77) denkleminin bir genel integrali

$$\phi = \phi(f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)$$

olur. Şu halde (75) de gözönüne alınan ikinci taraflı diferansiel denklemin genel integrali, ϕ bir keyfî fonksiyon olmak üzere

$$\phi(f_1, f_2, f_3, \dots, f_n) = 0 \quad (79)$$

şeklinde olacaktır. Ancak (76) denklemi ile tanımlanan

$$\phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, f) = 0$$

fonksiyonunun (75) diferansiel denkleminin bir integrali olması için (77) bağıntısının sağlanması gerekir. Bu bağıntı,

- a) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, f$ ne olursa olsun (özdeş olarak),
 b) $\phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, f) = 0$ fonksiyonuna uyan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, f$ değerleri için,

sağlanabilir. Şu halde (77) bağıntısının özdeş olarak sağlanması halinde bulunan

$$\phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, f) = 0$$

fonksiyonunun en genel çözüm olduğu aşıkârdır denemez. Bununla beraber bu çözüme sadece, keyfî sabitleri ihtiva etmeyen tekil integrallerin girmediği gösterilebilir. Gerçekten, (75) denkleminin

$$\psi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, f) = C$$

şeklinde bir çözümü mevcut olsun. (77) bağıntısının elde edilişindeki hesapların tekrarı ile

$$x_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \dots + x_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} + f \frac{\partial \psi}{\partial f} = 0 \quad (80)$$

bulunur. C sabitini ihtiva etmeyen bu bağıntının

$$\psi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, f) = C$$

fonksiyonuna uyan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, f$ değerleri için sağlanması gerekmektedir. Halbuki C keyfî olduğundan (80) denklemi $x_1, x_2, \dots, x_n, f$ nin keyfî değerleri için, yani özdeş olarak gerçekleşir. O halde $\psi = C$ fonksiyonu $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ nin bir fonksiyonudur. ve

$$\phi(f_1, f_2, f_3, \dots, f_n) = 0$$

genel integraline dahildir. Şu halde (77) denkleminin integrasyonu sadece keyfî sabit ihtiva etmeyen tekil integralleri vermez.

30. ÜÇ DEĞİŞKENLİ LİNEER DENKLEMLER - n bağımsız değişkenli lineer denklemler için 29 da verilen teoremin ispatını, üç değişkenli lineer denklemlerin gözönüne alınması halinde geometrik olarak elde etmek mümkündür.

Gerçekten; x, y, z değişkenlerinin P, Q, R bilinen fonksiyonlarını gözönüne alalım. Bu fonksiyonlar bir uzay bölgesinde sürekli ve kısmi türevlere sahip olsunlar. Bu takdirde bir lineer denklem

$$Pp + Qq = R \quad (81)$$

şeklinde yazılır. Doğrultu katsayıları P, Q, R olan ve herhangi bir $M(x, y, z)$ noktasından geçen bir D doğrusunun denklemi

$$\frac{X - x}{P} = \frac{Y - y}{Q} = \frac{Z - z}{R} \quad (82)$$

dir. Böylece uzayın her noktasına bir D doğrusu tekabül eder. Şimdi $z = \varphi(x, y)$ integral yüzeyini gözönüne alalım. Bu yüzeyin herhangi bir $M(x, y, z)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemi ise

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y) \quad (83)$$

olur. (81) bağıntısı D doğrusunun, $z = \varphi(x, y)$ yüzeyinin normaline dikliğini ifade eder. O halde teğet düzlem D doğrusunu ihtiva eder.

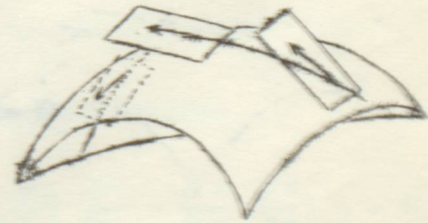
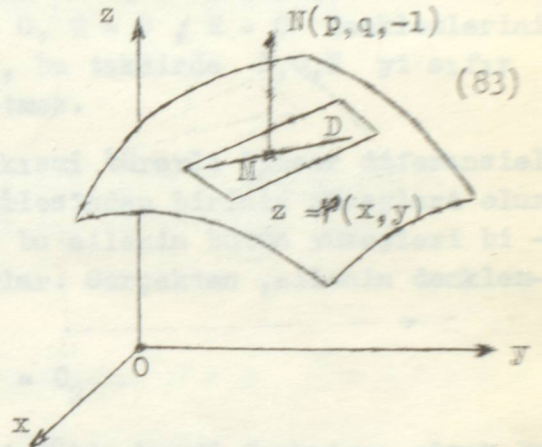
Şu halde, eğer uzayın bir noktasından geçen bütün yüzeyler gözönüne alınırsa bu yüzeylerin bu noktadaki teğet düzlemleri bu noktaya ait D doğrusundan geçerler. Her noktasında, bu noktaya ait D doğrusuna teğet olan bir eğriye karakteristik eğri denir. Integral yüzey karakteristik eğrilerin meydana getirdiği yüzeydir. Şu halde bu diferansiel denklemi çözmek için, karakteristik eğrilerin meydana getirdiği diferansiel denklem sistemine kurmak gerekir. Herhangi bir $M(x, y, z)$ noktasından geçen bir karakteristik eğrinin teğetinin diferansielleri dx, dy, dz olsunlar. Bu teğetin; doğrultu katsayıları P, Q, R olan D doğrusuna paralelliği yazılırsa,

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad (84)$$

adî diferansiel denklem sistemine varılır. Bu sistemi sağlayan karakteristik eğrilerin denklemleri,

$$u(x, y, z) = C_1 \quad ; \quad v(x, y, z) = C_2$$

olsunlar. C_1 ve C_2 , keyfî integral sabitleri olduklarından, bu eğriler ∞^2 tane olup, bir aile (congruence) teşkil ederler. Genel olarak x, y, z nin başlangıç değerleri verilirse, bu ailenin tamamen belirlenen bir eğrisi elde edilir. Ailenin



eğrileri ile meydana getirilen bütün yüzeyler kısmî türevli lineer denklemin, tamamıyla keyfî bir kanuna göre bağdaştırılan bir integralidir. Çünkü böyle bir yüzeyin her noktasından yüzey üzerine yerleştirilmiş bir C karakteristik eğrisi geçer. Dolayısıyla de teğet düzlem, bu noktaya göre D doğrusu demek olan C nin teğetini ihtiva eder.

Karşıt olarak, eğer S bir integral yüzey ise, S üzerine yerleştirilen karakteristik eğrilerde bir sonsuzluk mevcut olur. Zira herhangi bir M noktasındaki teğet düzlem D ye tekabül eden doğruyu ihtiva eder. Dolayısıyla S integral yüzeyinin her noktasında bu noktaya tekabül eden D doğrusu yüzeye teğet olur ve yüzey üzerine çizilen eğrilerde ve D doğrusuna tekabül eden her noktasındaki teğetlerinde bir sonsuzluk bulunacaktır. Bu bize, geometrik olarak gösteriyor ki bütün integral yüzeyler, C_1 ve C_2 keyfî sabitlerini $\varphi(C_1, C_2) = 0$ şeklinde keyfî bir bağıntı ile birbirine bağlayarak elde edilirler. Bu ise,

$$\varphi(u, v) = 0$$

bağıntısının, kısmî türevli lineer denklemin, bütün integral yüzeylerini vermesi demektir. Ancak gözönüne alınan yüzeyler, eğer $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ denklemlerini sağlıyorlarsa, D doğrusu belirsiz olur. Gerçekten, bu takdirde P, Q, R yi sıfır yapan x, y, z noktasına bir D doğrusu tekabül etmez.

Sonuç olarak görülmüştür ki, birinci mertebede kısmî türevli lineer diferansiyel denklemlerin bütün integral yüzeyleri, eğriler ailesinden birinin yüzeyleri olurlar. Karşıt olarak, verilen herhangi bir aile ve bu ailenin bütün yüzeyleri birinci mertebeden lineer denklemlerden birini sağlar. Gerçekten, ailenin denklemleri,

$$u(x, y, z) = C_1 \quad ; \quad v(x, y, z) = C_2$$

olsunlar. Ailenin herhangi bir yüzeyinin denklemi, φ bir keyfî fonksiyon olmak üzere

$$\varphi(u, v) = 0 \quad (85)$$

şeklinde olacaktır. Bu denklemle tanımlanan z değişkenini, x ve y bağımsız değişkenlerinin fonksiyonu olduğunu gözönüne alarak kısmî türevler hesaplanırsa,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p \right) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q \right) = 0$$

homogen sistemine varılır. φ keyfî fonksiyonu, u ve v fonksiyonlarına bağımlı olduğundan

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

kısmî türevleri, aynı anda sıfır olamazlar. Bu takdirde homogen sistemin bir çözümünün olması için ,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q \end{vmatrix} = 0 \quad (90)$$

determinantı sıfır olmalıdır. Birinci mertebeden kısmî türevli bir diferansiel denklem veren bu determinantın açılımı

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} + \frac{D(u,v)}{D(z,y)} p + \frac{D(u,v)}{D(x,z)} q = 0 \quad (86)$$

şeklinde yazılabilir.

31. TAM İNTEGRAL (Intégral complète) - $u(x,y,z) = C_1$, $v(x,y,z) = C_2$,
(84) sisteminin bir çözümü iseler, α ve β keyfî iki sabit olmak üzere,

$$u = \alpha v + \beta \quad (87)$$

ifadesi de, (81) denkleminin bir çözümüdür. Bu çözüme Tam İ n t e g r a l denir.

Gerçekten, (87) bağıntısında, x ve y bağımsız değişkenlerine göre kısmî türevler alınırsa,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p = \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha \frac{\partial v}{\partial z} p \quad (88)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q = \alpha \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha \frac{\partial v}{\partial z} q$$

bulunur. Bu iki bağıntı taraf tarafa bölünür ve düzenlenirse,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \right) p + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} \right) q = 0 \quad (89)$$

veya

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} + \frac{D(u,v)}{D(z,y)} p + \frac{D(u,v)}{D(x,z)} q = 0 \quad (89')$$

elde edilir. Böylece $\varphi(u, v) = 0$ integral yüzeyinin sağladığı (86) diferansiel denklemine tekrar varılmış olur. $u = \alpha v + \beta$ çözümü, α ve β keyfî sabitlerine göre lineer olduğundan, bir zarfa sahip olmayan yüzey ailesi gösterir. Böyle olmakla beraber, bu yüzey ailesi içinden bir zarfa sahip olan bir parametrelî yüzey ailesi seçmek mümkündür. Şöyleki, β keyfî sabiti, α keyfî sabitinin bir fonksiyonu olduğunu farzedelim ve

$$\beta = f(\alpha)$$

yazalım. Buna göre (87) bağıntısı,

$$u = \alpha v + f(\alpha) \quad (90)$$

şeklini alır. Bu bağıntının α ya göre türevi alınırsa,

$$0 = v + f'_{\alpha}(\alpha) \quad (91)$$

bulunur. (90) denklemleri ile belirlenen bir parametrelî yüzey ailesinin zarfı, (90) ve (91) bağıntıları arasında α parametresi yok edilerek bulunur. (91) bağıntısından çekilen

$$\alpha = \lambda(v)$$

ifadesi, (90) bağıntısına götürülürse, genel integralin bir kısmı olan,

$$u = v \cdot \lambda(v) + f[\lambda(v)] = \mu(v) \quad (92)$$

sonucuna varılır. $f(\alpha)$, α nın bir keyfî fonksiyonu ise, $\mu(v)$ de v nin bir keyfî fonksiyonudur. Böylece elde edilen (92) ifadesi genel çözüm olur. Şu halde diyebiliriz ki, birinci mertebeden kısmî türevli bir diferansiel denklemin genel integrali, tam integralden elde edilebilen bir parametrelî, (90) şeklindeki, ailelerin zarflarıdır. β , α ya bağımlı değilse zarf mevcut değildir, dolayısıyla genel çözüm, bir tam çözümden elde edilemez.

Ö R N E K :

$$(x^2 - y^2 - z^2) p + 2 x y q = 2 x z \quad (93)$$

kısmî türevli diferansiel denkleminin, yardımcı sisteminden elde edilen çözümler

$$\frac{y}{z} = C_1 \quad ; \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = C_2$$

olduğuna göre,

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = \alpha \frac{y}{z} + \beta \quad (94)$$

nın (93) denkleminin bir çözümü (tam integral) olduğunu gösterelim.

(94) bağıntısından x ve y bağımsız değişkenlerine göre kısmî türevler alınır,

$$2x + 2z p = 0 + \beta p$$

$$2y + 2z q = \alpha + \beta q$$

bulunur. Buradan çekilen,

$$\alpha = \frac{2(p y - q x)}{p}, \quad \beta = \frac{2(x + z p)}{p}$$

değerleri (94) bağıntısına götürülürse

$$(x^2 - y^2 - z^2) p + 2 x y q = 2 x z$$

elde edilir.

Yukarıda iki bağımsız değişken olması halinde, tam integral için verilen yazılış şekli, ikiden fazla bağımsız değişkenli lineer denklemler için de kolayca genişletilebilir. Buna göre, bir yardımcı sistemin çözümleri,

$$u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, \quad u_3 = C_3, \quad \dots, \quad u_{n-1} = C_{n-1}$$

iseler, tam integral

$$u_{n-1} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \dots + \alpha_{n-2} u_{n-2} + \alpha_{n-1}$$

şeklinde yazılır.

Ç Ö Z Ü M L Ü Ö R N E K L E R

ÖRNEK 1. Daha önce bazı yüzeylerin kısmî türevli diferansiel denklemlerin elde etmiştik. Şimdi bu yüzeylerin, 7,8,9,10. paragraflarda verilen kısmî türevli diferansiel denklemlerinin integrasyonunu görelim :

a⁰) Silindirlerin kısmî türevli diferansiel denklemi

$$a p + b q = 1$$

dir. (Paragraf - 7). Buna göre yardımcı sistem,

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

olur.

$$\frac{dx}{a} = \frac{dz}{1} \quad \text{den} \quad x - a z = C_1 \quad ;$$

$$\text{olur.} \quad \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1} \quad \text{den de} \quad y - b z = C_2$$

bulunur. Buna göre, genel integral

$$y - b z = \varphi(x - a z)$$

olur.

b^o) Konoidlerin kısmî türevli diferansiel denklemi

$$(x - a) p + (y - b) q = z - c$$

dir. (Paragraf - 8). Buna göre yardımcı sistem

$$\frac{dx}{x - a} = \frac{dy}{y - b} = \frac{dz}{z - c}$$

olur.

$$\frac{dx}{x - a} = \frac{dz}{z - c} \quad \text{den} \quad x - a = C_1(z - c) \quad \text{veya} \quad C_1 = \frac{x - a}{z - c} ;$$

$$\frac{dy}{y - b} = \frac{dz}{z - c} \quad \text{den de} \quad y - b = C_2(z - c) \quad \text{veya} \quad C_2 = \frac{y - b}{z - c}$$

bulunur. Buna göre, genel integral,

$$\frac{y - b}{z - c} = \varphi\left(\frac{x - a}{z - c}\right)$$

olur.

c^o) Konoidlerin kısmî türevli diferansiel denklemi

$$p x + q y = 0$$

dir. (Paragraf - 9). Buna göre yardımcı sistem

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}$$

olur.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad \text{den} \quad \frac{x}{y} = C_1 \quad ; \quad dz = 0 \quad \text{den} \quad z = C_2$$

bulunur. Buna göre, genel integral,

$$z = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

olur.

d^o) Dönel yüzeylerin kısmî türevli diferansiyel denklemi

$$(c y - b z) p + (a z - c x) q = b x - a y$$

dir. (Paragraf - 10). Buna göre yardımcı sistem

$$\frac{dx}{c y - b z} = \frac{dy}{a z - c x} = \frac{dz}{b x - a y}$$

dir. Bu sistemde, birinci a , ikinci b , üçüncü c ile çarpılıp toplanırsa,

$$\frac{a dx + b dy + c dz}{a c y - a b z + a b z - b c x + b c x - a c y} = \frac{a dx + b dy + c dz}{0}$$

yazılır. Buradan,

$$a dx + b dy + c dz = 0$$

veya integral alınarak,

$$a x + b y + c z = C_1$$

bulunur. Bu sistemde bu defa birinci x , ikinci y , üçüncü z ile çarpılıp toplanırsa,

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{c x y - b x z + a y z - c x y + b x z - a y z} = \frac{x dx + y dy + z dz}{0}$$

yazılır. Buradan da

$$x dx + y dy + z dz = 0$$

veya integral alınarak,

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2$$

bulunur. Buna göre genel integral

$$a x + b y + c z = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$$

olur.

ÖRNEK 2 . $p x (x + y) = q y (x + y) - (x - y)(2x + 2y + z)$
kısmî türevli diferansiel denkleminin integrasyonu :

Verilen diferansiel denklemi

$$x(x + y) p - y(x + y) q = -(x - y)(2x + 2y + z)$$

şeklinde yazalım. Buna göre yardımcı sistem,

$$\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{-y(x+y)} = \frac{dz}{-(x-y)(2x + 2y + z)}$$

olur.

$$\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{-y(x+y)} \quad \text{veya} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} \quad \text{den de} \quad x y = C_1 \quad \text{bulunur.}$$

Yardımcı sistemden, orantı özeliği kullanılarak

$$\frac{dx + dy}{(x + y)(x - y)} = \frac{dz}{-(x - y)(2x + 2y + z)}$$

yazılabilir. $x + y = t$, $dx + dy = dt$ konularak

$$\frac{dt}{t} = \frac{dz}{-(2t + z)}$$

homogen diferansiel denklemine gelinir. Bu denklem çözülürse,

$$(x + y)^2 + z (x + y) = C_2$$

elde edilir. Bunlara göre , genel integral

$$(x + y)^2 + z (x + y) = \varphi(x y)$$

ve tam integral

$$x y = \alpha (x + y)^2 + z (x + y) + \beta$$

olarak bulunur.

ÖRNEK 3 . Teğet düzlemleri verilen $M(a, b, c)$ noktasından geçen bütün yüzeylerin denkleminin bulunması :

Verilen $M(a, b, c)$ noktasından geçen teğet düzlemlerin doğrultu katsayıları $x-a$, $y-b$, $z-c$ olurlar. $\Delta(p, q, -1)$ normal doğrultusuna göre diklik şartı uygulanacak olursa,

$$(x - a) p + (y - b) q = z - c$$

Buna göre yardımcı sistem ,

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b} = \frac{dz}{z-c}$$

olur.

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b} \quad \text{den} \quad C_1 = \frac{y-b}{x-a} ;$$

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dz}{z-c} \quad \text{den} \quad C_2 = \frac{z-c}{x-a}$$

bulunur. Bunlara göre genel integral

$$z-c = (x-a) \varphi\left(\frac{y-b}{x-a}\right)$$

ve tam integral

$$y-b = \alpha(z-c) + \beta(x-a)$$

olarak elde edilir.

ÖRNEK 4. $x_1 p_1 - x_2 p_2 + x_3 p_3 = 2x_4$

kısmî türevli diferansiyel denkleminin integrasyonu :

Verilen denklemin yardımcı sistemi olarak,

$$\frac{dx_1}{x_1} = -\frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3} = \frac{dx_4}{2x_4}$$

yazılır.

$$\frac{dx_1}{x_1} = -\frac{dx_2}{x_2} \quad \text{den} \quad C_1 = x_1 x_2$$

$$\frac{dx_2}{-x_2} = \frac{dx_3}{x_3} \quad \text{den} \quad C_2 = x_2 x_3$$

$$\frac{dx_3}{x_3} = \frac{dx_4}{2x_4} \quad \text{den} \quad C_3 = \frac{x_4^2}{x_3}$$

bulunur. Bunlara göre genel integral,

$$x_4^2 = x_3^2 \varphi(x_1 x_2, x_2 x_3)$$

tam integral ise

$$x_1 x_2 = \alpha x_2 x_3 + \beta \frac{x_4^2}{x_3} + \gamma$$

olarak bulunur.

ÖRNEK 5. $(x_3 - x_2) p_1 + x_2 p_2 - x_3 p_3 = x_2(x_1 + x_3) - x_2^2$

Kısmi türevli diferansiyel denkleminin integrasyonu :

Yardımcı sistem olarak,

$$\frac{dx_1}{x_3 - x_2} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{-x_3} = \frac{dx_4}{x_2(x_1 + x_3) - x_2^2}$$

yazılır.

$$\frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{-x_3} \quad \text{den} \quad C_1 = x_2 x_3, \quad x_3 = \frac{C_1}{x_2}$$

bulunur. x_3 ün bu değerini yardımcı sistemde x_3 yerine koyalım.

$$\frac{dx_1}{\frac{C_1}{x_2} - x_2} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{\frac{C_1}{x_2}} = \frac{dx_4}{x_2(x_1 + \frac{C_1}{x_2}) - x_2^2}$$

olur.

$$\frac{dx_1}{\frac{C_1}{x_2} - x_2} = \frac{dx_2}{x_2} \quad \text{den} \quad dx_1 = \frac{C_1}{x_2} dx_2 - dx_2$$

yazılır ve integre edilirse

$$x_1 = \frac{-C_1}{x_2} - x_2 + C_2$$

olur. $\frac{C_1}{x_2}$ nin yerine x_3 yazılırsa

$$x_1 = C_2 - x_2 - x_3 \quad \text{veya} \quad C_2 = x_1 + x_2 + x_3$$

bulunur. x_1 in bu değeri yardımcı sistemde x_1 yerine konursa

$$\frac{dx_1}{C_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{-C_1} = \frac{dx_4}{C_2 x_2 - 2x_2^2} ;$$

$$\frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_4}{C_2 x_2 - 2x_2^2} \quad \text{den} \quad (C_2 - 2x_2) dx_2 = dx_4$$

yazılır. Bu ifade integre edilir ve $C_1 = x_1 + x_2 + x_3$ konursa

$$C_3 = x_4 - x_1 x_2 - x_2 x_3$$

bulunur. Bunlara göre , genel integral

$$\varphi(x_2 x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_4 - x_1 x_2 - x_2 x_3) = 0$$

tam integral ise

$$x_2 x_3 = \alpha (x_1 + x_2 + x_3) + \beta (x_4 - x_1 x_2 - x_2 x_3) + \gamma$$

olarak bulunur.

