

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

RIEMANN PROBLEMİ VE UYGULAMASI

Matematik Mühendisi Engin ÇALLI

FBE Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr. Coşkun GÜLER (YTÜ)

İSTANBUL,2006

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
ÖNSÖZ	v
ÖZET	vi
ABSTRACT.....	vii
1. GİRİŞ	1
2. RIEMANN PROBLEMİ ÖNCESİ YARDIMCI BİLGİLER.....	5
2.1 Cauchy Tipi İntegraller	5
2.2 Hölder Sınıfından Fonksiyonlar	8
2.3 Cauchy Tipi İntegrallerin Limit Değerleri ve Sokhotski Formülleri	9
2.4 Tekil İntegraller İçin Poincaré-Bertrand Formülleri	15
2.5 İndeks Kavramı	17
2.5.1 Tanım ve Özellikler	17
2.5.2 İndeksin Hesaplanması	19
2.6 Analitik Devam ve Genelleştirilmiş Liouville Teoremleri	20
3. KLASİK RIEMANN SINIR DEĞER PROBLEMİ	22
3.1 Problemin Konuluşu	22
3.2 Verilen Sıçramaya Göre Parçalı Analitik Fonksiyonun Tayini	22
3.3 Homojen Problemin Çözümü	23
3.4 Homojen Problemin Kanonik Fonksiyonu	26
3.5 Homojen Olmayan Problemin Çözümü.....	27
3.5.1 Teorik Yaklaşım ve Kapalı Formda Çözümün Verilmesi	27
3.5.2 Gakhov Metodu	30
3.6 Yarı Düzlemde Riemann Problemi	32
3.7 Kontur Setlerinin Oluşturduğu Çoklu Alanlarda Riemann Problemi	35
3.7.1 Problemin Konuluşu	35
3.7.2 Homojen Problemin Çözümü	37
3.7.3 Homojen Olmayan Problemin Çözümü.....	39
4. SÜREKSİZ KATSAYILAR VE AÇIK KONTURLAR İÇİN RIEMANN PROBLEMİ	41
4.1 Süreksiz Katsayılı Problem ve Verilen Sıçramaya Göre Fonksiyon Tayini	41
4.2 Gakhov İndirgeme Metodu ve Süreksiz Katsayılı Problemin Çözümü.....	43
4.2.1 Homojen Problemin Çözümü	45
4.2.2 Homojen Olmayan Problemin Çözümü.....	46
4.3 Açık Konturlar İçin Riemann Problemi	49
4.3.1 Gakhov Metodu	49
4.3.2 Muskhelishvili Metodu	54
5. RIEMANN PROBLEMİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ ÇALIŞMALARI	58

5.1	Harita Fonksiyonu ile Türetilmiş Riemann Problemi	58
5.1.1	Sıçraması Sıfır Olan Problem ve Fredholm İntegral Denklemi	58
5.1.2	Sıçraması Sıfır Olmayan Problem	61
5.1.3	Sıfır İndekse Sahip Homojen Problem	63
5.1.4	Mandzhavidze-Khvedelidze İndirgeme Metodu.....	64
5.2	İstisnai Riemann Problemleri ve Chikin Metodu.....	67
5.3	Sadece Süreklilik Koşuluna Bağlı Katsayıya Sahip Riemann Problemi	73
5.3.1	Lebesgue Anlamda İntegrallenebilir Bağımsız Terimler İçin Khvedelidze'nin Sonuçları	73
5.3.2	Simonenko Metodu	74
5.3.3	Batyrev Metodu	75
5.4	Vektör Riemann Problemi	75
5.4.1	Krein ve Gohberg'in Sonuçları	77
5.4.1.1	Skaler Faktörizasyon Problemi	78
5.4.1.2	Tüm İndisleri Pozitif Olan Vektör Tipte Riemann Problemi.....	80
5.4.1.3	Matris Faktörizasyon ve İndislerle İlişkisi.....	81
5.4.1.4	İndislerin Kararlılığı.....	83
5.5	Ortogonal Polinomlar İçin Riemann Problemi	84
5.5.1	Fokas-Its-Kitaev Problemi	84
5.5.2	Deift-Zhou Metodu	88
6.	UYGULAMALAR	98
6.1	Uygulama1	98
6.2	Uygulama2	106
6.3	Uygulama3	109
6.4	Uygulama4	113
6.5	Uygulama5	115
7.	SONUÇLAR ve TARTIŞMA.....	119
KAYNAKLAR		123
ÖZGEÇMİŞ		125

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 L konturu ve kompleks düzlemde ayırdığı bölgeler	5
Şekil 2.2 t merkezli daireye z'nin yaklaşması ve oluşan w açısı	10
Şekil 2.3 Köşe noktasına sahip L konturu.	15
Şekil 3.1 m+1 adet konturdan meydana gelen L kontur seti	35
Şekil 4.1 Açık olarak verilen konturlardan kapalı C eğrisinin elde edilmesi	49
Şekil 5.1 h'in analitik olduğu $[-1,+1]$ 'in U komşuluğu	91
Şekil 5.2 U içerisinde çizilen lens.....	92
Şekil 5.3 $\alpha=\beta=-1/2$ özel durumunda çizilen lens	94
Şekil 5.4 $[-1,1]$ aralığını saracak şekilde çizilen γ kapalı eğrisi. S fonksiyonu sadece $[-1,1]$ aralığı ve γ üzerinde sıçrama yapmaktadır.	94
Şekil 5.5 Deift-Zhou metodundaki son dönüşüm ile ulaşılan R fonksiyonunun sıçrama yaptığı tek bölge olan γ eğrisi	97

ÖNSÖZ

Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne bağlı Matematik Mühendisliği anabilim dalında hazırlanan bu yüksek lisans tezi yedi bölümden meydana gelmektedir.

Birinci bölüm giriş bölümü olup, basit anlamda çalışmanın konusunu özetlemekte, amaç ve yönteme ışık tutmaktadır. İkinci bölüm, asıl ele alınacak konu olan Riemann problemine hazırlık niteliğindeki yardımcı bilgilerden oluşmakta, üçüncü bölüm ise klasik haldeki Riemann problemini ele almaktadır. Dördüncü ve beşinci bölümler, Riemann probleminin genelleştirilmesi ve problemin marjinal tipleri üzerine, günümüze gelinceye dek yapılan belli başlı bilimsel çalışmaların genel bir değerlendirmesi mahiyetindedir. Altıncı bölüm, homojen olmayan bazı Riemann problemlerinin tam çözümünü yapmaktadır. Yedinci bölümde ise, bir önceki bölümde çözülen problemler göz önünde tutularak kullanılan yöntemler ile ilgili bir karşılaştırma, problemin çözümüne yönelik öneri ve sonuçlar yer almaktadır.

Bu çalışmanın hazırlanmasında değerli katkılarını benden esirgemeyen Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği bölümü öğretim üyeleri Yrd.Doç.Dr. Coşkun GÜLER ve Prof.Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU ile Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik bölümü öğretim üyesi Prof.Dr.Tahir ALİYEV'e sonsuz teşekkürlerimle...

Engin ÇALLI

ÖZET

Bazı homojen olmayan Riemann problemlerinin tam çözümü ışığında Gakhov ve Muskhelishvili metotlarının karşılaştırmalı elverişlilik kriterleri incelenmiştir. Bu çalışma Gakhov ve Muskhelishvili metotlarını kullanarak bazı klasik tipte Riemann sınır değer problemlerini çözmeyi hedeflemektedir. Bu problemlerin tam çözümünü yaparak şu sorulara yanıtlar vermeye çalışmaktadır:

- Nümerik çözüm metotlarını bir kenara bırakırsak, kesin çözümler için bu metotlar ne derece kullanışlıdır?
- Problemin verildiği kontur bu metotların seçiminde bir etken olabilir mi?
- Problemin katsayısı metot seçiminde nasıl bir etkiye sahiptir?
- Problemin bağımsız terimi metot seçiminde hangi durumlarda etkili olabilir?
- İlave sınır koşulları metot seçiminde etkili midir?

Bu çalışmanın ikincil düzeydeki odağı ise, Riemann sınır değer problemine ait istisnai durumlar ve problemin çok sayıdaki genelleştirmeleridir.

Anahtar kelimeler: Homojen olmayan Riemann problemi, Gakhov metodu, Muskhelishvili metodu, Riemann probleminin tam çözümü, Riemann probleminin kanonik çözümü, Riemann probleminin doğrudan çözümü.

ABSTRACT

Comparative practicality criterions of Gakhov and Muskhelishvili methods are studied in line with the absolute solution of some non-homogeneous Riemann problems. This study aims to solve some classical type Riemann boundary value problems by using Gakhov and Muskhelishvili methods. It is endeavored to find answers to the following questions by finding out the absolute solutions of these problems:

- If we do not use numerical solution methods, to what extent these methods can be regarded as useful to obtain absolute solutions?
- Can the contour given by the problem be a factor in the selection of these methods?
- How does the problem's coefficient affect the method selection?
- In which cases can the problem's free-term be effective in method selection?
- Are the additional boundary conditions effective in method selection?

The secondary focus of this paper is exceptional cases and various generalizations of the Riemann boundary value problem.

Keywords: Non-homogeneous Riemann problem, Gakhov's method, Muskhelishvili's method, full solution of the Riemann problem, canonical solution of the Riemann problem, direct solution of the Riemann problem.

1. GİRİŞ

Yüz yıla yakın süredir üzerinde devam eden genelleştirme çalışmaları nedeniyle, Riemann sınır değer problemi bugün çok geniş bir problem sınıfını ifade etmektedir. Bu geniş sınıfın anlaşılabilmesi için, çalışmamız klasik haldeki Riemann sınır değer problemini öncelikli olarak konu edinmiş, farklı tiplerine ise daha sonra değinmiştir. En basit haliyle bir Riemann sınır değer problemi şu şekilde tanımlanır:

L , basit-düzgün-kapalı bir kontur olarak kompleks düzlemi D^+ iç bölgeyi, D^- ise dış bölgeyi gösterecek şekilde iki ayrı kısma ayırıyor olsun. $G(t)$ ve $g(t)$, L üzerinde tanımlı ve $G(t) \neq 0$ olacak şekilde Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlar olmak üzere L üzerinde,

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \text{ veya, } \Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)$$

şartlarından birini sağlayacak şekilde D^+ 'da analitik $\Phi^+(z)$ ve $D^-(z = \infty \text{ dahil})$ 'de analitik $\Phi^-(z)$ fonksiyonlarının bulunması problemine “Riemann sınır değer problemi” denir. Problem $g(t)$ fonksiyonunun sıfır olup olmamasına göre isimlendirilir:

$$\text{Homojen Problem : } \Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \quad (1.1)$$

$$\text{Homojen Olmayan Problem: } \Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad (1.2)$$

$G(t)$ fonksiyonuna Riemann probleminin katsayısı, $g(t)$ fonksiyonuna ise Riemann probleminin serbest terimi adı verilmektedir. Literatürde bu problem, “Hilbert problemi”, “Riemann-Hilbert problemi”, “Hilbert-Privalov problemi”, veya “Riemann-Privalov problemi” gibi farklı isimlendirmelerle karşımıza çıkabilmektedir. Bu isimlendirmeler arasında en doğrusunun “Riemann sınır değer problemi” veya kısaca “Riemann problemi” olduğunu düşünüyoruz. Örneğin “Hilbert sınır değer problemi”, bu problemin yerine geçebilecek bir isimlendirme olamaz. Çünkü Hilbert’e ait söz konusu problem, sadece özel bazı durumlarda, (problemin konulduğu konturun çok basit bir eğri veya eksen olması) “Riemann sınır değer problemi” olarak tanımlanabilen bir probleme dönüşmektedir; aynı problem değildir.

Klasik Riemann sınır değer probleminin yorumunda en temel husus indeks kavramıdır. Problemin katsayısına ait indeks aynı zamanda problemin indeksidir ve söz konusu fonksiyonun logaritmik değişiminden veya integral temsilinden hareketle ifade edilebilir:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2i\pi} [\ln G(t)]_L \\ x &= \text{Ind} G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_L d \arg G(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_L d \ln G(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Bir Riemann probleminin çözülebilir olduğu varsayımına dayanarak her problemi çözmeye kalkmak pek akıllıca değildir. İndeks kavramı bize;

- ✓ Problem çözülebilir midir?
- ✓ Eğer çözülebilir ise çözümlerin sayısı kaçtır?
- ✓ Çözümün varlığının belirsiz olduğu durumlarda kaç adet ek koşul gereklidir?

gibi çok önemli bazı soruların cevaplarını ve üzerinde duracağımız çözüm metotlarının da temel dayanaklarından birini oluşturmaktadır.

Bu problem tarihte ilk kez, Riemann tarafından, “Riemann monodromy” problemi ile bağlantılı olarak açıklanmıştır. Riemann sınır değer problemleri açık veya kapalı şekillerde olmak üzere “Soliton teorisi” içerisinde önemli bir yere sahiptir (Bu ilişkiyi soliton teorisinde referans alan son çalışmalar genellikle Chudnovsky, Flaschka, Newell, Fokas ve Ablowitz’e ait olanlardır.)

Aslında Riemann, kendi formüle ettiği problemini çözmek için herhangi bir teşebbüste bulunmadı. Homojen-skaler problemin ilk çözümü 1904 yılında, Fredholm integral denkleminde yola çıkılarak Hilbert tarafından yapıldı. Picard, 1927’de aynı yöntemi biraz daha genelleştirerek sundu. İlk kez, Plemelj 1908 yılında indeksin sadece sıfır kabul edildiği bir homojen problem için kapalı formdaki çözümü sundu. Carleman, 1932’de bu çözüm ile ilişkili bir tekil integral denklemi çözdü. (Bu çözüm, tekil integral denklemlerin Riemann sınır değer problemi ile ilişkili olduklarına dikkat çekti). Gakhov, 1937 yılında skaler Riemann problemi için tam bir çözüm sunan ilk bilim adamı oldu. Vektörel Riemann problemi, Plemelj, Gakhov, Muskhelishvili ve genişletilmiş şekilde Vekua tarafından incelendi. Ayrıca unutulmamalıdır ki; Wiener ve Hopf çalışmaları da Riemann problemi ile ilgilidir.

Skaler-süreksiz Riemann probleminin komple çözümü birbirlerinden bağımsız olarak Gakhov (1941) ve Muskhelishvili (1941) tarafından yapılmıştır. Bu bilim adamlarının her ikisi de farklı metotlar kullanmışlardır. Gakhov metodu, daha sonra Vekua tarafından vektör-süreksiz Riemann problemini de kapsayacak şekilde genelleştirilmiştir.

(Yukarıda kısaca değinilen bibliyografinin bütününe Gakhov (1966), Muskhelishvili (1953)

ve Vekua (1967)'nın kitaplarından erişilebilir.)

Bizim bu çalışmadaki asıl amacımız, bazı homojen olmayan Riemann sınır değer problemlerinin tam çözümünü yapmaktır. Bu amaçla Gakhov ve Muskhelishvili'ye ait metotları kullanacağız. Gakhov'un klasik tipteki problem için geliştirdiği metot, daha çok indeksin bazı özellikleri ve rasyonel fonksiyonlar ile çalışmanın kolaylığı üzerine kuruludur. Gakhov, süreksiz katsayılı problem ve açık konturlar için de ayrı yöntemler geliştirmiştir. Süreksiz katsayılı problem bu yöntemlerde, sürekli katsayılı probleme dönüştürülmektedir. Benzer biçimde açık konturlar hayali konturlar ile kapatılmakta ve tek bir kapalı kontur üzerinde , katsayının bu yeni kontur üzerinde süreklilik özeliğini yitirmesine bağlı olarak, yine süreksiz katsayılı problemler için geliştirilmiş yöntemle başvurulmaktadır. Muskhelishvili metodu ise, Gakhov'un yaklaşımının aksine, konturun yada katsayının durumuna göre değişmemekte, bu nedenle literatürde "Riemann probleminin doğrudan çözümü" şeklinde de karşımıza çıkabilmektedir. Gakhov ve Muskhelishvili'ye ait metotların dışında, çalışmamızda pek çok farklı yöntem ve yaklaşıma da yer verdik. Ancak diğer yöntem ve yaklaşımlar daha çok problemin genelleştirme çalışmaları kapsamında olup, henüz teorik yaklaşımın ötesine geçebilmiş yada yeterli olgunluğa erişebilmiş değildir. (Bir kısmı 1990 sonrası döneme aittir.) Bu genelleştirme çalışmalarında problemin katsayı ve serbest terimine ait koşullar esnetilmekte, daha geniş fonksiyon sınıfları ile çalışılabilmekte veya skaler problem tipi yerine vektör problem tipiyle, matris yapıdaki fonksiyonlarla çalışılabilmektedir. Bazı çalışmalar ise daha çok Riemann problemlerinin en çok ortaya çıktığı (nonlinear Schrödinger denklemi, Korteweg-de Vries denklemi, Boussinesq denklemi, Burger denklemi, Toda denklemi...vs) alanlardaki durumlara özel olarak problemi modifiye etmeye çalışmaktadır.

Hölder sınıfından fonksiyonların katsayı ve serbest terim olarak seçildiği klasik haldeki her çeşit probleme ait çözüm metotlarının hemen hepsinde, homojen olmayan problemin çözümü homojen probleme ait kanonik fonksiyondan yola çıkılarak kurgulanmaktadır. O nedenle çözeceğimiz problemler homojen olmasa bile, homojen probleme ait bir inceleme zorunlu gibi durmaktadır. Buradaki temel zorluk, kanonik fonksiyonun hesabından başlayarak, tüm çözüm formüllerinde görülen Cauchy tipi integrallerdir. Özellikle indeks kavramını netleştirdikten sonra göreceğiz ki, bazı fonksiyon tiplerinde indeksin hesabı ve buna bağlı olarak bazı Cauchy tipi integraller ortadan kalkabilmekte yada en azından basitleştirilebilmektedir.

Son bölümde tam çözümlerini yaptığımız Riemann sınır değer problemleri aslında tüm çalışmamızın genel bir özeti şeklindedir. Bu problemlerden yola çıkılarak, indeksin problem

çözmeye etkisi, metot seçiminin dayanakları, katsayı ve serbest terimin pratik çözümler önündeki belirleyiciliği gibi pek çok sorunun yanıtı bulunabilir. Kurguladığımız problemler gösterecektir ki, Riemann probleminde genel kanılara varmak çok zordur. Örneğin indeksin -1 'den küçük bir değer olması durumunda problemin genellikle çözülemez olduğu düşünülür, ancak çözdüğümüz bir problem gösterecektir ki, buna rağmen bazı problemler çözülebilir. Yada, basit formüllere sahip olduğunu düşündüğümüz pek çok metodun, ulaşılan integrallerin zorluğu göz önüne alındığında, sadece teorik yaklaşımlar için bu basitliği gösterebildikleri anlaşılabacaktır.

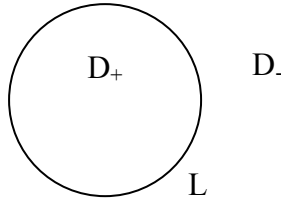
2. RIEMANN PROBLEMİ ÖNCESİ YARDIMCI BİLGİLER

Riemann problemini ortaya koymadan önce, problemin anlaşılabilmesi için gerekli bazı konulara öncelikli olarak değinmekte fayda görüyoruz.

2.1 Cauchy Tipi İntegraller

Kompleks düzlemde analitik fonksiyonlara ait sınır değer problemlerinin çözümünde sıklıkla Cauchy tipindeki integrallere ve onların genelleştirilmiş hallerine başvurulur.

Kompleks z değişkenine ait düzlemde L , düzgün ve kapalı bir konturu ifade etsin. L 'nin içerisinde kalan bölge D^+ ile, $D^+ + L$ 'nin dışında kalan (tümleyen) bölgeyi ise D^- ile gösterelim. Uygun modifikasyonlar ile L , aşağıdaki gibi çizgisel bir sınır olarak ele alınabilir:



Şekil 2.1 L konturu ve kompleks düzlemde ayırdığı bölgeler

Buna göre; $f(z)$, D^+ 'da analitik ve $D^+ + L$ 'de sürekli bir fonksiyon ise,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} f(z), & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \end{cases} \quad (2.1)$$

$f(z)$, D^- 'de analitik ve $D^- + L$ 'de sürekli bir fonksiyon ise,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^+ \\ -f(z) + f(\infty), & z \in D^- \end{cases} \quad (2.2)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitliklere, kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisine ait “Cauchy formülleri”, eşitliklerin sol tarafındaki integrallere ise “Cauchy integralleri” denilmektedir. Cauchy formülleri sınırdaki değerleri bilinen ve ele aldığımız bölgede analitik ve sürekli olan bir fonksiyonunun, yine ele aldığımız bölge içerisinde yer alan herhangi bir noktadaki değerini hesaplamamıza olanak sağlar.

Şimdi başka bir tanıma geçelim. L , kompleks düzlemin sonlu bir parçasında yer alan düzgün, kapalı veya açık bir kontur, τ düzlemde değişken bir nokta, $\varphi(\tau)$ ise L üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (2.3)$$

eşitliği “Cauchy tipi integral” olarak isimlendirilir. (2.3)’teki $\varphi(\tau)$ fonksiyonuna “yoğunluk”, $1/(\tau - z)$ ifadesine ise “çekirdek” denir. Şimdi bu konu ile yakından ilişkili bir teoremi verelim.

Teorem 2.1.1 : L düzgün bir kontur (açık veya kapalı olabilir), $f(\tau, z)$ fonksiyonu ise τ değişkenine göre sürekli ve her $\tau \in L$ için z değişkenine göre analitik olsun. Bu durumda;

$$F(z) = \int_L f(\tau, z) d\tau \quad (2.4)$$

fonksiyonu z değişkenine göre analitiktir.

İspat: Teoremi ispatlamak için aşağıdaki farkı ilk olarak göz önüne alalım:

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \int_L f'_z(\tau, z) d\tau = \int_L \left[\frac{f(\tau, z + \Delta z) - f(\tau, z)}{\Delta z} - f'_z(\tau, z) \right] d\tau$$

z 'ye göre analitiklik durumundan dolayı,

$$\left| \frac{f(\tau, z + \Delta z) - f(\tau, z)}{\Delta z} - f'_z(\tau, z) \right|$$

ifadesi her τ için $|\Delta z|$ 'nin yeteri kadar küçük seçilmesi ile istenildiği kadar küçültülebilir.

Ayrıca L 'nin sonlu uzunluğa ait bir kontur olduğu hesaba katılırsa,

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \int_L f'_z(\tau, z) d\tau \quad (2.5)$$

eşitliği elde eldir. Böylece $f(\tau, z)$ 'nin analitik olduğu bölgede $F(z)$ 'nin de analitik olduğu görülür. $f(\tau, z)$ 'nin analitik olmadığı z noktaları $F(z)$ fonksiyonu için tekil noktalardır.

Şimdi L 'yi tekrar kapalı bir kontur olarak ele alalım.(2.3)'te verilen $\Phi(z)$ fonksiyonu iki bölgede iki ayrı fonksiyon şeklinde tarif edilebilir: D^+ bölgesinde $\Phi^+(z)$ fonksiyonu, D^- bölgesinde ise $\Phi^-(z)$ fonksiyonu. Bu fonksiyonlar genellikle birbirlerinin analitik devamı niteliğinde değillerdir. $\Phi(z)$ 'nin özelliklerine sahip, iki farklı bölgede tanımlanan fonksiyonlar genellikle “bölümlenmiş analitik fonksiyon” şeklinde isimlendirilirler.

Cauchy tipi integrallere ait önemli bir diğer özelliği vererek bu bahsi şimdilik kapatalım. (2.3)'te görüldüğü gibi Cauchy tipte integraller vasıtasıyla ifade edilebilen $\Phi(z)$ fonksiyonunun sonsuzdaki davranışını inceleyelim. Bunun için kuvvet serilerinden yararlanabiliriz:

$$\frac{1}{\tau - z} = -\frac{1}{z} - \frac{\tau}{z^2} - \dots - \frac{\tau^{n-1}}{z^n} + \dots \quad (2.6)$$

serisini $\frac{1}{2\pi i} \varphi(\tau)$ ile çarpıp, terim-terim integral alırsak,

$$\Phi^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}, \quad c_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \tau^{k-1} \varphi(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

elde edilir ve buradan da açıktır ki $\Phi^-(\infty) = 0$ 'dır.

Buraya kadar anlattıklarımızı pekiştirebilmek için basit bir örnek üzerinde duralım:

Örnek 2.1.1 : $|z|=1$ birim çemberi üzerinde yoğunluğu $\varphi(\tau) = \frac{2}{\tau(\tau-2)}$ olan Cauchy tipi integrali hesaplayalım.

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2}{\tau(\tau-2)} d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{1}{\tau-2} - \frac{1}{\tau} \right) d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau-2} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau} d\tau$$

$1/(z-2)$ fonksiyonu D^+ bölgesinde, $1/z$ fonksiyonu ise D^- bölgesinde analitiktir. (2.1)'den hareketle son eşitliğin sağındaki ilk integral $z \in D^+$ için $1/(z-2)$ 'ye, $z \in D^-$ içinse sıfıra eşittir. Benzer şekilde (2.2)'den hareketle ikinci integral $z \in D^+$ için sıfıra, $z \in D^-$ içinse $-1/z$ 'e eşittir.

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{z-2} \quad \Phi^-(z) = -\frac{1}{z}$$

2.2 Hölder Sınıfından Fonksiyonlar

Riemann problemi bugün her ne kadar farklı fonksiyon sınıflarına genişletilmeye çalışılıyor olsa da temelde Hölder fonksiyonları (veya Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlarda denir) ile çalışılır. Klasik Riemann sınır değer probleminde, problemin katsayısı ve eğer varsa problemin serbest terimi Hölder fonksiyonlarıdır. Bu nedenle bu konuyu biraz irdeleyelim.

L , düzgün bir kontur ve $\varphi(t)$ onun üzerinde tanımlı bir fonksiyon, A ve λ pozitif sayılar, t_1 ve t_2 , L üzerindeki keyfi iki noktayı ifade etmek üzere;

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < A |t_2 - t_1|^\lambda, \quad A > 0, \quad 0 < \lambda \leq 1 \quad (2.8)$$

koşullarını sağlayan $\varphi(t)$ fonksiyonu için “ L üzerinde Hölder koşullarını sağlıyor” yada kısaca “ L üzerinde Hölder’dir” denir. Pozitif A sayısına “Hölder sabiti”, λ ’ya ise “Hölder indeksi” denilir. $\lambda=1$ olması durumunda bu Hölder koşulları, Lipschitz koşullarına indirgenmiş olur. Eğer $\varphi(t)$, diferansiyellenebilir ve sonlu sayıda türeve sahip ise Lipschitz koşullarını sağlar. Bu ifade sonlu artışlar teoreminin bir sonucu olmasına rağmen daima doğru değildir. Örneğin $\varphi(x) = |x|$ fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlar ancak orijinde türeve sahip değildir. Çünkü, sıfır noktasında sağ ve sol türevler sırasıyla $+1$ ve -1 ’dir.

Hölder sınıfından fonksiyonlar keyfi sayıdaki değişkene sahip olacak şekilde genişletilebilir. Biz burada kolaylık açısından iki değişkenli bir fonksiyonu ele almakla yetineceğiz. (t_1, t_2) ve (k_1, k_2) daha önceki durumda olduğu gibi L üzerinde olmak üzere;

$$|\varphi(t_2, k_2) - \varphi(t_1, k_1)| < A|t_2 - t_1|^\mu + B|k_2 - k_1|^\nu \quad \text{ve } A, B > 0, \quad 0 < \mu, \nu \leq 1 \quad (2.9)$$

koşullarını sağlayan $\varphi(t, k)$ fonksiyonuna L üzerinde Hölder koşullarını sağlıyor denir. A ve B sabitleri, λ sabiti μ, ν 'nin en küçüğü olarak ele alınır. Aşağıdaki gibi tek sabite indirgenebilir:

$$|\varphi(t_2, k_2) - \varphi(t_1, k_1)| < C[|t_2 - t_1|^\lambda + |k_2 - k_1|^\lambda] \quad (2.10)$$

Buraya kadar anlattıklarımızı pekiştirebilmek için basit bir örnek üzerinde duralım:

Örnek 2.2.1 :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1/\ln x & x \in (0, 1/2] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım. Çok açıktır ki, $0 \leq x \leq 1/2$ kapalı aralığında bu fonksiyon süreklidir. Fakat,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\lambda \cdot \ln x = 0, \quad \lambda > 0 \quad \text{olacak şekilde, } A \text{ ve } \lambda \text{ 'nın değerleri ne olursa olsun,}$$

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| = \left| \frac{1}{\ln x} \right| > Ax^\lambda$$

eşitsizliğine uygun bir x değeri daima bulunabilir. Sonuç olarak $\varphi(x)$ fonksiyonu $0 \leq x \leq 1/2$ kapalı aralığında Hölder değildir, ancak açıktır ki; aynı fonksiyon sıfırın hariç tutulduğu $0 < x \leq 1/2$ yarı-açık aralığında Hölder koşulunu sağlamaktadır. Bu değerlendirme (yani istisna oluşturan bazı noktaları dışarıda bırakarak söz konusu fonksiyonu Hölder koşuluna uyacak şekilde tarif etmek) açık konturlarla çalışırken oldukça işimize yarar. Bu istisnai noktalar örneğin açık bir eğrinin uç noktaları olacak şekilde bir sınır değer problemi ile karşılaşılabılır.

2.3 Cauchy Tipi İntegrallerin Limit Değerleri ve Sokhotski Formülleri

Hölder sınıfına ait yoğunluk fonksiyonuna sahip bir Cauchy tipi integralini ele alırsak, çalıştığımız kontura her alandan yaklaşıldığında sürekli limitlerin var olduğunu, ancak bu limit değerlerinin birbirlerinden farklı olduğunu görürüz. Bunun nedeni literatürde “jump” olarak ifade edilen, bizim ise şu andan itibaren “sıçrama” olarak tarif edeceğimiz bir durumun varlığıdır.

Teorem 2.3.1 : $\varphi(x)$ ağırlığı Hölder koşullarını sağlamak ve t noktası konturun bitiş noktası olmamak üzere,

$$\psi(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau \quad (2.11)$$

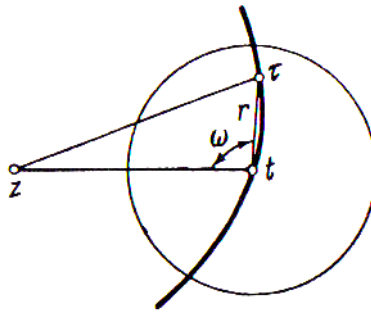
fonksiyonu, z herhangi bir yandan t 'ye yaklaştığında aşağıdaki limite sahip olur ve bu limit kontur üzerinde süreklidir:

$$\lim_{z \rightarrow t} \psi(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau = \psi(t) \quad (2.12)$$

İspat: İlk olarak aşağıdaki farkı göz önüne alalım:

$$\psi(z) - \psi(t) = \int_L (z - t) \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{(\tau - z)(\tau - t)} d\tau \quad (2.13)$$

L üzerinde alınan integrali iki parçaya ayıralım. t merkezli ve yeteri kadar küçük $\delta > 0$ yarıçaplı dairenin L 'den ayırdığı L_δ parçası üzerindeki integrali I_1 ile, bunun tümleyeni olan $L - L_\delta$ üzerindeki integrali ise I_2 ile gösterelim. İlk olarak I_1 integralini inceleyelim. z noktasının t noktasına L 'ye teğet olmayan bir yoldan yaklaştığını varsayalım. Oluşan w açısı t noktasında $w_0 > 0$ alt sınırına sahiptir. Şimdi bu söylediklerimizi bir şekil üzerinde yansıtalım:



Şekil 2.2 t merkezli daireye z 'nin yaklaşması ve oluşan w açısı

Yukarıdaki şekilde yer alan $zt\tau$ üçgeninde Sinüs teoremini kullanarak,

$$\frac{|z - t|}{|\tau - z|} = \frac{\sin \beta}{\sin w} \leq \frac{1}{\sin w_0} = K, \quad K > 0 \quad (2.14)$$

elde edilir. Hölder koşulundan hatırlanacağı gibi,

$$\left| \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} \right| < A \cdot |\tau - t|^{\lambda-1} = A \cdot r^{\lambda-1} \quad , \quad r = |\tau - t| \quad (2.15)$$

yazılır. Düzgün konturların temel özelliklerinden biri şudur: s yay uzunluğu ve ona uygun r kirişi için ds/dr oranı daima sınırlıdır. Yani,

$$\left| \frac{ds}{dr} \right| \leq m \quad , \quad m > 0 \quad \text{olur. Bu ifadeyi şu şekilde düzenleyelim:}$$

$$|d\tau| = |ds| \leq m|dr| \quad (2.16)$$

(2.14), (2.15) ve (2.16)'dan hareketle,

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_{L_\delta} \left| \frac{z-t}{\tau-z} \right| \left| \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau-t} \right| |d\tau| < KAm \int_{L_\delta} r^{\lambda-1} |dr| \\ &= 2KAm \int_0^\delta r^{\lambda-1} dr = \frac{2KAm\delta^\lambda}{\lambda} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için, öyle bir $\delta > 0$ sayısı seçilebilir ki, (2.17) ifadesi

$$|I_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.18)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi I_2 integralini değerlendirelim. I_2 'nin tanımlı olduğu $L - L_\delta$ üzerinde $t \neq \tau$ dır ve I_2 integrali z'nin sürekli bir fonksiyonudur. Dolayısıyla yeterince küçük $|z - t|$ değeri için,

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.19)$$

yazılabilir. (2.18) ve (2.19)'dan hareketle,

$$|\psi(z) - \psi(t)| \leq |I_1| + |I_2| < \varepsilon \quad (2.20)$$

bulunmuş olur. $|\psi(z) - \psi(t)|$ farkı t'den bağımsızdır. Buna göre, L üzerinde $\psi(z)$ 'nin limit değeri olan $\psi(t)$ fonksiyonunun sürekli olduğu rahatlıkla söylenebilir. t ve t_1 , L üzerinde iki

nokta olmak üzere,

$$|\psi(t) - \psi(t_1)| \leq |\psi(t) - \psi(z)| + |\psi(z) - \psi(t_1)| \quad (2.21)$$

(2.21) eşitsizliğinin sağ tarafındaki iki fark terimi, $\psi(z)$ limit değerine düzgün bir şekilde yaklaştığından, yeterince yakın t, t_1 ve z noktaları için istenildiği kadar küçültülebilir. Böylelikle limitin mevcudluğu ve L üzerindeki sürekliliği ispatlanmış olur.

