

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SAYISAL YARIGRUPLAR

ESRA AYDIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. KÜRŞAT HAKAN ORAL

İSTANBUL, 2013

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SAYISAL YARIGRUPLAR

Esra AYDIN tarafından hazırlanan tez çalışması 28.06.2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Yrd. Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. A. Göksel AĞARGÜN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Ünsal TEKİR

Marmara Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak, benden; desteğini, sabrını, zamanını ve bilgisini esirgemeyen değerli danışman hocam; Yrd. Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL'a, şükranlarımı sunarım.

Hayatım boyunca bana karşı fedakârlıktan kaçınmayan, değerli babam; Muharrem ÖZDEMİR'e, sevgili annem; Belgin ÖZDEMİR'e ve canım ablam; Aslı KURT'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Hayatıma dahil olduğu andan itibaren sevgi ve desteğini her zaman hissettiğim sevgili eşim; Mustafa AYDIN'a ve hayatımın anlamı, sevgili oğlum; Taylan Özdemir AYDIN'a teşekkür ederim.

Haziran, 2013

Esra AYDIN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	vi
ÖZET	viii
ABSTRACT	x
BÖLÜM 1	1
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Hipotez	3
BÖLÜM 2	4
TEMEL BİLGİLER	4
2.1 Ön bilgiler	4
BÖLÜM 3	9
SAYISAL YARIGRUPLAR	9
3.1 Sayısal Yarıgrup	9
BÖLÜM 4	20
APERY KÜMELERİ	20
4.1 Sayısal Yarı grubun Apery Kümesi	20
4.2 Sayısal Yarı gruplarda Sıralama Bağ intısı	24
BÖLÜM 5	29
SAYISAL YARIGRUP ÇEŞİTLERİ	29
5.1 Simetrik Sayısal Yarı gruplar	29
5.2 Pseudo-Simetrik Sayısal Yarı gruplar	38
5.3 Hemen Hemen Simetrik Sayısal Yarı gruplar	41
BÖLÜM 6	43

TEMEL FARKLAR	43
6.1 Sayısal Yarıgrubun Temel Farkları	43
6.2 Temel Farklardan Sayısal Yarıgrubun Elde Edilmesi	43
6.3 Sayısal Yarıgrubun Temel Farklar Kümesi	45
BÖLÜM 7	50
İDEALLER	50
7.1 Sayısal Yarıgrubun İdeali	50
7.2 Relative İdeal.....	52
7.3 Kanonikal İdeal.....	52
BÖLÜM 8.....	54
SONUÇ VE ÖNERİLER	54
KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ.....	57

SİMGE LİSTESİ

$FG(S)$	Sayısal yarıgrubun temel boşluklar kümesi
$\langle A \rangle$	A ile üretilen küme
$I - J$	J nin I daki dualı
$Ap(S, n)$	n sayısına göre Apery kümesi
$\max_{\leq_s} (Ap(S, n))$	Sayısal yarıgrupta kısmi sıralama bağıntısına göre maksimaller
$\omega(i)$	Apery kümesinde $\text{mod } m$ ye göre i ye denk eleman
$\max(Ap(S, n))$	Apery kümesinin maksimalleri
R	Halka
1_R	Halkanın birimi
0_R	Halkanın etkisiz elemanı
I	Halkanın ideali
$G(I)$	İdealin boşluklar kümesi
$m(I)$	İdealin en küçük elemanı
$Card(I)$	İdealin kardinalitesi
$I \cup J$	İki idealin birleşimi
$I \cap J$	İki idealin kesişimi
$I + J$	İki idealin toplamı
$\rightarrow$	İşaretin önündeki sayıdan sonraki tüm sayılar kümenin elemanı
$\text{mod } m$	Modülo m
$\mathbb{N}$	Negatif olmayan tamsayılar
$PF(S)$	Pseudo-Frobenius sayılar kümesi
$N(S)$	Sayısal yarıgrubun belirteç kümesi
$n(S)$	Sayısal yarıgrubun belirteç kümesinin eleman sayısı
$G(S)$	Sayısal yarıgrubun boşluklar kümesi
$g(S)$	Sayısal yarıgrubun boşluklar kümesinin eleman sayısı
$F(S)$	Sayısal yarıgrubun Frobenius Sayısı
$e(S)$	Sayısal yarıgrubun gömme boyutu
Ω	Sayısal yarıgrubun kanonikal ideali
$m(S)$	Sayısal yarıgrubun katlılığı
$Ap(S)$	Sayısal yarıgrubun katlılığına göre Apery kümesi

$\leq_s$	Sayısal yarıgrubun kısmi sıralama bağıntısı
$H(S)$	Sayısal yarıgrubun kutup noktaları kümesi
$type(S)$	Sayısal yarıgrubun tipi
S	Sayısal Yarıgrup
T	Tamlık Bölgesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar Halkası
$\mathcal{D}(X)$	X kümesinin bölenler kümesi

SAYISAL YARIGRUPLAR

Esra AYDIN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL

Bu çalışmada, sayısal yarıgruplarla ilgili bugüne kadar yapılmış çalışmaları derleyerek, bunlar arasındaki sonuçların karşılaştırılarak elde edilebilecek yeni bulguları ifade etme amaçlanmıştır.

Tezin I. Bölümünde sayısal yarıgrupların literatür özetiyle birlikte tezi hazırlamaktaki amaç ortaya konularak hipotez belirtilmiştir.

Tezin II. bölümünde, Euclid Bölgesi, EBOB-EKOK ve Diyafont denklemler gibi sayısal yarıgruplara temel olacağını düşündüğümüz konularla ilgili ön bilgiler verilmiştir.

Tezin III. bölümde, sayısal yarıgrupların; minimal üreteç kümesi, Frobenius sayısı, katlılığı, boşluklar kümesi ve Pseudo-Frobenius sayıları gibi temel tanımlarından söz edilmiştir.

Tezin IV. bölümünde, Apery kümeleri ve bu kümelere ait özellikler belirtilmiş ve Teorem 4.3 ü sağlayan bir kümenin hangi şart altında Apery kümesi olabileceği ortaya konularak ispatı yapılmıştır.

Tezin V. bölümünde, simetrik, pseudo-simetrik ve hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplar tanıtılarak bunlar arasındaki geçişler örneklendirilmiştir.

Tezin VI. bölümünde, temel boşluklar kümesinden söz edilmiş ve temel boşlukları verilmiş olan sayısal yarıgrupun belirlenmesi ve sayısal yarıgrupun bir eleman

eklendiğinde veya çıkarıldığında halen bir sayısal yarıgrup oluşturabilmesi için şartlar belirtilmiştir.

Son bölümde ise sayısal yarıgrupların ideallerinden bahsedilmiş ve ideal çeşitleri açıklanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sayısal yarıgrup, simetrik, pseudo-simetrik, apery kümesi, temel boşluklar, idealler

NUMERICAL SEMIGROUPS

Esra AYDIN

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Assist. Prof. Dr. Kürşat Hakan ORAL

In this study, by compiling the studies related with numerical semigroups so far, aimed to explain the new proof which will be gained by comparing the results between this studies.

In the first section of the thesis, with the literature summary of numerical semigroups the hypothesis has been stated by producing the purpose in the preparation of the thesis.

In the II. section of the thesis, it is given information like that in Euclid, GCD-LCM and Diophant equations which is thought provided on the basic issues for the numerical semigroups.

In the III. section of the thesis, it is mentioned the basic definition of numerical semigroups like that the minimal generating set, the Frobenius number, multiplicity, the set of gaps and the Pseudo-Frobenius numbers.

In the IV. section of the thesis, the Apéry sets and the properties of the Apéry sets are stated and the set providing the Theorem 4.3 under which conditions it may be an Apéry set has been explained and proved.

In the V. section of the thesis, symmetric, pseudo-symmetric and almost symmetric numerical semigroups are introduced and the transitions between them are exemplified.

In the VI. section of the thesis, it is mentioned about the set of fundamental gaps and the determination of the numerical semigroup that has given fundamental gaps and is specified the conditions for being a numerical semigroups if an element is added or removed.

In the last section, it is mentioned the ideals of numerical semigroups and the types of the ideals are explained.

Keywords: Numerical semigroup, symmetric, pseudo-symmetric, apéry set, fundamental gaps, ideals

1.1 Literatür Özeti

Sayısal yarıgruplar, cebirde son yıllarda tekrar önem kazanmış ve özellikle cebirsel geometri ve bilgisayar gibi alanlarda uygulama alanı bulmuş bir konudur. En sade tanımıyla sayısal yarıgrup; sıfırı kapsayan ve negatif olmayan tamsayıların, tümleyeni sonlu olan toplamsal kapalı bir alt kümesidir. Sayısal yarıgruplar değişmeli monoidlerdir ve bu sebeple sayısal monoidler olarak da adlandırılırlar.

Sayısal yarıgruplar ilk olarak 19. Yüzyılda Ferdinand Frobenius ve James Joseph Sylvester tarafından ele alınmıştır. Tarihte “Frobenius coin-exchange problem” ve aynı zamanda “Frobenius’un lineer diyafont denklemi” olarak da adlandırılan bu durum ilk olarak, “ortak bir bölene sahip olmayan bozuk paraları kullanarak elde edilmeyen en büyük miktar para nedir?” sorusuyla ifade edilmiştir [1]. Yani temel olarak, “ a ve b negatif olmayan tamsayılar, p ve q sayıları 1 den büyük, aralarında asal sayılar olmak üzere; $ap + bq$ lineer kombinasyonu olarak ifade edilemeyen en büyük $F(S)$ sayısı nedir?” sorusu Frobenius problemi olarak bilinir. p ve q gibi iki adet sayı için bu problemin çözümü; $F(S) = pq - p - q$ olarak belirlidir [2]. Bu şekilde iki sayı için $[0, F(S)]$ aralığındaki sayılardan p ve q sayılarının lineer kombinasyonu olarak yazılabilen ve yazılamayan sayıların eşit sayıda ve tam olarak $\frac{F(S)+1}{2}$ adet olduğu [2] de belirtilmiş ve bununla ilgili teoremin ispatı, 1884 yılında “Educational Times” da yine Sylvester tarafından yapılmıştır [3].

Sayısal yarıgrupların oluşmasında temel olarak Diyafont denklemleri vardır. " $ax + by = c$ " biçimindeki denklem sistemleri Diyafont denklemi olarak adlandırılır. Sayısal yarıgrupların Diyafont denklemlerinden farkı ise, bu denklemlerin negatif olmayan çözümlerinin dikkate alınmasıdır. Dolayısıyla bu denklemden genellemeye varacak olursak, $a_1, a_2, \dots, a_k$ aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere, $n = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k$ ($x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k$) denkleminin negatif olmayan çözümleri ile oluşturulan n doğal sayılarının kümesi herhangi bir sayısal yarıgrupun elemanlarını belirtir. Dolayısıyla, bu sayıların lineer kombinasyonu olarak yazılabilen sayıların sonsuz tane olduğu ve yazılamayan doğal sayıların ise sadece $[0, F(S)]$ aralığında olduğu tespit edilmiştir. Bu konu üzerinde ilgilenilen diğer bir soru ise, bir sayısal yarıgrupun minimal üreteç kümesinin ne olacağı ve bunları belirleme sorusudur.

Bu konu üzerinde yapılan çalışmalar, sayısal yarıgruplara ait yeni tanımların da ortaya çıkmasını sağlamıştır. Sonradan tanımlanmış olan; Apery kümeleri ve bu kümelere ait özellikler, simetrik, pseudo-simetrik ve hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup çeşitleri, temel boşluklardan yola çıkarak sayısal yarıgruba yeni bir eleman eklendiğinde ya da sayısal yarıgruptan bir eleman çıkarıldığında elde edilen yeni kümelerin sayısal yarıgrup şartlarını sağlama koşullarının nelere bağlı olduğu gibi konular özellikle bu konu üzerinde geniş bir uygulama alanı bulmuştur.

Sayısal yarıgruplar üzerindeki çalışmalar sadece burada söz edilenlerle sınırlı değildir. Sayısal yarıgruplarla ilgili çalışmalar birçok alanda devam etmektedir. Fakat bu çalışmada yukarıda belirtilen konular dışındaki ayrıntılara değinilmeyecektir.

1.2 Tezin Amacı

Sayısal yarıgruplarla ilgili yapılan çalışmalarda özellikle ele alınmış ve çalışmamızın IV. bölümünde anlatılan Apery kümelerinin, özellikle Teorem 4.3 te belirlenen şartını taşıyan ve Apery kümesi ile aynı eleman sayısına sahip olan herhangi bir kümenin, Apery kümesi olma şartı Sonuç 4.1 de ortaya konularak ispatı yapılmıştır.

1.3 Hipotez

S sayısal yarıgrubunun herhangi bir A alt kümesi için, bu kümeye ait tüm elemanlarının sayısal yarıgruba ait iki elemanın toplamı şeklinde ifade edilen tüm farklı ikililerin bileşenleri bu kümeye eklendiğinde, elde edilen küme ile aynı eleman sayısına sahip olan Apery kümesini belirtebilmesinin, kümeye ait olan herhangi iki elemanın bu kümenin kardinalitesinin modunda aynı denklik sınıfında olmaması gerektiği sonucuna bağlı olduğu ifade edilerek bu ifadenin gösterilmesi amaçlanmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL BİLGİLER

2.1 Ön bilgiler

Bu bölümde çalışmamıza temel olan cebirsel yapılar, öklid bölgesi ve diyafont denklemler gibi temel kavramlardan söz ederek, bu kavramların temel özellikleri hakkında bilgiler vereceğiz.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ olarak tanımlanan kümeye doğal sayılar kümesi denir. Bir cebirsel yapı, bir veya daha fazla küme ile birlikte bir şekilde küme elemanlarını birleştirebilen bir veya daha fazla işlemden oluşur. Belli bir cebirsel yapı için önemli olan, çoğu özelliğinin içerdiği işlemlerden tahmin edilebilmesidir. Bunun anlamı ortak özelliklere sahip cebirsel yapıların sınıflara ayrılabilmesidir. Verilen bir cebirsel yapının hangi yapı ailesine ait olduğunu bulabilmek, bu ailenin tüm elemanlarının hangi karakteristik özelliklere sahip olduğu sonucuna varabilmemize imkan verir.

Tanım 2.1 S boş olmayan bir küme ve $*$, S üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. $(S, *)$ yapısı; S üzerinde $*$ işlemi ile birleşme özelliğine sahip ise yarıgrup adını alır.

Tanım 2.2 Birleşme özelliği ile etkisiz eleman özelliğine sahip cebirsel yapılara ise monoid denir. Bu nedenle; monoidler etkisiz eleman özelliğine sahip yarıgruplardır.

Örnek 2.1 $\mathbb{Z} - \{0\}$ kümesi çarpma işlemine göre bir yarıgruptur. 1 elemanı aynı zamanda çarpmaya göre etkisiz eleman olduğundan $\mathbb{Z} - \{0\}$ kümesi aynı zamanda çarpma işlemine göre bir monoiddir.

Tanım 2.3 $a, b, m \in \mathbb{Z}$ ve $m \neq 0$ olmak üzere, $m \mid a - b$ ise yani a ve b , m ile bölündüğünde aynı kalanı veriyorsa, a ve b ye m modülüne göre denktir denir. Bu bağıntı $a \equiv b(m)$ veya $a \equiv b(\text{mod } m)$ biçiminde ifade edilir ve a denktir b modülo m şeklinde okunur. Buna göre tamsayıların herhangi bir m modülüne göre kalan sınıfları tam m tanedir ve bu sınıfların birer temsilcisi $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ dir.

Örnek 2.2 $8 \equiv 5(\text{mod } 3)$ ve $\{0, 1, 2\}$ bu modüle göre kalan sınıflarının temsilcileridir.

Tanım 2.4 $R \neq \emptyset$ bir küme, '+' ve '•' R üzerinde iki işlem olsun.