BİRİNCİ MERTEBEDEN KİSMİ TÜREVİLİ LİNEER OLMAYAN ÖZEL DENKLEMLER

32. TİP I . Yalnız p ve q nın fonksiyonu olan $f(p, q) = 0$ şeklindeki denklemler :

Verilen diferansiyel denklemde $p = a$ yazalım. $f(a, q) = 0$ veya $q = \varphi(a)$ olur. Aranılan integral yüzey z ise,

$$dz = p dx + q dy = a dx + \varphi(a) dy$$

yazılır. Buradan integral alınarak

$$z = a x + \varphi(a) y + b \quad (95)$$

bulunur. Çözüm a ve b gibi iki keyfi sabit ihtiva ettiğinden tam integral olur. Çözümüne alınan $f(p, q) = 0$ tipinin tekil integrali yoktur. Çünkü,

$$a x + \varphi(a) y + b - z = 0$$

çözümünün a ve b keyfi sabitlerine göre türevlerinden elde edilen

$$x + \psi'(a) y = 0$$

$$1 \neq 0$$

bağıntıları ortak çözüm vermez. (95) bağıntısı iki keyfi sabit ihtiva ettiğinden ∞^2 tane düzlemler ailesi gösterir. Bunlardan ∞^1 tanesi, $C = \psi(a)$ konularak seçilirse

$$z = a x + \psi(a) y + \psi(a) \quad (96)$$

olur. Bu bağıntı bir parametrelili yüzey ailesi gösterir. ve zarfı açılabilir (reglé) yüzey'dir. (96) bağıntısı ile, bu bağıntının a parametresine göre türevi olan

$$x + \psi'(a) y + \psi'(a) = 0$$

bağıntısı arasında a parametresi yok edilirse, genel integral elde edilir. $\psi(a)$ fonksiyonu a nin bilinen bir fonksiyonu olarak seçilirse, yine genel integralin bir kısmı olan, (96) denkleminin belirlediği yüzey ailesinden bir kısma ait tekil integral elde edilebilir.

ÖRNEK 1. $2 p = q (p - 1)$ kısmî türevli diferansiel denkleminin integrasyonu :

$$p = a \text{ konursa } q = \frac{2a}{a-1} \text{ olur. Buna göre}$$

$$dz = p dx + q dy = a dx + \frac{2a}{a-1} dy$$

den ,

$$z = a x + \frac{2a}{a-1} y + b$$

tan integrali elde edilir. Denklemin tekil integrali yoktur. $b = \psi(a)$ alınırsa

$$z = a x + \frac{2a}{a-1} y + \psi(a)$$

olur. Bu bağıntının a parametresine göre türevinden

$$0 = x + \frac{-2}{(a-1)^2} y + \psi'(a)$$

bulunur. Bu son iki bağıntı ise genel integrali verir.

Özel olarak $b = 0$ alalım, (b , a nin uygun ve bilinen bir fonksiyonu olarak da alınabilir). Bu takdirde

$$z = a x + \frac{2a}{a-1} y$$

denklemi ile belirlenen bir kısım yüzey seçmiş oluruz. Bu yüzeylerin tekil integralini arayalım. Buradan a parametresine göre türev alınır

$$0 = x - \frac{2}{(a-1)^2} y$$

bulunur. Buradan çekilen $a = 1 + \sqrt{\frac{2y}{x}}$ değeri

$$z = a x + \frac{2a}{a-1} y$$

bağıntısına götürülürse

$$z = \left(1 + \sqrt{\frac{2y}{x}}\right) x + \frac{2\left(1 + \sqrt{\frac{2y}{x}}\right)}{\sqrt{\frac{2y}{x}}} y$$

veya gerekli işlemler yapılarak

$$(z - x - 2y)^2 = 8xy$$

bulunur.

ÖRNEK 2. $p_1 p_2 - p_1 p_3 + p_2 p_3 = 0$ kısmî türevli diferansiel denkleminin integrasyonu :

$p_1 = a$, $p_2 = b$ konulursa, $p_3 = \frac{ab}{b-a}$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned} dz &= p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 \\ &= a dx_1 + b dx_2 + \frac{ab}{b-a} dx_3 \end{aligned}$$

den

$$z = a x_1 + b x_2 + \frac{ab}{b-a} x_3 + C$$

tam integrali elde edilir.

33. TİP II. - x ve y bağımsız değişkenlerini ihtiva etmeyen,

$$f(z, p, q) = 0 \quad (97)$$

şeklindeki denklemler :

a bir keyfî sabit olmak üzere $q = a p$ olduğunu farzedelim. Böylece denklemin

$$f(z, p, a p) = 0$$

şeklini alır. Buradan

$$p = \varphi(z, a) , \quad q = a \varphi(z, a)$$

bulunur. (97) denkleminin bir integral yüzeyi z ise,

$$dz = p dx + q dy$$

olur. Bu bağıntıda p ve q yerine, yukarıda bulunan değerleri yazılırsa

$$dz = \varphi(z, a) dx + a \varphi(z, a) dy$$

veya düzenlenerek,

$$\frac{dz}{\varphi(z, a)} = dx + a dy = d(x + ay)$$

bulunur. Bu son bağıntı integre edilerek

$$\int \frac{dz}{\varphi(z, a)} = x + a y + b \quad (98)$$

tam integrali elde edilir. Bu bağıntının a ve b keyfî sabitlerine göre kısmî türevleri alınarak bulunacak iki denklem ile (98) bağıntısı arasından a ve b keyfî sabitleri yok edilerek (97) denkleminin tekil integrali elde edilir.

Ö R N E K : 1 - $z = p^2 - q^2$ kısmî türevli diferansiel denkleminin integrasyonu :

a bir keyfî sabit olmak üzere $q = a p$ yazılırsa,

$$p = \pm \sqrt{\frac{z}{1-a^2}}, \quad q = \pm a \sqrt{\frac{z}{1-a^2}}$$

bulunur. Buna göre

$$dz = \sqrt{\frac{z}{1-a^2}} dx + a \sqrt{\frac{z}{1-a^2}} dy$$

veya

$$\sqrt{\left(\frac{z}{1-a^2}\right)^{-1}} dz = dx + a dy = d(x + ay)$$

olur. İntegral alınırsa,

$$\sqrt{(1-a^2)z} = 2(x + a y + b)$$

tam integrali bulunur. a ve b keyfî parametrelerine göre kısmî türev alınarak bulunan bağıntıların ortak çözümleri olmadığından tekil integral yoktur.

Ö R N E K : 2 - $z p q = p + q$ kısmî türevli diferansiel denkleminin integrasyonu :

a keyfî bir sabit olmak üzere

$x + a y = s$, $z = f(x + a y)$ ye göre lineer olduğundan
olduklarını farzedelim. x ve y bağımsız değişkenlerine göre türev alınır

$$p = \frac{dz}{ds} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{dz}{ds} \quad q = \frac{dz}{ds} \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{dz}{ds} a$$

bulunur. Bu p , q değerleri verilen diferansiel denkleme götürülürse,

$$a z \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = \frac{dz}{ds} + a \frac{dz}{ds}$$

$$a z \frac{dz}{ds} = 1 + a$$

$$z dz = \frac{1+a}{a} ds$$

ve integre edilerek

$$\frac{z^2}{2} = \frac{1+a}{a} s + b$$

veya

$$z^2 = 2 \cdot \frac{1+a}{a} (x + a y) + b$$

tam integrali bulunur. Tekil integrali yoktur.

34 . TİP III - z fonksiyonunu ihtiva etmeyen kısmî türevli bir diferansiel denklemin

$$f_1(x, p) = f_2(y, q)$$

şeklinde yazılabiliyorsa, " ayrılabilen denklem " denir.

a bir sabit olmak üzere

$$f_1(x, p) = a \quad , \quad f_2(y, q) = a$$

olsun. Bu iki bağıntıdan

$$p = \varphi_1(x, a) \quad , \quad q = \varphi_2(y, a)$$

bulunur. Verilen diferansiel denklemin bir integral yüzeyi z ise,

$$dz = p dx + q dy = \varphi_1(x, a) dx + \varphi_2(y, a) dy$$

yazılabilir. Bu bağıntıyı integre edilirse a ve b keyfî sabitlerini ihtiva eden

$$z = \int \varphi_1(x, a) dx + \int \varphi_2(y, a) dy + b$$

şeklindeki tam integral elde edilir. Tam integral b ye göre lineer olduğundan tekil integral yoktur.

Ö R N E K : $p^2 q (x^2 + y^2) = p^2 + q$ kısmî türevli diferansiel denklemin nin integrasyonu :

Verilen diferansiel denklem

$$q (p^2 x^2 - 1) = p^2 (1 - q y^2) \quad (100)$$

veya

$$\frac{p^2 x^2 - 1}{p^2} = \frac{1 - q y^2}{q}$$

şekline getirilebilir. a bir keyfî sabit olmak üzere

$$\frac{p^2 x^2 - 1}{p^2} = a, \quad \frac{1 - q y^2}{q} = a$$

denirse,

$$p = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a}}, \quad q = \frac{1}{y^2 + a}$$

olur. Denklemin bir integral yüzeyi z olsun. Bu takdirde

$$dz = p dx + q dy = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a}} dx + \frac{1}{y^2 + a} dy$$

yazılır. Bu bağıntıdan integral alınarak

$$z = \ln(x + \sqrt{x^2 - a}) + \frac{1}{\sqrt{a}} \arctg \frac{y}{\sqrt{a}} + b$$

tam integraline varılır.

35. TİP IV - CLAIRAUT DENKLEMİ : Birinci mertebeden kısmî türevli Clairaut denklemleri

$$z = p x + q y + f(p, q) \quad (99)$$

şeklindedir.

Verilen denklemin bir tam integrali

$$z = a x + b y + f(a, b)$$

şeklinde yazılabilir. Gerçekten bu bağıntının x ve y bağımsız değişkenlerine göre kısmî türevleri $p = a$, $q = b$ dir. a ve b nin bu değerleri (99) bağıntısının

götürülürse, verilen

$$z = p x + q y + f(p, q)$$

diferansiel denklemini elde edilir. (99) da elde edilen çözüm a ve b gibi iki keyfî sabit ihtiva ettiğinden tam integral olur. a ve b parametrelerine göre (99) bağıntısının kısmî türevleri alınır

$$\begin{aligned} 0 &= x + f'_a(a, b) \\ 0 &= y + f'_b(a, b) \end{aligned} \quad (100)$$

bulunur. (99) ve (100) bağıntıları arasında a ve b parametrelerinin yok edilmesi sonucu tekil integral elde edilir, (mevcutsa). Bu taktirde tekil integral, tam integrali teğet düzlemler olarak kabul eden bir yüzey olur.

Ö R N E K : $z = p x + q y + p q$ kısmî türevli diferansiel denkleminin integrasyonu :

Verilen diferansiel denkleminde $p = a$, $q = b$ yazılırsa

$$z = a x + b y + a b \quad (101)$$

tam integrali elde edilir. İki parametrelî düzlemler ailesi olan bu integralin a ve b parametrelerine göre kısmî türevleri

$$0 = x + b \quad ; \quad 0 = y + a$$

olur. Bu iki bağıntıdan çekilen a ve b değerleri, (101) bağıntısına götürülürse, tekil integral olarak

$$z = - x y$$

elde edilir.

36. BİRİNCİ MERTEBEDEN KISMI TÜREVLİ LİNEER VE LİNEER OLMAYAN DİFERANSİEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN LAGRANGE-CHARPIT METODU

Birinci mertebeden herhangi bir kısmî türevli diferansiel denklem

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (102)$$

olsun. Bu diferansiel denklemin bir tam integralini arayalım. Şimdi (102) diferansiel denklemini

$$\phi(x, y, z, p, q) = a \quad (103)$$

şeklinde bir integralinin bulunabildiğini ve (102) ve (103) denklemlerinin intere edilebilir bir sistem teşkil ettiklerini farzedelim. Bu takdirde (102) ve (103) den

$$p = \varphi(a, x, y, z) \quad , \quad q = \psi(a, x, y, z)$$

olarak çekilmiş olsun. (102) nin bir integral yüzeyi z ise bu p ve q ifadeleri ile birlikte

$$dz = p dx + q dy = \varphi(a, x, y, z) dx + \psi(a, x, y, z) dy \quad (104)$$

yazılabilir. Bu (104) diferansiyeli integre edilebilirse (tam diferansiyel ise), yani bir b integral sabitini alacak ve böylece z integral yüzeyi a, b keyfî sabitlerini ihtiva eden bir tam integral olacaktır. Bunun için,

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p \quad (105)$$

olmalıdır. Şimdi x, y, z yi bağımsız değişkenler, p ve q yâ da bu bağımsız değişkenlerin fonksiyonları gibi gözönüne alarak (102) ve (103) ifadelerinin kısmî türevleri hesaplanırsa,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (106)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (106')$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \quad (106'')$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial z} = 0$$

sistemlerine varılır. Buradan,

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} & \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} & \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{vmatrix}} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} & \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{- \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} & \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{- \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} & \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{vmatrix}}$$

olarak bulunurlar. Yukarıdaki ifadelerin yazılışlarını kısaltmak için,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Z, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = Q \quad (107)$$

ile gösterelim, Buna göre

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{- \begin{vmatrix} P & X \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} & \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P & Q \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} & \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{- \begin{vmatrix} Y & Q \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P & Q \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} & \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{vmatrix}} \quad (108)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{- \begin{vmatrix} Z & Q \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P & Q \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} & \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{- \begin{vmatrix} P & Z \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P & Q \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} & \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{vmatrix}}$$

olurlar. $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$, $\frac{\partial q}{\partial z}$ nin (108) bağıntılarındaki değerleri, (105) bağıntısına götürülür ve paydalarının eşitliği de gözönüne alınırsa,

$$\begin{vmatrix} Y & Q \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Z & Q \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial q} \end{vmatrix} q = \begin{vmatrix} P & X \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} & \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P & Z \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} p$$

veya determinant açılımları yapılır ve düzenlenirse

$$P \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \phi}{\partial y} + (P p + Q q) \frac{\partial \phi}{\partial z} - (X + p Z) \frac{\partial \phi}{\partial p} - (Y + q Z) \frac{\partial \phi}{\partial q} = 0 \quad (109)$$

sonucuna varılır. Bu bağıntı beş değişkenli bir lineer denklemdir. Aranılan ϕ fonksiyonu bu lineer denklemin bir çözümüdür. O halde ϕ fonksiyonunu bulmak için,

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{P p + Q q} = \frac{-dp}{X + p Z} = \frac{-dq}{Y + q Z} \quad (110)$$

yardımcı sistemi integre edilerek

$$\phi(x, y, z, p, q) = a$$

şeklinde bir özel integral aranmalıdır.

Verilen diferansiel denklem,

$$F(x, y, p, q) = 0$$

şeklinde olup, z fonksiyonunu ihtiva etmiyorsa (109) bağıntısının yerini

$$P \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \phi}{\partial y} - X \frac{\partial \phi}{\partial p} - Y \frac{\partial \phi}{\partial q} = 0 \quad (111)$$

bağıntısı alır. Bu takdirde yardımcı sistem,

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{-dp}{X} = \frac{-dq}{Y} \quad (112)$$

olur.

Ç Ö Z Ü M L Ü Ö R N E K L E R

ÖRNEK 1. $p q - z = 0$ kısmî türevli diferansiel denkleminin integrasyonu :

Verilen denklem için (107) bağıntısından ,

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -1, \quad P = p, \quad Q = q$$

bulunur. Bu ifadeler (110) bağıntısına götürülürse,

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{-dp}{-p} = \frac{-dq}{-q}$$

sisteme varılır. Buradan seçilen

$$\frac{dy}{p} = \frac{dp}{p} \quad \text{den} \quad p = y - a$$

ilk integrali elde edilir. Bu p değeri verilen denkleme götürülürse,

$$q = \frac{z}{y - a}$$

olur. Bunlara göre ,

$$dz = p dx + q dy = (y - a) dx + \frac{z}{y - a} dy$$

veya

$$dx = \frac{dz}{y - a} - \frac{z dy}{(y - a)^2} = d\left(\frac{z}{y - a}\right)$$

yazılır. Bu bağıntı integre edilirse

$$x = \frac{z}{y - a} + b$$

veya

$$z = (x - b)(y - a)$$

sonucuna varılır.

ÖRNEK 2. $16 z^2 p^2 + 25 z^2 q^2 + 9 z^2 - 81 = 0$

kısmî türevli diferansiel denkleminin tam, tekil ve genel integrallerini bulalım :

Verilen denklem için,

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 32 z^2 p^2 + 50 z^2 q^2 + 18 z, \quad P = 32 z^2 p, \quad Q = 50 z^2 q$$

olurlar. Bunlara göre

$$\frac{dx}{32 z^2 p} = \frac{dy}{50 z^2 q} = \frac{dz}{32 z^2 p^2 + 50 z^2 q^2 + 18 z} = \frac{-dp}{32 z^3 p + 50 z^2 p q + 18 z p} = \frac{-dq}{32 z^2 p q + 50 z^3 q + 18 z q}$$

yazılır. Buradan seçilen,

$$\frac{dx}{-32 z^2 p} = \frac{dz}{-32 z^2 p^2 - 50 z^2 q^2} = \frac{dp}{32 z p^3 + 50 z p q^2 + 18 z p}$$

sisteminde orantı özeliği kullanılırsa

$$\frac{9 dx + 16 p dz + 16 z dp}{-288 z^2 p - 512 z^2 p^3 - 800 z^2 p q^2 + 512 z^2 p^3 + 800 z^2 p q^2 + 288 z^2 p} = \frac{9 dx + 16 p dz + 16 z dp}{0}$$

olur ve

$$9 dx + 16 p dz + 16 z dp = 9 dx + 16 d(p z) = 0$$

veya p çekilerek,

$$p = -\frac{9}{z} \left(\frac{x-a}{16} \right)$$

bulunur. p nin bu değerine karşılık denklemden,

$$q = \pm \frac{9}{5z} \sqrt{1 - \frac{z^2}{9} - \frac{(x-a)^2}{16}}$$

olarak hesaplanır. Bunlara göre,

$$dz = p dx + q dy = -\frac{9}{z} \left(\frac{x-a}{16} \right) dx + \frac{9}{5z} \sqrt{1 - \frac{z^2}{9} - \frac{(x-a)^2}{16}} dy$$

veya düzenlenerek,

$$dy = \frac{5 \left[\frac{z}{9} dz + \frac{x-a}{16} \right] dx}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{9} - \frac{(x-a)^2}{16}}} = 5 d \left(\sqrt{1 - \frac{z^2}{9} - \frac{(x-a)^2}{16}} \right)$$

yazılır. Bu son bağıntı integre edilirse,

$$y - b = 5 \sqrt{1 - \frac{z^2}{9} - \frac{(x-a)^2}{16}}$$

elde edilir. Bu bağıntının karesi alınır ve düzenlenirse,

$$\frac{(x-a)^2}{16} + \frac{(y-b)^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$$

tan integraline varılır. Bu denklem merkezi (a ; b ; 0) ve eksen uzunlukları sırasıyla 8 , 10 , 6 olan bir elipsoid gösterir.

Tekil integrali bulmak için, a ve b parametrelerine göre kısmî türevler alınır

$$\frac{x-a}{8} = 0, \quad \frac{2(y-b)}{25} = 0$$

ve buradan da

$$a = x, \quad b = y$$

bulunur. a ve b nin bu değerleri tan integrale götürülürse

$$z^2 - 9 = 0$$

tekil integrali elde edilir. Şimdi genel integrali arayalım : Bunun için $b = \varphi(a)$ olarak ∞^2 tane yüzeyden bir parametrelili bir yüzey ailesi seçelim;

$$\frac{(x-a)^2}{16} + \frac{(y-\varphi(a))^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$$

olur. Bu denklemin a parametresine göre türevi alınır

$$-\frac{x-a}{8} - \frac{2(y-\varphi(a))\varphi'(a)}{25} = 0$$

bulunur. Bu son iki denklem arasında a parametresi yok edilirse φ keyfi fonksiyonunu ihtiva eden genel integrale varılır.