Şimdi Rus matematikçisi Y.V.Sokhotski'nin Cauchy tipi bir integralin limit değeri ile ilgili en temel probleme getirdiği yanıt üzerinde duracağız; limit değerleri ve tekil integraller arasında bir bağıntı kuracağız. Yeniden,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (2.22)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Buradaki L konturu kapalı olsun. Eğer açık bir kontur almak gerekirse, açıklığı bir eğri yardımıyla kapatalım ve bu ilave eğri üzerinde $\varphi(\tau) = 0$ olarak alalım. Ayrıca yoğunluk fonksiyonu L üzerinde Hölder olacak şekilde seçilecektir. Kontur üzerindeki t noktasında $\Phi(z)$ 'nin limit değerlerini,

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau \quad (2.23)$$

fonksiyonunu göz önüne alarak inceleyelim. z 'nin konturun iç tarafından L üzerindeki t noktasına yaklaştığı takdirde, analitik $\Phi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonlarının limit değerlerini sırasıyla $\Phi^+(t)$ ve $\psi^+(t)$ ile gösterelim. Aynı biçimde konturun dışından yaklaşıldığında oluşan limitleri ise yine sırasıyla $\Phi^-(t)$ ve $\psi^-(t)$ ile gösterelim. (Kontur açık olarak ele alınsaydı söz konusu limit değerleri sağdan ve soldan yaklaşılarak bulunacaktı.) Denkliklerde bu yaklaşım yönlerini $z \rightarrow t^+$ ve $z \rightarrow t^-$ şeklinde göstereceğiz. Aşağıdaki ilişkiyi göz önüne alalım:

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 2\pi i & , \quad z \in D^+ \\ 0 & , \quad z \in D^- \\ \pi i & , \quad z \in L \end{cases} \quad (2.24)$$

Buradan hareketle,

$$\psi^+(t) = \lim_{z \rightarrow t^+} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - z} \right] = \Phi^+(t) - \varphi(t)$$

$$\psi^-(t) = \lim_{z \rightarrow t^-} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - z} \right] = \Phi^-(t)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = \Phi(t) - \frac{1}{2} \varphi(t)$$

bulunmuş olur. Teorem 2.3.1'e göre $\psi(t)$ fonksiyonu süreklidir. Buna göre yukarıdaki eşitliklerin sağ tarafları aynı olmalıdır. Yani,

$$\Phi^+(t) - \varphi(t) = \Phi^-(t) = \Phi(t) - \frac{1}{2} \varphi(t) \quad (2.25)$$

Buradan en son olarak,

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+(t) &= \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \\ \Phi^-(t) &= -\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

elde edilir. (2.26)'ya literatürde “Sokhotski formülleri” denir. Bu formüllerin ne anlam ifade ettiğini aşağıdaki teorem yardımıyla görelim.

Teorem 2.3.2 : L düzgün bir kontur (açık veya kapalı), $\varphi(\tau)$ bu kontur üzerinde Hölder koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

Cauchy tipindeki integral, L 'nin uç noktaları hariç her noktada, $\Phi^+(t)$ ve $\Phi^-(t)$ sağdan ve soldan limitlerine sahiptir ve bu limit değerleri, $\varphi(\tau)$ integralin yoğunluk fonksiyonu ve $\Phi(t)$

tekil integraline ait Sokhotski formülleriyle ifade edilebilirler.

(2.26)'da verilen Sokhotski formülleri aşağıdaki gibide düzenlenebilirler:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) \quad (2.27)$$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (2.28)$$

Son bir açıklama daha yaparak bu bölümü noktalayalım. Biz, yukarıda konturun düzgün olma durumunu ele aldık. Konturun köşe noktalarına sahip olması durumunda Sokhotski formüllerinde ufak çaplı değişiklikler meydana gelir.

Sokhotski formüllerini yukarıda çıkartırken en temel dayanak noktalarımızdan biri,

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = \begin{cases} 2\pi i & , \quad t \in D^+ \\ 0 & , \quad t \in D^- \\ \pi i & , \quad t \in L \end{cases}$$

ilişkisi idi. Konturların daha önce çizgisel bir sınır(örneğin bir eğri) olarak ele alınabileceğini söylemiştik. t noktasında bu çizgisel sınır bir α açısına sahip ise(yani bu noktadaki teğetler arası açı),

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = i\alpha \quad , \quad t \in L \quad (2.29)$$

olur. Bundan dolayı (2.25)'teki eşitlik,

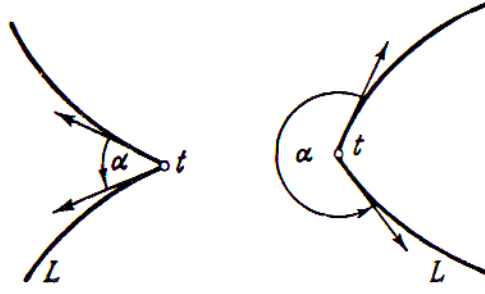
$$\Phi^+(t) - \varphi(t) = \Phi^-(t) = \Phi(t) - \frac{\alpha}{2\pi} \varphi(t) \quad (2.30)$$

formuna gelir ki, buradan Sokhotski formülleri şu şekilde yazılabilir:

$$\Phi^+(t) = \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (2.31)$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{\alpha}{2\pi} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (2.32)$$

Bu tip bir yapıyı daha iyi anlayabilmek için aşağıdaki şekli verelim:



Şekil 2.3 Köşe noktasına sahip L konturu.

2.4 Tekil İntegraller İçin Poincaré-Bertrand Formülleri

İntegrasyon sıraları farklı aşağıdaki tekil integralleri göz önüne alalım:

$$I(t) = \frac{1}{i\pi} \int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \cdot \frac{1}{i\pi} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau_1 \quad (2.33)$$

$$I_1(t) = \frac{1}{i\pi} \int_L d\tau_1 \cdot \frac{1}{i\pi} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)} d\tau \quad (2.34)$$

İlk olarak,

$$\frac{1}{i\pi} \int_L \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad x(\tau) = \frac{1}{i\pi} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau_1 \quad (2.35)$$

olacak şekilde alalım. $x(\tau)$ yoğunluğu Hölder koşulunu sağlamaktadır. Ardından şu dönüşümü göz önüne alalım:

$$\frac{1}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)} = \frac{1}{\tau_1 - t} \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{\tau - \tau_1} \right] \quad (2.36)$$

Buna göre (2.34)'de yer alan integrali,

$$w(\xi, \tau_1) = \frac{1}{i\pi} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau - \xi} d\tau \quad \text{olacak şekilde,}$$

$$I_1 = \frac{1}{i\pi} \int_L \frac{w(t, \tau_1) - w(\tau_1, \tau_1)}{\tau_1 - t} d\tau_1 \quad (2.37)$$

şeklinde yazabiliriz. I ve I_1 integralleri bazı durumlar hariç birbirlerine eşit değildir. I integrali için Poincaré-Bertrand formülü şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\pi} \int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \cdot \frac{1}{i\pi} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau_1 &= \varphi(t, t) + \\ &+ \frac{1}{i\pi} \int_L d\tau_1 \cdot \frac{1}{i\pi} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)} d\tau \end{aligned} \quad (2.38)$$

Bunu kanıtlayabilmek için, öncelikle $I(t)$ ve $I_1(t)$ integrallerinde iç bölge için değişken dönüşümü yapalım:

$$I(z) = \frac{1}{i\pi} \int_L \frac{d\tau}{\tau - z} \cdot \frac{1}{i\pi} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau_1 \quad (2.39)$$

$$I_1(z) = \frac{1}{i\pi} \int_L d\tau_1 \cdot \frac{1}{i\pi} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{(\tau - z)(\tau_1 - \tau)} d\tau \quad (2.40)$$

L üzerinde olmayan tüm z 'ler için, $I(z) = I_1(z)$ eşitliği ve benzer şekilde limitler içinde,

$I^+(t) = I_1^+(t)$, $I^-(t) = I_1^-(t)$ eşitlikleri yazılabilmektedir. Fakat (2.28)'e göre,

$$I(t) = \frac{1}{2} [I^+(t) + I^-(t)] = \frac{1}{2} [I_1^+(t) + I_1^-(t)] \quad (2.41)$$

yazılır. (2.36)'daki dönüşümü kullanarak $I_1(z)$ 'yi yazalım:

$$I_1(z) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{d\tau_1}{\tau_1 - z} \cdot \frac{1}{\pi i} \left[\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau - z} d\tau - \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau - \tau_1} d\tau \right] = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\psi(z, \tau_1)}{\tau_1 - z} d\tau_1$$

Bu ifade göstermektedir ki, $I_1(z)$, yoğunluğu

$$\psi(z, \tau_1) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau - \tau_1} d\tau$$

olan Cauchy tipte bir integraldir. (2.25) ve (2.26)'dan hareketle,

$$I_1^+(t) = \psi^+(t, t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\psi^+(t, \tau_1)}{\tau_1 - t} d\tau_1 ;$$

$$I_1^-(t) = -\psi^-(t, t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\psi^-(t, \tau_1)}{\tau_1 - t} d\tau_1 ;$$

$$\frac{1}{2} [I_1^+(t) + I_1^-(t)] = \frac{1}{2} [\psi^+(t, t) - \psi^-(t, t)] + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi^+(t, \tau_1) + \psi^-(t, \tau_1)}{\tau_1 - t} d\tau \quad (2.42)$$

bulunur. Şimdi (2.27) ve (2.28)'e göre hareket edersek,

$$\frac{1}{2} [\psi^+(t, t) - \psi^-(t, t)] = \varphi(t, t) ,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\psi^+(t, \tau_1) + \psi^-(t, \tau_1)] &= \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau - \tau_1} d\tau \\ &= \frac{t - \tau_1}{i\pi} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{(\tau - t)(\tau - \tau_1)} d\tau \end{aligned} \quad (2.43)$$

buluruz. (2.43)'de bulunan bu denklikleri (2.42) ve (2.41)'de yerine yazarsak, (2.38)'de verilen Poincaré-Bertrand formülüne ulaşılmış olur. (2.38)'deki formülasyon kimi kaynaklarda şu şekilde de yer alabilir:

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau_1 = -\pi^2 \varphi(t, t) + \int_L d\tau_1 \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)} d\tau \quad (2.44)$$

Poincaré ve Bertrand'ın ortaya koyduğu bu önemli formül için yaptığımız bu ispat, N.I.Muskhelishvili (1953) tarafından ortaya konmuş ve F.D.Gakhov (1966) tarafından özetlenmiştir.

2.5 İndeks Kavramı

2.5.1 Tanım ve Özellikler

L düzgün, kapalı bir kontur, $G(t)$, L üzerinde tanımlanmış sürekli bir fonksiyon ve $t \in L$ için $G(t) \neq 0$ olmak üzere, $G(t)$ fonksiyonunun L'ye göre indeksi, fonksiyonun argümanındaki

artıdır ki bu, eğrinin pozitif yönünde 2π ile bölünmesi suretiyle elde edilen değeri ifade eder.

$$x = \text{Ind}G(t) = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_L \quad (2.45)$$

İndeks söz konusu fonksiyonun logaritmik değişimden hareketle de tarif edilebilir:

$$\ln G(t) = \ln |G(t)| + i \arg G(t)$$

olduğundan,

$$[\arg G(t)]_L = \frac{1}{i} [\ln G(t)]_L$$

yazılabilir. Bu ifadeyi (2.45)'deki indekse ait ifadede yerine yazacak olursak,

$$x = \frac{1}{2i\pi} [\ln G(t)]_L \quad (2.46)$$

elde edilmiş olur. İndeks aynı zamanda integral olarak ta ifade edilebilir. Şöyle ki,

$$x = \text{Ind}G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_L d \arg G(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_L d \ln G(t) \quad (2.47)$$

Yukarıda yaptığımız tanımlara dayanarak indeksin şu özellikleri ortaya çıkmaktadır:

1. Kapalı bir kontur üzerinde sürekli ve sıfırlandığı nokta olmayan bir fonksiyonun indeksi daima bir tamsayıdır.
2. İki fonksiyonun çarpımından meydana gelen indeks, çarpanların indisleri toplamına; iki fonksiyonun bölünmesinden meydana gelen indeks ise bölünen ve bölünenin indisleri farkına eşittir. Bu konuyu F.D.Gakhov'un çözüm metotlarını anlatırken ve bazı uygulamalar yaparken ayrıntısı ile ele alacağız.
3. $G(t)$ 'nin diferansiyellenebilir olduğunu ve L konturunun iç ve dış bölgesinde analitik bir fonksiyonun sınır değerini oluşturduğunu varsayalım. Buna göre,

$$x = \frac{1}{2i\pi} \int_L d \ln G(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{G'(t)}{G(t)} dt \quad (2.48)$$

eşitliği yazılır. Logaritmik Residue teoremlerine göre aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Eğer $G(t)$, konturun iç veya dış bölgesinde analitik bir fonksiyonun sınır değeri ise, indeksi konturun iç veya dış bölgesindeki sıfırlarının sayısına eşittir.

4. $G(z)$, konturun iç bölgesinde sonlu sayıdaki kutup noktası hariç bırakılmak üzere analitik ise, yukarıda indeks hesabı için söz ettiğimiz sıfır noktalarının sayısı, sıfır noktalarının sayısı ile kutup noktalarının sayısının farkı şeklinde düzenlenir.

2.5.2 İndeksin Hesaplanması

$$t = t_1(s) + it_2(s) , \quad (0 \leq s \leq l) \quad (2.49)$$

olacak şekilde $G(t)$ fonksiyonunu bu kompleks koordinatlarla ifade edelim:

$$G(t) = G[t_1(s) + it_2(s)] = \xi(s) + i\eta(s) \quad (2.50)$$

Burada ξ, η kartezyen koordinatlarla, $\xi = \xi(s)$ ve $\eta = \eta(s)$ şeklinde ele alınırsa, bir Γ eğrisi için parametrik bir denklem oluştururlar. L konturu kapalı ve $G(t)$ fonksiyonu sürekli olacak şekilde ele alınırsa Γ eğrisi de ayrıca kapalı oluyor demektir. Γ eğrisinin formuna bakarak indeks tayini yapılabilen pek çok örnek vardır. Örneğin reel veya imajiner kısım eğri üzerinde işaret değiştirmiyorsa fonksiyonun indeksinin sıfır olduğunu söyleyebiliriz. (Ayrıca s değişkeninin eğri üzerinde $(0, l)$ aralığında dolaştığını varsayıyoruz)

Genelde indeksin hesabı için (2.47)'de verilen formül kullanılır. Bu formülü (2.50)'ye uyacak şekilde kullanırsak,

$$d \arg G(t) = d \arctan \frac{\eta(s)}{\xi(s)} \quad \text{ve buradan,}$$

$$x = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\xi(s)\eta'(s) - \eta(s)\xi'(s)}{\xi^2(s) + \eta^2(s)} ds \quad (2.51)$$

bulunur. İndeks kavramı konturun açık olduğu ve $G(t)$ 'nin süreksizlik yada sıfır noktalarına sahip olduğu durumlar içinde genelleştirilebilir. İndeksin hesabında bilgisayar destekli nümerik çözümlerde yapılabilir. Aşağıda bunlardan birini ele alacağız:

$[0, l]$ aralığının s değişkeni tarafından n adet eşit parçaya ayrıldığını varsayalım. Yani , $s_0 = 0, s_1, s_2, \dots, s_n = l$ olsun. Bunun anlamı L 'nin (ve onun bir tür görüntüsü olan Γ eğrisinin) $G(t)$ fonksiyonu tarafından n adet yay ile bölünmesi olarak düşünebiliriz. Γ üzerindeki herhangi bir yayı γ_i ile gösterelim. Bu durumda $(\xi_{i-1}, \eta_{i-1}), (\xi_i, \eta_i)$ koordinatları bu yayı ait bitiş noktaları olacaktır. γ_i yayının bitiş noktalarına ait konum vektörleri arasındaki açıyı da $\Delta\varphi_i$ ile gösterelim. (2.45)'den hareketle,

$$x = \text{Ind}G(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i \quad (2.52)$$

ve yeterince büyük n için,

$$\Delta\varphi_i \approx \sin \Delta\varphi_i = \frac{\xi_i \eta_{i-1} - \xi_{i-1} \eta_i}{\sqrt{(\xi_i^2 + \eta_i^2)} \sqrt{(\xi_{i-1}^2 + \eta_{i-1}^2)}} \quad (2.53)$$

yazılabilir. Buradan,

$$x = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i \eta_{i-1} - \xi_{i-1} \eta_i}{\sqrt{(\xi_i^2 + \eta_i^2)} \sqrt{(\xi_{i-1}^2 + \eta_{i-1}^2)}} + R_n \quad (2.54)$$

bulunur. Buradaki R_n oluşacak hatayı ifade etmektedir. Dolayısıyla nümerik hesaplama için bilgisayar programları tarafından genellikle aşağıdaki formül kullanılır:

$$x = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i \eta_{i-1} - \xi_{i-1} \eta_i}{\sqrt{(\xi_i^2 + \eta_i^2)} \sqrt{(\xi_{i-1}^2 + \eta_{i-1}^2)}} \quad (2.55)$$

Bu hesaplama yöntemi L.A.Chilkin tarafından bulunmuş olup, daha çok karmaşık fonksiyonlar için kullanılmaktadır. Basit fonksiyonlar için indeks hakkında verdiğimiz özellikler vasıtasıyla kolayca hesaplama yapılabilir. Örneğin,

$G(t) = t^n$ fonksiyonu orijini içeren bir konturda değerlendirilirse kök sayısı n olacaktır . Dolayısıyla,

$x = \text{Ind } G(t) = n$ olur.

2.6 Analitik Devam ve Genelleştirilmiş Liouville Teoremleri

Riemann sınır değer problemini incelerken kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisi içerisinde yer alan aşağıdaki teoremleri sıklıkla kullanacağız:

Teorem 2.6.1 : D_1 ve D_2 bölgeleri için L ortak ve düzgün bir sınır olarak verilsin. D_1 ve D_2 bölgelerinde sırasıyla analitik $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ fonksiyonları veriliyor. Varsayalım ki, z , L üzerindeki herhangi bir noktaya yaklaştığında bu iki fonksiyonda L üzerinde sürekli ve birbirlerine eşit olan limit değerlerine yaklaşıyor. Bu şartlar altında $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ fonksiyonları birbirlerinin analitik devamıdır.

Teorem 2.6.2 : $f(z)$, kompleks düzlemin $a_0 = \infty, a_k (k = 1, 2, \dots, n)$ kutup noktaları dışındaki tüm noktalarda analitik bir fonksiyondur. Bu kutup noktaları civarında $f(z)$ fonksiyonunun açılımının baş kısmı aşağıdaki formdadır:

$$a_0 \text{ noktasında: } G_0(z) = c_1^0 z + c_2^0 z^2 + \dots + c_{n_0}^0 z^{n_0}$$

$$a_k \text{ noktasında: } G_k \left(\frac{1}{z - a_k} \right) = \frac{c_1^k}{z - a_k} + \frac{c_2^k}{(z - a_k)^2} + \dots + \frac{c_{m_k}^k}{(z - a_k)^{m_k}}$$

Bu şartlar altında $f(z)$ rasyonel fonksiyondur ve aşağıdaki ilişki ile ifade edilir:

$$f(z) = C + G_0(z) + \sum_{k=1}^n G_k \left(\frac{1}{z - a_k} \right) \quad (2.56)$$

Özel olarak $f(z)$ 'nin tekilliği, sonsuzda m. mertebeye sahip bir kutup ise, $f(z)$, m. mertebeden bir polinomdur:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_m z^m \quad (2.57)$$

İfade ettiğimiz bu teorem literatürde “genelleştirilmiş Liouville teoremi” olarak bilinmektedir.

Buraya kadar verdiğimiz tüm bilgiler şimdi incelemeye başlayacağımız Riemann sınır değer probleminin daha kolay anlaşılabilmesini sağlamaya yönelikti.

3. KLASİK RIEMANN SINIR DEĞER PROBLEMİ

3.1 Problemin Konuluşu

L , basit-düzgün-kapalı bir kontur olarak kompleks düzlemi D^+ iç bölgeyi, D^- ise dış bölgeyi gösterecek şekilde iki ayrı kısma ayırıyor olsun. $G(t)$ ve $g(t)$, L üzerinde tanımlı ve $G(t) \neq 0$ olacak şekilde Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlar olmak üzere L üzerinde,

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) \quad \text{veya,}$$

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + g(t)$$

şartlarından birini sağlayacak şekilde D^+ 'da analitik $\Phi^+(z)$ ve $D^-(z = \infty \text{ dahil})$ 'de analitik $\Phi^-(z)$ fonksiyonlarının bulunması problemine “Riemann sınır değer problemi” denir. Problem $g(t)$ fonksiyonunun sıfır olup olmamasına göre isimlendirilir:

$$\text{Homojen Problem :} \quad \Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) \quad (3.1)$$

$$\text{Homojen Olmayan Problem:} \quad \Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + g(t) \quad (3.2)$$

$G(t)$ fonksiyonuna Riemann probleminin katsayısı (coefficient), $g(t)$ fonksiyonuna ise Riemann probleminin serbest terimi (free term) adı verilmektedir. Günümüzde Riemann probleminin genelleştirme çalışmaları sürmekte, Hölder sınıfı dışındaki fonksiyonların kullanımı yada çok daha komplike konturların kullanımı ile problem çok geniş bir boyut kazanmaktadır. Biz bu bölümde sadece Hölder sınıfından fonksiyonlarla çalışılan klasik tipteki problem ile ilgileneceğiz.

3.2 Verilen Sıçramaya Göre Parçalı Analitik Fonksiyonun Tayini

Şimdi yukarıda tanımladığımız Riemann probleminin özel bir halini düşünelim. Kapalı L konturu üzerinde verilen $G(t)$, Hölder sınıfına ait bir fonksiyon iken, L üzerinde $\varphi(t)$ sıçramasına sahip parçalı analitik $\Phi(z)$ fonksiyonunu araştıralım. Söz konusu sıçrama aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) \quad (3.3)$$

(2.27)'de verdiğimiz Sokhotski formülü gereğince,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (3.4)$$

bulunan fonksiyon problemin çözümü olur. Bu çözümün tekliği kolayca kanıtlanabilir. Aksini göstermek istediğimiz her durumda, eldeki iki çözümün farkını alırsak L üzerinde sıfır büyüklüğe sahip bir sıçrama elde ederiz. Kısacası, (3.4)'de bulduğumuz fonksiyon tüm düzlemde analitiktir ve sonsuzda sıfır değerine sahiptir. Yukarıdaki problem şu şekilde de tarif edilebilir:

Kapalı bir kontur üzerinde verilen Hölder sınıfına ait keyfi bir $\varphi(t)$ fonksiyonu, analitik $\Phi^+(z)$ ve $\Phi^-(z)$ fonksiyonlarının sırasıyla sınır değerleri olan $\Phi^+(t)$ ve $\Phi^-(t)$ fonksiyonlarının farkı şeklinde gösterilebilir. Buradaki ilave koşul, $\Phi^-(\infty) = 0$ 'dır. Bu ilave koşulu ortadan kaldırırsak (3.4)'deki çözüm,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau + \text{sabit} \quad (3.5)$$

şeklini alır.

3.3 Homojen Problemin Çözümü

Öncelikle (3.1)'de verilen homojen probleminin çözülebilir olduğunu kabul edelim. $\Phi^+(z)$ ve $\Phi^-(z)$ fonksiyonları da bu problemin çözümü olsun. $\Phi^+(z)$ ve $\Phi^-(z)$ fonksiyonlarının D^+ ve D^- bölgelerindeki sıfırlarının sayısı sırasıyla N^+ ve N^- ile gösterilsin. İndeks kavramından bahsederken verdiğimiz 3.özellikten açıkça görülüyor ki,

$$N^+ + N^- = \text{Ind}G(t) = x \quad (3.6)$$

Problemin indeksi derken daima problemin katsayısının indeksi kastedilmektedir. (3.6) eşitliğinin sol tarafının negatif olmayan bir sayı olduğunu biliyoruz. Buna göre şunları söyleyebiliriz:

1. Homojen Riemann probleminin çözülebilir olması için biricik şart problemin indeksinin negatif olmamasıdır. (Varsayıyoruz ki, $\Phi^+(z)$ ve $\Phi^-(z)$ fonksiyonlarının kutbu yoktur)

2. Eğer $x > 0$ ise problemin çözümünü oluşturan $\Phi^+(z)$ ve $\Phi^-(z)$ fonksiyonlarının sıfırlarının sayısı x 'tir.
3. Eğer $x = 0$ ise problemin çözümünü oluşturan $\Phi^+(z)$ ve $\Phi^-(z)$ fonksiyonlarının sıfırları yoktur.

Öncelikle $x = 0$ durumunu inceleyelim. (3.1) ifadesinde her iki tarafın logaritmasını alalım:

$$\ln \Phi^+(t) - \ln \Phi^-(t) = \ln G(t) \quad (3.7)$$

Sonuç olarak L üzerinde verilen bir sıçrama ile ifade edilebilen $\ln \Phi(z)$ analitik fonksiyonun bulunması problemi elde edilir. Bu problemin çözümü $\Phi^-(\infty) = 0$ ilave koşulu altında şu şekilde verilebilir:

$$\ln \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (3.8)$$

Şimdi kolaylık olması açısından,

$$\ln \Phi(z) = \Gamma(z) \quad (3.9)$$

alalım. (3.1) probleminin Sokhotski formüllerine göre $\Phi^-(\infty) = 1$ ek koşulunu sağlayan çözümleri şöyledir:

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)} \quad (3.10)$$

Eğer $\Phi^-(\infty) = 1$ ek koşulu göz ardı edilirse (3.8)'de verilen bağıntıya keyfi bir sabit eklenecek ve buna istinaden (3.10) çözümü şu forma gelecektir:

$$\Phi^+(z) = Ae^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = Ae^{\Gamma^-(z)} \quad (3.11)$$

Buradaki A keyfi bir sabittir. $\Gamma^-(\infty) = 0$ olduğundan, A aslında $\Phi^-(z)$ 'nin sonsuzdaki değerini ifade etmektedir. $x = 0$ ve $\Phi^-(\infty) \neq 0$ koşulları altında çözüm bir adet keyfi sabit içerecektir; bir adet lineer bağımsız çözüm oluşacaktır. $\Phi^-(\infty) = 0$ koşulu altında ise A 'nın değeri sıfır olacak ve problemin sadece trivial çözümü olacaktır. Böylece şu önemli sonuca varıyoruz:

L üzerinde verilen, Hölder sınıfından sıfır indeksine sahip keyfi bir $G(t)$ fonksiyonu, D^+ ve D^- bölgelerinde analitik ve hiç sıfırı olmayan fonksiyonların sınır değerleri durumundaki

$\Phi^+(t)$ ve $\Phi^-(t)$ fonksiyonlarının bir oranı şeklinde gösterilebilir.

Şimdi $x > 0$ durumunu inceleyelim. Koordinat sistemi orijin noktasının D^+ bölgesinde bulunduğunu varsayalım. Daha önce belirttiğimiz indekse ait özelliklerden biliyoruz ki, t^x fonksiyonunun indeksi x 'tir. Sınır koşullarını şu şekilde yazalım:

$$\Phi^+(t) = t^x [t^{-x} G(t)] \Phi^-(t)$$

Açıktır ki, $G_1(t) = t^{-x} G(t)$ fonksiyonu sıfır indeksine sahiptir. $G_1(t) = \frac{e^{\Gamma_+(t)}}{e^{\Gamma_-(t)}}$ olarak,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[\tau^{-x} G(\tau)]}{\tau - z} d\tau \quad (3.12)$$

yazalım. Sınır koşulları ayrıca aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\frac{\Phi^+(t)}{e^{\Gamma_+(t)}} = t^x \frac{\Phi^-(t)}{e^{\Gamma_-(t)}} \quad (3.13)$$

(3.13) ifadesinde, $\frac{\Phi^+(z)}{e^{\Gamma_+(z)}}$ fonksiyonu D^+ bölgesinde analitik, $z^x \frac{\Phi^-(z)}{e^{\Gamma_-(z)}}$ fonksiyonu ise

sonsuzda mertebesi x 'den büyük olmayan kutbu hariç D^- bölgesinde analitiktir ve bu iki fonksiyon L konturu boyunca birbirlerinin analitik devamıdır. Burada bahsedebileceğimiz tek tekillik sonsuzda mertebesi x 'den büyük olmayan bir kutuptur. O halde, genelleştirilmiş Liouville teoreminden hareketle diyebiliriz ki, bu tekilliğe sahip ikinci fonksiyon, aslında mertebesi x 'den büyük olmayan keyfî kompleks katsayılı bir polinomdur. Böylelikle problemin genel çözümü,

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma_+(z)} P_x(z) \quad , \quad \Phi^-(z) = e^{\Gamma_-(z)} z^{-x} P_x(z) \quad (3.14)$$

şeklinde bulunur. Bu kısmı bir sonuç niteliğindeki aşağıdaki teorem ile kapatalım:

Teorem 3.3.1 : x indeksi ifade etmek üzere, Riemann sınır değer probleminin indeksi pozitif ise, problem $x+1$ adet lineer bağımsız çözüme sahiptir.

$$\Phi_k^+(z) = z^k e^{\Gamma_+(z)} \quad , \quad \Phi_k^-(z) = z^{k-x} e^{\Gamma_-(z)} \quad (k=0,1,\dots,x) \quad (3.15)$$

Problemin genel çözümü $x+1$ adet keyfî sabit içerir ve (3.14)'de verilen formdadır.

(3.6) ifadesinden hatırlanacağı gibi, $x < 0$ durumunda homojen Riemann problemi

çözümsüzdür.

Riemann problemine ait uygulamalarımızda çoğunlukla problemi, $\Phi^-(\infty) = 0$ ek koşulu altında çözümleyeceğiz. Bu ek koşulun olduğu durumlarda (3.14)'de verilen genel çözüm şu şekle gelir:

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} P_{x-1}(z) \quad , \quad \Phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)} z^{-x} P_{x-1}(z) \quad (3.16)$$

Burada P_{x-1} , $(x-1)$ mertebeye sahip keyfi katsayılı bir polinomdur ve bu şartlar altında problem x adet lineer bağımsız çözüme sahiptir.

3.4 Homojen Problemin Kanonik Fonksiyonu

Homojen olmayan problemin çözümüne geçmeden önce homojen problemin kanonik fonksiyonu üzerinde duralım. Çünkü homojen olmayan problemin çözümü için, homojen probleme ait kanonik fonksiyondan yararlanacağız. Bir analitik fonksiyonunun tanımlı olduğu bölgedeki her noktada sahip olduğu mertebelerin toplamına o fonksiyonun toplam mertebesi denilmektedir. Bu toplam mertebe aynı zamanda, fonksiyonun sıfırlarının sayısı ile kutuplarının sayısı arasındaki farka eşittir. Bir homojen Riemann probleminin çözümüne ait toplam mertebe aynı zamanda problemin indeksi durumundadır. Bu hatırlatmalardan sonra kanonik fonksiyonu şu şekilde tanımlayalım:

Düzlemin sonlu parçasındaki her noktada sıfır mertebesine sahip ve (3.1) koşulunu sağlayan parçalı analitik fonksiyona “homojen problemin kanonik fonksiyonu” denir. Kanonik fonksiyonun sonsuzdaki mertebesi x olsun. x 'in negatif olmaması durumunda kanonik fonksiyonunun kutbu yoktur ve sınır değer probleminin çözümüdür. O nedenle kimi zaman “kanonik çözüm” şeklinde de anıldığı olur.

$x < 0$ ise kanonik fonksiyon sonsuzda kutba sahiptir ve homojen Riemann probleminin bir çözümü değildir. Ancak yinede homojen olmayan problemin çözümünde yardımcı fonksiyon olarak kullanılacaktır. Riemann problemine ait sınır koşullarını,

$$\Phi^+(t) = t^x [t^{-x} G(t)] \Phi^-(t) \quad (3.17)$$

şeklinde yazarsak, kanonik fonksiyon aşağıdaki gibi oluşur:

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} \quad , \quad X^-(z) = e^{\Gamma^-(z)} z^{-x} \quad (3.18)$$

Buradaki $\Gamma(z)$, (3.12) formülünde verildiği gibidir.

$x \geq 0$ ise homojen problemin genel çözümü kanonik fonksiyon vasıtasıyla aşağıdaki kapalı formda verilebilir:

$$\Phi(z) = X(z)P_x(z) \quad (3.19)$$

3.5 Homojen Olmayan Problemin Çözümü

3.5.1 Teorik Yaklaşım ve Kapalı Formda Çözümün Verilmesi

Homojen olmayan Riemann sınır değer problemi,

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + g(t) \quad (3.20)$$

şeklinde idi. (3.20)'de yer alan $G(t)$ fonksiyonunu, homojen problemin kanonik fonksiyonunun sınır değerlerinin oranı şeklinde yazalım.

$$G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)} \quad (3.21)$$

olacak şekilde (3.20)'de yer alan koşulu buna göre düzenlersek,

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)} \quad (3.22)$$

elde edilir. Açıktır ki, $g(t)/X^+(t)$ Hölder sınıfına aittir. Daha önce 3.2 (Verilen sıçramaya göre parçalı analitik fonksiyonun tayini) bölümünde verdiğimiz bilgilerden hareketle, bu fonksiyonu analitik fonksiyonların sınır değerlerinin farkı şeklinde ifade edelim:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} \quad \text{olacak şekilde} \quad \frac{g(t)}{X^+(t)} = \psi^+(t) - \psi^-(t) \quad (3.23)$$

Buna göre sınır koşulu,

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \psi^-(t) \quad (3.24)$$

şeklinde yazılabilir. $x \geq 0$ durumunda $\frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)}$ fonksiyonu sonsuzda kutba, $x < 0$ durumunda

ise mertebesi x 'e eşit olan sıfıra sahiptir. 3.3 (Homojen problemin çözümü) kısmında verdiğimiz bilgileri de göz önünde bulundurursak aşağıdaki sonuçlara ulaşırız:

$x \geq 0$ ise bu taktirde,

$$\frac{\Phi^+(z)}{X^+(z)} - \psi^+(z) = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)} - \psi^-(z) = P_x(z) \quad (3.25)$$

yazılabilir ve çözüm aşağıdaki gibidir:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= X(z)[\psi(z) + P_x(z)] \\ X^+(z) &= e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = e^{\Gamma^-(z)} z^{-x} \\ \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

(3.26)'da bir set olarak verdiğimiz çözüm formüllerinden ilki homojen olmayan Riemann probleminin genel çözümüdür. Dikkat edilirse bu formülde yer alan $X(z)$ ve $P_x(z)$ terimleri homojen problem yoluyla elde edilmiştir.

