

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN
DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜMLER YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ**

YAĞMUR GÜNGÖR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. MUSTAFA BAYRAM**

İSTANBUL, 2013

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN
DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜMLER YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ

Yağmur GÜNGÖR tarafından hazırlanan tez çalışması 12.04.2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM
Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN
Fatih Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Müfit GİRESUNLU
İstanbul Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN
Fatih Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında hocam Prof. Dr. Mustafa BAYRAM'a, tez konusunun seçimine ve yürütülmesine tavsiyeleriyle yön veren, yüksek lisansımın ders alma süreci dahil bitişine kadar desteğini esirgemeyen, değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, yaşamımın her aşamasında bana maddi ve manevi her türlü desteği ile yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Nisan, 2013

Yağmur GÜNGÖR

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vi
KISALTMA LİSTESİ.....	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	ix
ÖZET	x
ABSTRACT.....	xi
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti.....	1
1.2 Tezin Amacı.....	4
1.3 Hipotez	4
BÖLÜM 2	
DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU.....	5
2.1 Tanımlar	5
2.2 Teoremler ve İspatları	6
BÖLÜM 3	
DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU UYGULAMALARI	31
BÖLÜM 4	
İKİ BOYUTLU DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU	66
BÖLÜM 5	
İKİ BOYUTLU DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU UYGULAMALARI.....	87
BÖLÜM 6	
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	97

KAYNAKLAR	102
ÖZGEÇMİŞ	104

SİMGE LİSTESİ

$\mathcal{D}_T$	Diferensiyel dönüşüm operatörü
$\mathcal{D}_T^{-1}$	Ters diferensiyel dönüşüm operatörü

KISALTMA LİSTESİ

DDM Diferensiyel Dönüşüm Metodu

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 5. 1 $u_1(x, t)$ nin grafiği.....	95
Şekil 5. 2 $u_2(x, t)$ nin grafiği	96
Şekil 5. 3 $u_3(x, t)$ nin grafiği	96
Şekil 5. 4 Örnek 5.2'nin kapalı çözümünün grafiği	96

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 6. 1 Tek değişkenli fonksiyonların diferensiyel dönüşümleri.....	98
Çizelge 6. 2 İki değişkenli fonksiyonların diferensiyel dönüşümleri	100

**DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN
DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜMLER YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ**

Yağmur GÜNGÖR

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

Eş Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN

Bu çalışmada, tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonların diferensiyel dönüşüm özellikleri ispatları ile verilmiş, lineer ve non-lineer diferensiyel denklemlerin Diferensiyel Dönüşüm Metodu (DDM) yardımıyla çözülmesi ele alınmıştır. Yeni olmakla birlikte bu metot, Taylor serilerine bağlı yarı analitik-nümerik bir metot olup verilen denklemleri cebirsel bir denkleme dönüştürdüğünden kullanımı kolay, anlaşılabilir ve bilgisayar programlamaya uygundur. Elde edilen sonuçlar problemlerin bilinen yöntemlerle bulunan kapalı çözümleri ile karşılaştırılıp çözümün doğruluğu kontrol edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Diferensiyel Dönüşüm Metodu, Taylor serileri.

ABSTRACT

SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS USING DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD

Yağmur GÜNGÖR

Department of Mathematical Engineering
MSc. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM
Co-Advisor: Asisst. Prof. Dr. Ali ŞAHİN

In this study, differential transform properties and its proofs of one-variable and two-variable functions are given and solutions of linear and non-linear differential equations by using differential transform method are discussed. Although this method is new, the method which Taylor series-connected and semi analytical-numerical converts equation given into an algebraic equation, so the method is easy to use, intuitive and suitable for computer programming. The results obtained are compared with closed solutions of problems by methods known and accuracy of solution are checked.

Keywords: Differential transform method, Taylor series.

**YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

1.1 Literatür Özeti

Diferensiyel Dönüşüm Metodu (DDM) , ilk olarak elektrik devreleri analizi içinde yer alan lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerinin çözümü için 1986 yılında Zhou [1] tarafından ortaya konulmuştur. Yeni bir metot olan DDM, Taylor serilerine bağlı yarı analitik-nümerik bir tekniktir. Taylor seri açılımını temel alan bu metot, ele alınan analitik fonksiyonun gerekli türevlerini sembolik olarak içeren geleneksel yüksek mertebeden Taylor serisi metodundan farklıdır. Taylor serisi metodu, yüksek mertebeler için zaman kaybettiricidir. DDM ise türevleri sembolik olarak değerlendirmez, bunun yerine diferensiyel dönüşümü kullanarak orijinal denklemlerden elde edilen dönüştürülmüş denklemlerle tanımlanan bir iterasyon metodu yardımıyla bağıl türevleri hesaplar. Bu teknikle, verilen diferensiyel denklem ve ilgili başlangıç koşulları, sonuçta kuvvet serisi çözümünün katsayısı olarak cebirsel denklem sisteminin çözümüyle sonuçlanan tekrarlayan bir denkleme dönüştürülür.

Adi diferensiyel denklemler, integral dönüşümler (Laplace, Fourier, vb.) yardımıyla da çözülebilirler. Bu metotlar, adi diferensiyel denklemi bu denkleme karşı gelen bir cebirsel denkleme dönüştürür. Non-lineer adi diferensiyel denklemlerin çözümü için kullanılan bu integral dönüşüm metotları ile karmaşık ifadelerin integrallerinin alınması zor olabilir ve ters dönüşümlerinin alınmasında problemler ortaya çıkabilir. DDM, bu tür metotlarla karşılaştırıldığında daha pratik, zaman kazandırıcı ve tekrarlayan bir denklem yapısına sahip olduğundan bilgisayar programlama yardımıyla çözüme de uygundur. Bu metot, her mertebeden lineer ve non-lineer adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin kapalı ve yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanışlıdır. Ayrıca problemlerin DDM yardımıyla çözümü ile yüksek oranda doğru sonuçlar elde

edilmiştir. DDM, özellikle başlangıç değer problemleri için, başlangıç noktası etrafında diğer metotlara kıyasla çözüme çok daha hızlı yakınsamaktadır.

DDM, yalnızca adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmamakta, aynı zamanda integral ve integro-diferansiyel denklemler, diferansiyel ve integral denklem sistemleri, özdeğer problemleri, diferansiyel fark denklemleri gibi matematik, fizik ve birçok alanda ortaya konan problemlerin çözümünde de kolaylık sağlamaktadır.

Genel manada DDM yardımıyla başlangıç değer problemlerinin çözümü ve uygulamalı örnekleri Jang ve arkadaşları tarafından incelenmiştir [2]. Benzer şekilde, DDM'nin gecikmeli diferansiyel denklemlere uygulamaları ile alakalı çalışmada Karakoç ve Bereketoğlu [3] tarafından irdelenmiştir. DDM ile çok bilinen standart diferansiyel denklemlerin çözümü de araştırılmıştır. Bu bağlamda Biazar ve Eslami'nin [4] kuadratik Riccati diferansiyel denklemi üzerine olan çalışması örnek gösterilebilir. Bu çalışmada, Riccati denkleminin analitik çözümü için gerekli olan özel çözüme, DDM ile çözümde ihtiyaç duyulmadığı görülmüştür. Hesaplamalarda MAPLE sembolik programlama dili kullanılmış ve sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Kanth ve Aruna [5], diferansiyel dönüşüm metodunu akışkan ve quantum mekaniği, kimyasal-reaktör teorisi ve jeofizik gibi mühendislik ve bilimin birçok alanında kullanılan iki-nokta sınır değer problemlerine de uygulamıştır. Bu uygulama ile iki-nokta sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan varyasyonel iterasyon metodu, sinc-Galerkin metodu, homotopi pertürbasyon metodu gibi metotların aksine, DDM'nin açık ve anlaşılır bir metot olduğu sonucuna varılmıştır. Farklı tipteki lineer ve non-lineer yüksek mertebeden sınır değer problemlerinin DDM ile çözümü Hassan ve Ertürk [6] tarafından incelenmiş ve sonucu teorik çözümlerle karşılaştırılmıştır.

DDM'nin farklı fizik, doğa ve mühendislik bilimlerine uygulamaları da mevcuttur. Özellikle osilatör sistemler üzerine yapılan çalışmalar diğer analitik metotlara kıyasla DDM'nin uygulansının pratikliğini ortaya koymuştur. Chen ve Chen'nin [7] bir çalışmada, osilatör diferansiyel denklemindeki parametre değerlerine bağlı olarak DDM ile ortaya konan sonuç, Runge-Kutta metodu ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır ve sonuçların birbirine uyumlu olduğu tespit edilmiştir. El-Shaded [8], Monami ve Ertürk'ün [9] çalışmalarında, benzer türden non-lineer osilatör diferansiyel denklemler irdelenmiş ve seri çözümlerinin modifiye edildiği alternatif bir teknik

kullanılmıştır. İlk olarak DDM ile elde edilen sonlu seriye Laplace dönüşümü uygulanmış, dönüşümü alınmış serinin Pade yaklaşımı meromorfik bir fonksiyona dönüştürülmüştür. Son olarak elde edilen bu fonksiyona, DDM sonlu seri çözümünden daha iyi bir yaklaşık çözüm olabilecek bir analitik çözüm elde etmek için ters Laplace dönüşümü uygulanmıştır. Bu tekniğe modifiye DDM denilmektedir. Ayrıca DDM diferensiyel denklem içerisindeki küçük parametrelere ihtiyaç duymaz. Bu nedenle, geleneksel pertürbasyon metotlarının oluşturduğu kısıtlamalar bu metotla ortadan kaldırılır.

Arıkoğlu ve Özko [10], integro-diferensiyel denklemler için sınır değer problemlerinin DDM yardımıyla çözümünü incelemiş ve bu tip problemlerin çözümü için literatürde kullanılan Galerkin Metodu, Lagrange Enterpolasyon Metodu gibi nümerik metotlara göre DDM'nin çok daha kullanışlı ve doğru olduğunu ifade etmişlerdir. Benzer bir çalışma Odibat [11] tarafından yapılmış ve çarpanlarına ayrıştırılabilen çekirdeklere sahip Volterra integral denklemi DDM ile çözülmüştür.

Lineer ve non-linear adi diferensiyel denklem sistemlerinin DDM yardımıyla çözümü Hassan [12] tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada diferensiyel denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan Runge-Kutta metodu sonucu elde edilen çözümlerle DDM sonucu elde edilen değerler karşılaştırıldığında, DDM'nin yuvarlama hatalarından uzak ve işlem fazlalığı olmayan bir metot olduğunu ifade edilmiştir. Hassan'ın diğer araştırması da metodun özdeğer problemlerine uygulanmasıdır [13]. Metot yardımıyla elde edilen sonuçlar grafiksel olarak analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Kısmi türevli diferensiyel denklemler, en az iki değişkenli fonksiyonların ve bu fonksiyonların değişkenlere göre türevlerinden oluştuğundan metodun tek boyutlusu bu tip denklemlerin çözümü için kullanılamamaktadır. Dolayısıyla iki boyutlu DDM söz konusudur. İki boyutlu DDM'nin özellikleri, Ayaz [14] tarafından geniş bir şekilde ele alınmış ve metod lineer ve non-linear kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin çözümünde kullanılmıştır. Ayaz bu araştırmasında aynı zamanda üç değişkenli fonksiyonlar için gerekli olan üç boyutlu DDM'nin özelliklerini, bu özelliklerin ispatlarını ve problemlere uygulanışını incelemiştir. Kısmi türevli diferensiyel denklem sistemleri ve matematiksel fizikte önemli bir rol oynayan Klein-Gordon denkleminin çeşitli örnekleri Kanth ve Aruna tarafından [15] ve [16] da DDM ile çözülmüş ve

sonuçlarının doğruluğu Adomian ayrıştırma metodu ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak desteklenmiştir.

Bildik vd. [17], metodu farklı tipte kısmi türevli diferensiyel denklemlere uygulamış, problemleri aynı zamanda Adomian ayrıştırma metodunu kullanarak çözmüş ve iki metottan elde edilen sonuçları karşılaştırmışlardır. DDM'nin Burgers denklemi, KdV ve mKdV denklemleri ile Telgraf denklemine uygulanması sırasıyla [18], [19] ve [20] de ele alınmıştır.

Sonuç olarak DDM, anlaşılması ve uygun problemlere uygulanması açısından oldukça kolay ve pratik bir metottur. Problem çözümlerinde kullanılan diğer metotların getirdiği sınırlamaları ve işlem zorluklarını ortadan kaldırmıştır. Zaman kazandırıcı bir metot olması DDM'yi kullanışlı bir hale getirmektedir.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı, DDM'yi tanıtmak ve çeşitli problemlere uygulayarak işlem fazlalığı olmadan doğru sonuca ulaştıran kolay ve zaman kazandırıcı bir teknik olduğunu göstermektir. Bu metotla elde edilen sonuçların analitik çözümlerle karşılaştırılması ile metodun doğruluğunun desteklenmesi hedeflenmiştir.

1.3 Hipotez

DDM'nin özellikleri ve bu özelliklerin ispatları açık ve anlaşılır bir şekilde verilmeye çalışılmıştır. Metodun problemlere uygulanışı sırasında MAPLE sembolik programlama dili kullanılarak hesapların hızlı ve güvenilir olması sağlanmıştır.

DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU

Bu bölümde, diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan ve diğer metotlara nazaran daha yeni kabul edilen DDM'yi inceleyeceğiz. Bu metodun kullanımı ve metoda ait birkaç teoremin ispatı yapılacaktır. Burada elde edilen metoda ait özellikler çözümü gereken diferensiyel denklemin yapısına göre (nonhomojen, lineer veya non-linear) çeşitlendirilebilir. Bu kısımda özellikle iki ve üç fonksiyonun çarpımına ait diferensiyel dönüşüm özelliği irdelenmiş olup daha fazla çarpıma ait özellik ihtiyaca göre buradan elde edilebilir. Bu dönüşüm sadece diferensiyel denklem çözümünde değil aynı zamanda integral denklemlerin de çözümünde kullanıldığından, integral denklemlere ait dönüşüm özellikleri ve bunlara bağlı teoremlerin de ispatları verilmiştir.

2.1 Tanımlar

Tanım 2.1 Tek değişkenli $f(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyon $F(k)$ olmak üzere $f(x)$ in diferensiyel dönüşümü,

$$\mathcal{D}_T \{f(x)\} = F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2 $F(k)$ dönüşüm fonksiyonunun ters diferensiyel dönüşüm fonksiyonu,

$$\mathcal{D}_T^{-1} \{F(k)\} = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k) (x - x_0)^k \quad (2.2)$$

biçiminde tanımlanır.

2.2 Teoremler ve İspatları

Teorem 2.1 İki fonksiyonun toplamının (farkının) diferensiyel dönüşümü,

$$\mathcal{D}_T \{f(x) \pm g(x)\} = \mathcal{D}_T \{f(x)\} \pm \mathcal{D}_T \{g(x)\} = F(k) \pm G(k)$$

ile ifade edilir.

İspat: Dönüşümün tanımını gereği,

$$\mathcal{D}_T \{f(x)\} = F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0}$$

ve

$$\mathcal{D}_T \{g(x)\} = G(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k g(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_T \{f(x) \pm g(x)\} &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} [f(x) \pm g(x)] \right]_{x=x_0} \\ &= \underbrace{\frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0}}_{\mathcal{D}_T \{f(x)\}} \pm \underbrace{\frac{1}{k!} \left[\frac{d^k g(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0}}_{\mathcal{D}_T \{g(x)\}} \\ &= \underbrace{\mathcal{D}_T \{f(x)\}}_{F(k)} \pm \underbrace{\mathcal{D}_T \{g(x)\}}_{G(k)}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\mathcal{D}_T \{f(x) \pm g(x)\} = F(k) \pm G(k)$$

olduğu görülür.

Teorem 2.2 Bir fonksiyonun $c \in \mathbb{R}$ sabit değeri ile çarpımının diferensiyel dönüşümü,

$$\mathcal{D}_T \{cf(x)\} = c\mathcal{D}_T \{f(x)\} = cF(k)$$

ile verilir.

İspat: Dönüşümün tanımından,

$$\mathcal{D}_T \{f(x)\} = F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_T \{cf(x)\} &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k [cf]}{dx^k} \right]_{x=x_0} = \frac{1}{k!} \left[c \frac{d^k f}{dx^k} \right]_{x=x_0} \\ &= c \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f}{dx^k} \right]_{x=x_0} = c\mathcal{D}_T \{f(x)\} = cF(k) \end{aligned}$$

ile ifade edilir.

Teorem 2.3 Diferensiyel dönüşüm lineerdir.

İspat: α, β sabitler olmak üzere Teorem 2.1 ve Teorem 2.2'den

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_T \{\alpha f(x) + \beta g(x)\} &= \mathcal{D}_T \{\alpha f(x)\} + \mathcal{D}_T \{\beta g(x)\} \\ &= \alpha \mathcal{D}_T \{f(x)\} + \beta \mathcal{D}_T \{g(x)\} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla dönüşümün lineer olduğu görülür.

Teorem 2.4 Bir fonksiyonun birinci mertebeden türevinin diferensiyel dönüşümü,

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{df(x)}{dx} \right\} = (k+1)F(k+1)$$

ile ifade edilir.

İspat: Dönüşüm tanımı gereği,

$$\mathcal{D}_T \{f(x)\} = F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_T \left\{ \frac{df(x)}{dx} \right\} &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \right]_{x=x_0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{k+1} f(x)}{dx^{k+1}} \right]_{x=x_0} \\ &= (k+1) \underbrace{\frac{1}{(k+1)!} \left[\frac{d^{k+1} f(x)}{dx^{k+1}} \right]_{x=x_0}}_{F(k+1)} \\ &= (k+1) F(k+1) \end{aligned}$$

ile ifade edilir.

Teorem 2.5 Bir fonksiyonunun $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere m . mertebeden türevinin diferensiyel dönüşümü,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_T \left\{ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right\} &= (k+1)(k+2)\dots(k+m) F(k+m) \\ &= \frac{(k+m)!}{k!} F(k+m) \end{aligned}$$

ile verilir.

İspat: Dönüşümün tanımından,

$$\mathcal{D}_T \{f(x)\} = F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_T \left\{ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right\} &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{d^m f(x)}{dx^m} \right) \right]_{x=x_0} \\
&= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{k+m} f(x)}{dx^{k+m}} \right]_{x=x_0} \\
&= \frac{(k+m)!}{k!} \underbrace{\frac{1}{(k+m)!} \left[\frac{d^{k+m} f(x)}{dx^{k+m}} \right]_{x=x_0}}_{F(k+m)} \\
&= \frac{(k+m)!}{k!} F(k+m) \\
&= (k+1)(k+2)\dots(k+m) F(k+m).
\end{aligned}$$

Dolayısıyla verilen eşitlik ispatlanmış olur.

Teorem 2.6 İki fonksiyonun çarpımının diferensiyel dönüşümü, $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\mathcal{D}_T \{f(x)g(x)\} = \sum_{r=0}^k F(r)G(k-r)$$

eşitliği ile verilir.

İspat: Bilinir ki $f(x)g(x)$ fonksiyonlarının çarpımının k . mertebeden türevi,

$$\begin{aligned}
\frac{d^k}{dx^k} [f(x)g(x)] &= \frac{d^k f(x)}{dx^k} g(x) + \binom{k}{1} \frac{d^{k-1} f(x)}{dx^{k-1}} \frac{dg(x)}{dx} + \binom{k}{2} \frac{d^{k-2} f(x)}{dx^{k-2}} \frac{d^2 g(x)}{dx^2} + \dots + \\
&\quad \binom{k}{n} \frac{d^{k-n} f(x)}{dx^{k-n}} \frac{d^n g(x)}{dx^n} + \dots + \binom{k}{k-1} \frac{df(x)}{dx} \frac{d^{k-1} g(x)}{dx^{k-1}} + f(x) \frac{d^k g(x)}{dx^k}
\end{aligned}$$

şeklinde dir. Bu ifadeden yararlanılarak

$$\mathcal{D}_T \{f(x)\} = F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0}$$

ve

$$\mathcal{D}_T \{g(x)\} = G(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k g(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_T \{f(x)g(x)\} &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} [f(x)g(x)] \right]_{x=x_0} \\
&= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f}{dx^k} g + \binom{k}{1} \frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}} \frac{dg}{dx} + \binom{k}{2} \frac{d^{k-2} f}{dx^{k-2}} \frac{d^2 g}{dx^2} + \dots + \right. \\
&\quad \left. \binom{k}{n} \frac{d^{k-n} f}{dx^{k-n}} \frac{d^n g}{dx^n} + \dots + \binom{k}{k-1} \frac{df}{dx} \frac{d^{k-1} g}{dx^{k-1}} + f \frac{d^k g}{dx^k} \right]_{x=x_0} \\
&= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f}{dx^k} g \right]_{x=x_0} + \frac{1}{k!} \binom{k}{1} \left[\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}} \frac{dg}{dx} \right]_{x=x_0} + \\
&\quad \frac{1}{k!} \binom{k}{2} \left[\frac{d^{k-2} f}{dx^{k-2}} \frac{d^2 g}{dx^2} \right]_{x=x_0} + \dots + \frac{1}{k!} \binom{k}{n} \left[\frac{d^{k-n} f}{dx^{k-n}} \frac{d^n g}{dx^n} \right]_{x=x_0} + \dots + \\
&\quad \frac{1}{k!} \binom{k}{k-1} \left[\frac{df}{dx} \frac{d^{k-1} g}{dx^{k-1}} \right]_{x=x_0} + \frac{1}{k!} \left[f \frac{d^k g}{dx^k} \right]_{x=x_0} \\
&= \frac{1}{0!} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f}{dx^k} g \right]_{x=x_0} + \frac{1}{1!} \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}} \frac{dg}{dx} \right]_{x=x_0} + \\
&\quad \frac{1}{2!} \frac{1}{(k-2)!} \left[\frac{d^{k-2} f}{dx^{k-2}} \frac{d^2 g}{dx^2} \right]_{x=x_0} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{(k-n)!} \left[\frac{d^{k-n} f}{dx^{k-n}} \frac{d^n g}{dx^n} \right]_{x=x_0} \\
&\quad + \dots + \frac{1}{1!} \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{df}{dx} \frac{d^{k-1} g}{dx^{k-1}} \right]_{x=x_0} + \frac{1}{0!} \frac{1}{k!} \left[f \frac{d^k g}{dx^k} \right]_{x=x_0}
\end{aligned}$$

elde edilir. İfadeler düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_T \{f(x)g(x)\} &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [g(x)]_{x=x_0} + \\
&\quad \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{d^{k-1} f(x)}{dx^{k-1}} \right]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{1!} \left[\frac{dg(x)}{dx} \right]_{x=x_0} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(k-2)!} \left[\frac{d^{k-2} f(x)}{dx^{k-2}} \right]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 g(x)}{dx^2} \right]_{x=x_0} + \dots + \\
& \frac{1}{(k-n)!} \left[\frac{d^{k-n} f}{dx^{k-n}} \right]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n g}{dx^n} \right]_{x=x_0} + \dots + \\
& \frac{1}{1!} \left[\frac{df}{dx} \right]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{d^{k-1} g}{dx^{k-1}} \right]_{x=x_0} + \frac{1}{0!} [f(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k g}{dx^k} \right]_{x=x_0} \\
& = F(k)G(0) + F(k-1)G(1) + F(k-2)G(2) + \dots + \\
& F(k-n)G(n) + \dots + F(1)G(k-1) + F(0)G(k) \\
& = \sum_{r=0}^k F(r)G(k-r)
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 2.7 Üç fonksiyonun çarpımının diferensiyel dönüşümü, $r, t \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\mathcal{D}_T \{f(x)g(x)h(x)\} = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} F(r)G(t)H(k-r-t)$$

ile ifade edilir.