ÖRNEK 3. $(p^2 + q^2) y = q z$ kısmî türevli diferansiyel denkleminin integrasyonu : $(p^2 + q^2) y - q z = 0$

Verilen denklem için ,

$$X = 0, \quad Y = p^2 + q^2, \quad Z = -q, \quad P = 2 p y, \quad Q = 2 q y - z$$

olur. Bunlara göre,

$$\frac{dx}{2 p y} = \frac{dy}{2 q y} = \frac{dz}{2 p y + 2 q y - z} = \frac{-dp}{-p q} = \frac{-dq}{p^2 + q^2 - q^2}$$

yazılır.

$$\frac{dp}{p q} = \frac{-dq}{p^2} \quad \text{den} \quad p^2 + q^2 = a \quad \text{veya} \quad p = \pm \sqrt{a - q^2}$$

bulunur. Verilen denklemlerde $p = \pm \sqrt{a - q^2}$ konarak

$$q = \frac{a y}{z}, \quad p = \pm \frac{\sqrt{a^2 z^2 - a^2 y^2}}{z^2}$$

elde edilir. Bunlara göre

$$dz = p dx + q dy = + \frac{\sqrt{a z^2 - a^2 y^2}}{z} dx + \frac{a y}{z} dy$$

veya buradan dx çözümlenerek,

$$a dx = + \frac{a z dz - a^2 y dy}{\sqrt{a z^2 - a^2 y^2}} = + d(\sqrt{a z^2 - a^2 y^2})$$

yazılabilir. Bu bağıntı integre edilirse, a ve b keyfî sabitlerini ihtiva eden

$$(a x + b)^2 + a^2 y^2 = a z^2$$

tam integraline varılır. Bu bağıntının a ve b parametrelerine göre kısmî türevleri alınır,

$$2(a x + b) \cdot a + 2 a y^2 = z^2 \quad \text{ve} \quad 2(a x + b) = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu son üç bağıntı arasında a ve b parametreleri yok edilirse

$$z = 0$$

tekil integrali bulunur. Tam integralde $b = \varphi(a)$ konarak elde edilen,

$$[a x + \varphi(a)]^2 + a^2 y^2 = a z^2$$

denklemini ile, bu denklemin a parametresine göre türevinden bulunan,

$$2[a x + \varphi'_a(a)]^2 + 2 a y^2 = z^2$$

denklemini arasında a yok edilirse, genel integral elde edilir.

ÖRNEK 4. $2 z q^2 - y^2 p + y^2 q = 0$ kısmî türevli diferansiyel denkleminin integrasyonu :

Verilen denklem için,

$$X = 0, \quad Y = -2 y p + 2 y q, \quad Z = 2 q^2, \quad P = -y^2, \quad Q = 4 z q + y^2$$

olurlar. Bunlara göre

$$\frac{dx}{-y^2} = \frac{dy}{4 z q + y^2} = \frac{dz}{-p y^2 + 4 z q + q y^2} = \frac{-dp}{2 p q} = \frac{-dq}{-2 y p + 2 y q + 2 q^3}$$

yazılır. Verilen denklemlerden çekilen

$$p y^2 - q y^2 = 2 z q^2$$

doğru. Üçüncü kesire götürülür ve düzenlenirse,

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{-4zq - y^2} = \frac{dz}{-2zq^2} = \frac{dp}{2pq^2} = \frac{dq}{2y(q-p) + 2q^3}$$

şeklini alır. Sistemden seçilen,

$$\frac{dz}{-2zq^2} = \frac{dp}{2pq^2} \quad \text{den} \quad p = \frac{a}{z}$$

olur. Verilen denklemde $p = \frac{a}{z}$ konularak q çözülürse,

$$q = \frac{-y^2 \pm y\sqrt{y^2 + 8a}}{4z}$$

bulunur. Bu p ve q değerleri ile

$$dz = p dx + q dy = \frac{a}{z} dx + \frac{-y^2 \pm y\sqrt{y^2 + 8a}}{4z} dy$$

veya

$$4z dz = 4a dx + (-y^2 \pm y\sqrt{y^2 + 8a}) dy$$

yazılır. Bu da integre edilir ve düzenlenirse, a ve b keyfî sabitlerini ihtiva eden

$$(6z^2 - 12ax + y^3 - 3b)^2 = (y^2 + 8a)^3$$

şeklindeki tam integral elde edilir.

ÖZEL TIPLERE İNDİRGENEBİLEN DENKLEMLER

37. $F(x^m p, y^n q) = 0$ ŞEKLİNDEKİ DENKLEMLERİN İNDİRGENMESİ :

a) $m = 1, n = 1$ ise :

$x_1 = \ln x, y_1 = \ln y$ diyelim. Bu takdirde,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x} \quad \text{den} \quad p = p_1 \cdot \frac{1}{x} \quad \text{veya} \quad p_1 = p x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y} \quad \text{den} \quad q = q_1 \cdot \frac{1}{y} \quad \text{veya} \quad q_1 = q y$$

olurlar. Bu değerler verilen diferansiyel denkleme götürülürse,

$$F_1(p_1, q_1) = 0$$

diferansiel denklemini elde edilir.

b⁰) $m \neq 1$, $n \neq 1$ ise :

$$x_1 = \frac{x^{1-m}}{1-m} , \quad y_1 = \frac{y^{1-n}}{1-n} \quad \text{diyelim. Bu takdirde}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x} \quad \text{den} \quad p = p_1 x^{-m} \quad \text{veya} \quad p_1 = p x^m ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial y} \quad \text{den} \quad q = q_1 y^{-n} \quad \text{veya} \quad q_1 = q y^n$$

olurlar. Bu değerler verilen diferansiel denkleme götürülürse,

$$F_1(p_1, q_1) = 0$$

diferansiel denklemini elde edilir. a⁰ ve b⁰ de elde edilen denklemler birinci tipten denklemler olup, $p_1 = a$ konularak derhal çözülürler.

ÖRNEK 1. $x p + y q = 0$ denkleminin integrasyonu :

$x_1 = \ln x$, $y_1 = \ln y$ diyelim. Bunlara göre

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x} \quad \text{den} \quad p = p_1 \frac{1}{x} \quad \text{veya} \quad p_1 = p x ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial y} \quad \text{den} \quad q = q_1 \frac{1}{y} \quad \text{veya} \quad q_1 = q y$$

olurlar. Bu değerler verilen diferansiel denkleme götürülürse, Prg.32 - Tip I.'de görülen

$$p_1 + q_1 = 0$$

denklemini elde edilir. $p_1 = a$ alındığında $q_1 = -a$ olur. Bu takdirde ,

$$dz = p_1 dx_1 + q_1 dy_1 = a dx_1 - a dy_1$$

yazılır. Bu da integre edilirse

$$z = a x_1 - a y_1 + b$$

veya x_1 , y_1 in yukarıdaki değerleri yerlerine konur, ifade düzenlenirse

$$z = a \ln \frac{x}{y} + b$$

tan integrali elde edilir.

ÖRNEK 2. $x^4 p^2 + y^2 q = 0$ diferansiel denkleminin integrasyonu :

Verilen denklemi,

$$(x^2 p)^2 + y^2 q = 0$$

şeklinde yazalım. $x_1 = -\frac{1}{x}$, $y_1 = -\frac{1}{y}$ diyelin. Bu takdirde,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x} \quad \text{den} \quad p = p_1 \frac{1}{x^2} \quad \text{veya} \quad p_1 = x^2 p ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial y} \quad \text{den} \quad q = q_1 \frac{1}{y^2} \quad \text{veya} \quad q_1 = y^2 q$$

olurlar. Bunlara göre verilen diferansiel denklem

$$p_1^2 + q_1 = 0$$

şeklini alır. $p_1 = a$ alındığında $q_1 = -a^2$ olur. Bu takdirde,

$$dz = p_1 dx_1 + q_1 dy_1 = a dx_1 - a^2 dy_1$$

veya integre edilerek,

$$z = a x_1 - a^2 y_1 + b$$

bulunur. x_1 ve y_1 in yerine değerleri yazılır ve düzenlenirse, verilen diferansiel denklemin

$$z = \frac{a(ax - y)}{xy} + b$$

şeklindeki bir tam integrali elde edilir.

38. $F(z^k p, z^k q) = 0$ ŞEKİLİNDKİ DENKLEMLERİN İNDİRGENMESİ :

a^0) $k = -1$ ise : $z_1 = \ln z$ olsun. Buna göre

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{\partial z_1}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} \quad \text{den} \quad p_1 = \frac{1}{z} p ,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = \frac{\partial z_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{den} \quad q_1 = \frac{1}{z} q$$

olurlar. Bu takdirde verilen diferansiel denklem yine

$$F_1(p_1, q_1) = 0$$

şeklini alır.

b⁰) $k \neq -1$ ise : $z_1 = \frac{z^{k+1}}{k+1}$ olsun. Buna göre

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{\partial z_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{den} \quad p_1 = z^k p ,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = \frac{\partial z_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{den} \quad q_1 = z^k q$$

olurlar. Verilen diferansiel denklem yine

$$F_1(p_1, q_1) = 0$$

şeklini alır.

ÖRNEK 1. $p^2 + p q - q z = z^2$ denkleminin integrasyonu :

Verilen denklem ,

$$\left(\frac{p}{z}\right)^2 + \left(\frac{p}{z}\right) \left(\frac{q}{z}\right) - \frac{q}{z} = 1$$

şeklinde yazılırsa, $k = -1$ olduğu görülür. Buna göre, $z_1 = \ln z$ denirse

$$p_1 = \frac{p}{z} , \quad q_1 = \frac{q}{z} \quad \text{olacağından , denklem}$$

$$p_1^2 + p_1 q_1 - q_1 = 1$$

şeklini alır. Bu denklemi çözmek için $p_1 = a$ denirse, $q_1 = -(a + 1)$ olur. Bunlara göre

$$dz_1 = p_1 dx + q_1 dy = a dx - (a + 1) dy$$

yazılır. Bu da integre edilir, z_1 yerine de $\ln z$ yazılırsa, a ve b keyfi

sabitlerini ihtiva eden

$$\ln z = a x - (a + 1) y + b$$

tan integrali elde edilir.

ÖRNEK 2. $z^6 p^3 - z^2 q + 2 = 0$ denkleminin integrasyonu :

Verilen denklem,

$$(z^2 p)^3 - (z^2 q) + 2 = 0$$

şeklinde yazılırsa $k = 2$ olduğu görülür. O halde $z_1 = \frac{z^3}{3}$ olacağından $p_1 = z^2 p$, $q_1 = z^2 q$ elde edilir. Bunlara göre verilen denklem

$$p_1^3 - q_1 + 2 = 0$$

olur. $p_1 = a$ denirse , $q_1 = a^3 + 2$ olacağından

$$dz_1 = p_1 dx + q_1 dy = a dx + (a^3 + 2) dy$$

yazılır. Bu da integre edilir ve $z_1 = z^3/3$ olduğu gözönüne alınarak düzenlenirse

$$z^3 = 3 a x + 3(a^3 + 2) y + 3 b$$

tan integrali elde edilir.

39. $F(x^m z^k p, y^n z^k q) = 0$ ŞEKLİNDEKİ DENKLEMLERİN İNDİRGENMESİ :

Bu diferansiel denkleme 37. ve 38. de verilen dönüşümler birlikte uygulanırsa

$$F_1(p_1, q_1) = 0$$

denklomi elde edilir.

40. $F(z, x^m p, y^n q) = 0$ ŞEKLİNDEKİ DENKLEMLERİN İNDİRGENMESİ :

Verilen diferansiel denkleme 37. deki dönüşümler uygulanırsa, Prg.33, Tip II.de görülen

$$F_1(z, p_1, q_1) = 0$$

denklomi elde edilir.

41. $F(x, z^k, p) = G(y, z^k, q)$ ŞEKLİNDEKİ DENKLEMLERİN İNDİRGENMESİ :

Bu diferansiel denkleme 38. de verilen dönüşümler uygulanırsa, Prg.34, Tip III. de görülen

$$f(x, p_1) = g(y, q_1)$$

denklemini elde edilir.

ÖRNEK. $z^2 p^2 - x^4 y^2 z q = x^4$ denkleminin integrasyonu :

Verilen diferansiel denklem,

$$\left(\frac{zp}{x}\right)^2 - y^2 z q - 1 = 0$$

şeklinde yazılabilir. 37. ve 38.deki dönüşümlere göre,

$$x_1 = \frac{x^3}{3}, \quad y_1 = \frac{y^{-1}}{-1}, \quad z_1 = \frac{z^2}{2}$$

denirse,

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = \frac{\partial z_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1} \quad \text{den} \quad p_1 = z.p \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{zp}{x^2},$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial y_1} = \frac{\partial z_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y_1} \quad \text{den} \quad q_1 = z.q.y^2$$

olurlar. Bunlara göre

$$p_1^2 - q_1 - 1 = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklemi çözmek için $p_1 = a$ denirse $q_1 = a^2 - 1$ olur. Bunlara göre,

$$dz_1 = p_1 dx_1 + q_1 dy_1 = a dx_1 + (a^2 - 1) dy_1$$

yazılabilir. İntegre edilirse

$$z_1 = a x_1 + (a^2 - 1) y_1 + b$$

bulunur. z_1, x_1, y_1 yerine yukarıdaki değerleri yazılır ve düzenlenirse,

$$3 z^2 y = 2 a x^3 y + 6 b y + 1 - a^2$$

sonuçuna varılır. a ve b keyfî sabitlerini ihtiva eden bu çözüm tam integraldir.

42. CAUCHY PROBLEMİ. Verilen bir eğriden geçen integral yüzeyler :

I. Verilen bir lineer denkleme ait yardımcı sistemin çözümü,

$$u(x, y, z) = C_1, \quad v(x, y, z) = C_2$$

olsunlar. Bu çözümün belirlediği yüzeyin,

$$x = \lambda(t), \quad y = \mu(t), \quad z = \nu(t)$$

parametrik denklemleri ile verilen bir C eğrisinden geçmesini isteyelim. Bunun için C eğrisinin çeşitli noktalarından geçen karakteristik eğriler alınır. Bu karakteristik eğrilerin geometrik yeri aranan yüzeyi verir. Herhangi bir t için seçilecek karakteristikler,

$$u(\lambda, \mu, \nu) = C_1, \quad v(\lambda, \mu, \nu) = C_2$$

denklemlerine uygun olmalıdır. Bu iki bağıntı arasında t parametresi yok edilerek, C_1 ve C_2 arasında bir bağıntı bulunur. Bu ise verilen eğriden geçen ve aranan integral yüzeyi verir.

ÖRNEK. $2y(z-3)p + (2x-z)q = y(2x-3)$

kısmi türevli diferansiyel denkleminin $z=0$, $x^2 + y^2 = 2x$ dairesinden geçen integral yüzeyini bulalım. Verilen lineer denklem için yardımcı sistem

$$\frac{dx}{2y(z-3)} = \frac{dy}{2x-z} = \frac{dz}{y(2x-3)}$$

olur. Sistenden alınan

$$\frac{dx}{2y(z-3)} = \frac{dz}{y(2x-3)}$$

denkleminde

$$x^2 - 3x + C_1 = z^2 - 6z \quad \text{veya} \quad z^2 - 6z = x^2 + 3x = C_1 \quad (113)$$

bulunur. Yardımcı sistem sırasıyla 1, 2y, -2 ile genişletilir ve orantı özelliği kullanılırsa,

$$\frac{dx + 2y dy - 2 dz}{2yz - 6y + 4xy - 2yz - 4xy + 6y} = \frac{dx + 2y dy - 2 dz}{0} = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$dx + 2y dy - 2 dz = 0$$

yazılır. Bu da integre edilirse,

$$x + y^2 - z^2 = C_2 \quad (114)$$

bulunur. C_1 ve C_2 keyfî sabitlerine bağımlı olan yüzey ailesinin $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2x$ dairesinden geçen integral yüzeyini arayalım. Bu dairenin parametrik denklemlerini

$$x = t + 1, \quad y = \sqrt{1 - t^2}, \quad z = 0$$

olarak seçelim. Bunlara göre, (113) ve (114) bağıntıları,

$$(t + 1)(2 - t) = C_1$$

$$(t + 1)(2 - t) = C_2$$

şeklini alırlar. Buradan

$$C_1 = C_2 \quad (115)$$

bulunur. C_1 ve C_2 nin (113) ve (114) deki değerleri (115) bağıntısında yerlerine konularak ve gerekli işlemler yapılırsa

$$z^2 - 4z = x^2 - 2x + y^2$$

sonucuna varılır.

II. Birinci mertebeden herhangi bir kısmî türevli

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (116)$$

denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin bir tam integrali ise

$$f(x, y, z, a, b) = 0 \quad (117)$$

olsun. (116) denkleminin

$$x = \lambda(t), \quad y = \mu(t), \quad z = \nu(t) \quad (118)$$

parametrik denklemleriyle verilen bir C eğrisinden geçen integral yüzeyini arayalım:

(116) denkleminin verilen C eğrisinden geçen bir integral yüzeyinin mevcut olduğunu farzedelim. ve bu yüzeyi A ile gösterelim. A yüzeyi (117) tam integralinden seçilen bir parametrelî yüzey ailesinin zarfı olsun. Bu takdirde A yüzeyi, üzerindeki her noktada, bir parametrelî ailenin bir yüzeyine teğet olur. Şu halde A yüzeyinin üzerinde bulunan C eğrisinin her noktasında, A yüzeyi bir parametrelî ailenin bir yüzeyine teğet olacaktır. Bunun sonucu olarak C nin her noktasında A yüzeyine teğet olan yüzeyler C eğrisine de teğet olurlar. O halde A yüzeyi tam integralden seçilen ve üyâleri C eğrisine teğet olan bir parametrelî yüzey ailesini bulmağa getirilmiş olunur. (117) tam integrali ile C eğrisinin kesim noktalarını veren denklem

$$f[\lambda(t), \mu(t), \nu(t), a, b] = 0 \quad (119)$$

olur. C eğrisinin (117) yüzeyine teğet olması için (119) denkleminin iki kat

köke sahibolması gerekir. Bunun için t ,

$$\frac{\partial}{\partial t} f[\lambda(t), \mu(t), \nu(t), a, b] = 0 \quad (120)$$

denkleminin de kökü olmalıdır. (119) ve (120) denklemleri arasında t yok edilirse

$$\phi(a, b) = 0 \quad \text{veya} \quad b = \phi(a) \quad (121)$$

olur. (117) ve (121) bağıntılarından

$$f[x, y, z, a, \phi(a)] = 0$$

yazılır. Bir parametrelili olan bu denklemin zarfı verilen C eğrisinden geçen A integral yüzeyini verir.

ÖRNEK. $x p q + y q^2 = 1$ diferansiel denkleminin $y = 0$, $x - 2z = 0$ eğrisinden geçen integral yüzeyini bulunuz.

Verilen diferansiel denklem, ayrılabilir bir denklem olup,

$$x p = \frac{1 - y q^2}{q}$$

şeklinde yazılabilir. $x p = a$ diyelim. Bu takdirde

$$p = \frac{a}{x} \quad \text{ve} \quad \frac{1 - y q^2}{q} = a \quad \text{dan} \quad q = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4y}}{2y}$$

bulunur. Bunlara göre,

$$dz = p dx + q dy = \frac{a}{x} dx + \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4y}}{2y} dy$$

olur. Buradan integral alınarak

$$z = a \ln \left[\frac{x}{2y} (\sqrt{a^2 + 4y} + a) \right] - \sqrt{a^2 + 4y} + b \quad (122)$$

ve

$$z = a \ln \frac{2x}{\sqrt{a^2 + 4y} + a} + \sqrt{a^2 + 4y} + b \quad (123)$$

sonuçlarına varılır. (122) integral yüzeyinin $y = 0$, $x - 2z = 0$ eğrisinden geçen bir çözümü yoktur. Şimdi (123) integral yüzeyinin $y = 0$, $x - 2z = 0$ eğrisinden geçen integral yüzeyini arayalım :

Verilen eğrinin (doğrunun) parametrik denklemleri

$$x = t, \quad y = 0, \quad z = 2t$$

olarak alınırsa ,

$$t = a \ln \frac{2}{a} + a + b \quad (124)$$

olur. Buradan t parametresine göre türev alınır

$$1 = \frac{a}{t} \quad \text{veya} \quad t = a$$

bulunur. (124) bağıntısında $t = a$ yazılırsa

$$b = -a \ln 2$$

olur. b nin bu değeri (123) bağıntısına götürülür ve düzenlenirse, bir parametrelili

$$z = a \ln \frac{x}{\sqrt{a^2 + 4y} + a} + \sqrt{a^2 + 4y} \quad (125)$$

yüzey ailesi elde edilir. Şimdi bu yüzeyin zarfını arayalım : (125) bağıntısından, a parametresine göre türev alınır

$$0 = \ln \frac{x}{\sqrt{a^2 + 4y} + a} + a \cdot \frac{-x(a + \sqrt{a^2 + 4y})}{x(\sqrt{a^2 + 4y} + a)\sqrt{a^2 + 4y}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4y}}$$

veya

$$0 = \ln \frac{x}{\sqrt{a^2 + 4y} + a}$$

bulunur. Buradan a parametresi,

$$a = \frac{x^2 - 4y}{2x}$$

olarak çekilir. a nın bu değeri (125) bağıntısına götürülür ve düzenlenirse,

$$z = \frac{x^2 + 4y}{2x}$$

sonucuna varılır.