$x < 0$ durumunda ise $\frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)}$ fonksiyonu sonsuzda sıfıra gidiyor. Buradan,

$$\frac{\Phi^+(z)}{X^+(z)} - \psi^+(z) = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)} - \psi^-(z) = 0 \quad (3.27)$$

yazılabilir ve çözüm aşağıdaki gibidir:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= X(z)\psi(z) \\ X^+(z) &= e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = e^{\Gamma^-(z)} z^{-x} \\ \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

$\Phi^-(z)$ için (3.28) setini değerlendirelim. İlk eşitlikteki birinci çarpan sonsuzda $-x$ mertebeye sahip kutba sahiptir. İkinci çarpan ise sonsuzda 1.mertebeden sıfıra sahiptir. Öyleyse , $\Phi^-(z)$ sonsuzda mertebesi $-x-1$ 'i aşmayan kutba sahiptir. $x < -1$ durumunda homojen olmayan problem genelde çözümsüzdür. Problemin bu şart altında çözülebilir olması için,

serbest terimin bazı ilave koşulları kesin olarak sağlayıp sağlamadığına bakılır. Şimdi (3.23)'de verdiğimiz Cauchy tipindeki integralin sonsuz civarındaki seri açılımını yazalım:

$$\psi^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}, \quad c_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau \quad (3.29)$$

$\Phi^-(z)$ 'nin sonsuzda analitik olabilmesi için, yukarıdaki seride yer alan ilk $(-x-1)$ adet katsayının sıfır olması gerekir. Bu durum gösteriyor ki, indeksi -1 'den küçük durumdaki homojen olmayan Riemann probleminin çözümü aşağıdaki $(-x-1)$ adet koşulun sağlanmasına bağlıdır:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0, \quad (k=1,2,\dots,-x-1) \quad (3.30)$$

Bu durum bizi aşağıdaki sonuç niteliğindeki teoreme götürmektedir:

Teorem 3.5.1.1 : $x \geq 0$ durumunda, keyfi bir serbest terim için homojen olmayan Riemann problemi çözülebilirdir ve genel çözüm,

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X(z)P_x(z) \quad (3.31)$$

şeklindedir. $X(z)$ kanonik fonksiyonu (3.18)'de ifade edildiği gibidir. $P_x(z)$ ise, keyfi kompleks katsayılarla sahip x . mertebeden bir polinomdur. $x = -1$ durumunda homojen olmayan Riemann problemi çözülebilirdir ve bir adet çözüme sahiptir. $x < -1$ durumunda ise, homojen olmayan problem genelde çözülebilir değildir. Bu problemin çözülebilir olması için problemin serbest teriminin (3.30)'da verilen $(-x-1)$ adet ilave koşulu karşılaması gerekir. Eğer bu koşulların tümü karşılanıyorsa, o vakit problem (3.31)'de $P(z)=0$ yazılmak suretiyle elde edilecek bir adet çözüme sahiptir.

Eğer problemi çözerken $\Phi^-(\infty) = 0$ ek koşulu göz önüne alınıyorsa $x \geq 0$ için çözüm:

$$\Phi(z) = X(z)[\psi(z) + P_{x-1}(z)] \quad (3.32)$$

şeklindedir. Eğer $x = 0$ ise yukarıdaki ifadede $P(z)=0$ alınır. Eğer $\Phi^-(\infty) = 0$ ek koşulu $x < 0$ durumunda söz konusu ise çözüm, (3.31) formülünde $P(z)=0$ olacak şekilde bulunur ve aşağıdaki $-x$ adet ilave koşulun sağlanması zorunludur:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0 \quad , \quad (k=1,2,\dots,-x) \quad (3.33)$$

Yukarıda homojen olmayan problemin çözümüne ait ortaya koyduğumuz bu teoremi şu şekilde özetleyelim:

- $x \geq 0$ ise homojen olmayan Riemann sınır değer probleminin genel çözümü, x adet keyfi sabite lineer bağımlıdır.
- $x < 0$ ise homojen olmayan Riemann sınır değer probleminin çözülebilirlik koşulları $-x$ adettir.
- $x = 0$ ise homojen olmayan Riemann sınır değer problemi kesin çözülebilirdir ve çözüm tektir.

3.5.2 Gakhov Metodu

Bir önceki bölümde homojen olmayan Riemann probleminin çözümünü formüle etmeye çalıştık. Ancak pratikte bir Riemann probleminin tam çözümünü yapmak istiyorsak ifade ettiğimiz bu formüller çoğunlukla yeterli olmayacaktır. Çünkü karşılaşılabilecek Cauchy tipi integrallerin çözümü neredeyse imkansız olacaktır. Bizim bu çalışmadaki nihai hedefimiz bazı Riemann problemlerinin tam çözümünü yapmaktır. Bu hedefimize hizmet edecek şekilde şimdi klasik Riemann problemlerinin bir bölümü için oldukça kullanışlı olduğunu düşündüğümüz F.D.Gakhov'a ait metodu inceleyeceğiz. Bu metodun içeriğinde klasik Riemann probleminin tanımına ilave edilen bazı sınırlamalar vardır. Buna göre problemi koyalım:

Öncelikle problemi sonlu sayıda basit eğrilerden oluşan bir kontur üzerinde ele alıyoruz. Problemin katsayısını kontur üzerinde sıfırlara yada kutba sahip olmayan rasyonel bir fonksiyon olacak şekilde belirliyoruz. Buna göre sınır koşullarını,

$$\Phi^+(t) = \frac{p(t)}{q(t)} \Phi^-(t) + g(t) \quad (3.34)$$

şeklinde belirliyoruz. Buradaki $p(z)$ ve $q(z)$ polinomlarını, $p_+(z)$ ve $q_+(z)$ kökleri D^+ bölgesinde bulunan polinomlar, $p_-(z)$ ve $q_-(z)$ ise kökleri D^- bölgesinde olan polinomlar olmak üzere,

$$p(z) = p_+(z)p_-(z) \quad , \quad q(z) = q_+(z)q_-(z) \quad (3.35)$$

şeklinde çarpanlarına ayırıyoruz. m_+ ve n_+ , sırasıyla $p_+(z)$ ve $q_+(z)$ polinomlarının sıfırlarının sayısını göstermek üzere, açıktır ki problemin indeksi:

$$x = m_+ - n_+ \quad (3.36)$$

ile ifade edilir. (3.35)'ye göre sınır koşullarını tekrar yazalım:

$$\frac{q_-(t)}{p_-(t)} \Phi^+(t) - \frac{p_+(t)}{q_+(t)} \Phi^-(t) = \frac{q_-(t)}{p_-(t)} g(t) \quad (3.37)$$

Buna göre problemin çözümü:

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{p_-(z)}{q_-(z)} [\psi(z) + X_1^-(z)] \\ \Phi^-(z) &= \frac{q_+(z)}{p_+(z)} [\psi(z) + X_1^-(z)] \\ \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} g(\tau) \frac{d\tau}{\tau - z} \\ \Phi^-(\infty) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

formül seti ile verilir. Eğer problemin indeksi negatif ise, ($P_{x-1}=0$ alınarak) çözümün varlığı şartı:

$$\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} g(\tau) \tau^{k-1} d\tau = 0, \quad (k=1,2,\dots,-x) \quad (3.39)$$

olur. Bütün bu ifadeler daha önceki bölümde verdiğimiz çözüm formülasyonlarına tamamen uymaktadır. (Örneğin (3.26)'daki çözüm setini inceleyebilirsiniz) Gakhov'un burada yaptığı, özellikle problemin katsayısının özel halinden yararlanmak suretiyle çözümü basitleştirmektir. Burada en can alıcı nokta kanonik fonksiyon yerine kullanılan ifadelerdir. Normalde, kanonik fonksiyon, Cauchy tipte bir integralin çözümünü gerektirirken, burada doğrudan hesaplanmaktadır. Kanonik fonksiyon burada,

$$X^+ = p_- / q_- , \quad X^- = q_+ / p_+ \quad (3.40)$$

şeklinde basitçe hesaplanmaktadır. Bu metot ile çözmek istediğimiz problemlerde, problemin katsayısı $G = p_+ p_- / q_+ q_-$ olacak şekilde değerlendirilebilmelidir. Aksi fonksiyon tiplerinde

doğrudan bu metodun probleme uygulanması mümkün olmaz.

N.I. Muskhelishvili'nin kullandığı, Riemann problemini direkt çözmek olarak açıklanabilecek bir başka yöntemden daha bahsetmeliyiz. Ancak bu yöntemi bundan sonraki kısımda anlatacağız. Çünkü bu metod, burada anlattığımız klasik Riemann problemini de çözmekte, ancak asıl anlamı önümüzdeki kısımda anlatacaklarımızla ortaya çıkmaktadır.

3.6 Yarı Düzlemde Riemann Problemi

L konturu, düzlemi üst ve alt yarı parça olarak ikiye ayıran eksen niteliğinde bir sınır olsun. $\Phi^+(z)$ üst yarı düzlemde, $\Phi^-(z)$ ise alt yarı düzlemde analitik fonksiyonlar olmak üzere parçalı analitik $\Phi(z)$ fonksiyonunu meydana getiriyor olsunlar. Öyle ki, $\Phi^+(z)$ ve $\Phi^-(z)$ fonksiyonlarının limit değerleri kontur üzerinde aşağıdaki sınır koşullarını yerine getirsin:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad (-\infty < t < \infty) \quad (3.41)$$

Sınır koşulunda verilen $G(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları kontur üzerindeki tüm sonlu noktalar ile tüm sonsuz noktaların civarında Hölder koşulunu sağlamaktadır. Ayrıca $G(t) \neq 0$ koşulu, sınır koşulunun yapısı gereği her zaman olduğu gibi mevcuttur. Bu problemin çözüm yöntemindeki temel fikir, önceki bölümlerde daha basit (sonlu) bir kontur için ifade ettiklerimizden çok farklı değildir. Bu duruma özel, basit sayılabilecek iki farklılık mevcuttur:

Sonsuzdaki noktalar ve orijin noktasının bu kez kontur üzerinde yer alması...

Öncelikle problemin indeksine ışık turalım. Bunun için aşağıdaki fonksiyonu düşünelim:

$$\frac{t-i}{t+i}$$

Bu fonksiyonun argümanı,

$$\arg \frac{t-i}{t+i} = \arg \frac{(t-i)^2}{t^2+1} = 2 \arg(t-i) \quad (3.42)$$

İndeksin tanımından hareketle,

$$\text{Ind} \frac{t-i}{t+i} = 1 \quad (3.43)$$

bulunur. Eğer $IndG(t) = x$ olarak alınırsa, açıktır ki, $G(t)\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-x}$ fonksiyonunun indeksi sıfırdır. İstisnai $(-i)$ noktasını referans olarak kanonik fonksiyonu yazalım:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left[\left(\frac{\tau-i}{\tau+i} \right)^{-x} G(\tau) \right] \frac{d\tau}{\tau-z} \quad \text{olacak şekilde,}$$

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} \quad , \quad X^-(z) = \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^{-x} e^{\Gamma^-(z)} \quad (3.44)$$

Bu fonksiyonun sınır değerlerini kullanarak (3.41)'deki koşulu yeniden düzenleyelim:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)} \quad (3.45)$$

Sınır koşullarını, sıçrama probleminde daha önce ifade ettiğimiz bilgilere göre tekrar düzenleyelim:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-z} \quad (3.46)$$

olmak üzere,

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \psi^-(t) \quad (3.47)$$

bulunur. Daha önce sonlu konturlar ile çalışırken ifade ettiğimiz aksine burada genellikle $\psi^-(\infty) \neq 0$ dır. Analitik devam ve genelleştirilmiş Liouville teoremlerini göz önüne alalım. $z = -i$ noktası fonksiyonun tekilik noktasıdır ve o noktada büyük olasılıkla mertebesi indeksi aşmayacak şekilde bir kutba sahiptir. Buna göre,

$$\frac{\Phi^+(z)}{X^+(z)} - \psi^+(z) = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)} - \psi^-(z) = \frac{P_x(z)}{(z+i)^x} \quad , \quad x \geq 0 \quad (3.48)$$

Burada $P_x(z)$ keyfi çarpanlara sahip, derecesi indeksten büyük olmayan bir polinomdur. Buna göre problemin genel çözümü:

$$\left. \begin{aligned} x \geq 0 \quad \text{iken} \quad \Phi(z) &= X(z) \left[\psi(z) + \frac{P_x(z)}{(z+i)^x} \right] \\ x < 0 \quad \text{iken} \quad \Phi(z) &= X(z) [\psi(z) + C] \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

$x < 0$ durumunda kanonik $X(z)$ fonksiyonu $z = -i$ noktasında mertebesi $-x$ kadar olan bir kutba sahiptir ve bu nedenle problemin çözülebilir olması için $C = -\psi^-(-i)$ almamız gerekir. $x < -1$ olması durumunda ise aşağıdaki ilave koşulların karşılanması lüzumu doğar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau+i)^k} = 0, \quad (k = 2, 3, \dots, -x) \quad (3.50)$$

O halde sonlu konturlarla çalışırken elde ettiklerimize benzer bir sonuç elde ediyoruz. Bu sonucu aşağıdaki teorem ile özetleyelim:

Teorem 3.6.1 : $x \geq 0$ durumunda yarı düzlemdeki homojen ve homojen olmayan Riemann sınır değer problemleri çözülebilirdir ve çözüm $x+1$ adet keyfi sabite lineer bağımlıdır. $x < 0$ durumunda ise homojen problem çözümsüzdür. $x < 0$ durumunda homojen olmayan problem sadece $x = -1$ için kesin çözülebilirdir ve çözüm tektir. $x < -1$ olması durumunda ise homojen olmayan problemin çözümü $-x - 1$ adet ilave koşulun karşılanmasına bağlıdır.

Şu ana kadar sonsuzda basit sınıra sahip bir problem tipini ele aldık. Gelin bunu genelleştirelim ve sonsuzda sıfır olma durumunu da inceleyelim:

Sınır değerlerini $\Phi^+(\infty) = \Phi^-(\infty) = 0$ şeklinde alır isek, problemin serbest terimi için $g(\infty) = 0$ buluruz. Yani Riemann problemi sonsuzda sıfır değerine sahip bir çözüme sahip ise, sınır koşuluna ait serbest terimde sonsuzda sıfır olmalıdır. Bu bilgiden hareketle (3.49) çözümünü düzenleyelim. Bu ek koşul durumunda her zaman olduğu gibi P_x yerine P_{x-1} ve $C=0$ alarak,

$$\Phi(z) = X(z) \left[\psi(z) + \frac{P_{x-1}(z)}{(z+i)^x} \right] \quad (3.51)$$

formülünü elde ederiz. $x \leq 0$ durumunda bu formülde $P_{x-1}=0$ alırız. (3.50)'de ifade ettiğimiz ilave çözüm koşulları ise $\psi(-i) = 0$ olduğundan şu forma gelir:

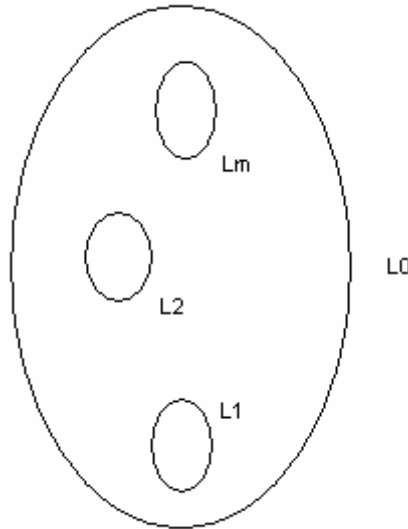
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau+i)^k} = 0 \quad , \quad (k = 1, 2, \dots, -x) \quad (3.52)$$

Bu duruma özel bir özet yapmak gerekirse şunları söyleyebiliriz: $x > 0$ durumunda x adet keyfi sabite bağımlı bir çözüm vardır. $x \leq 0$ durumunda ise çözüm tektir ancak bu çözümlerin var olabilmesi için öncelikle $x < 0$ durumunda $-x$ adet ilave koşulu problemin karşılaması gerekir.

3.7 Kontur Setlerinin Oluşturduğu Çoklu Alanlarda Riemann Problemi

3.7.1 Problemin Konuluşu

L , $L = L_0 + L_1 + \dots + L_m$ olacak şekilde $m+1$ adet kesişmeyen kontura ait bir seti ifade etsin. Öyle ki, L_0 konturu L dışındaki diğer tüm konturları kuşatsın. Basitlik için kontur kavramını yine düzlemdeki çizgisel bir sınır (örneğin bir eğri) gibi ele alalım ve aşağıdaki şekil üzerinde bu kontur setini gösterelim:



Şekil 3.1 $m+1$ adet konturdan meydana gelen L kontur seti

L_0 'ın içinde ve $L_1, \dots, L_m$ 'in dışında kalan bölgeyi D^+ ile, $D^+ + L$ 'nin düzlemdeki tümleyenini ise D^- ile gösterelim. Koordinat sisteminin orijin noktasının D^+ bölgesinde olduğunu varsayıyoruz. Öncelikle sıçrama problemini ifade edelim:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t) \quad (3.53)$$

(3.53) daha önce basit kontur ile çalışırken bulduğumuz gibi,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - z} \quad (3.54)$$

tarafından çözülür. Bu durum, Sokhotski formüllerinin, alanın buradaki gibi çoklu parçalardan oluşup-oluşmamasına bağlı olmamasından ileri gelir. Homojen ve homojen olmayan Riemann problemleri, bölüm 3.1'de tek bir konturu ele alarak koyduğumuz problem ile aynı şekilde formüle edilir.

$x_k = (1/2\pi)[\arg G(t)]_{L_k}$ olacak şekilde, problemin indeksi:

$$x = \sum_{k=0}^m x_k \quad (3.55)$$

şeklinde hesaplanır. Eğer x_k 'ların tümü sıfır ise problemin çözümü tek kontur üzerinde gösterdiğimizle tamamen aynıdır. Fakat diğer durumlar için problemi basitleştirmek zorundayız. Aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım:

$$\prod_{k=1}^m (t - z_k)^{x_k}$$

z_k 'lar L_k ($k=1,2,\dots,m$) olacak şekilde sırasıyla konturların iç bölgelerindeki bazı noktaları ifade etsin. $k \neq j$ ise $[\arg(t - z_k)]_{L_j} = 0$ ve $[\arg(t - z_j)]_{L_j} = -2\pi$ olmasından hareketle,

$$\frac{1}{2\pi} \left[\arg \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{x_k} \right]_{L_j} = \frac{1}{2\pi} [\arg(t - z_j)^{x_j}]_{L_j} = -x_j \quad (3.56)$$

$$(j = 1, 2, \dots, m)$$

ve buradan da,

$$\left\{ \arg \left[G(t) \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{x_k} \right] \right\}_{L_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (3.57)$$

yazılır. Sadece L_0 konturunu baz alarak $G(t) \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{x_k}$ fonksiyonun argümanındaki değişimi hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \left[G(t) \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{x_k} \right] \right\}_{L_0} \\ = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_{L_0} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m [x_k \arg(t - z_k)]_{L_0} = x_0 + \sum_{k=1}^m x_k = x \end{aligned}$$

bulunur. Koordinat sisteminin orijin noktasının D^+ bölgesinde olduğunu kabul ettiğimizden,

$$[\arg t]_{L_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad , \quad [\arg t]_{L_0} = 2\pi \quad (3.58)$$

olur. Sonuç olarak,

$$\left\{ \arg \left[t^{-x} \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{x_k} G(t) \right] \right\}_L = 0 \quad (3.59)$$

bulunur.

3.7.2 Homojen Problemin Çözümü

Sınır koşullarını,

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) \quad (3.60)$$

eşitliğine denk olan şu formda yazalım:

$$\Phi^+(t) = \frac{t^x}{\prod_{k=1}^m (t - z_k)^{x_k}} \left[t^{-x} \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{x_k} G(t) \right] \Phi^-(t) \quad (3.61)$$

$t^{-x} \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{x_k} G(t)$ fonksiyonu, L_k ($k=1, 2, \dots, m$) olmak üzere her kontur üzerinde sıfır

indeksine sahip olduğundan şu şekilde de yazılabilir:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \left[\tau^{-x} \prod_{k=1}^m (\tau - z_k)^{x_k} G(\tau) \right]}{\tau - z} d\tau \quad (3.62)$$

olmak üzere,

$$t^{-x} \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{x_k} G(t) = \frac{e^{\Gamma^+(t)}}{e^{\Gamma^-(t)}} \quad (3.63)$$

Buna göre sınır koşullarını tekrar yazalım:

$$\prod_{k=1}^m (t - z_k)^{x_k} \frac{\Phi^+(t)}{e^{\Gamma^+(t)}} = t^x \frac{\Phi^-(t)}{e^{\Gamma^-(t)}} \quad (3.64)$$

Daha önce analitik devam hakkında verdiğimiz teorem ve genelleştirilmiş Liouville teoreminin uygulanmasıyla,

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+(z) &= \prod_{k=1}^m (z - z_k)^{-x_k} e^{\Gamma^+(z)} P_x(z) \\ \Phi^-(z) &= z^{-x} e^{\Gamma^-(z)} P_x(z) \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

elde edilir. Dikkat edilecek olursa bulduğumuz bu sonuç, daha önce tekli konturlarla

çalışırken elde ettiğimiz sonuçtan sadece $\Phi^+(z)$ 'deki $\prod_{k=1}^m (z - z_k)^{-x_k}$ çarpanı itibariyle

farklıdır. Her zaman olduğu gibi $\Phi^-(\infty) = 0$ ek koşulunun olma durumunu da inceleyelim.

Bu koşulun olması durumunda (3.65)'deki $P_x(z), P_{x-1}(z)$ ile değiştirilir.

Problemin kanonik fonksiyonu,

$$X^+(z) = \prod_{k=1}^m (z - z_k)^{-x_k} e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = z^{-x} e^{\Gamma^-(z)} \quad (3.66)$$

ile verilir. Kanonik fonksiyonun kontur üzerindeki limit değerlerini incelemek için öncelikle (3.62)'nin limit değerlerine bakalım. Sokhotski formülüne göre,

$$\Gamma^{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} \ln \left[t^{-x} \Pi(t) G(t) \right] + \Gamma(t) \quad (3.67)$$

Buradaki $\Gamma(t)$, (3.62)'de yer alan integralin baş değeridir (principal value) ve,

$$\Pi(t) = \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{x_k} \text{ biçimindedir.}$$

Buna göre $z \rightarrow t$ limit durumunu (3.66) için yazalım:

$$X^+(t) = \sqrt{\left(\frac{G(t)}{t^x \Pi(t)} \right)} \cdot e^{\Gamma(t)}, \quad X^-(t) = \sqrt{\left(\frac{1}{t^x \Pi(t) G(t)} \right)} \cdot e^{\Gamma(t)} \quad (3.68)$$

Burada kanonik fonksiyonu incelememizin nedeni hatırlanacağı üzere, homojen olmayan problemin çözümünde bu fonksiyondan yararlanmamızdır. Kanonik fonksiyona ait denklemleri de çıkardıktan sonra artık homojen olmayan problemin çözümüne geçebiliriz. Ayrıca belirtelim ki, bu ana bölümün başından beri teorik düzeyde verdiğimiz bu kapalı çözümler Carleman ve Plemelj tarafından ilk olarak dile getirilmiş, daha sonra Gakhov ve Muskhelishvili'nin çalışmaları ile bu seviyeye gelmiştir. Literatürde çözümler için farklı formülasyon yapıları ve notasyonlar ile karşılaşılabilir.

3.7.3 Homojen Olmayan Problemin Çözümü

Tek kontur ile çalıştığımız problemlerde olduğu gibi, problemin sınır koşulları,

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad (3.69)$$

olmak üzere,

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} \quad (3.70)$$

olacak şekilde,

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \psi^-(t) \quad (3.71)$$

formunda yazılabilir. Buna göre problemin genel çözümü

$$\Phi(z) = X(z)[\psi(z) + P_x(z)] \quad (3.72)$$

$\Phi^-(\infty) = 0$ koşulu mevcut ise bu durumda genel çözüm,

$$\Phi(z) = X(z)[\psi(z) + P_{x-1}(z)] \quad (3.73)$$

şeklini alır. $x < 0$ olması durumunda homojen olmayan problem sadece,

$$\int_L \frac{g(t)}{X^+(t)} t^{k-1} dt = 0 \quad (k=1,2,\dots,-x-1) \quad (3.74)$$

koşulları sağlandığı takdirde çözülebilir. $\Phi^-(\infty) = 0$ koşulu mevcut ise bu çözüm koşulları,

$$\int_L \frac{g(t)}{X^+(t)} t^{k-1} dt = 0 \quad (k=1,2,\dots,-x) \quad (3.75)$$

halini alır. (3.75) koşullarının yerine getirilmesi halinde çözüm, genel çözüme ait denklikte $P(z) \equiv 0$ alınarak belirlenir.

Şimdi en dıştaki L_0 konturunun var olmaması durumunda çözümün nasıl değiştiğine bakalım.

Bu durumda sonsuzdaki noktanın D^+ 'ya ait olduğunu düşünüyoruz. (Önceki durumda D^- 'ye aitti) $\Phi^+(z)$ fonksiyonunun sonsuzdaki davranışı, önceki durumda sonsuzda yer alan $\Phi^-(z)$ fonksiyonuyla tezat oluşturacak niteliktedir. Önceki durumla, şu anki kabulümüz

arasındaki en temel fark, sıfır indeksine sahip olan fonksiyonun $\prod_{k=1}^m (t - z_k)^{x_k} G(t)$

olmasıdır. Dikkat edilecek olursa, önceki durumda sıfır indeksine sahip fonksiyon yukarıdakine ilave olarak, t^{-x} çarpanını ihtiva ediyordu. Bu çarpanı yok ederek yukarıda yapılan işlemler aynen tekrarlanırsa L_0 konturunun olmaması durumunda problemin çözümünün ne şekilde değiştiği kolayca görülebilir.

4. SÜREKSİZ KATSAYILAR VE AÇIK KONTURLAR İÇİN RIEMANN PROBLEMİ

3. bölümde incelediğimiz problemlerde sınır koşulunda yer alan katsayı daima sürekli idi ve ele aldığımız kontur veya konturlar genellikle kapalı eğrilerden meydana geliyordu. Şimdi bu kuralları fazla uç noktalara çıkmadan biraz esnetmeye çalışalım.

4.1 Süreksiz Katsayılı Problem ve Verilen Sıçramaya Göre Fonksiyon Tayini

Öncelikle en basit durumu ele alalım ve çalışacağımız konturun sadece basit ve kapalı bir eğriden oluştuğunu düşünelim. Sınır koşulları,

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad (4.1)$$

olmak üzere, $G(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının L konturu üzerinde süreksizlik noktaları olarak ifade edeceğimiz $t_1, t_2, \dots, t_m$ noktaları dışındaki her noktada Hölder olduğunu varsayalım. Problemin çözümü kontur üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar sınıfında aranır. Bu demektir ki, çözüm bazı noktalar hariç sürekli olacaktır. Çözüm süreksizlik noktalarının tamamında veya bir kısmında sınırlı olabileceği gibi, hiçbirinde sınırlı olmayabilir. Her zaman olduğu gibi araştırmamıza sıçramayı ifade ederek başlayalım. $G(t)=1$ alırsak sınır koşulları,

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t) \quad (4.2)$$

şeklini alır. $g(t)$ fonksiyonunu süreksizlik yada tekilliği olabileceği gerekçesiyle şu formda yazalım:

$$g(t) = \frac{g^*(t)}{(t - t_k)^\gamma} \quad (\text{Re } \gamma < 1) \quad (4.3)$$

$g^*(t)$, Hölder sınıfındandır. Parçalı analitik fonksiyonunun kontur civarındaki limit değerleri için,

$$\left| \Phi^\pm(t) \right| < \frac{C}{|t - t_k|^\alpha} \quad (\alpha < 1) \quad (4.4)$$

yazılabilir. Sokhotski formüllerine göre problem,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - z} \quad (4.5)$$

ile çözülür. Ancak bu fonksiyonun bazı süreksizlik noktalarına ve $g(t)$ 'nin (4.3)'de verilen yapısı nedeniyle tekilliğe sahip olduğu unutulmamalıdır. Kolayca gösterilebilir ki, problemin çözüm aradığımız sınıf dışında bir çözümü yoktur. (4.2)'yi özel olarak şu hale indirgeyelim::

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 0 \quad (4.6)$$

Bu ilişki gösteriyor ki, $\Phi^+(z)$ ve $\Phi^-(z)$ fonksiyonları tüm düzlemde analitik tek bir fonksiyonu oluşturmaktadırlar. Bu fonksiyon izole edilmiş bazı tekillik noktalarına sahip olabilir. (4.4) gösteriyor ki, bu tekillikler bir kutup olamazlar, sadece ayrı bir dalda yer alan noktalar olabilirler. Sonuç olarak, (4.6) probleminin sadece sıfır çözümü vardır, dolayısıyla (4.2) probleminin çözümü olan (4.5) tektir. Eğer (4.2) problemine, sonsuzda x (indeks) mertebeye sahip kutbu olan fonksiyonlar sınıfında çözüm arasaydık çözüm şu şekilde verilirdi:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{\tau - z} \varphi \tau + P_x(z) \quad (4.7)$$

Burada $P_x(z)$ keyfi çarpanlara sahip mertebesi x olan bir polinomdur. (4.1) probleminin çözümü, daha önce 3.bölümde klasik hali verilen problem tipine bu problemin indirgenmesi suretiyle elde edilecektir. Bu yöntem için, tıpkı $G(t)$ fonksiyonu gibi bazı t_k noktalarında süreksizliğe sahip yardımcı fonksiyonlara ihtiyacımız olacak. Şimdi onları inceleyelim.

z_0 , D^+ bölgesine ait bir nokta, t_1 kontur üzerindeki bir nokta ve $\gamma = \alpha + i\beta$ olacak şekilde kompleks bir sayıdır. Buna göre aşağıdaki iki analitik fonksiyonu göz önüne alalım:

$$(z - z_0)^\gamma, (z - t_1)^\gamma$$

Bu fonksiyonlardan yararlanarak, D^+ 'da analitik $w^+(z)$ ve D^- 'de analitik $w^-(z)$ fonksiyonlarını oluşturalım.

$$w^+(z) = (z - t_1)^\gamma, \quad w^-(z) = \left(\frac{z - t_1}{z - z_0} \right)^\gamma \quad (4.8)$$

Kontur üzerinde her iki fonksiyonda t_1 noktası hariç sürekli ve analitiktir. Bu fonksiyonların t_1 noktasındaki davranışı ise γ 'nın değerine bağlıdır. t_1 dışındaki noktalar için sınır değerlerinin oranı,

$$\Omega(t) = \frac{w^-(t)}{w^+(t)} = (t - z_0)^{-\gamma} \quad (4.9)$$

şeklinde yazılabilir. t_1 noktasında kuvvet fonksiyonunun özelliklerinden hareketle,

$$\frac{\Omega(t_1 - 0)}{\Omega(t_1 + 0)} = e^{-2i\pi\gamma} \quad (4.10)$$

bulunur. Şimdi $w^+(z)$ ve $w^-(z)$ fonksiyonlarının t_1 civarındaki davranışını inceleyelim.

$z - t_1 = re^{i\theta}$ olarak alırsak, (4.8)'deki $w^+(z)$ 'yi şu şekilde yazabiliriz:

$$(z - t_1)^\gamma = e^{\gamma \ln(z - t_1)} = r^\alpha e^{-\beta\theta} e^{i(\beta \ln r + \alpha\theta)} \quad (4.11)$$

Bu ifadeye göre, $\alpha \neq 0$ olması halinde $(z - t_1)^\gamma$ fonksiyonunun mertebesi sadece α 'ya bağlıdır. $\alpha > 0$ olması halinde ise mertebesi $+\alpha$ 'ya eşit sıfıra sahiptir. $\alpha < 0$ durumunda ise $-\alpha$ mertebesinde sonsuza sahiptir. Son olarak $\alpha = 0$ durumunda sınırlıdır, ancak herhangi bir limit değerine yaklaşmaz.

4.2 Gakhov İndirgeme Metodu ve Süreksiz Katsayılı Problemin Çözümü

En basit durumdan yola çıkalım.

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \quad (4.12)$$

homojen probleminin katsayısı olan $G(t)$, sadece t_1 noktasında süreksizliğe sahip olsun.

$$\gamma = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{G(t_1 - 0)}{G(t_1 + 0)} \quad (4.13)$$

olmak üzere (4.8)'de verilen $w^+(z)$ ve $w^-(z)$ fonksiyonlarını oluşturalım. Yeni bilinmeyen fonksiyonlar $\Phi_1^\pm(z)$ olmak üzere,

$$\Phi^\pm(z) = w^\pm(z)\Phi_1^\pm(z) \quad (4.14)$$

yazalım. Sınır koşulları şu formda yazılabilir:

$$G_1(t) = \frac{w^-(t)}{w^+(t)} G(t) \text{ olacak şekilde,}$$

$$\Phi_1^+(t) = G_1(t)\Phi_1^-(t) \quad (4.15)$$

Yeni katsayı için,

$$G_1(t) = \Omega(t)G(t) = (t - z_0)^{-\gamma} G(t) \quad (4.16)$$

yazılabilir. (4.10) ve (4.13)'ten:

$$\frac{G_1(t_1 - 0)}{G_1(t_1 + 0)} = \frac{\Omega(t_1 - 0)}{\Omega(t_1 + 0)} \frac{G(t_1 - 0)}{G(t_1 + 0)} = e^{-2i\pi\gamma} \frac{G(t_1 - 0)}{G(t_1 + 0)} = 1 \quad (4.17)$$

bulunur. Yeni $G_1(t)$ katsayısı t_1 noktasını da içerecek şekilde L konturu üzerinde süreklidir. Böylelikle süreksiz katsayılı (4.12) problemi, sürekli katsayılı (4.15) problemine indirgenmiştir. (4.15)'in ifade ettiği problem bizim daha önceki kısımlarda incelediğimiz sıradan bir Riemann sınır değer problemidir. Şimdi problemin indeksini inceleyelim.

(4.12) problemine ait çözümün t_1 süreksizlik noktasındaki davranışı, (4.14)'ten görüldüğü gibi $w^+(z)$ ve $w^-(z)$ fonksiyonlarının davranışına bağlıdır. $G(t)$ 'nin L konturu üzerindeki herhangi bir kırılmada argümanında meydana gelen artışı θ ile gösterirsek, indeksi şu şekilde hesaplayabiliriz:

$$\text{Sınırlı çözümlerin oluşturduğu sınıf için : } x = \left[\frac{\theta}{2\pi} \right] \quad (4.18)$$

$$t_1 \text{ noktası yakınındaki sınırsız çözümlerin oluşturduğu sınıf için: } x = \left[\frac{\theta}{2\pi} \right] + 1 \quad (4.19)$$

Burada $[x]$ 'in sayı teorisinde yer alan x 'i aşmayan en büyük tamsayıyı ifade ettiğini hatırlatalım. Şimdi (4.15) probleminin indeksini verelim:

$$\text{Ind} G_1(t) = \frac{1}{2i\pi} \{\ln G_1(t)\}_L = \frac{1}{2i\pi} \ln \left(\frac{G(t_1 - 0)}{G(t_1 + 0)} e^{-2i\pi\gamma} \right) = \frac{1}{2i\pi} \ln e^{2i\pi x} = x \quad (4.20)$$

Yukarıdaki ifadelerden görüldüğü gibi problemin indeksi çözüm aranan sınıfa göre değişmekte, sınırsız çözümlerin oluşturduğu sınıfa ait indeks, sınırlı çözümlerin oluşturduğu sınıfa ait indeksten büyük olmaktadır. İndeks kavramını da açıkladığımıza göre artık problemin çözümüne geçebiliriz.