İspat: Üç fonksiyonun çarpımı $w(x)$ fonksiyonu ile gösterilirse,

$$\mathcal{D}_T \{f(x)g(x)h(x)\} = \mathcal{D}_T \{w(x)\} = W(k)$$

olur. $u(x) = g(x)h(x)$ kabul edilsin. Teorem 2.6'dan

$$\mathcal{D}_T \{g(x)h(x)\} = U(k) = \sum_{r=0}^k G(r)H(k-r)$$

elde edilir. Bu durumda $w(x)$ fonksiyonu $f(x)u(x)$ fonksiyonuna dönüşür. Yine

Teorem 2.6 göz önüne alınırsa,

$$\mathcal{D}_T \{f(x)u(x)\} = \sum_{r=0}^k F(r)U(k-r)$$

eşitliği elde edilir.

$$U(k-r) = \sum_{t=0}^{k-r} G(t)H(k-r-t)$$

ifadesi bulunan son eşitlikte yerine yazılırsa üç fonksiyonun çarpımının diferensiyel dönüşümü,

$$\mathcal{D}_T \{f(x)g(x)h(x)\} = W(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} F(r)G(t)H(k-r-t)$$

ile verilir.

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$ için $W(k)$ değerleri hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} W(0) &= \sum_{r=0}^0 \sum_{t=0}^0 F(r)G(t)H(k-r-t) \\ &= \sum_{r=0}^0 F(r)G(0)H(0) \\ &= F(0)G(0)H(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(1) &= \sum_{r=0}^1 \sum_{t=0}^{1-r} F(r)G(t)H(k-r-t) \\ &= F(0)[G(0)H(1) + G(1)H(0)] + F(1)G(0)H(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(2) &= \sum_{r=0}^2 \sum_{t=0}^{2-r} F(r)G(t)H(k-r-t) \\ &= F(0)[G(0)H(2) + G(1)H(1) + G(2)H(0)] + F(1)[G(0)H(1) + G(1)H(0)] + \\ &\quad F(2)G(0)H(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(3) &= \sum_{r=0}^3 \sum_{t=0}^{3-r} F(r)G(t)H(k-r-t) \\ &= F(0)[G(0)H(3) + G(1)H(2) + G(2)H(1) + G(3)H(0)] + \\ &\quad F(1)[G(0)H(2) + G(1)H(1) + G(2)H(0)] + F(2)[G(0)H(1) + G(1)H(0)] + \\ &\quad F(3)G(0)H(0) \end{aligned}$$

⋮

elde edilir. Dolayısıyla bu şekilde devam edildiğinde k parametresinin aldığı değerlere göre eşitlik açık bir şekilde görülür.

Teorem 2.8 n tane fonksiyonun çarpımının diferensiyel dönüşümü

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_T \{f_1(x) f_2(x) f_3(x) \cdots f_{n-1}(x) f_n(x)\} \\ &= \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \cdots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} F_1(k_1) F_2(k_2 - k_1) F_3(k_3 - k_2) \cdots F_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) F_n(k - k_{n-1}) \end{aligned}$$

ile ifade edilir.

İspat: Diferensiyel dönüşümün tanımı gereği

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_T \{f_1(x) f_2(x) f_3(x) \cdots f_{n-1}(x) f_n(x)\} = F(k) \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} [f_1(x) f_2(x) f_3(x) \cdots f_{n-1}(x) f_n(x)] \right]_{x=x_0} \end{aligned}$$

olmak üzere $k = 0, 1, 2, \dots$ değerleri için $F(k)$ değeri hesaplanırsa

$k = 0$ için,

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{1}{0!} [f_1(x) f_2(x) f_3(x) \cdots f_{n-1}(x) f_n(x)]_{x=x_0} \\ &= \frac{1}{0!} [f_1(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [f_2(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [f_3(x)]_{x=x_0} \cdots \frac{1}{0!} [f_{n-1}(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [f_n(x)]_{x=x_0} \\ &= F_1(0) F_2(0) F_3(0) \cdots F_{n-1}(0) F_n(0) \end{aligned}$$

$k = 1$ için,

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{dx} [f_1(x) f_2(x) f_3(x) \cdots f_{n-1}(x) f_n(x)] \right]_{x=x_0} \\ &= \frac{1}{1!} [f_1'(x) f_2(x) f_3(x) \cdots f_{n-1}(x) f_n(x) + f_1(x) f_2'(x) f_3(x) \cdots f_{n-1}(x) f_n(x) + \\ & \quad f_1(x) f_2(x) f_3'(x) \cdots f_{n-1}(x) f_n(x) + \cdots + f_1(x) f_2(x) f_3(x) \cdots f_{n-1}'(x) f_n(x) + \\ & \quad f_1(x) f_2(x) f_3(x) \cdots f_{n-1}(x) f_n'(x)]_{x=x_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1!} \left[\frac{df_1(x)}{dx} \right]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [f_2(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [f_3(x)]_{x=x_0} \cdots \cdot \frac{1}{0!} [f_{n-1}(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [f_n(x)]_{x=x_0} \\
&+ \frac{1}{0!} [f_1(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{1!} \left[\frac{df_2(x)}{dx} \right]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [f_3(x)]_{x=x_0} \cdots \cdot \frac{1}{0!} [f_{n-1}(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [f_n(x)]_{x=x_0} \\
&+ \frac{1}{0!} [f_1(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [f_2(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{1!} \left[\frac{df_3(x)}{dx} \right]_{x=x_0} \cdots \cdot \frac{1}{0!} [f_{n-1}(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [f_n(x)]_{x=x_0} \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{1}{0!} [f_1(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [f_2(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [f_3(x)]_{x=x_0} \cdots \cdot \frac{1}{1!} \left[\frac{df_{n-1}(x)}{dx} \right]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [f_n(x)]_{x=x_0} \\
&+ \frac{1}{0!} [f_1(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [f_2(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [f_3(x)]_{x=x_0} \cdots \cdot \frac{1}{0!} [f_{n-1}(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{1!} \left[\frac{df_n(x)}{dx} \right]_{x=x_0} \\
&= F_1(1)F_2(0)F_3(0)\cdots F_{n-1}(0)F_n(0) + F_1(0)F_2(1)F_3(0)\cdots F_{n-1}(0)F_n(0) + \\
&\quad F_1(0)F_2(0)F_3(1)\cdots F_{n-1}(0)F_n(0) + \cdots + F_1(0)F_2(0)F_3(0)\cdots F_{n-1}(1)F_n(0) + \\
&\quad F_1(0)F_2(0)F_3(0)\cdots F_{n-1}(0)F_n(1)
\end{aligned}$$

aynı şekilde

$k = 2$ için,

$$\begin{aligned}
F(2) &= F_1(1)F_2(1)F_3(0)\cdots F_{n-1}(0)F_n(0) + F_1(1)F_2(0)F_3(1)\cdots F_{n-1}(0)F_n(0) + \cdots + \\
&\quad F_1(1)F_2(0)F_3(0)\cdots F_{n-1}(1)F_n(0) + F_1(1)F_2(0)F_3(0)\cdots F_{n-1}(0)F_n(1) + \cdots + \\
&\quad F_1(0)F_2(1)F_3(1)\cdots F_{n-1}(0)F_n(0) + F_1(0)F_2(0)F_3(0)\cdots F_{n-1}(1)F_n(1) + \cdots + \\
&\quad F_1(2)F_2(0)F_3(0)\cdots F_{n-1}(0)F_n(0) + \cdots + \\
&\quad F_1(0)F_2(0)F_3(0)\cdots F_{n-1}(0)F_n(2)
\end{aligned}$$

$\vdots$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$\mathcal{D}_T \{f_1(x)f_2(x)f_3(x)\cdots f_{n-1}(x)f_n(x)\}$$

$$= \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \cdots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} F_1(k_1) F_2(k_2 - k_1) F_3(k_3 - k_2) \cdots F_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) F_n(k - k_{n-1})$$

olduğu görülür.

Teorem 2.9 $f(x)$ fonksiyonunun, $g(x)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi ile çarpımının diferensiyel dönüşümü,

$$\mathcal{D}_T \left\{ f(x) \frac{dg(x)}{dx} \right\} = \sum_{r=0}^k (k-r+1) F(r) G(k-r+1)$$

eşitliği ile verilir.

İspat: $h(x) = \frac{dg(x)}{dx}$ olsun. Teorem 2.4'ten bilinir ki $h(x)$ fonksiyonun dönüşümü,

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{dg(x)}{dx} \right\} = H(k) = (k+1)G(k+1)$$

şeklinde dir. Bu durumda dönüşümü aranan fonksiyon $f(x)h(x)$ olur. Teorem 2.6'dan

$$\mathcal{D}_T \{ f(x)h(x) \} = \sum_{r=0}^k F(r)H(k-r)$$

eşitliği elde edilir.

$$H(k-r) = (k-r+1)G(k-r+1)$$

ifadesi bulunan son eşitlikte yerine yazıldığında,

$$\mathcal{D}_T \left\{ f(x) \frac{dg(x)}{dx} \right\} = \sum_{r=0}^k (k-r+1) F(r) G(k-r+1)$$

bulunur.

Teorem 2.10 $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevlerinin çarpımının diferensiyel dönüşümü,

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{df(x)}{dx} \frac{dg(x)}{dx} \right\} = \sum_{r=0}^k (r+1)(k-r+1) F(r+1) G(k-r+1)$$

ile ifade edilir.

İspat: $u(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ve $v(x) = \frac{dg(x)}{dx}$ olsun. Bu durumda dönüşümü aranılan fonksiyon $u(x)v(x)$ olacaktır. Teorem 2.4'ten

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{df(x)}{dx} \right\} = U(k) = (k+1)F(k+1)$$

ve

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{dg(x)}{dx} \right\} = V(k) = (k+1)G(k+1)$$

eşitlikleri elde edilir. Dönüşümü aranılan fonksiyon, iki fonksiyonun çarpımı şeklinde olduğundan Teorem 2.6'dan yararlanılarak,

$$\mathcal{D}_T \{u(x)v(x)\} = \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r)$$

bulunur. Burada

$$U(r) = (r+1)F(r+1)$$

ve

$$V(k-r) = (k-r+1)G(k-r+1)$$

ifadeleri bulunan son eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{df(x)}{dx} \frac{dg(x)}{dx} \right\} = \sum_{r=0}^k (r+1)(k-r+1)F(r+1)G(k-r+1)$$

elde edilir.

Teorem 2.11 Üstel fonksiyonun diferensiyel dönüşümü, $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = a^{\lambda x} \text{ ise}$$

$$\mathcal{D}_T \{a^{\lambda x}\} = F(k) = \frac{\lambda^k (\ln a)^k}{k!}$$

ile verilir.

İspat: Dönüşümün tanımından,

$$\mathcal{D}_T \{a^{\lambda x}\} = F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} a^{\lambda x} \right]_{x=x_0}$$

olduğu bilinir. k parametresinin aldığı değerlere göre $F(k)$ değerleri hesaplandığında,

$k = 0$ için,

$$F(0) = \frac{1}{0!} \left[a^{\lambda x} \right]_{x=0} = \frac{1}{0!} = 1$$

$k = 1$ için,

$$F(1) = \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{dx} a^{\lambda x} \right]_{x=0} = \frac{1}{1!} \left[\lambda a^{\lambda x} \ln a \right]_{x=0} = \frac{1}{1!} \lambda \ln a$$

$k = 2$ için,

$$F(2) = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dx^2} a^{\lambda x} \right]_{x=0} = \frac{1}{2!} \left[\lambda^2 (\ln a)^2 a^{\lambda x} \right]_{x=0} = \frac{1}{2!} \lambda^2 (\ln a)^2$$

$k = 3$ için,

$$F(3) = \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{dx^3} a^{\lambda x} \right]_{x=0} = \frac{1}{3!} \left[\lambda^3 (\ln a)^3 a^{\lambda x} \right]_{x=0} = \frac{1}{3!} \lambda^3 (\ln a)^3$$

$\vdots$

elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde,

$$\mathcal{D}_T \{a^{\lambda x}\} = F(k) = \frac{\lambda^k (\ln a)^k}{k!}$$

olduğu görülür.

Teorem 2.12 $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = e^{\lambda x}$ ise

$$\mathcal{D}_T \{e^{\lambda x}\} = F(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Teorem 2.11'de $a = e$ alınırsa

$$\mathcal{D}_T \{e^{\lambda x}\} = F(k) = \frac{\lambda^k (\ln e)^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!}$$

elde edilir.

Teorem 2.13 $\sinh(\lambda x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$\mathcal{D}_T \{\sinh(\lambda x)\} = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} & k \text{ tek ise} \\ 0 & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

ile ifade edilir.

İspat: $\sinh(\lambda x) = \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2}$ olduğu bilinir. Dönüşümün tanımından

$$\mathcal{D}_T \{\sinh(\lambda x)\} = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2} \right] \right]_{x=x_0}$$

olur. Dönüşümün lineerliğinden,

$$\mathcal{D}_T \{\sinh(\lambda x)\} = \frac{1}{2} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} [e^{\lambda x}] \right]_{x=x_0} - \frac{1}{2} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} [e^{-\lambda x}] \right]_{x=x_0}$$

olduğu görülür. Teorem 2.12'den

$$\mathcal{D}_T \{\sinh(\lambda x)\} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^k}{k!} - \frac{1}{2} \frac{(-\lambda)^k}{k!} = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda^k}{k!} - \frac{(-\lambda)^k}{k!} \right]$$

eşitliği elde edilir. Burada k parametresinin 2 durumu söz konusudur:

$$k \text{ tek ise } \mathcal{D}_T \{\sinh(\lambda x)\} = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda^k}{k!} \right] = \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$k \text{ çift ise } \mathcal{D}_T \{\sinh(\lambda x)\} = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda^k}{k!} - \frac{\lambda^k}{k!} \right] = 0$$

Sonuç olarak

$$\mathcal{D}_T \{ \sinh(\lambda x) \} = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} & k \text{ tek ise} \\ 0 & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 2.14 $\cosh(\lambda x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$\mathcal{D}_T \{ \cosh(\lambda x) \} = \begin{cases} 0 & k \text{ tek ise} \\ \frac{\lambda^k}{k!} & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

eşitliği ile verilir.

İspat: Teorem 2.13'te olduğu gibi benzer şekilde $\cosh(\lambda x) = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}$ olduğu bilinir.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_T \{ \cosh(\lambda x) \} &= \frac{1}{2} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k [e^{\lambda x}]}{dx^k} \right]_{x=x_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k [e^{-\lambda x}]}{dx^k} \right]_{x=x_0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{1}{2} \frac{(-\lambda)^k}{k!} = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda^k}{k!} + \frac{(-\lambda)^k}{k!} \right] \end{aligned}$$

k parametresinin 2 durumu söz konusudur:

$$k \text{ tek ise } \mathcal{D}_T \{ \cosh(\lambda x) \} = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda^k}{k!} - \frac{\lambda^k}{k!} \right] = 0$$

$$k \text{ çift ise } \mathcal{D}_T \{ \cosh(\lambda x) \} = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda^k}{k!} \right] = \frac{\lambda^k}{k!}$$

Sonuç olarak

$$\mathcal{D}_T \{ \cosh(\lambda x) \} = \begin{cases} 0 & k \text{ tek ise} \\ \frac{\lambda^k}{k!} & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 2.15 $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \sin(ax + b)$ ise

$$\mathcal{D}_T \{ \sin(ax + b) \} = F(k) = \frac{a^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi}{2}k + b\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Dönüşümün tanımından

$$\mathcal{D}_T \{ \sin(ax + b) \} = F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k [\sin(ax + b)]}{dx^k} \right]_{x=x_0}$$

olur. k parametresinin aldığı değerlere göre $F(k)$ değerleri hesaplanırsa,

$k = 0$ için,

$$F(0) = \frac{1}{0!} [\sin(ax + b)]_{x=0} = \frac{1}{0!} \sin(b) = \frac{1}{0!} a^0 \sin\left(\frac{0\pi}{2} + b\right)$$

$k = 1$ için,

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{1}{1!} \left[\frac{d[\sin(ax + b)]}{dx} \right]_{x=0} = \frac{1}{1!} [a \cos(ax + b)]_{x=0} = \frac{1}{1!} a \cos(b) \\ &= \frac{1}{1!} a \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\right) \end{aligned}$$

$k = 2$ için,

$$\begin{aligned} F(2) &= \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 [\sin(ax + b)]}{dx^2} \right]_{x=0} = \frac{1}{2!} [-a^2 \sin(ax + b)]_{x=0} = -\frac{1}{2!} a^2 \sin(b) \\ &= \frac{1}{2!} a^2 \sin\left(\frac{2\pi}{2} + b\right) \end{aligned}$$

$k = 3$ için,

$$\begin{aligned} F(3) &= \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3 [\sin(ax + b)]}{dx^3} \right]_{x=0} = \frac{1}{3!} [-a^3 \cos(ax + b)]_{x=0} = -\frac{1}{3!} a^3 \cos(b) \\ &= \frac{1}{3!} a^3 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + b\right) \end{aligned}$$

⋮

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse,

$$\mathcal{D}_T \{ \sin(ax+b) \} = F(k) = \frac{a^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi}{2}k + b\right)$$

elde edilir.

Teorem 2.16 $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \cos(ax+b)$ ise

$$\mathcal{D}_T \{ \cos(ax+b) \} = F(k) = \frac{a^k}{k!} \cos\left(\frac{\pi}{2}k + b\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Teorem 2.15'te olduğu gibi benzer şekilde

$$\mathcal{D}_T \{ \cos(ax+b) \} = F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k [\cos(ax+b)]}{dx^k} \right]_{x=x_0}$$

olur. k parametresinin aldığı değerlere göre $F(k)$ değerleri hesaplanırsa,

$k = 0$ için,

$$F(0) = \frac{1}{0!} [\cos(ax+b)]_{x=0} = \frac{1}{0!} \cos(b) = \frac{1}{0!} a^0 \cos\left(\frac{0\pi}{2} + b\right)$$

$k = 1$ için,

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{1}{1!} \left[\frac{d[\cos(ax+b)]}{dx} \right]_{x=0} = \frac{1}{1!} [-a \sin(ax+b)]_{x=0} = -\frac{1}{1!} a \sin(b) \\ &= \frac{1}{1!} a \cos\left(\frac{\pi}{2} + b\right) \end{aligned}$$

$k = 2$ için,

$$\begin{aligned} F(2) &= \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 [\cos(ax+b)]}{dx^2} \right]_{x=0} = \frac{1}{2!} [-a^2 \cos(ax+b)]_{x=0} = -\frac{1}{2!} a^2 \cos(b) \\ &= \frac{1}{2!} a^2 \cos\left(\frac{2\pi}{2} + b\right) \end{aligned}$$

$k = 3$ için,

$$F(3) = \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3 [\cos(ax+b)]}{dx^3} \right]_{x=0} = \frac{1}{3!} [a^3 \sin(ax+b)]_{x=0} = \frac{1}{3!} a^3 \sin(b)$$

$$= \frac{1}{3!} a^3 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + b\right)$$

$\vdots$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse,

$$\mathcal{D}_T \{ \cos(ax+b) \} = F(k) = \frac{a^k}{k!} \cos\left(\frac{\pi}{2}k + b\right)$$

bulunur.

Teorem 2.17 Kuvvet fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü, $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\mathcal{D}_T \{ x^m \} = \delta(k-m) = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

ile verilir.

İspat: Öncelikle $\left[\frac{d^k [x^m]}{dx^k} \right]_{x=0}$ ifadesi incelensin. Burada 3 durum söz konusudur:

$$1. \text{ durum: } k < m \text{ ise } \left[\frac{d^k [x^m]}{dx^k} \right]_{x=0} = [m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)x^{m-k}]_{x=0} = 0$$

$$\mathcal{D}_T \{ x^m \} = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k [x^m]}{dx^k} \right]_{x=0} = \frac{0}{k!} = 0$$

$$2. \text{ durum: } k = m \text{ ise } \left[\frac{d^k [x^m]}{dx^k} \right]_{x=0} = [m(m-1)(m-2)\dots(m-m+1)x^{m-m}]_{x=0} = m!$$

$$\mathcal{D}_T \{ x^m \} = \frac{1}{m!} \left[\frac{d^m [x^m]}{dx^m} \right]_{x=0} = \frac{m!}{m!} = 1$$

$$3. \text{ durum: } k > m \text{ ise } \left[\frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0} = [m(m-1)(m-2)\dots(m-m+1)0]_{x=0} = 0$$

$$\mathcal{D}_T \{x^m\} = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0} = \frac{0}{k!} = 0$$

Bu 3 durum göz önüne alınarak,

$$\mathcal{D}_T \{x^m\} = \delta(k-m) = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

sonucu elde edilir. Örneğin c sabit olmak üzere,

$$\mathcal{D}_T \{c\} = \mathcal{D}_T \{cx^0\} = c\delta(k)$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.18 $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$ ise

$$\mathcal{D}_T \{f(x)\} = F(k) = \frac{G(k-1)}{k}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: İspata geçmeden önce analizden iyi bilinen aşağıdaki teorem verilsin:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir olsun. $[a, b]$ üzerinde

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

eşitliği ile tanımlanan F fonksiyonu f in sürekli olduğu her noktada türevlidir ve

$$F'(x) = f(x)$$

olur.

Bu teoremden hareketle,

$$f(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt \Rightarrow f'(x) = g(x)$$

olur ve her iki tarafın diferensiyel dönüşümü alındığında

$$\mathcal{D}_T \{f'(x)\} = (k+1)F(k+1) \text{ ve } \mathcal{D}_T \{g(x)\} = G(k)$$

olmak üzere

$$\mathcal{D}_T \{f'(x)\} = \mathcal{D}_T \{g(x)\} \Rightarrow (k+1)F(k+1) = G(k)$$

$$\Rightarrow F(k+1) = \frac{G(k)}{(k+1)}$$

$$\Rightarrow F(k) = \frac{G(k-1)}{k}$$

elde edilir.

Teorem 2.19 İki fonksiyonun çarpımının integralinin diferensiyel dönüşümü,

$$f(x) = \int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) dt$$

olmak üzere

$$\mathcal{D}_T \{f(x)\} = F(k) = \frac{1}{k} \sum_{k_1=0}^{k-1} G_1(k_1) G_2(k - k_1 - 1) , k \geq 1$$

ile ifade edilir.

İspat: Dönüşümün tanımından

$$\mathcal{D}_T \{f(x)\} = F(k) = \mathcal{D}_T \left\{ \int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) dt \right\} = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \left(\int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) dt \right) \right]_{x=x_0}$$

olur. k parametresinin değerlerine göre $F(k)$ değerleri hesaplandığında,

$k = 0$ için,

$$F(0) = \frac{1}{0!} \left[\int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) dt \right]_{x=x_0} = 0$$

$k = 1$ için,

$$F(1) = \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{dx} \left(\int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) dt \right) \right]_{x=x_0}$$

$$= \frac{1}{1!} [g_1(x) g_2(x)]_{x=x_0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{0!} [g_1(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [g_2(x)]_{x=x_0} \\
&= G_1(0) G_2(0)
\end{aligned}$$

$k = 2$ için,

$$\begin{aligned}
F(2) &= \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) dt \right) \right]_{x=x_0} \\
&= \frac{1}{2!} [g_1'(x) g_2(x) + g_1(x) g_2'(x)]_{x=x_0} \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1!} \left[\frac{dg_1(x)}{dx} \right]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [g_2(x)]_{x=x_0} + \frac{1}{0!} [g_1(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{1!} \left[\frac{dg_2(x)}{dx} \right]_{x=x_0} \right] \\
&= \frac{1}{2} [G_1(1) G_2(0) + G_1(0) G_2(1)]
\end{aligned}$$

$k = 3$ için,

$$\begin{aligned}
F(3) &= \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{dx^3} \left(\int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) dt \right) \right]_{x=x_0} \\
&= \frac{1}{3!} [g_1''(x) g_2(x) + 2g_1'(x) g_2'(x) + g_1(x) g_2''(x)]_{x=x_0} \\
&= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 g_1(x)}{dx^2} \right]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [g_2(x)]_{x=x_0} + \frac{1}{1!} \left[\frac{dg_1(x)}{dx} \right]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{1!} \left[\frac{dg_2(x)}{dx} \right]_{x=x_0} + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{0!} [g_1(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 g_2(x)}{dx^2} \right]_{x=x_0} \right] \\
&= \frac{1}{3} [G_1(2) G_2(0) + G_1(1) G_2(1) + G_1(0) G_2(2)]
\end{aligned}$$

$\vdots$

elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde sonuç olarak

$$\mathcal{D}_T \{f(x)\} = F(k) = \frac{1}{k} \sum_{k_1=0}^{k-1} G_1(k_1) G_2(k - k_1 - 1) \quad , \quad k \geq 1$$

bulunur.