43. CAUCHY KARAKTERİSTİKLER METODU -

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (126)$$

denkleminin çözümü için, Cauchy tarafından verilen ve geometrik düşüncelere dayanan diğer bir metodu gözönüne alalım. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve nor-

malinin doğrultu katsayıları $(p_0, q_0, -1)$ olan bir düzlem, $D(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ sayı cümlesi ile tek olarak belirlidir. Karşıt olarak beş sayıdan ibaret bir D sayı cümlesi üç-boyutlu uzayda bir düzlem belirtir. Bu sebepten $D(x, y, z, p, q)$ şeklindeki sayı cümlesine uzayın "Düzlemsel Elemanları" denilir. (126) denklemini sağlayan $D(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ düzlem elemanlarına (126) denkleminin $M_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasındaki Integral Elemanı denilir. (126) bağıntısından q çözülerek

$$q = G(x, y, z, p) \quad (127)$$

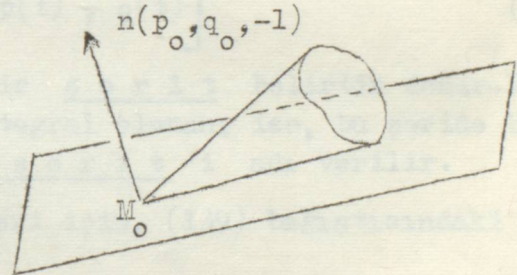
yazılabilir. x, y, z, p bilindiği takdirde (127) ile q da belirtilir. Şimdi x_0, y_0, z_0 rın sabit olduğunu, p nin ise değiştiğini farzedelim. Bu takdirde p parametresine bağlı,

$$[x_0, y_0, z_0, p, G(x_0, y_0, z_0, p)]$$

düzlem elemanları cümlesini elde ederiz. Eğer p değişirse, hepsi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve tepe noktası M_0 olan bir koni'ye teğet olan bir düzlem ailesi elde edilir. Bu koniye (126) denkleminin M_0 noktasındaki elemanter konisi denilir. Şimdi denklemi

$$z = g(x, y) \quad (128)$$

olan bir S yüzeyini gözönüne alalım. Bu yüzeye ait $g'_x(x, y)$; $g'_y(x, y)$ kısmî türevleri xy düzleminde veya xy nin bir R bölgesinde sürekli iseler S yüzeyinin her noktasındaki teğet düzlemi,



$$[x_0, y_0, g(x_0, y_0), g'_x(x_0, y_0), g'_y(x_0, y_0)]$$

şeklinde bir düzlemsel eleman tarif eder. Bu düzlemsel elemana S yüzeyinin $[x_0, y_0, g(x_0, y_0)]$ noktasındaki teğetsel elemanı denilir. Buna göre aşağıdaki teorem aşikâr olur :

44. TEOREM - Bir yüzeyin, bir kısmî türevli diferansiyel denklemi integral yüzeyi olması için gerek ve yeter şart, bu yüzeyin her noktasındaki teğetsel elemanın denklemin elemanter konisine teğet olmasıdır.

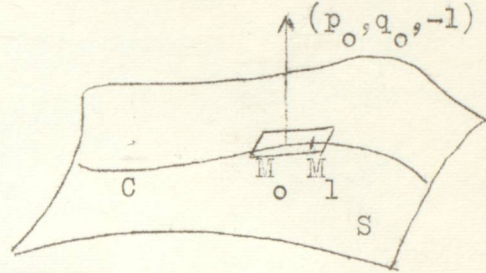
Parametrik denklemleri,

$$x = x(t) , y = y(t) , z = z(t) \quad (129)$$

olan bir C eğrisi verilmiş olsun. Bu C eğrisinin (128) yüzeyi üzerinde olması için, uygun bir t aralığında

$$z(t) = g[x(t) , y(t)] \quad (130)$$

olmalıdır. $t = t_0$ için belirlenen M_0 noktası, bu eğri üzerinde ise M_0 teğet doğrusunun doğrultu katsayıları, $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$ olurlar. Bu doğrultular $(p, q, -1)$ doğrultusuna dik olacaklardır. Eğer



$$z'(t_0) = p_0 x'(t_0) + q_0 y'(t_0) \quad (131)$$

ise

$$z'(t) = p(t) x'(t) + q(t) y'(t) \quad (132)$$

şartını sağlayan, uygun beş fonksiyondan ibaret

$$[x(t) , y(t) , z(t) , p(t) , q(t)] \quad (133)$$

cümlesi C eğrisinin x, y, z noktasında bir şerit belirtir denir. Eğer bu şerit aynı zamanda (126) denkleminin bir integral elemanı ise, bu şeride bu takdirde (126) denkleminin integral şerit'i adı verilir.

Buna göre uygun bir aralıktaki her t değeri için, (132) bağıntısındaki fonksiyonlar cümlesi, (132) şartını ve

$$F[x(t) , y(t) , z(t) , p(t) , q(t)] = 0$$

bağıntısını sağlıyorsa, (126) denkleminin bir integral şeridini verecektir. Eğer (129) bağıntısında, parametrik denklemleri verilen eğri her noktada elemanter koninin bir ana doğrusuna teğet iseler tekabül eden şerit karakteristik şerit adını alır. Şimdi karakteristik şeritleri verecek olan denklemleri arayalım.

p ve q (126) denklemini sağlamak üzere, eğer

$$dz = p dx + q dy \quad (134)$$

ise, $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ noktası elemanter koninin teğet düzlemi üzerinde bulunur. (126) ve (134) bağıntılarının p ye göre türevleri alınır

$$dx + \frac{dq}{dp} dy = 0$$

(135)

$$\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{dq}{dp} = 0$$

bulunur. Bu bağıntıların ikincisinden çekilen

$$\frac{dq}{dp} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial q}}$$

ifadesi birinci bağıntıya götürülür ve (134) ile birlikte alınır

$$p dx + q dy = dz$$

$$dx - \frac{p}{F} \frac{dq}{dp} dy = 0$$

sistemi elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\begin{vmatrix} dz & q \\ 0 & -\frac{F_p}{F_q} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p & q \\ 1 & -\frac{F_p}{F_q} \end{vmatrix}} = \frac{-dz \frac{F_p}{F_q}}{-p \frac{F_p}{F_q} - q} = \frac{F_p dz}{p F_p + q F_q} \\ dy &= \frac{\begin{vmatrix} p & dz \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p & q \\ 1 & -\frac{F_p}{F_q} \end{vmatrix}} = \frac{-dz \frac{F_p}{F_q}}{-p \frac{F_p}{F_q} - q} = \frac{F_q dz}{p F_p + q F_q} \end{aligned}$$

(136)

bulunur. Bu son iki bağıntıdan ise

$$\frac{dx}{\frac{F_p}{p}} = \frac{dy}{\frac{F_q}{q}} = \frac{dz}{p \frac{F_p}{p} + q \frac{F_q}{q}}$$

(137)

yazılabilir. (137) bağıntısı bize bir gerit boyunca

$$x'(t) , y'(t) , z'(t)$$

türev fonksiyonlarının sırasıyla

$$F_p , F_q , p F_p + q F_q$$

ile orantılı olacaklarına gösterir. Eğer t parametresi

$$x'(t) = F_p , y'(t) = F_q \quad (136)$$

olarak seçilir ve (132) bağıntısına götürülürse

$$z'(t) = p F_p + q F_q \quad (139)$$

olur. Bir karakteristik şerit boyunca, p ; t nin fonksiyonu olacaktır. Buna göre,

$$p'(t) = \frac{\partial p}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial p}{\partial y} y'(t)$$

veya $x'(t) = F_p , y'(t) = F_q$ yazılarak,

$$p'(t) = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial q}$$

elde edilir. $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ olduğu gözönüne alınırsa

$$p'(t) = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial q} \quad (140)$$

olur. (126) denkleminin x e göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (141)$$

bulunur. (140) ve (141) bağıntılarından

$$p'(t) = - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z} p \quad (142)$$

sonucuna varılır. Benzer bir hesaplama ile

$$q'(t) = - \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial z} q \quad (143)$$

olarak hesaplanır. (138) , (139) , (142) ve (143) birlikte alınırsa, bir karakteristik şeridin belirtilmesi için , beş adı diferansiel denklemden ibaret

47. CAUCHY PROBLEM $x'(t) = F_p$ denkleminin; parametrik denklemleri

$$y'(t) = F_q$$

$$z'(t) = p F_p + q F_q \quad (144)$$

$$p'(t) = -F_x - p F_z$$

$$q'(t) = -F_y - q F_z \quad (146)$$

sistemi elde edilir. Bu denklemlere (126) diferansiyel denkleminin karakteristik denklemleri denilir.

45. TEOREM - $F(x, y, z, p, q) = 0$ denkleminin her karakteristiği boyunca $F(x, y, z, p, q)$ fonksiyonu bir sabittir.

Bir karakteristik şerit boyunca, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $p = p(t)$, $q = q(t)$ yazılır ve t parametresine göre verilen denklemin türevi alınırsa,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = F_x \cdot x'_t + F_y \cdot y'_t + F_z \cdot z'_t + F_p \cdot p'_t + F_q \cdot q'_t \quad (145)$$

bulunur. x'_t , y'_t , z'_t , p'_t , q'_t yerine (138), (139), (142) ve (143) bağıntılarındaki değerleri yazılırsa,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = F_x \cdot F_p + F_y \cdot F_q + F_z (p F_p + q F_q) + F_p (-F_x - p F_z) + F_q (-F_y - q F_z) = 0$$

bulunur. Şu halde bir karakteristik eğri boyunca

$$F(x, y, z, p, q) = k$$

olup sabittir. Bu teoremin sonucu olarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir :

46. TEOREM - Bir karakteristik şerit, $F(x, y, z, p, q) = 0$ denkleminin bir integral eğrisini ihtiva ederse, bu şerit, $F(x, y, z, z_x, z_y) = 0$ diferansiyel denkleminin integral şerididir.

Şimdi CAUCHY Probleminin çözümünü görelim :

47. CAUCHY PROBLEMİ - (126) denkleminin; parametrik denklemleri

$$x = \lambda(v) , \quad y = \mu(v) , \quad z = \nu(v)$$

olan bir Γ eğrisinden geçen bir integral yüzeyini arayalım.

Karakteristik denklemlerin,

$$\begin{aligned} x &= x(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, t_0, t) \\ y &= y(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, t_0, t) \\ z &= z(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, t_0, t) \end{aligned} \quad (146)$$

çözümlerinde x, y, z nin başlangıç değerleri

$$x_0 = \lambda(v) , \quad y_0 = \mu(v) , \quad z_0 = \nu(v)$$

ifadelerine uygun olarak almak gerekir. p_0, q_0 başlangıç değerleri ise,

$$\nu'(v) = p_0 \lambda'(v) + q_0 \mu'(v) \quad (147)$$

$$F[\lambda(v), \mu(v), \nu(v), p_0, q_0] = 0$$

bağıntıları ile belli olacaktırlar. Eğer x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 değerleri ile t_0 bilinen değeri (146) bağıntısına götürülürse x, y, z t ile v cinsinden ifade edilerek

$$x = x(v, t) , \quad y = y(v, t) , \quad z = z(v, t)$$

bulunur. Bu parametrik denklemler arasında v ile t nin yok edilmesi sonucu olarak (126) denkleminin Γ eğrisinden geçen

$$\phi(x, y, z) = 0$$

integral yüzeyi bulunur.

ÖRNEK - $p^2 + q^2 = 4z$ denkleminin $y = 0, z = x^2 + 1$ parabolünden geçen integral yüzeyini bulalım.

Verilen parabolün parametrik denklemleri olarak

$$x = v , \quad y = 0 , \quad z = v^2 + 1 \quad (148)$$

alınabilir. Karakteristiklerin denklemleri ise (144) bağıntıları gözönüne alınırsa

$$\frac{dx}{dt} = F_p = 2p$$

$$\frac{dy}{dt} = F_q = 2q$$

$$\frac{dz}{dt} = p F_p + q F_q = 2p^2 + 2q^2 \quad (149)$$

$$\frac{dp}{dt} = -F_x - p F_z = 4p$$

$$\frac{dq}{dt} = -F_y - q F_z = 4q$$

olarak bulunurlar. İntegral yüzeyin verilen eğriden geçmesi için, başlangıç şartlarını tayin edelim. $t = 0$ için $x_0 = v$, $y_0 = 0$ alınırsa, $z_0 = v^2 + 1$ olur.

Şimdi p_0 ile q_0 in başlangıç şartlarını arayalım. (147) bağıntısına göre,

$$2v = p_0 \cdot 1 + q_0 \cdot 0$$

$$p_0^2 + q_0^2 = 4(v^2 + 1)$$

yazılır. Buradan $p_0 = 2v$, $q_0 = 4$ bulunur. O halde başlangıç şartları,

$$x_0 = v, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = v^2 + 1, \quad p_0 = 2v, \quad q_0 = 4, \quad t_0 = 0 \quad (150)$$

olurlar. Şimdi de (149) denklemleri ettiğimiz adi diferansiyel denklemlerden kurulu sistemin çözümünü arayalım :

Bu diferansiyel denklemlerin integrallerinden gelecek olan keyfi sabitleri, belirli bir integral yüzey aradığımız için, başlangıç şartlarına göre tayin edeceğiz.

$$\frac{dx}{dt} = 2p \quad \text{ve} \quad \frac{dp}{dt} = 4p \quad \text{den} \quad 2 dx = dp,$$

$$\frac{dy}{dt} = 2q \quad \text{ve} \quad \frac{dq}{dt} = 4q \quad \text{dan} \quad 2 dy = dq$$

veya bunlar integre edilerek, sırasıyla

$$2x = p + k_1 \quad ; \quad 2y = q + k_2$$

bulunur. Başlangıç şartları gözönüne alınırsa $k_1 = 0$, $k_2 = -4$ olacağından

$$2x = p, \quad 2y = q - 4 \quad (151)$$

yazılır.

$$\frac{dp}{dt} = 4p \quad \text{ve} \quad \frac{dq}{dt} = 4q$$

denklemleri integre edilirse,

$$p = k_3 e^{4t}, \quad q = k_4 e^{4t}$$

bulunur. Başlangıç şartlarına göre $k_3 = 2v$, $k_4 = 4$ olacağından,

$$p = 2v e^{4t}, \quad q = 4 e^{4t} \quad (152)$$

elde edilir. (149) denklemlerinin üçüncüsü ile (152) bağıntılarından

$$dz = (8v^2 e^{8t} + 32 e^{8t}) dt$$

olur. Bu da integre edilirse

$$z = v^2 e^{8t} + 4 e^{8t} + k_5$$

bulunur. Başlangıç şartlarına göre k_5 keyfî sabitini tayin edelim :

$$v^2 + 1 = v^2 + 4 + k_5$$

yazılır. Buradan $k_5 = -3$ bulunur. Buna göre

$$z = v^2 e^{8t} + 4 e^{8t} - 3 \quad (153)$$

olur. (151), (152) bağıntılarından,

$$x = v e^{4t}, \quad y = 2 e^{4t} - 2$$

parametrik denklemleri elde edilir. x ve y den çekilen

$$v = \frac{2x}{y+2}, \quad e^{4t} = \frac{y+2}{2}$$

değerleri (153) bağıntısına götürülürse,

$$z = x^2 + (y+1)^2$$

sonucuna varılır.

YÜKSEK MERTEBEDEN KISIM TÜREVİLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

48. YÜKSEK MERTEBEDEN KISIM TÜREVİLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TEŞKİLİ - Paragraf 13 de ifade edildiği gibi, iki veya daha yüksek mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler de ; verilen fonksiyonlardaki keyfî sabit veya keyfî fonksiyonların 14. ve 15. paragraflardakine benzer şekilde yok edilmesi sonucunda elde edilirler.

49. KEYFİ SABİTLERİN YOK EDİLMESİ - x, y bağımsız değişkenlerinin C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 gibi keyfî sabitleri bulunduran bir z fonksiyonu,

$$f(x, y, z, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) = 0 \quad (154)$$

denklemleri ile verilmiş olsun. Bu fonksiyonun x ve y bağımsız değişkenlerine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri alınır,

$$f'_x + f'_z \cdot p = 0$$

$$f'_y + f'_z \cdot q = 0$$

$$f''_{xx} + 2 f''_{xz} \cdot p + f''_{zz} \cdot p^2 + f'_z \cdot r = 0 \quad (155)$$

$$f''_{yx} + f''_{yz} \cdot p + f''_{zx} \cdot q + f''_{zz} \cdot p q + f'_z \cdot s = 0$$

$$f''_{yy} + 2 f''_{yz} \cdot q + f''_{zz} \cdot q^2 + f'_z \cdot t = 0$$

bulunur. Bu bağıntılar ile (154) bağıntısı arasında C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 keyfî sabitleri yok edilirse,

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

sonucuna varılır.

ÖRNEK 1 - C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 keyfî sabitler olmak üzere,

$$z = C_1 x^3 + C_2 x y + C_3 y^3 + C_4 x + C_5 y \quad (156)$$

fonksiyonunun kısmî türevli diferansiel denklemini kuralım :

Verilen z fonksiyonunun (155) bağıntılarına göre, kısmî türevleri alınır-
sa,

$$3 C_1 x^2 + C_2 y + C_4 - p = 0$$

$$C_2 x + 3 C_3 y^2 + C_5 - q = 0$$

$$6 C_1 x - r = 0$$

$$C_2 - s = 0$$

$$6 C_3 y - t = 0$$

bulunur. Bunlardan çekilen

$$C_1 = \frac{r}{6x}, \quad C_2 = s, \quad C_3 = \frac{t}{6y}, \quad C_4 = \frac{2p - rx - 2sy}{2}, \quad C_5 = \frac{2q - 2sx - ty}{2}$$

değerleri, (156) bağıntısına götürülür ve düzenlenirse

$$x^2 r + y^2 t + 3 x y s - 3 x p - 3 y q + 3 z = 0$$

sonucuna varılır.

ÖRNEK 2 - a, b, c keyfî sabitler olmak üzere

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (157)$$

elipsoidinin kısmî türevli diferansiel denklemini kuralım :

Verilen fonksiyonun x ve y bağımsız değişkenlerine göre birinci ve i-
kinci mertebeden kısmî türevleri alınır,

$$\frac{x}{a^2} + \frac{z}{c^2} p = 0$$

$$\frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2} q = 0$$

(158)

$$\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{c^2} + \frac{zr}{c^2} = 0$$

$$\frac{pq}{c^2} + \frac{zs}{c^2} = 0 \quad (158)$$

$$\frac{1}{b^2} + \frac{q^2}{c^2} + \frac{zt}{c^2} = 0$$

bulunurlar. Bu bağıntıların üçüncü ve beşincisinden çekilen

$$\frac{1}{a^2} = -\frac{p^2 + zr}{c^2}, \quad \frac{1}{b^2} = -\frac{q^2 + zt}{c^2}$$

değerleri birinci ve ikinciye götürülürse,

$$\frac{-x(p^2 + zr)}{c^2} + \frac{zp}{c^2} = 0, \quad \frac{-y(q^2 + zt)}{c^2} + \frac{zq}{c^2} = 0 \quad (159)$$

elde edilir. (158) bağıntılarının dördüncüsü ile (159) bağıntılarının düzenlenmesi sonucu olarak ikinci mertebeden kısmî türevli,

$$x z r + x p^2 - z p = 0$$

$$y z t + y q^2 - z q = 0$$

$$p q + z s = 0$$

diferansiel denklemlerine varılır.

50. KEYFİ FONKSİYONLARIN YOK EDİLMESİ - φ ve ψ keyfî fonksiyonlar ve λ bir parametre olmak üzere,

$$f[x, y, z, \varphi(\lambda), \psi(\lambda)] = 0 \quad (160)$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu bağıntı bir parametrelili bir yüzey ailesi gösterir. Bu yüzey ailesinin zarfının kısmî türevli diferansiel denklemini arayalım :

Bunun için, (160) bağıntısının λ parametresine göre türevi alınır. Böylece elde edilen $f'_\lambda = 0$ bağıntısından çözülen, $\lambda = \phi(x, y, z)$ bilinen fonksiyonu, (160) bağıntısına götürülürse,

$$f[x, y, z, \varphi(x, y, z), \psi(x, y, z)] = 0$$

olur. Bu bağıntının x ve y bağımsız değişkenlerine göre alınan birinci ve ikinci mertebeden kısmî türevleri ile bu fonksiyon arasında $\varphi(x,y,z)$ ve $\psi(x,y,z)$ keyfî fonksiyonları yok edilirse,

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

sonucuna varılır.

ÖRNEK 1 - φ ile ψ keyfî fonksiyonlar ve λ bir parametre olmak üzere,

$$f(x,y,z,\lambda) = z - \lambda x - \varphi(\lambda) y - \psi(\lambda) = 0 \quad (161)$$

fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun zarfının kısmî türevli diferansiyel denklemini arayalım. Zarf için

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \quad (162)$$

yazılır. Buradan, λ nın çekilen x, y, z cinsinden değeri (161) bağıntısına götürüldüğü düşünülerek, (161) den kısmî türevler alınır

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= p - \lambda + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= q - \varphi(\lambda) + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (163)$$

bulunur. (162) ve (163) bağıntılarından

$$p = \lambda, \quad q = \varphi(\lambda)$$

veya bu ikisinden

$$q = \varphi(p)$$

elde edilir. Buradan x ve y bağımsız değişkenlerine göre kısmî türevleri alınır :

$$s = \varphi'(p) \cdot r, \quad t = \varphi'(p) \cdot s$$

olur. Bu iki bağıntı oranlanır ve düzenlenirse

$$s^2 - r t = 0$$

sonucuna varılır.

ÖRNEK 2 - φ ve ψ keyfî fonksiyonlar olmak üzere,

$$z = \varphi(x + ay) + \psi(x - ay)$$

fonksiyonunun kısmî türevli diferansiel denklemini arayalım :

Verilen fonksiyonun x ve y bağımsız değişkenlerine göre ikinci mertebeden türevlerini alalım :

$$r = \varphi''(x + ay) + \psi''(x - ay)$$

$$s = a\varphi''(x + ay) - a\psi''(x - ay)$$

$$t = a^2\varphi''(x + ay) + a^2\psi''(x - ay)$$

olur. Bu bağıntıların birinci ve üçüncüsünden

$$t = a^2 r$$

diferansiel denklemi elde edilir.

ÖRNEK 3 - φ ve ψ keyfî fonksiyonlar olmak üzere,

$$z = \varphi(x) + \psi(y)$$

fonksiyonunun kısmî türevli diferansiel denklemini arayalım :

Verilen fonksiyonun x bağımsız değişkenine göre kısmî türevini alalım :

$$p = \varphi'(x)$$

olur. Bu bağıntının da y bağımsız değişkenine göre türevi alınır

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

diferansiel denklemi elde edilir.