4.2.1 Homojen Problemin Çözümü

$G(t)$ katsayısının $t_1, t_2, \dots, t_l$ noktalarında süreksizliğe sahip olduğunu varsayalım. L konturunu t_k ve t_{k+1} süreksizlik noktaları arasında parçalayalım. Öncelikle,

$$\frac{G(t_k - 0)}{G(t_k + 0)} = A_k = \ell_k e^{i\theta_k} \quad (k = 1, 2, \dots, l) \quad (4.21)$$

olduğunu biliyoruz. Buradaki θ_k , t_k süreksizlik noktasında argümandaki sıçramayı ifade eder.

$$\gamma_k = \frac{1}{2i\pi} \ln A_k = \frac{\theta_k}{2\pi} - x_k - i \frac{\ln \ell_k}{2\pi} \quad (4.22)$$

olmak üzere (x_k , (4.18)-(4.19) tarafından hesaplanır),

$$\Phi^+(z) = \prod_{k=1}^l (z - t_k)^{\gamma_k} \Phi_1^+(z), \quad \Phi^-(z) = \prod_{k=1}^l \left(\frac{z - t_k}{z - z_0} \right)^{\gamma_k} \Phi_1^-(z) \quad (4.23)$$

olur. Buna göre (4.12)'deki sınır koşulları,

$$\Phi_1^+(t) = \prod_{k=1}^l (t - z_0)^{-\gamma_k} G(t) \Phi_1^-(t) \quad (4.24)$$

halini alır. Buradaki $(t - z_0)^{-\gamma_k}$ fonksiyonu t_k noktası üzerinden geçerken bir sıçrama göstermektedir. (4.24) aslında farklı katsayılı bir problem oluşturur ve bu katsayı orijinal problemdekinin aksine süreklidir:

$$G_1(t) = \prod_{k=1}^l (t - z_0)^{-\gamma_k} G(t) \quad (4.25)$$

Böylelikle sürekli katsayıya sahip klasik haldeki Riemann sınır değer problemine ulaşılmış olur. Yeni katsayının (aynı zamanda yeni problemin) indeksi kolayca hesaplanabilir. $G_1(t)$ 'nin tüm kontur üzerindeki argüman artışını, süreksizlik noktaları arasındaki artışın bir toplamı olarak ele alırsak,

$$\frac{(t_k - 0 - z_0)^{\gamma_k}}{(t_k + 0 - z_0)^{\gamma_k}} = e^{2i\pi\gamma_k} \quad \text{ve buradan,}$$

$$\begin{aligned}
IndG_1(t) &= \frac{1}{2i\pi} \{\ln G_1(t)\}_L = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=1}^l \{\ln G_1(t)\}_{t_k}^{t_{k-1}} \\
&= \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=1}^l \ln \left[\frac{G(t_k - 0) (t_k - 0 - z_o)^{-\gamma_k}}{G(t_k + 0) (t_k + 0 - z_o)^{-\gamma_k}} \right] = x_1 + x_2 + \dots + x_l \quad (4.26)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca not ediyoruz ki, çözüm sınırlı fonksiyonlar sınıfında aranıyor ise,

$$x_k = \left\lfloor \frac{\theta_k}{2\pi} \right\rfloor \quad (4.27)$$

sınırsız integrallenebilir fonksiyonlar sınıfında aranıyor ise,

$$x_k = \left\lfloor \frac{\theta_k}{2\pi} \right\rfloor + 1 \quad (4.28)$$

eşitlikleri geçerlidir. Buna göre homojen problemin çözümü, öncelikle (4.24)'teki klasik problemin çözülmesi (bu çözümün nasıl yapılacağını 3. bölümde ele aldığımız için burada tekrarlamıyoruz), buradan bulunacak çözümün (4.23)'te yerine yazılması ile bulunacaktır.

4.2.2 Homojen Olmayan Problemin Çözümü

Problemin konulduğu konturu ve sınır şartlarındaki katsayıyı önceki bölümde homojen problem için belirlediğimiz şekliyle aynen alıyoruz. Bütün bunların yanı sıra, $g(t)$ fonksiyonu problemin serbest terimini ifade edecek şekilde Hölder şartını sağlıyor olsun. Buna göre problemi,

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad (4.29)$$

sınır şartlı ile ifade edelim. (4.23)'ü sağlayacak şekilde yine $\Phi_1^+(z)$ ve $\Phi_1^-(z)$ fonksiyonlarını göz önüne alarak sınır koşullarını şu şekilde indirgeyelim:

$$\Phi_1^+(t) = \prod_{k=1}^l (t - z_0)^{-\gamma_k} G(t)\Phi_1^-(t) + \prod_{k=1}^l (t - t_k)^{-\gamma_k} g(t) \quad (4.30)$$

Bu yeni sınır şartında yer alan $\prod_{k=1}^l (t - z_0)^{-\gamma_k} G(t)$ katsayı fonksiyonunu 3.bölümde klasik

problemin çözümünü araştırırken yaptığımıza benzer şekilde, kanonik fonksiyonların oranı şeklinde yazıp, sınır koşullarını yeniden düzenlersek,

$$\frac{\Phi_1^+(t)}{X_1^+(t)} - \frac{\Phi_1^-(t)}{X_1^-(t)} = \frac{\prod_{k=1}^l (t-t_k)^{-\gamma_k} g(t)}{X_1^+(t)} \quad (4.31)$$

denkliğini elde ederiz. (4.7)'de ifade ettiğimiz ilişkiye dayanarak çözüm,

$$\frac{\Phi_1(z)}{X_1(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^l (\tau-t_k)^{-\gamma_k} g(\tau)}{X_1^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-z} + P_x(z) \quad (4.32)$$

formülü ile verilir. Eğer $x < 0$ ise (4.32) formülü,

$$\frac{\Phi_1(z)}{X_1(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^l (\tau-t_k)^{-\gamma_k} g(\tau)}{X_1^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-z} \quad (4.33)$$

şeklini alır. Buna göre (4.23)'te yer alan çözüm fonksiyonları

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+(z) &= \prod_{k=1}^l (z-t_k)^{\gamma_k} X_1^+(z) [\psi^+(z) + P_x(z)] \\ \Phi^-(z) &= \prod_{k=1}^l \left(\frac{z-t_k}{z-z_0} \right)^{\gamma_k} X_1^-(z) [\psi^-(z) + P_x(z)] \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

halini alır. Burada kanonik fonksiyon ve özel çözüme ait denklikleri de kısaca ifade edelim.

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \left[(\tau-z_0)^{-x} \prod_{k=1}^l (\tau-z_0)^{-\gamma_k} G(\tau) \right]}{\tau-z} d\tau \quad (4.35)$$

olmak üzere kanonik fonksiyon,

$$X_1^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} \quad , \quad X_1^-(z) = (z-z_0)^{-x} e^{\Gamma^-(z)} \quad (4.36)$$

denklikleri ile verilir. Özel çözüm ise,

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^l (\tau - t_k)^{-\gamma_k} g(\tau)}{X_1^+(\tau)(\tau - z)} d\tau \quad (4.37)$$

şeklindedir. Verilen problemde sınır koşullarına ilave olarak $\Phi^-(\infty) = 0$ koşulu mevcut ise, her zaman olduğu gibi keyfi katsayılı polinomdan oluşan terimde değişiklik olur ve (4.34) çözümü şu şekle gelir:

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+(z) &= \prod_{k=1}^l (z - t_k)^{\gamma_k} X_1^+(z) [\psi^+(z) + P_{x-1}(z)] \\ \Phi^-(z) &= \prod_{k=1}^l \left(\frac{z - t_k}{z - z_0} \right)^{\gamma_k} X_1^-(z) [\psi^-(z) + P_{x-1}(z)] \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Bütün bu işlemlerden sonra sonuç niteliğindeki aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.2.2.1 : x indeksi ifade etmek üzere, Riemann probleminin çözüm aranan sınıfta indeksi pozitif ise, homojen olmayan problemin genel çözümü x+1 adet keyfi sabite lineer bağımlıdır ve (4.34) formülü ile bulunur. Eğer $\Phi^-(\infty) = 0$ koşulu mevcut ise bu kez çözüm formülü (4.38)'dir. $x \leq 0$ ise homojen problem çözüm aranan sınıfta çözümsüzdür; homojen olmayan problemin çözümü ise aşağıdaki $-x$ adet koşulun karşılanmasına bağlıdır:

$$\int_L \frac{\prod_{k=1}^l (\tau - t_k)^{-\gamma_k} g(\tau)}{X_1^+(\tau)} \tau^{j-1} d\tau = 0 \quad (j=1,2,\dots,-x) \quad (4.39)$$

Bu koşulların sağlanması durumunda ise problemin çözümü tektir ve (4.34) denkliğinde $P_x(z) \equiv 0$ yazılmak suretiyle bulunur.

Bu teoremi verdikten sonra (4.34) çözümü ile ilgili bir konuya açıklık getirelim. Bu denklik keyfi z_0 noktasını içermektedir. Ancak genel çözüm, bu keyfi noktanın seçiminden tamamen bağımsızdır. Bu durum problemin serbest terimine ait süreksizlik noktaları için çeşitli durumlar incelenerek ispatlanabilir. (aytıntılı bilgi için Gakhov(1966) incelenebilir.)

4.3 Açık Konturlar İçin Riemann Problemi

L konturunun $L_1, L_2, \dots, L_m$ olacak şekilde m adet basit düzgün ve kesişmeyen eğrilerden meydana geldiğini varsayalım. Bu eğrilerin bitim noktalarını ise a_k ve b_k noktaları ile ifade edelim (pozitif yön a_k noktasından b_k noktasına doğrudur). $G(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları L üzerinde tanımlı ve Hölder şartını sağlamakta olan fonksiyonlardır. Ayrıca her yerde $G(t) \neq 0$ olacak şekilde alınmıştır. $\Phi(z)$, L konturunun üzerindeki noktalar hariç tüm düzlemde analitik bir fonksiyondur ve L 'ye sol ve sağ yandan yaklaşırken oluşan sınır değerleri $\Phi^+(t)$ ve $\Phi^-(t)$ aşağıdaki koşulu sağlayan integrallenebilir fonksiyonlardır.

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad (4.40)$$

Bu şartlar altında $\Phi(z)$ 'nin bulunması problemi bir Riemann problemidir. Bu probleme tam manasıyla açıklık getirmiş olan matematikçiler F.D.Gakhov ve N.I. Muskhelishvili 'dir. Şimdi sırayla bu yazarların yöntemlerini inceleyelim.

4.3.1 Gakhov Metodu

Açık L konturunu $L'_1, L'_2, \dots, L'_m$ şeklindeki m adet keyfî eğri ile kapatıp, L konturundan tek bir kapalı C eğrisi elde edelim. Yani, $L_1 + L'_1 + \dots + L_m + L'_m = C$ olsun.



Şekil 4.1 Açık olarak verilen konturlardan kapalı C eğrisinin elde edilmesi

Daha önce süreksiz katsayılarla çalışırken Gakhov'un indirgeme yöntemini kullanmıştık. Burada da ona benzer bir yol izlenmektedir. Açıktır ki, ilave eğriler üzerinde sınır koşulları $\Phi^+(t) = \Phi^-(t)$ olur. Dolayısıyla (4.40) problemi aşağıdaki kapalı kontur için verilen probleme indirgenebilir:

$$\Phi^+(t) = G_1(t)\Phi^-(t) + g_1(t) \quad (4.41)$$

Burada,

$$\left. \begin{array}{l} L_k \text{ üzerinde, } G_1(t)=G(t) \quad , \quad g_1(t)=g(t) \\ L'_k \text{ üzerinde } G_1(t)=1 \quad , \quad g_1(t)=0 \quad (k=1,2,\dots,m) \end{array} \right\} \quad (4.42)$$

olur. Artık çözüm bir önceki bölümde süreksiz katsayılar için verilen teoremin bir uygulaması haline gelmiştir. Δ_k , $\arg G(t)$ 'nin L_k üzerindeki değişimini ifade etmek üzere,

$$G(a_k) = \ell_k e^{i\theta_k} \text{ ve } G(b_k) = \ell'_k e^{i(\theta_k + \Delta_k)} \quad (4.43)$$

olacak şekilde alırsak,

$$\left. \begin{array}{l} G_1(a_k-0)=1 \quad , \quad G_1(a_k+0)=G(a_k)=\ell_k e^{i\theta_k} \\ G_1(b_k-0)=G(b_k)=\ell'_k e^{i(\theta_k + \Delta_k)} \quad , \quad G_1(b_k+0)=1 \\ \frac{G_1(a_k-0)}{G_1(a_k+0)} = \frac{1}{\ell_k} e^{-i\theta_k} \quad , \quad \frac{G_1(b_k-0)}{G_1(b_k+0)} = \ell'_k e^{i(\theta_k + \Delta_k)} \end{array} \right\} \quad (4.44)$$

denkliklerine ulaşılır. θ_k 'nin konturun a_k başlangıç noktasındaki değeri, eğer çözümün a_k noktasında sınırlı olma şartı varsa

$$-2\pi < \theta_k \leq 0 \quad (4.45)$$

aralığında değişebilir. Eğer çözümün a_k noktasında sınırsız olma şartı varsa bu aralık,

$$0 < \theta_k < 2\pi \quad (4.46)$$

şeklinde değişir.

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_k = \frac{1}{2\pi i} \ln\left(\frac{1}{\ell_k} e^{-i\theta_k}\right) = -\frac{\theta_k}{2\pi} + i \frac{\ln \ell_k}{2\pi} \\ \gamma'_k = \frac{1}{2\pi i} \ln(\ell'_k e^{i(\theta_k + \Delta_k)}) = \frac{\theta_k + \Delta_k}{2\pi} - x_k = i \frac{\ln \ell'_k}{2\pi} \end{array} \right\} \quad (4.47)$$

Denkliklerinde indeksi göz önüne alalım. İndeks, eğer çözüm b_k bitim noktasında sınırlı ise,

$$x_k = \left[\frac{\theta_k + \Delta_k}{2\pi} \right] \quad (4.48)$$

değerine, eğer çözüm aynı bitim noktasında sınırlı değil ise,

$$x_k = \left[\frac{\theta_k + \Delta_k}{2\pi} \right] + 1 \quad (4.49)$$

değerine eşit bir tamsayıdır. Problemin indeksi ise,

$$x = \sum_{k=1}^m x_k \quad (4.50)$$

eşitliği ile hesaplanır. Görüldüğü gibi indeks b_k bitim noktasındaki davranışa göre değişmekte, buna karşılık indeks bağıntılarında kullanılan değerlerin de a_k noktasında (4.45) ve (4.46)'da verilen şartları yerine getirmeleri gerekmektedir. Bu açıklamadan sonra,

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+(z) &= \prod_{k=1}^m (z - a_k)^{\gamma_k} (z - b_k)^{\gamma'_k} \Phi_1^+(z) \\ \Phi^-(z) &= \prod_{k=1}^m \left(\frac{z - a_k}{z - z_0} \right)^{\gamma_k} \left(\frac{z - b_k}{z - z_0} \right)^{\gamma'_k} \Phi_1^-(z) \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

olacak şekilde, C kapalı eğrisi üzerinde sürekli katsayıya sahip aşağıdaki problem elde edilir:

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(t) &= \prod_{k=1}^m (t - z_0)^{-\gamma_k} (t - z_0)^{-\gamma'_k} G_1(t) \Phi_1^-(t) + \\ &\quad + \prod_{k=1}^m (t - a_k)^{-\gamma_k} (t - b_k)^{-\gamma'_k} g_1(t) \end{aligned} \quad (4.52)$$

(4.52) klasik tipte bir problem olduğundan daha önce açıklanan yollarla çözülebilir, bu nedenle burada tekrar değinmiyoruz. Orijinal problemin çözümü ise (4.52)'ten bulunacak sonuçların (4.51)'de yerine yazılması ile elde edilecektir. Gakhov'un bu yöntemi en çok aşağıdaki problemde işe yaramaktadır:

L konturunun m adet açık eğriden meydana geldiğini düşünelim. $G(t) = -1$ olacak şekilde sınır koşulları

$$\Phi^+(t) = -\Phi^-(t) + g(t) \quad (4.53)$$

formundadır. Buna göre sınır koşullarını önce kapalı kontur için yazalım:

$$\left. \begin{array}{l} \Phi^+(t) = G_1(t)\Phi^-(t) + g_1(t) \\ L \text{ üzerinde } G_1(t) = -1, \quad g_1(t) = g(t) \\ L' \text{ üzerinde } G_1(t) = 1, \quad g_1(t) = 0 \end{array} \right\} \quad (4.54)$$

İlk olarak çözümü en geniş sınıf olan bitim noktalarında sınırsız olan fonksiyonlar arasında arayalım. Bu durumda (4.44) ve (4.47)'den hareketle,

$$G_1(a_k-0)=1, \quad G_1(a_k+0)=-1 = e^{i\pi}$$

$$G_1(b_k-0)=-1 = e^{i\pi}, \quad G_1(b_k+0)=1$$

$$\frac{G_1(a_k-0)}{G_1(a_k+0)} = e^{-i\pi}, \quad \frac{G_1(b_k-0)}{G_1(b_k+0)} = e^{i\pi}$$

$$\gamma_k = \frac{1}{2i\pi} \ln e^{-i\pi} = -\frac{1}{2}$$

$\theta_k = \pi$ ve $\Delta_k = 0$ alınır ise, $x_k = [1/2] + 1 = 1$ ve $\gamma_k' = -1/2$ bulunur. Buna göre indeks,

$$x = \sum_{k=1}^m x_k = m \quad (4.55)$$

olarak bulunur. (4.51) ve (4.52)'den hareketle kapalı bir kontur üzerinde sürekli katsayılı problem elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(t) = & \prod_{k=1}^m (t-z_o)^{1/2} (t-z_o)^{1/2} G_1(t) \Phi_1^-(t) + \\ & + \prod_{k=1}^m (t-a_k)^{1/2} (t-b_k)^{1/2} g_1(t) \end{aligned} \quad (4.56)$$

$G_1(t)$, a_k ve b_k noktalarında işaret değiştirmektedir. Aynı durum $(t - z_0)^{1/2}$ içinde geçerlidir. Buna istinaden,

$$\prod_{k=1}^m (t - z_o)^{1/2} (t - z_o)^{1/2} G_1(t) = (t - z_o)^m$$

yazabiliriz. Daha sonra yapacağımız işlemlerde denklikleri basitçe gösterebilmek için aşağıdaki notasyonları belirliyoruz:

$$\left. \begin{aligned} \prod_{k=1}^m (z - a_k)^{1/2} (z - b_k)^{1/2} &= R(z) \\ \prod_{k=1}^m (z - a_k)^{1/2} &= R_a(z) \quad , \quad \prod_{k=1}^m (z - b_k)^{1/2} = R_b(z) \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

Buna göre (4.56) şu şekilde yazılabilir:

$$\Phi_1^+(t) = (t - z_o)^m \Phi_1^-(t) + R(t)g_1(t) \quad (4.58)$$

Problemin indeksi $x = m$ olduğundan (4.35), (4.36) ve (4.37)'den hareketle,

$$X_1^+(z) = 1 \quad \text{ve} \quad X_1^-(z) = (z - z_0)^{-m} \quad (4.59)$$

bulunur. (4.34)'te verilen formül gereğince, tüm bitim noktalarında sınırsız probleme ait çözüm şu şekilde verilebilir:

$$\Phi^+(z) = \Phi^-(z) = \Phi(z) = \frac{1}{R(z)} [\psi(z) + P_m(z)] \quad , \quad \psi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{R(\tau)g(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (4.60)$$

Genelde uygulamalarda verilen $\Phi(\infty) = 0$ ilave koşulu mevcut olursa (4.60) bağıntılarında yer alan $P_m(z)$ terimi, $P_{m-1}(z)$ ile değiştirilir. Şimdi çözüm aradığımız sınıfı biraz daraltalım. Çözümün a_k noktalarında sınırlı, b_k noktalarında ise sınırsız olduğu durum için:

$$\Phi(z) = \frac{R_a(z)}{R_b(z)} \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{R_b(\tau) g(\tau)}{R_a(\tau) \tau - z} d\tau \quad (4.61)$$

Çözümün tüm bitim noktalarında sınırlı olduğu durum için:

$$\Phi(z) = \frac{R(z)}{2i\pi} \int_L \frac{g(\tau)}{R(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} \quad (4.62)$$

denklikleri verilebilir. $x = -m$ olması durumunda aşağıdaki m adet koşulun ilave olarak sağlanması gereklidir:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{R(\tau)} \tau^{j-1} d\tau = 0 \quad (j=1,2,\dots,m) \quad (4.63)$$

Şimdi incelediğimiz problem için gerçeğe en yakın çözümü yazmaya çalışalım. a ve b harfleriyle gösterdiğimiz tüm bitim noktalarını (a 'yı başlangıç kabul edip b 'de bitiş olduğunu varsayıyor idik) sadece c ile gösterelim. Bu durumda $c_1, c_2, \dots, c_{2m}$ şeklinde bu noktaların tamamını ifade etmiş olalım. Bu noktaların bir bölümünde çözümün sınırlı, geri kalan noktalarda ise sınırsız olduğunu biliyoruz. İşte çözümün sınırlı olduğu noktaları baştaki $c_1, c_2, \dots, c_p$ noktaları olarak ele alalım. Geriye kalan noktalar ise bu durumda, $c_{p+1}, c_{p+2}, \dots, c_{2m}$ ile gösterilir. İndeksin değeri $(m-p)$ 'dir.

$$R_1(z) = \sqrt{\left(\prod_{k=1}^p (z - c_k) \right)} \quad R_2(z) = \sqrt{\left(\prod_{k=p+1}^{2m} (z - c_k) \right)} \quad (4.64)$$

olmak üzere çözüm,

$$\Phi(z) = \frac{R_1(z)}{R_2(z)} \left[\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{R_2(\tau)}{R_1(\tau)} \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau + P_{m-p-1}(z) \right] \quad (4.65)$$

formundadır. Eğer $p \geq m$ ise (4.65) denkliğinde $P_{m-p-1} \equiv 0$ alınır. Ayrıca $p > m$ durumunda çözüm aşağıdaki koşulların sağlanması halinde mevcuttur:

$$\int_L \frac{R_2(\tau)}{R_1(\tau)} g(\tau) \tau^{j-1} d\tau = 0 \quad (j=1,2,\dots,p-m) \quad (4.66)$$

4.3.2 Muskhelishvili Metodu

Bu ana bölümde şu ana kadar incelediğimiz süreksiz katsayılı veya açık kontur üzerinde tanımlı Riemann sınır değer problemleri Gakhov'un "problemin sürekli katsayılı bir probleme

indirgenmesi” olarak özetlenebilecek yöntemleri ile ele alındı. Literatürde Riemann probleminin tam çözümü ile uğraşmış nadir matematikçilerden biri olan Muskhelishvili’nin de bu tip problemler için “Riemann probleminin direkt çözümü” olarak özetlenebilecek bir metodu mevcuttur. Şimdi bu metot üzerinde duralım. Ayrıca hatırlatıyoruz ki, Muskhelishvili metodu 3.bölümde ele alınan klasik problemin çözümünde de kullanılabilir.

Homojen problemin sınır koşulu,

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \quad (4.67)$$

olmak üzere bu problemin çözümünün kapalı formda şu şekilde verilebildiğini biliyoruz:

$$\Phi(z) = e^{\Gamma(z)} \quad , \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (4.68)$$

Bu çözüm, (4.67)’deki sınır koşulunu kontur açık olduğundan bitim noktaları haricindeki her yerde sağlar. $\Phi(z)$ ’nin bitim noktalarındaki davranışı, $\Gamma_k(z)$ ve $\Gamma_k^*(z)$ sırasıyla a_k ve b_k noktaları civarında sınırlı fonksiyonlar olmak üzere,

$$e^{\Gamma(z)} = (z - a_k)^{-\frac{\ln G(a_k)}{2\pi i}} e^{\Gamma_k(z)} = (z - a_k)^{-\frac{\theta_k}{2\pi} + i\frac{\ln \ell_k}{2\pi}} e^{\Gamma_k(z)} \quad (4.69)$$

$$e^{\Gamma(z)} = (z - b_k)^{\frac{\ln G(b_k)}{2\pi i}} e^{\Gamma_k^*(z)} = (z - b_k)^{\frac{\theta_k + \Delta_k}{2\pi} - i\frac{\ln \ell_k^*}{2\pi}} e^{\Gamma_k^*(z)} \quad (4.70)$$

denklikleri ile verilebilir. (4.45) ve (4.46)’ya göre $G(t)$ ’nin a_k başlangıç noktasındaki argümanının değeri ve (4.48) ile (4.49) denkliklerini göz önüne alalım.

$$X(z) = \prod_{k=1}^m (z - b_k)^{-x_k} e^{\Gamma(z)} \quad (4.71)$$

şeklinde yazılacak fonksiyon hem sınır koşullarını sağlar hem de konturun kesim noktaları için verilen çözüm sınıfına aittir. $X(z)$ fonksiyonu bilindiği gibi problemin kanonik fonksiyonudur ve $\Gamma(\infty) = 0$ durumunda bu fonksiyonun sonsuzdaki mertebesi,

$$x = \sum_{k=1}^m x_k \quad (4.72)$$

ile hesaplanır. x , bilindiği gibi problemin indeksidir. Bundan sonrasında çözüm klasik problemi incelerken verdiğimiz yolla aranır. Yani, $G(t)=X^+(t) / X^-(t)$ olarak almak suretiyle sınır koşulları,

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} \quad (4.73)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $x \geq 0$ için,

$$\Phi(z) = X(z)P_x(z) \quad (4.74)$$

olarak homojen problemin genel çözümü yazılmış olur. Eğer verilen problemde sıradan sınır koşulunun yanı sıra $\Phi(\infty)=0$ ilave koşulu mevcut ise P_x polinomu P_{x-1} polinomu ile değiştirilmelidir. $\Phi(\infty)=0$ ilave koşulu altında klasik haldeki problemde takip ettiğimize benzer yolla homojen olmayan problemin çözümü,

$$\Phi(z) = X(z)[\psi(z) + P_{x-1}(z)] \quad (4.75)$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} \quad (4.76)$$

olarak ortaya çıkar. $x < 0$ olması durumunda problemin çözülebilirliği,

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{j-1} d\tau = 0 \quad (j=1,2,\dots,-x) \quad (4.77)$$

koşullarının sağlanmasına bağlıdır.

Muskhelishvili metoduyla süreksiz katsayılı Riemann problemine de bir çözüm getirilebilir. Şöyle ki, problemin katsayısının süreksiz olduğu bölgelere göre L konturu parçalanabilir ve bağımsız eğriler oluşur. Daha sonra problem açık kontur için verilmiş bir Riemann problemi gibi yukarıda anlattığımıza benzer bir yolla çözülür. Bu şekilde çözüm yapılmaya çalışılırsa görülecektir ki, homojen olmayan problemin çözüm formülasyonu tamamen aynıdır. Homojen probleme ait kanonik fonksiyonun hesabında ise aşağıdaki değişiklik yapılabilir.

t_1 noktası, problemin katsayısına ait bir süreksizlik noktası olmak üzere problemin kanonik fonksiyonu,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad \text{için,}$$

$$X(z) = (z - t_1)^{-x} e^{\Gamma(z)} \quad (4.78)$$

şeklinde verilebilir. Bilindiği gibi x , probleme ait indeksi ifade etmektedir.

Açık kontur veya süreksiz katsayı ile verilen Riemann problemlerinin çözümünde kullanılan bu metodu değerlendirebilmek için çalışmamızın son bölümünde bir problem çözeceğiz.

5. RIEMANN PROBLEMİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ ÇALIŞMALARI

Hölder sınıfından katsayı ve serbest terime sahip olma ve üzerinde çalışılan konturun genellikle düzgün sonlu sayıdaki kapalı eğrilerden oluşması, 3.bölümde ele aldığımız klasik Riemann probleminin temel özellikleri idi. Daha sonra çalıştığımız kontur yada katsayıya ait bu özellikleri esnetmeye çalıştık ve 4. bölüm ortaya çıktı. Şimdi biraz daha ileriye giderek, Riemann problemine ait genelleştirmeleri ele alacağız.

5.1 Harita Fonksiyonu ile Türetilmiş Riemann Problemi

L , basit kapalı bir kontur olarak kompleks düzlemi D^+ iç bölgeyi, D^- ise dış bölgeyi gösterecek şekilde iki ayrı kısma ayırıyor olsun. $G(t)$ ve $g(t)$, L üzerinde tanımlı Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlar ve $\alpha(t)$, L konturu ile arasında bire bir haritalandırma işlevi gören (map function) ve türevi $\alpha'(t)$, Hölder koşulunu sağlayıp hiçbir yerde sıfırlanmayan bir fonksiyon olsun. Limit değerleri L üzerinde sürekli ve

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi^-(t) \quad (\text{homojen problem}) \quad (5.1)$$

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad (\text{homojen olmayan problem}) \quad (5.2)$$

şartlarından birini sağlayan D^+ 'da analitik $\Phi^+(z)$ ve D^- 'de analitik $\Phi^-(z)$ fonksiyonlarının bulunması problemi Riemann sınır değer probleminin genelleştirmelerinden biridir. $\alpha(t)$ 'nin D^+ 'da analitik bir fonksiyonun sınır değeri olması durumunda, yukarıda ifade edilen problem, klasik haldeki Riemann problemine indirgenebilir. Aksi durumda indirgeme işleminin başarısı hakkında kesin bir şey söyleyemeyiz. Her zaman olduğu gibi önce sıçrama problemini ifade ederek incelememize başlayalım.

5.1.1 Sıçraması Sıfır Olan Problem ve Fredholm İntegral Denklemi

Parçalı analitik $\Phi(z)$ fonksiyonunun, $\Phi^-(\infty) = 0$ ilave koşulu altında ve kontur üzerinde

$$\Phi^+[\alpha(t)] - \Phi^-(t) = 0 \quad (5.3)$$

sınır koşulunu sağlayacak şekilde tespit edilmesi problemidir. Bu problemin çözümü klasik haldeki kadar kolay olmayacaktır. Öncelikle aşağıdaki gibi iki analitik fonksiyon alalım ve Cauchy tipte integrallerin ağırlıklarını hedef fonksiyonlar olarak seçelim:

$$\psi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^-(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad \psi^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (5.4)$$

Sokhotski formülleri uygulanarak kontur üzerinde (5.4)'e ait sınır değerleri şu şekilde bulunur:

$$\psi^+(t) = \frac{1}{2} \Phi^-(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^-(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0 \quad (5.5)$$

$$\psi^-(t) = -\frac{1}{2} \Phi^+(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0 \quad (5.6)$$

(5.5.) ve (5.6)'yı kullanarak sadece $\Phi^-(t)$ için bir integral denklemi ortaya çıkarabiliriz:

$$\begin{aligned} \psi^+(t) - \psi^-[\alpha(t)] &= \frac{1}{2} \{ \Phi^-(t) + \Phi^+[\alpha(t)] \} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^-(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau - \alpha(t)} d\tau = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

(5.7) eşitliğinden $\Phi^+(t)$ fonksiyonunun yok edilebilmesi için sınır koşullarını göz önüne alarak ikinci integralde değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\psi^+(t) - \psi^-[\alpha(t)] \equiv \Phi^-(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right] \Phi^-(\tau) d\tau = 0 \quad (5.8)$$

elde edilir. (5.8) homojen bir Fredholm integral denklemidir. Bu eşitliği kanıtlamak için,

$$K(t, \tau) = \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t} \quad (5.9)$$

şeklinde denklemin çekirdeği alınır. Bu çekirdek(kernel) $\tau = t$ noktasında mertebesi birden küçük tekillığe sahiptir. Açıkta ki,

$$\alpha(t) - \alpha(\tau) = \int_{\tau}^t \alpha'(u) du \quad \alpha'(\tau)(t - \tau) = \int_{\tau}^t \alpha'(\tau) du$$

olduğundan,

$$\alpha(t) - \alpha(\tau) - \alpha'(\tau)(t - \tau) = \int_{\tau}^t [\alpha'(u) - \alpha'(\tau)] du \quad (5.10)$$

bulunur. Cauchy tipi integrallerin limit değerlerinden bildiğimiz gibi, $|u - \tau| = r$ iken $|du| < m|dr|$ yazılabilir. Hölder koşulundan bilindiği gibi $|\alpha'(u) - \alpha'(\tau)| < Ar^{\lambda}$ yazılabilir. Bu iki hatırlatmayı göz önünde bulundurarak,

$$|\alpha(t) - \alpha(\tau) - \alpha'(\tau)(t - \tau)| < mA \int_0^{\ell} r^{\lambda} dr = \frac{mA}{\lambda + 1} \ell^{1+\lambda} = \frac{mA}{1 + \lambda} |t - \tau|^{1+\lambda} \quad (5.11)$$

elde edilir. Burada ℓ yeterince küçük bir sayıdır. M keyfi bir sabit olmak üzere,

$$|K(t, \tau)| < M |t - \tau|^{\lambda-1} \quad (5.12)$$

bulunmuş olur. $\Phi^-(t)$ fonksiyonu (5.3) sınır koşulunu, (5.5) analitiklik koşulunu ve (5.8)'de yer alan integral denklemi sağlamaktadır. Bu bizi çok önemli bir soruya götürmektedir: Acaba integral denklemlere ait her çözüm aynı zamanda bir sınır değer problemine ait çözüm müdür? Bu sorulara cevaben aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 5.1.1.1 : $\Phi^-(\infty) = 0$ ilave koşulu altında sıfır sıçramaya sahip genelleştirilmiş problem çözümsüzdür.

Ters bir yargı ile, varsayalım ki, problem çözülebilirdir ve parçalı analitik $\Phi(z)$ fonksiyonu da onun çözümüdür. Buradan (5.3) sınır koşullarına bakarak, k keyfi pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$\Phi_k(z) = [\Phi(z)]^k$$

fonksiyonlarının da ayrıca problemin çözümleri olduğu sonucunu çıkarırız. Tüm bu fonksiyonlar lineer bağımsızdırlar. $\Phi_k^-(t)$ fonksiyonları bu durumda sonsuz sayıda çözüme sahip (5.8) integral denklemini sağlar. Fakat Fredholm integral denklemi ancak ve ancak sonlu sayıda çözüme sahip olabilir. Dolayısıyla yargımız yanlış çıkmıştır.

Teorem 5.1.1.2 : Homojen Fredholm integral denklemi (5.8) çözümsüzdür.