Teorem 2.20 Üç fonksiyonun çarpımının integralinin diferensiyel dönüşümü,

$$f(x) = \int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) g_3(t) dt$$

olmak üzere

$$\mathcal{D}_T \{f(x)\} = F(k) = \frac{1}{k} \sum_{k_2=0}^{k-1} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1) G_2(k_2 - k_1) G_3(k - k_2 - 1) , k \geq 1$$

ile verilir.

İspat: Dönüşümün tanımı gereği,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_T \{f(x)\} = F(k) &= \mathcal{D}_T \left\{ \int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) g_3(t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \left(\int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) g_3(t) dt \right) \right]_{x=x_0} \end{aligned}$$

olur. k parametresinin aldığı değerlere göre $F(k)$ değerleri hesaplandığında,

$k = 0$ için,

$$F(0) = \frac{1}{0!} \left[\int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) g_3(t) dt \right]_{x=x_0} = 0$$

$k = 1$ için,

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{dx} \left(\int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) g_3(t) dt \right) \right]_{x=x_0} \\ &= \frac{1}{1!} [g_1(x) g_2(x) g_3(x)]_{x=x_0} \\ &= \frac{1}{0!} [g_1(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [g_2(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [g_3(x)]_{x=x_0} \\ &= G_1(0) G_2(0) G_3(0) \end{aligned}$$

$k = 2$ için,

$$F(2) = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) g_3(t) dt \right) \right]_{x=x_0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2!} [g_1'(x)g_2(x)g_3(x) + g_1(x)g_2'(x)g_3(x) + g_1(x)g_2(x)g_3'(x)]_{x=x_0} \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1!} \left[\frac{dg_1(x)}{dx} \right]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [g_2(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [g_3(x)]_{x=x_0} + \right. \\
&\quad \frac{1}{0!} [g_1(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{1!} \left[\frac{dg_2(x)}{dx} \right]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [g_3(x)]_{x=x_0} + \\
&\quad \left. \frac{1}{0!} [g_1(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [g_2(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{1!} \left[\frac{dg_3(x)}{dx} \right]_{x=x_0} \right] \\
&= \frac{1}{2} [G_1(1)G_2(0)G_3(0) + G_1(0)G_2(1)G_3(0) + G_1(0)G_2(0)G_3(1)]
\end{aligned}$$

$k = 3$ için,

$$\begin{aligned}
F(3) &= \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{dx^3} \left(\int_{x_0}^x g_1(t)g_2(t)g_3(t)dt \right) \right]_{x=x_0} \\
&= \frac{1}{3!} [g_1''(x)g_2(x)g_3(x) + 2g_1'(x)g_2'(x)g_3(x) + 2g_1'(x)g_2(x)g_3'(x) + \\
&\quad 2g_1(x)g_2'(x)g_3'(x) + g_1(x)g_2''(x)g_3(x) + g_1(x)g_2(x)g_3''(x)]_{x=x_0} \\
&= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 g_1(x)}{dx^2} \right]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [g_2(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [g_3(x)]_{x=x_0} + \right. \\
&\quad \frac{1}{1!} \left[\frac{dg_1(x)}{dx} \right]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{1!} \left[\frac{dg_2(x)}{dx} \right]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [g_3(x)]_{x=x_0} + \\
&\quad \frac{1}{1!} \left[\frac{dg_1(x)}{dx} \right]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [g_2(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{1!} \left[\frac{dg_3(x)}{dx} \right]_{x=x_0} + \\
&\quad \frac{1}{0!} [g_1(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{1!} \left[\frac{dg_2(x)}{dx} \right]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{1!} \left[\frac{dg_3(x)}{dx} \right]_{x=x_0} + \\
&\quad \left. \frac{1}{0!} [g_1(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 g_2(x)}{dx^2} \right]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [g_3(x)]_{x=x_0} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{0!} [g_1(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{0!} [g_2(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 g_3(x)}{dx^2} \right]_{x=x_0} \Bigg] \\
&= \frac{1}{3} [G_1(2)G_2(0)G_3(0) + G_1(1)G_2(1)G_3(0) + G_1(1)G_2(0)G_3(1) + \\
& \quad G_1(0)G_2(1)G_3(1) + G_1(0)G_2(2)G_3(0) + G_1(0)G_2(0)G_3(2)] \\
& \vdots
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde sonuç olarak

$$\mathcal{D}_T \{f(x)\} = F(k) = \frac{1}{k} \sum_{k_2=0}^{k-1} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1) G_2(k_2 - k_1) G_3(k - k_2 - 1), \quad k \geq 1$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 2.21 n tane fonksiyonun çarpımının integrali,

$$f(x) = \int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) \cdots g_{n-1}(t) g_n(t) dt \text{ ise}$$

$$\mathcal{D}_T \{f(x)\} = F(k)$$

olmak üzere

$$F(k) = \frac{1}{k} \sum_{k_{n-1}=0}^{k-1} \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \cdots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1) G_2(k_2 - k_1) \cdots G_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) G_n(k - k_{n-1} - 1)$$

eşitliği ile verilir.

İspat: Dönüşümün tanımından

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_T \{f(x)\} &= F(k) = \mathcal{D}_T \left\{ \int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) \cdots g_{n-1}(t) g_n(t) dt \right\} \\
&= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \left(\int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) \cdots g_{n-1}(t) g_n(t) dt \right) \right]_{x=x_0}
\end{aligned}$$

elde edilir. k parametresinin değerlerine göre $F(k)$ değerleri hesaplanırsa Teorem 2.19 da olduğu gibi benzer şekilde,

$k = 0$ için,

$$F(0) = \frac{1}{0!} \left[\int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) \cdots g_{n-1}(t) g_n(t) dt \right]_{x=x_0} = 0$$

$k = 1$ için,

$$F(1) = \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{dx} \left(\int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) \cdots g_{n-1}(t) g_n(t) dt \right) \right]_{x=x_0}$$

$$= [g_1(x) g_2(x) \cdots g_{n-1}(x) g_n(x)]_{x=x_0}$$

$$= G_1(0) G_2(0) \cdots G_{n-1}(0) G_n(0)$$

$k = 2$ için,

$$F(2) = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) \cdots g_{n-1}(t) g_n(t) dt \right) \right]_{x=x_0}$$

$$= \frac{1}{2!} [g_1'(x) g_2(x) \cdots g_{n-1}(x) g_n(x) + g_1(x) g_2'(x) \cdots g_{n-1}(x) g_n(x) + \cdots +$$

$$g_1(x) g_2(x) \cdots g_{n-1}'(x) g_n(x) + g_1(x) g_2(x) \cdots g_{n-1}(x) g_n'(x)]_{x=x_0}$$

$$= \frac{1}{2} [G_1(1) G_2(0) \cdots G_{n-1}(0) G_n(0) + G_1(0) G_2(1) \cdots G_{n-1}(0) G_n(0) + \cdots +$$

$$G_1(0) G_2(0) \cdots G_{n-1}(1) G_n(0) + G_1(0) G_2(0) \cdots G_{n-1}(0) G_n(1)]$$

$\vdots$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse sonuç olarak

$$F(k) = \frac{1}{k} \sum_{k_{n-1}=0}^{k-1} \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \cdots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1) G_2(k_2 - k_1) \cdots G_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) G_n(k - k_{n-1} - 1)$$

bulunur.

Teorem 2.22 Bir fonksiyonun n -katlı integralinin diferensiyel dönüşümü,

$$f(x) = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \cdots \int_{x_0}^{x_3} \int_{x_0}^{x_2} \int_{x_0}^{x_1} g(t) dt dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-2} dx_{n-1} \text{ ise}$$

$$\mathcal{D}_T \{f(x)\} = F(k) = \frac{(k-n)!}{k!} G(k-n) \quad , \quad k \geq n$$

ile ifade edilir.

İspat: Ters diferensiyel dönüşümünün tanımından

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \cdots \int_{x_0}^{x_3} \int_{x_0}^{x_2} \int_{x_0}^{x_1} \sum_{k=0}^{\infty} G(k) (t-x_0)^k dt dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-2} dx_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \cdots \int_{x_0}^{x_3} \int_{x_0}^{x_2} \int_{x_0}^{x_1} G(k) (t-x_0)^k dt dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-2} dx_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \cdots \int_{x_0}^{x_3} \int_{x_0}^{x_2} \frac{G(k)}{k+1} (x_1-x_0)^{k+1} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-2} dx_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \cdots \int_{x_0}^{x_3} \frac{G(k)}{(k+1)(k+2)} (x_2-x_0)^{k+2} dx_2 \cdots dx_{n-2} dx_{n-1} \\ &\vdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G(k)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)} (x-x_0)^{k+n} \end{aligned}$$

Seriye $k=0$ yerine $k=n$ den başlatırsak,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{G(k-n)}{(k+1-n)(k+2-n)\cdots(k)} (x-x_0)^k \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(k-n)!}{k!} G(k-n) (x-x_0)^k \end{aligned}$$

şekline dönüşür. Dolayısıyla verilen n - katlı integralin dönüşümü,

$$\mathcal{D}_T \{f(x)\} = F(k) = \frac{(k-n)!}{k!} G(k-n) \quad , \quad k \geq n$$

bulunur.

DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU UYGULAMALARI

Bu bölümde, sabit veya değişken katsayılı lineer ve non-lineer diferensiyel denklemler ile integral ve integro-diferensiyel denklemlerin DDM yardımıyla çözümü incelenecektir. Bu metodun uygulanışı sonucunda bulunan çözümler, denklemlerin bilinen yollarla bulunabilecek kapalı çözümleri ile karşılaştırılacaktır. Kapalı çözümü bilinmeyen problemlerde metodun doğruluğu, Taylor serisinin hata teriminden yararlanılarak da görülebilir.

Örnek 3.1 Aşağıda verilen başlangıç değer problemini DDM ile çözelim [23].

$$y'' - 4y' + 3y = 0 ; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$$

Verilen başlangıç değer problemi sabit katsayılı homojen diferensiyel denklem olup karakteristik denklem yardımıyla kapalı çözümü,

$$y(x) = e^x + e^{3x}$$

şeklinde elde edilir. Öncelikle diferensiyel denklemin her iki tarafına DDM uygulanır ve Bölüm 2'de verilen teoremler gereği dönüşümün lineer olduğu göz önüne alınırsa

$$\mathcal{D}_T \{y'' - 4y' + 3y\} = \mathcal{D}_T \{0\} \Rightarrow \mathcal{D}_T \{y''\} - 4\mathcal{D}_T \{y'\} + 3\mathcal{D}_T \{y\} = \mathcal{D}_T \{0\}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\mathcal{D}_T \{y(x)\} = Y(k),$$

$$\mathcal{D}_T \{y'(x)\} = (k+1)Y(k+1),$$

ve

$$\mathcal{D}_T \{y''(x)\} = (k+1)(k+2)Y(k+2)$$

olduğundan diferensiyel denklemin DDM yardımıyla dönüşümü,

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) - 4[(k+1)Y(k+1)] + 3Y(k) = 0$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitlik tekrar düzenlendiğinde,

$$Y(k+2) = \frac{4}{k+2}Y(k+1) - \frac{3}{(k+1)(k+2)}Y(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

rekürans denklemi elde edilir. Başlangıç koşullarına diferensiyel dönüşüm uygulandığında,

$$Y(0) = \frac{1}{0!}[y(x)]_{x=0} = y(0) = 2 \Rightarrow Y(0) = 2$$

$$Y(1) = \frac{1}{1!}\left[\frac{dy(x)}{dx}\right]_{x=0} = y'(0) = 4 \Rightarrow Y(1) = 4$$

değerleri bulunur. Bu değerler (3.1) rekürans denkleminde kullanıldığında,

$$k = 0 \Rightarrow Y(2) = \frac{4}{2}Y(1) - \frac{3}{2}Y(0) \Rightarrow Y(2) = 5 = \frac{10}{2!} = \frac{9+1}{2!} = \frac{3^2+1}{2!}$$

$$k = 1 \Rightarrow Y(3) = \frac{4}{3}Y(2) - \frac{3}{6}Y(1) \Rightarrow Y(3) = \frac{28}{6} = \frac{27+1}{3!} = \frac{3^3+1}{3!}$$

$$k = 2 \Rightarrow Y(4) = \frac{4}{4}Y(3) - \frac{3}{12}Y(2) \Rightarrow Y(4) = \frac{82}{24} = \frac{81+1}{4!} = \frac{3^4+1}{4!}$$

$$k = 3 \Rightarrow Y(5) = \frac{4}{5}Y(4) - \frac{3}{20}Y(3) \Rightarrow Y(5) = \frac{244}{120} = \frac{243+1}{5!} = \frac{3^5+1}{5!}$$

⋮

elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde,

$$Y(k) = \frac{3^k + 1}{k!} = \frac{3^k}{k!} + \frac{1}{k!}$$

olduğu görülür. Böylece başlangıç değer probleminin çözümü dönüşüm uzayında $Y(k)$ olarak elde edilmiş olur ki bu değere ters diferensiyel dönüşüm uygulandığında,

$$y(x) = \mathcal{D}_T^{-1}\{Y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3^k}{k!} + \frac{1}{k!} \right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

ifadesi elde edilir. Burada elde edilen seri dikkatlice incelendiğinde e^x ve e^{3x} fonksiyonlarının $x = 0$ civarında Taylor serisi açılımları olduğu görülür:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

ve

$$e^{3x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!} = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{27x^3}{6} + \dots$$

Bu durumda verilen başlangıç değer probleminin çözümü,

$$y(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!}}_{e^{3x}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}_{e^x} = e^{3x} + e^x$$

şeklinde elde edilir. Sonuç olarak DDM yardımıyla elde edilen çözüm ile denklemin kapalı çözümünün birbirine eşit olduğu görülür.

Örnek 3.2 Aşağıda verilen başlangıç değer probleminin çözümünü DDM ile verelim.

$$y'' - 3y' + 2y = 4x + 12e^{-x} ; \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = -1.$$

Verilen başlangıç değer problemi sabit katsayılı homojen olmayan denklem olup belirsiz katsayılar yöntemiyle kapalı çözümü

$$y(x) = 3e^x - 2e^{2x} + 2e^{-x} + 2x + 3$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemi DDM yardımıyla çözebilmek için öncelikle denklemin her iki tarafına DDM uygulayalım. Örnek 3.1'de olduğu gibi dönüşümün lineerliğine göre

$$\mathcal{D}_T \{y'' - 3y' + 2y\} = \mathcal{D}_T \{4x + 12e^{-x}\} \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{D}_T \{y''\} - 3\mathcal{D}_T \{y'\} + 2\mathcal{D}_T \{y\} = 4\mathcal{D}_T \{x\} + 12\mathcal{D}_T \{e^{-x}\}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\mathcal{D}_T \{y(x)\} = Y(k),$$

$$\mathcal{D}_T \{y'(x)\} = (k+1)Y(k+1),$$

$$\mathcal{D}_T \{y''(x)\} = (k+1)(k+2)Y(k+2),$$

$$\mathcal{D}_T \{x\} = \delta(k-1)$$

ve

$$\mathcal{D}_T \{e^{-x}\} = \frac{(-1)^k}{k!}$$

olduğundan diferensiyel denklemin DDM yardımıyla dönüşümü,

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) - 3(k+1)Y(k+1) + 2Y(k) = 4\delta(k-1) + \frac{12(-1)^k}{k!}$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitlik tekrar düzenlendiğinde

$$Y(k+2) = \frac{3}{k+2}Y(k+1) - \frac{2}{(k+1)(k+2)}Y(k) + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[4\delta(k-1) + \frac{12(-1)^k}{k!} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

rekürans denklemi elde edilir. Başlangıç koşullarına diferensiyel dönüşüm uygulandığında,

$$Y(0) = 6, \quad Y(1) = -1$$

değerleri bulunur. Bu değerler (3.2) denkleminde kullanıldığında

$$\delta(k-1) = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}$$

olduğu dikkate alınarak,

$$k=0 \quad \Rightarrow \quad Y(2) = \frac{3}{2}Y(1) - \frac{2}{2}Y(0) + \frac{1}{2} \left[4\delta(0-1) + \frac{12}{0!} \right] \quad \Rightarrow \quad Y(2) = -\frac{3}{2}$$

$$k=1 \quad \Rightarrow \quad Y(3) = \frac{3}{3}Y(2) - \frac{2}{6}Y(1) + \frac{1}{6} \left[4\delta(1-1) - \frac{12}{1!} \right] \quad \Rightarrow \quad Y(3) = -\frac{15}{6}$$

$$k=2 \Rightarrow Y(4) = \frac{3}{4}Y(3) - \frac{2}{12}Y(2) + \frac{1}{12} \left[4\delta(2-1) + \frac{12}{2!} \right] \Rightarrow Y(4) = -\frac{27}{24}$$

$$k=3 \Rightarrow Y(5) = \frac{3}{5}Y(4) - \frac{2}{20}Y(3) + \frac{1}{20} \left[4\delta(3-1) - \frac{12}{3!} \right] \Rightarrow Y(5) = -\frac{63}{120}$$

⋮

değerleri bulunur. Böylece başlangıç değer probleminin çözümü ters diferensiyel dönüşüm ile

$$y(x) = \mathcal{D}_T^{-1} \{Y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) x^k$$

$$y(x) = 6 - x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{15}{6}x^3 - \frac{27}{24}x^4 - \frac{63}{120}x^5 - \dots$$

olarak elde edilir. Bu çözüm aynı zamanda

$$\begin{aligned} y(x) = & 3 \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right] - \\ & 2 \left[1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^5}{5!} + \dots \right] + \\ & 2 \left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots \right] + 2x + 3 \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Bu çözüm

$$y(x) = 3e^x - 2e^{2x} + 2e^{-x} + 2x + 3$$

fonksiyonunun $x=0$ civarında Taylor serisi açılımıdır. Sonuç olarak verilen başlangıç değer probleminin DDM yardımıyla çözümü ile kapalı çözüm birbirine eşittir.

Örnek 3.3 Aşağıda verilen diferensiyel denklemi DDM ile çözelim [4].

$$y' = 2y - y^2 + 1 ; y(0) = 0.$$

Verilen diferensiyel denklem Riccati denklemi olup bu denklemin bilinen çözüm teknikleri yardımıyla kapalı çözümü,

$$y(x) = 1 + \sqrt{2} \tanh \left(\sqrt{2}x + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \right)$$

şeklinde dir. DDM yardımıyla elde edilen çözüm Örnek 3.1 ve Örnek 3.2'de de görüldüğü gibi seri şeklinde olduğundan çözümleri karşılaştırabilmek açısından kapalı çözüm $x = 0$ civarında Taylor serisine açıldığında

$$y(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{7}{15}x^5 - \frac{7}{45}x^6 + \frac{53}{315}x^7 + \dots$$

ifadesi elde edilir. Denklemin her iki tarafının diferensiyel dönüşümü alındığında

$$\mathcal{D}_T \{y'\} = \mathcal{D}_T \{2y - y^2 + 1\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}_T \{y'\} = 2\mathcal{D}_T \{y\} - \mathcal{D}_T \{y^2\} + \mathcal{D}_T \{1\}$$

elde edilir. Buna göre

$$\mathcal{D}_T \{y(x)\} = Y(k),$$

$$\mathcal{D}_T \{y'(x)\} = (k+1)Y(k+1),$$

$$\mathcal{D}_T \{y^2\} = \mathcal{D}_T \{y \cdot y\} = \sum_{r=0}^k Y(r)Y(k-r)$$

ve

$$\mathcal{D}_T \{1\} = \mathcal{D}_T \{1x^0\} = \delta(k)$$

olduğundan diferensiyel denklemin DDM yardımıyla dönüşümü,

$$(k+1)Y(k+1) = 2Y(k) - \sum_{r=0}^k Y(r)Y(k-r) + \delta(k)$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik tekrar düzenlendiğinde

$$Y(k+1) = \frac{1}{(k+1)} \left[2Y(k) - \sum_{r=0}^k Y(r)Y(k-r) + \delta(k) \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

rekürans denklemi elde edilir. Başlangıç koşulunun diferensiyel dönüşümü yardımıyla $Y(0) = 0$ değeri elde edilip bu değer (3.3) denkleminde kullanıldığında

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

olmak üzere

$$k = 0 \Rightarrow Y(1) = 2Y(0) - \sum_{r=0}^0 Y(r)Y(k-r) + \delta(0) = 2Y(0) - Y(0)Y(0) + \delta(0)$$

$$\Rightarrow Y(1) = 1$$

$$\begin{aligned} k = 1 \Rightarrow Y(2) &= \frac{1}{2} \left[2Y(1) - \sum_{r=0}^1 Y(r)Y(1-r) + \delta(1-1) \right] \\ &= \frac{1}{2} [2Y(1) - [Y(0)Y(1) + Y(1)Y(0)] + \delta(1-1)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y(2) = 1$$

$$\begin{aligned} k = 2 \Rightarrow Y(3) &= \frac{1}{3} \left[2Y(2) - \sum_{r=0}^2 Y(r)Y(2-r) + \delta(2-1) \right] \\ &= \frac{1}{3} [2Y(2) - [Y(0)Y(2) + Y(1)Y(1) + Y(2)Y(0)] + \delta(2-1)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y(3) = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} k = 3 \Rightarrow Y(4) &= \frac{1}{4} \left[2Y(3) - \sum_{r=0}^3 Y(r)Y(3-r) + \delta(3-1) \right] \\ &= \frac{1}{4} [2Y(3) - [Y(0)Y(3) + Y(1)Y(2) + Y(2)Y(3) + \\ &\quad Y(3)Y(0)] + \delta(3-1)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y(4) = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} k = 4 \Rightarrow Y(5) &= \frac{1}{5} \left[2Y(4) - \sum_{r=0}^4 Y(r)Y(4-r) + \delta(4-1) \right] \\ &= \frac{1}{5} [2Y(4) - [Y(0)Y(4) + Y(1)Y(3) + Y(2)Y(2) + \\ &\quad Y(3)Y(1) + Y(4)Y(0)] + \delta(4-1)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y(5) = -\frac{7}{15}$$

$\vdots$

değerleri bulunur. Böylece ters diferensiyel dönüşüm yardımıyla

$$y(x) = \mathcal{D}_T^{-1} \{Y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) x^k$$

$$y(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{7}{15}x^5 - \dots$$

elde edilir. DDM ile elde edilen çözüm kapalı çözümün $x=0$ civarında Taylor seri açılımı ile karşılaştırıldığında çözümlerin eşit olduğu açıktır.