- $(R, +)$ değişmeli grup (yani 0 kümede, her elemanın tersi var ve işlem değişmeli)
- $(R, \bullet)$ yarı grup,
- $\forall a, b, c \in R$ için, $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$

koşulları sağlanıyorsa, $(R, +, \bullet)$ sıralı üçlüsüne halka denir ve genelde R ile gösterilir. Bu tanıma göre $(\mathbb{Z}, +, \bullet)$ sıralı üçlüsü bir halkadır.

Tanım 2.5 R bir halka $a \in R - \{0_R\}$ olsun. $\exists b \in R - \{0_R\}$ için $ab = 0$ oluyorsa a ya R nin bir sol sıfır böleni, b ye R nin bir sağ sıfır böleni denir. Hem sağ hem sol sıfır bölen elemana R halkasının sıfır böleni denir. Bu tanıma göre $\mathbb{Z}$ halkası sıfır bölensiz bir halkadır.

Tanım 2.6 R , değişmeli ve birimli bir halka, $1_R \neq 0$ olsun. R nin sıfırdan farklı sıfır böleni yoksa R ye tamlık bölgesi denir. Dolayısıyla, $\mathbb{Z}$ bir tamlık bölgesidir.

Tanım 2.7 R , değişmeli bir halka $\varphi: R - \{0_R\} \rightarrow \mathbb{N}$ olmak üzere

- $a, b \in R$, $a, b \neq 0$ ve $a \neq 0$ ise $\varphi(a) \leq \varphi(a.b)$
- $a, b \in R$, $b \neq 0$ ise $\exists q, r \in R$ için $a = bq + r$ ise $r = 0$ veya $r \neq 0$ için $\varphi(r) < \varphi(b)$

oluyorsa, R ye Öklid halkası denir. Tamlık bölgesi olan Öklid halkasına ise Öklid bölgesi denir. φ ye ise Öklid fonksiyonu denir.

Örnek 2.3 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası tamlık bölgesi olduğundan, $\varphi(x) = |x|$ dönüşümü ile Öklid bölgesidir.

Tanım 2.8 T bir tamlık bölgesi ve $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n > 1$) tamlık bölgesinin hepsi birden sıfır olmayan elemanları olmak üzere, aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir $d \in T$ elemanına $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemanlarının en büyük ortak böleni (ebob) denir ve $d = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ile gösterilir.

- $d \mid a_i; i = 1, 2, \dots, n$
- $c \in T$ için, $c \mid a_i; i = 1, 2, \dots, n$ ise, $c \mid d$

Tanım 2.9 T bir tamlık bölgesi ve $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n > 1$) tamlık bölgesinin hepsi birden sıfır olmayan elemanları olmak üzere, aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir $k \in T$ elemanına $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemanlarının en küçük ortak katı (ekok) denir ve $k = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ ile gösterilir.

- $a_i \mid k; i = 1, 2, \dots, n$
- $c \in T$ için, $a_i \mid c; i = 1, 2, \dots, n$ ise, $k \mid c$

Tanım 2.10 R bir halka, $I \neq \emptyset$ ve $I \subset R$ olsun.

- $\forall m, n \in I$ için, $m - n \in I$
- $RI = \{\sum r_i a_i : r_i \in R, a_i \in I\} \subset I$
- $IR = \{\sum a_i r_i : a_i \in I, r_i \in R\} \subset I$

şartları sağlanıyorsa I ya R nin ideali denir.

Tanım 2.11 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $I = \{a\}$ tek bir elemanla üretiliyorsa, $\langle I \rangle$ ile üretilen ideale esas ideal denir. $I = \{a\}, \langle I \rangle = \langle \{a\} \rangle = \langle a \rangle$ ile gösterilir.

Tanım 2.12 Her ideali esas ideal olan halkaya esas ideal halkası denir. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası bir esas ideal halkasıdır. Tamlık bölgesi olan esas ideal halkasına esas ideal bölgesi denir.

Teorem 2.1 T bir esas ideal bölgesi ve $a, b \in T$ her ikisi birden sıfır olmayan herhangi iki eleman olsun. Bir $d \in T$ için $d = (a, b)$ dir ve $d = ax + by$ olacak biçimde $x, y \in T$

elemanları vardır. Yani, bir esas ideal bölgesinde her ikisi birden sıfır olmayan herhangi iki elemanın ebobu vardır ve ebob bu elemanların bir lineer kombinasyonu biçiminde yazılabilir.

Örnek 2.4 $(6,11)=1 \Leftrightarrow 1=2.6-1.11$ olarak ifade edilebilir.

Tanım 2.13 $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ verilmiş olsun. Öyle ki; $a = qb + r$, $0 < r \leq |b|$ olacak biçimde tek türlü belirli q ve r sayıları vardır. Bu teoremdaki q sayısına a nın b ye bölümünden elde edilen bölüm ve r sayısına da a nın b ile bölünmesinden elde edilen kalan denir.

Teorem 2.2 a, b, q ve $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ olsun. (a, b) ile a ve b sayılarının ebobunu göstermek üzere, $a = bq + r$ ise $(a, b) = (b, a - qb) = (b, r)$ dir. Bu ek teoremle bölme algoritması birleştirilirse iki sayının EBOB unu bulmak için Öklid Algoritması elde edilir.

Tanım 2.14 $a > b \geq 1$ olsun. Bölme algoritması ile

$a = bq_0 + r_1, 0 \leq r_1 < b; (a, b) = (b, r_1)$ Eğer $r_1 \neq 0$ ise bölme algoritması ile $b = q_1r_1 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1; (b, r_1) = (r_1, r_2)$ Eğer $r_2 \neq 0$ ise bölme algoritması ile $r_1 = q_2r_2 + r_3, 0 \leq r_3 < r_2; (r_1, r_2) = (r_2, r_3)$ elde edilir. Her adımda elde edilen kalan küçüleceğinden sonsuz adımda devam etmeyecektir. $r_n \neq 0$ için $r_{n+1} = 0$ olacaktır. Öyle ki; $r_{n-1} = q_n r_n + 0; (r_{n-1}, r_n)$ olacaktır. O zaman $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \dots = (r_{n-1}, r_n) = r_n$ dir. Yani; a ve b nin ebobu Öklid algoritmasından elde edilen sıfırdan farklı son kalandır.

Tanım 2.15 $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}$ olarak verilen denklemlere n - Bilinmeyenli Lineer Diyafont Denklemleri denir. $n \geq 1$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n$ değerleri sıfırdan farklı kabul edilir.

Teorem 2.3 $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ denklemi ancak ve ancak $(a_1, a_2, \dots, a_n) | b$ durumu varsa çözümlüdür.

Örnek 2.5 $3x - 6y + 15z = 7$ denklemi için $(3, 6, 15) = 3$ ve $3 \nmid 7$ olduğundan $3x - 6y + 15z = 7$ denkleminin tamsayılar kümesinde çözümü yoktur.

Örnek 2.6 $105x + 56y = 42$ denklemi için $(105, 56) = 7$ ve $7 \mid 42$ olduğundan $105x + 56y = 42$ denkleminin tamsayılar kümesinde çözümü vardır. Öklid algoritması uygulandığında;

$$105 = 56 \cdot 1 + 49 \quad (2.1)$$

$$56 = 49 \cdot 1 + 7 \quad (2.2)$$

$$49 = 7 \cdot 7 + 0 \quad (2.3)$$

(2.1), (2.2) ve (2.3) denklemlerinden;

$$7 = 2 \cdot 56 - 1 \cdot 105 \quad (2.4)$$

elde edilir. (2.4) denklemini 6 ile genişletirsek,

$$42 = 12 \cdot 56 - 6 \cdot 105 \quad (2.5)$$

elde edilir. (2.5) denkleminde $105x + 56y = 42$ denkleminin tamsayı çözümünün $(x, y) = (12, -6)$ olduğu görülür.

BÖLÜM 3

SAYISAL YARIGRUPLAR

3.1 Sayısal Yarıgrup

Tanım 3.1 Bir S sayısal yarıgrubu; negatif olmayan tamsayıların toplamsal kapalı bir alt kümesi, 0 elemanını kapsayan ve $\mathbb{N} \setminus S$ kümesi sonlu olan bir kümedir. Yani;

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \cup \{0\}$ ve $S \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere;

- $0 \in S$,
- S toplama işlemine göre kapalı, ($a, b \in S$ ise $a + b \in S$)
- $\mathbb{N} \setminus S$ sonlu,

şartlarını sağlayan S kümesine sayısal yarıgrup denir [4].

Örnek 3.1 $S = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, \dots\}$ kümesi bir sayısal yarıgruptur.

$0 \in S$ ve S toplama işlemine göre kapalı ve $\mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 17\}$ kümesi sonludur.

Tanım 3.2 Bir S sayısal yarıgrubunun tüm $s \in S$ elemanları, bir $A = \{s_1, s_2, \dots, s_t\}$ kümesinin elemanlarının;

$$s = k_1 s_1 + k_2 s_2 + \dots + k_t s_t (k_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, t) \quad (3.1)$$

şeklinde lineer toplamı olarak yazılabiliyorsa, A kümesine S sayısal yarıgrubunun üreteç kümesi denir. $A = \{s_1, s_2, \dots, s_p\}$ ($s_i > 0, i \in \{1, 2, \dots, p\}$) kümesi içerisinde, hiçbir

eleman diğer elemanların bir lineer toplamı şeklinde ifade edilemiyorsa, yani A kümesinin hiçbir özalt kümesi S sayısal yarıgrubunu üretmiyorsa, o zaman A kümesi S nin minimal üreteç kümesi olarak adlandırılır. Eğer $A = \{s_1, s_2, \dots, s_p\}$ bir S sayısal yarıgrubunun minimal üreteç kümesi ise, $S = \langle s_1, s_2, \dots, s_p \rangle = \{k_1 s_1 + k_2 s_2 + \dots + k_p s_p : k_i \in \mathbb{N}, s_i \in A, 1 \leq i \leq p\}$ şeklinde yazılır [5].

Örnek 3.2 $S = \langle 5, 9, 13, 18, 39 \rangle = \langle 5, 9, 13, 18 \rangle = \langle 5, 9, 13, 39 \rangle = \langle 5, 9, 13 \rangle$. Dolayısıyla S sayısal yarıgrubu; buna benzer birçok üreteç kümesiyle üretilebilir. Fakat bu kümeler arasında minimal olanı $A = \{5, 9, 13\}$ kümesidir. Dolayısıyla bu kümeye S sayısal yarıgrubunun minimal üreteç kümesi denir. S nin elde edilebildiği ve A kümesinin özalt kümesi olan başka bir üreteç küme yoktur. Yani; S nin minimal üreteç kümesi tekirdir.

Teorem 3.1 $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ve $A = \{s_1, s_2, \dots, s_p\}$ kümesi için, $\langle A \rangle = \{k_1 s_1 + \dots + k_p s_p \mid k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N}\}$ olarak tanımlanmak üzere, $\langle A \rangle$ nın bir sayısal yarıgrup olması için gerek ve yeter şart $\text{ebob}\{s_1, s_2, \dots, s_p\} = 1$ olmasıdır [6].

İspat: $(\Rightarrow)$: $\langle A \rangle$ bir sayısal yarıgrup ve $\text{ebob}\{s_1, s_2, \dots, s_p\} = d$ olsun. Eğer; $s \in \langle A \rangle$ ise $d \mid s$ şartı sağlanır. $\langle A \rangle$ sayısal yarıgrup olduğundan ve $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ sonlu olacağından, yeterince büyük pozitif bir x tamsayısı için; $d \mid x$ ve $d \mid x+1$ olur. Ardışık iki tamsayıyı ortak olarak bölen sayı 1 olacağından $d = 1$ olması gerektiği sonucuna varılır.

$(\Leftarrow)$: Tersine, $\text{ebob}(A) = 1$ olsun. $\langle A \rangle$ kümesinin tanımından $0 \in \langle A \rangle$ ve $x, y \in S$ için $x + y \in \langle A \rangle$ olduğu kolayca görülür. $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ nın sonlu olduğunu gösterelim. $\text{ebob}(A) = 1$ olduğundan, $s_1, \dots, s_p \in A$ olmak üzere;

$$z_1 s_1 + \dots + z_p s_p = 1 \quad (3.2)$$

(3.2) eşitliğini sağlayan $z_1, \dots, z_p \in \mathbb{Z}$ sayıları vardır. $z_i \in \mathbb{Z}$ ($i = 1, \dots, p$) sayılarından negatif olanları eşitliğin karşı tarafına gönderdiğimizde;

$$z_{i_1} s_{i_1} + \dots + z_{i_k} s_{i_k} = 1 - z_{j_1} s_{j_1} - \dots - z_{j_t} s_{j_t} \quad (\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_t\} = \{1, \dots, p\}) \quad (3.3)$$

eşitliğini elde ederiz. Yeterince büyük olan $s = -z_{j_1} s_{j_1} - \dots - z_{j_t} s_{j_t} \in \langle A \rangle$ için, (3.3)
eşitliği yardımıyla,

$$s+1 = z_{i_1} s_{i_1} + \dots + z_{i_k} s_{i_k} \in \langle A \rangle \quad (3.4)$$

elemanı elde edilebilir. Eğer;

$$n \geq s^2 - 1 = \underbrace{(s-1) \in \mathbb{N}}_{\in \langle A \rangle} \underbrace{(s+1) \in \langle A \rangle}_{\in \langle A \rangle} = (s-1)s + (s-1) \quad (3.5)$$

ise o zaman $n \in \langle A \rangle$ sağlanır. n sayısını s sayısı ile kalanlı olarak bölelim. Elde edilen bölüm q ve kalan r olmak üzere; n sayısı,

$$n = qs + r \quad (0 \leq r < s) \quad (3.6)$$

şeklinde ifade edilebilir. (3.5) ve (3.6) eşitlikleri yardımıyla;

$$qs + r = n \geq (s-1)s + (s-1) \quad (3.7)$$

ifadesinden $q \geq s-1 \geq r$ sonucuna varılır. (3.6) eşitliğini;

$$n = \underbrace{(rs + r) + (q-r)s}_{qs+r} \quad (3.8)$$

şeklinde yazarak;

$$n = r(s+1) + (q-r)s \in \langle A \rangle \quad (3.9)$$

elde edilir. Yani; yeterince büyük olan $s \in \langle A \rangle$ elemanından sonraki tüm elemanlar $\langle A \rangle$ kümesinin elemanı olur ki; buradan da $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ nın sonlu olduğu gösterilmiş olur. $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ sonlu olduğundan, $\langle A \rangle$ bir sayısal yarıgrup olur.

Örnek 3.3 $A = \{4, 7, 9\}$ alalım. $\text{ebob}\{4, 7, 9\} = 1$ olduğundan, $\langle A \rangle$ bir sayısal yarıgrup olur. $S = \langle 4, 7, 9 \rangle = \{0, 4, 7, 8, 9, 11, \rightarrow\}$ Burada " $\rightarrow$ " anlamı; işaretin önündeki sayıdan büyük olan her tamsayı S ye ait demektir. Ayrıca; $\mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$ dir.

Örnek 3.4 $S = \langle 7, 9, 11, \rangle = \{0, 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 25, 27, \rightarrow\}$ ise;
 $ebob\{7, 9, 11\} = 1$ ve $\mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 13, 15, 17, 19, 24, 26\}$ dir.

Örnek 3.5 $S = \langle 6, 11, 15 \rangle = \{0, 6, 11, 12, 15, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 32, \rightarrow\}$
ise; $ebob\{6, 11, 15\} = 1$ $\mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 16, 19, 20, 25, 31\}$ dir.

Tanım 3.3 $A = \{s_1, s_2, \dots, s_t\}$ kümesi S sayısal yarıgrubunun minimal üreteç kümesi olmak üzere; A kümesinin elemanları kullanılarak yazılamayan en büyük tamsayıya S sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı denir. Yani S ye ait olmayan en büyük pozitif tamsayıdır ve $F(S)$ ile gösterilir. $F(S) = \max\{x \in \mathbb{Z} \mid x \notin S\}$ veya $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$ olarak ifade edilir [4].