Ters bir yargı ile, $\Phi^-(t)$ 'nin (5.8)'deki homojen Fredholm integral denkleminin sıfırdan

farklı bir çözümü olduğunu varsayalım. Buna istinaden, $\beta[\alpha(t)] \equiv t$ olacak şekilde $\beta(t)$ 'nin $\alpha(t)$ 'ye göre ters bir fonksiyon olduğunu düşünelim. (5.4) formülü gereğince $\psi^+(z)$ ve $\psi^-(z)$ analitik fonksiyonlarını tayin edebiliriz. (5.8) gereğince,

$$\psi^-(\infty) = 0 \text{ olacak şekilde } \psi^+(t) = \psi^-[\alpha(t)] \quad \text{veya} \quad \psi^+[\beta(t)] = \psi^-(t) \quad (5.13)$$

yazılabilir. $\beta(t)$ tıpkı $\alpha(t)$ gibi harita fonksiyonudur. O halde (5.13) problemi (5.3) problemi ile aynı tiptedir. Sonuç olarak Teorem 5.1.1.1'e göre $\psi^+(z) = \psi^-(z) \equiv 0$ bulunur. (5.5) ve (5.6)'yı göz önünde bulundurarak, bu sonuç göstermektedir ki, $\Phi^+(t)$ ve $\Phi^-(t)$, sırasıyla D^+ ve D^- bölgelerinde analitik fonksiyonların sınır değerleridir. $\Phi^+(z)$ ve $\Phi^-(z)$ fonksiyonları ise (5.3) sınır değer probleminin çözümleridir ve yine Teorem 5.1.1.1'e göre bunlar mevcut değildir. Sonuç olarak var olduğunu düşündüğümüz çözüm $\Phi^-(t) = 0$ 'dır.

5.1.2 Sıçraması Sıfır Olmayan Problem

Aşağıdaki sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$\Phi^+[\alpha(t)] - \Phi^-(t) = g(t) \quad (5.14)$$

Bu problemin çözümünü, sonsuzda, n mertebeli kutba sahip fonksiyonlar sınıfında arıyoruz. Birinci bölümde verdiğimiz Sokhotski formüllerine göre,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}\Phi^+(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau - t} d\tau &= 0 \\ \frac{1}{2}\Phi^-(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^-(\tau)}{\tau - t} d\tau - P_n(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Burada P_n , $P_n(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$ şeklinde olmak üzere $\Phi^-(z)$ fonksiyonunun sonsuzdaki baş parçasını (principal part) ifade eden bir polinomdur. Önceki bölümde olduğu gibi paçalı analitik fonksiyonlar,

$$\left. \begin{aligned} \psi^+(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^-(\tau)}{\tau - z} d\tau - P_n(z) \\ \psi^-(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau - z} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

olmak üzere, (5.15)'deki sınır koşulları ile ilişkilendirelim:

$$\left. \begin{aligned} \psi^+(t) &= \frac{1}{2} \Phi^-(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^-(\tau)}{\tau - t} d\tau - P_n(t) = 0 \\ \psi^-(t) &= -\frac{1}{2} \Phi^+(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Buradan $\Phi^-(t)$ için bir önceki bölümdekine benzer şekilde homojen olmayan bir Fredholm denkleminde ulaşırız:

$$\begin{aligned} \psi^+(t) - \psi^-[\alpha(t)] &\equiv \Phi^-(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right] \Phi^-(\tau) d\tau - P_n(t) + \\ &\quad + \frac{1}{2} g(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau) \alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} d\tau = 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

Hatırlanacağı gibi bir önceki (5.8) Fredholm denklemi Teorem 5.1.1.2 gereğince çözülebilir değildir. Buna karşılık (5.18) Fredholm denklemi çözülebilirdir. $R(t, \tau)$, (5.18) için çözücü (resolvent) olsun. Bu taktirde çözüm,

$$g_1(t) = -\frac{1}{2} g(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau) \alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} d\tau \quad (5.19)$$

olarak alınmak üzere,

$$\Phi^-(t) = g_1(t) + P_n(t) + \int_L R(t, \tau) [g_1(\tau) + P_n(\tau)] d\tau \quad (5.20)$$

formunda yazılabilir. Kolayca gösterilebilir ki, $g(t)$ fonksiyonu Hölder şartını sağlıyor ise, (5.18) denkleminin çözümü de aynı şartı sağlar. Ayrıca bilinmektedir ki, Fredholm denklemi için konulan $R(t, \tau)$, iteratif çekirdeklerin bir toplamı olarak temsil edilebilir. Cauchy çekirdeği ile verilen tekil integraller, Hölder sınıfından olan fonksiyonları kendi sınıflarına geri dönüştürmektedir. Bu özellik, güçsüz-belirsiz tekilliklere sahip integraller ile çalışırken bize kolaylık sağlar. Teorem 5.1.1.2'nin doğrulunu göstermek için yaptığımız ispat göstermektedir ki, (5.18) denkleminin her çözümü (5.14) sınır değer problemi için bir çözümdür. (5.14)'teki sınır koşullarından $\Phi^+(t)$ sınır değeri şu şekilde belirlenir:

$$\Phi^+(t) = \Phi^-[\beta(t)] + g[\beta(t)] \quad (\beta[\alpha(t)] = t) \quad (5.21)$$

Bundan sonrasında her zamanki bildiğimiz Cauchy formülleri kullanılarak $\Phi^+(z)$ ve $\Phi^-(z)$ fonksiyonları bulunur. Böylelikle aşağıdaki teoremi ortaya çıkarmış oluyoruz:

Teorem 5.1.2.1 : (5.14) sıçrama problemi, sonsuzda verilen bir baş parçaya (principal part) sahip fonksiyonlar sınıfında koşullara bağlı olmaksızın çözülebilir.

5.1.3 Sıfır İndekse Sahip Homojen Problem

Varsayalım ki,

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi^-(t) \quad (G(t) \neq 0) \quad (5.22)$$

sınır koşulları olmak üzere,

$Ind\Phi^+[\alpha(t)] = Ind\Phi^+(t) = N^+$ ve problemin indeksi $x = IndG(t) = N^+ + N^-$ dir. Klasik Riemann sınır değer probleminde olduğu gibi bu problemin indeksi için de aynı sonuçlara varılır:

- $x < 0$ ise homojen problem çözümsüzdür.
- $x = 0$ ise homojen problemin çözümü kendisini sıfırlayan kök barındırmaz. (Kısaca, sıfırı yoktur)

Şimdi, $\Phi^-(\infty) = 1$ koşulu altında çözüm arayacağız. Bunun için öncelikle (5.22)'de her iki yanı logaritmik olarak yazıp düzenleyelim:

$$\ln \Phi^+[\alpha(t)] - \ln \Phi^-(t) = \ln G(t) \quad (5.23)$$

Paçalı analitik $\Gamma(z)$ fonksiyonu için $\Gamma(z) = \ln \Phi(z)$ olacak şekilde $\Gamma(\infty) = 0$ şartı altında

(5.14) tipinde bir sınır koşulu elde ederiz. (5.20) ve (5.21) denkliklerinde $g(t) = \ln G(t)$ ve $P_n(z) \equiv 0$ alınır ise, problem aşağıdaki şekilde ifade edilen tek çözüme sahip olur:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= e^{\Gamma(z)} \\ \Gamma^\pm(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Gamma^\pm(\tau)}{\tau - z} d\tau \\ \Gamma^-(t) &= g_1(t) + \int_L R(t, \tau) g_1(\tau) d\tau \\ \Gamma^+(t) &= \Gamma^-[\beta(t)] + \ln G[\beta(t)] \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Burada $g_1(t)$, $g(t) = \ln G(t)$ almak suretiyle (5.19) denkleğinden elde edilir. $R(t, \tau)$ ise (5.18) homojen olmayan Fredholm integral denklemi için ifade ettiğimiz çözücü fonksiyondur.

Şimdi bir sonraki bölüm için gerekli olduğunu düşündüğümüz bir problem üzerinde duralım. Aşağıdaki sınır koşullarına dayanarak $\gamma^+(z)(\gamma^-(\infty) = 0)$ parçalı analitik fonksiyonunu tespit etmek istiyoruz.

$$\gamma^+[\alpha(t)] = \frac{1}{\alpha'(t)} \gamma^-(t) \quad (5.25)$$

Gösterilebilir ki, $\alpha'(t)$ sıfır indeks değerine sahiptir. $[\alpha(\tau) - \alpha(t)]/(\tau - t)$ oranını dikkate alalım. Birbirine eşit olmayan τ ve t için küçük bir paçanın argümanında meydana gelen artış sıfırdır. Dolayısıyla yukarıdaki problem sıfır indeksli homojen bir problem gibi ele alınabilir ve bu problem koşullara bağlı olmaksızın çözülebilir.

5.1.4 Mandzhavidze-Khvedelidze İndirgeme Metodu

Buraya kadar incelediğimiz harita fonksiyonu ile türetilmiş problem ile sıradan Riemann sınır değer problemi arasında yakın bir ilişki vardır. Bu problem, belli bazı değişken dönüşümleri kullanılarak sıradan Riemann sınır değer problemine indirgenebilir. Şimdi yapmaya çalışacağımız ispat, sıçrama problemi ve sıfır indekse sahip homojen problem ile ilgili ulaştığımız sonuçlara dayanacaktır. İlk olarak aşağıdaki, sıfır sıçramaya sahip yardımcı problemi dikkate alalım:

$$w^+[\alpha(t)] - w^-(t) = 0 \quad (5.26)$$

$w^-(z)$, sonsuzda aşağıdaki şekilde açılabilir basit bir kutba sahiptir:

$$w^-(z) = z + \frac{c_1}{z} + \dots \quad (5.27)$$

Şimdi problemin integral temsilini yapalım. (5.18)'de $g(t) = 0, P_n(t) = t, \Phi^-(t) = w^-(t)$ olarak, koşullara bağlı olmaksızın aşağıdaki çözülebilir denklemi elde ederiz:

$$w^-(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right] w^-(\tau) d\tau = t \quad (5.28)$$

(5.28)'den elde edilecek $w^-(t)$, (5.26)'dan hareketle $w^+(t) = w^-[\beta(t)]$ eşitliğinde yerine yazılırsa aranan fonksiyon $w^+(z)$, Cauchy formülü ile bulunabilir.

$\sigma(t)$, $w^-(t)$ 'nin ters fonksiyonu olsun ($w^-[\sigma(t)] = t$). (5.26)'da t değişkeni $\sigma(t)$ ile değiştirilirse,

$$w^+ \{ \alpha[\sigma(t)] \} \equiv t \quad (5.29)$$

denkliği elde edilir. $\Phi_1(z)$ paçalı analitik fonksiyon olmak üzere,

$$\Phi^+(z) = \Phi_1^+[w^+(z)] \quad , \quad \Phi^-(z) = \Phi_1^-[w^-(z)] \quad (5.30)$$

olacak şekilde alalım. (5.2) sınır koşulu bu yeni fonksiyonlar ile yazılırsa,

$$\Phi_1^+ \{ w^+[\alpha(t)] \} = G(t) \Phi_1^-[w^-(t)] + g(t) \quad (5.31)$$

problemi elde edilir. $t = \sigma(t_1)$ olarak (5.31)'i yeniden düzenleyelim:

$$\Phi_1^+ \{ w^+[\alpha(\sigma(t_1))] \} = G[\sigma(t_1)] \Phi_1^-[t_1] + g[\sigma(t_1)] \quad (5.32)$$

(5.29)'u (5.32)'de yerine yazalım ve $G_1 = G, g_1 = g$ alalım:

$$\Phi_1^+(t) = G_1(t) \Phi_1^-(t) + g_1(t) \quad (5.33)$$

(5.33) bir Riemann sınır değer problemidir. Böylece, harita fonksiyonu ile türetilmiş problem, klasik haldeki probleme indirgenmiştir. Ancak problemin tam çözümü için, orijinal problem ile indirgenmiş probleminden elde edilecek çözümlerin denkliği kanıtlanmalıdır.

Varsayalım ki, $D^\pm$ alanlarındaki analitik $w^\pm(z)$ fonksiyonları, bu alanları $L_1^\pm$ konturları

tarafından sınırlandırılmış $D_1^\pm$ alanlarına eşleştirmektedir. Bu durumda aşağıdakileri kabul ediyoruz:

- $D_1^\pm$ alanları iç nokta içermezler ve L_1 genel sınırı tarafından birbirlerini tüm düzleme tamamlayacak şekilde bölümlenmişlerdir.
- $D^\pm$ ve $D_1^\pm$ birebir olarak örtüşmektedirler.

Şimdi sunacağımız kanıt I.B.Simonenko(1959) tarafından gerçekleştirilmiştir. $L_1^\pm$ konturları sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun:

$$\zeta = w^+(t) \quad , \quad \zeta = w^-(t) \quad (t \in L) \quad (5.34)$$

Fakat sınır koşullarının önceliği,

$$w^-(t) = w^+[\alpha(t)] = w^+(t_1) \quad (5.35)$$

şeklindedir. t noktası L konturu üzerinde hareket ederken, $t_1 = \alpha(t)$ noktası da aynı doğrultuda hareket etmektedir. Alanlar arasındaki birebir örtüşme varsayımını kabul etmek için, bu özelliği konturlar için de kabul etmek yeterlidir. (5.26) sınır problemine ait çözümün kontur değerlerinin Hölder sınıfından bir türevi olduğunu düşünelim. Açıktır ki (5.26) için,

$$\gamma(z) = \frac{dw}{dz} \quad \text{olmak üzere} \quad \alpha'(t)\gamma^+[\alpha(t)] = \gamma^-(t) \quad (5.36)$$

yazılabilir. (5.27)'nin önceliği nedeniyle (5.36) sınır problemi $\gamma^-(\infty) = 1$ koşulu altında çözümlidir. Daha önce ele aldığımız (5.25) problemi hatırlanacağı gibi çözülebilir idi. Yalnız bu çözümler $\gamma^\pm(t)$ fonksiyonlarının Hölder koşulunu sağlaması durumunda mevcut olacaktır. (5.36) eşitliğinde integral alalım:

$$\int_L \gamma^-(t) dt = \int_L \alpha'(t)\gamma^+[\alpha(t)] dt = \int_L \gamma^+(t_1) dt_1 = 0 \quad (5.37)$$

$\gamma(z)$ 'nin integrali alınıp, birde keyfi sabit seçilirse, (5.26) probleminin kontur üzerinde Hölder koşulunu sağlayan türeve sahip bir çözümüne ulaşılır. Şimdi belki asıl kısma geçebiliriz. Öncelikle ters yargının doğru olduğunu düşünelim. Yani,

$$t_1 \neq t_2 \quad \text{için} \quad w^-(t_1) = w^-(t_2) = w_0 \quad (5.38)$$

olsun. $w_1^\pm(z) = w^\pm(z) - w_0$ olduğuna göre, $w_1^\pm(z)$, (5.26)'daki sınır koşulunu sağlar ve

$$w_1^-(t_1) = w_1^-(t_2) = w_1^+[\alpha(t_1)] = w_1^+[\alpha(t_2)] = 0 \quad (5.39)$$

yazılabilir. Şimdi kontur üzerinde daima sürekli fonksiyonlara dönelim.

$$w_2^-(z) = \frac{w_1^-(z)}{(z-t_1)(z-t_2)} \quad , \quad w_2^+(z) = \frac{w_1^+(z)}{[z-\alpha(t_1)][z-\alpha(t_2)]} \quad (5.40)$$

olmak üzere, $w_1^\pm(t)$ için (5.26) sınır koşulunu $w_2^\pm(t)$ cinsinden yazacak olursak,

$$w_2^+[\alpha(t)] = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{[\alpha(t)-\alpha(t_1)][\alpha(t)-\alpha(t_2)]} w_2^-(t) \quad (5.41)$$

sınır koşuluna ulaşırız. Katsayı indeksinin sıfır olmasından ve (5.40)'tan hareketle $w^-(\infty) = 0$ ve bundan önceki bölümde ele aldığımız sıfır indekse sahip homojen problemde hareketle $w_2^\pm(z) \equiv 0$ bulunur. O zaman $w^\pm(z) = w_0 = \text{sabit}$ varsayımı yanlıştır; çünkü $w^-(z)$ sonsuzda bir kutba sahip olmalıdır. Böylelikle ispat tamamlanmıştır.

Bütün bu incelemelerimizden sonra harita fonksiyonu ile türetilmiş Riemann probleminin sıradan Riemann problemine indirgenebilme durumu ile ilgili olarak özet niteliğinde aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 5.1.4.1 : x indeksi ifade etmek üzere, $x \geq 0$ için türetilmiş homojen problem $(x+1)$ adet lineer bağımsız çözüme sahiptir. Homojen olmayan problem koşulsuz olarak çözülebilir ve çözümünü $(x+1)$ adet keyfi sabite lineer bağımlıdır. $x \leq 1$ durumunda ise homojen türetilmiş problem çözümsüzdür; homojen olmayan türetilmiş problemin çözülüp çözülemeyeceği ise $(-x-1)$ adet ilave koşulun karşılanmasına bağlıdır.

Buraya kadar anlattıklarımızdan çıkarılacak en önemli sonuç, (5.26) problemine ait çözümün Hölder sınıfına ait olan türevlere sahip olduğudur. Bu ise bize, başlangıçta orijinal problemde verilen L konturunun bir Lyapounov eğrisi olması halinde, problemin klasik Riemann problemine indirgenmesi ile ulaşılan L_1 konturunun L ile aynı sınıfa ait olduğunu söyler. Daha ayrıntılı bilgi için Mandzhavidze ve Khevedelidze (1956), Gakhov(1966) çalışmaları incelenebilir.

5.2 İstisnai Riemann Problemleri ve Chikin Metodu

Bu bölümde, yine klasik haldeki Riemann sınır değer probleminde yer alan koşulları esnetmeye devam edeceğiz. Bu kısımdaki temel hedefimiz istisnai durumlarda karşımıza

çıkan çözüm denkliklerinden oluşan sistemlerin zorlayıcılığı ve bu zorlayıcı durumlara bir alternatif olarak L.A.Chikin'in önerdiği "homojen olmayan problemin kanonik fonksiyonu" kavramından bahsedeceğiz. Hatırlanacağı gibi, şu ana kadar sadece homojen probleme ait bir kanonik fonksiyondan bahsettik ve homojen olmayan problemlerde de bu fonksiyondan yararlandık.

Klasik problemin katsayısından yola çıkalım ve katsayı fonksiyonunun kontur üzerinde kendisini sıfırlayan köklere ve mertebesi bir tamsayı olan kutup noktalarına sahip olduğunu düşünelim. Basitlik için L konturunun bir adet kapalı eğriden ibaret olduğunu varsayalım. $G_1(t)$ Hölder sınıfından bir fonksiyon, kontur üzerindeki α_k ($k=1,2,\dots,\mu$) noktaları ise $G(t)$ fonksiyonunun sıfırları, kontur üzerindeki β_j ($j=1,2,\dots,\nu$) noktaları ise onun kutuplarıdır. m_k ve p_j ise pozitif tamsayılardır. Bu göre homojen probleme ait sınır koşulunu şu formda yazalım:

$$\Phi^+(t) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{p_j}} G_1(t) \Phi^-(t) \quad (5.42)$$

Problemin çözümü eğri üzerinde sınırlı fonksiyonlar sınıfında aranacaktır. $G_1(t)$ katsayılı Riemann probleminin kanonik fonksiyonunu $X(z)$ ile gösterelim. $G_1(t) = X^+(t) / X^-(t)$ olacak şekilde sınır koşulunu tekrar düzenlersek,

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t) \prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k}} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t) \prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{p_j}} \quad (5.43)$$

bulunur. Şimdi birinci bölümde verdiğimiz analitik devam ve genelleştirilmiş Liouville teoremlerini uygulayalım. α_k ve β_j noktaları düzgün analitik bir fonksiyonun tekillik noktaları olamaz. Tek mümkün tekillik sonsuzdaki noktalarda olabilir.

$$\text{Ind} G_1(t) = x, \quad \sum_{j=1}^{\nu} p_j = p, \quad \sum_{k=1}^{\mu} m_k = m \quad (5.44)$$

olmak üzere, $X^-(z)$ 'nin sonsuzdaki mertebesi x , $\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{p_j}$ 'nin mertebesi ise $-p$ 'ye

eşittir. Dolayısıyla,

$$\frac{\Phi^-(z)}{X^-(z) \prod_{j=1}^v (z - \beta_j)^{p_j}}$$

fonksiyonunun sonsuzdaki mertebesi $-x+p$ kadardır. $x - p \geq 0$ için genelleştirilmiş Liouville teoremine göre:

$$\frac{\Phi^+(z)}{X^+(z) \prod_{k=1}^{\mu} (z - \alpha_k)^{m_k}} = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z) \prod_{j=1}^v (z - \beta_j)^{p_j}} = P_{x-p}(z) \quad (5.45)$$

ve buradan,

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+(z) &= X^+(z) \prod_{k=1}^{\mu} (z - \alpha_k)^{m_k} P_{x-p}(z) \\ \Phi^-(z) &= X^-(z) \prod_{j=1}^v (z - \beta_j)^{p_j} P_{x-p}(z) \end{aligned} \right\} \quad (5.46)$$

bulunur. $x - p < 0$ için (5.46) formüllerinde $P_{x-p} \equiv 0$ alınır, ancak problemin çözümü yoktur. $G_1(t)$ katsayılı sınır değer problemini kolaylık için “indirgenmiş problem” olarak isimlendirelim. İndirgenmiş problemin indeksi olan x , aynı zamanda problemin indeksidir. (5.46) formüllerinde yer alan $P(z)$ polinomunun derecesi olan p , problemin indeksi olan x ’ten küçük bir değerdir. Buna göre, (5.42) probleminin eğri üzerinde sınırlı fonksiyonlar sınıfındaki çözümlerinin sayısı için, problemin katsayısına ait sıfırların sayısının bir etki içermediği ve tüm kutupların toplam mertebesi ile azaltıldığı söylenebilir. Eğer problemin indeksi, kutupların toplam mertebesinden küçük ise problem çözülebilir değildir. Problemin çözülebilir olduğunu düşünürsek, (5.46) onun çözümüdür. (5.46)’da yer alan kanonik fonksiyon ise, üçüncü bölümde klasik haldeki problem için verdiğimiz şekilde hesaplanır; bir farklılık yoktur. $\Phi^-(\infty) = 0$ ilave koşulunun problemdeki sınır koşuluna bir ilave olarak var olması halinde $P(z)$ polinomu $(x-p-1)$ derecesine sahip olmalıdır.

Homojen problem ile ilgili açıklamalardan sonra, şimdi homojen olmayan problem ile incelememize devam edelim. Homojen problemdekine benzer biçimde sınır koşullarını,

$$\Phi^+(t) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{p_j}} G_1(t) \Phi^-(t) + g(t) \quad (5.47)$$

şeklinde koyalım. Açıktır ki, serbest terim $g(t)$ 'nin β_j noktalarından farklı kutup noktaları mevcut ise veya kutbun mertebesi p_j 'yi aşan bir değer ise, sonlu $\Phi^+(t)$ ve sonlu $\Phi^-(t)$ tarafından (5.47) koşulu gerçekleşemez. Dolayısıyla problemin serbest teriminin sadece β_j noktalarında kutupları olabileceği ve mertebelerinin p_j 'yi aşamayacağı bir forma adapte edilmesi gerekir. Bunun için, $G_1(t)$ ve $\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{p_j} g(t)$ fonksiyonlarının bu istisnai noktalarda yeterli sayıda diferansiyellenebilir olduğunu varsayıyoruz. Gerekli en yüksek türev mertebesi aşağıdaki şekilde belirlenir:

Homojen problemde olduğu gibi, $G_1(t)$ 'yi kanonik fonksiyonların oranı olarak yani, $G_1(t) = X^+(t) / X^-(t)$ olacak şekilde alıp sınır koşulunu tekrar düzenliyoruz:

$$\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{p_j} \frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k} \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{p_j} \frac{g(t)}{X^+(t)} \quad (5.48)$$

$\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{p_j} \frac{g(t)}{X^+(t)}$ fonksiyonu integrallenebilirdir. Dolayısıyla bu fonksiyonu analitik fonksiyonların sınır değerlerinin farkı şeklinde yazabiliriz.

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \prod_{j=1}^{\nu} (\tau - \beta_j)^{p_j} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} \quad (5.49)$$

olmak üzere,

$$\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{p_j} \frac{g(t)}{X^+(t)} = \psi^+(t) - \psi^-(t) \quad (5.50)$$

yazılabilir. Buna göre sınır koşullarını,

$$\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{p_j} \frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \psi^+(t) = \prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k} \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \psi^-(t) \quad (5.51)$$

formuna indirgemiş oluruz. Analitik devam ve genelleştirilmiş Liouville teoremlerine göre çözüm,

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{X^+(z)}{\prod_{j=1}^{\nu} (z - \beta_j)^{p_j}} [\psi^+(z) + P_{x+m}(z)] \\ \Phi^-(z) &= \frac{X^-(z)}{\prod_{k=1}^{\mu} (z - \alpha_k)^{m_k}} [\psi^-(z) + P_{x+m}(z)] \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

şeklinde bulunur. Çözümün sınırlı olabilmesi için, $\psi^+(z) + P_{x+m}(z)$ fonksiyonunun β_j noktalarında mertebesi p_j olan sıfırları ve $\psi^-(z) + P_{x+m}(z)$ fonksiyonunun α_k noktalarında mertebesi m_k olan sıfırları olmalıdır. Bu durum göstermektedir ki, $P_{x+m}(z)$ polinomunun katsayıları için $m+p$ adet koşul vardır. Eğer polinoma ait katsayılar bu şartlara uygun olarak seçilirse, (5.52), (5.47) probleminin sınırlı fonksiyonlar sınıfındaki çözümüdür.

Buraya kadar homojen ve homojen olmayan probleme ait çözümü araştırdık. Ancak görüldüğü gibi pratikte çözüm formüllerini kullanmak hiçte kolay olmayacaktır. Ayrıca elde edilecek çözümün α_k ve β_j noktalarındaki kararlılığının kanıtlanması gerekecektir. Bu zorluklara bir çözüm önerisi olarak L.A.Chikin, “homojen olmayan probleme ait kanonik fonksiyon” adını verdiği özel bir çözüm metodu geliştirmiştir. Bu metod, aslında Riemann problemine ait pek çok istisnai durum için kullanılabilir. Ancak biz, problemin katsayısından yola çıktığımızdan aynı şekilde devam edelim.

Homojen olmayan problemin (5.47) sınır koşulunu sağlayan, α_k ve β_j noktalarını da içerecek şekilde düzlemin sonlu parçalarındaki her yerde sıfır metreye sahip, sonsuzda ise mümkün en yüksek mertebeye sahip, parçalı analitik ve kanonik bir fonksiyonu vardır. Bu fonksiyona “homojen olmayan problemin kanonik fonksiyonu” adını vereceğiz ve $Y(z)$ ile göstereceğiz.

Kanonik fonksiyonu oluşturabilmek için (5.52) formüllerinden yola çıkıyoruz. Aşağıdaki

şartları sağlayan bir $Q(z)$ polinomu olduğunu düşünelim:

$$\left. \begin{aligned} Q^{(i)}(\beta_j) &= \psi^{+(i)}(\beta_j) \quad (i = 0, 1, \dots, p_j - 1) \quad (j = 1, 2, \dots, \nu) \\ Q^{(l)}(\alpha_k) &= \psi^{-(l)}(\alpha_k) \quad (l = 0, 1, \dots, m_k - 1) \quad (k = 1, 2, \dots, \mu) \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

$\psi^{+(i)}(\beta_j)$ ve $\psi^{-(l)}(\alpha_k)$, o noktalardaki i ve l mertebedeki türev değerlerini göstermektedir.

Böylece $Q(z)$, $\psi(z)$ fonksiyonu (β_j noktalarında $\psi^+(z)$, α_k noktalarında $\psi^-(z)$) için interpolasyon polinomu olur. Bu polinomun derecesi, (5.44)'ü göz önünde bulundurursak,

$$s = m + p - 1 \quad (5.54)$$

değerine eşittir. Homojen olmayan problemin kanonik fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$Y^+(z) = X^-(z) \frac{\psi^+(z) - Q_s(z)}{\prod_{j=1}^{\nu} (z - \beta_j)^{p_j}}, \quad Y^-(z) = X^-(z) \frac{\psi^-(z) - Q_s(z)}{\prod_{k=1}^{\mu} (z - \alpha_k)^{m_k}} \quad (5.55)$$

(5.47) homojen olmayan probleminin genel çözümü için, homojen olmayan probleme ait özel çözüm ile homojen probleme ait genel çözümün bir araya getirilmesi gerekmektedir. (5.46) ve (5.55)'ten hareketle:

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+(z) &= Y^+(z) + X^+(z) \prod_{k=1}^{\mu} (z - \alpha_k)^{m_k} P_{x-p}(z) \\ \Phi^-(z) &= Y^-(z) + X^-(z) \prod_{j=1}^{\nu} (z - \beta_j)^{p_j} P_{x-p}(z) \end{aligned} \right\} \quad (5.56)$$

bulunur. Eğer $x - p < 0$ ise (5.56)'da $P_{x-p} \equiv 0$ alınır. (5.55) formülünü kullanarak kolayca gösterebiliriz ki, sonsuzda $Y^-(z)$ 'nin mertebesi $(x-p+1)$ olur. Eğer $x < p-1$ ise $Y^-(z)$ sonsuzda bir kutba sahip olur ve bu nedenle kanonik fonksiyon, homojen olmayan probleme ait bir çözüm değildir. Eğer problemin serbest terimi $(p-x-1)$ adet koşula bağımlı kılınırsa, $Y(z)$ 'nin sonsuzdaki mertebesi $(p-x-1)$ kadar artırılmalıdır ki, kanonik $Y(z)$ fonksiyonu homojen olmayan probleme ait bir çözüm haline dönüşebilsin.

Eğer $\Phi^-(\infty) = 0$ ilave koşulu ile problem verilirse $x - p < 0$ durumunda problemin çözümü

(p-x) adet ilave koşulun karşılanmasına bağlıdır. $x - p > 0$ için ise çözüm formülü aşağıdaki biçimde değişir:

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+(z) &= Y^+(z) + X^+(z) \prod_{k=1}^{\mu} (z - \alpha_k)^{m_k} P_{x-p-1}(z) \\ \Phi^-(z) &= Y^-(z) + X^-(z) \prod_{j=1}^{\nu} (z - \beta_j)^{p_j} P_{x-p-1}(z) \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

Chilkin metodu bazı ilave koşulları sağlaması arzu edilen çözümlerin ortaya çıkarılmasına dair, farklı birçok istisnai duruma uygulanabilmektedir.

5.3 Sadece Süreklilik Koşuluna Bağlı Katsayıya Sahip Riemann Problemi

Son yapılan bazı bilimsel çalışmalarda, klasik haldeki problemin ön koşullarından biri olan Hölder şartını sağlayan katsayılar yerine, sadece sürekli olma şartına bağlı katsayılar ile çalışılmaktadır. Bu problemin çözümü artık çok olgunlaşmış durumdadır. Çünkü pek çok yazar tarafından bağımsız şekilde defalarca çözüm sunulmuştur. Biz burada sadece bu yazarların bazılarından bahsedeceğiz.

5.3.1 Lebesgue Anlamda İntegrallenebilir Bağımsız Terimler İçin Khvedelidze'nin Sonuçları

Khvedelidze pek çok çalışmasında katsayı $G(t)$ 'nin Hölder sınıfından olduğu, serbest terim $g(t)$ 'nin ise $g(t) \in L_p$ sınıfına ait olduğu Riemann sınır değer problemi ile ilgilenmiştir. Cauchy integrallerine ait teoriden yararlanarak tam bir çözüm sunmuştur. Klasik haldeki problem ile karşılaştırma açısından üç durum incelenmiştir:

- Problemin çözümlerinin sayısı
- İndeks ilişkisine bağlı olarak çözümün var olup olmadığının araştırılması için gerekli ilave koşul sayısı
- Kapalı formdaki çözüm formülasyonlarının tamamı.

Biz burada matematiksel bir incelemeyi tekrarlamayarak özet niteliğinde doğrudan tek bir sonuç vereceğiz: Yukarıdaki üç sorunda cevabı klasik haldeki problem (bağımsız terim Hölder sınıfına aittir) ile tamamen aynıdır. Bu sonucu bir sonraki bölüm olan Simonenko metodunda kullanacağız.

5.3.2 Simonenko Metodu

Riemann sınır değer probleminin katsayısı için Hölder sınıfından olma şartını kaldıralım ve sadece süreklilik koşulunu ele alalım. Bu problem için Simonenko'nun yaptığı çözüm oldukça basit bir fikre dayanmaktadır. Eğer katsayı $G(t) = 1$ olarak seçilirse ortaya L_p sınıfında şartlara bağlı olmaksızın çözülebilir bir sıçrama problemi ortaya çıkar. Bu durum göstermektedir ki, katsayı üzerindeki ufak saptırmalar problemin nihayeti üzerinde önemsenecek bir etkiye sahip değildir. Riemann problemine ait sınır koşulu,

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad (5.58)$$

olsun. $G(t)$ sürekli bir fonksiyon ve $g(t) \in L_p$ olmak üzere problemin çözümünü dört basamakta ele alalım:

1. L_p sınıfındaki bir Cauchy integrali için Khvedelidze'nin sonuçlarına dayanılarak,

$$\|\Phi^\pm(t)\| = \left\| \pm \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{2} S\varphi \right\| \leq \frac{1+M_p}{2} \|\varphi\| \quad (5.59)$$

yazılabilir. Buradaki M_p , S operatörünün normudur. $\left(S\varphi = \frac{1}{i\pi} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - i} d\tau \right)$

2. Simonenko göstermiştir ki, ölçülebilir ve aşağıdaki şartı sağlayan katsayıya sahip Riemann probleminin tek çözümü vardır.

$$|G(t) - 1| < \frac{2}{1 + M_p} \quad (5.60)$$

3. Bu tek çözüm için problemin indeksi sıfır olmalıdır.
4. İndeksin sıfır dışındaki bir değer olması durumunda, problem sıfır indekse sahip olacak şekilde indirgenmelidir. Bu indirgeme için 3.7.1 ve 3.7.2 bölümlerinde gösterilen yöntem kolayca esas alınabilmektedir.

Bu sonuçlar, $G(t)$ 'nin Hölder sınıfından olduğu durumda Khvedelidze'nin bulduğu sonuçlar ile hemen hemen aynıdır. Bu sonuçlar göstermektedir ki, Riemann sınır değer problemine ait katsayı fonksiyonu olan $G(t)$ 'nin sürekli fonksiyonlar sınıfına genişletilmesi, çözüm sınıfını değişmesine etki etmiyor. Problemin serbest teriminin ait olduğu sınıfın değiştirilmesi ise Khvedelidze'nin gösterdiği gibi sonucu genel olarak etkilemiyor.