ÖRNEK 4 - ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 keyfî fonksiyonlar olmak üzere,

$$z = \phi_1(y + x) + \phi_2(y - x) + \phi_3(y - 2x)$$

fonksiyonunun kısmî türevli diferansiel denklemini bulalım :

Verilen fonksiyonun üçüncü mertebeden kısmi türevleri olarak,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \phi_1'''(y+x) - \phi_2'''(y-x) - 8\phi_3'''(y-2x)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \phi_1'''(y+x) + \phi_2'''(y-x) + 4\phi_3'''(y-2x)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \phi_1'''(y+x) - \phi_2'''(y-x) - 2\phi_3'''(y-2x)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \phi_1'''(y+x) + \phi_2'''(y-x) + \phi_3'''(y-2x)$$

bulunur. Sistemin ilk üç denklemine ait katsayılar determinanı $D = 12 \neq 0$ olduğundan asal determinant olarak alınabilir. Buna göre, sistemin bir çözümünün olması için

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} & 1 & -1 & -8 \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} & 1 & 1 & 4 \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} & 1 & -1 & -2 \\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

karakteristik determinanı sıfır olmalıdır. Bu determinanın hesaplanması sonucu

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} - 2 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

SABİT KATSAYILI KISMİ TÜREVİLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

51. TAMAMLAYICI FONKSİYON - ÖZEL İNTEGRAL - Sabit katsayılı diferansiyel denklemlerin incelenmesinde genellikle,

$$\frac{\partial}{\partial x} = D_x, \quad \frac{\partial}{\partial y} = D_y$$

operatörlerini kullanacağız. Bunlara göre

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$a \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + b \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + c \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + d \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = f(x, y)$$

diferansiyel denklemleri, operatörler ile, sırasıyla,

$$(a D_x + b D_y) z = 0,$$

$$(a D_x^2 + b D_x D_y + c D_y^2) z = 0,$$

$$(a D_x^3 + b D_x^2 D_y + c D_x D_y^2 + d D_y^3) z = f(x, y)$$

şeklinde ifade edilirler.

C_{rs} sabit ve $F(D_x, D_y) = \sum \sum C_{rs} D_x^r D_y^s$ olmak üzere, sabit katsayılı bir diferansiyel denklem,

$$F(D_x, D_y) z = f(x, y) \quad (164)$$

şeklinde yazılabilir. Bir lineer homogen kısmî türevli

$$F(D_x, D_y) z = 0 \quad (165)$$

denkleminin yeter sayıda keyfî sabitleri ihtiva eden genel çözümüne (164) diferansiyel denkleminin Tamamlayıcı Fonksiyonu denir. (164)

diferansiel denkleminin herhangi bir çözümüne ise bu diferansiel denklemin $\ddot{O} z e$
 $\ddot{I} n t e g r a l i$ denir.

52. TEOREM - u bir tamamlayıcı fonksiyon, Z de bir özel integral ise $u + Z$ ifadesi genel çözümdür.

(164) ve (165) denklemleri aynı tip ve aynı mertebeden olduklarından $u + Z$ çözümü yeter sayıda keyfî sabit ihtiva eder. (165) bağıntısında $z = u + Z$ yazılı
sa,

$$F(D_x, D_y)(u + Z) = F(D_x, D_y) u + F(D_x, D_y) Z$$

olur. Diğer taraftan, hipotez gereğince

$$F(D_x, D_y) u = 0, \quad F(D_x, D_y) Z = f(x, y)$$

olduğundan,

$$F(D_x, D_y) (u + Z) = f(x, y)$$

bulunur.

53. TEOREM - Eğer $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ fonksiyonları $F(D_x, D_y) z = 0$ şeklindeki kısmî türevli lineer diferansiel denklemin çözümü iseler, C_r keyfî sabitler olmak üzere

$$\sum_{r=1}^n C_r u_r$$

ifadesi de aynı denklemin çözümüdür.

Gerçekten,

$$F(D_x, D_y) C_r u_r = C_r F(D_x, D_y) u_r$$

ve herhangi bir v_r cümlesi için de

$$F(D_x, D_y) \sum_{r=1}^n v_r = \sum_{r=1}^n F(D_x, D_y) v_r$$

yazılabilir. Bunlara göre

$$\begin{aligned} F(D_x, D_y) \sum_{r=1}^n C_r u_r &= \sum_{r=1}^n F(D_x, D_y) C_r u_r \\ &= \sum_{r=1}^n C_r F(D_x, D_y) u_r \end{aligned}$$

bulunur. $r = 1, 2, 3, \dots, n$ olmak üzere u_r nin çözüm olduğu gözönüne alınır

$$F(D_x, D_y) \sum_{r=1}^n C_r u_r = 0$$

sonuçuna varılır.

54. İNDİRGENEBİLİR VE İNDİRGENEMEYİZ OPERATÖRLER - $F(D_x, D_y)$ türev operatörü, a ve b sabitler olmak üzere,

$$D_x + a D_y + b \quad (166)$$

şeklinde çarpanlara ayrılabiliriyorsa, $F(D_x, D_y)$ operatörüne indirgenebilir Operatör, (166) şeklindeki çarpanlara ayrılamayan $F(D_x, D_y)$ operatörlerine ise indirgenemez Operatör adı verilir. Örneğin

$$D_x^2 - 3 D_x D_y + 2 D_y^2$$

operatörü

$$(D_x - 2 D_y)(D_x - D_y)$$

şeklinde yazılabileceğinden indirgenebilir,

$$D_x^2 - D_y$$

operatörü ise lineer çarpanlara ayrılamadığından indirgenemez operatör olurlar.

55. THEOREM - $F(D_x, D_y)$ operatörü indirgenebilir ise lineer çarpanların sırası değiştirilebilir.

Herhangi bir indirgenebilir operatör,

$$F(D_x, D_y) = \prod_{r=1}^n (\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r)$$

şeklinde yazılabilir. Herhangi iki lineer çarpan,

$$\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r, \quad \alpha_s D_x + \beta_s D_y + \gamma_s$$

olsun. Teoremin ispatı için,

$$(\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r)(\alpha_s D_x + \beta_s D_y + \gamma_s) = (\alpha_s D_x + \beta_s D_y + \gamma_s)(\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r) \quad (167)$$

olduğunu göstermemiz gerekir. Gerçekten,

$$(\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r)(\alpha_s D_x + \beta_s D_y + \gamma_s)$$

ve

$$(\alpha_s D_x + \beta_s D_y + \gamma_s)(\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r)$$

operatörlerinin her ikisi de

$$\alpha_r \alpha_s D_x^2 + (\alpha_r \beta_s + \alpha_s \beta_r) D_x D_y + (\alpha_r \gamma_s + \alpha_s \gamma_r) D_x + (\beta_r \gamma_s + \beta_s \gamma_r) D_y + \gamma_r \gamma_s$$

operatörüne eşit olduklarından (167) bağıntısının varlığı gösterilmiş olur.

56. TEOREM - $\alpha_r \neq 0$ olmak üzere $\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r$ ifadesi $F(D_x, D_y)$ operatörünün bir çarpanı ve $\phi_r(\xi)$ fonksiyonu ξ nin bir keyfî fonksiyonu ise

$$u_r = \exp\left(-\frac{\gamma_r x}{\alpha_r}\right) \phi_r(\alpha_r y - \beta_r x), \quad (168)$$

$F(D_x, D_y) z = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.

(168) bağıntısından x ve y bağımsız değişkenlerine göre kısmî türevler alınır,

$$D_{x r} u = -\frac{\gamma_r}{\alpha_r} \exp\left(-\frac{\gamma_r x}{\alpha_r}\right) \cdot \phi_r(\alpha_r y - \beta_r x) - \beta_r \cdot \phi_r'(\alpha_r y - \beta_r x) \cdot \exp\left(-\frac{\gamma_r x}{\alpha_r}\right)$$

$$D_{y r} u = \alpha_r \phi_r'(\alpha_r y - \beta_r x) \cdot \exp\left(-\frac{\gamma_r x}{\alpha_r}\right) \quad (168')$$

bulunur. Böylece elde edilen $D_{x r} u$ ve $D_{y r} u$ türevleri

$$(\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r) u_r = \alpha_r D_{x r} u + \beta_r D_{y r} u + \gamma_r u_r$$

operatörüne götürülür ve gerekli işlemler yapılırsa ,

$$F(D_x, D_y) z = (\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r) u_r = 0 \quad (169)$$

elde edilir. Çarpanların sırasının değiştirilebilme özeliğinden (Prg.55-TEOREM) $s \neq r$ kabul edilerek,

$$F(D_x, D_y) u_r = \left[\prod_{s=1}^n (\alpha_s D_x + \beta_s D_y + \gamma_s) \right] (\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r) u_r \quad (170)$$

yazılabilir. (169) ve (170) diferansiel denklemlerinden

$$F(D_x, D_y) u_r = 0$$

elde edilir.

57. TEOREM - $\beta_r \neq 0$ olmak üzere, $\beta_r D_y + \gamma_r$ ifadesi $F(D_x, D_y)$ operatörünün bir çarpanı ve $\phi_r(\xi)$ fonksiyonu ξ nin bir keyfî fonksiyonu ise,

$$u_r = \exp\left(-\frac{\gamma_r y}{\beta_r}\right) \cdot \phi_r(\beta_r x) \quad (171)$$

$F(D_x, D_y) z = 0$ diferansiel denkleminin bir çözümüdür.

Bu bağıntının y bağımsız değişkenine göre kısmî türevi

$$D_y u_r = -\frac{\gamma_r}{\beta_r} \exp\left(-\frac{\gamma_r y}{\beta_r}\right) \cdot \phi_r(\beta_r x)$$

olur. Böylece elde edilen $D_y u_r$ türevi ,

$$(\beta_r D_y + \gamma_r) u_r = \beta_r D_y u_r + \gamma_r u_r$$

operatörüne götürülürse,

$$\beta_r D_y + \gamma_r = 0$$

elde edilir.

58. TEOREM - $\alpha_r \neq 0$ olmak üzere, $(\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r)^n$ ifadesi $F(D_x, D_y)$ operatörünün bir çarpanı ve $\phi_{r1}, \phi_{r2}, \phi_{r3}, \dots, \phi_{rn}$ keyfî fonksiyonlar ise,

$$\exp\left(-\frac{\gamma_r x}{\alpha_r}\right) \sum_{s=1}^n x^{s-1} \phi_{rs}(\alpha_r y - \beta_r x)$$

ifadesi $F(D_x, D_y) z = 0$ diferansiel denkleminin çözümüdür.

Teoremin ispatını $n = 2$ için verelim: $n = 2$ olması halinde,

$$(\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r)^2 z = 0 \quad (172)$$

$F(D_x, D_y)$ operatörünün bir çarpanı olsun. Bu çarpanı

$$(\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r)(\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r) z = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Eğer,

$$(\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r) z = Z \quad (173)$$

denilirse

$$(\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r) Z = 0$$

olacaktır. Bu diferansiel denklemin çözümü, paragraf 56 daki Teorem'e göre, $\alpha_r \neq 0$ ise,

$$Z = \exp\left(-\frac{\gamma_r x}{\alpha_r}\right) \phi_r(\alpha_r y - \beta_r x) \quad (174)$$

bulunur. (173) ve (174) bağıntılarından

$$(\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r) z = \exp\left(-\frac{\gamma_r x}{\alpha_r}\right) \cdot \phi_r(\alpha_r y - \beta_r x)$$

veya

$$\alpha_r \frac{\partial z}{\partial x} + \beta_r \frac{\partial z}{\partial y} + \gamma_r z = \exp\left(-\frac{\gamma_r x}{\alpha_r}\right) \cdot \phi_r(\alpha_r y - \beta_r x)$$

linear diferansiel denklemini elde edilir. (84) bağıntısına göre, yardımcı sistemi yazalım :

$$\frac{dx}{\alpha_r} = \frac{dy}{\beta_r} = \frac{dz}{-\gamma_r z + \exp\left(-\frac{\gamma_r x}{\alpha_r}\right) \cdot \phi_r(\alpha_r y - \beta_r x)} \quad (175)$$

$$\frac{dx}{\alpha_r} = \frac{dy}{\beta_r} \quad \text{den} \quad \alpha_r y - \beta_r x = C_1 \quad (176)$$

bulunur. (175) ve (176) bağıntılarından

$$\frac{dx}{\alpha_r} = \frac{dz}{-\gamma_r z + \exp(-\frac{\gamma_r x}{\alpha_r}) \phi_r(C_1)}$$

yazılır. Buradan , lineer olan

$$\frac{dz}{dx} + \frac{\gamma_r}{\alpha_r} z = \frac{1}{\alpha_r} \exp(-\frac{\gamma_r x}{\alpha_r}) \phi_r(C_1)$$

adî diferansiel denkleme varılır. Bu diferansiel denkleme çözülürse,

$$z = \frac{1}{\alpha_r} \left[x \phi_r(C_1) + C_2 \right] \exp(-\frac{\gamma_r x}{\alpha_r})$$

elde edilir. (85) bağıntısı gözönüne alınır ve $C_2 = \psi_r(C_1)$ yazılırsa, (175) denkleminin veya dolayısıyla (172) denkleminin çözümü olarak,

$$z = \frac{1}{\alpha_r} \left[x \phi_r(\alpha_r y - \beta_r x) + \psi_r(\alpha_r y - \beta_r x) \right] \exp(-\frac{\gamma_r x}{\alpha_r})$$

sonucuna varılır.

59. TEOREM - $\beta_r \neq 0$ olmak üzere, $(\beta_r D_y + \gamma_r)^m$ ifadesi $F(D_x, D_y)$ operatörünün bir çarpanı ve $\phi_{r1}, \phi_{r2}, \phi_{rs}, \dots, \phi_{rn}$ keyfi fonksiyonlar iseler,

$$\exp(-\frac{\gamma_r y}{\beta_r}) \sum_{s=1}^m x^{s-1} \phi_{rs}(\beta_r x)$$

ifadesi $F(D_x, D_y) z = 0$ diferansiel denkleminin bir çözümüdür.

Teoremin ispatını $m = 2$ için verelim. $m = 2$ olması halinde

$$(\beta_r D_y + \gamma_r)^2 z = 0 \quad (177)$$

$F(D_x, D_y)$ operatörünün bir çarpanı olsun. Bu çarpanı,

$$(\beta_r D_y + \gamma_r)(\beta_r D_y + \gamma_r) z = 0 \quad (178)$$

şeklinde yazabiliriz. Eğer,

$$(\beta_r D_y + \gamma_r) z = Z \quad (179)$$

denilirse,

bulunur. (85) bağıntısı $(\beta_r D_y + \gamma_r) Z = 0$ yazılırsa, (183) diferansiyel denkleminin veya (177) denkleminin çözümü olarak, olacaktır. Bu diferansiyel denklemin çözümü prg. 57'deki teoreme göre,

$$Z = \exp\left(-\frac{\gamma_r y}{\beta_r}\right) \phi_r(\beta_r x) \quad (180)$$

şeklinde olur. (179) ve (180) bağıntılarından

$$(\beta_r D_y + \gamma_r) z = \exp\left(-\frac{\gamma_r y}{\beta_r}\right) \phi_r(\beta_r x)$$

veya

$$\beta_r \frac{\partial z}{\partial y} + \gamma_r z = \exp\left(-\frac{\gamma_r y}{\beta_r}\right) \phi_r(\beta_r x)$$

lineer diferansiyel denklemi elde edilir. (84) bağıntısına göre yardımcı sistemi yazalım :

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{\beta_r} = \frac{dz}{-\gamma_r z + \exp\left(-\frac{\gamma_r y}{\beta_r}\right) \phi_r(\beta_r x)} \quad (181)$$

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{\beta_r} \quad \text{den} \quad \beta_r x = C_1 \quad (182)$$

bulunur. (181) ve (182) bağıntılarından

$$\frac{dy}{\beta_r} = \frac{dz}{-\gamma_r z + \exp\left(-\frac{\gamma_r y}{\beta_r}\right) \phi_r(C_1)}$$

yazılır. Buradan

$$\frac{dz}{dy} = \frac{-\gamma_r z + \exp\left(-\frac{\gamma_r y}{\beta_r}\right) \phi_r(C_1)}{\beta_r}$$

veya lineer olan

$$\frac{dz}{dy} + \frac{\gamma_r}{\beta_r} z = \frac{1}{\beta_r} \exp\left(-\frac{\gamma_r y}{\beta_r}\right) \phi_r(C_1) \quad (183)$$

adı diferansiyel denkleme varılır. Bu diferansiyel denklem çözüldürse,

$$z = \frac{1}{\beta_r} \left[y \phi_r(C_1) + C_2 \right] \exp\left(-\frac{\gamma_r y}{\beta_r}\right)$$

bulunur. (85) bağıntısı gözönüne alınır ve $C_2 = \psi(C_1)$ yazılırsa, (183) diferansiel denkleminin veya dolayısıyla (177) denkleminin çözümü olarak,

$$z = \frac{1}{\beta_r} \left[y \phi_r(\beta_r x) + \psi(\beta_r x) \right] \exp\left(-\frac{\gamma_r y}{\beta_r}\right)$$

sonucuna varılır.

60. TAMAMLAYICI FONKSİYON - $F(D_x, D_y)$ operatörü indirgenebilir olduğu zaman, (164) bağıntısındaki diferansiel denklemin tamamlayıcı fonksiyonu, prg.56 ve prg.58 'de verilen teoremler yardımı ile verilebilir:

$\alpha_r \neq 0$ olmak üzere, $F(D_x, D_y)$ operatörü,

$$F(D_x, D_y) = \prod_{r=1}^n (\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r)^{m_r} \quad (184)$$

şeklinde ise, tamamlayıcı fonksiyon olarak,

$$u = \sum_{r=1}^n \exp\left(-\frac{\gamma_r x}{\alpha_r}\right) \sum_{s=1}^{m_r} x^{s-1} \phi_{rs}(\alpha_r y - \beta_r x) \quad (185)$$

elde edilir. ϕ_{rs} keyfî fonksiyonlardır. Eğer α_r lerden bazıları sıfır ise, prg.57 ve prg.59 'da verilen teoremler gözönüne alınarak, gerekli değişiklikler yapılabilir. (165) denkleminin mertebesinin (184) bağıntısına göre $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$ olduğu görülmektedir. (185) bağıntısında elde edilen u çözümü, $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$ tane keyfî fonksiyon ihtiva ettiğinden, tamamlayıcı fonksiyondur.

Ç Ö Z Ü M L Ü Ö R N E K L E R

ÖRNEK 1. $(D_x^3 + 2 D_x^2 D_y - D_x D_y^2 - 2 D_y^3) z = 0 \quad (186)$

diferansiel denkleminin integrasyonu :

Verilen diferansiel denklem indirgenebilir olup,

$$(D_x - D_y)(D_x + D_y)(D_x + 2 D_y) z = 0 \quad (187)$$

şeklinde yazılabilir. $\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r$ şeklindeki çarpanları ihtiva eden bu diferansiel denklemin prg.56'da verilen teoreme göre,

$$u_r = \exp\left(-\frac{\gamma_r x}{\alpha_r}\right) \phi_r(\alpha_r y - \beta_r x) \quad (188)$$

şeklinde bir çözümü olacaktır. (187) diferansiel denkleminde çarpanların α, β, γ katsayıları,

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = -1, \quad \gamma_1 = 0, \quad r = 1$$

$$\alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = 1, \quad \gamma_2 = 0, \quad r = 2$$

$$\alpha_3 = 1, \quad \beta_3 = 2, \quad \gamma_3 = 0, \quad r = 3$$

olduklarından, bunlara tekabül eden (188) bağıntısından elde edilen, çözümler sırasıyla

$$u_1 = \phi_1(y + x), \quad u_2 = \phi_2(y - x), \quad u_3 = \phi_3(y - 2x)$$

olurlar. Bunlara göre (186) denkleminin çözümü olarak

$$z = \sum_{r=1}^3 u_r = \phi_1(y+x) + \phi_2(y-x) + \phi_3(y-2x)$$

sonucuna varılır.

$$\text{ÖRNEK 2.} \quad \frac{\partial^5 z}{\partial x^5} + 10 \frac{\partial^5 z}{\partial x^4 \partial y} + 31 \frac{\partial^5 z}{\partial x^3 \partial y^2} + 26 \frac{\partial^5 z}{\partial x^2 \partial y^3} - 28 \frac{\partial^5 z}{\partial x \partial y^4} - 40 \frac{\partial^5 z}{\partial y^5} = 0$$

diferansiel denkleminin integrasyonu :

Verilen diferansiel denklem, operatörler ile

$$(D_x^5 + 10 D_x^4 D_y + 31 D_x^3 D_y^2 + 26 D_x^2 D_y^3 - 28 D_x D_y^4 - 40 D_y^5) z = 0$$

şeklinde yazılabilir. İndirgenebilir olan bu denklem, çarpanlarına ayrılırsa

$$(D_x + 2 D_y)^3 (D_x - D_y) (D_x + 5 D_y) z = 0$$

bulunur. Prg.58'de verilen teoreme göre ,

$$(D_x + 2 D_y)^3 z = 0$$

çarpanına tekabül eden çözüm,

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 2, \quad \gamma_1 = 0, \quad r_1 = 1, \quad n = 3$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$u_r = \exp\left(-\frac{\gamma_r x}{\alpha_r}\right) \sum_{s=1}^n x^{s-1} \phi_{rs}(\alpha_r y - \beta_r x)$$

bağıntısına göre

$$u_1 = \exp\left(-\frac{0 \cdot x}{1}\right) \sum_{s=1}^3 x^{s-1} \phi_{1s}(y - 2x)$$

veya

$$u_1 = \phi_{11}(y - 2x) + x \phi_{12}(y - 2x) + x^2 \phi_{13}(y - 2x)$$

olur. Prg.56'da verilen teoreme göre,

$$(D_x - D_y) z = 0, \quad (D_x + 5 D_y) z = 0$$

çarpanlarına tekabül eden çözümler ise,

$$\begin{aligned} \alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = -1, \quad \gamma_2 = 0, \quad r = 2 \\ \alpha_3 = 1, \quad \beta_3 = 5, \quad \gamma_3 = 0, \quad r = 3 \end{aligned}$$

oldukları gözönüne alınırsa, sırasıyla

$$u_r = \exp\left(-\frac{\gamma_r x}{\alpha_r}\right) \phi_r(\alpha_r y - \beta_r x)$$

bağıntısına göre

$$u_2 = \phi_2(y + x), \quad u_3 = \phi_3(y - 5x)$$

bulunur. Buna göre verilen diferansiel denklemin bir tam integrali olarak

$$z = \sum_{r=1}^3 u_r = \phi_{11}(y-2x) + x \phi_{12}(y-2x) + x^2 \phi_{13}(y-2x) + \phi_2(y+x) + \phi_3(y-5x)$$

sonucuna varılır.

$$\text{ÖRNEK 3.} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} - 4 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

diferansiel denkleminin integrasyonu :

Verilen diferansiel denklem operatörler ile,

$$(D_x^2 - D_x D_y - 2 D_y^2 + 2 D_x - 4 D_y) z = 0$$

şeklinde yazılabilir. İndirgeyebilir olan bu diferansiyel denklem çarpanlarına ayrılır,

$$(D_x - 2 D_y)(D_x + D_y + 2) z = 0$$

bulunur. Burada,

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = -2, \quad \gamma_1 = 0, \quad r = 1$$

$$\alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = 1, \quad \gamma_2 = 2, \quad r = 2$$

olduğu gözönüne alınır ve prg.56'daki teorem uygulanırsa,

$$u_1 = \phi_1(y + 2x), \quad u_2 = \exp(-2x) \phi_2(y - x)$$

elde edilir. Bunlara göre

$$z = \phi_1(y + 2x) + \exp(-2x) \phi_2(y - x)$$

sonucuna varılır.

$$\text{ÖRNEK 4.} \quad (2 D_x + 3 D_y - 2)^3 (D_x + D_y + 1) z = 0$$

diferansiyel denkleminin integrasyonu :

Verilen diferansiyel denklemden,

$$\alpha_1 = 2, \quad \beta_1 = 3, \quad \gamma_1 = -2, \quad r = 1, \quad n = 3$$

$$\alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = 1, \quad \gamma_2 = 1, \quad r = 2,$$

yazılır. Prg.58 ve prg.56'da verilen teoremler gözönüne alınır, sırasıyla

$$u_1 = \exp(x) \sum_{s=1}^3 x^{s-1} \phi_{1s}(2y - 3x)$$

$$u_2 = \exp(-x) \phi_2(y - x)$$

bulunur. Buradan

$$z = \exp(x) \phi_{11}(2y-3x) + x \exp(x) \phi_{12}(2y-3x) + x^2 \exp(x) \phi_{13}(2y-3x) + \exp(-x) \phi_2(y-x)$$

sonucuna varılır.