Örnek 3.6 Örnek 3.5 deki $S = \langle 6, 11, 15 \rangle$ sayısal yarıgrubu için Frobenius sayısı;
 $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S) = 31$ dir.

Sonuç 3.1 $S = \langle F(S) + 1, \rightarrow \rangle$ sayısal yarıgrubunun minimal üreteç kümesi;
 $\{F(S) + 1, F(S) + 2, \dots, 2F(S) + 1\}$ şeklindedir [6].

İspat: $A = \{F(S) + 1, F(S) + 2, \dots, 2F(S) + 1\}$ kümesinin S sayısal yarıgrubunu ürettiğini gösterelim. Bunun için; $\forall a \in S$ sayısının A kümesinin elemanlarının lineer toplamı olduğunu göstermeliyiz.

$$a \in S \Rightarrow a = F(S) + k \quad (\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}) \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer; $1 \leq k \leq F(S) + 1$ ise (3.10) eşitliğinden dolayı $a \in A$ olur. Çünkü; A kümesinin her elemanı $F(S) + k$ ($1 \leq k \leq F(S) + 1$) şeklindedir. Kabul edelim ki; $k \geq F(S) + 2$ şeklinde olsun. O zaman $k = F(S) + t$ ($t \in \{2, 3, \dots, F(S) + 2\}$) şeklinde yazılabilir.

$$a = F(S) + k \Rightarrow a = F(S) + F(S) + t \quad (t \in \{2, 3, \dots, F(S) + 2\}) \quad (3.11)$$

(3.11) eşitliği;

$$a = (F(S) + 1) + (F(S) + t - 1) \quad (3.12)$$

şeklinde düzenlenebilir. (3.12) bağıntısında; $(F(S)+1) \in A$ olduğu açıktır. (3.12) bağıntısının $(F(S)+t-1)$ kısmı için;

$$2 \leq t \leq F(S)+2 \quad (3.13)$$

(3.13) eşitliğinde eşitsizliğin her bir bölümünde -1 eklediğimizde,

$$1 \leq t-1 \leq F(S)+1 \quad (3.14)$$

elde edilir. (3.14) eşitsizliğinde her bir kısma $F(S)$ eklendiğinde,

$$F(S)+1 \leq F(S)+t-1 \leq 2F(S)+1 \quad (3.15)$$

(3.15) eşitsizliğinden dolayı; $a \in A$ elde edilir. Sonuçta; A kümesinin üreteç küme olduğu sonucuna ulaşılır. A kümesinin minimal üreteç küme olduğunu göstermek için; A nın herhangi bir elemanının, diğer elemanlarının lineer toplamı şeklinde olmadığını göstermeliyiz. Kabul edelim ki, minimal üreteç kümesi olmasın. Öyleyse, farklı $k, t, m \in \{1, 2, \dots, F(S)+1\}$ sayıları için; $\exists (F(S)+k) \in A$ ve $(F(S)+t), (F(S)+m) \in A$ vardır ve $\exists a, b \in \mathbb{N}$ için;

$$F(S)+k = a(F(S)+t) + b(F(S)+m) \quad (3.16)$$

şeklinde ifade edilebilir. (3.16) eşitliğini düzenlediğimizde;

$$F(S)+k = (a+b)F(S) + at + bm \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.17) eşitliğinden;

$$(a+b-1)F(S) + at + bm - k = 0 \quad (3.18)$$

eşitliğine ulaşılır. (3.18) eşitliğinde $a=0$ ve $b=0$ için;

$$-F(S) - k = 0 \Rightarrow F(S) = -k \quad (3.19)$$

(3.19) çelişkisi elde edilir. $a=0$ ve $b=1$ veya $a=1$ ve $b=0$ için; (3.18) eşitliğinden;

$$m - k = 0 \Rightarrow m = k \quad (3.20)$$

$$t - k = 0 \Rightarrow k = t \quad (3.21)$$

(3.20) ve (3.21) çelişkileri elde edilir. Çünkü; $m \neq k \neq t$ olarak seçilmişti. $a \geq 1$ ve $b \geq 1$ için;

$$k = \underbrace{(a+b-1)}_{\geq 1} F(S) + \underbrace{at}_{\geq 1} + \underbrace{bm}_{\geq 1} \quad (3.22)$$

elde edilir. (3.22) bağıntısı; $k \leq F(S) + 1$ ifadesi ile çelişir. Öyleyse; A minimal üreteç kümedir. Bu kümenin eleman sayısı;

$$\# < A > = \frac{2F(S) + 1 - (F(S) + 1)}{1} + 1 = F(S) + 1 \quad (3.23)$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.2 S bir sayısal yarıgrup olsun. $S = \langle 2, a \rangle$ ise $S = \{0, 2, 4, 6, \dots, a-1, \rightarrow\}$ biçiminde oluşur. $F(S) = a - 2$ dir.

İspat: $\{2, a\}$ üreteç küme olduğundan, $\text{ebob}\{2, a\} = 1$ olduğundan $a = 2k + 1$ şeklinde bir tek sayı olmalıdır. S sayısal yarıgrubu bu küme ile; $S = \{0, 2, 4, 6, \dots, \underbrace{2k}_{a-1}, \underbrace{2k+1}_a, \underbrace{2(k+1)}_{a+1}, \rightarrow\} = \{0, 2, 4, 6, \dots, a-1, \rightarrow\}$ şeklinde üretilir.

Frobenius sayısı ise, $2k - 1 = \underbrace{(2k+1)}_a - 2 = a - 2$ dir.

Örnek 3.7 $S = \langle 2, 13 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 13, \rightarrow\}$, $F(S) = 13 - 2 = 11$ dir.

Tanım 3.4 S bir sayısal yarıgrup olmak üzere; S nin 0 dan farklı en küçük pozitif elemanına S nin katlılığı denir ve $m(S)$ ile gösterilir. $m(S) = \min\{s \in S \mid s \neq 0\}$ olarak tanımlanır [8].

Özellik 3.1 S sayısal yarıgrubunun katlılığı, $m(S)$ aynı zamanda minimal üreteç kümesinin en küçük elemanıdır [9].

Örnek 3.8 $S = \langle 4, 7, 9 \rangle$ sayısal yarıgrubu için $m(S) = 4$ olur.

Tanım 3.5 $A = \{n_0, n_1, \dots, n_p\}$ S sayısal yarıgrubunun minimal üreteç kümesi olsun. $n_0 = m(S)$, S nin katlılığı olmak üzere, $e(S) = p+1$ olarak tanımlı elemana S nin gömme boyutu adı verilir. Diğer bir deyişle; S sayısal yarıgrubunun minimal üreteç kümesinin eleman sayısı S nin gömme boyutunu verir [2].

Örnek 3.9 $S = \langle 4, 7, 9 \rangle$ sayısal yarıgrubu için $e(S) = 3$ tür.

Tanım 3.6 S sayısal yarıgrubunda Frobenius sayısından küçük olan tamsayılar kümesine S nin belirteç kümesi denir ve $N(S)$ ile gösterilir. $N(S) = \{s \in S : s < F(S)\}$ olarak tanımlanır. Frobenius sayısından küçük olan sayıların sayısı da, $n(S)$ ile gösterilir ve $n(S) = \#(N(S))$ olarak belirlenir. $n(S) = \#\{0, 1, \dots, F(S)\} \cap S$ olarak da tanımlanabilir [10].

Örnek 3.10 $S = \langle 5, 9, 13 \rangle = \{0, 5, 9, 10, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 22, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için $m(S) = 5, e(S) = 3, F(S) = 21, N(S) = \{0, 5, 9, 10, 13, 14, 15, 18, 19, 20\}$ ve $n(S) = 10$ dur.

Tanım 3.7 Pozitif tamsayılardan S ye ait olmayan elemanlara S nin boşlukları denir ve bu elemanların oluşturduğu küme $G(S)$ ile gösterilir. $G(S) = \{z \in \mathbb{N} : z \notin S\}$ olarak tanımlanır [11].

Tanım 3.8 S sayısal yarıgrubunun boşluklar kümesinin eleman sayısına S nin cinsi denir ve $g(S)$ ile gösterilir ve $g(S) = \#(G(S))$ ile belirlenir. $g(S) = \#(\mathbb{N} \setminus S)$ olarak da tanımlanabilir. Bazı kaynaklarda S nin tekillik derecesi olarak da isimlendirilir [12].

Teorem 3.2 a ve b tamsayıları $\text{ebob}\{a, b\} = 1$ şartını sağlayan tamsayılar olmak üzere;

$$i) F(\langle a, b \rangle) = ab - a - b$$

$$ii) g(\langle a, b \rangle) = \frac{F(\langle a, b \rangle) + 1}{2} = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

dir [6].

Tanım 3.9 S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, Frobenius sayısı ile farkı S ye ait olmayan S nin dışındaki tamsayılara S nin kutup noktaları denir ve bu elemanların oluşturduğu küme $H(S)$ ile gösterilir. Yani; $H(S) = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \notin S, F(S) - z \notin S\}$ dir [5].

Özellik 3.2 S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, $z \in H(S)$ ise $z \in \mathbb{Z}^+$ ve $H(S) \subseteq G(S) = \mathbb{N} \setminus S$ olur [5].

İspat: $z \in H(S)$ olsun. $z \in \mathbb{Z}^-$ ise $z \notin S$ fakat $F(S) - z \in S$ olduğu açıktır. Bu sebeple, $z \in \mathbb{Z}^+$ olmalıdır. Ayrıca, $z \in \mathbb{Z}^+$ ve $z \notin S$ olduğundan $H(S) \subseteq G(S) = \mathbb{N} \setminus S$ dir.

Sonuç 3.3 Bir sayısal yarıgrupta boşluklar kümesinin toplamları Frobenius sayısını veren herhangi iki elemanı kutup noktası olur. Eğer Frobenius sayısı çift ise, Frobenius sayısının yarısı olan sayı kutup noktasıdır.

İspat: $z \notin S$ ve $z \in G(S)$, $F(S) - z \notin S$ ve $(F(S) - z) \in G(S)$ olduğundan,

$$z + (F(S) - z) = F(S) \quad (3.24)$$

(3.24) eşitliğinden, S nin kutup noktalarının, S nin boşluklar kümesinin farklı elemanlarının toplamıyla oluştuğu sonucu elde edilir. Eğer S sayısal yarıgrupunun Frobenius sayısı çift ise; $\frac{F(S)}{2} \notin S$ olduğundan ve aynı zamanda $F(S) - \frac{F(S)}{2} \notin S$ olduğundan $\frac{F(S)}{2} \in H(S) \subset G(S)$ bulunur.

Tanım 3.10 S ye ait olmayan tamsayılardan, S nin 0 dan farklı her elemanı ile toplamı S kümesine ait olanlarına Pseudo-Frobenius sayısı denir ve bu kurala uyan sayıların oluşturduğu kümeye Pseudo-Frobenius sayılar kümesi denir ve $PF(S)$ ile gösterilir. Yani, $PF(S) = \{x \in \mathbb{Z} : x \notin S, x + s \in S, \forall s \in S - \{0\}\}$ [8], [13].

Önerme 3.1 S bir sayısal yarıgrup olsun.

(1) Herhangi bir S sayısal yarıgrubu için $F(S) \in PF(S)$

(2) $PF(S)$ nin ikinci en büyük elemanı, $H(S)$ nin en büyük elemanıdır [14].

İspat: (1) $PF(S) = \{z \in \mathbb{Z} : z \notin S, z + s \in S, \forall s \in S - \{0\}\}$ olarak tanımlanmıştı. $F(S) \in \mathbb{Z} \setminus S$ olduğundan ve Frobenius sayısı S ye ait olmayan en büyük eleman olduğundan, $\forall s \in S \setminus \{0\}$ ile toplamı S nin elemanıdır yani; $(F(S) + s) \in S$ olur. Dolayısıyla; $F(S) \in PF(S)$.

(2) $h(S)$ ile $H(S)$ kümesinin en büyük elemanını belirtelim. $\forall s \in S - \{0\}$ için

$h(S) + s > h(S)$ olacağından $h(S) + s \notin H(S)$ olacaktır. $(h(S) + s) \in S$ olursa ispat biter. Çünkü; $h(S)$ nin sayisal yarıgruptaki her elemanla toplamı kümede olduğundan, Pseudo-Frobenius sayı şartı sağlanır. $(h(S) + s) \notin S$ olduğunu varsayalım. $F(S) - (h(S) + s) \in S$ şartı sağlanır. Çünkü; $F(S) - (h(S) + s) \notin S$ olursa, $(h(S) + s) \in H(S)$ şartı sağlanır ki bu da $h(S)$ nin en büyük eleman olmasıyla çelişir. Böylece;

$$F(S) - h(S) - s = t (\exists t \in S) \quad (3.25)$$

elde edilir. (3.25) eşitliğini kullanarak;

$$F(S) - h(S) = s + t \in S \quad (3.26)$$

elde edilir. Bu durum; $h(S) \in H(S)$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla; $(h(S) + s) \in S$ $h(S) \in PF(S)$ sonucuna varılır. Şimdi $h(S)$ elemanının $PF(S)$ kümesinin ikinci en büyük elemanı olduğunu gösterelim. $z \in PF(S)$ ve $z > h(S)$ olduğunu varsayalım. $F(S) - z$ ifadesini düşünelim. $z > h(S)$ olduğundan $z \notin H(S)$ olduğunu biliyoruz. ($h(S)$, $H(S)$ kümesinin en büyük elemanı olarak seçilmişti.) Dolayısıyla; $F(S) - z \in S$. Çünkü; $(F(S) - z) \notin S$ olursa, $z \in H(S)$ ve $z > h(S)$ olduğundan $h(S)$ nin maksimal olmasıyla çelişir. Böylece;

$$F(S) = z + s (\exists s \in S) \quad (3.27)$$

sağlanır. Eğer $s \in S \setminus \{0\}$ ise (3.27) eşitliğinden $z + s \in S$ ve dolayısıyla $F(S) \in S$ çelişkisi elde edilir. Eğer $s = 0$ ise, $F(S) = z$ elde edilir; buradan da $PF(S)$ kümesinin hiçbir elemanının $h(S)$ ve $F(S)$ arasında olamayacağı sonucuna varılır.

Tanım 3.11 Pseudo-Frobenius sayılar kümesinin eleman sayısına S nin tipi denir ve $type(S)$ ile gösterilir. Yani, $\#(PF(S)) = type(S)$ [8].

Örnek 3.11 $S = \langle 8, 11, 12, 15 \rangle = \{0, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, \rightarrow\}$

- S nin minimal üreteç kümesi: $\{8, 11, 12, 15\}$, $e(S) = 4$
- $m(S) = 8$

- $F(S) = 29$
- $G(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 25, 29\}$, $g(S) = 16$
- $H(S) = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \notin S, F(S) - z \notin S\} = \{4, 25\}$
- $N(S) = \{0, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28\}$, $n(S) = 14$
- $PF(S) = \{4, 25, 29\}$ ve $type(S) = 3$ dür.

Örnek 3.12 $S = \langle 3, 10 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18 \rightarrow\}$

- S nin minimal üreteç kümesi: $\{3, 10\}$, $e(S) = 2$
- $m(S) = 3$
- $F(S) = 17$
- $G(S) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 14, 17\}$, $g(S) = 9$
- $H(S) = \emptyset$
- $N(S) = \{0, 3, 6, 9, 10, 12, 13, 15, 16\}$, $n(S) = 9$
- $PF(S) = \{17\}$ ve $type(S) = 1$ dir.