5.3.3 Batyrev Metodu

Batyrev, daha çok Riemann sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri ile ilgilenmiştir. Homojen probleme ait iki metod söz konusudur. Metotların her ikisinin de temelinde sınır değerlerine ait katsayının yaklaşık hesaplamalarla bir rasyonel fonksiyona dönüştürülmesi hedeflenir. İlk metotta problemin katsayı fonksiyonu olan $G(t)$,

$$r_n(t) = \sum_{k=-n}^n a_k t^k \quad (5.61)$$

fonksiyonuna yaklaşık olarak dönüştürülür. $r_n(t)$ katsayısına sahip homojen problem, Gakhov'un klasik haldeki Riemann sınır değer problemlerinde katsayının rasyonel fonksiyon olması durumunda önerdiği metod ile çözülür. Yani problemin sınır koşulu,

$$\Phi^+(t) = \frac{p(t)}{q(t)} \Phi^-(t) \quad (5.62)$$

şeklinde düşünülerek, $p(z)$ ve $q(z)$ polinomları, $p_+(z)$ ve $q_+(z)$ kökleri D^+ bölgesinde bulunan polinomlar, $p_-(z)$ ve $q_-(z)$ ise kökleri D^- bölgesinde olan polinomlar olmak üzere,

$$p(z) = p_+(z)p_-(z), \quad q(z) = q_+(z)q_-(z) \quad (5.63)$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır ve böylelikle homojen probleme ait kanonik fonksiyon bir Cauchy tipi integrale gerek kalmaksızın bulunur. Batyrev'in ikinci metodunda ise logaritma alınarak homojen problem bir sıçrama problemine indirgenir. $G(t)$ katsayısı için ise yine (5.61)'den elde edilecek fonksiyon kullanılacaktır. Batyrev'in metotlarında daima bir hata payı tabi olarak mevcuttur.

5.4 Vektör Riemann Problemi

Vektör homojen Riemann sınır değer problemi aşağıdaki gibi tanımlanır:

C verilen bir kontur, $G(t)$, C üzerinde Hölder sınıfına ait ve tekil olmayan $n \times n$ boyutunda bir matris (G_{ij} $i, j=1, \dots, n$ iken C üzerinde Hölder'dir ve yine C üzerinde $\det G(t) \neq 0$ 'dır) olmak üzere parçalı analitik bir vektör fonksiyonu olan $\phi(z)$ 'yi ele alalım. $\phi(z)$, ∞ 'da sınırlıdır ve;

$$\phi_+(t) = G(t) \phi_-(t) \quad (5.64)$$

şartını sağlar. (5.64)'ün çözümü genellikle kapalı bir formda bulunamaz. Daha çok, lineer

Fredholm integral denklem sistemlerine başvurulur. Skaler problem tipinin aksine, çözümün var olup olmaması sadece indekse göre tayin edilebilen bir durum değildir. (5.64)'ün çözümünün varlığı ve tekliği, kesin Fredholm denklemlerine göre araştırılmak zorundadır. Bu zorluk, (5.64)'ün çözümün $x_1, \dots, x_n$ indislerine tek tek bağlı olmasından ileri gelir. $x_1, \dots, x_n$ bir öncelik olarak hesaplanamazlar. Sadece toplamaları için;

$$x = x_1 + \dots + x_n = \text{ind det } G(t) \quad (5.65)$$

verilebilir. (5.64) denkleminin çözülmesi demek, $X_1(z), \dots, X_n(z)$ çözüm vektörlerine karşılık gelen $X(z)$ temel çözüm matrisinin bulunması demektir. x_l indeksi, $z \rightarrow \infty$ iken; $X_l(z)$ 'nin ($l = 1, \dots, n$) davranışıyla ilgilidir.

Sonsuzda r 'yi aşamayan mertebede (5.64)'ün çözümünü aradığımızı varsayalım. Bu çözümlerin arasında en düşük olası mertebeyi $-x_1$ ile gösterelim. X_1 ise $-x_1$ mertebesindeki çözümü gösterebilir. $p(z)$ herhangi bir polinom olmak üzere X_1 çözümü ile ulaşılan $\phi(z) = p(z)X_1(z)$ çözümü dışındaki geri kalan çözümleri dikkate alalım. Bu çözümlerin arasında en düşük olası mertebeyi $-x_2$ ile, bu mertebedeki çözümü de X_2 ile adlandırabiliriz. Bu mantık silsilesi devam ettirilirse;

Çözüm matrisi olan $X(z)$ aşağıdaki iki özelliklerle beraber oluşturulabilir:

- (i) Her sonlu z için; $\det X(z) \neq 0$
- (ii) $z \rightarrow \infty$ iken $\det (Z^{x_1}X_1, \dots, Z^{x_n}X_n) \neq 0$

Ayrıca (5.64)'ün herhangi bir çözümü

$$\phi(z) = X(z)p(z) \quad (5.66)$$

olarak verilebilir. Burada $p(z)$, polinomal bir vektördür. $X(z)$ 'yi tayin etmek için yukarıda değinilen yaklaşım, bizi daha kesin bir çözüm yoluna $x_l, l = 1, \dots, n$ bilinenleri vasıtasıyla taşıyabilir. Örneğin; $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ olduğunu varsayalım. (Gerekli fakat yetersiz bir şart olarak $\text{ind det } G(t) = 0$ olduğunu hatırlatıyoruz.) Şimdi (5.64)'ü kullanarak,

$$\frac{1}{2} x_{l-}(t) + \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{x_{l-}(\tau)}{\tau - t} d\tau - e_l = 0 \quad (5.67)$$

eşitliğini yazabiliriz. ($z \rightarrow \infty$ iken $X_l(z)$ 'nin D' 'de holomorfik olması, e_l baz vektör olmak üzere l 'nci vektöre yaklaşması için gerek ve yeter koşuldur.) Buradan, X_l 'nin vektör Fredholm integral denklemini oluşturalım:

$$X_{l-}(t) - \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{G^{-1}(t)G(\tau) - I}{\tau - t} x_{l-}(\tau) d\tau = e_l, \quad l=1, \dots, n \quad (5.68)$$

Eğer (5.68)'deki lineer Fredholm integral denklemleri tek bir çözüme sahipse (X_{l-} , $l = 1, \dots, n$) tüm indisler (x_{l-} , $l=1, \dots, n$) sıfırdır. Genelde x_{l-} 'yi bulabilmek için (5.68)'deki integral denklemler araştırılmalıdır. Hatırlatıyoruz ki; matrisel Riemann sınır değer probleminden elde edilen Fredholm integral denklemleri MKdV denklemleriyle ilintilidir. Bu durum, yani (5.68)'deki eşitlik, özel bir durumda, bir Riemann sınır değer probleminin nasıl Fredholm integral denklemine dönüştüğünü gösterir.

Yukarıdaki elde edilen sonuçları kanıtlamak için, (5.64) ile ilgili pek çok Riemann sınır değer problemine giriş yapılması ki bunlardan bazıları adjoint ve onunla ilintili problemlerdir, daha sonra ise bu problemleri ve Fredholm teorisinin bilinen sonuçlarının kullanılması gerekmektedir. (Fredholm teorisinin buradaki genişletilmiş bir kullanımıdır) Vektör tipteki problem için elde edilen sonuçlar, matris tipteki problemlere genişletilebilirler.

5.4.1 Krein ve Gohberg'in Sonuçları

Vektör tipteki problem ile ilgili olarak Krein'in 1958 tarihli ve yine Gohberg ile Krein'in 1958 tarihli çalışmalarına ait küçük bir bölümden bazı sonuçları bu bölümde aktaracağız. Bu bölümde aktaracağımız sonuçlar bir sonraki bölüm içerisinde inceleyeceğimiz matris tipteki problem için de gerekli olacaktır. İki temel sonuç söz konusudur:

1. Sonuç, indeksler hakkındaki bilgilerin daha ileriye taşınmasını sağlamıştır.
2. Sonuç ise, tüm indisler için öncelik tayininin nasıl yapılacağına dair genel bir sonuçtur.

Öncelikle bazı notasyonları açalım. $L^1(\mathbb{R})$ ölçülebilir ve integrallenebilir fonksiyonlara ait lineer (vektör) normu ifade etsin. Bu norm,

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \quad (5.69)$$

şeklindedir.

R_0 , $F(\lambda)$ ile ilgili lineer bir uzay ve $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ olmak üzere $F(\lambda)$, $f(t)$ 'nin Fourier transformasyonunu gösterebilir. R_a , $F(\lambda; a)$ 'nin lineer uzayını ifade etsin. Burada $F(\lambda; a)$, $a\delta(t) + f(t)$ 'nin bazı kompleks sayılar ile Fourier transformasyonunu gösterebilir. R_a , formun

tüm fonksiyonlarının bir setini ifade etmektedir:

$$F(\lambda; a) = a + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt, \quad f(t) \in L^1(R) \quad (5.70)$$

R_a^+ , formun tüm fonksiyonlarından oluşan R_a 'nın bir alt setidir:

$$F_+(\lambda; a) = a + \int_0^{\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt \quad (5.71)$$

Şu açıktır ki, R_a^+ 'da yer alan fonksiyonlar analitik olarak, π_+ λ -kompleks üst yarı düzleminde süreklidirler. Benzer yaklaşım R_a^- ve π_- 'yede uygulanabilir. Gohberg ve Krein (1958) aşağıdaki problemin çözümünüyle ilgilenmişlerdir:

$$x(t) - \int_0^{\infty} K(t-s) X(s) ds = f(t) \quad (5.72)$$

Burada $X(t)$ ve $f(t)$ vektör, $K(t)$ ise elemanları $L^1(R)$ 'de tanımlı $n \times n$ boyutundaki bir matristir. Kolaylık ve somutluk için,

$$f_j(t) \in L^1_{(nx1)}(0, \infty), f_j(t) \in L^1(0, \infty), j = 1, \dots, n \text{ ve } f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (5.73)$$

şeklinde ele alıp; $X(t) \in L^1_{(nx1)}(0, \infty)$ 'un çözümünü araştıralım. (5.72)'nin çözümü, vektör Riemann problemi ile yakından ilişkilidir:

$$\phi_+(\lambda) = G(\lambda) \phi_-(\lambda), \quad G(\lambda) \in R^{(nxn)}, \det G(\lambda) \neq 0, \lambda \in R \quad (5.74)$$

Ayrıca şunu not ediyoruz ki, $G(\lambda)$ sürekli fakat genelde Hölder olmadığı müddetçe, (5.74), (5.64)'deki ifadenin özel bir durumu değildir. Gohberg ve Krein, (5.72) ve (5.74)'ü incelemek için esaslı bir teori geliştirmişlerdir. Biz burada sadece (5.74) ile ilgili bazı sonuçlara konsantre olacağız. Bütünlük açısından, ilk olarak skaler duruma ((5.72) ile ilgili skaler bir denklem) bir giriş yapalım.

5.4.1.1 Skaler Faktörizasyon Problemi

Skaler bir fonksiyon olarak $G(\lambda) \in R$ 'nin kapalı çizgisel $L: \{-\infty, \infty\}$ üzerinde tanımlı ve L

üzerinde $G \neq 0$ olduğunu varsayalım. Riemann sınır değer problemi ile ilgili olarak G 'nin basit çarpanlarına ayrılma(faktörizasyon) problemi aşağıdaki gibi formüle edilebilir:

$G_{\pm} \in \mathcal{R}_{\pm}$ iken,

$$G = G_+ G_- \text{ ve } G_{\pm}(\infty) = 1 \quad (5.75)$$

π_+ 'da $G_+ \neq 0$ veya π_- 'da $G_- \neq 0$ ise yapılan işlem tam faktörizasyon (proper factorization), $\pi_{\pm}$ 'de $G_{\pm} \neq 0$ ise kononik faktörizasyon (canonical factorization) olarak anılır.

Krein (1958), Wiener ve Levy'nin temel teoremlerini kullanarak şu sonuçlara ulaştı:

1. Yukarıda tanımlanmış $G(\lambda)$ sadece $G(\lambda) \neq 0$ ve $\text{ind } G = 0$ olduğu durumda kanonik faktörizasyona imkan vermektedir. Eğer bir fonksiyon bu şartı sağlıyorsa muhtemel çözümlerden biridir.
2. $G \neq 0$ ve $\text{ind } G = k \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda
 - (i) Eğer $k > 0$ ise $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \Pi_+$ noktaları arasından bir seçim yapılır ve $p_1, \dots, p_m$ tamsayıları için $p_1 + \dots + p_m = k$ olacak şekilde, $G_+ \in \mathcal{R}_+$ (ilaveten $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 'de sıfır noktaları var iken diğer Π_+ bölgesinde yoktur) fonksiyonu mevcuttur. Ayrıca $G = G_+ G_-$ olacak şekilde $G_- \in \mathcal{R}_-$ fonksiyonu mevcuttur ve Π_- 'de sıfır değeri yoktur.
 - (ii) Eğer $k < 0$ durumu mevcut ise, yukarıdakine benzer ifadeler aynen geçerlidir. (Tabii artık $p_1 + \dots + p_m = -k$ olmaktadır.)

(5.75) denklemi şu şekilde de yazılabilir:

$$G_+ = G(G_-)^{-1}, \quad G_{\pm}(\infty) = 1 \quad (5.76)$$

Mukayese adına, G 'nin ayrıca Hölder olduğunu varsayalım. Bu durumda (5.76), verilen gerçek bir eksen boyunca sıçrama yaparak ve yine verilen sonsuzdaki sınır koşullarına bağlı olarak bir Riemann sınır değer problemi haline gelir. $k > 0$ olduğunu düşünelim. Bu durumda Π_- içinde G_- 'yi sıfır yapan noktalar yoktur. Bundan dolayıdır ki; $(G_-)^{-1} \in \mathcal{R}_-$ dir. Böylece

$$\phi_+(\lambda) = G_+(\lambda) \text{ ve } \phi_-(\lambda) = (G_-(\lambda))^{-1} \quad (5.77)$$

sonucu ortaya çıkar, Fakat bununla birlikte, $k < 0$ durumunda $(G_-)^{-1}$, Π_- bölgesinde

holomorfik değildir ve (5.76)'daki Riemann probleminin sonsuzda sınırlı bir çözümü yoktur. Bu durum skaler Riemann sınır değer problemi teorisini de doğrulamaktadır.

$G_{\pm}(\lambda)$ fonksiyonları aşağıdaki şekilde ifade edilebilirler:

$$G_{\pm}(\lambda) = 1 + \int_0^{\infty} e^{i\lambda t} \tau_{\pm}(t) dt, \quad \lambda \in \Pi_{\pm} \quad (5.78)$$

Burada $\tau_{\pm} \in L^1(\mathbb{R})$ 'dir. Yukarıdaki bağıntı $G_{\pm}$ 'nin pek çok özelliğinin tespit edilmesinde son derece faydalı ve kullanışlıdır. Fakat buna karşılık, geliştirmeye müsait olmamasından kaynaklanan dezavantajları vardır. Bu nedenle Krein, 1975 yılında, $G_{\pm}$ için Riemann-Hilbert teorisi ile elde edilenden farklı olarak yapısal bir formül de sunmuştur.

5.4.1.2 Tüm İndisleri Pozitif Olan Vektör Tipte Riemann Problemi

Gohberg ve Krein (1958)'in ulaştığı en temel sonuçlardan biri, $G(\lambda) \in R^{(n \times n)}$ matrisi için buldukları faktörizasyon teoremi idi. Bu sonuca bir hazırlık teşkil etmesi açısından öncelikle tüm indisleri pozitif olan bir vektör Riemann sınır değer problemini ele alacağız. (5.72) ile ilgili olarak, homojen denklemin adjoint'ini inceleyelim:

$$w(t) - \int_0^{\infty} k^T(t-s)w(s)ds = 0 \quad (5.79)$$

(5.72) ve (5.79) denklemleri, Riemann problemi ile ilgili olarak çok yakın bir ilişki içindedirler:

$$F_{-}(\lambda) = [I - K(\lambda)]F_{+}(\lambda), \quad F_{\pm}(\lambda) \in R_{\pm}^{(n \times 1)} \quad (5.80)$$

Burada $K(\lambda)$, $k(t)$ 'nin Fourier transformasyonu (dönüşümü)'dür. (Ayrıca hatırlatalım ki, $k(t) \in L'_{(n \times n)}(\mathbb{R})$ dir.) Eğer (5.79) sadece trivial (dikkate alınmayan-anlamsız) bir çözüme sahip ise, (5.80)'deki Riemann probleminin tüm indisleri non-negatiftir. (5.79)'un sadece trivial bir çözümünün olduğunu varsayalım. Bu durumda, aşağıdaki sonuçlar doğrulanabilir:

1. (5.80)'deki Riemann probleminin $R_{+}^{(n \times 1)}$ de n tane çözümü vardır ki bu çözümler, ∞ da lineer bağımsızdırlar.

2. $\lambda_0, F_+(\lambda) \in R_+^{(nx1)}$, nin $\text{Im}(\lambda_0) \geq 0$ koşulunu sağlayan (Yani $\lambda_0, \text{Im}(\lambda_0) \geq 0$ ve $F_+(\lambda) \in R_+^{(nx1)} \leq \alpha$) herhangi bir noktası olmak üzere; burada α , (5.72)'nin homojen versiyonunun lineer bağımsız çözümlerinin sayısıdır.

Yukarıdaki durum ayrıca temel çözüm matrisi ile paralellik arz eden standart çözüm matrisine ait bir fikirde verebilir. Bu matris $(F(\lambda))$ şu şekilde tanımlanabilir:

- (i) $F_+(\lambda)$, (5.80)'i çözmektedir.
- (ii) $\det F_+(\infty) \neq 0$ dır.
- (iii) $F_+(\lambda)$ 'nin j.ci kolon vektörünün, $\lambda = i$ için oluşan k_j çoklukları üzerinde bir sıfırı olduğunu varsayalım. $F_+(\lambda)$ üzerinde $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$ şeklinde sıralanmış biçimde bulunan sütununu seçelim. (5.80)'in indeksi olarak $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ 'i tanımlayalım. Çünkü, yukarıdaki 2. sonuca istinaden, k sınırlıdır ve bu sebepten dolayı $R_+^{(nxn)}$ 'deki çözüm matrisleri içerisinde en büyük indekse sahip olan sadece bir tanesi bulunabilir. İşte bu standart çözüm matrisidir.

Aşağıdaki sonuçlar ise standart çözüm matrisi ile ilgili olarak Gohberg ve Krein(1958) tarafından bulunmuştur.

3. $F_+(\lambda)$, (5.80)'in standart çözüm matrisi olsun. $\lambda = i$ harici her $\lambda \in \Pi_+$ için $\det F_+(\lambda) \neq 0$ dır. Buna ilaveten;

$$\sum_{j=1}^n k_j = - \text{ind} \det [I - K(\lambda)] \quad (5.81)$$

ve buradan hareketle her $\lambda \in \Pi_-$ için $\det F_-(\lambda) \neq 0$ dır.

4. $F_+(\lambda) = (f_1, \dots, f_j, \dots, f_n)$, (5.80)'in standart çözüm matrisi olsun. Buna göre (5.80)'ün her çözümü aşağıdaki forma sahiptir:

$$F(\lambda) = \sum_{j=1}^n [a_{j0} + a_{j1}(\lambda - i)^{-1} + \dots + a_{jk_j}(\lambda - i)^{-k_j}] f_j(\lambda) \quad (5.82)$$

5.4.1.3 Matris Faktörizasyon ve İndislerle İlişkisi

1. Her non-singular (tekil olmayan) $G(\lambda) \in R_{(nxn)}$ matrisi aşağıdaki faktörizasyona sahip olabilir:

$$G(\lambda) = G_+(\lambda) \Delta(\lambda) G_-(\lambda) \quad (5.83)$$

Burada $G_{\pm} \in \mathcal{R}_{(n \times n)}^{\pm}$ olmak üzere $\lambda \in \Pi_{\pm}$ için, $\det G_{\pm}(\lambda) \neq 0$ 'dır. Ayrıca $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$ şeklindeki bazı tamsayılar için,

$$\Delta(\lambda) = \text{diag} \left(\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i} \right)^{k_1}, \dots, \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i} \right)^{k_n} \right) \quad (5.84)$$

eşitliği yazılabilir.

2. Eğer bir matris aşağıdaki gibi diğer bir faktörizasyona sahip ise;

$$G = \bar{G}_+(\lambda) \bar{\Delta}(\lambda) \bar{G}_-(\lambda) \quad (5.85)$$

O halde, bazı non-singular A matrisleri için,

$$\bar{\Delta}(\lambda) = \Delta(\lambda), \quad \bar{G}_+(\lambda) = G_+ A(\lambda), \quad \bar{G}_-(\lambda) = A^{-1} G_-(\lambda) \quad (5.86)$$

yazılabilir.

3. İndislerin toplamı, matrisin determinantının indeksine eşittir.

$$\sum_{j=1}^n k_j = \text{ind } \det G(\lambda) \quad (5.87)$$

G^* , G 'nin Hermitian eşleniğini gösterebilir, yani $G^* = \bar{G}^T$ olsun. Burada G^T , G 'nin transpozunu ve $\bar{G}$ 'de kompleks eşleniği ifade etmektedir. G matrisinin reel ve imajiner kısımlarını şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$G_R = \frac{1}{2}(G + G^*), \quad G_I = \frac{1}{2}(G - G^*) \quad (5.88)$$

G matrisi, eğer $x^* G x$ reel ve tüm $x \neq 0$ 'ler için tek bir işarete sahipse kesin belirlenebilir. Gohberg ve Krein (1958) tarafından sunulmuş aşağıdaki sonuca bakalım:

Eğer $G(\lambda) \in \mathcal{R}_{(n \times n)}$ 'nın reel veya imajiner kısmı sınırlı ve $\det G(\lambda) \neq 0$ ise, tüm indisler sıfıra eşittir. Bu sonuç, yukarıda ifade edilen matris faktörizasyon (çarpanlara ayırma) teorisinin doğal bir sonucudur. Faktörizasyon için aşağıdaki matrisi bir örnek olarak ele alalım:

$$G(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - r(\lambda)\bar{r}(\lambda) & r(\lambda)e^{2i\lambda x} \\ -\bar{r}(\lambda)e^{-2i\lambda x} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.89)$$

Burada $\bar{r}(\lambda)$, $r(\lambda)$ 'nın kompleks eşleniğidir. Bu matris aslında, saçılma teorisindeki KdV ve MKdV denklemleri ile ilgili olarak ortaya çıkan bir durumu yansıtmaktadır. Şimdi,

$$G^*(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - r(\lambda)\bar{r}(\lambda) & -r(\lambda)e^{2i\lambda x} \\ \bar{r}(\lambda)e^{-2i\lambda x} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.90)$$

yazarsak,

$$G_R(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - r(\lambda)\bar{r}(\lambda) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.91)$$

bulunur. $|r(\lambda)\bar{r}(\lambda)| < 1$ olduğu her durumda son bulunan ifade sınırlıdır.

5.4.1.4 İndislerin Kararlılığı

Son olarak Gohberg ve Krein(1958)'e ait, indislerin stabilitesi hakkındaki önemli bir teoremden bahsedeceğiz. Şöyle ki, $G(\lambda)$ 'ya karşılık gelen en genel kapsayıcı indeks

$$k = \sum_{j=1}^n k_j \quad (5.92)$$

olarak verilir. Bu sonuç ancak şu şart altında geçerlidir: Aşağıdaki koşulları sağlayan q ve r değerleri mevcut olmalıdır:

$$k_1 = k_2 = \dots \dots \dots k_r = q+1 \quad k_{r+1} = k_{r+2} = \dots \dots \dots k_n = q \quad (5.93)$$

olacak şekilde,

$$k = qn + r \quad (0 \leq r < n) \quad (5.94)$$

Buradaki k_j indisleri, uygun bir alandaki keyfi ve kafi düzeyde küçük bir perturbasyon ile değişmeyeceklerdir. Bu, beraberinde hemen şu sonucu getirecektir:

- Eğer $k = 0$ –ve böylelikle tüm kısmi indisler sıfır olur yani $k_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ - ve sadece ij $k_i = 0$ ise (5.93) ve (5.94) sağlanır ve stabildir.
- Eğer $r = 0$ ise (5.94) ima eder ki, $q=0$ 'dır ve böylece $k_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ olur.
- Eğer $q=1, \dots, n-1$ ise $k = 0$ olacak şekilde (5.94) için çözüm yoktur.
- Eğer $r = n$ ise $q = -1$ olur ve buradan hareketle (5.93)'ten $k_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ olur

Bu sonuçlar aslında şunu söylemektedir:

Eğer genel&kapsayıcı indeks (overall index) k sıfıra eşitse, genel olarak tüm kısmi indisler yok edilmiş olur ve böylece tüm indislerin sıfır olduğu çok genel bir bakış açısı ortaya çıkmış olur.

5.5 Ortogonal Polinomlar İçin Riemann Problemi

5.5.1 Fokas-Its-Kitaev Problemi

Fokas, Its ve Kitaev, matris formdaki Riemann sınır değer probleminde yer alan ortogonal polinomlar ile ilgili olarak belirgin sonuçlara ulaşmışlardır. R 'de tüm momentleri

$$\int x^k w(x) dx \quad (5.95)$$

mevcut olacak şekilde w ağırlık fonksiyonunu dikkate alalım.

$$\int f(x)g(x)w(x)dx \quad (5.96)$$

şeklindeki skaler çarpım, Gram-Schmidt ortogonalleştirme işlemine tabi tutulur. Bunun sonucu olarakta, $1, x, x^2, \dots$ şeklindeki yapı, aşağıdaki koşulu gerçekleyen $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots$ ortogonal polinomlarını doğurur:

$$\int \pi_n(x)\pi_m(x)w(x)dx = h_n \delta_{n,m} \quad , \quad h_n > 0 \quad (5.97)$$

$\pi_n(x) = x^n + \dots$ şeklindeki polinomu dikkate alırsak,

$$\gamma_n = h_n^{-1/2} \quad , \quad p_n(x) = \gamma_n \pi_n(x) \quad (5.98)$$

alınmak suretiyle p_n polinomları ortogonal polinomlar olur. Böylelikle (5.97)'den,

$$\int p_n(x)p_m(x)w(x)dx = \delta_{n,m} \quad (5.99)$$

bulunur. Ortogonal polinomlar a_n ve b_n yinelenen (recurrence) çarpanlar olmak üzere aşağıdaki şartı sağlarlar:

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x) \quad (5.100)$$

Yukarıdakileri göz önünde bulundurarak, Fokas, Its ve Kitaev 2×2 boyutundaki matris değerli $Y: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ fonksiyonu için aşağıdaki Riemann sınır değer problemini koymuşlardır:

(Y-RH1) $Y, \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 'de analiktir.

$$(Y\text{-RH2}) \quad Y_+(x) = Y_-(x) \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(Y\text{-RH3}) \quad Y(z) = \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow \infty \text{ iken.}$$

Teorem 5.5.1.1 : π_n ve π_{n-1} , dereceleri sırasıyla n ve $n-1$ olan ortogonal polinomlar, $C(\pi_j w)$, aşağıdaki şekilde verilen Cauchy dönüşümü,

$$C(\pi_j w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi_j(x)w(x)}{x-z} dx \quad (5.101)$$

c_n , aşağıdaki şekilde verilen bir sabit,

$$c_n = -2i\pi\gamma_{n-1}^2 \quad (5.102)$$

olmak üzere, (Y-RH1)-(Y-RH2)-(Y-RH3) Riemann sınır değer probleminin,

$$Y(z) = \begin{pmatrix} \pi_n(z) & C(\pi_n w)(z) \\ c_n \pi_{n-1}(z) & c_n C(\pi_{n-1} w)(z) \end{pmatrix} \quad (5.103)$$

şeklinde tek çözümü vardır.

Bu teoremi kanıtlamak için Y matrisinin ilk satır ve ilk sütununda yer alan elemanından yola çıkalım. Problemdeki (Y-RH2) koşulundan,

$$(Y_{11})_+(x) = (Y_{11})_-(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.104)$$

yazılabilir. (Y-RH3) koşulundan ise,

$$z \rightarrow \infty \text{ iken } Y_{11}(z) = z^n + O(z^{n-1}) \quad (5.105)$$

yazılır. Genelleştirilmiş Liouville teoreminden hareketle diyebiliriz ki, Y_{11} derecesi n olan bir polinomdur. Bu polinomu P_n ile ifade edelim. Şimdi Y_{12} 'nin durumunu inceleyelim. Problemdaki (Y-RH2) sıçrama koşulundan,

$$(Y_{12})_+(x) = (Y_{12})_-(x) + (Y_{11})_-(x)w(x) \quad (5.106)$$

bulunur. Y_{11} yerine P_n yazmak suretiyle (5.106)'yı yeniden düzenlersek,

$$(Y_{12})_+(x) = (Y_{12})_-(x) + P_n(x)w(x) \quad (5.107)$$

elde edilir. (Y-RH3) koşulundan göre ise,

$$z \rightarrow \infty \text{ iken } Y_{12}(z) = O(z^{-n-1}) \quad (5.108)$$

olmalıdır. (5.107) ve (5.108) bağıntıları dikkatle incelenirse, Y_{12} için skaler bir Riemann problemi ortaya çıkardıkları görülür. Bu problemin çözümü bilindiği gibi,

$$Y_{12}(z) = C(P_n w)(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_R \frac{P_n(x)w(x)}{x-z} dx \quad (5.109)$$

formunda verilir. Ancak Cauchy dönüşümü ile ele alınan bu yaklaşımın (5.108) koşulunu tam olarak sağladığından emin olunması gerekir:

$$\frac{1}{x-z} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{z^{k+1}} + \frac{x^n}{z^n(x-z)} \quad (5.110)$$

olacak şekilde (5.109)'u düzenlersek,

$$\begin{aligned} Y_{12}(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_R P_n(x)w(x) \left[-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{z^{k+1}} + \frac{x^n}{z^n(x-z)} \right] dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2i\pi} \left[\int_R P_n(x)x^k w(x) dx \right] \frac{1}{z^{k+1}} + O(z^{-n-1}) \end{aligned} \quad (5.111)$$

olur. Böylelikle (5.108) koşulu sağlanmış olur. Ayrıca açıktır ki,

$$\int P_n(x)x^k w(x)dx = 0 \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (5.112)$$

nedeniyle P_n ortogonal bir polinomdur ve teoreme ait (5.103) eşitliğinde yer alan ilk satır gerçekleşmiştir. Benzer yaklaşım sürdürülürse, ikinci satırda kanıtlanabilir.

Şimdi Fokas, Its ve Kitaev problemini sonlu bir $[-1, +1]$ aralığına indirgeyerek daha özel bir forma getirelim. Bu sefer aşağıdaki modifiye edilmiş Jacobi ağırlığını esas alıyoruz:

$$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta h(x) \quad x \in (-1, 1) \quad (5.113)$$

Burada $\alpha, \beta > -1$ ve h , $[-1, 1]$ aralığında pozitif ve bu aralığın komşuluğunda analitiktir. Buna göre, 2×2 boyutundaki matris değerli $Y: \mathbb{C} \setminus [-1, 1] \rightarrow C^{2 \times 2}$ fonksiyonu için Riemann sınır değer problemi şu şekildedir:

(Y-RH1) Y , $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ 'de analitiktir.

$$(Y-RH2) \quad Y_+(x) = Y_-(x) \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$(Y-RH3) \quad Y(z) = \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow \infty \text{ iken.}$$

Dikkat edilecek olursa (Y-RH2) sıçrama koşulunda açık aralık kullanılıyor. Çünkü -1 ve $+1$ bitim noktalarında sıçrama tanımlı değildir. Bu problemin çözümü genel durumda olduğu gibi,

$$Y(z) = \begin{pmatrix} \pi_n(z) & C(\pi_n w)(z) \\ c_n \pi_{n-1}(z) & c_n C(\pi_{n-1} w)(z) \end{pmatrix} \quad (5.114)$$

şeklinde. Yalnız bu kez, C , seçtiğimiz sonlu aralıktaki Cauchy dönüşümünü ifade etmektedir:

$$C(\pi_n w)(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\pi_n(x)w(x)}{x-z} dx \quad (5.115)$$

-1 ve $+1$ bitim noktaları için problemi tanımlayan ilave koşullar genellikle şu şekilde verilir:

(Y-RH4) $z \rightarrow 1$ iken,

$$Y(z) = \begin{cases} O \begin{pmatrix} 1 & |z-1|^\alpha \\ 1 & |z-1|^\alpha \end{pmatrix}, & \alpha < 0 \\ O \begin{pmatrix} 1 & \log|z-1| \\ 1 & \log|z-1| \end{pmatrix}, & \alpha = 0 \\ O \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & \alpha > 0 \end{cases} \quad (5.116)$$

(Y-RH5) $z \rightarrow -1$ iken,

$$Y(z) = \begin{cases} O \begin{pmatrix} 1 & |z+1|^\beta \\ 1 & |z+1|^\beta \end{pmatrix}, & \beta < 0 \\ O \begin{pmatrix} 1 & \log|z+1| \\ 1 & \log|z+1| \end{pmatrix}, & \beta = 0 \\ O \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & \beta > 0 \end{cases} \quad (5.117)$$

Gösterilebilir ki, (5.114), (Y-RH1)-(Y-RH2)-(Y-RH3) sıradan koşullarını ve uç noktalara ait (Y-RH4)-(Y-RH5) sınır koşullarını sağlayacak şekilde sonlu aralıkta verilmiş olan Fokas, Its ve Kitaev probleminin çözümüdür.

5.5.2 Deift-Zhou Metodu

Literatürde “Steepest Descent Method (En dik yokuş metodu)” olarak da anılan bu metot, son yıllarda (1990 sonrası) geliştirilen ve diferansiyel denklemler için geliştirilmiş diğer klasik metotlara alternatif oluşturan ve daha çok ortogonal polinomlar için Riemann-Hilbert problemlerinde kullanılan bir yöntemdir. Çünkü, Riemann-Hilbert problemlerinin en çok ortaya çıktığı (nonlinear Schrödinger denklemi, Korteweg-de Vries denklemi, Boussinesq denklemi, Burger denklemi, Toda denklemi...vs) alanlarda ağırlık (weight) kavramından bahsedilir. İşte bu ağırlık kavramıyla bağlantılı olarak ortaya çıkan ortogonal polinomların bir integral yada diferansiyel denklem ile temsili mümkün değildir. Dolayısıyla bu polinomlar için söz konusu klasik metotların kullanımı mümkün değildir. Bu manada, Deift ve Zhou, diferansiyel denklem yada integral temsillerinin mümkün olmadığı durumlara uygulanabilir ilk metodu geliştirmişlerdir.

Riemann-Hilbert problemleri için bu metot aşağıdaki biçimde gösterilen, ardışık-açık

transformasyonlardan oluşmaktadır.

$$Y \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow R \quad (5.118)$$

Buradaki amaç bir kontur sistemindeki R fonksiyonu için, bir Riemann-Hilbert problemine ulaşmaktır. Şöyle ki,

R-RH1: R , kompleks düzlemdeki γ konturu üzerinde analitiktir.