61. BİR ÖZEL İNTEGRALİN ARANMASI- METOD I - (164) denkleminin tamamlayıcı fonksiyonunun bulunmasından sonra, çözümün tamamlanması için bir özel çözümün bulunması gerekir. Şimdi bu özel çözümü arayalım:

(164) denkleminin operatörler ile yazılışı

$$F(D_x, D_y)z = \prod_{r=1}^n (\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r) z = f(x, y) \quad (189)$$

olsun. Şimdi

$$\prod_{r=1}^n (\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r) z$$

operatörü,

$$(\alpha_1 D_x + \beta_1 D_y + \gamma_1) \prod_{r=2}^n (\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r)$$

şeklinde yazılır ve

$$\prod_{r=2}^n (\alpha_r D_x + \beta_r D_y + \gamma_r) z = z_1 \quad (190)$$

denirse, (189) denklemini

$$(\alpha_1 D_x + \beta_1 D_y + \gamma_1) z_1 = f(x, y)$$

şeklini alır. Lineer olan bu diferansiyel denklemin çözümünden bulunan z_1 fonksiyonu (190) denkleminde götürülürse $(n-1)$. mertebeden homogen olmayan bir denklem elde edilir. Bu metod n def'a tekrarlanırsa verilen denklemin bir özel çözümü elde edilmiş olur.

ÖRNEK. $(D_x^2 - D_x D_y - 2 D_y^2 + 2 D_x - 4 D_y) z = y e^x + 3 x e^{-y}$

diferansiyel denkleminin integrasyonu :

Verilen diferansiyel denklem indirgenebilir olup,

$$(D_x - 2 D_y)(D_x + D_y + 2) z = y e^x + 3 x e^{-y} \quad (191)$$

şeklinde yazılabilir. Prg.60 - Örnek 3.de verildiği gibi, ikinci tarafsız denklemin genel çözümü,

$$u = \phi_1(y + 2x) + \exp(-2x) \phi_2(y - x)$$

dir.Şimdi (191) diferansiel denkleminin bir özel integralini arayalım :

$$(D_x + D_y + 2) z = v \quad (192)$$

denirse,

$$(D_x - 2 D_y) v = y e^x, \quad (D_x - 2 D_y) v = 3 x e^{-y} \quad (193)$$

elde edilir. Önce birinci diferansiel denklemi gözelim. Birinci mertebeden lineer olan bu diferansiel denkleme ait yardımcı sistem

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2} = \frac{dv}{y e^x}$$

olur.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2} \quad \text{den} \quad C_1 - 2x = y \quad \text{veya} \quad C_1 = y + 2x,$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dv}{y e^x} \quad \text{veya} \quad \frac{dx}{1} = \frac{dv}{(C_1 - 2x) e^x} \quad \text{den} \quad dv = (C_1 - 2x) e^x dx$$

yazılır ve integre edilirse

$$v = (C_1 - 2x) e^x + 2 e^x = y e^x + 2 e^x \quad (196) \text{deki değeri yerine}$$

bulunur. v fonksiyonu (192) deki denkleme götürülürse,

$$(D_x + D_y + 2) z = y e^x + 2 e^x$$

lineer denkleminin varılır.Bu denklemin yardımcı sistemi :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{y e^x + 2 e^x - 2z}$$

dir.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} \quad \text{den} \quad x + C_1 = y \quad \text{veya} \quad C_1 = y - x \quad (194)$$

bulunur. Yardımcı sistenden alınan,

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{y e^x + 2 e^x - 2z} \quad \text{den}$$

denklemini gözönüne alalım. y bağımsız değişkeninin yerine (194) deki eşiti yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa, lineer olan

$$\frac{dz}{dx} + 2z = (x + C_1) e^x + 2 e^x$$

adî diferansiel denklemi elde edilir. Bu diferansiel denklemin integrasyon çarpanı $\exp(2x)$ dir. Buna göre

$$d(e^{2x} z) = \left[(x + C_1) e^{3x} + 2 e^{3x} \right] dx$$

yazılır veya integre edilir ve $C_1 = y - x$ konursa

$$z = \frac{1}{3} \left(y + \frac{5}{3} \right) e^x \quad (195)$$

özel integraline varılır. (193) bağıntısındaki ikinci diferansiel denkleme uygun özel integrali arayalım :

Bu denklemin yardımcı sistemi,

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2} = \frac{dv}{3 x e^{-y}}$$

dir. $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2}$ den $C_1 - 2x = y$ veya $C_1 = y + 2x$ (196)

olur. Yardımcı sistemden alınan

$$\frac{dx}{1} = \frac{dv}{3 x e^{-y}}$$

denklemini gözönüne alalım. y bağımsız değişkeni yerine (196) daki değeri yazılır ve integre edilirse

$$v = \frac{3}{2} x e^{-y} - \frac{3}{4} e^{-y}$$

bulunur. Bu v fonksiyonu (192) bağıntısına götürülürse

$$(D_x + D_y + 2) z = \frac{3}{2} x e^{-y} - \frac{3}{4} e^{-y} \quad (198)$$

denklemine varılır. Bu lineer denklemin yardımcı sistemi,

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{\frac{3}{2} x e^{-y} - \frac{3}{4} e^{-y} - 2z}$$

den ibarettir.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} \quad \text{den} \quad x + C_1 = y \quad \text{veya} \quad C_1 = y - x$$

olur. Yardımcı sistemden, $y = x + C_1$ yazarak,

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{\frac{3}{2} x e^{-x-C_1} - \frac{3}{4} e^{-x-C_1} - 2z}$$

denklemini gözönüne alalım. Bu denklem düzenlenirse, lineer olan

$$\frac{dz}{dx} + 2z = \frac{3}{2} x e^{-x-C_1} - \frac{3}{4} e^{-x-C_1}$$

adi diferansiel denkleminde varılır. Bu diferansiel denklemin integrasyon çarpanı $\exp(2x)$ dir. Buna göre denklem,

$$d(e^{2x} z) = \left(\frac{3}{2} x e^{x-C_1} - \frac{3}{4} e^{x-C_1} \right) dx$$

şeklinde yazılabilir. Bu da integrale edilir ve düzenlenirse,

$$z = \frac{3}{2} \left(x - \frac{3}{2} \right) e^{-y} \quad (197)$$

özel integraline varılır. O halde (195) ve (197) bağıntılarına göre (191) denkleminin bir özel integrali

$$z = \frac{1}{3} \left(y + \frac{5}{3} \right) e^x + \frac{3}{2} \left(x - \frac{3}{2} \right) e^{-y}$$

olur. İkinci tarafların genel çözümünü ile bu özel çözümün toplamından

$$z = \phi_1(y+2x) + \exp(-2x) \phi_2(y-x) + \frac{1}{3} \left(y + \frac{5}{3} \right) e^x + \frac{3}{2} \left(x - \frac{3}{2} \right) e^{-y}$$

sonucuna varılır ki bu ikinci taraflı diferansiel denklemin genel çözümüdür.

62. BİR ÖZEL İNTEGRALİN ARANMASI - METOD II -

$$F(D_x, D_y) z = f(x, y) \quad (198)$$

diferansiel denkleminin bir özel integralinin aranmasında,

$$F(D_x, D_y) \frac{1}{F(D_x, D_y)} f(x, y) \equiv f(x, y)$$

özdeşliğindeki, $\frac{1}{F(D_x, D_y)}$ operatöründen faydalanılır. Bu operatörü belirtelim.

(198) bağıntısından

$$z = \frac{1}{F(D_x, D_y)} f(x, y) = \frac{1}{(D_x - n_1 D_y)(D_x - n_2 D_y) \dots (D_x - n_n D_y)} f(x, y) \quad (199)$$

yazılır. Buradan bir özel integral,

$$v_1 = \frac{1}{D_x - n_1 D_y} f(x, y), \quad v_2 = \frac{1}{D_x - n_{n-1} D_y} v_1, \quad \dots, \quad z = v_n = \frac{1}{D_x - n_n D_y} v_{n-1}$$

şeklinde n tane lineer diferansiel denklemin çözümünden elde edilir. Bu n diferansiel denklemin herbiri

$$p - n q = g(x, y)$$

şeklinde dir. Buna göre yardımcı sistem,

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-n} = \frac{dz}{g(x, y)}$$

olur.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-n} \text{ den } C_1 - n x = y \text{ veya } C_1 = y + n x$$

bulunur. Yardımcı sistemden, $y = C_1 - n x$ konarak elde edilen

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{g(x, C_1 - n x)}$$

denkleminde

$$z = \int g(x, C_1 - n x) dx \quad (200)$$

bulunur. Yukarıda elde edilen n tane diferansiel denklemin çözümü için (200) integralinden faydalanılır. Bir özel integral arandığından integral sabiti ihmal edilir ve C_1 yerine $y + n x$ konur.

$$\text{ÖRNEK. } (D_x^3 + D_x^2 D_y - 6 D_x D_y^2) z = x^2 + y^2$$

diferansiel denkleminin integrasyonu :

Verilen diferansiel denklem indirgenebilir olup,

$$D_x (D_x - 2 D_y) (D_x + 3 D_y) z = x^2 + y^2$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre tamamlayıcı fonksiyon

$$u = \sum_{r=1}^3 u_r = \phi_1(y) + \phi_2(y + 2x) + \phi_3(y - 3x) \quad (201)$$

dir. Şimdi diferansiel denklemin bir özel çözümünü arayalım :

(199) bağıntısına göre,

$$z = \frac{1}{D_x (D_x - 2 D_y) (D_x + 3 D_y)} (x^2 + y^2)$$

yazılır. Buradan

$$\frac{1}{D_x + 3 D_y} (x^2 + y^2) = v_1, \quad \frac{1}{D_x - 2 D_y} (v_1 = v_2), \quad \frac{1}{D_x} v_2 = v_3 = z$$

diferansiel denklemleri elde edilir. Bu diferansiel denklemleri (200) integralinden faydalanarak çözelim :

$$v_1 = \int \left[x^2 + (C_1 + 3x)^2 \right] dx = \int (10x^2 + 6C_1x + C_1^2) dx = \frac{10x^3}{3} + 3C_1x^2 + C_1^2x$$

olur. Burada $C_1 = y - 3x$ konursa

$$v_1 = \frac{10x^3}{3} - 3x^2y + xy^2$$

bulunur. Buna göre

$$\frac{1}{D_x - 2 D_y} \left(\frac{10x^3}{3} - 3x^2y + xy^2 \right) = v_2$$

dır. $y = C_1 - 2x$ alınır ve (200) integrali uygulanırsa,

$$v_2 = \int \left(\frac{40x^3}{3} - 7C_1x^2 + C_1^2x \right) dx = \frac{10x^4}{3} - \frac{7C_1x^3}{3} + \frac{C_1^2x^2}{2}$$

olur. $C_1 = y + 2x$ yazılırsa

$$v_2 = \frac{2x^4}{3} - \frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{2}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{1}{D_x} \left(\frac{2x^4}{3} - \frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{2} \right) = v_3 = z$$

yazılır. $y = C_1$ alalım ve yine (200) integralini uygulayalım :

$$z = \int \left(\frac{2x^4}{3} - \frac{C_1x^3}{3} + \frac{C_1^2x^2}{2} \right) dx = \frac{2x^5}{15} - \frac{C_1x^4}{12} + \frac{C_1^2x^3}{6}$$

elde edilir. $C_1 = y$ konulursa, verilen diferansiel denklemin özel integrali,

$$z = \frac{2x^5}{15} - \frac{x^4y}{12} + \frac{x^3y^2}{6} \quad (202)$$

olur. (201) ve (202) bağıntılarının toplamından verilen diferansiel denklemin genel çözümü olarak

$$z = \phi_1(y) + \phi_2(y+2x) + \phi_3(y-3x) + \frac{2x^5}{15} - \frac{x^4y}{12} + \frac{x^3y^2}{6}$$

sonucuna varılır.

63. İNDİRGENEBİLİR DENKLEMLER - $F(D_x, D_y)$ operatörü indirgenmeyen bir operatör olduğu takdirde, gerekli sayıda keyfî fonksiyon ihtiva eden bir çözümü bulmak her zaman mümkün değildir. Aşağıda gözönüne alınacak olan teoremler yardımı ile istenildiği kadar keyfî sabit ihtiva eden bir çözüm bulmak mümkün olmaktadır. Bu teoremler indirgenebilir denklemler için de doğru olup, gereğinde kullanılabilir.

64. TEOREM -

$$F(D_x, D_y) e^{ax+by} = F(a, b) e^{ax+by}$$

dir.

$F(D_x, D_y)$ operatörü, $C_{rs} D_x^r D_y^s$ şeklindeki terimlerin toplamından ibarettir.

$$D_x^r e^{ax+by} = a^r e^{ax+by}, \quad D_y^s e^{ax+by} = b^s e^{ax+by}$$

olduğundan,

$$C_{rs} D_x^r D_y^s e^{ax+by} = C_{rs} a^r b^s e^{ax+by}$$

elde edilir. O halde

$$\sum C_{rs} D_x^r D_y^s e^{ax+by} = \sum C_{rs} a^r b^s e^{ax+by} \quad (203)$$

yazılır.

$$\sum C_{rs} D_x^r D_y^s = F(D_x, D_y)$$

olduğu gözönüne alınır ve

$$\sum C_{rs} a^r b^s = F(a, b)$$

ile gösterilirse, (203) bağıntısından

$$F(D_x, D_y) e^{ax+by} = F(a, b) e^{ax+by}$$

sonucuna varılır.

65. TEOREM -

$$F(D_x, D_y) \left[e^{ax+by} \phi(x, y) \right] = e^{ax+by} F(D_x + a, D_y + b) \phi(x, y) \quad (204)$$

dir.

Teoremin ispatı için, bir çarpımın ardışık türevleri için bilinen LEIBNITZ

formülünü kullanacağız. Buna göre

$$D_x^r(u v) = \sum_{k=0}^r C_r^k (D_x^{r-k} u) (D_x^k v)$$

yazılır. Burada $u = \phi$, $v = e^{ax}$ alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} D_x^r(e^{ax} \phi) &= \sum_{k=0}^r C_r^k (D_x^{r-k} \phi) \cdot D_x^k(e^{ax}) \\ &= \sum_{k=0}^r C_r^k (D_x^{r-k} \phi) a^k \cdot e^{ax} \\ &= e^{ax} \sum_{k=0}^r C_r^k (D_x^{r-k} \phi) a^k \\ &= e^{ax} (D_x + a)^r \phi \end{aligned} \quad (205)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$D_y^r(e^{by} \phi) = e^{by} (D_y + b)^r \phi \quad (206)$$

olduğu gösterilebilir. (205) ve (206) bağıntılarına göre

$$F(D_x, D_y) \left[e^{ax+by} \cdot \phi(x, y) \right] = e^{ax+by} F(D_x + a, D_y + b) \phi(x, y)$$

sonucuna varılır.

66. İNDİRGENEMEYİZ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ -

$$F(D_x, D_y) z = f(x, y) \quad (207)$$

şeklindeki bir denklemin tanımlayıcı fonksiyonunu bulmak için $F(D_x, D_y)$ operatörü çarpanlarına ayrılır. İndirgenebilir çarpanlar varsa, bu çarpanlara ait çözümler ilgili teoremler yardımı ile elde edilir. İndirgenemez çarpanlar için prg.64 deki teoreme göre, $F(a, b) = 0$ ise $\exp(ax+by)$ fonksiyonu

$$F(D_x, D_y) z = 0$$

diferansiel denkleminin bir çözümü olacaktır. O halde ; a_k, b_k, c_k keyfî sabitler olmak üzere, $F(a_k, b_k) = 0$ ise

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \exp(a_k x + b_k y) \quad (208)$$

fonksiyonu (207) denkleminin bir tamamlayıcı fonksiyonu olur. Bu yol, ihtiyaca uygun sayıda keyfi sabit ihtiva eden, bir tamamlayıcı fonksiyonu bulma imkânı verir.

(207) denkleminin genel çözümünü yazabilmek için bu denklemin bir özel çözümü bulunmalıdır. Bunun için aşağıda verilen metodlar kullanılır. Genellikle indirgenemez denklemler için kullanılan bu metodlar, gerektiğinde indirgenebilir denklemlere de uygulanabilir.

ÖRNEK 1.- $F(D_x^2, D_y)z = (D_x^2 - D_x + D_y)z = 0$

diferansiel denkleminin integrasyonu :

Verilen diferansiel denklem indirgenemez denklemdir. 0 halde $F(a, b) = 0$ teşkil edilirse,

$$a^2 - a + b = 0$$

bulunur. a_k ve b_k bu bağıntıyı sağlayan iki sabit ve c_k da keyfî bir sabit olmak üzere, verilen diferansiel denklemin çözümü, (208) bağıntısına göre

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x + b_k y} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x + (a_k^2 - a_k) y}$$

şeklinde elde edilir.

ÖRNEK 2.- $(D_x^2 D_y + D_y^2 - 2)z = 0$

diferansiel denkleminin integrasyonu :

Verilen diferansiel denklem indirgenemez denklemdir. 0 halde $F(a, b) = 0$ teşkil edilirse,

$$a^2 b + b^2 - 2 = 0$$

bulunur. a_k ve b_k bu bağıntıyı sağlayan iki sabit ve c_k da bir keyfî sabit olmak üzere, verilen diferansiel denklemin çözümü olarak, (208) bağıntısına göre

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x + b_k y}, \quad a_k^2 b_k - b_k^2 - 2 = 0$$

veya bunlardan

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x + \frac{2 - b_k^2}{b_k} y}$$

sonucuna varılır.

67. BİR ÖZEL İNTEGRALİN ARANMASI - METOD III -

$$F(D_x, D_y) z = f(x, y)$$

diferansiel denkleminde $f(x, y)$ fonksiyonu x ve y bağımsız değişkenlerinin bir polinomu olsun. Bu takdirde Prg.62 de verilen ters operatör ile

$$z = \frac{1}{F(D_x, D_y)} f(x, y)$$

yazılır ve

$$\frac{1}{F(D_x, D_y)} = \left[F(D_x, D_y) \right]^{-1}$$

operatörünün Binom formülüne göre yapılan açılımında karşılaşılan D_x^{-1} ve D_y^{-1} operatörleri integral olarak tanımlanırsa bir özel çözüme varılır.