Örnek 3.13 $S = \langle 4, 9, 14 \rangle = \{0, 4, 8, 9, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 20, \rightarrow\}$

- S nin minimal üreteç kümesi: $\{4, 9, 14\}$, $e(S) = 3$
- $m(S) = 4$
- $F(S) = 19$
- $G(S) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 15, 19\}$, $g(S) = 10$
- $H(S) = \emptyset$
- $N(S) = \{0, 4, 8, 9, 12, 13, 14, 16, 17, 18\}$, $n(S) = 10$
- $PF(S) = \{19\}$ ve $type(S) = 1$ dir.

Örnek 3.14

$S = \langle 5, 13, 21 \rangle = \{0, 5, 10, 13, 15, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 38, \rightarrow\}$

- S nin minimal üreteç kümesi: $\{5, 13, 21\}$, $e(S) = 3$
- $m(S) = 5$
- $F(S) = 37$
- $G(S) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 22, 24, 27, 29, 32, 37\}$, $g(S) = 20$
- $H(S) = \{8, 29\}$
- $N(S) = \{0, 5, 10, 13, 15, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 36\}$, $n(S) = 18$
- $PF(S) = \{29, 37\}$ ve $type(S) = 2$ dir.

APERY KÜMELERİ

4.1 Sayısal Yarıgrupun Apery Kümesi

Tanım 4.1 S bir sayısal yarıgrup ve $m \in S \setminus \{0\}$ olsun. $Ap(S, m) = \{s \in S : s - m \notin S\}$ şeklinde tanımlanan kümeye m nin Apery kümesi denir. m nin Apery kümesi $\text{mod } m$ ye göre farklı kongrüent sınıfların kümesidir. Eğer $m = m(S)$ olursa, $Ap(S, m)$ kümesine kısaca S nin Apery kümesi denir ve $Ap(S)$ ile gösterilir. $Ap(S) = \{s \in S : s - m(S) \notin S\}$ olarak tanımlanır. $i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ olmak üzere, $Ap(S)$ nin $\text{mod } m(S)$ ye göre i ye denk olan elemanları $\omega(i)$ ile gösterilir. Apery kümesinin elemanlarının; S nin $\text{mod } m(S)$ ye göre i ye denk en küçük elemanlarından oluştuğu tanımdan anlaşılmaktadır. $Ap(S)$ nin en büyük elemanı ω' ile gösterilir [15].

Sonuç 4.1 S bir sayısal yarıgrup ve m sayısal yarıgrupun sıfırdan farklı bir elemanı olmak üzere; Apery kümeleri için aşağıda belirtilen ifadeler sağlanır.

$$i) \#(Ap(S, m)) = m$$

$$ii) F(S) = \max(Ap(S, m)) - m. \text{ Özel olarak, } \omega' = F(S) + m(S) \text{ dir [16].}$$

İspat: $i)$ Apery kümesinin tanımı; $\text{mod } m$ ye göre farklı denk sınıflar olduğundan; Apery kümesinin eleman sayısının m olduğu sonucuna varılır.

$ii)$ S ye ait olmayan en büyük eleman $F(S)$ olduğundan, $(F(S) + m) \in S$ dir. Dolayısıyla;

$$((F(S) + m) - m) = F(S) \notin S \quad (4.1)$$

sağlanır. Yani; $(F(S) + m) \in Ap(S, m)$ dir. $x = \max(Ap(S, m))$ olsun.

$$(x - m) \notin S \Rightarrow x - m \leq F(S)$$

$$\Rightarrow x \leq F(S) + m$$

$$\Rightarrow x = F(S) + m \quad (4.2)$$

elde edilir.

Örnek 4.1

$S = \langle 6, 14, 17 \rangle = \{0, 6, 12, 14, 17, 18, 20, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 40, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için, S nin minimal üreteç kümesi: $\{6, 14, 17\}$, $m(S) = 6$, $F(S) = 39$, $n(S) = 20$, $G(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 19, 21, 22, 25, 27, 33, 39\}$, $H(S) = \emptyset$, $PF(S) = \{39\}$, $type(S) = 1$ olarak bulunur.

Şimdi $m \in S \setminus \{0\}$ elemanı seçelim. $m = 14$ olsun.

$Ap(S, 14) = \{0, 6, 12, 17, 18, 23, 24, 29, 30, 35, 36, 41, 47, 53\}$ olarak bulunur. Örneğin; $s \in Ap(S, 14)$ için $(s - 14) \notin S$ olmalıdır. $23 - 14 = 9 \notin S$ olduğundan $23 \in Ap(S, 14)$.

$0 \equiv \omega(0)(\text{mod } 14)$	$23 \equiv \omega(9)(\text{mod } 14)$	$36 \equiv \omega(8)(\text{mod } 14)$
$6 \equiv \omega(6)(\text{mod } 14)$	$24 \equiv \omega(10)(\text{mod } 14)$	$41 \equiv \omega(13)(\text{mod } 14)$
$12 \equiv \omega(12)(\text{mod } 14)$	$29 \equiv \omega(1)(\text{mod } 14)$	$47 \equiv \omega(5)(\text{mod } 14)$
$17 \equiv \omega(3)(\text{mod } 14)$	$30 \equiv \omega(2)(\text{mod } 14)$	$53 \equiv \omega(11)(\text{mod } 14)$
$18 \equiv \omega(4)(\text{mod } 14)$	$35 \equiv \omega(7)(\text{mod } 14)$	

$\#(Ap(S, 14)) = 14$, $F(S) = \max(Ap(S, 14)) - 14 = 39$, $\omega' = 53$ bulunur. Şimdi

$m \in S \setminus \{0\}$ elemanı olarak $m = m(S) = 6$ seçelim.

$$Ap(S, 6) = Ap(S) = \{0, 14, 17, 28, 31, 45\}$$

$0 \equiv \omega(0)(\text{mod } 6)$	$28 \equiv \omega(4)(\text{mod } 6)$
$14 \equiv \omega(2)(\text{mod } 6)$	$31 \equiv \omega(1)(\text{mod } 6)$
$17 \equiv \omega(5)(\text{mod } 6)$	$45 \equiv \omega(3)(\text{mod } 6)$

$$\#(Ap(S)) = 6 \quad F(S) = \max(Ap(S)) - 6 = 39 \quad \omega' = 45$$

$F(S) + m(S) = \omega' = 39 + 6 = 45$ elde edilir.

Teorem 4.1 S bir sayısal yarıgrup olsun. Her z tamsayısı, bazı $i, \ell \in \mathbb{Z}$ ile, $z = \omega(i) + \ell m(S)$ formunda tek türlü olarak yazılabilir. Ayrıca; $z \in S$ ise $\ell \geq 0$ olmalıdır [5], [14].

İspat: z negatif olmayan bir tamsayı olsun. O zaman; bir i tamsayısı için, $z \equiv i \pmod{m(S)}$. Bu durumda;

$$z = \omega(i) + \ell m(S) \quad (4.3)$$

(4.3) eşitliğini sağlayacak şekilde en az bir $\ell \in \mathbb{Z}$ bulunur. $\omega(i)$; S nin $\text{mod } m(S)$ ye göre i ye denk en küçük elemanı olduğundan, biliyoruz ki; $z \in S$ ise $z \geq \omega(i)$ olmalıdır ve ayrıca (4.3) de $z = \omega(i) + \ell m(S)$ ifadesi bazı $\ell \geq 0$ sayıları için sağlanır. $z < 0$ olduğu durumlarda

$$|z| = \omega(i) + \ell m(S) \quad (4.4)$$

ifadesi;

$$z = -\omega(i) - \ell m(S) = \omega(m(S) - i) - \ell m(S) = \omega(m(S) - i) + (-\ell)m(S) \quad (-\ell \in \mathbb{Z}) \quad (4.5)$$

şartı altında sağlanır.

Teorem 4.2 S bir sayısal yarıgrup olmak üzere,

$$\omega(i) + \omega(j) = \omega(i + j) + \ell m(S) \quad (4.6)$$

olacak şekilde (4.6) eşitliğini sağlayan $\ell \geq 0$ tamsayısı vardır [5], [14].

İspat: $\omega(i) \equiv i \pmod{m(S)}$ ve $\omega(j) \equiv j \pmod{m(S)}$ olduğundan,

$$\omega(i) + \omega(j) \equiv i + j \pmod{m(S)} \quad (4.7)$$

elde edilir. Ayrıca; $\omega(i) + \omega(j) \in S$ ve S toplamsal kapalı bir küme olduğundan, bir önceki teoremin sonucundan, $\omega(i) \geq i$ olduğundan;

$$\omega(i) + \omega(j) = \omega(i + j) + \ell m(S) \quad (4.8)$$

şartını sağlayan pozitif $\ell \in \mathbb{Z}$ sayısı bulunabilir.

Teorem 4.3 S bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer $z_1, z_2 \in S$ ve $z_1 + z_2 \in Ap(S)$ ise $z_1, z_2 \in Ap(S)$ dir [5], [14].

İspat: $z_1, z_2 \in S$ ve $z_1 + z_2 \in Ap(S)$ olsun. $z_1 \notin Ap(S)$ olduğunu varsayalım. Öyleyse; $z_1 - m(S) \in S$ olmalıdır. Bu durumda; $z_1 = s + m(S)$ olacak şekilde en az bir $s \in S$ vardır. S nin her elemanı (4.3) eşitliğinden dolayı; $s = \omega(i) + km(S)$ olarak $k \geq 0$ tamsayısına bağlı olarak tek türlü olarak yazılabilir. Böylece,

$z_1 = \omega(i) + \ell_1 m(S)$ ve $z_2 = \omega(j) + \ell_2 m(S)$ ($\ell_1 > 0, \ell_2 \geq 0$) eşitlikleri sağlanır. Buradan da,

$$z_1 + z_2 = \omega(i) + \omega(j) + (\ell_1 + \ell_2)m(S) \quad (4.9)$$

ve (4.6) eşitliğinden dolayı,

$$z_1 + z_2 = \omega(i + j) + km(S) + (\ell_1 + \ell_2)m(S) \quad (4.10)$$

olacak şekilde, (4.10) eşitliğini sağlayan $k \geq 0$ vardır. Böylece

$$z_1 + z_2 = \omega(i + j) + (k + \ell_1 + \ell_2)m(S) \quad (k + \ell_1 + \ell_2 > 0) \quad (4.11)$$

elde edilir. Bu durumda; $z_1 + z_2 - m(S) \in S$ ifadesinden $z_1 + z_2 \notin Ap(S)$ çelişkisi elde edilir.

Not edelim ki, bu teoremin tersi her zaman doğru değildir [14].

Örnek 4.2 $S = \langle 7, 12, 13 \rangle = \{0, 7, 12, 13, 14, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 31, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için, $Ap(S) = \{0, 12, 13, 24, 25, 36, 37\}$, $13, 25 \in Ap(S)$ ayrıca $13, 25 \in S$ olduğu açıktır. Fakat $13 + 25 = 38 \notin Ap(S)$

Sonuç 4.1 $A \subseteq S$ olsun. A kümesi; $z_1 + z_2 \in A$ iken $z_1 \in A$ ve $z_2 \in A$ şartını sağlayan bir küme olsun. $\#(A) = \#(Ap(S, n))$ olmak üzere, $A = Ap(S, n) \Leftrightarrow \exists n \in S, \forall a, b \in A$ için $n \nmid a - b$ dir.

İspat: $(\Rightarrow)$: $Ap(S, n)$ kümesi $\text{mod } n$ ye göre kalan sınıflarının en küçük elemanlarından oluştuğundan, $n \nmid a - b$ sağlanır.

$(\Leftarrow)$: $\forall a, b \in A$ için $n \nmid a - b$ olsun. $A \neq Ap(S, n)$ olduğunu kabul edelim. $a \in A$ için $a \equiv i \pmod{n}$ olsun. Fakat $a \neq \omega(i)$ olsun. $a \in S$ ve $a \equiv i \pmod{n}$ olduğundan $a > \omega(i)$ olmalıdır. Çünkü $\omega(i)$ S de i ye denk en küçük elemandır. Bu nedenle,

$$a = \omega(i) + kn \quad (4.12)$$

şeklinde (4.12) eşitliğini sağlayan bir $k > 0$ tamsayısı vardır. $a \in A$ yani $(\omega(i) + kn) \in A$, $\omega(i) \in S$, $n \in S \Rightarrow kn \in S$ ve A kümesinin tanımından dolayı $\omega(i) \in A$, $kn \in A$ elde edilir. Bu sebeple $\#(A) > n$ çelişkisi elde edilir. Yani, $a = \omega(i)$ olmalıdır. Böylece, $A = Ap(S, n)$ elde edilir.

Teorem 4.4 S bir sayısal yarıgrup olsun. $\omega(i) - \omega(j) = \omega(i - j) + \ell m(S)$ ($\exists \ell \leq 0$) [5], [14].

İspat: $\omega(i - j) + \omega(j)$ sayısını hesaplayalım. (4.6) dan dolayı;

$$\omega(i - j) + \omega(j) = \omega(i - j + j) + km(S) = \omega(i) + km(S) \quad (\exists k \geq 0 \text{ için}) \quad (4.13)$$

dir. Böylece (4.13) den,

$$\omega(i - j) = \omega(i) - \omega(j) + km(S) \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.14) eşitliği düzenlendiğinde;

$$\omega(i - j) - km(S) = \omega(i) - \omega(j) \quad (4.15)$$

elde edilir. (4.15) eşitliğinde $\ell = -k$ için;

$$\omega(i - j) + \ell m(S) = \omega(i) - \omega(j) \quad (4.16)$$

sonucu elde edilir.

4.2 Sayısal Yarıgruplarda Sıralama Bağıntısı

Tanım 4.2 S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, S sayısal yarıgrubu üzerindeki $\leq_s$ bağıntısını, $x, y \in S$ için, $x \leq_s y \Leftrightarrow y - x \in S$ olarak tanımlayalım. Bu bağıntı bir kısmi

sıralama bağıntısıdır. Ayrıca; $S \setminus \{0\}$ kümesinin $\leq_s$ kısmi sıralama bağıntısına göre minimal elemanları; S nin minimal üreteç kümesinin elemanlarıdır [5].

Örnek 4.3 $S = \langle 3, 7, 11 \rangle = \{0, 3, 6, 7, 9, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için $\leq_s$ bağıntısını inceleyerek minimal elemanları tespit edelim.

$$3 \leq_s 6, 3 \not\leq_s 7, 3 \leq_s 9, 3 \leq_s 10, 3 \not\leq_s 11, 3 \leq_s 12, \dots$$

$$7 \not\leq_s 9, 7 \leq_s 10, 7 \not\leq_s 11, 7 \not\leq_s 12, 7 \leq_s 13, 7 \leq_s 14, 7 \not\leq_s 15, 7 \leq_s 16, \dots$$

$$11 \not\leq_s 12, 11 \not\leq_s 13, 11 \leq_s 14, 11 \not\leq_s 15, 11 \not\leq_s 16, 11 \leq_s 17, 11 \leq_s 18, 11 \not\leq_s 19, 11 \leq_s 20, \dots$$

Bu karşılaştırmaların sonuçları bir araya getirildiğinde aşağıdaki gibi bir sıralama elde edilir.

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ 12 & 16 & 20 \\ \uparrow \nearrow & \uparrow \nearrow & \uparrow \\ 9 & 13 & 17 \\ \uparrow \nearrow & \uparrow \nearrow & \uparrow \\ 6 & 10 & 14 \\ \uparrow \nearrow & \uparrow \nearrow & \uparrow \\ 3 & 7 & 11 \end{array}$$

Dolayısıyla sayısal yarıgruplar için tanımlı $\leq_s$ bağıntısına göre $S = \langle 3, 7, 11 \rangle = \{0, 3, 6, 7, 9, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunun minimaller kümesi $\{3, 7, 11\}$ dir. Bu küme aynı zamanda S sayısal yarıgrubunun minimal üreteç kümesidir.

Not 4.1 $Ap(S, n)$ kümesinin $\leq_s$ sıralama bağıntısına göre maksimal elemanlar kümesi $\max_{\leq_s}(Ap(S, n))$ ile gösterilecektir.