Örnek 3.4 Aşağıda $y_1 = 1$ özel çözümü ile verilen non-lineer diferensiyel denklemi DDM ile çözelim [23].

$$y' = xy^2 + (1-2x)y + x - 1 ; \quad y(0) = 2 .$$

Verilen diferensiyel denklem değişken katsayılı non-lineer bir denklemdir. Bilinen bir çözüm tekniği olarak $y = 1 + z$ dönüşümü ile elde edilecek Bernoulli denkleminin tekrar $z = uv$ dönüşümü ile çözülmesi sonucunda elde edilen kapalı çözüm,

$$y(x) = 1 + \frac{1}{1-x}$$

şeklinde elde edilir. Her iki tarafın diferensiyel dönüşümü alındığında

$$\mathcal{D}_T \{y'\} = \mathcal{D}_T \{xy^2 + (1-2x)y + x - 1\} \Rightarrow$$

$$\mathcal{D}_T \{y'\} = \mathcal{D}_T \{xy^2\} + \mathcal{D}_T \{y\} - 2\mathcal{D}_T \{xy\} + \mathcal{D}_T \{x\} - \mathcal{D}_T \{1\}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\mathcal{D}_T \{y(x)\} = Y(k),$$

$$\mathcal{D}_T \{y'(x)\} = (k+1)Y(k+1),$$

$$\mathcal{D}_T \{x\} = \delta(k-1) = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases},$$

$$u(x) = xy^2 \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{D}_T \{u(x)\} = \mathcal{D}_T \{xy^2\} = \mathcal{D}_T \{x \cdot y \cdot y\} = U(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \delta(r-1) Y(t) Y(k-r-t),$$

$$v(x) = xy \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{D}_T \{v(x)\} = \mathcal{D}_T \{x \cdot y\} = V(k) = \sum_{r=0}^k \delta(r-1) Y(k-r)$$

ve

$$\mathcal{D}_T \{1\} = \delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

olduğundan denklemin DDM yardımıyla dönüşümü,

$$(k+1)Y(k+1) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \delta(r-1) Y(t) Y(k-r-t) + Y(k) - 2 \sum_{r=0}^k \delta(r-1) Y(k-r) + \delta(k-1) - \delta(k)$$

eşitliği elde edilir.

$$U(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \delta(r-1) Y(t) Y(k-r-t)$$

ve

$$V(k) = \sum_{r=0}^k \delta(r-1) Y(k-r)$$

ifadeleri göz önüne alınarak eşitlik tekrar düzenlendiğinde,

$$Y(k+1) = \frac{1}{k+1} [U(k) + Y(k) - 2V(k) + \delta(k-1) - \delta(k)] \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

rekürans denklemi elde edilir. Başlangıç koşulunun diferensiyel dönüşümü ile elde edilen $Y(0) = 2$ değeri (3.4) denkleminde kullanıldığında

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(1) = U(0) + Y(0) - 2V(0) + \delta(0-1) - \delta(0)$$

burada

$$U(0) = \sum_{r=0}^0 \sum_{t=0}^0 \delta(r-1)Y(t)Y(k-r-t) = \delta(0-1)Y(0)Y(0) = 0,$$

$$V(0) = \sum_{r=0}^0 \delta(r-1)Y(k-r) = \delta(0-1)Y(0) = 0$$

olduğundan bu değerler yerine konulduğunda

$$Y(1) = 1$$

bulunur.

$$k = 1 \Rightarrow Y(2) = \frac{1}{2}[U(1) + Y(1) - 2V(1) + \delta(1-1) - \delta(1)]$$

burada

$$\begin{aligned} U(1) &= \sum_{r=0}^1 \sum_{t=0}^{1-r} \delta(r-1)Y(t)Y(1-r-t) \\ &= \delta(0-1)[Y(0)Y(1) + Y(1)Y(0)] + \delta(1-1)Y(0)Y(0) \\ &= 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(1) &= \sum_{r=0}^1 \delta(r-1)Y(1-r) \\ &= \delta(0-1)Y(1) + \delta(1-1)Y(0) \\ &= 2 \end{aligned}$$

olduğundan değerler yerine konulduğunda

$$Y(2) = 1$$

bulunur.

$$k = 2 \Rightarrow Y(3) = \frac{1}{3}[U(2) + Y(2) - 2V(2) + \delta(2-1) - \delta(2)]$$

burada

$$U(2) = \sum_{r=0}^2 \sum_{t=0}^{2-r} \delta(r-1)Y(t)Y(2-r-t)$$

$$\begin{aligned}
&= \delta(0-1)[Y(0)Y(2)+Y(1)Y(1)+Y(2)Y(0)]+ \\
&\quad \delta(1-1)[Y(0)Y(1)+Y(1)Y(0)]+\delta(2-1)Y(0)Y(0) \\
&= 4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(2) &= \sum_{r=0}^2 \delta(r-1)Y(2-r) \\
&= \delta(0-1)Y(2)+\delta(1-1)Y(1)+\delta(2-1)Y(0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olduğundan değerler yerine konulduğunda

$$Y(3)=1$$

bulunur. Bu şekilde devam edildiğinde,

$$Y(0)=2 \text{ ve } Y(k)=1 \text{ (} k \geq 1 \text{)}$$

olduğu görülür. Ters diferensiyel dönüşüm yardımıyla

$$y(x) = \mathcal{D}_T^{-1} \{Y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

$$y(x) = 2 + x + x^2 + x^3 + \dots = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

ifadesi elde edilir. Bilindiği gibi $\frac{1}{1-x}$ fonksiyonunun $x=0$ civarında Taylor serisi açılımı,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

şeklindedir. Dolayısıyla denklemin DDM yardımıyla çözülmesi sonucu

$$y(x) = 1 + \frac{1}{1-x}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi DDM nin uygulanması ile elde edilen çözüm kapalı çözüme eşittir.

Örnek 3.5 Aşağıda verilen sınır değer probleminin çözümünü DDM ile verelim.

$$y'' - 3y' + 2y = 0 ; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Verilen sınır değer probleminin kapalı çözümü

$$y(x) = \frac{1}{e(e-1)} [-e^x + e^{2x}]$$

şeklindedir. Bunun için her iki tarafın diferensiyel dönüşümü alındığında

$$\mathcal{D}_T \{y'' - 3y' + 2y\} = \mathcal{D}_T \{0\} \Rightarrow \mathcal{D}_T \{y''\} - 3\mathcal{D}_T \{y'\} + 2\mathcal{D}_T \{y\} = \mathcal{D}_T \{0\}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\mathcal{D}_T \{y(x)\} = Y(k),$$

$$\mathcal{D}_T \{y'(x)\} = (k+1)Y(k+1),$$

ve

$$\mathcal{D}_T \{y''(x)\} = (k+1)(k+2)Y(k+2)$$

olduğundan denklemin DDM yardımıyla dönüşümü,

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) - 3[(k+1)Y(k+1)] + 2Y(k) = 0$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik tekrar düzenlendiğinde

$$Y(k+2) = \frac{3}{k+2}Y(k+1) - \frac{2}{(k+1)(k+2)}Y(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

rekürans denklemi elde edilir. İlk adımda $Y(0)$ ve $Y(1)$ değerleri gereklidir. Başlangıç koşulunun diferensiyel dönüşümü yardımıyla $Y(0) = 0$ elde edilir fakat $Y(1)$ değeri için $y'(0)$ koşuluna ihtiyaç vardır. Problemde bu koşul verilmediği için $Y(1) = \alpha$ olarak düşünelim. Bu değerler (3.5) denkleminde kullanıldığında

$$k = 0 \Rightarrow Y(2) = \frac{3}{2}Y(1) - \frac{2}{2}Y(0) \Rightarrow Y(2) = \frac{3\alpha}{2!}$$

$$k = 1 \Rightarrow Y(3) = \frac{3}{3}Y(2) - \frac{2}{6}Y(1) \Rightarrow Y(3) = \frac{7\alpha}{3!}$$

$$k = 2 \Rightarrow Y(4) = \frac{3}{4}Y(3) - \frac{2}{12}Y(2) \Rightarrow Y(4) = \frac{15\alpha}{4!}$$

$$k = 3 \Rightarrow Y(5) = \frac{3}{5}Y(4) - \frac{2}{20}Y(3) \Rightarrow Y(5) = \frac{31\alpha}{5!}$$

$$k = 4 \Rightarrow Y(6) = \frac{3}{6}Y(5) - \frac{2}{30}Y(4) \Rightarrow Y(6) = \frac{63\alpha}{6!}$$

$$k = 5 \Rightarrow Y(7) = \frac{3}{7}Y(6) - \frac{2}{42}Y(5) \Rightarrow Y(7) = \frac{127\alpha}{7!}$$

$$k = 6 \Rightarrow Y(8) = \frac{3}{8}Y(7) - \frac{2}{56}Y(6) \Rightarrow Y(8) = \frac{255\alpha}{8!}$$

$$k = 7 \Rightarrow Y(9) = \frac{3}{9}Y(8) - \frac{2}{72}Y(7) \Rightarrow Y(9) = \frac{511\alpha}{9!}$$

⋮

Bu şekilde devam edildiğinde ters diferensiyel dönüşüm yardımıyla

$$y(x) = \mathcal{D}_T^{-1} \{Y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

$$y(x) = \alpha x + \frac{3\alpha}{2!}x^2 + \frac{7\alpha}{3!}x^3 + \frac{15\alpha}{4!}x^4 + \frac{31\alpha}{5!}x^5 + \frac{63\alpha}{6!}x^6 + \frac{127\alpha}{7!}x^7 + \frac{255\alpha}{8!}x^8 + \dots$$

elde edilir. Buradaki α değeri ise problemde verilen $y(1)=1$ koşulunun kullanılmasıyla elde edilir.

İlk 4 terim için:

$$1 = \alpha + \frac{3\alpha}{2!} + \frac{7\alpha}{3!} + \frac{15\alpha}{4!} \Rightarrow \alpha = 0.2330$$

İlk 5 terim için:

$$1 = \alpha + \frac{3\alpha}{2!} + \frac{7\alpha}{3!} + \frac{15\alpha}{4!} + \frac{31\alpha}{5!} \Rightarrow \alpha = 0.2197$$

İlk 6 terim için:

$$1 = \alpha + \frac{3\alpha}{2!} + \frac{7\alpha}{3!} + \frac{15\alpha}{4!} + \frac{31\alpha}{5!} + \frac{63\alpha}{6!} \Rightarrow \alpha = 0.2156$$

İlk 7 terim için:

$$1 = \alpha + \frac{3\alpha}{2!} + \frac{7\alpha}{3!} + \frac{15\alpha}{4!} + \frac{31\alpha}{5!} + \frac{63\alpha}{6!} + \frac{127\alpha}{7!} \Rightarrow \alpha = 0.2144$$

İlk 8 terim için:

$$1 = \alpha + \frac{3\alpha}{2!} + \frac{7\alpha}{3!} + \frac{15\alpha}{4!} + \frac{31\alpha}{5!} + \frac{63\alpha}{6!} + \frac{127\alpha}{7!} + \frac{255\alpha}{8!} \Rightarrow \alpha = 0.2141$$

İlk 9 terim için:

$$1 = \alpha + \frac{3\alpha}{2!} + \frac{7\alpha}{3!} + \frac{15\alpha}{4!} + \frac{31\alpha}{5!} + \frac{63\alpha}{6!} + \frac{127\alpha}{7!} + \frac{255\alpha}{8!} + \frac{511\alpha}{9!} \Rightarrow \alpha = 0.2141$$

α değerleri tekrarlamaya başladığından aradığımız değer $\alpha = 0.2141$ bulunur. Bu değer bulunan çözümde yerine yazıldığında

$$y(x) = 0.2141 \left[x + \frac{3}{2!}x^2 + \frac{7}{3!}x^3 + \frac{15}{4!}x^4 + \frac{31}{5!}x^5 + \frac{63}{6!}x^6 + \frac{127}{7!}x^7 + \frac{255}{8!}x^8 + \dots \right]$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade aynı zamanda

$$y(x) = 0.2141 \left[- \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) + \left(1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \dots \right) \right]$$

şeklinde de yazılabilir. Buradan

$$y(x) = 0.2141 \left[-e^x + e^{2x} \right]$$

olduğu görülür. $\frac{1}{e(e-1)} = 0.2141$ olduğu göz önüne alınırsa DDM yardımıyla elde

edilen çözüm diğer örneklerde olduğu gibi kapalı çözüme eşittir.

Örnek 3.6 Aşağıda verilen sınır değer problemini DDM ile çözelim.

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x ; \quad y(1) = \frac{e}{2} \cos 1 + e \sin 1, \quad y(2) = e^2 \sin 2.$$

Verilen sınır değer problemi belirsiz katsayılar yöntemiyle çözüldüğünde elde edilen kapalı çözüm

$$y(x) = e^x \left(\cos x + \sin x - \frac{1}{2}x \cos x \right)$$

şeklinde dir. İşleme yine her iki tarafın diferensiyel dönüşümünü alarak başlayalım.

$$\mathcal{D}_T \{y'' - 2y' + 2y\} = \mathcal{D}_T \{e^x \sin x\} \Rightarrow$$

$$\mathcal{D}_T \{y''\} - 2\mathcal{D}_T \{y'\} + 2\mathcal{D}_T \{y\} = \mathcal{D}_T \{e^x \sin x\}$$

Bilindiği gibi,

$$\mathcal{D}_T \{y(x)\} = Y(k),$$

$$\mathcal{D}_T \{y'(x)\} = (k+1)Y(k+1),$$

$$\mathcal{D}_T \{y''(x)\} = (k+1)(k+2)Y(k+2)$$

ve

$$u(x) = e^x, \quad v(x) = \sin x \Rightarrow$$

$$\mathcal{D}_T \{u(x)\} = \mathcal{D}_T \{e^x\} = U(k) = \frac{1}{k!},$$

$$\mathcal{D}_T \{v(x)\} = \mathcal{D}_T \{\sin x\} = V(k) = \frac{1}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

olmak üzere

$$\mathcal{D}_T \{e^x \sin x\} = \mathcal{D}_T \{u(x)v(x)\} = \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r)$$

olduğundan denklemin DDM yardımıyla dönüşümü,

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) - 2(k+1)Y(k+1) + 2Y(k) = \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r)$$

şeklinde olur. Eşitlik düzenlendiğinde

$$Y(k+2) = \frac{2}{k+2}Y(k+1) - \frac{2}{(k+1)(k+2)}Y(k) + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r)$$

rekürans denklemi elde edilir. İlk adımda $Y(0)$ ve $Y(1)$ değerleri gereklidir fakat $Y(0)$ için $y(0)$ ve $Y(1)$ için $y'(0)$ koşulu gerekli olup problemde bu koşullar verilmediğinden

$$Y(0) = \alpha \quad \text{ve} \quad Y(1) = \beta$$

kabul edilip bu değerler rekürans denkleminde kullanıldığında

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(2) = Y(1) - Y(0) + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^0 U(r)V(k-r)$$

$$\sum_{r=0}^0 U(r)V(k-r) = U(0)V(0) = 0$$

olmak üzere

$$Y(2) = Y(1) - Y(0) \quad \Rightarrow \quad Y(2) = \beta - \alpha$$

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad Y(3) = \frac{2}{3}Y(2) - \frac{1}{3}Y(1) + \frac{1}{6} \sum_{r=0}^1 U(r)V(k-r)$$

$$\sum_{r=0}^1 U(r)V(k-r) = U(0)V(1) + U(1)V(0) = 1$$

olmak üzere

$$Y(3) = \frac{2}{3}Y(2) - \frac{1}{3}Y(1) + \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad Y(3) = -\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{6}$$

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad Y(4) = \frac{1}{2}Y(3) - \frac{1}{6}Y(2) + \frac{1}{12} \sum_{r=0}^2 U(r)V(k-r)$$

$$\sum_{r=0}^2 U(r)V(k-r) = U(0)V(2) + U(1)V(1) + U(2)V(0) = 1$$

olmak üzere

$$Y(4) = \frac{1}{2}Y(3) - \frac{1}{6}Y(2) + \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad Y(4) = -\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{6}$$

$$k = 3 \quad \Rightarrow \quad Y(5) = \frac{2}{5}Y(4) - \frac{1}{10}Y(3) + \frac{1}{20} \sum_{r=0}^3 U(r)V(k-r)$$

$$\sum_{r=0}^3 U(r)V(k-r) = U(0)V(3) + U(1)V(2) + U(2)V(1) + U(3)V(0) = \frac{1}{3}$$

olmak üzere

$$Y(5) = \frac{2}{5}Y(4) - \frac{1}{10}Y(3) + \frac{1}{60} \quad \Rightarrow \quad Y(5) = -\frac{1}{30}\beta + \frac{1}{15}$$

$$k = 4 \quad \Rightarrow \quad Y(6) = \frac{1}{3}Y(5) - \frac{1}{15}Y(4) + \frac{1}{30} \sum_{r=0}^4 U(r)V(k-r)$$

$$\sum_{r=0}^4 U(r)V(k-r) = U(0)V(4) + U(1)V(3) + U(2)V(2) + U(3)V(1) + U(4)V(0) = 0$$

olmak üzere

$$Y(6) = \frac{1}{3}Y(5) - \frac{1}{15}Y(4) \quad \Rightarrow \quad Y(6) = \frac{1}{90}\alpha - \frac{1}{90}\beta + \frac{1}{90}$$

$$k = 5 \quad \Rightarrow \quad Y(7) = \frac{2}{7}Y(6) - \frac{1}{21}Y(5) + \frac{1}{42} \sum_{r=0}^5 U(r)V(k-r)$$

$$\sum_{r=0}^5 U(r)V(k-r) = U(0)V(5) + U(1)V(4) + U(2)V(3) +$$

$$U(3)V(2) + U(4)V(1) + U(5)V(0)$$

$$= -\frac{1}{30}$$

olmak üzere

$$Y(7) = \frac{2}{7}Y(6) - \frac{1}{21}Y(5) - \frac{1}{1260} \quad \Rightarrow \quad Y(7) = \frac{1}{315}\alpha - \frac{1}{630}\beta - \frac{1}{1260}$$

$$k = 6 \quad \Rightarrow \quad Y(8) = \frac{1}{4}Y(7) - \frac{1}{28}Y(6) + \frac{1}{56} \sum_{r=0}^6 U(r)V(k-r)$$

$$\sum_{r=0}^6 U(r)V(k-r) = U(0)V(6) + U(1)V(5) + U(2)V(4) + U(3)V(3) +$$

$$U(4)V(2) + U(5)V(1) + U(6)V(0)$$

$$= -\frac{1}{90}$$

olmak üzere

$$Y(8) = \frac{1}{4}Y(7) - \frac{1}{28}Y(6) - \frac{1}{5040} \quad \Rightarrow \quad Y(8) = \frac{1}{2520}\alpha - \frac{1}{1260}$$

$$k = 7 \quad \Rightarrow \quad Y(9) = \frac{2}{9}Y(8) - \frac{1}{36}Y(7) + \frac{1}{72} \sum_{r=0}^7 U(r)V(k-r)$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^7 U(r)V(k-r) &= U(0)V(7) + U(1)V(6) + U(2)V(5) + U(3)V(4) + U(4)V(3) + \\ &\quad U(5)V(2) + U(6)V(1) + U(7)V(0) \\ &= -\frac{1}{630} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$Y(9) = \frac{2}{9}Y(8) - \frac{1}{36}Y(7) - \frac{1}{45360} \quad \Rightarrow \quad Y(9) = \frac{1}{22680}\beta - \frac{1}{5670}$$

$$k = 8 \quad \Rightarrow \quad Y(10) = \frac{1}{5}Y(9) - \frac{1}{45}Y(8) + \frac{1}{90} \sum_{r=0}^8 U(r)V(k-r)$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^8 U(r)V(k-r) &= U(0)V(8) + U(1)V(7) + U(2)V(6) + U(3)V(5) + U(4)V(4) + \\ &\quad U(5)V(3) + U(6)V(2) + U(7)V(1) + U(8)V(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$Y(10) = \frac{1}{5}Y(9) - \frac{1}{45}Y(8) \quad \Rightarrow \quad Y(10) = -\frac{1}{113400}\alpha + \frac{1}{113400}\beta - \frac{1}{56700}$$

$$k = 9 \quad \Rightarrow \quad Y(11) = \frac{2}{11}Y(10) - \frac{1}{55}Y(9) + \frac{1}{110} \sum_{r=0}^9 U(r)V(k-r)$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^9 U(r)V(k-r) &= U(0)V(9) + U(1)V(8) + U(2)V(7) + U(3)V(6) + U(4)V(5) + \\ &\quad U(5)V(4) + U(6)V(3) + U(7)V(2) + U(8)V(1) + U(9)V(0) \\ &= \frac{1}{22680} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$Y(11) = \frac{2}{11}Y(10) - \frac{1}{55}Y(9) + \frac{1}{2494800} \Rightarrow$$

$$Y(11) = -\frac{1}{623700}\alpha + \frac{1}{1247400}\beta + \frac{1}{2494800}$$

⋮

elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde ters diferensiyel dönüşüm yardımıyla

$$y(x) = \mathcal{D}_T^{-1} \{Y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

$$\begin{aligned} y(x) = & \alpha + \beta x + (\beta - \alpha)x^2 + \left(-\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{6}\right)x^4 + \left(-\frac{1}{30}\beta + \frac{1}{15}\right)x^5 + \\ & \left(\frac{1}{90}\alpha - \frac{1}{90}\beta + \frac{1}{90}\right)x^6 + \left(\frac{1}{315}\alpha - \frac{1}{630}\beta - \frac{1}{1260}\right)x^7 + \left(\frac{1}{2520}\alpha - \frac{1}{1260}\right)x^8 + \\ & \left(\frac{1}{22680}\beta - \frac{1}{5670}\right)x^9 + \left(-\frac{1}{113400}\alpha + \frac{1}{113400}\beta - \frac{1}{56700}\right)x^{10} + \\ & \left(-\frac{1}{623700}\alpha + \frac{1}{1247400}\beta + \frac{1}{2494800}\right)x^{11} + \dots \end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki α ve β değerleri problemde verilen $y(1)$ ve $y(2)$ koşullarının kullanılmasıyla şu şekilde bulunur:

İlk 5 terim için:

$$y(1) = \frac{e}{2} \cos 1 + e \sin 1 = \alpha + \beta + (\beta - \alpha) + \left(-\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{6}\right) +$$

$$\left(-\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{30}\beta + \frac{1}{15}\right)$$

$$y(2) = e^2 \sin 2 = \alpha + 2\beta + 2^2(\beta - \alpha) + 2^3\left(-\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{6}\right) +$$

$$2^4\left(-\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{6}\right) + 2^5\left(-\frac{1}{30}\beta + \frac{1}{15}\right)$$

Denklem sistemi çözüldüğünde

$$\alpha = 0.9795 \text{ ve } \beta = 1.4948$$

bulunur.

İlk 9 terim için:

$$\begin{aligned} y(1) = \frac{e}{2} \cos 1 + e \sin 1 = \alpha + \beta + (\beta - \alpha) + \left(-\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{6}\right) + \\ \left(-\frac{1}{30}\beta + \frac{1}{15}\right) + \left(\frac{1}{90}\alpha - \frac{1}{90}\beta + \frac{1}{90}\right) + \\ \left(\frac{1}{315}\alpha - \frac{1}{630}\beta - \frac{1}{1260}\right) + \left(\frac{1}{2520}\alpha - \frac{1}{1260}\right) + \\ \left(\frac{1}{22680}\beta - \frac{1}{5670}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(2) = e^2 \sin 2 = \alpha + 2\beta + 2^2(\beta - \alpha) + 2^3\left(-\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{6}\right) + 2^4\left(-\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{6}\right) + \\ 2^5\left(-\frac{1}{30}\beta + \frac{1}{15}\right) + 2^6\left(\frac{1}{90}\alpha - \frac{1}{90}\beta + \frac{1}{90}\right) + \\ 2^7\left(\frac{1}{315}\alpha - \frac{1}{630}\beta - \frac{1}{1260}\right) + 2^8\left(\frac{1}{2520}\alpha - \frac{1}{1260}\right) + \\ 2^9\left(\frac{1}{22680}\beta - \frac{1}{5670}\right) \end{aligned}$$

Denklem sistemi çözüldüğünde

$$\alpha = 1.0016 \quad \text{ve} \quad \beta = 1.5006$$

bulunur.