ÖRNEK . $(D_x^2 - D_x + D_y) z = x^2 + xy + y^2$

diferansiel denkleminin integrasyonu :

$(D_x^2 - D_x + D_y)$ operatörü indirgenemez operatördür. Buna göre, $F(a, b) = 0$ teşkil edilirse

$$a^2 - a + b = 0$$

bulunur. a_k ve b_k bu bağıntıyı sağlayan sabitler ve c_k da keyfi bir sabit olmak üzere

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x + b_k y}$$

fonksiyonu, ikinci tarafsız diferansiel denklemin genel çözümüdür. Şimdi bir özel çözüm arayalım :

$$z = \frac{1}{D_x^2 - D_x + D_y} (x^2 + xy + y^2)$$

bağıntısından

$$z = \frac{1}{D_y \left(1 + \frac{D_x^2 - D_x}{D_y} \right)} (x^2 + xy + y^2) = \frac{1}{D_y} \left(1 + \frac{D_x^2 - D_x}{D_y} \right)^{-1} (x^2 + xy + y^2)$$

yazılabilir. Binom formülüne göre açılım yapılırsa,

$$z = \frac{1}{D_y} \left(1 - \frac{D_x^2 - D_y}{D_y} + \frac{(D_x^2 - D_y)^2}{D_y^2} - \dots \right) (x^2 + xy + y^2)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{D_y} \left(x^2 + xy + y^2 - \frac{2 - 2x - y}{D_y} + \frac{2}{D_y^2} \right) \\ &= \frac{1}{D_y} \left(x^2 + xy + y^2 - 2y + 2xy + \frac{y^2}{2} + y^2 \right) \\ &= x^2 y + \frac{3}{2} x y^2 + \frac{5}{6} y^3 - y^2 \end{aligned}$$

özel çözümü elde edilir. Bunlara göre, verilen diferansiel denklemin genel çözümü olarak,

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x + b_k y} + x^2 y + \frac{3}{2} x y^2 + \frac{5}{6} y^3 - y^2$$

sonucuna varılır.

68. BİR ÖZEL INTEGRALİN ARANMASI - METOD IV -

$$F(D_x, D_y) z = f(x, y)$$

$$a x + b y$$

diferansiel denkleminde $f(x, y) = e^{ax+by}$ şeklinde ise, Prg. 64 de verilen teoremlerden faydalanarak, bir özel çözüm bulunabilir. $F(a, b) \neq 0$ olmak üzere, teoremden

$$z = \frac{1}{F(D_x, D_y)} e^{ax+by} = \frac{1}{F(a, b)} e^{ax+by} \quad (209)$$

yazılır. Eğer $F(a, b) = 0$ ise bu bağıntının kullanılamayacağı aşikârdır. Bu takdirde e^{ax+by} fonksiyonunu, $h \rightarrow 0$ için $e^{ax + hx + by}$ fonksiyonunun limiti olarak gözönüne alalım :

$$z = \frac{1}{F(D_x, D_y)} f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{F(D_x, D_y)} e^{ax + hx + by}$$

olur. Prg. 65 deki teoreme göre,

$$z = \frac{1}{F(D_x, D_y)} f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{F(a+h, b)} e^{ax+hx+by} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{F(a+h, b)} e^{ax+by} e^{hx}$$

yazılır. e^{hx} fonksiyonunu Mac Laurin serisine açalım :

$$z = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{F(a+h, b)} e^{ax+by} \left(1 + hx + \frac{x^2 h^2}{2!} + \frac{x^3 h^3}{3!} + \dots \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ax+by}}{F(a+h, b)} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h e^{ax+by}}{F(a+h, b)} \left(x + \frac{x^2 h}{2!} + \frac{x^3 h^2}{3!} + \dots \right)$$

şeklinde yazılabilir. Birinci terim $h \rightarrow 0$ için $F(a, b) = 0$ a tekabül eden bir çözüm olup, tamamlayıcı fonksiyonun bir kısmıdır. O halde özel çözüm için $F(a, b) \neq 0$ olduğu gözönüne alınırsa

$$z = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ax+by}}{F(a+h, b) - F(a, b)} \left(x + \frac{x^2 h}{2!} + \frac{x^3 h^2}{3!} + \dots \right)$$

yazılabilir. Buradan

$$z = \frac{x e^{ax+by}}{F'_a(a, b)} \quad (210)$$

elde edilir. Eğer $F'_a(a, b) = 0$ ise, benzer şekilde işlem yapılarak,

$$z = \frac{1}{F(D_x, D_y)} e^{ax+by} = \frac{x^2}{2 F''_{aa}(a, b)} e^{ax+by} \quad (211)$$

sonucuna varılır.

ÖRNEK 1.- $(D_x^2 + D_x D_y - D_y^2 + D_x - D_y) z = e^{2x - 3y}$

diferansiyel denkleminin integrasyonu :

Verilen diferansiyel denklem indirgenemez denklemdir. $F(a, b) = 0$ bağıntısından

$$a^2 + a b - b^2 + a - b = 0$$

bulunur. a_k ve b_k bu bağıntıyı sağlayan sabitler ve c_k da keyfî sabit olsun. Üzerine, ikinci tarafsız diferansiyel denklemin çözümü olarak,

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x + b_k y}$$

bulunur. Bir özel çözüm ise

$$z = \frac{1}{D_x^2 + D_x D_y - D_y^2 + D_x - D_y} e^{2x-3y}$$

yazılarak aranabilir. (209) bağıntısı gözönüne alınır,

$$z = \frac{1}{4 - 6 - 9 + 2 + 3} e^{2x-3y}$$

veya

$$z = -\frac{1}{6} e^{2x-3y}$$

özel çözümü elde edilir. Bunlara göre verilen diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x + b_k y} - \frac{1}{6} e^{2x-3y}$$

olur.

ÖRNEK 2.- $(D_x^2 + D_x - 2 D_y^2) z = e^{x-y}$

diferansiyel denkleminin integrasyonu :

Operatör indirgenemez olup, $F(a, b) = 0$ dan

$$a^2 + a - 2 b^2 = 0$$

yazılır. a_k ve b_k bu bağıntıyı sağlayan sabitler ve c_k da keyfi sabit olmak üzere, ikinci tarafsız diferansiyel denklemin genel çözümü

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x + b_k y}$$

olur. Özel çözüm için,

$$z = \frac{1}{D_x^2 + D_x - 2 D_y^2} e^{x-y}$$

yazılabilir. Ancak $F(a, b) = 0$ olduğundan (209) bağıntısı kullanılamaz.

$$z = A x e^{x-y} + B y e^{x-y}$$

(212)



şeklinde bir özel çözümü belirsiz katsayılar metodu ile arayalım. (212) bağıntısından kısmî türevler alınır

$$D_x z = (A + A x + B y) e^{x-y}$$

$$D_x^2 z = (2A + A x + B y) e^{x-y}$$

$$D_y z = (A x + B + B y) e^{x-y}$$

$$D_y^2 z = (A x + 2B + B y) e^{x-y}$$

bulunur. Bu türevler verilen diferansiyel denkleme götürülür ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$- 2B y + 3A - 4B = 1$$

bulunur. Bu özdeşlikten

$$A = \frac{1}{3} ; B = 0$$

elde edilir. Buna göre özel çözüm,

$$z = \frac{x}{3} e^{x-y}$$

olur. O halde verilen diferansiyel denklemin genel çözümü olarak,

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x + b_k y} + \frac{x}{3} e^{x-y}$$

sonucuna varılır. Yukarıda belirsiz katsayılar metodu ile bulduğumuz özel çözümü, (210) bağıntısı kullanılarak daha çabuk elde edilir. Gerçekten $a = 1$, $b = -1$, $F(a, b) = a^2 + a - b^2$ ve $F'_a(a, b) = 2a + 1$ oldukları gözönüne alınır

$$z = \frac{x}{3} e^{x-y}$$

elde edilir.

69. BİR ÖZEL İNTEGRALİN ARANMASI - METOD V -

$$F(D_x, D_y) z = f(x, y)$$

diferansiyel denkleminde, $f(x, y)$ fonksiyonu $\cos(ax + by)$ şeklinde olsun.

$$\begin{aligned} D_x^2 \cos(ax+by) &= -a^2 \cos(ax+by), \dots, D_x^{2r} \cos(ax+by) = (-a^2)^r \cos(ax+by) \\ D_x D_y \cos(ax+by) &= -ab \cos(ax+by), \dots, D_x^r D_y^r \cos(ax+by) = (-ab)^r \cos(ax+by) \\ D_y^2 \cos(ax+by) &= -b^2 \cos(ax+by), \dots, D_y^{2r} \cos(ax+by) = (-b^2)^r \cos(ax+by) \end{aligned}$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} F(D_x^2, D_x D_y, D_y^2) \cos(ax+by) &= \sum_{r=1}^{\infty} (P_r D_x^{2r} + R_r D_x^r D_y^r + Q_r D_y^{2r}) \cos(ax+by) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \left[P_r (-a^2)^r + R_r (-ab)^r + Q_r (-b^2)^r \right] \cos(ax+by) \\ &= F(-a^2, -ab, -b^2) \cos(ax+by) \end{aligned}$$

yazılır. Buradan, $F(-a^2, -ab, -b^2) \neq 0$ olmak üzere

$$z = \frac{1}{F(D_x^2, D_x D_y, D_y^2)} \cos(ax+by) = \frac{1}{F(-a^2, -ab, -b^2)} \cos(ax+by) \quad (213)$$

sonucuna varılır. $F(-a^2, -ab, -b^2) = 0$ ise, bu bağıntının kullanılamayacağı açıktır. Bu takdirde $\cos(ax+by)$ ifadesini, $h \rightarrow 0$ için $\cos(ax+hx+by)$ fonksiyonunun limiti olarak gözönüne alalım :

$$\begin{aligned} z &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{F(D_x^2, D_x D_y, D_y^2)} \cos[(a+h)x + by] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{F[-(a+h)^2, -(a+h)b, -b^2]} \cos[(a+h)x + by] \end{aligned}$$

yazalım. $\cos[(a+h)x + by]$ ifadesini Mac Laurin formülü ile, h nin kuvvetlerine göre seriye açılırsa

$$\begin{aligned} z &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{F[-(a+h)^2, -(a+h)b, -b^2]} \left[\cos(ax+by) - \frac{hx}{1!} \sin(ax+by) - \right. \\ &\quad \left. \frac{h^2 x^2}{2!} \cos(ax+by) + \dots \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(ax+by)}{F[-(a+h)^2, -(a+h)b, -b^2]} +$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{F[-(a+h)^2, -(a+h)b, -b^2]} \left[-x \sin(ax+by) - \frac{h x^2}{2!} \cos(ax+by) + \dots \right]$$

yazılabilir. Birinci terim $h \rightarrow 0$ için $F(-a^2, -ab, -b^2) = 0$ a tekabül eden bir çözüm olup, tamamlayıcı fonksiyonun bir kısmıdır. O halde özel çözüm için $F(-a^2, -ab, -b^2) = 0$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$z = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{F[-(a+h)^2, -(a+h)b, -b^2] - F(-a^2, -ab, -b^2)} \left[-x \sin(ax+by) - \frac{h x^2}{2!} \cos(ax+by) + \dots \right]$$

yazılabilir. Buradan

$$z = \frac{-x \sin(ax+by)}{F'_a(-a^2, -ab, -b^2)} \quad (214)$$

sonucuna varılır. $f(x,y) = \sin(ax+by)$ şeklinde ise, tekabül eden özel çözüm için benzer şekilde yapılacak işlemler ile

$$z = \frac{+x \cos(ax+by)}{F'_a(-a^2, -ab, -b^2)} \quad (215)$$

bağıntısı elde edilir.

$$\text{ÖRNEK.-} \quad (D_x^2 - D_x D_y - 2D_y^2) z = \sin(x-y) + \cos(2x+y)$$

diferansiyel denkleminin integrasyonu :

Verilen diferansiyel denklem indirgenebilir denklem olup,

$$(D_x - 2D_y)(D_x + D_y) z = \sin(x-y) + \cos(2x+y)$$

şeklinde yazılabilir. İkinci tarafsız denklemin çözümü, Prg.56 daki teoremden

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, & \beta_1 &= -2, & \gamma_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 1, & \beta_2 &= 1, & \gamma_2 &= 0 \end{aligned}$$

olduğuna göre,

$$\sum_{r=1}^2 u_r = \phi_1(y + 2x) + \phi_2(y - x)$$

bulunur. Şimdi özel çözümleri arayalım : (213) bağıntısına göre

$$z = \frac{1}{D_x^2 - D_x D_y - 2D_y^2} \sin(x - y) = \frac{1}{-a^2 + ab + 2b^2} \sin(x - y)$$

yazılır. Buradan

$$z = \frac{1}{5} \sin(x - y)$$

bulunur.

$\cos(2x + y)$ e tekabül eden özel çözüm için

$$z = \frac{1}{D_x^2 - D_x D_y - 2D_y^2} \cos(2x + y) = \frac{1}{-a^2 + ab + 2b^2} \cos(2x + y)$$

yazılır. $-a^2 + ab + 2b^2 = 0$ olduğundan bu kere (214) bağıntısı gereğince

$$z = \frac{-x \sin(ax + by)}{F'_a(-a^2, -ab, -b^2)} = \frac{-x \sin(2x + y)}{-2a + b} = \frac{x}{3} \sin(2x + y)$$

elde edilir. Bunlara göre genel çözüm olarak

$$z = \phi_1(y + 2x) + \phi_2(y - x) + \frac{1}{5} \sin(x - y) + \frac{x}{3} \sin(2x + y)$$

sonucuna varılır.

TAM DİFERANSİEL DENKLEMLER

70. TANIM - x ve y bağımsız değişkenlerinin z fonksiyonu ile tanımlanan,

$$F(x, y, z) = 0$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu fonksiyonun x ve y bağımsız değişkenlerine göre kısmî türevleri alınarak,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P(x, y, z) \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y, z)$$

ve

$$dz = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy \quad (216)$$

tam diferansielinin bulunduğunu farzedelim. Yukarıda yapılan işlemlerin tersine olarak iki problem düşünülebilir :

$$a) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = P(x, y, z)$$

verildiğine göre, z fonksiyonunun bulunması,

$$b) \quad dz = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy$$

verildiğine göre, z fonksiyonunun bulunması .

Birinci problem y bağımsız değişkenine bir sabit olarak bakıldığı zaman, birinci mertebeden bir diferansiel denklemden ibaret olur. Bu diferansiel denklemin y nin keyfî bir fonksiyonuna bağımlı olarak, bir çözüm kabul eder.

İkinci problem ise,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P(x, y, z) \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y, z)$$

kısmî türevleri ile belirlenen bir z fonksiyonunu bulmağa getirilir.

Bu iki problem aşağıdaki gibi genişletilebilir :

a) $P_1, P_2, \dots, P_n$ bilinen fonksiyonları ; $x_1, x_2, \dots, x_n$ ve z değişkenlerinin fonksiyonları olduklarına göre :

$$dz = P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + \dots + P_n dx_n \quad (217)$$

tam diferansiyeli ile tanımlanan ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerinin z fonksiyonunun bulunması ,

$$b) \frac{\partial z}{\partial x_1} = P_1(x_1, \dots, x_n), \frac{\partial z}{\partial x_2} = P_2(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = P_n(x_1, \dots, x_n)$$

kısmi türevleri ile tanımlanan ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerinin z fonksiyonunun bulunması .

(216) ve (217) denklemlerine tam diferansiyel denklem denilir. Ancak (216) veya (217) şeklindeki herhangi bir denkleme, ileride belirlenecek şartları sağlamadan, tam diferansiyel denklem olarak gözönüne alınamaz. (*)

71. TAMAMIYLA INTEGRE EDİLEBİLEN DENKLEMLER (Equations complètement intégrables)
P ve Q diferansiyel fonksiyonlar olmak üzere,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P(x, y, z) ; \frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y, z)$$

denklemlerini gözönüne alalım. Buradan,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \quad (218)$$

bulunur.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

olduğundan (218) bağıntılarından,

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \quad (219)$$

(*) : (216) veya (217) şeklindeki herhangi bir denkleme do, hatalı olmakla beraber tam diferansiyel denilmektedir.

elde edilir. Bu bağıntı

$$dz = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy \quad (220)$$

tam diferansiel denklemini sağlayan x ve y bağımsız değişkenlerinin bir z fonksiyonunun mevcut olması için gerek bir şarttır. Eğer (219) bağıntısı bir özdeşlik olarak sağlanırsa (220) bağıntısı tamamıyla integre edilebilir denilir. (219) bağıntısı özdeşlik olarak sağlanmıyorsa, bir sabite bağımlı olmayan teki çözümler bulunabilir. Ancak böylece bulunan z çözümü (220) denklemini zorunlu olarak sağlamaktadır.

ÖRNEK -
$$dz = (2z^2 - x^2) dx + z^2 dy \quad (221)$$

toplam diferansiel denklemini gözönüne alalım. Bu denklem integre edilemez. (219) bağıntısı

$$4z^4 = 3z^2(2z^2 - x^2) \quad \text{veya} \quad z^2(2z^2 - 3x^2) = 0$$

olur. Buradan z fonksiyonu olarak

$$z = \pm \sqrt{3/2} x$$

elde edilir. Böylece elde edilen z fonksiyonu verilen (221) diferansiel denklemini sağlamaktadır. Şu halde görülüyor ki (219) bağıntısı, bir özdeşlik olmadıkça zaman, gözönüne alınan diferansiel denklemini sağlayan teki çözümü daima vermez.

72. $P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = 0$ DENKLEMİNİN INTEGRE EDİLEBİLME ŞARTI - $R(x, y, z)$ sıfırdan farklı olsun. Bu takdirde

$$X(x, y, z) = -\frac{P(x, y, z)}{R(x, y, z)}, \quad Y(x, y, z) = -\frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)}$$

konularak

$$dz = X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy$$

diferansiel denklemini elde edilir. Bu diferansiel denklemin integre edilebilme şartı, (219) bağıntısına benzer olarak,

$$\frac{\partial X}{\partial y} + Y \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial x} + X \frac{\partial Y}{\partial z}$$

şeklinde yazılabilir. Bu bağıntıda,

$$X = -\frac{P}{R}, \quad Y = -\frac{Q}{R}$$

konursa,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{P}{R} \right) - \frac{Q}{R} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{P}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{Q}{R} \right) - \frac{P}{R} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{Q}{R} \right)$$

olur. Bu bağıntıdaki türevler hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{\partial P}{\partial y} R - \frac{\partial R}{\partial y} P}{R^2} - \frac{Q}{R} \frac{\frac{\partial P}{\partial z} R - \frac{\partial R}{\partial z} P}{R^2} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} R - \frac{\partial R}{\partial x} Q}{R^2} - \frac{P}{R} \frac{\frac{\partial Q}{\partial z} R - \frac{\partial R}{\partial z} Q}{R^2}, \\ & \frac{\frac{\partial P}{\partial y} R - \frac{\partial R}{\partial y} P - \frac{\partial Q}{\partial x} R + \frac{\partial R}{\partial x} Q}{R} + \frac{\frac{\partial Q}{\partial z} P R - \frac{\partial R}{\partial z} Q P - \frac{\partial P}{\partial z} R Q + \frac{\partial R}{\partial z} P Q}{R} = 0, \\ & \frac{\partial P}{\partial y} R - \frac{\partial R}{\partial y} P - \frac{\partial Q}{\partial x} R + \frac{\partial R}{\partial x} Q + \frac{\partial Q}{\partial z} P - \frac{\partial P}{\partial z} Q = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade P, Q, R ye göre düzenlenirse,

$$P \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0 \quad (222)$$

sonucuna varılır. Bu şart, parantezlerin üçü de sıfır olup, özdeşlik olarak sağlanırsa, verilen diferansiyel denklem tam diferansiyeldir. Genellikle denklemin yeniden düzenlenmesi ile kolaylıkla integre edilir. Parantezlerin hepsi birden sıfır olmakla beraber (222) bağıntısı sıfır olup yine özdeşlik olarak sağlanırsa, verilen diferansiyel denklem, uygun olarak seçilen bir integrasyon çarpanının kullanılmasıyla tam diferansiyel denklem haline getirilerek integre edilir. Eğer (222) bağıntısı özdeşlik olarak sağlanmıyorsa, verilen diferansiyel denklem integre edilemez. Bu takdirde (222) bağıntısı bir denklem olacağından, bir keyfî sabite bağımlı olmayan z fonksiyonlarını verir. Bu z fonksiyonları verilen diferansiyel denklemi sağlamak kaydıyla tekil integral olurlar.

73. INTEGRASYON ÇARPANI - Verilen $P dx + Q dy + R dz$ diferansiyeli her zaman bir tam diferansiyel değildir. Bununla beraber $P dx + Q dy + R dz$ ifadesini $\mu(x, y, z)$ gibi bir fonksiyonla çarparak bu ifadeyi tam diferansiyel yapmak genel olarak mümkündür. Gerçekten,

$$\mu(P dx + Q dy + R dz) = dF$$

yazılırsa,

$$\mu P = F'_x, \quad \mu Q = F'_y, \quad \mu R = F'_z$$

oldukları bilinir. Buradan

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q), \quad \frac{\partial}{\partial z}(\mu Q) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu R), \quad \frac{\partial}{\partial x}(\mu R) = \frac{\partial}{\partial z}(\mu P)$$

veya

$$\begin{aligned}\mu(P_y - Q_x) &= Q\mu_x - P\mu_y \\ \mu(Q_z - R_y) &= R\mu_y - Q\mu_z \\ \mu(R_x - P_z) &= P\mu_z - R\mu_x\end{aligned}\quad (223)$$

elde edilir. Bu eşitlikleri sırasıyla R, P, Q ile çarpalım ve taraf tarafa toplayalım :

$$\begin{aligned}R\mu(P_y - Q_x) + P\mu(Q_z - R_y) + Q\mu(R_x - P_z) &= R(Q\mu_x - P\mu_y) + P(R\mu_y - Q\mu_z) \\ &+ Q(P\mu_z - R\mu_x),\end{aligned}$$

$$\mu(RP_y - RQ_x + PQ_z - PR_y + QR_x - QP_z) = 0$$

olur. μ ile bölünür ve P, Q, R ye göre düzenlenirse

$$P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x) = 0$$

sonucuna varılır. Bu ise (222) bağıntısında verilen integrale edilebilme şartıdır. Bu şart sağlandığı zaman (223) denklemlerinden bir integrasyon çarpanının bulunması mümkün olur. Bununla beraber (223) deki kısmi türevli diferansiel denklemlerin çözülmesine lüzum kalmadan da çoğu kez kolaylıkla görülebilir.