Önerme 4.1 S bir sayısal yarıgrup ve $0 \neq n \in S$ olsun. Bu durumda $PF(S) = \{w - n \in \mathbb{Z} : w \in \max_{\leq_s} Ap(S, n)\}$ dir [6].

İspat: $x \in PF(S)$ olsun. Bu durumda; $x \notin S$ ve $x + n \in S$, yani $x + n \in Ap(S, n)$ dir. $w \in Ap(S, n)$, $x + n \leq_s w$ şartını sağlayan bir eleman olsun. Öyleyse;

$$w - (x + n) = w - n - x \in S \quad (4.17)$$

şartı sağlanır. (4.17) den;

$$w - n = x + s \quad (4.18)$$

şartını sağlayan en az bir $s \in S$ vardır. $w \in Ap(S, n) \Rightarrow w - n \notin S$ ve $x \in PF(S)$ olduğundan, bu durum ancak $s = 0$ olması ile sağlanır. Böylece, $w = x + n$ nin maksimal olduğu sonucuna varılır. Şimdi de, w elemanı $Ap(S, n)$ kümesinin $\leq_s$ bağıntısına göre maksimal elemanlarından olsun. Öyleyse; $w - n \notin S$. Eğer, $w - n + s \notin S (\exists s \in S, s \neq 0)$ için sağlanıyorsa, $w + s \in Ap(S, n)$ olur ki; bu durum w nin maksimal olmasıyla çelişir. Bu durumda $s = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla; $w - n + s = w - n + 0 = w - n$ sonucu elde edilir. Yani; $(w - n + s) \in S$ olur. Bu sebeple; $(w - n) \in PF(S)$ elde edilir.

Sonuç 4.2 S sayısal yarıgrubun tipi, $Ap(S, n)$ nin maksimallerinin kardinalitesidir. Yani; $type(S) = \#(\max_{\leq_s} (Ap(S, n)))$ dir [6].

Örnek 4.4

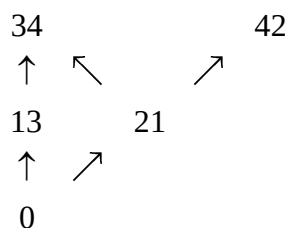
$S = \langle 5, 13, 21 \rangle = \{0, 5, 10, 13, 15, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 38, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için $F(S) = 37$ ve $PF(S) = \{29, 37\}$ olduğu açıktır. Önermeyi, her iki taraflı da sağlatacak olursak; $n = 5$ için $Ap(S, 5) = \{0, 13, 21, 34, 42\}$ olarak bulunur. $g = 29$ Pseudo-Frobenius sayısıdır. Öyleyse $g + n = 29 + 5 = 34$ sayısı $Ap(S, 5)$ de $\leq_s$ bağıntısına göre maksimal olduğunu gösterelim.

$$0 \leq_s 13, 0 \leq_s 21, 0 \leq_s 34, 0 \leq_s 42$$

$$13 \not\leq_s 21, 13 \leq_s 34, 13 \not\leq_s 42$$

$$21 \leq_s 34, 21 \leq_s 42, 34 \not\leq_s 42, 42 \leq_s 42$$

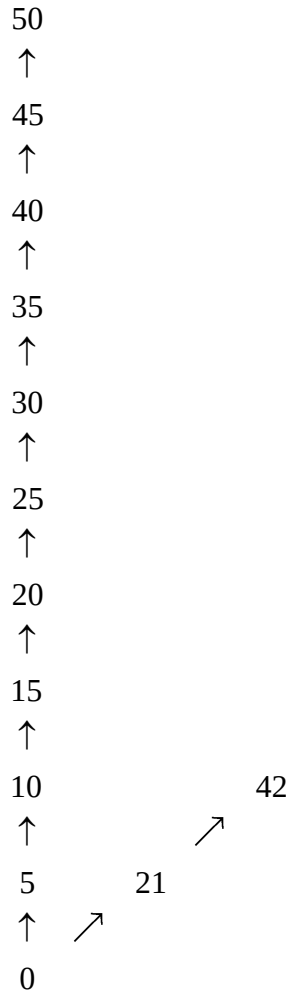
Bu karşılaştırmaların sonuçları ile aşağıdaki sıralama elde edilir.



Dolayısıyla 34 ve 42 nin $\leq_s$ bağıntısına göre Apery kümesinde maksimal olduğu görülür. Maksimallerin kardinalitesi S sayısal yarıgrubunun tipini belirttiğinden, buradan da maksimal elemanlar iki tane olduğundan $type(S)=2$ dir. İfade tersine incelenecek olursa; $Ap(S,5)$ kümesinde 34 ve 42 maksimal elemanlardır. Dolayısıyla; $34-5=29$ ve $42-5=37$ elemanları $G(S)$ ye aittir ve $x \notin S$ için $\forall s \in S \setminus \{0\}$ ile toplamı yani $(x+s) \in S$ oluyorsa, $x \in PF(S)$ olacaktır. Bu sebeple 29 ve 37 Pseudo-Frobenius sayılarıdır.

$n=13$ için, $Ap(S,13)=\{0,5,10,15,20,21,25,30,35,40,42,45,50\}$ olarak bulunur. $g=29$ Pseudo-Frobenius sayısıdır. Öyleyse, $g+n=29+13=42$ sayısının $Ap(S,13)$ kümesinde $\leq_s$ bağıntısına göre maksimal olduğunu gösterelim.

$0 \leq_s 5, 5 \leq_s 10, 10 \leq_s 15, 15 \leq_s 20, 20 \leq_s 25, 25 \leq_s 30, 30 \leq_s 35, 35 \leq_s 40, 40 \leq_s 45,$
 $45 \leq_s 50, 0 \leq_s 21, 21 \leq_s 42$ Bu sıralama sonuçlarından aşağıdaki ifade elde edilir.



50 ve 42 sayılarının $\leq_s$ bağıntısına göre Apery kümesinde maksimal olduğu görülür. Ayrıca; $50-13=37$ ve $42-13=29$ sayılarını Pseudo-Frobenius sayıları olduğu da belirlenmiştir. Maksimallerin sayısı da sayısal yarıgrubun tipini verdiği için, $type(S) = 2$ dir.

SAYISAL YARIGRUP ÇEŞİTLERİ

5.1 Simetrik Sayısal Yarıgruplar

Tanım 5.1 Tüm $z \in \mathbb{Z}$ için; $(z \in S \Leftrightarrow F(S) - z \notin S)$ ve $(z \notin S \Leftrightarrow F(S) - z \in S)$ şartını sağlayan S sayısal yarı gruplara simetrik sayısal yarıgruplar denir [14], [17].

Örnek 5.1 $S = \langle 3, 11, 17 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20, \rightarrow\}$ sayısal yarı grubu için; $G(S) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 16, 19\}$ olarak bulunur. $\forall z \in G(S)$ ($z \notin S$) için $F(S) - z \in S$ şartı sağlanır. $G(S)$ kümesi dışında S ye ait olmayan elemanlar negatif tamsayılara ait elemanlar olduğundan $F(S) - z \in S$ şartı sağlanır. Bu nedenle, S sayısal yarı grubu bir simetrik sayısal yarıgruptur.

Önerme 5.1 S sayısal yarı grubu simetriktir ancak ve ancak $H(S) = \emptyset$ [14].

İspat: $(\Rightarrow)$: S simetrik ise $z \notin S \Leftrightarrow F(S) - z \in S$ veya $z \in S \Leftrightarrow F(S) - z \notin S$ şartlarından herhangi biri sağlanır. $H(S) = \{z \in \mathbb{Z} : z \notin S, F(S) - z \notin S\} \neq \emptyset$ olsun. Öyleyse; $z \notin S$ için $F(S) - z \notin S$ şartı sağlanır. Bu durum S nin simetrik sayısal yarıgrup olmasıyla çelişir. Yani $H(S) = \emptyset$ dir.

$(\Leftarrow)$: $H(S) = \emptyset$ olduğundan $\forall z \in \mathbb{Z} \setminus S \Leftrightarrow F(S) - z \in S$ $z \notin S$ sayıları için simetriklik şartı sağlanır. $z \in S$ olduğunda ise $F(S) - z \in S$ olsun. Öyleyse;

$$\underbrace{(F(S) - z)}_{\in S} + \underbrace{z}_{\in S} = \underbrace{F(S)}_{\notin S} \quad (5.1)$$

olur ki; (5.1) ifadesi çelişkidir. S simetrik sayısal yarıgruptur.

Sonuç 5.1 S bir sayısal yarıgrup olsun. S simetriktir ancak ve ancak $PF(S) = \{F(S)\}$ yani $type(S) = \#(PF(S)) = 1$ dir [8], [14], [18].

İspat: Önerme 3.1 1) den dolayı $F(S) \in PF(S)$ olduğunu biliyoruz. $PF(S)$ nin $F(S)$ elemanından başka elemanı olmadığını göstermemiz gerekir. Başka bir eleman daha varsa, o da $PF(S)$ kümesinin ikinci en büyük elemanıdır. Önerme 3.1 2) den dolayı $PF(S)$ kümesinin ikinci en büyük elemanı $H(S)$ kümesinin en büyük elemanı olacağından $H(S) \neq \emptyset$ olur ki; bu da S sayısal yarıgrubunun simetrik olmasıyla çelişir. Tersine; $PF(S) = \{F(S)\}$ ise $PF(S)$ kümesinin ikinci en büyük elemanı $H(S)$ kümesinin en büyük elemanı olacağından $H(S) = \emptyset$ olur ve buradan da S sayısal yarıgrubunun simetrik olduğu sonucuna varılır.

Önerme 5.2 S bir sayısal yarıgrup olsun. Bu durumda;

$$n(S) \leq \frac{F(S)+1}{2} \quad (5.2)$$

dir [14].

İspat: 1. Durum: $F(S)$, tek sayı olsun. $\{0, 1, \dots, F(S)\}$ kümesinin bir ayrışımı olarak;

$\{0, F(S)\}, \{1, F(S)-1\}, \dots, \{\frac{F(S)-1}{2}, \frac{F(S)+1}{2}\}$ kümelerini alalım. Ayrışım $\frac{F(S)+1}{2}$ adet

alt kümenin birleşimidir. Eğer $n(S) > \frac{F(S)+1}{2}$ ise, güvercin yuvası ilkesine göre;

kümelerden en az bir tanesi S ile ortak iki elemana sahiptir. Yani; $s_1, s_2 \in S$ ise S toplamsal kapalı olduğundan $s_1 + s_2 \in S$ olur ki; ayrışımındaki her kümenin elemanları toplamı $F(S)$ elemanını verdiği için buradan da $F(S) \in S$ çelişkisi elde edilir.

2. Durum: $F(S)$, çift sayı olsun. $\{0, 1, \dots, F(S)\}$ kümesinin bir ayrışımı olarak;

$\{0, F(S)\}, \{1, F(S)-1\}, \dots, \{\frac{F(S)-2}{2}, \frac{F(S)+2}{2}\}, \{\frac{F(S)}{2}\}$ kümelerini ele alalım. Ayrışım;

$\frac{F(S)+2}{2}$ adet kümenin birleşimidir. Eğer $n(S) > \frac{F(S)+1}{2}$ ise, ayrışımın her alt kümesi

S ile ortak bir elemana sahip olur. $s' = \frac{F(S)}{2}$ için $\frac{F(S)}{2} + \frac{F(S)}{2} = F(S) \in S$ çelişkisi elde edilir. Kümelerden biri S ile ortak iki elemana sahip olsaydı, ve bu elemanlar $s_1, s_2 \in S$ olarak alındığında S toplamsal kapalı olduğundan $s_1 + s_2 \in S$ elde edilir ve böylece $F(S) \in S$ çelişkisi elde edilir.

Önerme 5.3

S sayısal yarı grubu simetriktir ancak ve ancak $F(S)$, tek sayı ve

$$n(S) = \frac{F(S)+1}{2} \quad (5.3)$$

dir [14].

İspat: ($\Rightarrow$): S sayısal yarı grubu simetrik olsun. $F(S)$ nin çift sayı olduğunu kabul edelim. Eğer; $\frac{F(S)}{2} \in S$ ise S sayısal yarı grubu simetrik olduğundan,

$$F(S) - \frac{F(S)}{2} = \frac{F(S)}{2} \notin S \quad (5.4)$$

çelişkisi elde edilir. Aksi durumda $\frac{F(S)}{2} \notin S$ olduğunda ise S simetrik sayısal yarı grup olduğundan,

$$F(S) - \frac{F(S)}{2} = \frac{F(S)}{2} \in S \quad (5.5)$$

çelişkisi elde edilir. Eğer $n(S) < \frac{F(S)+1}{2}$ ise Önerme 5.2 den dolayı, $\{0,1,...,F(S)\}$ kümesinin ayrışımındaki alt kümelerden birinin S ile ortak hiçbir elemanı yoktur, bu durumda, ayrışımındaki kümelerdeki elemanların toplamı $F(S)$ yi verdiği için ve S simetrik sayısal yarı grup olduğundan toplananlardan birinin S nin elemanı olması gerekirdi. Bu da çelişkidir.

$(\Leftarrow): F(S)$, tek sayı ve $n(S) = \frac{F(S)+1}{2}$ olsun. Öyleyse; $\{0,1,...,F(S)\}$ kümesinin ayrışımını düşündüğümüzde, hepsinin S ile ortak bir elemanı vardır. Yani;

$$z \in S \Leftrightarrow F(S) - z \notin S \quad (5.6)$$

Eğer $z < 0$ ise tanımdan, $z \notin S$ ve $F(S) - z \in S$ olur.

$$z > F(S) \Rightarrow z \in S \quad (5.7)$$

ve $F(S) - z < 0$ olduğundan $F(S) - z \notin S$ şartı sağlanır. Böylece sayısal yarıgrubun simetrik olduğu sonucuna varılır.

Örnek 5.2 $S = \langle 5, 6, 7 \rangle = \{0, 5, 6, 7, 10, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için; $F(S) = 9$, $n(S) = 4$, ve $m(S) = 5$. Fakat, $8 \notin S$ için, $F(S) - 8 = 9 - 8 = 1 \notin S$ olduğundan S simetrik sayısal yarıgrup değildir. Kutup noktaları kümesini oluşturarak S sayısal yarıgrubunun simetriklik durumunu incelersek; $H(S) = \{1, 8\}$ elemanlarından oluşur. $H(S) \neq \emptyset$ olduğundan simetrik değildir.

Örnek 5.3 $S = \langle 6, 8, 11 \rangle = \{0, 6, 8, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 22, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için; $F(S) = 21$, $n(S) = 11$ ve $m(S) = 6$. Ayrıca; $\forall z \notin S$ için, $F(S) - z \in S$ şartı sağlanır.

$$\mathbb{Z} \setminus S = \{\dots, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 13, 15, 21\}$$

$$21 - 21 = 0 \in S, 21 - 15 = 6 \in S, 21 - 13 = 8 \in S, 21 - 10 = 11 \in S, 21 - 9 = 12 \in S$$

$$21 - 7 = 14 \in S, 21 - 5 = 16 \in S, 21 - 4 = 17 \in S, 21 - 3 = 18 \in S, 21 - 2 = 19 \in S$$

$$21 - 1 = 20 \in S, 21 - (-1) = 22, \dots \text{ ve bundan sonraki tüm sayılar } S \text{ de olduğundan tüm}$$

$\mathbb{Z} \setminus S$ kümesi şartı gerçekler. Dolayısıyla; S sayısal yarıgrubu simetriktir.

Ayrıca; $H(S) = \emptyset$ olduğundan S sayısal yarıgrubu simetrik sayısal yarıgruptur.

Sonuç 5.2 p, q birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere; $S = \langle p, q \rangle$ sayısal yarıgrubu için, boşluklar kümesi; $G(S) = \{F(S) - x \mid x \in S\}$ şeklindedir.