İlk 10 terim için:

$$\begin{aligned} y(1) = \frac{e}{2} \cos 1 + e \sin 1 = \alpha + \beta + (\beta - \alpha) + \left(-\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{6}\right) + \\ \left(-\frac{1}{30}\beta + \frac{1}{15}\right) + \left(\frac{1}{90}\alpha - \frac{1}{90}\beta + \frac{1}{90}\right) + \\ \left(\frac{1}{315}\alpha - \frac{1}{630}\beta - \frac{1}{1260}\right) + \left(\frac{1}{2520}\alpha - \frac{1}{1260}\right) + \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{22680}\beta - \frac{1}{5670}\right) + \left(-\frac{1}{113400}\alpha + \frac{1}{113400}\beta - \frac{1}{56700}\right)$$

$$\begin{aligned} y(2) = e^2 \sin 2 = \alpha + 2\beta + 2^2(\beta - \alpha) + 2^3\left(-\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{6}\right) + 2^4\left(-\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{6}\right) + \\ 2^5\left(-\frac{1}{30}\beta + \frac{1}{15}\right) + 2^6\left(\frac{1}{90}\alpha - \frac{1}{90}\beta + \frac{1}{90}\right) + \\ 2^7\left(\frac{1}{315}\alpha - \frac{1}{630}\beta - \frac{1}{1260}\right) + 2^8\left(\frac{1}{2520}\alpha - \frac{1}{1260}\right) + \\ 2^9\left(\frac{1}{22680}\beta - \frac{1}{5670}\right) + 2^{10}\left(-\frac{1}{113400}\alpha + \frac{1}{113400}\beta - \frac{1}{56700}\right) \end{aligned}$$

Denklem sistemi çözüldüğünde

$$\alpha = 0.9998 \quad \text{ve} \quad \beta = 1.4999$$

bulunur.

İlk 11 terim için de benzer işlemlerin yapılması sonucu

$$\alpha = 0.9998 \quad \text{ve} \quad \beta = 1.4999$$

bulunur. Görüldüğü gibi değerler tekrarlamaya başladığından aranılan α ve β değerleri

$\alpha \cong 1$ ve $\beta \cong 1.5$ olur. Bu değerler bulunan $y(x)$ çözümünde yerine yazıldığında

$$y(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{180}x^6 + \dots$$

elde edilir. Problemin kapalı çözümü $x = 0$ civarında Taylor serisine açıldığında

$$\begin{aligned} y(x) = \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right] \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right. \\ \left. - \frac{1}{2}x \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right]\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitlik tekrar düzenlendiğinde

$$y(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{180}x^6 + \dots$$

elde edilir. Görüldüğü gibi verilen problemin belirsiz katsayılar yöntemi ile elde edilen kapalı çözümünün Taylor serisine açılımı ile DDM yardımıyla elde edilen çözümü birbirine eşittir.

Örnek 3.7 Osilatör denklemler tek kararlı limit çevrimi ile beraber tek kararsız sabit noktaya sahip dinamik sistemler için önemli bir matematik modeli sağlar. Bu gibi olayların örnekleri tüm doğa, mühendislik bilimi ve çoğu fizik problemlerinde ortaya çıkar. Bu denklemlerin çeşitli halleri, titreşim genliği kontrolü, senkronizasyon dinamikleri ve katkı rezonansları gibi alanlarda incelenmektedir. [21] de "homotopi pertürbasyon dönüşüm metodu" kullanılarak çözülen aşağıdaki non-lineer osilatör diferensiyel denklemini DDM yardımıyla çözelim.

$$\frac{d^2u}{dt^2} - u + u^2 + \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 1 = 0 ; \quad u(0) = 2 , \quad u'(0) = 0 .$$

Verilen non-lineer osilatör diferensiyel denkleminin kapalı çözümü,

$$u(t) = 1 + \cos t$$

şeklindedir. Denklemin her iki tarafının diferensiyel dönüşümü alındığında

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{d^2u}{dt^2} - u + u^2 + \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 1 \right\} = \mathcal{D}_T \{0\} \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{d^2u}{dt^2} \right\} - \mathcal{D}_T \{u\} + \mathcal{D}_T \{u^2\} + \mathcal{D}_T \left\{ \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \right\} - \mathcal{D}_T \{1\} = \mathcal{D}_T \{0\}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\mathcal{D}_T \{u\} = U(k),$$

$$\mathcal{D}_T \{u^2\} = \sum_{r=0}^k U(r)U(k-r),$$

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{d^2u}{dt^2} \right\} = (k+1)(k+2)U(k+2),$$

$$\mathcal{D}_T \left\{ \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \right\} = \sum_{r=0}^k (r+1)(k-r+1)U(r+1)U(k-r+1)$$

ve

$$\mathcal{D}_T \{1\} = \delta(k)$$

olduğundan denklemin DDM yardımıyla dönüşümü,

$$(k+1)(k+2)U(k+2) - U(k) + \sum_{r=0}^k U(r)U(k-r) + \sum_{r=0}^k (r+1)(k-r+1)U(r+1)U(k-r+1) - \delta(k) = 0$$

şeklinde elde edilir. İfade tekrar düzenlendiğinde

$$U(k+2) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[U(k) - \sum_{r=0}^k U(r)U(k-r) - \sum_{r=0}^k (r+1)(k-r+1)U(r+1)U(k-r+1) + \delta(k) \right]$$

rekürans denklemi elde edilir.

$$V(k) = \sum_{r=0}^k U(r)U(k-r)$$

ve

$$W(k) = \sum_{r=0}^k (r+1)(k-r+1)U(r+1)U(k-r+1)$$

olarak alındığında düzenlenmiş rekürans denklemi

$$U(k+2) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} [U(k) - V(k) - W(k) + \delta(k)] \quad (3.6)$$

şeklinde elde edilir. Başlangıç koşullarına DDM nin uygulanması ile elde edilen $U(0) = 2$ ve $U(1) = 0$ değerleri rekürans denkleminde yerine konduğunda

$$k = 0 \Rightarrow U(2) = \frac{1}{2} [U(0) - V(0) - W(0) + \delta(0)]$$

elde edilir. Burada

$$V(0) = \sum_{r=0}^0 U(r)U(k-r) = U(0)U(0) = 4,$$

$$W(0) = \sum_{r=0}^0 (r+1)(k-r+1)U(r+1)U(k-r+1) = U(1)U(1) = 0.$$

İşlemler yapıp $k=0$ için rekürans denkleminde yerine yazıldığında

$$U(2) = -\frac{1}{2!}$$

bulunur. Benzer şekilde devam edildiğinde,

$$k=1 \Rightarrow U(3) = \frac{1}{6}[U(1)-V(1)-W(1)+\delta(1)]$$

burada

$$V(1) = \sum_{r=0}^1 U(r)U(1-r) = U(0)U(1) + U(1)U(0) = 0,$$

$$W(1) = \sum_{r=0}^1 (r+1)(2-r)U(r+1)U(2-r) = 2[U(1)U(2) + U(2)U(1)] = 0$$

olduğundan bu değerler $k=1$ için bulunan rekürans denkleminde yerine yazıldığında

$$U(3) = 0$$

bulunur.

$$k=2 \Rightarrow U(4) = \frac{1}{12}[U(2)-V(2)-W(2)+\delta(2)]$$

burada

$$V(2) = \sum_{r=0}^2 U(r)U(2-r) = U(0)U(2) + U(1)U(1) + U(2)U(0) = -2,$$

$$\begin{aligned} W(2) &= \sum_{r=0}^2 (r+1)(3-r)U(r+1)U(3-r), \\ &= 3U(1)U(3) + 4U(2)U(2) + 3U(3)U(1) = 1 \end{aligned}$$

olduğundan bu değerler $k=2$ için bulunan rekürans denkleminde yerine yazıldığında

$$U(4) = \frac{1}{4!}$$

bulunur.

$$k = 3 \Rightarrow U(5) = \frac{1}{20} [U(3) - V(3) - W(3) + \delta(3)]$$

burada

$$V(3) = \sum_{r=0}^3 U(r)U(3-r) = U(0)U(3) + U(1)U(2) + U(2)U(1) + U(3)U(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} W(3) &= \sum_{r=0}^3 (r+1)(4-r)U(r+1)U(4-r) \\ &= 4U(1)U(4) + 6U(2)U(3) + 6U(3)U(2) + 4U(4)U(1) = 0 \end{aligned}$$

olduğundan bu değerler $k = 3$ için bulunan rekürans denkleminde yerine yazıldığında $U(5) = 0$

bulunur.

$$k = 4 \Rightarrow U(6) = \frac{1}{30} [U(4) - V(4) - W(4) + \delta(4)]$$

burada

$$\begin{aligned} V(4) &= \sum_{r=0}^4 U(r)U(4-r) \\ &= U(0)U(4) + U(1)U(3) + U(2)U(2) + U(3)U(1) + U(4)U(0) = \frac{5}{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(4) &= \sum_{r=0}^4 (r+1)(5-r)U(r+1)U(5-r) \\ &= 5U(1)U(5) + 8U(2)U(4) + 9U(3)U(3) + 8U(4)U(2) + 5U(5)U(1) = -\frac{2}{6} \end{aligned}$$

olduğundan bu değerler $k = 4$ için bulunan rekürans denkleminde yerine yazıldığında $U(6) = -\frac{1}{6!}$

bulunur. Bu şekilde devam edildiğinde ters diferensiyel dönüşüm yardımıyla

$$u(t) = \mathcal{D}_T^{-1} \{U(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)t^k$$

$$u(t) = 2 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \dots = 1 + \underbrace{1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \dots}_{\cos t \text{ fonksiyonunun } x=0 \text{ civarında Taylor serisi açılımı}} = 1 + \cos t$$

elde edilir. Görüldüğü gibi osilatör diferensiyel denkleminin de DDM ile çözülmesi sonucu elde edilen sonuç kapalı çözüme eşittir.

Örnek 3.8 [21] de "homotopi pertürbasyon dönüşüm metodu" yardımıyla çözülen aşağıdaki Van der Pol's osilatör denklemini DDM ile çözelim.

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + u + u^2 \frac{du}{dt} = 2 \cos t - \cos^3 t ; u(0) = 0 , u'(0) = 1.$$

Verilen problemin kapalı çözümü

$$u(t) = \sin t$$

şeklindedir. Problemi DDM yardımıyla çözebilmek için öncelikle her iki tarafın diferensiyel dönüşümü alındığında

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + u + u^2 \frac{du}{dt} \right\} = \mathcal{D}_T \{ 2 \cos t - \cos^3 t \} \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{d^2u}{dt^2} \right\} + \mathcal{D}_T \left\{ \frac{du}{dt} \right\} + \mathcal{D}_T \{ u \} + \mathcal{D}_T \left\{ u^2 \frac{du}{dt} \right\} = 2 \mathcal{D}_T \{ \cos t \} - \mathcal{D}_T \{ \cos^3 t \}$$

elde edilir. Bilindiği gibi,

$$\mathcal{D}_T \{ u \} = U(k),$$

$$\mathcal{D}_T \{ u^2 \} = \sum_{r=0}^k U(r)U(k-r),$$

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{d^2u}{dt^2} \right\} = (k+1)(k+2)U(k+2),$$

$$v(t) = \frac{du}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}_T \{ v(t) \} = \mathcal{D}_T \left\{ \frac{du}{dt} \right\} = V(k) = (k+1)U(k+1)$$

olmak üzere

$$\mathcal{D}_T \left\{ u^2 \frac{du}{dt} \right\} = \mathcal{D}_T \{ u^2 v \} = \mathcal{D}_T \{ u \cdot u \cdot v \} = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} U(r)U(t)V(k-r-t),$$

$$\mathcal{D}_T \{\cos t\} = \frac{1}{k!} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

ve

$$y(t) = \cos t \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}_T \{y(t)\} = \mathcal{D}_T \{\cos t\} = Y(k) = \frac{1}{k!} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

olmak üzere

$$\mathcal{D}_T \{\cos^3 t\} = \mathcal{D}_T \{y \cdot y \cdot y\} = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} Y(r) Y(t) Y(k-r-t)$$

olduğundan denklemin DDM yardımıyla dönüşümü,

$$\begin{aligned} & (k+1)(k+2)U(k+2) + (k+1)U(k+1) + U(k) + \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} U(r)U(t)V(k-r-t) \\ &= \frac{2}{k!} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} Y(r)Y(t)Y(k-r-t) \end{aligned}$$

şeklindedir.

$$W(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} U(r)U(t)V(k-r-t)$$

ve

$$Z(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} Y(r)Y(t)Y(k-r-t)$$

ifadeleri göz önüne alınarak eşitlik tekrar düzenlendiğinde

$$U(k+2) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[-(k+1)U(k+1) - U(k) - W(k) + \frac{2}{k!} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - Z(k) \right] \quad (3.7)$$

rekürans denklemi elde edilir. Problemden verilen başlangıç koşullarının diferensiyel dönüşümü sonucu $U(0)=0$ ve $U(1)=1$ değerleri (3.7) rekürans denkleminde kullanıldığında

$$k=0 \quad \Rightarrow \quad U(2) = \frac{1}{2} [-U(1) - U(0) - W(0) + 2 - Z(0)]$$

burada

$$W(0) = \sum_{r=0}^0 \sum_{t=0}^0 U(r)U(t)V(k-r-t) = U(0)U(0)V(0) = U(0)U(0)U(1) = 0,$$

$$Z(0) = \sum_{r=0}^0 \sum_{t=0}^0 Y(r)Y(t)Y(k-r-t) = Y(0)Y(0)Y(0) = 1$$

olduğundan bu değerler yerine konulduğunda

$$U(2) = 0$$

bulunur.

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad U(3) = \frac{1}{6}[-2U(2) - U(1) - W(1) + 0 - Z(1)]$$

burada

$$\begin{aligned} W(1) &= \sum_{r=0}^1 \sum_{t=0}^{1-r} U(r)U(t)V(1-r-t) \\ &= U(0)[U(0)V(1) + U(1)V(0)] + U(1)U(0)V(0) \\ &= U(0)[2U(0)U(2) + U(1)U(1)] + U(1)U(0)U(1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(1) &= \sum_{r=0}^1 \sum_{t=0}^{1-r} Y(r)Y(t)Y(1-r-t) \\ &= Y(0)[Y(0)Y(1) + Y(1)Y(0)] + Y(1)Y(0)Y(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan bu değerler yerine konulduğunda

$$U(3) = -\frac{1}{6} = -\frac{1}{3!}$$

bulunur.

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad U(4) = \frac{1}{12}[-3U(3) - U(2) - W(2) - 1 - Z(2)]$$

burada

$$\begin{aligned}
W(2) &= \sum_{r=0}^2 \sum_{t=0}^{2-r} U(r)U(t)V(2-r-t) \\
&= U(0)[U(0)V(2)+U(1)V(1)+U(2)V(0)]+ \\
&\quad U(1)[U(0)V(1)+U(1)V(0)]+U(2)U(0)V(0) \\
&= U(0)[3U(0)U(3)+2U(1)U(2)+U(2)U(1)]+ \\
&\quad U(1)[2U(0)U(2)+U(1)U(1)]+U(2)U(0)U(1) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z(2) &= \sum_{r=0}^2 \sum_{t=0}^{2-r} Y(r)Y(t)Y(2-r-t) \\
&= Y(0)[Y(0)Y(2)+Y(1)Y(1)+Y(2)Y(0)]+ \\
&\quad Y(1)[Y(0)Y(1)+Y(1)Y(0)]+Y(2)Y(0)Y(0) \\
&= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

olduğundan bu değerler yerine konulduğunda

$$U(4) = 0$$

bulunur.

$$k = 3 \quad \Rightarrow \quad U(5) = \frac{1}{20}[-4U(4)-U(3)-W(3)+0-Z(3)]$$

burada

$$\begin{aligned}
W(3) &= \sum_{r=0}^3 \sum_{t=0}^{3-r} U(r)U(t)V(3-r-t) \\
&= U(0)[U(0)V(3)+U(1)V(2)+U(2)V(1)+U(3)V(0)]+ \\
&\quad U(1)[U(0)V(2)+U(1)V(1)+U(2)V(0)]+U(2)[U(0)V(1)+U(1)V(0)]+ \\
&\quad U(3)U(0)V(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= U(0)[4U(0)U(4)+3U(1)U(3)+2U(2)U(2)+U(3)U(1)]+ \\
&\quad U(1)[3U(0)U(3)+2U(1)U(2)+U(2)U(1)]+ \\
&\quad U(2)[2U(0)U(2)+U(1)U(1)]+U(3)U(0)U(1) \\
&= 0, \\
Z(3) &= \sum_{r=0}^3 \sum_{t=0}^{3-r} Y(r)Y(t)Y(3-r-t) \\
&= Y(0)[Y(0)Y(3)+Y(1)Y(2)+Y(2)Y(1)+Y(3)Y(0)]+ \\
&\quad Y(1)[Y(0)Y(2)+Y(1)Y(1)+Y(2)Y(0)]+Y(2)[Y(0)Y(1)+Y(1)Y(0)]+ \\
&\quad Y(3)Y(0)Y(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan bu değerler yerine konulduğunda

$$U(5) = \frac{1}{120} = \frac{1}{5!}$$

bulunur. Bu şekilde devam edildiğinde ters diferensiyel dönüşüm yardımıyla

$$\begin{aligned}
u(t) &= \mathcal{D}_T^{-1} \{U(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)t^k \\
u(t) &= t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \dots = \sin t
\end{aligned}$$

$\underbrace{\sin t \text{ fonksiyonunun } x=0 \text{ civarında Taylor serisi açılımı}}$

ifadesi elde edilir. Verilen problemin kapalı çözümü ile DDM yardımıyla bulunan çözümün eşitliği açık bir şekilde görülmektedir.

Örnek 3.9 Aşağıda verilen integral denklemin çözümünü DDM ile verelim.

$$u(x) = 2e^x - 1 - x + \int_0^x (t-x)u(t)dt, \quad 0 < x < 1.$$

Verilen integral denklemin bilinen yollarla çözülmesiyle elde edilen kapalı çözümü

$$u(x) = e^x$$

şeklindedir. İşleme yine her iki tarafın diferansiyel dönüşümünü almakla başlayalım. Bu durumda

$$\mathcal{D}_T \{u(x)\} = \mathcal{D}_T \left\{ 2e^x - 1 - x + \int_0^x (t-x)u(t) dt \right\} \Rightarrow$$

$$\mathcal{D}_T \{u(x)\} = 2\mathcal{D}_T \{e^x\} - \mathcal{D}_T \{1\} - \mathcal{D}_T \{x\} + \mathcal{D}_T \left\{ \int_0^x tu(t) dt \right\} - \mathcal{D}_T \left\{ x \int_0^x u(t) dt \right\}$$

ifadesi elde edilir. Buna göre Bölüm 2'den bilindiği gibi,

$$\mathcal{D}_T \{u(x)\} = U(k),$$

$$\mathcal{D}_T \{e^x\} = \frac{1}{k!},$$

$$\mathcal{D}_T \{1\} = \delta(k),$$

$$\mathcal{D}_T \{x\} = \delta(k-1),$$

$$\mathcal{D}_T \left\{ \int_0^x tu(t) dt \right\} = \sum_{l=0}^{k-1} \delta(l-1) \frac{U(k-l-1)}{k}$$

ve

$$\mathcal{D}_T \left\{ x \int_0^x u(t) dt \right\} = \sum_{l=0}^{k-1} \delta(l-1) \frac{U(k-l-1)}{k-l}$$

olduğundan denklemin DDM yardımıyla dönüşümü,

$$U(k) = \frac{2}{k!} - \delta(k) - \delta(k-1) + \sum_{l=0}^{k-1} \delta(l-1) \frac{U(k-l-1)}{k} - \sum_{l=0}^{k-1} \delta(l-1) \frac{U(k-l-1)}{k-l}, \quad k \geq 1$$

şeklindedir ve aynı zamanda bu ifade rekürans denklemdir. Verilen problemde $x=0$ alındığında $u(0)=1$ olacağından dönüşümden dolayı

$$U(0)=1$$

olacaktır. Dolayısıyla $U(0)=1$ koşulunun da kullanılmasıyla $k=1,2,\dots$ değerleri sırasıyla rekürans denkleminde konulduğunda

$$k=1 \Rightarrow U(1) = \frac{2}{1!} - 0 - 1 + \sum_{l=0}^0 \delta(l-1) \frac{U(k-l-1)}{k} - \sum_{l=0}^0 \delta(l-1) \frac{U(k-l-1)}{k-l}$$

$$\Rightarrow U(1) = 1$$

$$k=2 \Rightarrow U(2) = \frac{2}{2!} - 0 - 0 + \sum_{l=0}^1 \delta(l-1) \frac{U(2-l-1)}{2} - \sum_{l=0}^1 \delta(l-1) \frac{U(2-l-1)}{2-l}$$

$$\Rightarrow U(2) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!}$$

$$k=3 \Rightarrow U(3) = \frac{2}{3!} - 0 - 0 + \sum_{l=0}^2 \delta(l-1) \frac{U(3-l-1)}{3} - \sum_{l=0}^2 \delta(l-1) \frac{U(3-l-1)}{3-l}$$

$$\Rightarrow U(3) = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!}$$

$$k=4 \Rightarrow U(4) = \frac{2}{4!} - 0 - 0 + \sum_{l=0}^3 \delta(l-1) \frac{U(4-l-1)}{4} - \sum_{l=0}^3 \delta(l-1) \frac{U(4-l-1)}{4-l}$$

$$\Rightarrow U(4) = \frac{1}{24} = \frac{1}{4!}$$

$$k=5 \Rightarrow U(5) = \frac{2}{5!} - 0 - 0 + \sum_{l=0}^4 \delta(l-1) \frac{U(5-l-1)}{5} - \sum_{l=0}^4 \delta(l-1) \frac{U(5-l-1)}{5-l}$$

$$\Rightarrow U(5) = \frac{1}{120} = \frac{1}{5!}$$

$$k=6 \Rightarrow U(6) = \frac{2}{6!} - 0 - 0 + \sum_{l=0}^5 \delta(l-1) \frac{U(6-l-1)}{6} - \sum_{l=0}^5 \delta(l-1) \frac{U(6-l-1)}{6-l}$$

$$\Rightarrow U(6) = \frac{1}{720} = \frac{1}{6!}$$

$$k=7 \Rightarrow U(7) = \frac{2}{7!} - 0 - 0 + \sum_{l=0}^6 \delta(l-1) \frac{U(7-l-1)}{7} - \sum_{l=0}^6 \delta(l-1) \frac{U(7-l-1)}{7-l}$$

$$\Rightarrow U(7) = \frac{1}{5040} = \frac{1}{7!}$$

⋮

elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde ters diferensiyel dönüşümün yardımıyla

$$u(x) = \mathcal{D}_T^{-1} \{U(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} U(k) x^k$$

$$u(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

ifadesi elde edilir. Bu çözüm e^x fonksiyonunun $x=0$ civarındaki Taylor serisi açılımıdır. Dolayısıyla diğer problemlerde olduğu gibi DDM ile bulunan çözüm verilen denklemin kapalı çözümüne eşittir.