R-RH2: $R_+(s) = R_-(s)V(s)$, $s \in \gamma$ koşulu her zamanki gibi vardır.

R-RH3: $z \rightarrow \infty$ iken $R(z) \rightarrow I$ olmalıdır.

Bunların yanı sıra, Y aşağıdaki asimptotik koşullara sahiptir:

$$Y(z) = \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix} \quad (5.119)$$

Y 'nin bu n -bağımlılık hali gösteriyor ki, $Y = Y^{(n)}$ dir ve buna istinaden transformasyon sonucu üretilen fonksiyonlar içinde $T = T^{(n)}$, $S = S^{(n)}$, $R = R^{(n)}$ durumu geçerlidir.

R-RH2'de yer alan sıçrama matrisi de aynı şekilde n 'ye bağlıdır ve $V = V^{(n)}$ dir. Bu durumdan farklı olarak γ konturu n 'ye bağlı değildir. Bulunması gereken sıçrama matrisleri γ 'nin komşuluğunda analitik devama sahip olacaktır:

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } V^n(s) = I + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad R^n(z) = I + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5.120)$$

$Y^{(n)} \rightarrow T^{(n)} \rightarrow S^{(n)} \rightarrow R^{(n)}$ dönüşümleri gerçekleştirildikten sonra $Y^{(n)}$ nin kompleks düzlemdeki asimptotları daha kolay bulunur.

İlk Transformasyon ($Y \rightarrow T$)

$$\varphi(z) = z + (z^2 - 1)^{1/2}, \quad z \in C \setminus [-1, +1] \quad (5.121)$$

olmak üzere aşağıdaki dönüşüm yapılır:

$$T(z) = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} Y(z) \begin{pmatrix} \varphi(z)^{-n} & 0 \\ 0 & \varphi(z)^n \end{pmatrix} \quad (5.122)$$

Buradan yola çıkılarak yapılan hesaplamalar gösterecektir ki,

T-RH1: $T, C[-1,+1]$ bölgesinde analitiktir.

$$\text{T-RH2: } T_+(x) = T_-(x) \begin{pmatrix} \varphi_+(x)^{-2n} & w(x) \\ 0 & \varphi_-(x)^{-2n} \end{pmatrix}, \quad x \in (-1,+1) \text{ şartı sağlanmaktadır.}$$

$$\text{T-RH3: } z \rightarrow \infty \text{ iken } T(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right) \text{ olmaktadır.}$$

T-RH4, T-RH5: $T, \pm 1$ etrafında Y ile aynı davranışa sahiptir.

Bu transformasyon, problemi sonsuzda normalize etme amacı taşır. $z \rightarrow \infty$ iken $T(z)$ 'nin I değerine yaklaşması en önemli noktadır. Çünkü, T çok komplike olan bir sıçrama matrisidir. Bu kısımda ayrıca Szego fonksiyonunda bahsetmek, sonraki kısımlar açısından kolaylık olacaktır.

$$n \rightarrow \infty \quad \text{iken} \quad \frac{2^n \pi_n(z)}{\varphi(z)^n} = \frac{\tilde{D}(\infty)}{\tilde{D}(z)}, \quad z \in [-1,+1] \subset C \quad (5.123)$$

Bu eşitliği sağlayan $\tilde{D}$ fonksiyonuna Szego fonksiyonu denir ve aşağıda tarif edilen Szego şartlarını sağlayan w ağırlıkları için geçerlidir:

$$\int_{-1}^1 \frac{\log w(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt > -\infty \quad (5.124)$$

Szego fonksiyonu $C \setminus [-1,+1]$ aralığında analitiktir ve hiçbir zaman sıfır değildir. Bu transformasyonlar sırasında Szego fonksiyonlarının kullanılmasının bir diğer nedeni ise T matrisinin belli terimlerinin sonsuzda limite sahip oldukları ve bu limitin ağırlıkla ilişkili Szego fonksiyonlarından oluşan terimlerle ifade edilebilmesidir.

İkinci Transformasyon ($T \rightarrow S$)

İkinci dönüşüm T-RH2'de yer alan T sıçrama matrisinin faktörizasyonundan ibarettir.

$$\begin{pmatrix} \varphi_+^{-2n} & w \\ 0 & \varphi_-^{-2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{w} \varphi_-^{-2n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & w \\ -\frac{1}{w} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{w} \varphi_+^{-2n} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.125)$$

Yukarıdaki faktörizasyona göre, artık bir yerine 3 adet sıçrama işlemi yapılacaktır:

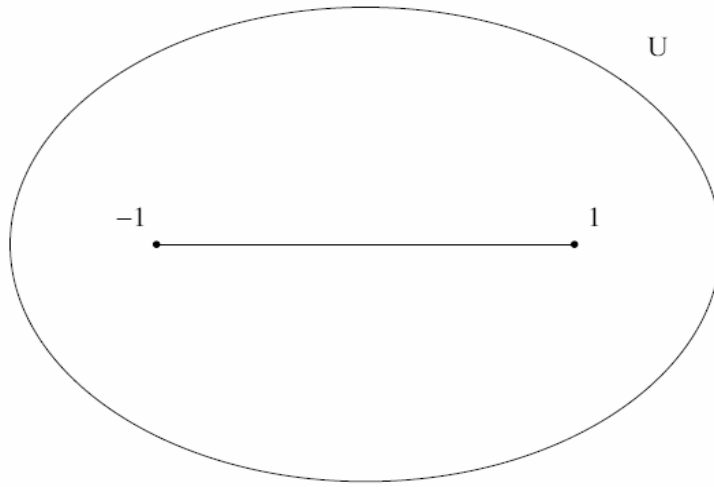
İlk olarak $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{w}\varphi_-^{-2n} & 1 \end{pmatrix}$, hemen arkasından $\begin{pmatrix} 0 & w \\ -\frac{1}{w} & 0 \end{pmatrix}$ ve son olarak $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{w}\varphi_+^{-2n} & 1 \end{pmatrix}$

sıçramaları yapılacaktır. Modifiye edilmiş Jacobi ağırlığı,

$$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta h(x) \quad (5.126)$$

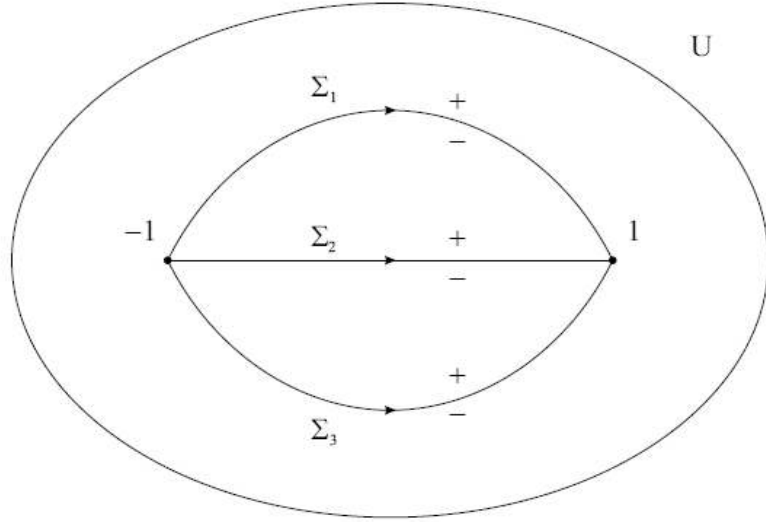
ile ifade edilmektedir. Buradaki h , $[-1,+1]$ 'de pozitif ve $[-1,+1]$ 'in komşuluğunda analitiktir.

Bu komşuluğu U ile gösterelim:



Şekil 5.1 h 'in analitik olduğu $[-1,+1]$ 'in U komşuluğu

Daha sonra $(-1,+1)$ civarında lens şeklinde bir bölge ele alalım. Bu lensin U içerisinde kaldığını varsayalım. Lensin üst ve alt parçalarını sırasıyla Σ_1 ve Σ_3 ile $[-1,+1]$ aralığını ise Σ_2 ile gösterelim.



Şekil 5.2 U içerisinde çizilen lens

Dönüşüm sonucunda oluşan S , yukarıda çizdiğimiz lense göre aşağıdaki biçimde tanımlanacaktır:

$$S = \begin{cases} T & (\text{lensin dışında}) \\ T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{w} \varphi^{-2n} & 1 \end{pmatrix} & (\text{lensin üst yarı parçasında}) \\ T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{w} \varphi^{-2n} & 1 \end{pmatrix} & (\text{lensin alt yarı parçasında}) \end{cases} \quad (5.127)$$

Oluşan S fonksiyonu aşağıdaki Riemann-Hilbert problemini gerçektir:

S-RH1: $S, \mathbb{C} \setminus (\Sigma_1 \cup [-1, 1] \cup \Sigma_3)$ bölgesinde analitiktir.

$$\text{S-RH2: } (-1, 1) \text{ aralığında } S_+ = S_- \begin{pmatrix} 0 & w \\ -\frac{1}{w} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_1^0 \text{ ve } \Sigma_3^0 \text{ üzerinde } S_+ = S_- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{w} \varphi^{-2n} & 1 \end{pmatrix}$$

S-RH3: $z \rightarrow \infty$ iken $S(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right)$

S-RH4: $z \rightarrow 1$ iken,

$$\alpha < 0 \text{ durumunda } S(z) = O \begin{pmatrix} 1 & |z-1|^\alpha \\ 1 & |z-1|^\alpha \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 0 \text{ durumunda } S(z) = O \begin{pmatrix} \log|z-1| & \log|z-1| \\ \log|z-1| & \log|z-1| \end{pmatrix}$$

$$\alpha > 0 \text{ ve lensin dışından yaklaşıldığında } S(z) = O \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha > 0 \text{ ve lensin dışından yaklaşıldığında } S(z) = O \begin{pmatrix} |z-1|^{-\alpha} & 1 \\ |z-1|^{-\alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

S-RH5: $z \rightarrow -1$ iken, benzer koşullar geçerlidir. Tabi bu kez koşullardaki α 'nın yerini β alır.

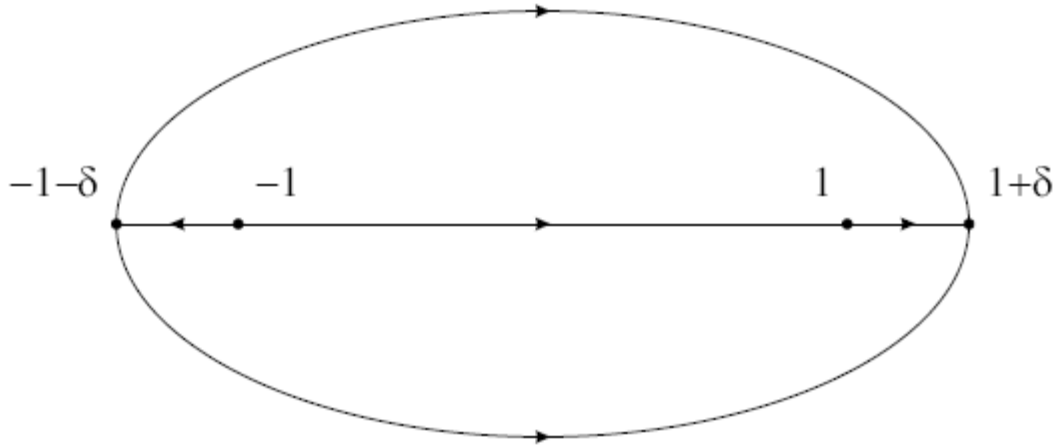
Gösterilebilir ki, (S-RH1-2-3-4-5) koşullarına sahip problemin çözümü tektir. α ve β 'nın bazı özel değerleri kullanılarak bu yaklaşım basitleştirilebilir:

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2} \tag{5.128}$$

olacak şekilde alırsak ağırlık,

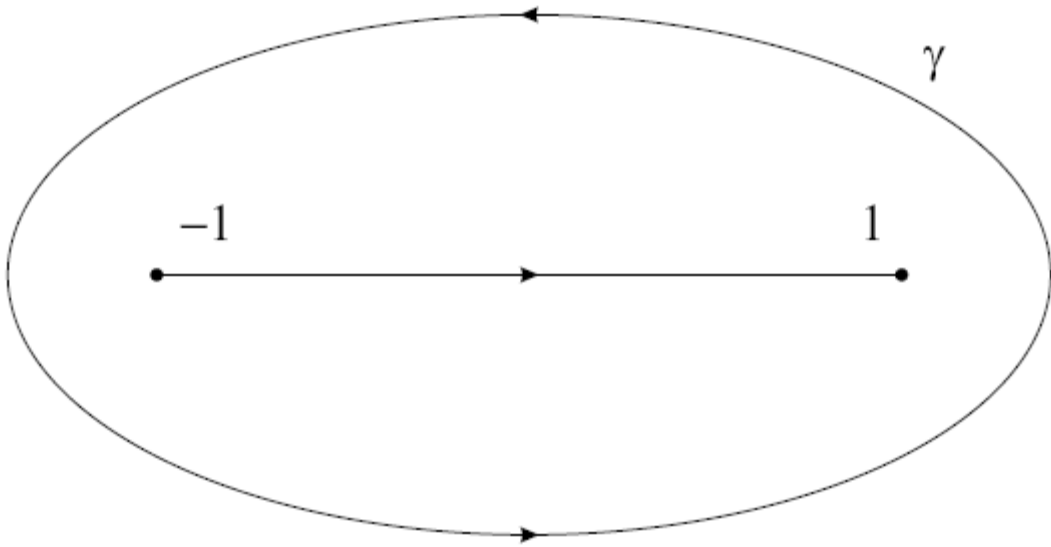
$$w(z) = (1 - z^2)^{-1/2} h(z) \tag{5.129}$$

$\delta > 0$ olacak şekilde bu kabule göre daha önce çizdiğimiz lens aşağıdaki şekle gelir:



Şekil 5.3 $\alpha=\beta=-1/2$ özel durumunda çizilen lens

Bu özel durumda S , sadece $[-1,1]$ aralığında ve onu saran basit kapalı bir eğri üzerinde olmak üzere iki sıçrama kombinasyonuna sahiptir. γ bu eğriyi ifade etsin.



Şekil 5.4 $[-1,1]$ aralığını saracak şekilde çizilen γ kapalı eğrisi.
 S fonksiyonu sadece $[-1,1]$ aralığı ve γ üzerinde sıçrama yapmaktadır.

Şimdi durumu daha da özelleştirelim ve γ konturu üzerindeki sıçramanın ihmal edildiği aşağıdaki problemi dikkate alalım:

$$\begin{aligned}
&\text{N-RH1: } N, \mathbb{C} \setminus [-1,1] \text{ 'de analitiktir.} \\
&\text{N-RH2: } x \in (-1,1) \text{ için } N_+(x) = N_-(x) \begin{pmatrix} 0 & w(x) \\ -\frac{1}{w(x)} & 0 \end{pmatrix} \text{ şartı sağlanır.} \\
&\text{N-RH3: } z \rightarrow \infty \text{ iken } N(z) \rightarrow I \\
&\text{N-RH4: } z \rightarrow 1 \text{ iken } N(z) = O \begin{pmatrix} 1 & |z-1|^{-1/2} \\ 1 & |z-1|^{-1/2} \end{pmatrix} \\
&\text{N-RH5: } z \rightarrow -1 \text{ iken } N(z) = O \begin{pmatrix} 1 & |z+1|^{-1/2} \\ 1 & |z+1|^{-1/2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.130}$$

(5.130) probleminin çözümü daha önce anlattığımız Szego fonksiyonu vasıtasıyla ifade edilir:

$$\begin{aligned}
&\text{D-RH1: } D, \mathbb{C} \setminus [-1,1] \text{ 'de analitiktir ve sıfır değeri yoktur.} \\
&\text{D-RH2: } x \in (-1,1) \text{ için } D_+(x)D_-(x) = w(x) \\
&\text{D-RH3: } D \text{ 'nin sonsuzda limiti mevcut ve pozitif bir reel sayıdır.} \\
&\text{D-RH4: } z \rightarrow 1 \text{ iken } D(z) = O(|z-1|^{\alpha/2}) \\
&\text{D-RH5: } z \rightarrow -1 \text{ iken } D(z) = O(|z+1|^{\beta/2})
\end{aligned} \tag{5.131}$$

(5.131) probleminin çözümü olan $D(z)$ Szego fonksiyonudur. Hatırlanacağı gibi problemde verilen ağırlık aşağıdaki Szego koşulunu sağlıyor ise, Szego fonksiyonu o ağırlık için mevcuttur:

$$\int_{-1}^1 \frac{\log w(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt > -\infty \tag{5.132}$$

D , Szego fonksiyonu ve,

$$a(z) = \frac{(z-1)^{1/4}}{(z+1)^{1/4}} \tag{5.133}$$

olmak üzere (5.130) probleminin çözümü şöyledir:

$$N(z) = \begin{pmatrix} D_\infty & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_\infty} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a(z) + a^{-1}(z)}{2} & \frac{a(z) - a^{-1}(z)}{2i} \\ \frac{a(z) - a^{-1}(z)}{-2i} & \frac{a(z) + a^{-1}(z)}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{D(z)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{D(z)} \end{pmatrix} \quad (5.134)$$

Üçüncü Transformasyon ($S \rightarrow R$)

$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ özel durumunda aşağıdaki dönüşüm uygulanmaktadır:

$$R(z) = S(z)N^{-1}(z) \quad (5.135)$$

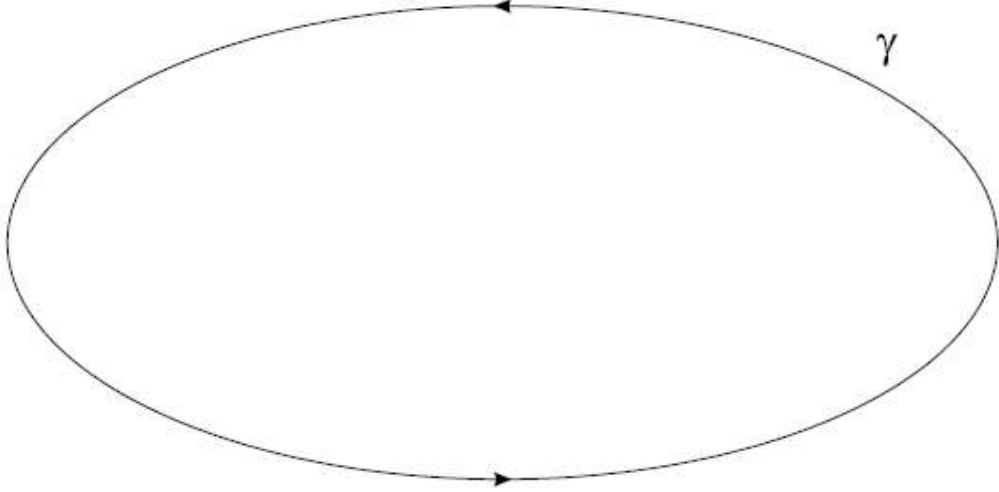
Burada S ve N $(-1,1)$ aralığında aynı sıçramaya sahiptir ve kolayca görülmektedir ki, $x \in (-1,1)$ için $R_+(x) = R_-(x)$ yazılabilir. R 'nin -1 ve $+1$ bitim noktalarında tekillığe sahip olabilme durumu söz konusudur. N 'nin determinanı 1 olduğundan,

$$z \rightarrow 1 \text{ iken } N^{-1}(z) = O \begin{pmatrix} |z-1|^{-1/2} & |z-1|^{-1/2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.136)$$

ve buradan $z \rightarrow 1$ iken ,

$$\begin{aligned} R(z) &= O \begin{pmatrix} 1 & |z-1|^{-1/2} \\ 1 & |z-1|^{-1/2} \end{pmatrix} O \begin{pmatrix} |z-1|^{-1/2} & |z-1|^{-1/2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= O \begin{pmatrix} |z-1|^{-1/2} & |z-1|^{-1/2} \\ |z-1|^{-1/2} & |z-1|^{-1/2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.137)$$

bulunur. Açıkça (5.137)'den görülüyor ki, $z = 1$ noktasında R kaldırılabilir tekillığe sahiptir. Diğer bitim noktası için aynı denklikler tekrarlanır ise, $z = -1$ 'inde kaldırılabilir bir tekillik olduğu görülür. Metodu anlatmaya başlarken ulaşmak istediğimiz R 'nin sadece γ üzerinde analitik olduğunu söylemiştik:



Şekil 5.5 Deift-Zhou metodundaki son dönüşüm ile ulaşılan R fonksiyonunun sıçrama yaptığı tek bölge olan γ eğrisi

Şimdi R için aşağıdaki Riemann problemine sahibiz:

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{R-RH1: } R, \text{ kompleks düzlemdeki } \gamma \text{ konturu üzerinde analitiktir.} \\
 &\text{R-RH2: } R_+(s) = R_-(s)V(s), \quad s \in \gamma \\
 &s \in \gamma \cap \{\text{Im } z < 0\} \text{ için } V(s) = N(s) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{w(s)}\varphi(s)^{-2n} & 1 \end{pmatrix} N^{-1}(s) \\
 &s \in \gamma \cap \{\text{Im } z > 0\} \text{ için } V(s) = N(s) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{w(s)}\varphi(s)^{-2n} & 1 \end{pmatrix} N^{-1}(s) \\
 &\text{R-RH3: } z \rightarrow \infty \text{ iken } R(z) \rightarrow I \text{ olmalıdır.}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.138)$$

(5.138) problemi çözülüp R tespit edildikten sonra $Y \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow R$ şeklindeki dönüşümler tersten takip edilerek (5.119)'da belirtilen şartı göz önüne alırsak, $n \rightarrow \infty$ iken Y 'ye ait asimptotikleri buluruz.

6. UYGULAMALAR

Bu bölümde 5 adet Riemann sınır değer probleminin tam çözümünü gerçekleştireceğiz. Daha sonra bu çözümlerden hareketle bazı sonuçlara varmaya çalışacağız. Riemann probleminin günümüzde tam çözümünden çok, problemin çözülebilir olup-olmadığı, eğer çözülebilir ise çözümlerinin sayısının ne olduğu, pek çok fonksiyon sınıfına bu probleminden doğan yaklaşımın uygulanması gibi konulara yer verilmektedir.

Bizim burada tam çözümler ile uğraşmamızın temel nedeni tam çözümler aranırken zaten yukarıdaki farklı sorularında cevabının verilmek zorunda olmasıdır.

Çözüm yöntemi olarak ilk 4 problemde F.D.Gakhov'un, son problemde ise N.I.Muskhelishvili'nin kullandığı yöntemlerden yararlanacağız. Niçin böyle bir seçim yaptığımız ise son bölümde ayrıntısı ile tartışılacaktır.

İlk 4 problemde çalışacağımız kontur sonlu sayıda basit eğrilerden oluşmakta ve problemin katsayısı, kontur üzerinde sıfır değeri almasını sağlayan köklere -veya kutup noktalarına sahip olmayan rasyonel bir fonksiyon olacak şekilde ele alınacaktır. Son problemde ise kontur ayrıca tarif edilecek, problemin katsayısı ise kontur üzerinde süreksiz bir fonksiyon olacaktır.

6.1 Uygulama1

Aşağıdaki Riemann problemini çözelim.

$$\Phi^+(t) = \frac{t}{t^2 - 1} \Phi^-(t) + \frac{t^3 - t^2 + 1}{t^2 - t}, \quad \Phi^-(\infty) = 0$$

L, keyfi seçilmiş düzgün-kapalı bir kontur olup aşağıdaki formdadır:

a-) L, $z_1 = 0$ noktasını içerir ve $z_2 = 1$, $z_3 = -1$ noktalarını içermez.

b-) L, $z_1 = 0$ ve $z_2 = 1$ noktalarını içerir, $z_3 = -1$ noktasını içermez.

c-) L, $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ ve $z_3 = -1$ noktalarını içerir.

d-) L, $z_2 = 1$ ve $z_3 = -1$ noktalarını içerir, $z_1 = 0$ noktasını içermez.

Her durumu ayrı ayrı inceleyip çözümü araştıralım.

a-)

Gakhov metoduna göre problemi,

$$\Phi^+(t) = \frac{p(t)}{q(t)} \Phi^-(t) + g(t) \text{ şeklinde ele alırsak,}$$

$$\frac{p(t)}{q(t)} = \frac{t}{t^2 - 1}$$

$$\left. \begin{array}{ll} p_+(t) = t & p_-(t) = 1 \\ q_+(t) = 1 & q_-(t) = t^2 - 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} m_+ = 1 \\ n_+ = 0 \end{array} \right\} x = m_+ - n_+ = 1$$

bulunmuş olur. Gakhov'un yönteminden hatırlanacağı üzere, homojen problemin kanonik fonksiyonu için ayrıca bir hesaplamaya gerek yoktur.

$$(t^2 - 1)\Phi^+(t) - t\Phi^-(t) = (t^2 - 1) \frac{(t^3 - t^2 + 1)}{(t^2 - t)}$$

$$(t^2 - 1)\Phi^+(t) - t\Phi^-(t) = \frac{1}{t}(t^3 - t^2 + 1)(t + 1) \quad \text{şekline problem gelmiş olur.}$$

(3.38)'den hareketle,

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} g(\tau) \frac{d\tau}{\tau - z}$$

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\tau^2 - 1)}{1} \cdot \frac{(\tau^3 - \tau^2 + 1)}{(\tau^2 - \tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\tau - 1)(\tau + 1)}{\tau(\tau - 1)} \cdot (\tau^3 - \tau^2 + 1) \cdot \frac{d\tau}{\tau - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\tau^4 - \tau^3 + \tau + \tau^3 - \tau^2 + 1)}{\tau(\tau - z)} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\tau^3 + 1 - \tau + \frac{1}{\tau})}{(\tau - z)} d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\tau^3 - \tau + 1)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1/\tau}{\tau - z} d\tau
\end{aligned}$$

Bu integrallerin hesaplanması için şu yardımcı bilgiyi verelim:

Yardımcı Bilgi: Cauchy formüllerinden hatırlanacağı gibi,

$f(z)$, D^+ 'da analitik ve $D^+ + L$ 'de sürekli bir fonksiyon ise,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} f(z), & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \end{cases}$$

$f(z)$, D^- 'de analitik ve $D^- + L$ 'de sürekli bir fonksiyon ise,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^+ \\ -f(z) + f(\infty), & z \in D^- \end{cases}$$

olmaktadır. Bu bilgiye dayanarak, şimdi yukarıdaki iki integrali hesaplayabiliriz.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\tau^3 - \tau + 1)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} z^3 - z + 1 & z \in D^+ \\ 0 & z \in D^- \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1/\tau}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} 0 & z \in D^+ \\ -\frac{1}{z} & z \in D^- \end{cases}$$

Buna göre özel çözümü şu şekilde yazabiliriz:

$$\psi^+(z) = z^3 - z + 1 \quad \psi^-(z) = -\frac{1}{z}$$

(3.38)'den hareketle şimdi çözümü yazalım.

$$\Phi^+(z) = \frac{p_-(z)}{q_-(z)} [\psi(z) + X_1^-(z)]$$

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{z^2 - 1} [(z^3 - z + 1) + c] = \frac{z^3 - z + 1}{z^2 - 1} + \frac{c}{z^2 - 1}$$

$$\Phi^-(z) = \frac{q_+(z)}{p_+(z)} [\psi(z) + X_1^-(z)]$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{z} \left[-\frac{1}{z} + c \right] = -\frac{1}{z^2} + \frac{c}{z}$$

Görüldüğü gibi problemin genel çözümü bir adet keyfi sabit içermektedir. Daha fazla düzenleme yapmak için c yerine c-1 keyfi sabitini koyalım.

$$\Phi^+(z) = \frac{z^3 - z + 1}{z^2 - 1} + \frac{c}{z^2 - 1} - \frac{1}{z^2 - 1} = \frac{z(z^2 - 1)}{z^2 - 1} + \frac{c}{z^2 - 1}$$

$$\Phi^+(z) = z + \frac{c}{z^2 - 1} \text{ olarak bulunur. Benzer şekilde,}$$

$$\Phi^-(z) = -\frac{(z+1)}{z^2} + \frac{c}{z} \text{ bulunur.}$$

b-)

$$\left. \begin{array}{ll} p_+(t) = t & p_-(t) = 1 \\ q_+(t) = t-1 & q_-(t) = t+1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} m_+ = 1 \\ n_+ = 1 \end{array} \right\} x = m_+ - n_+ = 0$$

şeklinde problemin katsayısına ait çarpanlar yazılır. Buradan,

$$(t+1)\Phi^+(t) - \frac{t}{t-1}\Phi^-(t) = \frac{(t+1)(t^3 - t^2 + 1)}{(t^2 - t)}$$

biçiminde problemin sınır koşulları yazılabilir. (3.38)'den hareketle,

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L (\tau+1) \cdot \frac{(\tau^3 - \tau^2 + 1)}{(\tau^2 - \tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\tau^4 - \tau^3 + \tau + \tau^3 - \tau^2 + 1)}{\tau(\tau-1)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\tau^3 - \tau + 1 + \frac{1}{\tau})}{(\tau-1)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\tau(\tau-1)(\tau+1)}{\tau-1} + \frac{\tau+1}{\tau(\tau-1)} \right] \frac{d\tau}{\tau - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\tau^2 + \tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tau+1}{\tau(\tau-1)} d\tau \\ &= \begin{cases} z^2 + z & z \in D^+ \\ -\frac{z+1}{z(z-1)} & z \in D^- \end{cases} \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi çözümü yazalım. İndeks sıfır çıktığından problemin tek çözümü olacaktır. (Çözüm keyfi sabit içermeyecek şekildedir.)

$$\Phi^+(z) = \frac{p_-(z)}{q_-(z)} \psi^+(z) = \frac{1}{z+1} z(z+1) \quad \Longrightarrow \quad \Phi^+(z) = z$$

$$\Phi^-(z) = \frac{q_+(z)}{p_+(z)} \psi^-(z) = \frac{z-1}{z} \left(-\frac{(z+1)}{z(z-1)} \right) \Rightarrow \Phi^-(z) = -\frac{z+1}{z^2}$$

c-)

$$\left. \begin{array}{ll} p_+(t) = t & p_-(t) = 1 \\ q_+(t) = t^2 - 1 & q_-(t) = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} m_+ = 1 \\ n_+ = 2 \end{array} \right\} \quad x = m_+ - n_+ = -1$$

İndeks negatif çıktığından $|x|$ adet ek koşul sağlanırsa çözüm araştırılabilir. (3.39)'dan hatırlatmak gerekirse,

$$\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} g(\tau) \tau^{k-1} d\tau = 0, \quad (k=1,2,\dots,-x)$$

şartları sağlanmalıdır. İndeks, -1 çıktığından bir adet ek koşul gereklidir:

$$\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} g(\tau) d\tau = 0 \quad \text{olmalıdır. Bu eşitlikteki integrali oluşturalım:}$$

$$\int_L \frac{\tau^3 - \tau^2 + 1}{\tau^2 - \tau} d\tau = \int_L \tau \cdot d\tau + \int_L \frac{d\tau}{\tau - 1} - \int_L \frac{d\tau}{\tau}$$

Bu eşitliği her terimin sırası aynı kalacak şekilde $I = I_1 + I_2 - I_3$ ile gösterelim. Buna göre I_2 ve I_3 integrallerinin değeri daha önce hatırlattığımız Cauchy formüllerine göre $2\pi i$ değerine eşittir.

I_1 integralini ise şu şekilde hesaplayalım:

$\tau = e^{it}$ dönüşümü yapılırsa,

$$I_1 = i \int_0^{2\pi} e^{2it} dt = \frac{1}{2} (e^{2\pi i} - e^0) \quad \text{olur. Bilindiği gibi,}$$

$z = x + iy$ iken $e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ dir. Buna göre,

$$I_1 = \frac{1}{2} [(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) - 1] = \frac{1}{2} (1 - 1) = 0 \quad \text{bulunur.}$$

Bulduğumuz bu değerlere göre:

$I = 0 + 2\pi i - 2\pi i = 0$ olur ki, böylelikle $|x|$ adet ek koşul sağlanmış olur. Böylece problem tek çözüme sahip olacaktır. (3.38)'den hareketle,

$$\begin{aligned}
 \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\tau^3 - \tau^2 + 1)}{(\tau^2 - \tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\tau(\tau^2 - \tau)}{\tau^2 - \tau} + \frac{1}{\tau^2 - \tau} \right] \frac{d\tau}{\tau - z} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tau}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau - z} d\tau \quad \text{Cauchy formülüne göre,} \\
 &= \begin{cases} z & z \in D^+ \\ -\frac{1}{z(z-1)} & z \in D^- \end{cases}
 \end{aligned}$$

bulunur. Çözümü yazalım. (3.38)'den hareketle:

$$\Phi^+(z) = (1/1).z = z \quad \Phi^-(z) = -\frac{(z^2 - 1)}{z} \cdot \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{z+1}{z^2}$$

d-)

$$\left. \begin{array}{ll} p_+(t) = 1 & p_-(t) = t \\ q_+(t) = t^2 - 1 & q_-(t) = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} m_+ = 0 \\ n_+ = 2 \end{array} \right\} \quad x = m_+ - n_+ = -2$$

İndeksin negatif çıkması halinde çözümün olabilmesi için bilindiği gibi $|x|$ adet ek koşulun sağlanması gerekiyor. $\psi(z)$ 'yi hesaplamadan önce bu ek koşulların sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim:

$$\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} g(\tau) \tau^{k-1} d\tau = 0, \quad (k=1,2)$$

$$\begin{aligned}
k=1 \quad \Rightarrow \quad \int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} g(\tau) d\tau &= \int_L \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\tau^3 - \tau^2 + 1}{\tau^2 - \tau} d\tau \\
&= \int_L \frac{\tau^3 - \tau^2 + 1}{\tau^3 - \tau^2} d\tau \\
&= \int_L \frac{\tau - 1 + \frac{1}{\tau^2}}{\tau - 1} d\tau \\
&= \int_L \left(1 + \frac{1}{\tau^2(\tau - 1)} \right) d\tau \\
&= \int_L \left(1 + \frac{1}{\tau - 1} - \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau^2} \right) d\tau \\
&= \int_L d\tau + \int_L \frac{1}{\tau - 1} d\tau - \int_L \frac{1}{\tau} d\tau - \int_L \frac{1}{\tau^2} d\tau \\
&= 0 + 2\pi i - 0 - 0 = 2\pi i
\end{aligned}$$

Son basamaktaki 4 integralin çözümü için bir yardımcı bilgi daha verelim:

Yardımcı Bilgi: $\int_L (z - z_0)^m dz$ integrali $m = -1$ için $2\pi i$, diğer durumlarda sıfıra eşittir.