İspat: $e(S) = 2$ ise S sayısal yarıgrubu simetrik sayısal yarıgruptur. Ayrıca, Teorem 3.2

den ve $g \langle p, q \rangle = \frac{F(\langle p, q \rangle) + 1}{2} \Leftrightarrow S = \langle p, q \rangle$ simetrik sayısal yarıgrup olduğu [20]

ve [21] de belirtilmektedir. Dolayısıyla, $S = \langle p, q \rangle$ sayısal yarıgrupunun simetrik olduğu sonucuna varılır. Bu sebeple;

$$x \in G(S) \Rightarrow (F(S) - x) \in S \quad (5.8)$$

şartı sağlanır. S simetrik sayısal yarıgrup olduğundan $n(S) = \frac{F(S)+1}{2}$ ve $F(S)$; tek sayıdır. $N(S) = (\{0, 1, \dots, F(S)\} \cap S)$ olduğundan, Frobenius sayısına kadar olan sayıların yarısı S ye, diğer yarısı da $G(S)$ ye aittir. Bu durumda; boşluklar kümesi, toplamları $F(S)$ yi veren iki elemandan, S ye ait olmayanları ile oluşturulur. Yani; $G(S) = \{F(S) - x \mid x \in S\}$ şeklinde oluşturulur.

$$\#(G(S)) = g(S) = n(S) = \frac{F(S)+1}{2} \quad (5.9)$$

$$g(S) = \frac{(p-1)(q-1)}{2} \quad (5.10)$$

(5.9) ve (5.10) eşitlikleri elde edilir.

Teorem 5.1 Eğer, $S = \langle n_0, n_1 \rangle$ simetrik sayısal yarıgrup ise; S nin $Ap(S, n_0)$ ve $Ap(S, n_1)$ Apery kümeleri; $Ap(S, n_0) = \{(n_0 - r)n_1 : r \in \{1, 2, \dots, n_0\}\}$, $Ap(S, n_1) = \{(n_1 - r)n_0 : r \in \{1, 2, \dots, n_1\}\}$ şeklindedir [19].

İspat:

$$x \in Ap(S, n_0) \Rightarrow x - n_0 \notin S, x \in S \quad (5.11)$$

$x \neq n_0$ olmalıdır. (5.11) eşitliğinde $x = n_0$ olursa; $x - n_0 = 0 \notin S$ çelişkisi elde edilir. $x = kn_1, (k = 0, 1, \dots, n_0 - 1)$ olduğunu göstermeliyiz. İlk olarak, $n_1 \in Ap(S, n_0)$ olduğunu gösterelim. $n_1 \notin Ap(S, n_0)$ olduğunu kabul edelim. $Ap(S, n_0)$ kümesinin tanımından, $(n_1 - n_0) \in S$ olur. Öyleyse; $p, q \in \mathbb{N}$ için,

$$n_1 - n_0 = qn_0 + pn_1 \quad (5.12)$$

$$n_1(1-p) = n_0(q+1) \in \mathbb{N} \quad (5.13)$$

olur. Bu durumda; (5.13) eşitliği $p=1$ ve $p=0$ değerleri için sağlanır. Aksi halde $n_1(1-p) \notin \mathbb{N}$ olur. $p=0$ olsun.

$$n_1 = n_0(q+1) \Rightarrow n_0 \mid n_1 \quad (5.14)$$

olur ki; (5.14) ifadesi; $\{n_0, n_1\}$ kümesinin minimal üreteç küme olmasıyla çelişir. $p=1$ olsun.

$$-n_0 = n_0q \in \mathbb{N} \quad (5.15)$$

çelişkisi elde edilir. Böylece; $k=1$ için, $n_1 \in Ap(S, n_0)$ bulunur. $0 \leq k \leq n_0 - 1$ için $kn_1 \in Ap(S, n_0)$ olduğunu göstermeliyiz. $x \neq kn_1$ olsun. $Ap(S, n_0) \subset S$ olduğundan,

$$x = an_0 + bn_1 \quad (a \in \{1, 2, \dots\}, b \in \{0, 1, 2, \dots\}) \quad (5.16)$$

şeklindedir. $x = an_0$ olsun. $Ap(S, n_0); \text{mod } n_0$ a göre kalan sınıflarından oluşacağından $Ap(S, n_0)$ kümesi için sadece,

$$x = an_0 \equiv 0(\text{mod } n_0) \quad (5.17)$$

(5.17) sonucu elde edilir. Oysa ki; $\#(Ap(S, n_0)) = n_0$ olmalıdır. Dolayısıyla; (5.16) eşitliğinde $a \geq 1$ olmalıdır. Aksi halde (5.16) ifadesinde $a=0$ için $x = bn_1$ olur ki, baştaki kabulümüzle çelişir. $x \in Ap(S, n_0)$ ve $x - n_0 \notin S$ olmalıdır. Yani;

$$(an_0 + bn_1 - n_0) \notin S \Rightarrow (a-1)n_0 + bn_1 \notin S \quad (5.18)$$

olur. $a \geq 1$ olduğundan $a-1 \geq 0$ olacağından, (5.18) eşitliğinden,

$$x - n_0 = \underbrace{(a-1)n_0}_{\in S} + \underbrace{bn_1}_{\in S} \quad (5.19)$$

çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak; $x = kn_1$ şeklinde olmalıdır. Şimdi $0 \leq k \leq n_0 - 1$ olduğunu gösterelim. S iki üreteçli sayısal yarıgrup olduğundan;

$$F(S) = n_0 n_1 - n_0 - n_1 \quad (5.20)$$

ve S simetrik sayısal yarıgrup olduğundan tanım gereği;

$$z \in \mathbb{Z} \setminus S \Rightarrow F(S) - z \in S \quad (5.21)$$

$$z \in S \Rightarrow F(S) - z \notin S \quad (5.22)$$

olmalıdır. $x = kn_1 \in Ap(S, n_0)$,

$$x - n_0 = kn_1 - n_0, \quad x - n_0 \notin S \Rightarrow F(S) - (x - n_0) \in S \quad (5.23)$$

olmalıdır. (5.20) eşitliğini, (5.23) de yerine yazarsak;

$$\Rightarrow n_0 n_1 - n_0 - n_1 - (kn_1 - n_0) \in S$$

$$\Rightarrow n_0 n_1 - \cancel{n_0} - n_1 - kn_1 + \cancel{n_0} \in S$$

$$\Rightarrow \underbrace{(n_0 - 1 - k)}_{\in \mathbb{N}} n_1 \in S$$

$$n_0 - 1 - k \geq 0 \Rightarrow k \leq n_0 - 1 \quad (5.24)$$

elde edilir. Diğer yandan; $r = 1, 2, \dots, n_0$ için, $(\#Ap(S, n_0)) = n_0$ olduğundan,

$$Ap(S, n_0) = \{(n_0 - 1)n_1, (n_0 - 2)n_1, \dots, (n_0 - n_0)n_1\} = \{(n_0 - r)n_1 : r \in \{1, 2, \dots, n_0\}\} \text{ elde edilir.}$$

Aynı ispat $Ap(S, n_1)$ kümesi için de tekrarlanabilir.

Teorem 5.2 $S_1 = \langle n_0, n_1 \rangle$ ve $S_2 = \langle kn_0, n_1 \rangle$ ($k > 1$ ve $k \in \mathbb{N}$) olacak şekilde iki simetrik sayısal yarıgrup ise $S_2 \subset S_1$ ve $Ap(S_1, n_0) \subset Ap(S_2, kn_0)$ dir [19].

İspat: $n_0, n_1 \in S_1$ olduğundan $kn_0, n_1 \in S_1$ ve böylece $S_2 \subset S_1$ dir. Eğer;

$$x \in Ap(S_1, n_0) \Rightarrow (x - n_0) \notin S_1, x \in S_1 \quad (5.25)$$

ve $S_2 \subset S_1$ olduğundan $(x - n_0) \notin S_2$. Ayrıca; $(x - kn_0) \notin S_1$ ve dolayısıyla $(x - kn_0) \notin S_2$ olur. Neden?

$$x - kn_0 = (x - n_0) - (k-1)n_0 \quad (5.26)$$

şeklinde ifade edelim. $(x - kn_0) \in S_1$ olduğunu varsayalım.

$$(x - n_0) - (k-1)n_0 = s \quad (\exists s \in S_1) \quad (5.27)$$

$$(x - n_0) = \underbrace{s}_{\in S_1} + \underbrace{(k-1)n_0}_{\in S_1} \quad (5.28)$$

Yani; $(x - n_0) \in S_1$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla; $(x - kn_0) \notin S_1$ ve buradan da $(x - kn_0) \notin S_2$ elde edilir.

$$x \in Ap(S_1, n_0) \xRightarrow{\text{Teorem 5.1 den}} x = (n_0 - r)n_1 \quad (r = 1, 2, \dots, n_0) \quad (5.29)$$

Ve n_1 ; S_2 nin üretici olduğundan ve x ; n_1 in katı olduğundan $x \in S_2$ elde edilir.

Örnek 5.4 $S_1 = \langle 2, 5 \rangle = \{0, 2, 4, \rightarrow\}$ ve $S_2 = \langle 4, 5 \rangle = \{0, 4, 5, 8, 9, 10, 12, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrupları için;

$$Ap(S_1, 2) = \{5(2-r) : r \in \{1, 2\}\} = \{0, 5\}$$

$$Ap(S_1, 5) = \{2(5-r) : r \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

$$Ap(S_2, 4) = \{5(4-r) : r \in \{1, 2, 3, 4\}\} = \{0, 5, 10, 15\}$$

$$Ap(S_2, 5) = \{4(5-r) : r \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\} = \{0, 4, 8, 12, 16\}$$

$S_2 \subset S_1$ ve $Ap(S_1, 2) \subset Ap(S_2, 4)$ olduğu görülür.

Sonuç 5.3 $S_1 = \langle n_0, n_1 \rangle$ ve $S_2 = \langle kn_0, n_1 \rangle$ şeklinde iki simetrik sayısal yarıgrup ise,

$$Ap(S_1, n_1) = \frac{Ap(S_2, n_1)}{k} \text{ dır.}$$

İspat: Teorem 5.1 den dolayı $Ap(S_1, n_1) = \{(n_1 - r)n_0 : r \in \{1, \dots, n_1\}\}$ ve $Ap(S_2, n_1) = \{(n_1 - r)kn_0 : r \in \{1, \dots, n_1\}\}$ şeklinde tanımlı olduğunu biliyoruz. Yani, $\forall a \in Ap(S_2, n_1)$ için $a = kb$ şartını sağlayan $b \in Ap(S_1, n_1)$ olduğu açıktır.

Teorem 5.3

Eğer $S = \langle n_0, n_1 \rangle$ ile üretilen simetrik sayısal yarı grup olmak üzere; Frobenius sayısı, $F(S)$ ve $n(S) = \#(\{0, 1, 2, \dots, F(S)\} \cap S)$ için;

$$n(S) = \frac{[\#(Ap(S, n_0)) - 1][\#(Ap(S, n_1)) - 1]}{2} \quad (5.30)$$

dir [19].

İspat: S simetrik olduğundan $n(S) = \frac{F(S)+1}{2}$ olur. Ayrıca;

$$F(S) = \max(Ap(S, n_0)) - n_0 = (n_0 - 1)n_1 - n_0 = n_0n_1 - n_0 - n_1 \quad (5.31)$$

(5.31) eşitliğini $n(S)$ ifadesinde yazarsak;

$$n(S) = \frac{F(S)+1}{2} = \frac{\overbrace{(n_0n_1 - n_0 - n_1)}^{F(S)} + 1}{2} \quad (5.32)$$

$$n(S) = \frac{(n_0 - 1)(n_1 - 1)}{2} \quad (5.33)$$

(5.33) eşitliğinden;

$$n(S) = \frac{[\#(Ap(S, n_0)) - 1][\#(Ap(S, n_1)) - 1]}{2} \quad (5.34)$$

elde edilir.

Örnek 5.5 $S_1 = \langle 2, 5 \rangle$ ve $S_2 = \langle 4, 5 \rangle$ olmak üzere; (5.32) den dolayı;

$$n(S_1) = \frac{(2-1)(5-1)}{2} = 2$$

$$n(S_2) = \frac{(4-1)(5-1)}{2} = 6$$

olarak bulunur. Diğer taraftan;

$$n(S_1) = \#(\{0, 1, 2, 3\} \cap \{0, 2, 4, 5, \dots\}) = 2$$

$$n(S_2) = \#(\{0,1,2,\dots,11\} \cap \{0,4,5,8,9,10,12,\dots\}) = 6$$

olduğundan ifade sağlanır.

5.2 Pseudo-Simetrik Sayısal Yarıgruplar

Tanım 5.2 S sayısal yarıgrup ve $F(S)$ Frobenius sayısı olsun. $F(S)$, çift sayı olmak üzere, $\forall x \notin S$ için $F(S) - x \in S$ şartını sağlayan sayısal yarıgruplara Pseudo-Simetrik sayısal yarıgruplar denir [10].

Not edelim ki; simetrik ve pseudo-simetrik sayısal yarıgruplar arasında bir geçiş yoktur. Çünkü, simetrik sayısal yarıgrupları Frobenius sayısı tek sayıdır. Fakat pseudo-simetrik sayısal yarıgrupların Frobenius sayısı çift sayıdır.

Önerme 5.4 S , Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup ise $type(S) = 2$ dir [6].

İspat: S , Pseudo-Simetrik bir sayısal yarıgrup olsun. $\#(PF(S)) = 2$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Her S sayısal yarıgrubu için $F(S) \in PF(S)$ dir. $x = \frac{F(S)}{2}$ için

$x \in PF(S)$ olduğunu gösterelim. $x = \frac{F(S)}{2}$ için $\forall s \in S \setminus \{0\}$ için $(x+s) \in S$ olduğunu

gösterirsek $\frac{F(S)}{2} \in PF(S)$ olur. Kabul edelim ki; $(\frac{F(S)}{2} + s) \notin S$ olsun. S Pseudo-

Simetrik sayısal yarıgrup olduğundan,

$$F(S) - (\frac{F(S)}{2} + s) \in S$$

$$(\frac{F(S)}{2} - s) \in S$$

$$\frac{F(S)}{2} - s = s' \Rightarrow \frac{F(S)}{2} = s + s' \quad (\exists s' \in S) \quad (5.35)$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla, $(\frac{F(S)}{2} + s) \in S$ olması gerektiği sonucuna varılır.

$type(S) = \#(PF(S)) = 2$ olduğunu göstermek için $PF(S)$ kümesinde $F(S)$ ve $\frac{F(S)}{2}$ elemanlarından başka bir eleman olmadığını göstermemiz gerekir. Kabul edelim ki; $x \neq F(S)$ ve $x \neq \frac{F(S)}{2}$ için $x \in PF(S)$ olsun. S , Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup olduğundan, $(F(S) - x) \in S$ olmalıdır. $x \in PF(S)$ olduğundan x elemanının S nin sıfırdan farklı her elemanı ile toplamı sayısal yarı grubun elemanı olmalıdır. S nin sıfırdan farklı elemanı olarak, $(F(S) - x)$ elemanını alalım. Tanım gereği;

$$\underbrace{x + \underbrace{(F(S) - x)}_{\in S}}_{\in S} = \underbrace{F(S)}_{\notin S} \quad (5.36)$$

çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak $PF(S)$ kümesinin $F(S)$ ve $\frac{F(S)}{2}$ elemanlarından başka bir elemanı olmadığı sonucuna varılır. Yani; $type(S) = 2$ dir.