Örnek 3.10 Aşağıda verilen integro-diferensiyel denklemini DDM yardımıyla çözelim [10].

$$y^{(iv)}(x) = x(1 + e^x) + 3e^x + y(x) - \int_0^x y(t) dt ;$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 1, y(1) = 1 + e, y'(1) = 2e.$$

Verilen integro-diferensiyel denklemin kapalı çözümü

$$y(x) = 1 + xe^x$$

şeklinde dir. DDM ile çözüm için işleme tüm problemlerde yaptığımız gibi her iki tarafın dönüşümünü alarak başlayalım. Dolayısıyla

$$\mathcal{D}_T \{y^{(iv)}(x)\} = \mathcal{D}_T \left\{ x(1 + e^x) + 3e^x + y(x) - \int_0^x y(t) dt \right\} \Rightarrow$$

$$\mathcal{D}_T \{y^{(iv)}(x)\} = \mathcal{D}_T \{x\} + \mathcal{D}_T \{xe^x\} + 3\mathcal{D}_T \{e^x\} + \mathcal{D}_T \{y(x)\} - \mathcal{D}_T \left\{ \int_0^x y(t) dt \right\}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\mathcal{D}_T \{y(x)\} = Y(k),$$

$$\mathcal{D}_T \{y^{(iv)}(x)\} = (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)Y(k+4),$$

$$\mathcal{D}_T \{x\} = \delta(k-1),$$

$$\mathcal{D}_T \{e^x\} = \frac{1}{k!},$$

$$\mathcal{D}_T \{xe^x\} = \sum_{l=0}^k \delta(l-1) \frac{1}{(k-l)!}$$

ve

$$\mathcal{D}_T \left\{ \int_0^x y(t) dt \right\} = \frac{Y(k-1)}{k}$$

olduğundan DDM yardımıyla denklemin dönüşümü,

$$(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)Y(k+4) = \delta(k-1) + \sum_{l=0}^k \delta(l-1) \frac{1}{(k-l)!} +$$

$$\frac{3}{k!} + Y(k) - \frac{Y(k-1)}{k}$$

ile ifade edilir. Eşitlik tekrar düzenlendiğinde

$$Y(k+4) = \frac{1}{(k+4)!} [k! \delta(k-1) + k+3 + k!Y(k) - (k-1)!Y(k-1)] \quad , \quad k \geq 1$$

rekürans denklemi elde edilir. $y(0)=1$ ve $y'(0)=1$ koşullarının dönüşümü ile $Y(0)=1$ ve $Y(1)=1$ değerleri elde edilir fakat $y''(0)$ ve $y'''(0)$ koşulları problemde verilmediğinden sınır değer problemi örneğinde olduğu gibi $Y(2)=a$ ve $Y(3)=b$ kabul edilerek işleme devam edilir. Problemde $x=0$ alındığında $y^{(iv)}(0)=4$ olacaktır ve dönüşüm yardımıyla

$$Y(4) = \frac{1}{4!} \left[\frac{d^4 y(x)}{dx^4} \right]_{x=0} = \frac{1}{4!} y^{(iv)}(0) = \frac{1}{6}$$

değeri de bulunur. Şimdi bu değerleri kullanarak $k=1,2,\dots$ değerleri sırasıyla rekürans denkleminde yerine konduğunda

$$k=1 \quad \Rightarrow \quad Y(5) = \frac{1}{24}$$

$$k=2 \quad \Rightarrow \quad Y(6) = \frac{1}{180} + \frac{a}{360}$$

$$k=3 \quad \Rightarrow \quad Y(7) = \frac{1}{840} - \frac{a}{2520} + \frac{b}{840}$$

$$k = 4 \quad \Rightarrow \quad Y(8) = \frac{11}{40320} - \frac{b}{6720}$$

$$k = 5 \quad \Rightarrow \quad Y(9) = \frac{1}{40320}$$

$$k = 6 \quad \Rightarrow \quad Y(10) = \frac{1}{453600} + \frac{a}{1814400}$$

$\vdots$

elde edilir. Ters diferensiyel dönüşüm yardımıyla

$$y(x) = \mathcal{D}_T^{-1} \{Y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) x^k$$

$$y(x) = 1 + x + ax^2 + bx^3 + \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{24} + \left[\frac{1}{180} + \frac{a}{360} \right] x^6 + \left[\frac{1}{840} - \frac{a}{2520} + \frac{b}{840} \right] x^7 +$$

$$\left[\frac{11}{40320} - \frac{b}{6720} \right] x^8 + \frac{x^9}{40320} + \left[\frac{1}{453600} + \frac{a}{1814400} \right] x^{10} + \dots$$

çözümü elde edilir. İlk 10 terim için $y(1)$ ve $y'(1)$ koşulları kullanılarak elde edilecek denklem sistemi çözüldüğünde

$$a = 0.9999 \text{ ve } b = 0.5000$$

değerleri elde edilir. Terim sayısı arttıkça $a \cong 1$ ve $b \cong 0.5$ olacağı açıktır. Dolayısıyla

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \frac{x^6}{5!} + \frac{x^7}{6!} + \frac{x^8}{7!} + \frac{x^9}{8!} + \frac{x^{10}}{9!} + \dots$$

ifadesi elde edilir. Bilindiği gibi bu ifade $1 + xe^x$ fonksiyonunun $x = 0$ civarında Taylor serisi açılımıdır.

İKİ BOYUTLU DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU

Bu bölümde iki boyutlu DDM incelenecektir. Daha çok kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan iki boyutlu DDM ye ait birkaç teorem ve bu teoremlerin ispatı verilecektir.

Tanım 4.1 İki bileşenli $f(x, y)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyonu $F(k, h)$ olmak üzere $f(x, y)$ nin iki boyutlu diferensiyel dönüşümü

$$\mathcal{D}_T \{f(x, y)\} = F(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} f(x, y) \right]_{x=x_0, y=y_0} \quad (4.1)$$

ile ifade edilir.

Tanım 4.2 $F(k, h)$ dönüşüm fonksiyonunun ters diferensiyel dönüşüm fonksiyonu

$$\mathcal{D}_T^{-1} \{F(k, h)\} = f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} F(k, h) (x - x_0)^k (y - y_0)^h \quad (4.2)$$

biçiminde tanımlanır. Tanım 4.1'de belirtilen $F(k, h)$ dönüşüm fonksiyonu (4.2) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} f(x, y) \right]_{x=x_0, y=y_0} (x - x_0)^k (y - y_0)^h$$

(4.1) ve (4.2) eşitlikleri kullanılarak temel matematiksel operasyonlar yardımıyla iki boyutlu diferensiyel dönüşüm için aşağıdaki teoremler ispat edilebilir.

Teorem 4.1 İki boyutlu diferensiyel dönüşüm lineerdir.

İspat: α, β sabitler olmak üzere dönüşümün tanımı gereği

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_T \{ \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) \} &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} \\ &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \alpha f(x, y) \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} + \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \beta g(x, y) \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} \\ &= \alpha \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} f(x, y) \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} + \beta \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} g(x, y) \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}}\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1) eşitliğinden

$$\mathcal{D}_T \{ f(x, y) \} = F(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} f(x, y) \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}}$$

ve

$$\mathcal{D}_T \{ g(x, y) \} = G(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} g(x, y) \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}}$$

olmak üzere

$$\mathcal{D}_T \{ \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) \} = \alpha \mathcal{D}_T \{ f(x, y) \} + \beta \mathcal{D}_T \{ g(x, y) \} = \alpha F(k, h) + \beta G(k, h)$$

elde edilir.

Teorem 4.2 Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevinin diferensiyel dönüşümü

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right\} = (k+1) F(k+1, h)$$

ile verilir.

İspat: Dönüşümün tanımı gereği

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right\} &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right] \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} \\
&= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+1+h}}{\partial x^{k+1} \partial y^h} f(x, y) \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} \\
&= (k+1) \underbrace{\frac{1}{(k+1)!h!} \left[\frac{\partial^{k+1+h}}{\partial x^{k+1} \partial y^h} f(x, y) \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}}}_{F(k+1, h)} \\
&= (k+1) F(k+1, h)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.3 Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun y değişkenine göre türevinin diferensiyel dönüşümü

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right\} = (h+1) F(k, h+1)$$

ile ifade edilir.

İspat: Teorem 4.2'de olduğu gibi yine dönüşümün tanımı gereği

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right\} &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right] \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} \\
&= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^k \partial y^{h+1}} f(x, y) \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} \\
&= (h+1) \underbrace{\frac{1}{k!(h+1)!} \left[\frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^k \partial y^{h+1}} f(x, y) \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}}}_{F(k, h+1)} \\
&= (h+1) F(k, h+1)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.4 Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre ikinci mertebeden türevinin diferensiyel dönüşümü

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right\} = (k+1)(k+2)F(k+2, h) = \frac{(k+2)!}{k!} F(k+2, h)$$

ile verilir.

İspat: Diferensiyel dönüşümün tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right\} &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right] \right]_{x=x_0, y=y_0} \\ &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+2+h}}{\partial x^{k+2} \partial y^h} f(x, y) \right]_{x=x_0, y=y_0} \\ &= \frac{(k+2)!}{k!} \underbrace{\frac{1}{(k+2)!h!} \left[\frac{\partial^{k+2+h}}{\partial x^{k+2} \partial y^h} f(x, y) \right]_{x=x_0, y=y_0}}_{F(k+2, h)} \\ &= \frac{(k+2)!}{k!} F(k+2, h) \\ &= (k+1)(k+2)F(k+2, h) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.5 Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun y değişkenine göre ikinci mertebeden türevinin diferensiyel dönüşümü

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right\} = (h+1)(h+2)F(k, h+2) = \frac{(h+2)!}{h!} F(k, h+2)$$

ile ifade edilir.

İspat: Teorem 4.4'te olduğu gibi dönüşümün tanımı kullanılırsa

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right\} = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right] \right]_{x=x_0, y=y_0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h+2}}{\partial x^k \partial y^{h+2}} f(x, y) \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} \\
&= \frac{(h+2)!}{h!} \underbrace{\frac{1}{k!(h+2)!} \left[\frac{\partial^{k+h+2}}{\partial x^k \partial y^{h+2}} f(x, y) \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}}}_{F(k, h+2)} \\
&= \frac{(h+2)!}{h!} F(k, h+2) \\
&= (h+1)(h+2) F(k, h+2)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla genelleştirme yapmak gerekirse teoremlerden görüldüğü gibi,

1. $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f(x, y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre r . mertebeden türevinin diferensiyel dönüşümü

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial^r f(x, y)}{\partial x^r} \right\} = (k+1)(k+2) \cdots (k+r) F(k+r, h) = \frac{(k+r)!}{k!} F(k+r, h)$$

ile ifade edilir.

2. $s \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f(x, y)$ fonksiyonunun y değişkenine göre s . mertebeden türevinin diferensiyel dönüşümü

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial^s f(x, y)}{\partial y^s} \right\} = (h+1)(h+2) \cdots (h+s) F(k, h+s) = \frac{(h+s)!}{h!} F(k, h+s)$$

ile ifade edilir.

Teorem 4.6 Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun x ve y değişkenlerine göre karma türevinin diferensiyel dönüşümü

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right\} = (k+1)(h+1) F(k+1, h+1)$$

ile verilir.

İspat: Dönüşümün tanımı kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right\} &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right] \right] \Bigg|_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} \\
&= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+1+h+1}}{\partial x^{k+1} \partial y^{h+1}} f(x, y) \right] \Bigg|_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} \\
&= \frac{(k+1)!(h+1)!}{k!h!} \underbrace{\frac{1}{(k+1)!(h+1)!} \left[\frac{\partial^{k+1+h+1}}{\partial x^{k+1} \partial y^{h+1}} f(x, y) \right] \Bigg|_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}}}_{F(k+1, h+1)} \\
&= \frac{(k+1)!(h+1)!}{k!h!} F(k+1, h+1) \\
&= (k+1)(h+1) F(k+1, h+1)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.7 $r, s \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \right\} = (k+1)(k+2) \cdots (k+r)(h+1)(h+2) \cdots (h+s) F(k+r, h+s)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Diferensiyel dönüşümün tanımı gereği

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \right\} &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \left[\frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \right] \right] \Bigg|_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} \\
&= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+r+h+s}}{\partial x^{k+r} \partial y^{h+s}} f(x, y) \right] \Bigg|_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} \\
&= \frac{(k+r)!(h+s)!}{k!h!} \underbrace{\frac{1}{(k+r)!(h+s)!} \left[\frac{\partial^{k+r+h+s}}{\partial x^{k+r} \partial y^{h+s}} f(x, y) \right] \Bigg|_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}}}_{F(k+r, h+s)} \\
&= \frac{(k+r)!(h+s)!}{k!h!} F(k+r, h+s)
\end{aligned}$$

$$= (k+1)(k+2)\cdots(k+r)(h+1)(h+2)\cdots(h+s)F(k+r, h+s)$$

elde edilir.

Teorem 4.8 İki bileşenli iki fonksiyonun çarpımının diferensiyel dönüşümü

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_T\{f(x, y)g(x, y)\} &= \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h F(k-r, h-s)G(r, s) \\ &= \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h F(r, h-s)G(k-r, s) \\ &= \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h F(k-r, s)G(r, h-s)\end{aligned}$$

ile ifade edilir.

İspat: Bölüm 2'den iki fonksiyonunun çarpımının k . mertebeden türevinin

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}[f(x)g(x)] &= \frac{d^k f(x)}{dx^k}g(x) + \binom{k}{1}\frac{d^{k-1}f(x)}{dx^{k-1}}\frac{dg(x)}{dx} + \binom{k}{2}\frac{d^{k-2}f(x)}{dx^{k-2}}\frac{d^2g(x)}{dx^2} + \cdots + \\ &\quad \binom{k}{n}\frac{d^{k-n}f(x)}{dx^{k-n}}\frac{d^ng(x)}{dx^n} + \cdots + \binom{k}{k-1}\frac{df(x)}{dx}\frac{d^{k-1}g(x)}{dx^{k-1}} + f(x)\frac{d^kg(x)}{dx^k}\end{aligned}$$

olduğu bilinmektedir. Bu ifadeden yararlanılarak

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_T\{f(x, y)g(x, y)\} &= \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}[f(x, y)g(x, y)]\right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} \\ &= \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^h}{\partial y^h}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}f(x, y)g(x, y)\right]\right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} \\ &= \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^h}{\partial y^h}\left[\binom{k}{0}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}g + \binom{k}{1}\frac{\partial^{k-1}f}{\partial x^{k-1}}\frac{\partial g}{\partial x} + \binom{k}{2}\frac{\partial^{k-2}f}{\partial x^{k-2}}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \cdots + \right.\right. \\ &\quad \left.\left.\binom{k}{n}\frac{\partial^{k-n}f}{\partial x^{k-n}}\frac{\partial^n g}{\partial x^n} + \cdots + \binom{k}{k-1}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^{k-1}g}{\partial x^{k-1}} + f\frac{\partial^k g}{\partial x^k}\right]\right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} \\ &= \frac{1}{k!h!}\left[\binom{k}{0}\binom{h}{0}\frac{\partial^{k+h}f}{\partial x^k \partial y^h}g + \binom{k}{0}\binom{h}{1}\frac{\partial^{k+h-1}f}{\partial x^k \partial y^{h-1}}\frac{\partial g}{\partial y} + \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \binom{k}{0} \binom{h}{2} \frac{\partial^{k+h-2} f}{\partial x^k \partial y^{h-2}} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \dots + \binom{k}{1} \binom{h}{0} \frac{\partial^{k-1+h} f}{\partial x^{k-1} \partial y^h} \frac{\partial g}{\partial x} + \\
& \binom{k}{1} \binom{h}{1} \frac{\partial^{k-1+h-1} f}{\partial x^{k-1} \partial y^{h-1}} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \binom{k}{1} \binom{h}{2} \frac{\partial^{k-1+h-2} f}{\partial x^{k-1} \partial y^{h-2}} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y^2} + \dots + \\
& \left. \binom{k}{r} \binom{h}{s} \frac{\partial^{k-r+h-s} f}{\partial x^{k-r} \partial y^{h-s}} \frac{\partial^{r+s} g}{\partial x^r \partial y^s} + \dots \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} \\
&= \frac{1}{k!h!} \left[\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \binom{k}{r} \binom{h}{s} \frac{\partial^{k-r+h-s} f}{\partial x^{k-r} \partial y^{h-s}} \frac{\partial^{r+s} g}{\partial x^r \partial y^s} \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} \\
&= \frac{1}{k!h!} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \frac{k!}{(k-r)!r!} \frac{h!}{(h-s)!s!} \left[\frac{\partial^{k-r+h-s} f}{\partial x^{k-r} \partial y^{h-s}} \frac{\partial^{r+s} g}{\partial x^r \partial y^s} \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} \\
&= \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \frac{1}{k!h!} \frac{k!}{(k-r)!r!} \frac{1}{(h-s)!s!} \left[\frac{\partial^{k-r+h-s} f}{\partial x^{k-r} \partial y^{h-s}} \frac{\partial^{r+s} g}{\partial x^r \partial y^s} \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} \\
&= \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \frac{1}{(k-r)!(h-s)!} \frac{1}{r!s!} \left[\frac{\partial^{k-r+h-s} f}{\partial x^{k-r} \partial y^{h-s}} \frac{\partial^{r+s} g}{\partial x^r \partial y^s} \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} \\
&= \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \underbrace{\frac{1}{(k-r)!(h-s)!} \left[\frac{\partial^{k-r+h-s} f}{\partial x^{k-r} \partial y^{h-s}} \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}}}_{F(k-r, h-s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{r!s!} \left[\frac{\partial^{r+s} g}{\partial x^r \partial y^s} \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}}}_{G(r, s)} \\
&= \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h F(k-r, h-s) G(r, s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Çarpımların yer değiştirmesi sonucu ise

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_T \{f(x, y) g(x, y)\} &= \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h F(r, h-s) G(k-r, s) \\
&= \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h F(k-r, s) G(r, h-s)
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.9 Bir $f(x, y)$ fonksiyonu ile bir $g(x, y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevinin çarpımının diferensiyel dönüşümü

$$\mathcal{D}_T \left\{ f(x, y) \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right\} = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1) F(r, h-s) G(k-r+1, s)$$

ile ifade edilir.

İspat: $u(x, y) = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$ olsun. Bu durumda $u(x, y)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü Teorem 4.2'ye göre

$$\mathcal{D}_T \{u(x, y)\} = \mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right\} = U(k, h) = (k+1)G(k+1, h)$$

şeklinde dir. Dolayısıyla dönüşümü aranan fonksiyon $f(x, y)u(x, y)$ olacaktır. İki fonksiyonunun çarpımının diferensiyel dönüşümü gereği

$$\mathcal{D}_T \{f(x, y)u(x, y)\} = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h F(r, h-s)U(k-r, s)$$

elde edilir.

$$U(k-r, s) = (k-r+1)G(k-r+1, s)$$

olacağından bu ifade son eşitlikte yerine yazıldığında

$$\mathcal{D}_T \left\{ f(x, y) \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right\} = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1) F(r, h-s) G(k-r+1, s)$$

elde edilir.

Teorem 4.10 Bir $f(x, y)$ fonksiyonu ile bir $g(x, y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre ikinci mertebeden türevinin çarpımının diferensiyel dönüşümü

$$\mathcal{D}_T \left\{ f(x, y) \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x^2} \right\} = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(k-r+2) F(r, h-s) G(k-r+2, s)$$

ile verilir.

İspat: Teorem 4.9'da olduğu gibi $u(x, y) = \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x^2}$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü

$$\mathcal{D}_T \{u(x, y)\} = \mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x^2} \right\} = U(k, h) = (k+1)(k+2)G(k+2, h)$$

olacaktır. Dolayısıyla dönüşümü aranan fonksiyon $f(x, y)u(x, y)$ şeklindedir. İki fonksiyonun çarpımının diferensiyel dönüşümünün

$$\mathcal{D}_T \{f(x, y)u(x, y)\} = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h F(r, h-s)U(k-r, s)$$

olduğu bilinmektedir.

$$U(k-r, s) = (k-r+1)(k-r+2)G(k-r+2, s)$$

olacağından bu ifade son eşitlikte yerine yazıldığında

$$\mathcal{D}_T \left\{ f(x, y) \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x^2} \right\} = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(k-r+2)F(r, h-s)G(k-r+2, s)$$

elde edilir.

Teorem 4.11 Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevi ile bir $g(x, y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevinin çarpımının diferensiyel dönüşümü

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right\} = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1)F(r+1, h-s)G(k-r+1, s)$$

ile ifade edilir.

İspat: $u(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ ve $v(x, y) = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$ olmak üzere bu iki fonksiyonun diferensiyel dönüşümü Teorem 4.2'ye göre

$$\mathcal{D}_T \{u(x, y)\} = \mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right\} = U(k, h) = (k+1)F(k+1, h)$$

ve

$$\mathcal{D}_T \{v(x, y)\} = \mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right\} = V(k, h) = (k+1)G(k+1, h)$$

şeklindedir. Dolayısıyla dönüşümü istenen fonksiyon $u(x, y)v(x, y)$ olacaktır. Yine iki fonksiyonun çarpımının diferensiyel dönüşümü kullanılırsa

$$\mathcal{D}_T \{u(x, y)v(x, y)\} = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)V(k-r, s)$$

elde edilir. Burada

$$U(r, h-s) = (r+1)F(r+1, h-s)$$

ve

$$V(k-r, s) = (k-r+1)G(k-r+1, s)$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right\} = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1)F(r+1, h-s)G(k-r+1, s)$$

elde edilir.

Teorem 4.12 Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun y değişkenine göre türevi ile bir $g(x, y)$ fonksiyonunun y değişkenine göre türevinin çarpımının diferensiyel dönüşümü

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right\} = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (s+1)(h-s+1)F(r, h-s+1)G(k-r, s+1)$$

ile verilir.

İspat: Teorem 4.11'in ispatı göz önüne alındığında Teorem 4.12 için

$$u(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \text{ ve } v(x, y) = \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \text{ olmak üzere bu fonksiyonların diferensiyel}$$

dönüşümü Teorem 4.3 gereği

$$\mathcal{D}_T \{u(x, y)\} = \mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right\} = U(k, h) = (h+1)F(k, h+1)$$

ve

$$\mathcal{D}_T \{v(x, y)\} = \mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right\} = V(k, h) = (h+1)G(k, h+1)$$

şeklindedir. Dönüşümü istenen fonksiyon bu durumda $u(x, y)v(x, y)$ olur ve bu fonksiyonun diferensiyel dönüşümü bilindiği gibi

$$\mathcal{D}_T \{u(x, y)v(x, y)\} = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)V(k-r, s)$$

ile ifade edilir. Burada

$$U(r, h-s) = (h-s+1)F(r, h-s+1)$$

ve

$$V(k-r, s) = (s+1)G(k-r, s+1)$$

olduğundan ifadeler son eşitlikte yerine yazıldığında

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right\} = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (s+1)(h-s+1)F(r, h-s+1)G(k-r, s+1)$$

elde edilir.

Teorem 4.13 Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevi ile bir $g(x, y)$ fonksiyonunun y değişkenine göre türevinin çarpımının diferensiyel dönüşümü

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right\} = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(h-s+1)F(k-r+1, s)G(r, h-s+1)$$

ile verilir.

İspat: Teorem 4.11 ve Teorem 4.12'nin ispatı göz önüne alınarak $u(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$

ve $v(x, y) = \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}$ olmak üzere bu fonksiyonların diferensiyel dönüşümü Teorem

4.3 gereği

$$\mathcal{D}_T \{u(x, y)\} = \mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right\} = U(k, h) = (k+1)F(k+1, h)$$

ve

$$\mathcal{D}_T \{v(x, y)\} = \mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right\} = V(k, h) = (h+1)G(k, h+1)$$

şeklindedir. Dönüşümü istenen fonksiyon bu durumda $u(x, y)v(x, y)$ olur ve bu fonksiyonun diferensiyel dönüşümü bilindiği gibi

$$\mathcal{D}_T \{u(x, y)v(x, y)\} = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(k-r, s)V(r, h-s)$$

ile ifade edilir. Burada

$$U(k-r, s) = (k-r+1)F(k-r+1, s)$$

ve

$$V(r, h-s) = (h-s+1)G(r, h-s+1)$$

olduğundan ifadeler son eşitlikte yerine yazıldığında

$$\mathcal{D}_T \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right\} = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(h-s+1)F(k-r+1, s)G(r, h-s+1)$$

elde edilir.

Teorem 4.14 Üstel fonksiyonun diferensiyel dönüşümü $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x, y) = e^{ax+by+c} \text{ ise}$$

$$\mathcal{D}_T \{e^{ax+by+c}\} = F(k, h) = \frac{a^k}{k!} \frac{b^h}{h!} e^c$$

ile ifade edilir.