74. TAMAMIYLA INTEGRE EDİLEBİLEN DENKLEMLER - Prg.71 de gözönüne alınan integrale edilebilme şartı daha genel olarak ifade edilebilir : $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ değişkenlerinin $P_1, P_2, \dots, P_n$ diferansiel fonksiyonları olmak üzere,

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = P_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = P_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = P_n$$

denklemlerini gözönüne alalım. Buradan

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_h \partial x_k} = \frac{\partial P_h}{\partial x_k} + \frac{\partial P_k}{\partial z} P_h \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_k \partial x_h} = \frac{\partial P_k}{\partial x_h} + \frac{\partial P_h}{\partial z} P_k \quad (224)$$

bulunur.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_h \partial x_k} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_k \partial x_h}$$

olduğundan, (224) bağıntılarından

$$\frac{\partial P_h}{\partial x_k} + \frac{\partial P_h}{\partial z} P_k = \frac{\partial P_k}{\partial x_h} + \frac{\partial P_k}{\partial z} P_h \quad \begin{matrix} h = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \quad (225)$$

elde edilir. $h = k$ ise bu bağıntı bir özdeşliktir. (225) bağıntısında h ve k nin farklı olduğu $\frac{n(n-1)}{2}$ bağıntı vardır. Bu bağıntılar,

$$dz = P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + \dots + P_n dx_n \quad (226)$$

tan diferansiel denklemini sağlayan $x_1, x_2, \dots, x_n$ bağımsız değişkenlerinin bir z fonksiyonunun mevcut olması için gerekli şartlar olurlar.

Eğer (225) bağıntılarının hepsi özdeşlik olarak sağlanırlarsa (226) denklemine " Tamamiyle integre edilebilir " denir.

75. TEOREM - Eğer bir toplam diferansiel denklem integre edilebilir ise bir koyfi sabite bağımlı olarak bir çözüm kabul eder.

İntegre edilebilir (intégrable) olan

$$dz = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy \quad (227)$$

denklemini gözönüne alalım. Hipotezden

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} Q = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} P \quad (228)$$

şartı yazılabilir.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P(x, y, z) \quad (229)$$

bağıntısı, y bağımsız değişkenine sabit gibi baktığımız zaman, değişkenleri x ve z olan bir diferansiel denklem olur. Bu diferansiel denklemin genel çözümü

$$z = \varphi(x, y, Y) \quad (230)$$

olsun. Y integrasyon sabiti olup y ye bağımlı olsun. (230) bağıntısında y bağımsız değişkenine göre türev alınır

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial Y} Y'$$

bulunur. Bu bağıntı $\frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y, z)$ konularak ve (230) bağıntısı da gözönüne alınarak, Y' çözülürse

$$Y' = \frac{Q(x, y, \varphi) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial Y}} \quad (231)$$

elde edilir. Bu bağıntının birinci yanı x değişkeninden bağımsızdır. O halde ikinci yanı da x değişkenine göre bağımsız olmalıdır. Bu takdirde (231) bağıntısı y bağımsız değişkeninin fonksiyonu olan Y ile tanımlanan bir diferansiyel denklemdir. (228) bağıntısı gereğince, (231) diferansiyel denkleminin ikinci yanının x den bağımsız olduğunu gösterelim. Bunun için ikinci tarafın x değişkenine göre türevinin özdeş olarak sıfır olduğunu göstermek gerekir. (231) bağıntısından x değişkenine göre türev alınır,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] - \left[Q(x, y, \varphi) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (232)$$

bulunur. $z = \varphi$ fonksiyonu, (230) denkleminin çözümü olduğundan

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x, y, \varphi) \quad (233)$$

olur. Buradan

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

bulunur. Bu değerler (232) bağıntısına götürülürse

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] - \left[Q - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \frac{\partial P}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

veya

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial \varphi} Q \right] = 0$$

elde edilir. Gerçekten (228) özdeşliğinden ve (233) denkleminin dolaylı koşulları parantezin içi sıfıra özdeşdir. Sonuç olarak (231) denklemini x değişkenini ihtiva etmez. Bu denklemin genel integrali $Y = \psi(y, C)$ olsun. Y nin bu değeri (230) bağıntısına götürülerek elde edilen,

$$z = \varphi[x, y, \psi(y, C)] \quad (234)$$

funksiyonu (227) denklemini sağlar ve bir koyff sabite bağımlı olur.

76. TAM INTEGRAL - Teoremin ispatında takip edilen yol, tamami ile integre edilebilen (227) denklemini sağlayan $z(x, y)$ fonksiyonunu bulmak için takip edilecek yolu verir. (234) de elde edilen çözüme (227) denkleminin tam integrali denilir. Yukarıda görüldüğü gibi üç değişkenli bir diferansiyel denklemin integrali tamamiyle integre edilebilir birinci mertebeden iki diferansiyel denklemin integraline götürilmektedir.

Teoremin ispatında $\frac{\partial z}{\partial x} = P$ denkleminden hareket ettik. x ve y nin rollerini değiştirerek ve $\frac{\partial z}{\partial y} = Q$ denkleminden de hareket ederek teorem ispatlanabilirdi. Bu denklemin genel integrali x değişkeninin fonksiyonu olabilen bir keyfi sabite bağımlı olacaktır. Eğer (227) denklemi, (228) deki integrale edilebilme şartını sağlamıyorsa, (231) bağıntısının ikinci yanı x değişkenine bağlı olacak ve z fonksiyonunun bulunmasına inkâr vermeyecektir.

77. GEOMETRİK GÖSTERİLİŞ - (227) denklemini sağlayan $z = f(x, y)$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu denklemin belirttiği yüzeyin $M(x, y, z)$ noktasındaki teğet düzlemi,

$$Z - z = (X - x) \frac{\partial z}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial z}{\partial y}$$

veya

$$Z - z = (X - x) P(x, y, z) + (Y - y) Q(x, y, z) \quad (235)$$

denklemi ile ifade edilir. Tersine olarak, son denklem bir $M(x, y, z)$ noktasından geçen belirli bir düzlem gibi gözönüne alınabilir. Böylece (227) denkleminin integrasyonu, noktalarından birindeki teğet düzlemi (235) denklemi ile verilen düzlem olan bir yüzeyin aranmasına denk olur. Eğer (227) denklemi integrale edilebilir ise belirtilen özeliği sağlayan ve bir parametreye bağımlı olan bir yüzey ailesi ve sonuç olarak keyfi seçilmiş bir noktadan geçen bir yüzey mevcut olur.

Ç Ö Z Ü M L Ü Ö R N E K L E R

ÖRNEK 1.- $(y + 3z) dx + (x + 2z) dy + (3x + 2y) dz = 0$

diferansiyel denkleminin integrasyonu :

Verilen diferansiyel denklem integrale edilebilir. Gerçekten,

$$P = y + 3z, \quad Q = x + 2z, \quad R = 3x + 2y$$

olduğundan, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \frac{\partial P}{\partial z} = 3, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \frac{\partial Q}{\partial z} = 2, \frac{\partial R}{\partial x} = 3, \frac{\partial R}{\partial y} = 2$

olur. Bunlara göre, (222) integrale edilebilme şartı,

$$(y + 2z)(2 - 2) + (x + 2z)(3 - 3) + (3x + 2y)(1 - 1) = 0$$

şeklinde yazılır. Parantezlerin içi sıfır olup, şart özdeşlik olarak sağlandığından verilen diferansiyel denklem tam diferansiyel denklemdir.

Şimdi Prg.75 deki teoremin ispatındaki metodla bir çözüm arayalım.

$$dz = - \frac{y + 3z}{3x + 2y} dx - \frac{x + 2z}{3x + 2y} dy$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{y + 3z}{3x + 2y}$$

bağıntısını gözönüne alalım. y bağımsız değişkenini sabit farzedelim ve böylece elde edilen diferansiyel denklemi çözelim :

$$\frac{\partial z}{y + 3z} = - \frac{\partial x}{3x + 2y}$$

den, Y integrasyon sabiti y nin fonksiyonu olmak üzere,

$$z = \frac{Y - 3xy - 2y^2}{9x + 6y} \quad (236)$$

bulunur. y bağımsız değişkenine göre,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y}$$

bağıntısı ile türev alınır,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-27x^2 - 36xy - 12y^2 - 6y}{(9x + 6y)^2} + \frac{1}{9x + 6y} \cdot Y'$$

elde edilir. Denklemden,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y, z) = - \frac{x + 2z}{3x + 2y}$$

olduğu gözönüne alınır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$Y' = 4y$$

diferansiyel denkleme varılır. Bu diferansiyel denklemin çözümü

$$Y = 2y^2 + C$$

olur. Y nin bu değeri (236) bağıntısına götürülürse, verilen tam diferansiyel denklemin çözümü olarak,

$$3xz + 2yz + xy = C$$

sonucuna varılır.

ÖRNEK 2.- $(3x^2y^2 - e^x z)dx + (2x^3y + \sin z)dy + (y \cos z - e^x)dz = 0$

diferansiyel denkleminin integrasyonu :

$$P = 3x^2y^2 - e^x z \quad ; \quad Q = 2x^3y + \sin z \quad ; \quad R = y \cos z - e^x$$

olduklarına göre (222) integre edilebilirlik şartı,

$$P(\cos z - \cos z) + Q(-e^x + e^x) + R(6x^2y - 6x^2y) \equiv 0$$

sağlandığından verilen denklem tam diferansiyel denklemdir. Denklem,

$$d(x^3y^2 - e^x z + y \sin z) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Buradan integral alınarak

$$x^3y^2 - e^x z + y \sin z = C$$

sonucuna varılır.

ÖRNEK 3.- $(\sin y + z \cos x) dx + (\sin z + x \cos y) dy + (\sin x + y \cos z) dz =$
diferansiyel denkleminin integrasyonu :

İntegre edilebilirlik şartı,

$$P(\cos z - \cos z) + Q(\cos x - \cos x) + R(\cos y - \cos y) \equiv 0$$

olarak sağlanmaktadır. O halde verilen diferansiyel denklem, tam diferansiyel denklemdir olup,

$$d(x \sin y + z \sin x + y \sin z) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Buradan integral alınır

$$x \sin y + z \sin x + y \sin z = C$$

sonucuna varılır.

$$\text{ÖRNEK 4.- } x dx + y dy + (x^2 + y^2 + z^2 + 1) z dz = 0$$

diferansiyel denkleminin integrasyonu :

İntegre edilebilirlik şartı olan

$$x(0 - 2yz) + y(2xz - 0) + (x^2 + y^2 + z^2 + 1) z (0 - 0) \equiv 0$$

olarak sağlanmaktadır. Prg. 72 de belirtildiği gibi, $M(x, y, z)$ integrasyon çarpanı kullanılarak denklem, integre edilebilir hale sokulur. Gerçekten verilen denklem

$$x dx + y dy + z dz + (x^2 + y^2 + z^2) z dz = 0$$

şeklinde yazılır ve integrasyon çarpanı,

$$M = x^2 + y^2 + z^2$$

olarak alınır,

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{x^2 + y^2 + z^2} + z dz = 0$$

bulunur. Buradan integral alınarak

$$\ln (x^2 + y^2 + z^2) + z^2 = C$$

sonucuna varılır.

78. TAM DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ İÇİN DİĞER BİR METOD - P, Q, R fonksiyonları x, y, z değişkenlerinin sürekli ve birinci mertebeden kısmî türevlere haiz fonksiyonları olmak üzere,

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

diferansiyel denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin integre edilebilir olduğunu farzedelim. Bu takdirde verilen diferansiyel denklemin, birinci ve ikinci mertebeden kısmî türevlere mevcut olan bir $\varphi(x, y, z)$ gibi bir çözümü vardır.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = R$$

olduklarından, bunların tekrar türetilmesiyle

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

elde edilirler. Bunlardan

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

oldukları görülmektedir.

$\varphi(x, y, z)$ yukarıda tanımlanan fonksiyon olmak üzere, verilen diferansiyel denklemin çözümü

$$\varphi(x, y, z) = \int_a^x P(x, y, z) dx + \int_b^y Q(a, y, z) dy + \int R(a, b, z) dz$$

şeklindedir. Gerçekten, bu bağıntıdan sırasıyla x, y, z ye göre kısmî türevler alınır

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x, y, z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x P(x, y, z) dx + Q(a, y, z)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^x P_y(x,y,z) dx + Q(a,y,z) \\
 &= \int_a^x Q_x(x,y,z) dx + Q(a,y,z) \\
 &= \left| Q(x,y,z) \right|_{x=a}^{x=x} + Q(a,y,z) \\
 &= Q(x,y,z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\int_a^x P(x,y,z) dx + \int_b^y Q(a,y,z) dy \right] + R(a,b,z) \\
 &= \int_a^x P_z(x,y,z) dx + \int_b^y Q_z(a,y,z) dy + R(a,b,z) \\
 &= \int_a^x R_x(x,y,z) dx + \int_b^y R_y(a,y,z) dy + R(a,b,z) \\
 &= \left| R(x,y,z) \right|_{x=a}^{x=x} + \left| R(a,y,z) \right|_{y=b}^{y=y} + R(a,b,z) \\
 &= R(x,y,z)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece elde edilecek olan φ fonksiyonunun, verilen diferansiel denklemin bir çözümü olması için

$$P_y = Q_x, \quad R_x = P_z, \quad Q_z = R_y$$

şartlarını sağlamasının yeterli olduğu görülür.

79. TEOREM.- Eğer $(n+1)$ değişkenli bir tam diferansiel denklem, tamamiyle intogre edilebilirse, bir keyfi sabite bağımlı olarak, bir çözüm kabul eder.

z değişkeni, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ bağımsız değişkenlerinin bir fonksiyonu olsun. $P_1, P_2, \dots, P_n$ bilinen fonksiyonları $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ değişkenlerinin fonksiyonları olmak üzere,

$$dz = P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + \dots + P_n dx_n \quad (237)$$

diferansiyel denklemini gözönüne alalım. Bu denklem integre edilebilir olsun. Bu takdirde, integre edilebilme şartı olarak (225) bağıntısına göre,

$$\frac{\partial P_h}{\partial x_k} + \frac{\partial P_k}{\partial z} P_h = \frac{\partial P_k}{\partial x_h} + \frac{\partial P_h}{\partial z} P_k \quad \begin{matrix} h = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \quad (238)$$

yazılabilir. $x_2, x_3, \dots, x_n$ değişkenlerine sabit gibi bakılarak

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (239)$$

denkleminde,

$$z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1) \quad (240)$$

genel integrali elde edilir. z_1 integral sabiti olup, $x_2, x_3, \dots, x_n, z$ değişkenlerine bağımlıdır. (240) fonksiyonu

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = P_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, z)$$

bağıntısına götürülürse,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x_k} = P_k$$

olur. Buradan

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_k} = \frac{P_k - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}} \quad (241)$$

elde edilir. Bu bağıntının ikinci yanı

$$\frac{\partial P_1}{\partial x_k} + \frac{\partial P_1}{\partial z} P_k = \frac{\partial P_k}{\partial x_1} + \frac{\partial P_k}{\partial z} P_1$$

bağıntısı gereğince x_1 değişkeninden bağımsızdır. Bu hususu göstermek için x yerine x_1 ve y yerine x_k alınarak ve $x_2, x_3, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ değişkenlerini de sabit kabul etmek suretiyle teorem 75. daki işlemleri tekrarlamak gerekir.

Şimdi (241) bağıntısının ikinci yanını $Q_k(x_2, x_3, \dots, x_n, z)$ ile gösterelim. Böylece n değişkenli

$$dz_1 = Q_2 dx_2 + Q_3 dx_3 + \dots + Q_n dx_n \quad (242)$$

diferansiyel denklemini elde ederiz. Bu denklemin integre edilebilir olduğunu göstermeye çalışalım.

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_h \partial x_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial x_h} + \frac{\partial Q_k}{\partial z_1} Q_h \quad (243)$$

ifadesini hesaplayalım. (241) bağıntısından sırasıyla x_h, z_1 değişkenlerine göre türev alınır,sa,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \right)^2 \frac{\partial Q_k}{\partial x_h} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \left(\frac{\partial P_k}{\partial x_h} + \frac{\partial P_k}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_h} \right) - \left(P_k - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1 \partial x_h}, \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \right)^2 \frac{\partial Q_k}{\partial z_1} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \left(\frac{\partial P_k}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial z_1} \right) - \left(P_k - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} \end{aligned} \quad (244)$$

bulunur. (241) bağıntısına benzer olarak

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_k} = \frac{P_h - \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}} = Q_h(x_2, x_3, \dots, x_n, z) \quad (245)$$

yazılabilir. (243) bağıntısı $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \right)^3$ ile çarpılır ve (244) bağıntıları gözönüne alınır,sa,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \right)^2 \left(\frac{\partial P_k}{\partial x_h} + \frac{\partial P_k}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_h} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \left(P_k - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1 \partial x_h} + \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \right)^2 \left(\frac{\partial P_k}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial z_1} \right) Q_h - \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \left(P_k - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} Q_h \end{aligned}$$

bulunur. Burada Q_h yerine (245) bağıntısındaki değeri yazılırsa

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \right)^2 \left(\frac{\partial P_k}{\partial x_h} + \frac{\partial P_k}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_h} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \left(P_k - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1 \partial x_h} + \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \right)^2 \left(\frac{\partial P_k}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial z_1} \right) \left(P_h - \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \right) - \left(P_k - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \left(P_h - \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} \end{aligned}$$

şeklini alır. Buradan

$$-(P_k - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k})(P_h - \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} - \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1 \partial x_h} (P_k - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial z_1} (P_h - \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \\ - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h \partial x_k} (\frac{\partial \varphi}{\partial z_1})^2 + (\frac{\partial \varphi}{\partial z_1})^2 \left[\frac{\partial P_k}{\partial x_h} + \frac{\partial P_k}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} + \frac{\partial P_k}{\partial \varphi} P_h - \frac{\partial P_k}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \right]$$

elde edilir. Bu bağıntıda h ve k nin rolleri değiştirilirse sadece son terim değişmektedir. O halde

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} (\frac{\partial Q_k}{\partial x_h} + \frac{\partial Q_k}{\partial z_1} Q_h) - (\frac{\partial P_k}{\partial x_h} + \frac{\partial P_k}{\partial \varphi} P_h) = \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} (\frac{\partial Q_h}{\partial x_k} + \frac{\partial Q_h}{\partial z_1} Q_k) - (\frac{\partial P_h}{\partial x_k} + \frac{\partial P_h}{\partial \varphi} P_k)$$

deşitliği yazılabilir. (238) bağıntısına göre

$$\frac{\partial P_k}{\partial x_h} + \frac{\partial P_k}{\partial \varphi} P_h = \frac{\partial P_h}{\partial x_k} + \frac{\partial P_h}{\partial \varphi} P_k$$

olduğundan,

$$\frac{\partial Q_k}{\partial x_h} + \frac{\partial Q_k}{\partial z_1} Q_h = \frac{\partial Q_h}{\partial x_k} + \frac{\partial Q_h}{\partial z_1} Q_k$$

integre edilebilme şartı özdeş olarak sağlanır. Buradan (241) denkleminin tanımiyle integre edilebilir olduğu sonucuna varılır. Şu halde $x_3, x_4, \dots, x_n$ değişkenlerine sabit olarak bakılırsa,

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_2} = Q_2(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

denkleminden

$$z_1 = \varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_n, z_2)$$

genel integrâli elde edilir. z_2 integral sabiti olup $x_3, x_4, \dots, x_n$ değişkenlerine bağımlıdır. z_2 nin de tanımiyle integre edilebileceği benzer şekilde gösterilebilir. Böylece devam edilerek, birbirini takip eden

$$z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1)$$

$$z_1 = \varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_n, z_2)$$

$$z_2 = \varphi_2(x_3, x_4, \dots, x_n, z_3)$$

$$\dots$$

$$z_{n-2} = \varphi_{n-2}(x_{n-1}, x_n, z_{n-1})$$

$$z_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_n, c)$$

bağıntıları elde edilirler. Bu n bağıntı arasında $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n-1}$ in yola
edilmesi sonucu olarak, (237) denklemini sağlayan

$$z = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n, c)$$

fonksiyonu elde edilir.

ALLEN, E.V.		Yüksek Matematik ders notları
ATYUS, P.		Differential Equations
BILGAN, H.		Analiz II
GONFANX, L.		Analyse Mathématique - Vol. III
GOURSAT, P.		Cours d'Analyse Mathématique - Tome II
GOURSAT, P.		Des Equations aux Dérivées Partielles du Premier Ordre
JOHNSON, W.W.		A Treatise on Ordinary and Partial Differential Equations
LAINE, E. (SIRAY, S.)		Matematik Analiz
MORRIS - BROWN		Differential Equations
POUSSIN, C.J.D.W. (BESKAR, R.)	..	Analiz Dersleri - Cilt II
SNEDDON, I.N.		Elements of Partial Differential Equations



F A Y D A L A N I L A N

E S E R L E R

ALPMAN, B.V.		Yüksek Matematik ders notları
AYRES, F.		Differential Equations
DİLGAN, H.		Analiz II
GODEAUX, L.		Analyse Mathématique - Vol.III
GOURSAT, E.		Cours d'Analyse Mathématique - Tome II
GOURSAT, E.		Des Equations aux Dérivées Partielles du Premier Ordre
JOHNSON, W.W.		A Treatise on Ordinary and Partial Differential Equations
LAINÉ, E. (SÜRAY, S.)		Matematik Analiz
MORRIS - BROWN		Differential Equations
POUSSIN, C.J.D.W. (BERKTER, R.)	..	Analiz Dersleri - Cilt II
SNEDDON, I.N.		Elements of Partial Differential Equations

- - - - 0 - - - -