Örnek 5.6 $S = \langle 5, 8, 19 \rangle = \{0, 5, 8, 10, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 23, \rightarrow\}$ sayısal yarı grubu için;

$$G(S) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 17, 22\} \quad F(S) \ni \quad \text{ve} \quad \frac{F(S)}{2} = 11 \notin S \quad \text{şartları}$$

sağlanmaktadır. Bu sayısal yarı grubun Pseudo-Simetrik sayısal yarı grup olabilmesi için $\forall x \notin S$ tamsayısı için $F(S) - x \in S$ şartını sağladığını gösterelim.

$$22 - 22 = 0 \in S, 22 - 17 = 5 \in S, 22 - 14 = 8 \in S, 22 - 12 = 10 \in S, 22 - 9 = 13 \in S$$

$$22 - 7 = 15, 22 - 6 = 16, 22 - 4 = 18, 22 - 3 = 19, 22 - 2 = 20, 22 - 1 = 21 \in S$$

Dolayısıyla; $x \neq \frac{F(S)}{2} = 11$ dışındaki tüm sayılar için $F(S) - x \in S$ şartı sağlandığından

bu sayısal yarı grup aynı zamanda bir Pseudo-Simetrik sayısal yarı gruptur. Ayrıca, $PF(S) = \{11, 22\}$ olduğundan bu sayısal yarı grup için $type(S) = 2$ dir.

Not 5.1 Tipi 2 olan sayısal yarı gruplar Pseudo-Simetrik sayısal yarı grup olmayabilir.

Örnek 5.7

$$S = \langle 5, 13, 21 \rangle = \{0, 5, 10, 13, 15, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 38, \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrubu $PF(S) = \{29, 37\}$ olduğundan tipi 2 olan bir sayısal yarıgruptur. Ancak, $F(S) = 37$ olduğundan, S sayısal yarıgrubu Pseudo-Simetrik bir sayısal yarıgrup değildir.

Örnek 5.8 $S = \langle 7, 9, 11, \rangle = \{0, 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 25, 27, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için; $PF(S) = \{24, 26\}$ ve $type(S) = 2$ olmasına rağmen, S , Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup değildir. Çünkü; $2 \notin S$ olmasına rağmen, $F(S) - 2 = 26 - 2 = 24 \in S$ olması gerekirdi. Fakat $24 \notin S$. Dolayısıyla; $type(S) = 2$ olan her sayısal yarıgrup Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup olmayabilir.

Sonuç 5.4 S sayısal yarıgrubunun Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup olması için gerek ve yeter şart $\#(H(S)) = 1$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: S Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup olduğundan, $F(S)$, çift sayı ve $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için, $F(S) - x \notin S$ şartı sadece $x = \frac{F(S)}{2}$ için sağlanır.

$H(S) = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \notin S, F(S) - z \notin S\}$ olarak tanımlanmıştı. $x = \frac{F(S)}{2}$, kutup noktaları

kümesinin şartını sağladığından; $x = \frac{F(S)}{2} \in H(S)$ olur. Kutup noktaları kümesinin

$x = \frac{F(S)}{2}$ elemanından başka bir elemanı daha olduğunu kabul edelim.

$\frac{F(S)}{2} \neq z \in H(S)$ olsun. $z \notin S, F(S) - z \notin S$ olacaktır. Bu durum S sayısal yarıgrubunun Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup olmasıyla çelişir.

$(\Leftarrow)$: $\#(H(S)) = 1$ olsun. Kabul edelim ki; S Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup olmasın. $x \in H(S) \subset G(S) \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \setminus S$ ve $F(S) - x \notin S$ şartı sağlanır. $a = F(S) - x$ sayısını düşünelim. $a \notin S$ ve

$$F(S) - a = F(S) - (F(S) - x) = x \notin S \quad (5.37)$$

elde edilir. (5.37) eşitliğinden dolayı; $a = F(S) - x \in H(S)$ olur. Bu durum $\#(H(S)) = 1$ şartıyla çelişir. $\#(H(S)) = 1$ ise; $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için $F(S) - x \notin S$ şartını sağlayan tek sayı olmalıdır. Bu durum; Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup şartıdır.

5.3 Hemen Hemen Simetrik Sayısal Yarıgruplar

Tanım 5.3 S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, $PF(S) = H(S) \cup \{F(S)\}$ şartını sağlayan sayısal yarıgruplara hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplar denir [14].

Örnek 5.9 $S = \langle 7, 12, 13 \rangle = \{0, 7, 12, 13, 14, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 31, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için $F(S) = 30$, $PF(S) = \{29, 30\}$, $H(S) = \{1, 8, 15, 22, 29\}$ ve $PF(S) = H(S) \cup \{F(S)\}$ şartı sağlanmadığından S hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup değildir.

Örnek 5.10 $S = \langle 8, 11, 12, 15 \rangle = \{0, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için, $F(S) = 29$, $PF(S) = \{4, 25, 29\}$, $H(S) = \{4, 25\}$ ve $PF(S) = H(S) \cup \{F(S)\}$ şartı sağlandığından S hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur.

Önerme 5.5 S simetrik sayısal yarıgrup ise aynı zamanda hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur [22].

İspat: S simetrik sayısal yarıgrup ise önceki teoremlerden dolayı $H(S) = \emptyset$ olduğunu biliyoruz. Bu sebeple; $PF(S) = \{F(S)\}$ olduğunu göstermeliyiz. Yani; S simetrik sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısından başka Pseudo-Frobenius sayısı olmadığını göstermeliyiz. Kabul edelim ki; $F(S) \neq x \in PF(S)$ olsun. $x \in G(S)$ ve S simetrik sayısal yarıgrup olduğundan $F(S) - x \in S$ olmalıdır. $x \in PF(S)$ ise S nin sıfırdan farklı her elemanı ile toplamı S sayısal yarıgrubunun elemanı olmalıdır. Öyleyse; S nin sıfırdan farklı elemanı olarak $F(S) - x$ elemanını seçelim.

$$x + (F(S) - x) = x + F(S) - x = F(S) \in S \quad (5.38)$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla; S simetrik sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısından başka Pseudo-Frobenius sayısı olmadığından hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup şartı gösterilmiş olur.

Örnek 5.11

$S = \langle 6, 14, 17 \rangle = \{0, 6, 12, 14, 17, 18, 20, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 40, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için $G(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 19, 21, 22, 25, 27, 33, 39\}$,

$PF(S) = \{39\}$, S simetrik sayısal yarıgrup olduğundan $H(S) = \emptyset$ ve $F(S) = \{39\}$ olduğundan $PF(S) = H(S) \cup \{F(S)\}$ şartı sağlanır. Yani, S , hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur.

Önerme 5.6 S Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup ise aynı zamanda hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur [22].

İspat: S , Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup ise $F(S)$, çift sayı ve $PF(S) = \{\frac{F(S)}{2}, F(S)\}$

olduğunu önceki tanım ve teoremlerden biliyoruz. Dolayısıyla; $H(S) = \{\frac{F(S)}{2}\}$

olduğundan; $PF(S) = H(S) \cup \{F(S)\}$ şartı sağlandığından S sayısal yarıgrubu aynı zamanda hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur.

Örnek 5.12 $S = \langle 3, 7, 11 \rangle = \{0, 3, 6, 7, 9, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için $G(S) = \{1, 2, 4, 5, 8\}$, $PF(S) = \{4, 8\}$, $F(S) = 8$ dir. S Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup olduğundan $x \in G(S)$ için $F(S) - x \notin S$ şartı sadece $x = 4$ için sağlandığından dolayı $H(S) = \{4\}$ tür. Yani; $PF(S) = H(S) \cup \{F(S)\}$ şartı sağlanır. Yani, S , hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur.

Önerme 5.7 S bir sayısal yarı grup olmak üzere;

$$2g(S) \geq F(S) + type(S) \quad (5.39)$$

eşitsizliği sağlanır. Genel olarak; S sayısal yarıgrubu hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup ise (5.39) bağıntısında eşitlik sağlanır [22].

Sonuç 5.5 S hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup ise; $type(S) = 2g(S) - F(S)$ eşitliği sağlanır. Özel olarak, S simetrik sayısal yarıgrup ise $type(S) = 1$ ve S Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup ise $type(S) = 2$ dir [22].

TEMEL FARKLAR**6.1 Sayısal Yarıgrupun Temel Farkları**

Tanım 6.1 S bir sayısal yarıgrup olmak üzere; $G(S) = \mathbb{N} \setminus S$ kümesi S nin boşlukları olarak adlandırılmıştı. Eğer $x \in G(S)$ için $y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $y | x$ (y böler x) şartını sağlayan bir tamsayı ise; y elemanı da $G(S)$ kümesine aittir. Bu sebeple; S sayısal yarıgrubu; $G(S)$, S nin boşlukları olmak üzere $kx \notin G(S) (k \geq 2)$ şartını sağlayan x elemanlarından oluşur. Yani S nin boşlukları kümesinde $'|'$ (bölme) işlemine göre maksimal olan elemanları bilmemiz yeterlidir. Dolayısıyla; bu şartı sağlayan elemanlara S nin temel farkları (boşlukları) denir [23].

Örnek 6.1

$S = \langle 5, 13, 21 \rangle = \{0, 5, 10, 13, 15, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 38, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için, $G(S) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 22, 24, 27, 29, 32, 37\}$ dir. Buna göre S nin temel farkları (boşlukları) kümesi; $\{14, 17, 19, 22, 24, 27, 29, 32, 37\}$ olarak bulunur.

6.2 Temel Farklardan Sayısal Yarıgrupun Elde Edilmesi

Tanım 6.2 S bir sayısal yarıgrup ve $x_1, x_2, \dots, x_r$ bu sayısal yarıgrupun temel farkları olsun. $\mathcal{D}(x_1, \dots, x_r) = \{x \in \mathbb{N} : x | x_i, i \in \{1, \dots, r\}\}$ olarak tanımlayalım. $\mathcal{D}(x_1, \dots, x_r)$

kümesinin S sayısal yarıgrubunun boşluklar kümesini gösterdiği açıktır. Bu durumda;
 $S = \mathbb{N} \setminus \mathcal{D}(x_1, \dots, x_r)$ dir [23], [24].

Sonuç 6.1 $\mathcal{D}(g_1, g_2) = \mathcal{D}(g_1) \cup \mathcal{D}(g_2)$ ifadesi sağlanır.

İspat: $x \in \mathcal{D}(g_1, g_2)$ olsun. Bu durumda,

$$x | g_1 \text{ veya } x | g_2 \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}(g_1) \text{ veya } x \in \mathcal{D}(g_2) \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}(g_1) \cup \mathcal{D}(g_2)$$

Sonuç 6.2 $\mathcal{D}(g_1, g_2, \dots, g_n) = \mathcal{D}(g_1) \cup \dots \cup \mathcal{D}(g_n)$

Önerme 6.1 S bir sayısal yarıgrup ve $X ; G(S)$ kümesinin bir alt kümesi olmak üzere; aşağıdaki koşullar denktir.

- 1) $X ; S$ sayısal yarıgrubunun boşluklarını belirler.
- 2) Her $a \in \mathbb{N}$ için; eğer $a \in G(S)$ ve $\{2a, 3a\} \subset S$ ise $a \in X$ tir [6].

İspat: 1) $\Rightarrow$ 2): Eğer; X, S nin boşluklarını belirliyorsak, Tanım 6.2 den, $S = \mathbb{N} \setminus \mathcal{D}(X)$ ve sonuç olarak $G(S) = \mathcal{D}(X)$ olur. Eğer $a \in G(S)$ ise; $a | x$ şartını sağlayan en az bir $x \in X$ vardır ve bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı için, $ka = x$ tir. Ayrıca; $\{2a, 3a\} \subset S$ kabulümüzden dolayı, $\forall l > 1$ tamsayısı için $la \in S$ olduğundan, $k = 1$ ve $a = x \in X$ tir.

2) $\Rightarrow$ 1): $S = \mathbb{N} \setminus \mathcal{D}(X)$ olduğunu gösterirsek, temel boşlukların tanımından, X kümesinin S nin boşluklarını belirlediği gösterilmiş olur. Hipotezimizden dolayı; $X \subset G(S)$ olduğundan, $\mathcal{D}(X) \subset G(S)$ dir. Böylece, $S \subset \mathbb{N} \setminus \mathcal{D}(X)$ olduğu sonucuna varılır. Eğer $a ; S$ sayısal yarıgrubuna ait olmayan negatif olmayan bir tamsayı ise, $a \in G(S)$ dir. $k = \max\{n \in \mathbb{N} | na \in G(S)\}$ olsun. $G(S)$ sonlu, $0 \notin G(S)$ olduğundan, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ dir. Buradan, $ka \in G(S)$ ve $\{2ka, 3ka\} \subset S$ olacağından, hipotezden dolayı; $ka \in X$ ve sonuç olarak $a \in \mathcal{D}(X)$ olur. Buradan $S = \mathbb{N} \setminus \mathcal{D}(X)$ olduğu sonucu elde edilir.

6.3 Sayısal Yarıgrubun Temel Farklar Kümesi

Tanım 6.3 Bir S sayısal yarıgrubunun temel farkları kümesi bir önceki teoreme göre $FG(S) = \{x \in G(S) : \{2x, 3x\} \subset S\}$ olarak tanımlanır ve $FG(S)$ ile gösterilir. Eğer $x, y \in FG(S)$ ve $x \neq y$ ise, o zaman $x \nmid y$ dir [23].

Örnek 6.2 $X = \{5, 8, 12, 13\}$ olmak üzere, $\mathcal{D}(X)$ kümesini ve S sayısal yarıgrubunu oluşturalım. $\mathcal{D}(X)$ kümesi, tanımı gereği, X kümesine ait olan elemanlardan ve onların bölenlerinden oluşmaktadır. $\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}(5, 8, 12, 13) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 13\}$ şeklindedir. Çünkü; $1|5, 2|8, 3|12, 4|12, 6|12$ olduğundan S nin farkları kümesine dahil edilirler. Şimdi de S sayısal yarıgrubunu oluşturalım. $\mathcal{D}(X)$ kümesi S nin boşlukları kümesi olduğundan negatif olmayan tamsayılar kümesiyle $\mathcal{D}(X)$ kümesinin farkını aldığımızda S sayısal yarıgrubunu elde ederiz. Yani; $S = \{0, 7, 9, 10, 11, 14, \rightarrow\}$ elde edilir. Bu kümede negatif olmayan tamsayılar kümesinin, 0 elemanını kapsayan, toplamsal kapalı bir alt kümesi olduğundan bir sayısal yarıgruptur.

Örnek 6.3 $FG(S) = \{7, 10, 13, 16\}$ olan S sayısal yarıgrubunu belirleyelim. $\mathcal{D}(7, 10, 13, 16) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 16\}$ ve buradan da sayısal yarıgrubu oluşturursak, $S = \mathbb{N} \setminus \mathcal{D}(7, 10, 13, 16) = \{0, 3, 6, 9, 11, 12, 14, 15, 17, \rightarrow\}$ olur.

Sonuç 6.3 $F(S) = \max(FG(S))$ dir.

İspat: $F(S) \in G(S)$ ve $\{2F(S), 3F(S)\} \subset S$ şartları sağlandığından $F(S) \in FG(S)$ elde edilir. $FG(S) \subseteq G(S)$ ve $F(S) = \max G(S)$ olduğundan $F(S) = \max(FG(S))$ olduğu aşikardır.

Şimdi de bir S sayısal yarıgrubu için, S nin herhangi bir s elemanı için, $S \setminus \{s\}$ kümesinin yine bir sayısal yarıgrup olabilmesi için sağlaması gereken şarttan söz edelim. $S \setminus \{s\}$ kümesi, $a, b \in S \setminus \{0\}$ olmak üzere $s \neq a + b$ şartını sağlayan bir sayısal yarıgruptur. Diğer bir deyişle, s elemanı, S nin minimal üreteç kümesinin bir elemanı ise $S \setminus \{s\}$ bir sayısal yarıgruptur. Ayrıca, s elemanını S den çıkarırsak, o zaman s elemanı, $S \setminus \{s\}$ nin temel farkları kümesinin elemanı olacaktır ve sonuçta S sayısal

yarıgrubunun, $x|s$ şartını sağlayan x temel farkları artık, $S \setminus \{s\}$ nin temel farkları olmaktan çıkar [23], [25].