İspat: Dönüşümün tanımını gereği

$$\mathcal{D}_T \{e^{ax+by+c}\} = F(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} [e^{ax+by+c}] \right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

olmak üzere $k = 0, 1, 2, \dots$ ve $h = 0, 1, 2, \dots$ değerleri için $F(k, h)$ değerleri hesaplandığında

$k = 0, h = 0$ için,

$$F(0,0) = \frac{1}{0!0!} \left[e^{ax+by+c} \right]_{x=0, y=0} = \frac{a^0}{0!} \frac{b^0}{0!} e^c$$

$k = 0, h = 1$ için,

$$F(0,1) = \frac{1}{0!1!} \left[\frac{\partial}{\partial y} e^{ax+by+c} \right]_{x=0, y=0} = \frac{1}{0!1!} \left[b e^{ax+by+c} \right]_{x=0, y=0} = \frac{a^0}{0!} \frac{b}{1!} e^c$$

$k = 1, h = 0$ için,

$$F(1,0) = \frac{1}{1!0!} \left[\frac{\partial}{\partial x} e^{ax+by+c} \right]_{x=0, y=0} = \frac{1}{1!0!} \left[a e^{ax+by+c} \right]_{x=0, y=0} = \frac{a}{1!} \frac{b^0}{0!} e^c$$

$k = 1, h = 1$ için,

$$F(1,1) = \frac{1}{1!1!} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} e^{ax+by+c} \right]_{x=0, y=0} = \frac{1}{1!1!} \left[a b e^{ax+by+c} \right]_{x=0, y=0} = \frac{a}{1!} \frac{b}{1!} e^c$$

$k = 2, h = 0$ için,

$$F(2,0) = \frac{1}{2!0!} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{ax+by+c} \right]_{x=0, y=0} = \frac{1}{2!0!} \left[a^2 e^{ax+by+c} \right]_{x=0, y=0} = \frac{a^2}{2!} \frac{b^0}{0!} e^c$$

$k = 2, h = 1$ için,

$$F(2,1) = \frac{1}{2!1!} \left[\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} e^{ax+by+c} \right]_{x=0, y=0} = \frac{1}{2!1!} \left[a^2 b e^{ax+by+c} \right]_{x=0, y=0} = \frac{a^2}{2!} \frac{b}{1!} e^c$$

$\vdots$

elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde

$$\mathcal{D}_T \{ f(x, y) \} = \mathcal{D}_T \{ e^{ax+by+c} \} = F(k, h) = \frac{a^k}{k!} \frac{b^h}{h!} e^c$$

olduğu görülür.

Teorem 4.15 Kuvvet fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\mathcal{D}_T \{x^m y^n\} = \delta(k-m, h-n) = \delta(k-m) \delta(h-n) = \begin{cases} 1 & k=m, h=n \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile verilir.

İspat: Öncelikle $\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} x^m y^n \right]_{x=0, y=0}$ ifadesi incelensin. Burada 9 durum söz konusudur:

$$1. \text{ durum: } \begin{cases} k < m \\ h < n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} x^m y^n \right]_{x=0, y=0} &= \left[\frac{\partial^h}{\partial y^h} \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} x^m y^n \right] \right]_{x=0, y=0} \\ &= \left[\frac{\partial^h}{\partial y^h} \left[y^n (m(m-1) \cdots (m-k+1) x^{m-k}) \right] \right]_{x=0, y=0} \\ &= \left[(m(m-1) \cdots (m-k+1) x^{m-k}) (n(n-1) \cdots (n-h+1) y^{n-h}) \right]_{x=0, y=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_T \{x^m y^n\} = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} x^m y^n \right]_{x=0, y=0} = \frac{0}{k!h!} = 0$$

$$2. \text{ durum: } \begin{cases} k < m \\ h = n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} x^m y^n \right]_{x=0, y=0} &= \left[\frac{\partial^h}{\partial y^h} \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} x^m y^n \right] \right]_{x=0, y=0} \\ &= \left[\frac{\partial^h}{\partial y^h} \left[y^n (m(m-1) \cdots (m-k+1) x^{m-k}) \right] \right]_{x=0, y=0} \\ &= \left[(m(m-1) \cdots (m-k+1) x^{m-k}) (n(n-1) \cdots (n-n+1) y^{n-n}) \right]_{x=0, y=0} \\ &= 0 \cdot n! = 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_T \{x^m y^n\} = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} x^m y^n \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} = \frac{0}{k!h!} = 0$$

$$3. \text{ durum: } \begin{cases} k < m \\ h > n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} x^m y^n \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} &= \left[\frac{\partial^h}{\partial y^h} \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} x^m y^n \right] \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} \\ &= \left[\frac{\partial^h}{\partial y^h} \left[y^n (m(m-1) \cdots (m-k+1) x^{m-k}) \right] \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} \\ &= \left[(m(m-1) \cdots (m-k+1) x^{m-k}) (n(n-1) \cdots (n-h+1) 0) \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} = 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_T \{x^m y^n\} = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} x^m y^n \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} = \frac{0}{k!h!} = 0$$

$$4. \text{ durum: } \begin{cases} k = m \\ h < n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} x^m y^n \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} &= \left[\frac{\partial^h}{\partial y^h} \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} x^m y^n \right] \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} \\ &= \left[\frac{\partial^h}{\partial y^h} \left[y^n (m(m-1) \cdots (m-m+1) x^{m-m}) \right] \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} \\ &= \left[(m(m-1) \cdots (m-m+1) x^{m-m}) (n(n-1) \cdots (n-h+1) y^{n-h}) \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} \\ &= m! 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_T \{x^m y^n\} = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} x^m y^n \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} = \frac{0}{k!h!} = 0$$

$$5. \text{ durum: } \begin{cases} k = m \\ h = n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} x^m y^n \right]_{x=0, y=0} &= \left[\frac{\partial^h}{\partial y^h} \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} x^m y^n \right] \right]_{x=0, y=0} \\
&= \left[\frac{\partial^h}{\partial y^h} \left[y^n (m(m-1) \cdots (m-m+1) x^{m-m}) \right] \right]_{x=0, y=0} \\
&= \left[(m(m-1) \cdots (m-m+1) x^{m-m}) (n(n-1) \cdots (n-n+1) y^{n-n}) \right]_{x=0, y=0} \\
&= m!n!
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_T \{x^m y^n\} \underset[k=m]{h=n} \equiv \frac{1}{m!n!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} x^m y^n \right]_{x=0, y=0} = \frac{m!n!}{m!n!} = 1$$

$$6. \text{ durum: } \left. \begin{array}{l} k = m \\ h > n \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} x^m y^n \right]_{x=0, y=0} &= \left[\frac{\partial^h}{\partial y^h} \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} x^m y^n \right] \right]_{x=0, y=0} \\
&= \left[\frac{\partial^h}{\partial y^h} \left[y^n (m(m-1) \cdots (m-m+1) x^{m-m}) \right] \right]_{x=0, y=0} \\
&= \left[(m(m-1) \cdots (m-m+1) x^{m-m}) (n(n-1) \cdots (n-n+1) 0) \right]_{x=0, y=0} = 0
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_T \{x^m y^n\} = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} x^m y^n \right]_{x=0, y=0} = \frac{0}{k!h!} = 0$$

$$7. \text{ durum: } \left. \begin{array}{l} k > m \\ h < n \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} x^m y^n \right]_{x=0, y=0} &= \left[\frac{\partial^h}{\partial y^h} \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} x^m y^n \right] \right]_{x=0, y=0} \\
&= \left[\frac{\partial^h}{\partial y^h} \left[y^n (m(m-1) \cdots (m-m+1) 0) \right] \right]_{x=0, y=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_T \{x^m y^n\} = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} x^m y^n \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} = \frac{0}{k!h!} = 0$$

8. ve 9. durum için $k > m$ koşulundan dolayı

$$\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} x^m y^n \right] = 0$$

olduğundan

$$\mathcal{D}_T \{x^m y^n\} = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} x^m y^n \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} = \frac{0}{k!h!} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\mathcal{D}_T \{x^m y^n\} = \delta(k-m, h-n) = \delta(k-m) \delta(h-n) = \begin{cases} 1 & k=m, h=n \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olduğu açık bir şekilde görülür.

Teorem 4.16 $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x, y) = \sin(ax + by + c)$ ise

$$\mathcal{D}_T \{\sin(ax + by + c)\} = F(k, h) = \frac{a^k}{k!} \frac{b^h}{h!} \sin\left(\frac{\pi}{2}(k+h) + c\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Dönüşümün tanımını gereği

$$\mathcal{D}_T \{\sin(ax + by + c)\} = F(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} [\sin(ax + by + c)] \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}}$$

olduğu bilinmektedir. $k = 0, 1, 2, \dots$ ve $h = 0, 1, 2, \dots$ değerleri için $F(k, h)$ değerleri hesaplandığında

$k = 0, h = 0$ için,

$$F(0, 0) = \frac{1}{0!0!} [\sin(ax + by + c)]_{\substack{x=0, \\ y=0}} = \sin c = \frac{a^0}{0!} \frac{b^0}{0!} \sin\left(\frac{\pi}{2}(0+0) + c\right)$$

$k = 0, h = 1$ için,

$$\begin{aligned} F(0,1) &= \frac{1}{0!1!} \left[\frac{\partial}{\partial y} [\sin(ax + by + c)] \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} = \frac{1}{0!1!} [b \cos(ax + by + c)]_{\substack{x=0, \\ y=0}} \\ &= b \cos c = \frac{a^0}{0!} \frac{b}{1!} \sin \left(\frac{\pi}{2} (0+1) + c \right) \end{aligned}$$

$k = 1, h = 0$ için,

$$\begin{aligned} F(1,0) &= \frac{1}{1!0!} \left[\frac{\partial}{\partial x} [\sin(ax + by + c)] \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} = \frac{1}{1!0!} [a \cos(ax + by + c)]_{\substack{x=0, \\ y=0}} \\ &= a \cos c = \frac{a}{1!} \frac{b^0}{0!} \sin \left(\frac{\pi}{2} (1+0) + c \right) \end{aligned}$$

$k = 1, h = 1$ için,

$$\begin{aligned} F(1,1) &= \frac{1}{1!1!} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [\sin(ax + by + c)] \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} = \frac{1}{1!1!} [-ab \sin(ax + by + c)]_{\substack{x=0, \\ y=0}} \\ &= -ab \sin c = \frac{a}{1!} \frac{b}{1!} \sin \left(\frac{\pi}{2} (1+1) + c \right) \end{aligned}$$

$k = 2, h = 0$ için,

$$\begin{aligned} F(2,0) &= \frac{1}{2!0!} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sin(ax + by + c)] \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} = \frac{1}{2!0!} [-a^2 \sin(ax + by + c)]_{\substack{x=0, \\ y=0}} \\ &= -a^2 \sin c = \frac{a^2}{2!} \frac{b^0}{0!} \sin \left(\frac{\pi}{2} (2+0) + c \right) \end{aligned}$$

$k = 2, h = 1$ için,

$$\begin{aligned} F(2,1) &= \frac{1}{2!1!} \left[\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} [\sin(ax + by + c)] \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} = \frac{1}{2!1!} [-a^2 b \cos(ax + by + c)]_{\substack{x=0, \\ y=0}} \\ &= -a^2 b \cos c = \frac{a^2}{2!} \frac{b}{1!} \sin \left(\frac{\pi}{2} (2+1) + c \right) \end{aligned}$$

$\vdots$

elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde

$$\mathcal{D}_T \{ \sin(ax + by + c) \} = F(k, h) = \frac{a^k}{k!} \frac{b^h}{h!} \sin\left(\frac{\pi}{2}(k + h) + c\right)$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 4.17 $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x, y) = \cos(ax + by + c)$ ise

$$\mathcal{D}_T \{ \cos(ax + by + c) \} = F(k, h) = \frac{a^k}{k!} \frac{b^h}{h!} \cos\left(\frac{\pi}{2}(k + h) + c\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Dönüşümün tanımını gereği

$$\mathcal{D}_T \{ \cos(ax + by + c) \} = F(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} [\cos(ax + by + c)] \right]_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}}$$

olduğu bilinmektedir. $k = 0, 1, 2, \dots$ ve $h = 0, 1, 2, \dots$ değerleri için $F(k, h)$ değerleri hesaplandığında

$k = 0, h = 0$ için,

$$F(0, 0) = \frac{1}{0!0!} [\cos(ax + by + c)]_{\substack{x=0, \\ y=0}} = \cos c = \frac{a^0}{0!} \frac{b^0}{0!} \cos\left(\frac{\pi}{2}(0 + 0) + c\right)$$

$k = 0, h = 1$ için,

$$\begin{aligned} F(0, 1) &= \frac{1}{0!1!} \left[\frac{\partial}{\partial y} [\cos(ax + by + c)] \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} = \frac{1}{0!1!} [-b \sin(ax + by + c)]_{\substack{x=0, \\ y=0}} \\ &= -b \sin c = \frac{a^0}{0!} \frac{b^1}{1!} \cos\left(\frac{\pi}{2}(0 + 1) + c\right) \end{aligned}$$

$k = 1, h = 0$ için,

$$\begin{aligned} F(1, 0) &= \frac{1}{1!0!} \left[\frac{\partial}{\partial x} [\cos(ax + by + c)] \right]_{\substack{x=0, \\ y=0}} = \frac{1}{1!0!} [-a \sin(ax + by + c)]_{\substack{x=0, \\ y=0}} \\ &= -a \sin c = \frac{a^1}{1!} \frac{b^0}{0!} \cos\left(\frac{\pi}{2}(1 + 0) + c\right) \end{aligned}$$

$k = 1, h = 1$ için,

$$\begin{aligned} F(1,1) &= \frac{1}{1!1!} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [\cos(ax + by + c)] \right]_{x=0, y=0} = \frac{1}{1!1!} [-ab \cos(ax + by + c)]_{x=0, y=0} \\ &= -ab \cos c = \frac{a}{1!} \frac{b}{1!} \cos \left(\frac{\pi}{2} (1+1) + c \right) \end{aligned}$$

$k = 2, h = 0$ için,

$$\begin{aligned} F(2,0) &= \frac{1}{2!0!} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} [\cos(ax + by + c)] \right]_{x=0, y=0} = \frac{1}{2!0!} [-a^2 \cos(ax + by + c)]_{x=0, y=0} \\ &= -a^2 \cos c = \frac{a^2}{2!} \frac{b^0}{0!} \cos \left(\frac{\pi}{2} (2+0) + c \right) \end{aligned}$$

$k = 2, h = 1$ için,

$$\begin{aligned} F(2,1) &= \frac{1}{2!1!} \left[\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} [\cos(ax + by + c)] \right]_{x=0, y=0} = \frac{1}{2!1!} [a^2 b \sin(ax + by + c)]_{x=0, y=0} \\ &= a^2 b \sin c = \frac{a^2}{2!} \frac{b}{1!} \cos \left(\frac{\pi}{2} (2+1) + c \right) \end{aligned}$$

$\vdots$

elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde

$$\mathcal{D}_T \{ \cos(ax + by + c) \} = F(k, h) = \frac{a^k}{k!} \frac{b^h}{h!} \cos \left(\frac{\pi}{2} (k + h) + c \right)$$

ifadesi elde edilir.

**İKİ BOYUTLU DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU
UYGULAMALARI**

Bu bölümde, DDM'nin kısmi türevli diferensiyel denklemlere uygulanışı incelenecektir. Örnek olarak ısı ve dalga denklemi ele alınacak ve bulunan sonuçlar denklemlerin kapalı çözümleri ile karşılaştırılacaktır.

Örnek 5.1 Aşağıdaki verilen ısı denklemini DDM ile çözelim [23].

$$u_t = u_{xx} \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \cos x \quad , \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Verilen ısı denkleminin kapalı çözümü

$$u(x, t) = e^{-t} \cos x$$

şeklindedir. Bölüm 3'te yaptığımız gibi işleme her iki tarafın diferensiyel dönüşümünü alarak başlayalım. Bu durumda

$$\mathcal{D}_T \{u_t\} = \mathcal{D}_T \{u_{xx}\}$$

eşitliği elde edilir. Bölüm 4'te verilen teoremler gereği

$$\mathcal{D}_T \{u_t\} = (h+1)U(k, h+1)$$

ve

$$\mathcal{D}_T \{u_{xx}\} = (k+1)(k+2)U(k+2, h)$$

olduğundan denklemin DDM yardımıyla dönüşümü,

$$(h+1)U(k, h+1) = (k+1)(k+2)U(k+2, h)$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik tekrar düzenlendiğinde

$$U(k, h+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{(h+1)} U(k+2, h) \quad (5.1)$$

rekürans denklemi elde edilir. Problemde verilen başlangıç şartının dönüşümü alındığında

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_T \{u(x, 0)\} &= U(k, 0) \\ \mathcal{D}_T \{\cos x\} &= \frac{1}{k!} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow U(k, 0) = \frac{1}{k!} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{k!} & k \text{ çift ise} \\ 0 & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde edilir. $U(k, 0)$ değeri (5.1) rekürans denkleminde kullanılarak sırasıyla $k = 0, 1, 2, \dots$ ve $h = 0, 1, 2, \dots$ için $U(k, h)$ değerleri hesaplandığında

$h = 0$ iken

$$k = 0 \Rightarrow U(0, 1) = \frac{1 \cdot 2}{1} U(2, 0) = \frac{1 \cdot 2}{1} \left[\frac{1}{2!} \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) \right] = -\frac{1 \cdot 2}{1} \frac{1}{2!} = -\frac{1}{0! 1!}$$

$$k = 1 \Rightarrow U(1, 1) = \frac{2 \cdot 3}{1} U(3, 0) = \frac{2 \cdot 3}{1} \left[\frac{1}{3!} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] = 0$$

$$k = 2 \Rightarrow U(2, 1) = \frac{3 \cdot 4}{1} U(4, 0) = \frac{3 \cdot 4}{1} \left[\frac{1}{4!} \cos\left(\frac{4\pi}{2}\right) \right] = \frac{3 \cdot 4}{1} \frac{1}{4!} = \frac{1}{2! 1!}$$

$$k = 3 \Rightarrow U(3, 1) = \frac{4 \cdot 5}{1} U(5, 0) = \frac{4 \cdot 5}{1} \left[\frac{1}{5!} \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) \right] = 0$$

$$k = 4 \Rightarrow U(4, 1) = \frac{5 \cdot 6}{1} U(6, 0) = \frac{5 \cdot 6}{1} \left[\frac{1}{6!} \cos\left(\frac{6\pi}{2}\right) \right] = -\frac{5 \cdot 6}{1} \frac{1}{6!} = -\frac{1}{4! 1!}$$

$$k = 5 \Rightarrow U(5, 1) = \frac{6 \cdot 7}{1} U(7, 0) = \frac{6 \cdot 7}{1} \left[\frac{1}{7!} \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) \right] = 0$$

$$k = 6 \Rightarrow U(6, 1) = \frac{7 \cdot 8}{1} U(8, 0) = \frac{7 \cdot 8}{1} \left[\frac{1}{8!} \cos\left(\frac{8\pi}{2}\right) \right] = \frac{7 \cdot 8}{1} \frac{1}{8!} = \frac{1}{6! 1!}$$

$$k = 7 \Rightarrow U(7, 1) = \frac{8 \cdot 9}{1} U(9, 0) = \frac{8 \cdot 9}{1} \left[\frac{1}{9!} \cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) \right] = 0$$

$$k=8 \Rightarrow U(8,1) = \frac{9 \cdot 10}{1} U(10,0) = \frac{9 \cdot 10}{1} \left[\frac{1}{10!} \cos\left(\frac{10\pi}{2}\right) \right] = -\frac{9 \cdot 10}{1} \frac{1}{10!} = -\frac{1}{8! 1!}$$

⋮

$h=1$ iken

$$k=0 \Rightarrow U(0,2) = \frac{1 \cdot 2}{2} U(2,1) = \frac{1 \cdot 2}{2} \frac{1}{2!} \frac{1}{1!} = \frac{1}{0! 2!}$$

$$k=1 \Rightarrow U(1,2) = \frac{2 \cdot 3}{2} U(3,1) = 0$$

$$k=2 \Rightarrow U(2,2) = \frac{3 \cdot 4}{2} U(4,1) = -\frac{3 \cdot 4}{2} \frac{1}{4!} \frac{1}{1!} = -\frac{1}{2! 2!}$$

$$k=3 \Rightarrow U(3,2) = \frac{4 \cdot 5}{2} U(5,1) = 0$$

$$k=4 \Rightarrow U(4,2) = \frac{5 \cdot 6}{2} U(6,1) = \frac{5 \cdot 6}{2} \frac{1}{6!} \frac{1}{1!} = \frac{1}{4! 2!}$$

$$k=5 \Rightarrow U(5,2) = \frac{6 \cdot 7}{2} U(7,1) = 0$$

$$k=6 \Rightarrow U(6,2) = \frac{7 \cdot 8}{2} U(8,1) = -\frac{7 \cdot 8}{2} \frac{1}{8!} \frac{1}{1!} = -\frac{1}{6! 2!}$$

⋮

$h=2$ iken

$$k=0 \Rightarrow U(0,3) = \frac{1 \cdot 2}{3} U(2,2) = -\frac{1 \cdot 2}{3} \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} = -\frac{1}{0! 3!}$$

$$k=1 \Rightarrow U(1,3) = \frac{2 \cdot 3}{3} U(3,2) = 0$$

$$k=2 \Rightarrow U(2,3) = \frac{3 \cdot 4}{3} U(4,2) = \frac{3 \cdot 4}{3} \frac{1}{4!} \frac{1}{2!} = \frac{1}{2! 3!}$$

$$k=3 \Rightarrow U(3,3) = \frac{4 \cdot 5}{3} U(5,2) = 0$$

$$k=4 \Rightarrow U(4,3) = \frac{5 \cdot 6}{3} U(6,2) = -\frac{5 \cdot 6}{3} \frac{1}{6!} \frac{1}{2!} = -\frac{1}{4! 3!}$$

⋮

elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde

$$U(k, h) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} (-1)^h}{k! h!} & k \text{ çift ise} \\ 0 & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

değerleri elde edilir. Dolayısıyla ters diferensiyel dönüşümün yardımıyla

$$u(x, t) = \mathcal{D}_T^{-1} \{U(k, h)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) x^k t^h$$

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} (-1)^h}{k! h!} x^k t^h = \left(\sum_{k=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{k!} x^k \right) \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} t^h \right)$$

çözümü elde edilir. Bilindiği gibi $\cos x$ ve e^{-t} fonksiyonlarının $x=0$ civarında Taylor serisi açılımları

$$\cos x = \sum_{k=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{k!} x^k$$

ve

$$e^{-t} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} t^h$$

olduğundan çözüm

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} (-1)^h}{k! h!} x^k t^h = \left(\sum_{k=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{k!} x^k \right) \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} t^h \right) = e^{-t} \cos x$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi verilen problemin DDM ile çözülmesiyle elde edilen sonuç kapalı çözüm ile çakışır.