Bu davranışın tek istisnası L 'nin z_0 noktasını kapsamamasıdır. Eğer böyle bir durum varsa (ki yukarıda çözdüğümüz integrallerde var) $m = -1$ durumunda da integral sıfıra eşit olur.

$$\begin{aligned}
k=2 \quad \Rightarrow \quad \int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} g(\tau) \tau \cdot d\tau &= \int_L \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\tau^3 - \tau^2 + 1}{\tau^2 - \tau} \cdot \tau \cdot d\tau \\
&= \int_L \left(\tau + \frac{1}{\tau^2 - \tau} \right) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_L \left(\tau - \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau-1} \right) d\tau \\
&= \int_L \tau \cdot d\tau - \int_L \frac{1}{\tau} d\tau + \int_L \frac{1}{\tau-1} d\tau \\
&= 0 - 0 + 2\pi i = 2\pi i
\end{aligned}$$

Böylelikle iki koşulda sağlanmadı. Aslında koşullardan sadece birinin de sağlanmaması yeterlidir. Bu durumda problemin çözümü yoktur.

6.2 Uygulama2

Aşağıdaki Riemann problemini çözelim.

$$\Phi^+(t) = (t^2 - 1)\Phi^-(t) + \frac{1}{t-1}, \quad \Phi^-(\infty) = 0$$

L, keyfi seçilmiş düzgün-kapalı bir kontur olup aşağıdaki formdadır:

a-) L, $z_1 = 1$ noktasını içerir ve $z_2 = -1$ noktasını içermez.

b-) L, $z_2 = -1$ noktasını içerir ve $z_1 = 1$ noktasını içermez.

c-) L, $z_1 = 1$ ve $z_2 = -1$ noktalarını içermez.

Her üç durumu ayrı ayrı inceleyip çözümü araştıralım.

$$\text{a-)} \quad \frac{p(t)}{q(t)} = \frac{t^2 - 1}{1}$$

$$\left. \begin{array}{ll} p_+(t) = (t-1) & p_-(t) = (t+1) \\ q_+(t) = 1 & q_-(t) = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} m_+ = 1 \\ n_+ = 0 \end{array} \right\} \quad x = m_+ - n_+ = 1$$

Gakhov'un yönteminden hatırlanacağı üzere, homojen problemin kanonik fonksiyonu için ayrıca bir hesaplamaya gerek yoktur. (3.38)'den hareketle,

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau+1} \cdot \frac{1}{\tau-1} \cdot \frac{d\tau}{\tau-z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\frac{\tau^2-1}{\tau-z}} d\tau \quad \text{Cauchy formülünü kullanarak,}$$

$$= \begin{cases} 0 & z \in D^+ \\ -\frac{1}{z^2-1} & z \in D^- \end{cases}$$

elde edilmiş olur. Şimdi çözümü yazalım. (3.38)'den hareketle,

$$\Phi^+(z) = \frac{z+1}{1} [0+c] = c(z+1)$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{z-1} \left[-\frac{1}{z^2-1} + c \right] = -\frac{1}{(z^2-1)(z-1)} + \frac{c}{z-1}$$

b-)

$$\left. \begin{array}{ll} p_+(t) = (t+1) & p_-(t) = (t-1) \\ q_+(t) = 1 & q_-(t) = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} m_+ = 1 \\ n_+ = 0 \end{array} \right\} \quad x=1$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau-1} \cdot \frac{1}{\tau-1} \cdot \frac{d\tau}{\tau-z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{(\tau-1)^2} d\tau \quad \text{Cauchy formülünü kullanarak,}$$

$$= \begin{cases} 0 & z \in D^+ \\ -\frac{1}{(z-1)^2} & z \in D^- \end{cases}$$

bulunur. Aynı şekilde (3.38)'den hareketle çözümü yazalım:

$$\Phi^+(z) = \frac{z-1}{1}[0+c] = c(z-1)$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{z+1} \left[-\frac{1}{(z-1)^2} + c \right] = -\frac{1}{(z+1)(z-1)^2} + \frac{c}{z+1}$$

c-)

$$\left. \begin{array}{ll} p_+(t) = 1 & p_-(t) = t^2 - 1 \\ q_+(t) = 1 & q_-(t) = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} m_+ = 0 \\ n_+ = 0 \end{array} \right\} \quad x=0$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau^2 - 1} \cdot \frac{1}{\tau - 1} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\frac{1}{(\tau-1)^2(\tau+1)}}{\tau - z} d\tau \quad \text{Cauchy formülünü kullanarak,}$$

$$= \begin{cases} 0 & z \in D^+ \\ -\frac{1}{(z-1)^2(z+1)} & z \in D^- \end{cases}$$

bulunur. Problemin indeksi sıfır olduğundan çözüm tektir, keyfi sabit içermez.:

$$\Phi^+(z) = \frac{z^2 - 1}{1}[0] = 0$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{1} \left[-\frac{1}{(z-1)^2(z+1)} \right] = -\frac{1}{(z-1)^2(z+1)}$$

6.3 Uygulama3

Aşağıdaki Riemann problemini çözelim.

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{(t-1)(t-2)} \Phi^-(t) + t^2 - 1, \quad \Phi^-(\infty) = 0$$

L, keyfi seçilmiş düzgün-kapalı bir kontur olup aşağıdaki formdadır:

a-) L, $z_1 = 1$ noktasını içerir ve $z_2 = 2$ noktasını içermez.

b-) L, $z_2 = 2$ noktasını içerir ve $z_1 = 1$ noktasını içermez.

c-) L, $z_1 = 1$ ve $z_2 = 2$ noktalarını içerir.

d-) L, $z_1 = 1$ ve $z_2 = 2$ noktalarını içermez.

Her dört durumu ayrı ayrı inceleyip çözümü araştıralım.

a-)

$$\frac{p(t)}{q(t)} = \frac{1}{(t-1)(t-2)} \text{ ve } g(t) = t^2 - 1 \text{ olarak verilmiştir. Buna göre:}$$

$$\left. \begin{array}{ll} p_+(t) = 1 & p_-(t) = 1 \\ q_+(t) = t-1 & q_-(t) = t-2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} m_+ = 0 \\ n_+ = 1 \end{array} \right\} x = -1$$

İndeks negatif çıktığından $|x|$ adet ek koşul sağlanırsa çözüm araştırılabilir. (3.39)'dan hatırlatmak gerekirse,

$$\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} g(\tau) \tau^{k-1} d\tau = 0, \quad (k=1,2,\dots,-x)$$

şartları sağlanmalıdır. İndeks, -1 çıktığından bir adet ek koşul gereklidir:

$$\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} g(\tau) d\tau = 0 \text{ olmalıdır. Bu eşitlikteki integrali oluşturalım:}$$

$$\int_L (\tau-2)(\tau^2-1) d\tau = \int_L (\tau^3 - 2\tau^2 - \tau + 2) d\tau = \mathbf{I}$$

I integralini hesaplayabilmek için bir yardımcı bilgi verelim.

Yardımcı Bilgi: $\int_L z^n dz$ integralinin çözümü için $z = e^{it}$ dönüşümü yapılırsa,

$$\int_L z^n dz = \int_0^{2\pi} e^{nit} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{(n+1)it} dt$$

$$= \frac{1}{n+1} [e^{2\pi i(n+1)} - e^0] = \frac{1}{n+1} [\cos 2\pi + i \sin 2\pi - 1] = 0 \quad (n \neq -1)$$

olduğu görülür. Bu yardımcı bilgiden sonra problemimize geri dönelim. **I** integralini hesaplayalım.

$$I = \int_L \tau^3 d\tau - 2 \int_L \tau^2 d\tau - \int_L \tau \cdot d\tau + 2 \int_L d\tau = 0 - 0 - 0 + 0 = 0$$

olur ki, böylelikle ek koşul sağlanmış olur. O nedenle özel çözüme geçelim:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L (\tau^2 - 1)(\tau - 2) \frac{d\tau}{\tau - z} \quad \text{Cauchy formülüne göre,}$$

$$= \begin{cases} (z^2 - 1)(z - 2) & z \in D^+ \\ 0 & z \in D^- \end{cases}$$

olur. (3.38)'den hareketle çözümü yazalım:

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{z-2} (z^2 - 1)(z - 2) = z^2 - 1$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{z-1} \cdot 0 = 0$$

b-)

L'nin içerdiği noktalardan hareketle problemin katsayısı(coefficient) aşağıdaki şekilde

çarpanlar oluşturur.

$$\left. \begin{array}{ll} p_+(t) = 1 & p_-(t) = 1 \\ q_+(t) = t-2 & q_-(t) = t-1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} m_+ = 0 \\ n_+ = 1 \end{array} \right\} \quad x = -1$$

Yukarıdaki kısımda olduğu gibi, indeks negatif olduğundan benzer ek koşul burada da sağlanmalıdır.

$$\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} g(\tau) d\tau = 0 \quad \text{olmalıdır. Gerçekten,}$$

$$\int_L (\tau-1)(\tau^2-1) d\tau = \int_L (\tau^3 - \tau^2 - \tau + 1) d\tau = 0 \quad \text{olduğu görülür.}$$

Buna göre çözüme devam edebiliriz,

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L (\tau^2-1)(\tau-1) \frac{d\tau}{\tau-z}$$

$$= \begin{cases} (z^2-1)(z-1) & z \in D^+ \\ 0 & z \in D^- \end{cases}$$

Yine problemin tek çözümü olacaktır:

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{z-1} (z^2-1)(z-1) = z^2-1, \quad \Phi^-(z) = 0$$

olarak bulunur ki, önceki çözümle tamamen aynıdır.

c-)

$$\left. \begin{array}{ll} p_+(t) = 1 & p_-(t) = 1 \\ q_+(t) = (t-1)(t-2) & q_-(t) = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} m_+ = 0 \\ n_+ = 2 \end{array} \right\} \quad x = -2$$

Bu kez 2 adet ek koşul sağlanırsa çözüm araştırılabilecektir:

$$\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} g(\tau) \tau^{k-1} d\tau = 0 \quad , \quad (k=1,2)$$

$$k=1 \implies \int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} g(\tau) d\tau = \int_L (\tau^2 - 1) d\tau = 0$$

$$k=2 \implies \int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} g(\tau) \tau d\tau = \int_L (\tau^3 - \tau) d\tau = 0$$

olduğu kolayca görülür. Ek koşulların ikisi de sağlandığından çözüme devam edebiliriz.

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tau^2 - 1}{\tau - z} d\tau \\ &= \begin{cases} z^2 - 1 & z \in D^+ \\ 0 & z \in D^- \end{cases} \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre,

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{1} \cdot (z^2 - 1) = z^2 - 1 \quad , \quad \Phi^-(z) = \frac{(z-1)(z-2)}{1} \cdot 0 = 0$$

olur ki, bu yine aynı çözümdür.

d-)

$$\left. \begin{array}{ll} p_+(t) = 1 & p_-(t) = 1 \\ q_+(t) = 1 & q_-(t) = (t-1)(t-2) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} m_+ = 0 \\ n_+ = 0 \end{array} \right\} \quad x = 0$$

İndeks negatif olmadığından önceki bölümlerden farklı olarak bu sefer ek koşul aramıyoruz.

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\tau-1)(\tau-2)(\tau^2-1)}{\tau-z} d\tau$$

$$= \begin{cases} (z^2 - 1)(z - 1)(z - 2) & z \in D^+ \\ 0 & z \in D^- \end{cases}$$

Yine (3.38)'den hareketle,

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}(z^2 - 1)(z-1)(z-2) = z^2 - 1, \quad \Phi^-(z) = 0$$

olarak problem çözülmüş olur. Burada önemli bir sonuç meydana çıkmaktadır. Görüldüğü gibi L 'nin içerdiği yada içermediği noktalara bağlı olarak problemin çözümü değişmemiş ve her kısımda aynı sonuç bulunmuştur. İndeksin -2, -1 ve 0 şeklinde değişimi çözümü etkilememiştir.

6.4 Uygulama4

a 'nın hangi değeri için aşağıdaki Riemann sınır değer problemi çözülebilirdir? Problemin verildiği L konturu için, $-i \in D^+$ ve $i, 2i, -2i \in D^-$ bilgileri verilmektedir. Buna göre problemi çözünüz.

$$\Phi^+(t) = \frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)}\Phi^-(t) + \frac{2t(t-2i)(at+1)}{(t+i)(t+2i)}, \quad \Phi^-(\infty) = 0$$

Daha önce kullandığımız Gakhov tekniğine göre,

$p(t)=(t-i)(t-2i)$ ve $q(t)=(t+i)(t+2i)$ olmak üzere,

$$\left. \begin{array}{ll} p_+(t) = 1 & p_-(t) = (t-i)(t-2i) \\ q_+(t) = (t+i) & q_-(t) = (t+2i) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} m_+ = 0 \\ n_+ = 1 \end{array} \right\} \quad x = -1 < 0$$

bulunur. $|x|=1$ adet ek koşul problemin çözülebilir olması için yeterli olacaktır. (3.39)'dan hareketle,

$$\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} g(\tau) d\tau = 0 \quad \text{koşulu sağlanmalıdır.}$$

$$\int_L \frac{(\tau+2i)}{(\tau-i)(\tau-2i)} \cdot \frac{2\tau(\tau-2i)(a\tau+1)}{(\tau+i)(\tau+2i)} d\tau = 0$$

$$\int_L \frac{2\tau(a\tau+1)}{(\tau-i)(\tau+i)} d\tau = \int_L \frac{\tau(a\tau+1)}{(\tau-i)(\tau+i)} d\tau = \int_L \left(\frac{\tau-a}{(\tau-i)(\tau+i)} + a \right) d\tau = 0$$

$$\int_L \left(\frac{\frac{-i-a}{\tau-i}}{\tau+i} \right) d\tau + \int_L \frac{1}{\tau-i} d\tau + \int_L a \cdot d\tau = 0$$

Bu ifadeyi terimlerin yerleri aynı kalacak şekilde $I_1+I_2+I_3=0$ şeklinde düşünelim. I_1 integralinde yer alan $\left(\frac{-i-a}{\tau-i} \right)$, D^- de analitiktir. Dolayısıyla Cauchy formülüne göre;

$I_1 = -2i\pi \left(\frac{-i-a}{-i-i} \right)$ dir. Burada $\tau+i = \tau - (-i)$ şeklinde düşünüldüğü unutulmamalıdır ve

$-i \in D^+$ olduğundan söz konusu formül kullanılabilmektedir. I_2 integrali ise $i \notin D^+$ olduğundan (çünkü integral içindeki Cauchy formülü uygulanabilecek fonksiyon D^+ bölgesinde analitiktir) sıfıra eşittir. I_3 ise her durumda sıfıra eşittir. Buna göre,

$$-2i\pi \left(\frac{-i-a}{-2i} \right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = -i \text{ olarak bulunur.}$$

Bu değeri soruda verilen denklemde yerine yazarsak,

$$\Phi^+(t) = \frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)} \Phi^-(t) + \frac{2t(t-2i)(1-it)}{(t+i)(t+2i)}, \quad \Phi^-(\infty) = 0$$

koşulları elde edilmiş olur. Buradan homojen olmayan probleme ait özel çözümü yazalım.

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\tau+2i)}{(\tau-i)(\tau-2i)} \frac{2\tau(\tau-2i)(1-i\tau)}{(\tau+i)(\tau+2i)} \frac{d\tau}{\tau-z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\tau(1-i\tau)}{(\tau-i)(\tau+i)} \frac{d\tau}{\tau-z}$$

$$= \frac{2}{2\pi i} \int_L \frac{\tau(-i)(\tau+i)}{(\tau-i)(\tau+i)} \frac{d\tau}{\tau-z}$$

$$= \frac{-2i}{2\pi i} \int_L \frac{\frac{\tau}{\tau-i}}{\tau-z} d\tau$$

$$= \begin{cases} -\frac{2iz}{z-i} & z \in D^+ \\ 0 & z \in D^- \end{cases}$$

Buradan çözümü yazalım.

$$\Phi^+(z) = \frac{p_-(z)}{q_-(z)} \psi^+(z) = \frac{(z-i)(z-2i)}{(z+2i)} \frac{(-2iz)}{(z-i)} = \frac{-2iz(z-2i)}{z+2i}$$

$$\Phi^-(z) = \frac{q_+(z)}{p_+(z)} \psi^-(z) = 0$$

6.5 Uygulama5

L birim çember olmak üzere, L_1 ve L_2 isimindeki sağ ve sol yarı-çemberlerden meydana gelmektedir. Riemann sınır değer problemi aşağıdaki gibidir:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + \frac{t^3 - t^2 + 1}{t^2 - t} e^{\pi t \left(\frac{t-i}{t+i} \right) \frac{it}{2}}$$

Problemin katsayısı(coefficient) aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır:

$$G(t) = \begin{cases} e^{\pi t} & L_1 \text{ üzerinde iken,} \\ e^{2\pi t} & L_2 \text{ üzerinde iken.} \end{cases}$$

Süreksizlik noktaları: $(+i, -i)$ dir.

Çözüm yöntemi olarak daha öncede ifade ettiğimiz gibi N.I.Muskhelishvili'nin yöntemini kullanacağız. Şimdi homojen problemin kanonik fonksiyonunu bulalım.

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\ln e^{\pi\tau}}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\ln e^{2\pi\tau}}{\tau - z} d\tau$$

$$\Gamma(z) = \frac{\pi}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\tau}{\tau - z} d\tau + \frac{2\pi}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\tau}{\tau - z} d\tau$$

$$\Gamma(z) = \frac{\pi}{2\pi i} \int_L \frac{\tau}{\tau - z} d\tau + \frac{\pi}{2\pi i} \int_i^{-i} \frac{\tau}{\tau - z} d\tau$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2i} I_1 + \frac{1}{2i} I_2 \text{ olsun. Sırası ile buradaki integralleri hesaplayalım.}$$

I_1 integrali Cauchy formülü ile hesaplanabilir. Buna göre;

$$I_1 = \begin{cases} 2\pi i z & z \in D^+ \\ 0 & z \in D^- \end{cases} \text{ olduğu kolayca görülür.}$$

I_2 integralini ise $\tau - z = u$ dönüşümü yaparak hesaplamaya çalışalım.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{i-z}^{-i-z} \frac{u+z}{u} du = \int_{i-z}^{-i-z} du + a \int_{i-z}^{-i-z} \frac{du}{u} \\ &= -i-z + z \ln(-i-z) - i+z - z \ln(i-z) \\ &= -2i + z \ln(-1) + z \ln(i+z) - z \ln(-1) - z \ln(z-i) \\ &= -2i + z \ln[(z+i)/(z-i)] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buna göre,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2i} \int_L \frac{\tau}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2i} (-2i + z \ln \left(\frac{z+i}{z-i} \right))$$

$$\Gamma^+(z) = \pi z - 1 + \frac{z}{2i} \ln \left(\frac{z+i}{z-i} \right), \quad \Gamma^-(z) = -1 + \frac{z}{2i} \ln \left(\frac{z+i}{z-i} \right)$$

bulunur. Burada kanonik fonksiyon,

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = e^{\Gamma^-(z)} \text{ şeklindedir. Öyleyse,}$$

$$\begin{aligned} X^+(z) &= e^{\Gamma^+(z)} = e^{\pi z - 1 + \frac{z}{2i} \ln \left(\frac{z+i}{z-i} \right)} \\ &= e^{\pi z - 1} \cdot \left(e^{\ln \left(\frac{z+i}{z-i} \right)} \right)^{\frac{z}{2i}} \\ &= e^{\pi z - 1} \cdot \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^{\frac{z}{2i}} = e^{\pi z - 1} \cdot \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^{\frac{-iz}{2i^2}} \end{aligned}$$

$$X^+(z) = e^{z\pi - 1} \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^{iz/2} \text{ ve benzer şekilde } X^-(z) = e^{-1} \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^{iz/2}$$

kanonik fonksiyon bulunmuş olur.

Kolayca gösterilebilir ki, Muskhelishvili'nin kanonik fonksiyona ait formülasyonunda kullandığı ilave çarpanlar olan $(z \pm i)^x$ burada gerekli değildir. Problemin indeksi sıfırdır.

Şimdi $\psi(z)$ yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} \\ \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{\tau^3 - \tau^2 + 1}{\tau^2 - \tau} \cdot e^{\pi\tau} \cdot \left(\frac{\tau-i}{\tau+i} \right)^{i\tau/2} \cdot e \cdot e^{-\pi\tau} \cdot \left(\frac{\tau-i}{\tau+i} \right)^{-i\tau/2} \frac{d\tau}{\tau - z} \right) \end{aligned}$$

$$\psi(z) = \frac{e}{2\pi i} \int_L \frac{\tau^3 - \tau^2 + 1}{\tau^2 - \tau} d\tau$$

$$\psi(z) = \frac{e}{2\pi i} \int_L \left(\frac{\tau(\tau^2 - \tau)}{\tau^2 - \tau} \cdot \frac{1}{\tau^2 - \tau} \right) \frac{d\tau}{\tau - z}$$

$$\psi(z) = \frac{e}{2\pi i} \int_L \frac{\tau}{\tau - z} d\tau + \frac{e}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau - z} d\tau$$

Cauchy formülüne göre,

$$\psi(z) = \begin{cases} ez & z \in D^+ \\ -\frac{e}{z(z-1)} & z \in D^- \end{cases}$$

bulunur. Yani,

$$\psi^+(z) = ez, \quad \psi^-(z) = \frac{-e}{z(z-1)} \quad \text{şeklinde özel çözüm yazılabilir.}$$

Buradan son aşamaya geçelim.

$$\Phi^+(z) = X^+(z)[\psi^+(z) + c] \quad \text{ve} \quad \Phi^-(z) = X^-(z)[\psi^-(z) + c] \quad \text{olmak üzere,}$$

$$\Phi^+(z) = e^{z\pi - 1} \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^{iz/2} \cdot [ez + c]$$

$$\Phi^-(z) = e^{-1} \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^{iz/2} \left[\frac{-e}{z(z-1)} + c \right] \quad \text{olarak çözüm bulunmuş olur.}$$

7. SONUÇLAR ve TARTIŞMA

L konturunun düzgün, kapalı olması durumunda uygulanan Gakhov metodu, önceki bölümde çözdüğümüz problemlerden görüldüğü gibi, homojen problemin kanonik fonksiyonu $X(z)$ ve non-homojen problemin özel (particular) çözümü $\psi(z)$ 'nin bulunmasına dayanır. Bu noktada Gakhov metodunu Muskhelishvili metodundan ayıran en temel kolaylık, $X(z)$ 'nin Cauchy tipte integrallerin çözümüne gerek kalmadan doğrudan hesaplanmasıdır. Eğer bu problemlerin çözümünde Muskhelishvili metodu kullanılsaydı çok basit bir hesaplama yerine, $X(z)$ 'nin bulunması için Cauchy tipte bir integral çözülmek zorundaydı. Bu tip integrallerin çözümü son derece zorlayıcı olabilir.

Yukarıdaki ifadelerin doğal bir sonucu şudur: Gakhov'un metodunda problemin katsayısı (coefficient), kontur üzerinde sıfırlara yada kutba sahip olmayan rasyonel bir fonksiyon olmalıdır. Aksi bir fonksiyon tipinde bu metod, çözdüğümüz problemler için doğrudan kullanılamayacaktı. (Dolaylı bir kullanım yolu olarak Batyrev metodunu önerebiliriz. Batyrev metodu ile problemin katsayısı yaklaşık olarak bir rasyonel fonksiyona çevrilip daha sonra Gakhov metodu uygulanabilir. Tabi olarak bu yöntemle ulaşılabilecek çözümler daima bir hata payı taşıyacaklardır.)

Homojen olmayan problemin özel (particular) çözümü olan $\psi(z)$ 'nin hesaplanması iki yöntemde de benzerlik göstermektedir. Ancak Gakhov metodunun uygulandığı ilk dört problemde hesaplanacak integral, yapısal olarak Muskhelishvili metodu uygulandığında ortaya çıkacak integralden çok daha basit olmaktadır.

$G(t)$ ve $g(t)$ 'nin yapısal olarak birbirine benzemesi -ki problemin konuluşunda L üzerinde Hölder koşullarını sağlamak dışında bir benzerlikleri yoktur- özellikle ters çarpanlar ihtiva etmeleri Gakhov metodunun kullanımındaki temel elverişlilik kriteridir.

Fakat, $G(t)$ ve $g(t)$ 'nin birbirine ne kadar benzeyen iki fonksiyon olduğu Muskhelishvili metodunda kesin bir belirleyici değildir. Çünkü Muskhelishvili metodunda $g(t)$ ve homojen problemin kanonik fonksiyonunun benzer yapıda olması önem taşır. $g(t)$ ve kanonik fonksiyon ne kadar çok ortak çarpan barındırıyorsa hesaplanacak olan integral o kadar basit olur. Sonuç olarak $\psi(z)$ 'nin hesaplanmasında ,

- Gakhov metodunda kanonik fonksiyon $G(t)$ 'nin çarpanlara ayrılması ile doğrudan bulunduğundan, $g(t)$ ve $G(t)$ nin ters çarpanlar barındırması,

- Muskhelishvili metodunda ise $g(t)$ ve kanonik fonksiyonun ortak çarpanlar barındırması,

önemli bir seçim kriteridir. Muskhelishvili metodunda kanonik fonksiyon Cauchy tipte integralin çözümüne dayandığından, sadece probleme bakarak bir kolaylık kestirmek oldukça güçtür.

Çözdüğümüz ilk dört problemde kullanılan Gakhov tekniğinde $\phi^-(\infty) = 0$ ek koşulu zorunludur. Çözdüğümüz problemler bu ek koşulu taşımasaydı Gakhov tekniği kullanılamazdı.

İndeks kavramı, klasik haldeki Riemann probleminde çok önemlidir. Bir Riemann probleminin çözülebilir olduğu varsayımına dayanarak her problemi çözmeye kalkmak pek akıllıca değildir. Index kavramı bize;

- ✓ Problem çözülebilir midir?
- ✓ Eğer çözülebilir ise çözümlerin sayısı kaçtır?
- ✓ Çözülebilir olması için kaç adet ek koşul gereklidir?

gibi çok önemli bazı soruların cevaplarını ve üzerinde durmaya çalıştığımız bu iki çözüm metodunun da temel dayanaklarından birini oluşturmaktadır. Fakat indeksin değişimi nadiren de olsa problemin çözümünü etkileyebilir. Önceki bölümde çözdüğümüz üçüncü problem bunu gösterebilmek için özel olarak hazırlanmıştır. Bu problem tekrar gözden geçirilirse görülecektir ki, L 'nin içerdiği yada içermediği noktalara bağlı olarak problemin çözümü değişmemiş ve her defasında aynı sonuç bulunmuştur. İndeksin -2, -1 ve 0 şeklinde değişimi çözümü etkilememiştir. Literatürde indeksi -1'den küçük problemlerin genelde çözümsüz olduğu söylenir. Bu anlamda üçüncü problem yine bir istisna teşkil edecektir. O problemde gösterdik ki, indeks -2 olsa bile çözüm bulunabilir.

Problemin indeksinin negatif olma durumunu yöntemler açısından incelersek ;

Yine her iki yöntem içinde yukarıda kanonik fonksiyon için söylediklerimize benzer sonuçlar elde ederiz. Çözülmesi gereken integraller için şunları söyleyebiliriz:

- Gakhov metodunda $G(t)$ 'nin bazı çarpanları $g(t)$ ile çarpılmakta (Çünkü kanonik fonksiyon $G(t)$ 'nin çarpanlara ayrılması ile bulunuyordu),
- Muskhelishvili metodunda ise $g(t)$ fonksiyonu kanonik fonksiyona bölünmektedir. Fakat buradaki kanonik fonksiyonun tipi Cauchy integrali tarafından belirlenir.

Dolayısıyla problemin indeksi negatif olduğunda, problemin çözülebilir olduğunu kanıtlamak

için gereken ek koşullar için,

Gakhov metodunda $G(t)$ ve $g(t)$ ' nin benzer fonksiyonlar olması, Muskhelishvili metodunda ise $g(t)$ ile kanonik fonksiyonun benzer olması önemlidir.

Muskhelishvili metodunda kanonik fonksiyonun hesabında kullanılan integrallerin çözüm kolaylığı incelenirse, bu metodun üstel fonksiyon olan katsayılar (coefficient) için kolaylık sağladığı görülür.

Kanonik fonksiyonun formülasyonunda kullandığımız $e^{\Gamma(z)}$ ifadesi ve $\Gamma(z)$ 'nin hesabında kullandığımız $\ln G(\tau)$ terimleri göz önüne alınırsa e^x , e^{2x} , $e^{3\pi x}$ tipindeki katsayıların bu metot için ideal olduğunu söyleyebiliriz.

Açık eğriler için verilen Gakhov metodu temelde, problemin sürekli katsayılı probleme indirgenmesi ilkesine dayanır. Muskhelishvili metodu ise direkt çözüm (direct solution) tekniğidir. Öceki bölümde çözdüğümüz son probleme Muskhelishvili metodunun uygulanma nedenlerini şöyle sıralayabiliriz:

- Üstel fonksiyon olan bir katsayıya sahip olması.
- Hesaplanan kanonik fonksiyon ile bağımsız terim (free term) $g(t)$ ' nin sadeleşebilir nitelikte olması ve böylece $\psi(z)$ 'nin hesabında kullanılan integralin basitleşmesi.
- Gakhov tekniğine göre son derece basit bir formülasyona sahip olması.

Basit formülasyona sahip olan Muskhelishvili metodunun bu avantajını teorik yaklaşımlarda daha fazla görürüz. Eğer verilen bir problemde tam çözüm arıyorsak eğer, karşımıza çıkan integrallerin zorlayıcılığı bu metodu kullanmamızı çoğunlukla imkansız kılar. Ancak çözdüğümüz son problem bariz şekilde bu metodun kullanılabilmesi için özel olarak hazırlanmıştır.

Çalışmamızın başında değindiğimiz soruların yanıtlarını şu şekilde özetlemeye çalışalım:

Görüldüğü gibi Gakhov, açık ve kapalı konturlar için iki ayrı çözüm yöntemi ortaya koymuş, Muskhelishvili yöntemi ise kontur bağımsız olarak (açık veya kapalı) probleme uygulanabilmektedir.

Sadece klasik konturlar üzerinde çalışan ve klasik Riemann problemini belli koşullar altında çözebilen birinci Gakhov tekniğinin en temel avantajı kanonik fonksiyonun doğrudan hesaplanması, kanonik fonksiyonun hesabında Cauchy tipte bir integralin çözümüne gerek kalmamasıdır.

Problemin katsayısı ve serbest terimi ($G(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları)'nin ters çarpanlar ihtiva etmesi Gakhov'un birinci metodunda, $g(t)$ ve kanonik fonksiyonun ortak çarpanlar ihtiva etmesi ise Muskhelishvili yönteminde kolaylık sağlar.

Verilen bir problemde kesin çözüm aramak yerine sadece teorik bir yaklaşım gerekiyorsa Muskhelishvili yöntemi daha uygundur. Çünkü bu yöntem, Gakhov tekniğine göre çok daha basit bir formülasyona sahiptir.

Her iki çözüm yönteminde de çözülmesi gereken integrallerin zorluğu birinci derecede önemlidir.

KAYNAKLAR

- Adler, M. ve Moerbeke, P., (1999), “Generalized Orthogonal Polynomials, Discrete KP and Riemann-Hilbert Problems”, *Comm. Math. Phys.*, 207:589-620.
- Bender, C.M. ve Orszag, S.A., (1978), *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York.
- Deift, P. ve Zhou, X., (1993), “A Steepest Descent Method for Oscillatory Riemann-Hilbert Problems. Asymptotics for the MKdV Equation”, *Ann. Math.* 137:295–368.
- Deift, P., Venakides, S., ve Zhou, X., (1996), “An Extension of the Steepest Descent Method for Riemann-Hilbert Problems: The Small Dispersion Limit of the Korteweg-de Vries Equation”, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 95:450-454.
- Deift, P., (1999), *Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann-Hilbert Approach*. Courant Lecture Notes 3, New York University, New York.
- Deift, P., Kriecherbauer, T., McLaughlin, K.T., Venakides, S., ve Zhou, X., (1999), “Uniform Asymptotics for Polynomials Orthogonal with Respect to Varying Exponential Weights and Applications to Universality Questions in Random Matrix Theory”, *Comm. Pure. Appl. Math.*, 52:1335-1425.
- Gakhov, F.D., (1949), “Boundary Value Problems for Analytic Functions and Singular Integral Equations”, *Izv. Kazan. Fiz. Mat. Obshch.*, 14 (ser. 3):75-160.
- Gakhov, F.D., (1952), “Riemann Boundary Value Problem for a System of n Pairs of Functions”, *Uspekhi Matem. Nauk*, 7 (50, No. 4):3-54.
- Gakhov, F.D., (1966), *Boundary Value Problems* (Çev., I.N. Sneddon), Pergamon Press, Oxford.
- Kitaev, A.V., Its, A.R. ve Fokas, A.S., (1992), “The Isomonodromy Approach to Matrix Models in 2D Quantum Gravity”, *Comm. Math. Phys.*, 147:395-430.
- Krein, M.G., (1958), “Integral equations on a semi-line with the kernel depending on the argument difference”, *Uspekhi Matem. Nauk*, 13 (83, No. 5):16-413
- Kuijlaars, A.B.J. ve McLaughlin, K.T., (2000), “Generic Behavior of the Density of States in Random Matrix Theory and Equilibrium Problems in the Presence of Real Analytic External Fields”, *Comm. Pure. Appl. Math.*, 53:736-785.
- Kuijlaars, A.B.J. ve Vanlessen, M., (2002), “Universality for Eigenvalue Correlations at the Origin of the Spectrum”, *Int. Math. Res. Notices*, 30:1575-1600.
- Muskhelishvili, N.I., (1953), *Singular Integral Equations*, Noordhoff, Groningen.
- Muskhelishvili, N.I., (1953), *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Groningen.
- Paradoksova, I.A., (1960), “On the Number of Solution of One Complete Singular Integral Equation”, *Uch. Zap. Rostov. Ped. Inst.*, 5:8-51.
- Pincus, J.D. ve Carey, R.W., (1974), “An Invariant for Certain Operator Algebras”, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 71(No. 5):1952-1956.

Vekua, N.P., (1967), Systems Singular Integral Equations and Some Boundary Value Problems, Noordhoff, Groningen.

Wadati, M. ve Nagao, T., (1993), "Eigenvalue Distribution of Random Matrices at the Spectrum Edge", Japan Phys. Soc., 62:3845-3856.

Wylie, C.R. ve Barrett, L.C., (1995), Advanced Engineering Mathematics, McGraw-Hill, New York.

Yoshino, M., (2000), "Global Solvability of Monge-Ampère Type Equations", Comm. Part. Diff. Equ., 25:1925:1950.

Yoshino, M., (2003), "Riemann-Hilbert Problem and Solvability of Differential Equations", Ark. Für. Math., 33:323-341.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 28.09.1980

Doğum yeri İstanbul

Lise 1994-1997 Çanakkale Fen Lisesi

Lisans 1998-2003 Yıldız Teknik Üniversitesi Kimya-Metalurji Fak.
Matematik Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 2004-2006 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Çalıştığı kurumlar

2004-2006 Telenity İletişim Sistemleri A.Ş