Örnek 5.2 Aşağıda verilen dalga denklemini DDM yardımıyla çözelim.

$$u_{tt} = u_{xx} \quad , \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \sin(\pi x) \\ u_t(x, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad , \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Verilen dalga denkleminin kapalı çözümü

$$u(x, t) = \sin(\pi x) \cos(\pi t)$$

şeklindedir. Problemin DDM ile çözümüne her problemde olduğu gibi denklemin her iki tarafının diferensiyel dönüşümünü alarak başlayalım. Buna göre,

$$\mathcal{D}_T \{u_{tt}\} = \mathcal{D}_T \{u_{xx}\}$$

ifadesi elde edilir. Yine Bölüm 4'ten bilindiği gibi

$$\mathcal{D}_T \{u_{tt}\} = (h+1)(h+2)U(k, h+2)$$

ve

$$\mathcal{D}_T \{u_{xx}\} = (k+1)(k+2)U(k+2, h)$$

olduğundan denklemin DDM yardımıyla dönüşümü,

$$(h+1)(h+2)U(k, h+2) = (k+1)(k+2)U(k+2, h)$$

şeklindedir. Eşitlik düzenlendiğinde

$$U(k, h+2) = \frac{(k+1)(k+2)}{(h+1)(h+2)} U(k+2, h) \quad (5.2)$$

rekürans denklemi elde edilir. Problemde verilen başlangıç şartlarına diferensiyel dönüşüm uygulandığında ise

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_T \{u(x, 0)\} &= U(k, 0) \\ \mathcal{D}_T \{\sin(\pi x)\} &= \frac{\pi^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow U(k, 0) = \frac{\pi^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} \pi^k}{k!} & k \text{ tek ise} \\ 0 & k \text{ çift ise} \end{cases},$$

$$\mathcal{D}_T \{u_t(x, 0)\} = U(k, 1) = 0$$

elde edilir. $U(k, 0)$ ve $U(k, 1)$ değerleri (5.2) rekürans denkleminde kullanılarak sırasıyla $k = 0, 1, 2, \dots$ ve $h = 0, 1, 2, \dots$ için $U(k, h)$ değerleri hesaplandığında

$h = 0$ iken

$$k = 0 \Rightarrow U(0, 2) = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} U(2, 0) = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} \left[\frac{\pi^2}{2!} \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) \right] = 0$$

$$k = 1 \Rightarrow U(1, 2) = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} U(3, 0) = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} \left[\frac{\pi^3}{3!} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] = -\frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} \frac{\pi^3}{3!} = -\frac{\pi^3}{1!2!} = -\frac{\pi^{1+2}}{1!2!}$$

$$k=2 \Rightarrow U(2,2) = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} U(4,0) = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} \left[\frac{\pi^4}{4!} \sin\left(\frac{4\pi}{2}\right) \right] = 0$$

$$k=3 \Rightarrow U(3,2) = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} U(5,0) = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \left[\frac{\pi^5}{5!} \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) \right] = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \frac{\pi^5}{5!} = \frac{\pi^5}{3!2!} = \frac{\pi^{3+2}}{3!2!}$$

$$k=4 \Rightarrow U(4,2) = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} U(6,0) = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} \left[\frac{\pi^6}{6!} \sin\left(\frac{6\pi}{2}\right) \right] = 0$$

$$k=5 \Rightarrow U(5,2) = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} U(7,0) = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} \left[\frac{\pi^7}{7!} \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) \right] = -\frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} \frac{\pi^7}{7!} = -\frac{\pi^7}{5!2!} = -\frac{\pi^{5+2}}{5!2!}$$

$$k=6 \Rightarrow U(6,2) = \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} U(8,0) = \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} \left[\frac{\pi^8}{8!} \sin\left(\frac{8\pi}{2}\right) \right] = 0$$

$$k=7 \Rightarrow U(7,2) = \frac{8 \cdot 9}{1 \cdot 2} U(9,0) = \frac{8 \cdot 9}{1 \cdot 2} \left[\frac{\pi^9}{9!} \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) \right] = \frac{8 \cdot 9}{1 \cdot 2} \frac{\pi^9}{9!} = \frac{\pi^9}{7!2!} = \frac{\pi^{7+2}}{7!2!}$$

⋮

$h=1$ iken başlangıç şartından dolayı $U(k,1)=0$ olduğu göz önüne alınarak

$$k=0 \Rightarrow U(0,3) = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} U(2,1) = 0$$

$$k=1 \Rightarrow U(1,3) = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3} U(3,1) = 0$$

$$k=2 \Rightarrow U(2,3) = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 3} U(4,1) = 0$$

$$k=3 \Rightarrow U(3,3) = \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 3} U(5,1) = 0$$

$$k=4 \Rightarrow U(4,3) = \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 3} U(6,1) = 0$$

⋮

$h=2$ iken

$$k=0 \Rightarrow U(0,4) = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} U(2,2) = 0$$

$$k=1 \Rightarrow U(1,4) = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} U(3,2) = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} \frac{\pi^5}{3!2!} = \frac{\pi^5}{1!4!} = \frac{\pi^{1+4}}{1!4!}$$

$$k=2 \Rightarrow U(2,4) = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 4} U(4,2) = 0$$

$$k=3 \Rightarrow U(3,4) = \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 4} U(5,2) = -\frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 4} \frac{\pi^7}{5!2!} = -\frac{\pi^7}{3!4!} = -\frac{\pi^{3+4}}{3!4!}$$

$$k=4 \Rightarrow U(4,4) = \frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 4} U(6,2) = 0$$

$$k=5 \Rightarrow U(5,4) = \frac{6 \cdot 7}{3 \cdot 4} U(7,2) = \frac{6 \cdot 7}{3 \cdot 4} \frac{\pi^9}{7!2!} = \frac{\pi^9}{5!4!} = \frac{\pi^{5+4}}{5!4!}$$

⋮

$h=3$ iken

$$k=0 \Rightarrow U(0,5) = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 5} U(2,3) = 0$$

$$k=1 \Rightarrow U(1,5) = \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 5} U(3,3) = 0$$

$$k=2 \Rightarrow U(2,5) = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 5} U(4,3) = 0$$

⋮

değerleri elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde

$$U(k,h) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k!} \frac{(-1)^{\frac{h}{2}}}{h!} \pi^{k+h} & k \text{ tek ya da } h \text{ çift ise} \\ 0 & k \text{ çift ya da } h \text{ tek ise} \end{cases}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla ters diferensiyel dönüşümünün yardımıyla

$$u(x,t) = \mathcal{D}_T^{-1} \{U(k,h)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k,h) x^k t^h$$

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k!} \frac{(-1)^{\frac{h}{2}}}{h!} \pi^{k+h} x^k t^h = \left(\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k!} (\pi x)^k \right) \left(\sum_{h=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{h}{2}}}{h!} (\pi t)^h \right)$$

çözümü elde edilir. Bilindiği gibi $\sin(\pi x)$ ve $\cos(\pi t)$ fonksiyonlarının $x=0$ civarında Taylor serisine açılımları

$$\sin(\pi x) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k!} (\pi x)^k$$

ve

$$\cos(\pi t) = \sum_{h=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{h}{2}}}{h!} (\pi t)^h$$

şeklindedir. Buradan

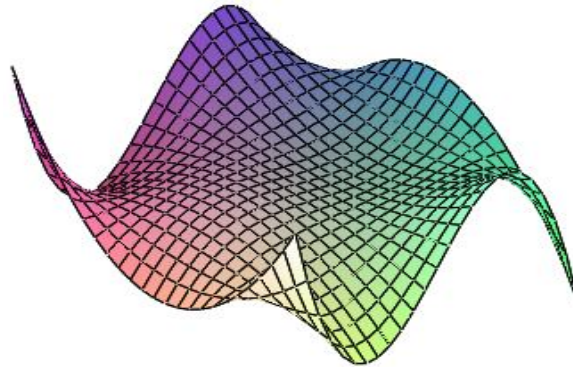
$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k!} \frac{(-1)^{\frac{h}{2}}}{h!} \pi^{k+h} x^k t^h = \left(\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k!} (\pi x)^k \right) \left(\sum_{h=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{h}{2}}}{h!} (\pi t)^h \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\pi x)^{2k+1} \right) \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(2h)!} (\pi t)^{2h} \right) \\ &= \sin(\pi x) \cos(\pi t) \end{aligned}$$

bulunur. DDM ile elde edilen çözümün kapalı çözüme yaklaşımını grafiksel olarak göstereyim.

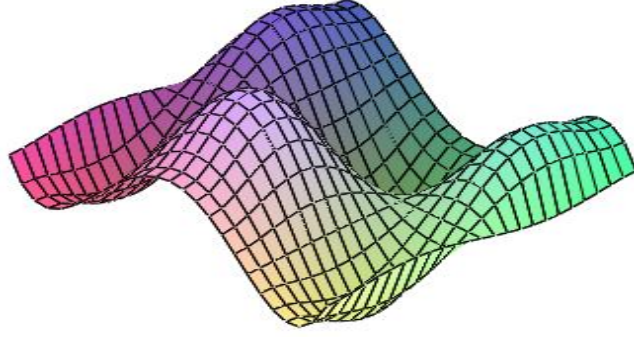
$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \left(\sum_{k=0}^1 \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\pi x)^{2k+1} \right) \left(\sum_{h=0}^1 \frac{(-1)^h}{(2h)!} (\pi t)^{2h} \right) \\ &= \left(\pi x - \frac{1}{3!} \pi^3 x^3 \right) \left(1 - \frac{1}{2!} \pi^2 t^2 \right) \\ &= \pi x - \frac{1}{2!} \pi^3 x t^2 - \frac{1}{3!} \pi^3 x^3 + \frac{1}{3!2!} \pi^5 x^3 t^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x,t) &= \left(\sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\pi x)^{2k+1} \right) \left(\sum_{h=0}^2 \frac{(-1)^h}{(2h)!} (\pi t)^{2h} \right) \\
&= \left(\pi x - \frac{1}{3!} \pi^3 x^3 + \frac{1}{5!} \pi^5 x^5 \right) \left(1 - \frac{1}{2!} \pi^2 t^2 + \frac{1}{4!} \pi^4 t^4 \right) \\
&= \pi x - \frac{1}{2!} \pi^3 x t^2 + \frac{1}{4!} \pi^5 x t^4 - \frac{1}{3!} \pi^3 x^3 + \frac{1}{3!2!} \pi^5 x^3 t^2 - \frac{1}{3!4!} \pi^7 x^3 t^4 + \\
&\quad \frac{1}{5!} \pi^5 x^5 - \frac{1}{5!2!} \pi^7 x^5 t^2 + \frac{1}{5!4!} \pi^9 x^5 t^4, \\
u_3(x,t) &= \left(\sum_{k=0}^3 \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\pi x)^{2k+1} \right) \left(\sum_{h=0}^3 \frac{(-1)^h}{(2h)!} (\pi t)^{2h} \right) \\
&= \left(\pi x - \frac{1}{3!} \pi^3 x^3 + \frac{1}{5!} \pi^5 x^5 - \frac{1}{7!} \pi^7 x^7 \right) \left(1 - \frac{1}{2!} \pi^2 t^2 + \frac{1}{4!} \pi^4 t^4 - \frac{1}{6!} \pi^6 t^6 \right) \\
&= \pi x - \frac{1}{2!} \pi^3 x t^2 + \frac{1}{4!} \pi^5 x t^4 - \frac{1}{6!} \pi^7 x t^6 - \frac{1}{3!} \pi^3 x^3 + \frac{1}{3!2!} \pi^5 x^3 t^2 - \\
&\quad \frac{1}{3!4!} \pi^7 x^3 t^4 + \frac{1}{3!6!} \pi^9 x^3 t^6 + \frac{1}{5!} \pi^5 x^5 - \frac{1}{5!2!} \pi^7 x^5 t^2 + \frac{1}{5!4!} \pi^9 x^5 t^4 - \\
&\quad \frac{1}{5!6!} \pi^{11} x^5 t^6 - \frac{1}{7!} \pi^7 x^7 + \frac{1}{7!2!} \pi^9 x^7 t^2 - \frac{1}{7!4!} \pi^{11} x^7 t^4 + \frac{1}{7!6!} \pi^{13} x^7 t^6
\end{aligned}$$

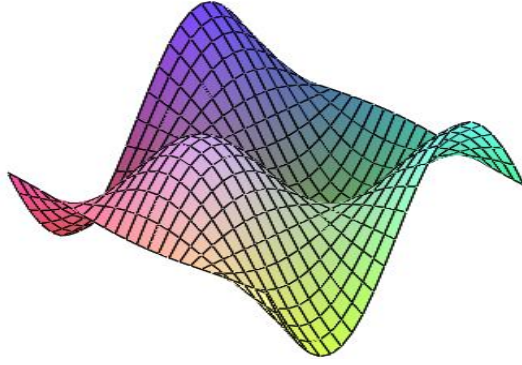
olmak üzere x ve t nin $(-1,1)$ aralığında alınması sonucu elde edilen grafikler aşağıda gösterilmiştir.



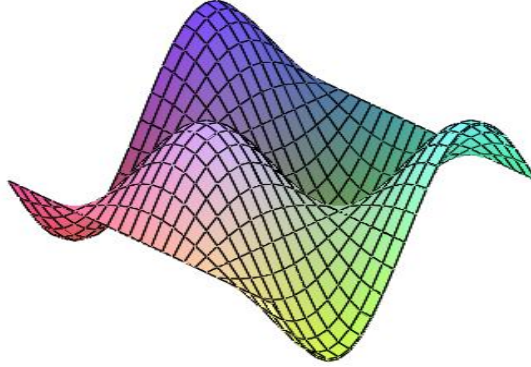
Şekil 5.1 $u_1(x,t)$ nin grafiği



Şekil 5.2 $u_2(x, t)$ nin grafiği



Şekil 5.3 $u_3(x, t)$ nin grafiği



Şekil 5.4 Örnek 5.2'nin kapalı çözümünün grafiği

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, DDM tek boyutlu ve iki boyutlu olarak incelenmiştir. Metot ile ilgili teoremler verilmiş, bu teoremlerin ayrıntılı ispatları yapılmış ve problemler üzerinde metodun kullanımı gösterilmiştir.

Tek boyutlu diferensiyel dönüşümün uygulandığı lineer ve non-lineer adi türevli diferensiyel denklemler ile örneklendirilmiştir. Örnekler içinde başlangıç değer problemleri, sınır değer problemleri, osilatör denklemler, integral ve integro-diferensiyel denklemlere yer verilmiştir. Literatürde Riccati denklemi olarak bilinen adi türevli diferensiyel denklemin analitik çözümünün bulunabilmesi için özel bir çözümün bilinmesi gerektiği ifade edilmektedir. Bu teknik ile bu tip denklemlerin özel çözümlerine ihtiyaç duyulmaksızın analitik ya da analitiğe çok yakın çözümlerine ulaşılmaktadır. Özellikle çözülmesi karmaşık ve sorun yaratan non-lineer denklemlerin çözümünde oldukça kullanışlı ve doğru sonuçlar elde edilen bir metot olduğu analitik çözümlerle yapılan karşılaştırmalar sonucu gösterilmiştir.

İki boyutlu DDM, kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümleri için geliştirilmiştir. Metodun uygulandığı için ısı ve dalga denklemi ele alınmıştır. Tek boyutluda olduğu gibi sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Tek ve iki boyutlu DDM nin özellik tabloları Çizelge 6.1 ve Çizelge 6.2'de verilmiştir.

Sonuç olarak, metodun n -değişkenli lineer ve non-lineer diferensiyel denklemlere ve çeşitli diferensiyel denklemlere uygulanabileceği kanaatine varılmıştır.

Çizelge 6.1 Tek değişkenli fonksiyonların diferensiyel dönüşümleri

Örijinal fonksiyon	Dönüştürölmüş fonksiyon
$\alpha f(x) \pm \beta g(x)$	$\alpha F(k) \pm \beta G(k)$
$\frac{df(x)}{dx}$	$(k+1)F(k+1)$
$\frac{d^m f(x)}{dx^m}$	$\frac{(k+m)!}{k!} F(k+m)$
$f(x)g(x)$	$\sum_{r=0}^k F(r)G(k-r)$
$f(x)g(x)h(x)$	$\sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} F(r)G(t)H(k-r-t)$
$f_1(x)f_2(x)f_3(x)\cdots f_{n-1}(x)f_n(x)$	$\sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \cdots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \left[F_1(k_1)F_2(k_2-k_1)F_3(k_3-k_2) \right. \\ \left. \cdots F_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})F_n(k-k_{n-1}) \right]$
$f(x)\frac{dg(x)}{dx}$	$\sum_{r=0}^k (k-r+1)F(r)G(k-r+1)$
$\frac{df(x)}{dx} \frac{dg(x)}{dx}$	$\sum_{r=0}^k (r+1)(k-r+1)F(r+1)G(k-r+1)$
$a^{\lambda x}$	$\frac{\lambda^k (\ln a)^k}{k!}$
$e^{\lambda x}$	$\frac{\lambda^k}{k!}$
$\sinh(\lambda x)$	$\begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} & k \text{ tek ise} \\ 0 & k \text{ çift ise} \end{cases}$

Çizelge 6.1 Tek değişkenli fonksiyonların diferensiyel dönüşümleri (devam)

Orijinal fonksiyon	Dönüştürülmüş fonksiyon
$\cosh(\lambda x)$	$\begin{cases} 0 & k \text{ tek ise} \\ \frac{\lambda^k}{k!} & k \text{ çift ise} \end{cases}$
$\sin(ax + b)$	$\frac{a^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi}{2}k + b\right)$
$\cos(ax + b)$	$\frac{a^k}{k!} \cos\left(\frac{\pi}{2}k + b\right)$
x^m	$\delta(k - m) = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$
c	$c\delta(k)$
$\int_{x_0}^x g(t) dt$	$\frac{G(k-1)}{k}$
$\int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) dt$	$\frac{1}{k} \sum_{k_1=0}^{k-1} G_1(k_1) G_2(k - k_1 - 1), k \geq 1$
$\int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) g_3(t) dt$	$\frac{1}{k} \sum_{k_2=0}^{k-1} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1) G_2(k_2 - k_1) G_3(k - k_2 - 1), k \geq 1$

Çizelge 6.2 İki değişkenli fonksiyonların diferensiyel dönüşümleri

Orijinal fonksiyon	Dönüştürülmüş fonksiyon
$\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$	$\alpha F(k, h) + \beta G(k, h)$
$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$	$(k+1)F(k+1, h)$
$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$	$(h+1)F(k, h+1)$
$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$	$\frac{(k+2)!}{k!}F(k+2, h)$
$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$	$\frac{(h+2)!}{h!}F(k, h+2)$
$\frac{\partial^r f(x, y)}{\partial x^r}$	$\frac{(k+r)!}{k!}F(k+r, h)$
$\frac{\partial^s f(x, y)}{\partial y^s}$	$\frac{(h+s)!}{h!}F(k, h+s)$
$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$	$(k+1)(h+1)F(k+1, h+1)$
$\frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}$	$(k+1)(k+2)\cdots(k+r)(h+1)(h+2)\cdots(h+s)F(k+r, h+s)$
$f(x, y)g(x, y)$	$\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h F(k-r, h-s)G(r, s)$ $\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h F(r, h-s)G(k-r, s)$ $\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h F(k-r, s)G(r, h-s)$

Çizelge 6.2 İki değişkenli fonksiyonların diferensiyel dönüşümleri (devam)

Original fonksiyon	Dönüştürülmüş fonksiyon
$f(x, y) \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$	$\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1) F(r, h-s) G(k-r+1, s)$
$f(x, y) \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x^2}$	$\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(k-r+2) F(r, h-s) G(k-r+2, s)$
$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$	$\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1) F(r+1, h-s) G(k-r+1, s)$
$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}$	$\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (s+1)(h-s+1) F(r, h-s+1) G(k-r, s+1)$
$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}$	$\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(h-s+1) F(k-r+1, s) G(r, h-s+1)$
$e^{ax+by+c}$	$\frac{a^k}{k!} \frac{b^h}{h!} e^c$
$x^m y^n$	$\delta(k-m, h-n) = \delta(k-m) \delta(h-n) = \begin{cases} 1 & k=m, h=n \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$
$\sin(ax+by+c)$	$\frac{a^k}{k!} \frac{b^h}{h!} \sin\left(\frac{\pi}{2}(k+h)+c\right)$
$\cos(ax+by+c)$	$\frac{a^k}{k!} \frac{b^h}{h!} \cos\left(\frac{\pi}{2}(k+h)+c\right)$

KAYNAKLAR

- [1] Zhou, J.K., (1986). Differential Transformation and Its Application for Electrical Circuits, Huazhong University Press, Wuhan, China.
- [2] Jang, M.J., Chen, C.L. ve Liy, Y.C., (2000). "On solving the initial-value problems using the differential transformation method", Applied Mathematics and Computation, 115:145-160.
- [3] Karakoç, F. ve Bereketoglu, H., (2009). "Solutions of delay differential equations by using differential transform method", International Journal of Computer Mathematics, 86:914-923.
- [4] Biazar, J. ve Eslami, M., (2010). "Differential Transform Method for Quadratic Riccati Differential Equation", International Journal of Nonlinear Science, 9:444-447.
- [5] Ravi Kanth, A.S.V. ve Aruna, K., (2008). "Solution of singular two-point boundary value problems using differential transformation method", Physics Letters A, 372:4671-4673.
- [6] Abdel-Halim Hassan, I.H. ve Ertürk, V.S., (2009). "Solutions of Different Types of the linear and Nonlinear Higher-Order Boundary Value Problems by Differential Transformation Method", European Journal of Pure and Applied Mathematics, 2:426-447.
- [7] Chen, S.S. ve Chen, C.K., (2009). "Application of the differential transformation method to the free vibrations of strongly non-linear oscillators", Nonlinear Analysis: Real World Applications, 10:881-888.
- [8] El-Shahed, M., (2008). "Application of differential transform method to non-linear oscillatory systems", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 13:1714-1720.
- [9] Momani, S. ve Ertürk, V.S., (2008). "Solutions of non-linear oscillators by the modified differential transform method", Computers and Mathematics with Applications, 55:833-842.
- [10] Arıkoğlu, A. ve Özkol, İ., (2005). "Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method", Applied Mathematics and Computation, 168:1145-1158.
- [11] Odibat, Z.M., (2008). "Differential transform method for solving Volterra integral equation with separable kernels", Mathematical and Computer Modelling, 48:1144-1149.

- [12] Abdel-Halim Hassan, I.H., (2008). "Application to differential transformation method for solving systems of differential equations", *Applied Mathematical Modelling*, 32:2552-2559.
- [13] Abdel-Halim Hassan, I.H., (2002). "On solving some eigenvalue problems by using a differential transformation", *Applied Mathematics and Computation*, 127:1-22.
- [14] Ayaz, F., (2004). "Solution of the system of differential equations by differential transform method", *Applied Mathematics and Computation*, 147:547-567.
- [15] Ravi Kanth, A.S.V. ve Aruna, K., (2008). "Differential transform method for solving linear and nonlinear systems of partial differential equations", *Physics Letters A*, 372:6896-6898.
- [16] Ravi Kanth, A.S.V. ve Aruna, K., (2009). "Differential transform method for solving the linear and nonlinear Klein-Gordon equation", *Computer Physics Communications*, 180:708-711.
- [17] Bildik, N., Konuralp, A., Orakçı Bek, F. ve Küçükarslan, S., (2006). "Solution of different type of the partial differential equation by differential transform method and Adomian's decomposition method", *Applied Mathematics and Computation*, 172:551-567.
- [18] Abazari, R. ve Borhanifar, A., (2010). "Numerical study of the solution of the Burgers and coupled Burgers equation by a differential transformation method", *Computers and Mathematics with Applications*, 59:2711-2722.
- [19] Kangalgıl, F. ve Ayaz, F., (2009). "Solitary wave solutions for the KdV and mKdV equations by differential transform method", *Chaos Solitons and Fractals*, 41:464-472.
- [20] Biazar, J. ve Eslami, M., (2010). "Analytic solution for Telegraph equation by differential transform method", *Physics Letters A*, 374:2904-2906.
- [21] Khan, Y., Vazquez-Leal, H. ve Faraz, N., (2012). "An efficient new iterative method for oscillator differential equation", *Scientia Iranica A*, 19:1473-1477.
- [22] İbiş, B. ve Bayram M., (2012). "Approximate Solutions for Some Nonlinear Evolutions Equations By Using The Reduced Differential Transform Method", *International Journal of Applied Mathematical Research*, 1:288-302.
- [23] Keskin, Y., (2005). *Diferansiyel Dönüşüm Yöntemiyle Diferansiyel Denklemlerin Çözülmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Yağmur GÜNGÖR
Doğum Tarihi ve Yeri :09/12/1987, İSTANBUL
Yabancı Dili :İngilizce
E-posta :yagmurgungor87@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	İstanbul Üniversitesi	2010
Lise	Fen Bilimleri	Avcılar Süleyman Nazif Lisesi (YDA)	2005