Önerme 6.2 S bir sayısal yarıgrup ve $s \in S$ olsun. $S \setminus \{s\}$ bir sayısal yarıgruptur ancak ve ancak s, S nin minimal üreteç kümesinin bir elemanıdır. Üstelik, $S \setminus \{s\}$ bir sayısal yarıgrup ise; $FG(S \setminus \{s\}) = (FG(S) \cup \{s\}) \setminus \{x \in FG(S) : x|s\}$ dir [23].

İspat: $(\Rightarrow)$: S sayısal yarıgrubu, $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ kümesi ile üretilen bir sayısal yarıgrup olsun. Kabul edelim ki; $s \neq s_i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$ olsun. Öyleyse;

$$s = k_1 s_1 + \dots + k_n s_n \quad (k_1, \dots, k_n \in (\mathbb{N} \cup \{0\})) \quad (6.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. $s_1, s_2, \dots, s_n \in S \setminus \{s\}$ olduğu için ve $S \setminus \{s\}$ bir sayısal yarıgrup olduğundan toplamsal kapalı olması gerektiğinden $s_i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$ sayılarının tüm katlarını içerir. Dolayısıyla; (6.1) eşitliğinden $s \in S \setminus \{s\}$ sonucu elde edilir. Bu durum, $s \notin S \setminus \{s\}$ olmasıyla çelişir.

$(\Leftarrow)$: s, S nin minimal üreteci olsun. Kabul edelim ki; $S \setminus \{s\}$ kümesi sayısal yarıgrup olmasın. Öyleyse; $s \neq 0$ olduğundan $0 \in S \setminus \{s\}$ ve $\mathbb{N} \setminus S$ sonlu olduğundan, $\mathbb{N} \setminus (S \setminus \{s\})$ kümesinin de sonlu olduğu açıktır. O zaman $S \setminus \{s\}$ kümesinin sayısal yarıgrup olmaması için, $\exists a, b \in (S \setminus \{s\})$ için $a + b \notin (S \setminus \{s\})$ şartı gerçekleşmelidir. $a, b \in (S \setminus \{s\})$ ise $a, b \in S$ sağlanır. Çünkü, $(S \setminus \{s\}) \subset S$. O zaman,

$$a = k_1 s_1 + \dots + k s + \dots + k_n s_n \quad (6.2)$$

$$b = t_1 s_1 + \dots + t s + \dots + t_n s_n \quad (6.3)$$

olacak şekilde, (6.2) ve (6.3) eşitliklerini sağlayan $(k_1, \dots, k, \dots, k_n, t_1, \dots, t, \dots, t_n \in (\mathbb{N} \cup \{0\}))$ sayıları vardır. s, S nin minimal üreteci olarak kabul ettiğimizden dolayı, s nin tüm katları S de ve dolayısıyla $S \setminus \{s\}$ de bulunur. Yani; $ks, ts \in S$ ve $ks, ts \in S \setminus \{s\}$ olur. Dolayısıyla (6.2) ve (6.3) kullanılarak;

$$a + b = \underbrace{(k_1 + t_1)s_1}_{\in S, S - \{s\}} + \dots + \underbrace{(k + t)s}_{\in S, S - \{s\}} + \dots + \underbrace{(k_n + t_n)s_n}_{\in S, S - \{s\}} \in S - \{s\} \quad (6.4)$$

elde edilir. (6.4) eşitliği $a + b \notin (S \setminus \{s\})$ kabulümüzle çelişir.

Örnek 6.4 $S = \langle 5, 7, 11 \rangle = \{0, 5, 7, 10, 11, 12, 14, \rightarrow\}$ $\{5, 7, 11\}$ minimal üreteç kümesidir. $s = 12$ elemanını S den çıkarırsak, $S' = S \setminus \{12\}$ sayısal yarıgrup olur mu? $S' = S \setminus \{12\} = \{0, 5, 7, 10, 11, 14, 15, 16, \rightarrow\}$ kümesinin sayısal yarıgrup özelliklerini sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim. $5 \in S', 7 \in S'$ ve S' sayısal yarıgrup ise toplamsal kapalı olması gerektiğinden $5 + 7 = 12 \in S'$ olmalıdır. Fakat $12 \notin S'$ olduğundan, $S' = S \setminus \{12\}$ sayısal yarıgrup değildir. S' olarak $S' = S \setminus \{7\}$ kümesini alalım. $S' = S \setminus \{7\} = \{0, 5, 10, 11, 12, 14, \rightarrow\}$ kümesinin sayısal yarıgrup olup olmadığını inceleyelim. $\forall s_1, s_2 \in S'$ için $s_1 + s_2 \in S'$ olduğundan toplamsal kapalılık sağlanır. $0 \in S'$ olduğundan S' sayısal yarıgruptur.

Örnek 6.5 $S = \langle 5, 8, 19 \rangle = \{0, 5, 8, 10, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 23, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için $G(S) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 17, 22\}$, $FG(S) = \{22, 17, 14, 12, 9\}$ olarak bulunur. $s = 8$ elemanını seçelim ve $S \setminus \{8\}$ kümesini oluşturalım ve sayısal yarıgrup olup olmadığını inceleyelim.

$S \setminus \{8\} = \{0, 5, 10, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 23, \rightarrow\}$ kümesi sayısal yarıgrup mudur? Öncelikle $0 \in S$ ve $\mathbb{N} \setminus S$ sonludur. Şimdi kümenin toplamsal kapalı olup olmadığını inceleyelim. $S \setminus \{8\}$ kümesinden herhangi iki eleman seçip, toplamlarının bu kümede olup olmadığını inceleyelim.

$$5 + 5 = 10, 10 + 10 = 20, 13 + 13 = 26, \dots$$

$$5 + 10 = 15, 5 + 13 = 18, 5 + 15 = 20, 5 + 16 = 21, 5 + 18 = 23, \dots$$

$$10 + 13 = 23, \dots$$

$$13 + 15 = 28, \dots$$

Belirtilen toplamlardan sonraki tüm toplamların sonuçları kümeye ait olduğundan, $S \setminus \{8\}$ bir sayısal yarıgruptur. $S \setminus \{8\}$ bir sayısal yarıgrup olduğundan

$$FG(S \setminus \{s\}) = (FG(S) \cup \{s\}) \setminus \{x \in FG(S) : x \mid s\} \quad \text{ifadesini} \quad \text{sağlatalım.}$$

$$FG(S \setminus \{8\}) = \{22, 17, 14, 12, 9, 8\}, FG(S) \cup \{8\} = \{22, 17, 14, 12, 9, 8\}$$

$$\{x \in FG(S) : x \mid s\} = \emptyset \text{ olduğundan ifade sağlanmış olur.}$$

Şimdi verilen bir S sayısal yarıgrubuna yeni bir eleman eklendiğinde, yeni oluşan kümenin hangi şartlar altında bir sayısal yarıgrup olacağını belirleyelim. $y \in G(S)$ olmak üzere; $S \cup \{y\}$ kümesi tüm $k > 1$ tamsayıları için $ky \in S$ ve tüm $s \in S \setminus \{0\}$ elemanları için $y + s \in S$ şartları sağlandığında, bir sayısal yarıgruptur. Burada belirtilen ilk şart, y elemanının S nin temel farkları kümesinin elemanı olması gerektiği, yani $y \in FG(S)$ olmasıdır. Belirtilen ikinci şart ise, önceden bilindiği üzere; y sayısının, Pseudo-Frobenius sayısı olma şartıdır. Öyleyse; $S \cup \{y\}$ kümesinin sayısal yarıgrup olabilmesi için, y nin öncelikle Pseudo-Frobenius sayılarından seçilmesi gerekir [23].

Önerme 6.3 S bir sayısal yarıgrup ve $y \in G(S)$ olsun. Öyleyse; $S \cup \{y\}$ bir sayısal yarıgruptur ancak ve ancak y elemanı $FG(S)$ kümesinin $\leq_s$ bağıntısına göre maksimal elemanlarından seçilmiştir. Diğer taraftan; eğer $S \cup \{y\}$ kümesi bir sayısal yarıgrup ve $p_1, \dots, p_n$; y sayısını bölen asallar ise, o zaman

$$FG(S \cup \{y\}) = (FG(S) \setminus \{y\}) \cup \left\{ \frac{y}{p_i} : \frac{y}{p_i} \notin \mathcal{D}(FG(S) \setminus \{y\}) \right\} \text{ dir [23].}$$

İspat: ($\Rightarrow$): Öncelikle $S \cup \{y\}$ kümesinin bir sayısal yarıgrup olduğunu varsayalım. Yukarıda da belirtildiği üzere, $y \in FG(S)$ olur. Ayrıca $S \cup \{y\}$ bir sayısal yarıgrup olduğundan, her $s \in S \setminus \{0\}$ için $y + s \notin FG(S)$ olacaktır. Aksi takdirde; $y + s \notin S$ olur. Böylece çelişki elde edilir ki; y elemanı $FG(S)$ kümesinin $\leq_s$ bağıntısına göre maksimal elemanlarındanıdır.

($\Leftarrow$): Tersine; y elemanı $FG(S)$ kümesinin $\leq_s$ bağıntısına göre maksimal elemanlarından olduğunu varsayalım. $y \in FG(S)$ olduğundan, $k > 1$ tamsayıları için, $ky \in S$ olacaktır. Eğer herhangi bir $s \in S \setminus \{0\}$ için $y + s \notin S$ ise o zaman bir $x \in FG(S)$ için $y + s \mid x$ şartı sağlanır. Buradan da; $\exists k \in \mathbb{N}$ için,

$$k(y + s) = x \tag{6.5}$$

sağlanır. $ky \in S$ ($k > 1$ için) ve $ks \in S$ olduğu aşıkardır olduğundan, buradan da S bir sayısal yarıgrup olup toplamsal kapalı olması gerektiğinden, (6.5) eşitliğinden $k(y+s) \in S$ ($k > 1$) sonucuna ulaşılır. Bu sonuç bizi,

$$y+s=x \quad (6.6)$$

anlamına gelen $k=1$ zorunluluğuna götürür ki; bu ise y elemanının $FG(S)$ kümesinin $\leq_s$ bağıntısına göre maksimal elemanlarından olduğu varsayımımız ile çelişir. Buna göre, $S \cup \{y\}$ kümesinin de sayısal yarıgrup olduğu kanıtlanmış olur. $\mathbb{N} \setminus (S \cup \{y\})$ sonlu ve $0 \in S \cup \{y\}$ olduğundan, $S \cup \{y\}$ bir sayısal yarıgruptur. Son olarak; eğer $S \cup \{y\}$ bir sayısal yarıgrup ise, o zaman y elemanını $FG(S \cup \{y\})$ kümesinden çıkartmalıyız, fakat onun has bölenlerini çıkartmak zorunda değiliz, bu durum ise, $\{\frac{y}{p_i} : \frac{y}{p_i} \notin \mathcal{D}(FG(S) \setminus \{y\})\}$ kümesini katarak elde edilir.

Örnek 6.6 $S = \langle 5, 7, 11 \rangle = \{0, 5, 7, 10, 11, 12, 14, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için, $G(S) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 13\}$, $FG(S) = \{13, 9, 8, 6\}$ $y \in G(S)$ olarak $y=2$ alalım. $S' = S \cup \{2\}$ olsun. $S' = \{0, 2, 5, 7, 10, 11, 12, 14, \rightarrow\}$ kümesi için $2 \in S'$ fakat, $2+2=4 \notin S'$ olduğundan, toplamsal kapalılık özelliği sağlanmamaktadır. Bu yüzden S' sayısal yarıgrup değildir. Fakat $y \in FG(S)$ olarak; $y=9$ alalım. $S' = S \cup \{9\} = \{0, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 14, \rightarrow\}$ kümesi için, $0 \in S'$, ve $\mathbb{N} \setminus S'$ sonlu ve $\forall s_1, s_2 \in S'$ için, $s_1 + s_2 \in S'$ yani toplamsal kapalılık sağlandığından S' sayısal yarıgruptur. Burada $y=9$ sayısının Pseudo-Frobenius sayısı olduğuna dikkat edilmelidir.

BÖLÜM 7

İDEALLER

7.1 Sayısal Yarıgrupun İdeali

Tanım 7.1 S bir sayısal yarıgrup ve $I \subseteq S$ olmak üzere, $I + S \subseteq I$ ise, I alt kümesine, S nin ideali denir. Eğer, $A \subset S$ için, $I = A + S$ oluyorsa, I , S nin A alt kümesi ile üretilen ideali adını alır. I eğer tek elemanla üretiliyorsa, temel idealdir. Yani, $x_0 \in S$ için, $I = \{x_0\} + S = \{x_0 + s : s \in S\}$ şeklinde ifade edilir. $I = [x_0]$ olarak gösterilir [26].

Sonuç 7.1 Bu tanıma göre $0 \neq x_0 \in S$ için $I = [x_0]$ ideali bir sayısal yarıgrup değildir. Çünkü sayısal yarıgrupun tanımından dolayı $0 \in I = [x_0]$ olmalıdır. Fakat $0 \neq x_0$ olduğundan, $\forall s \in S$ için $0 \neq x_0 + s$ olur. Yani $0 \notin I = [x_0]$ ve $I = [x_0]$ kümesinin sayısal yarıgrup olmadığı elde edilir.

Tanım 7.2 S bir sayısal yarıgrup olsun. $G(I) = S \setminus I = \{x \in S : x \notin I\}$ kümesi I nin boşlukları olarak adlandırılır [4].

Tanım 7.3 S bir sayısal yarıgrup olsun. $m(I) = \min\{i \in I : i \neq 0\}$ sayısı I nin en küçük elemanı olarak tanımlanır [14].

Örnek 7.1 $S = \langle 4, 7, 9 \rangle = \{0, 4, 7, 8, 9, 11, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için temel ideal örnekleri oluşturalım.

$$I = [4] = 4 + S = \{4, 8, 11, 12, 13, 15, \rightarrow\}, m(I) = 4, F(I) = 14$$

$$J = [7] = 7 + S = \{7, 11, 14, 15, 16, 18, \rightarrow\}, m(J) = 7, F(J) = 17$$

$$K = [9] = 9 + S = \{9, 13, 16, 17, 18, 20, \rightarrow\}, m(K) = 9, F(K) = 19$$

$$I + J + K = [20] = 20 + S = \{20, 24, 27, 28, 29, 31, \rightarrow\}$$

$$I \cup J = \{4, 7, 8, 11, \rightarrow\} \supseteq I + J + K$$

$$G(I) = \{0, 7, 9, 14\}$$

$$G(J) = \{0, 4, 8, 9, 12, 13, 17\}$$

$$G(K) = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 19\}$$

Tanım 7.4 I ve J , S nin idealleri olmak üzere; ideal toplamı $I + J = \{i + j : i \in I, j \in J\}$, ideallerin birleşimi $I \cup J = \{x : x \in I \vee x \in J\}$ ve ideallerin kesişimi $I \cap J = \{x : x \in I \wedge x \in J\}$ olarak tanımlanır [4], [26].

Önerme 7.1 S bir sayısal yarıgrup ve I, J iki ideali olsun. $I + J$, $I \cup J$ ve $I \cap J$ birer idealdir.

İspat: $I \cup J$ nin ideal olması için; $(I \cup J) \subseteq S$ ve $(I \cup J) + S \subseteq (I \cup J)$ olduğunu göstermeliyiz.

$I \subseteq S$ ve $J \subseteq S$ olduğundan $I \cup J \subseteq S$ dir. $i \in (I \cup J)$ olmak üzere;

$$i \in (I \cup J) \Rightarrow i \in I \vee i \in J \Rightarrow (i + s) \in I \vee (i + s) \in J (\forall s \in S)$$

$$\Rightarrow (i + s) \in (I \cup J) \Rightarrow (I \cup J) + S \subseteq (I \cup J) \text{ olur. } (I \cup J) \text{ nin bir ideal olduğu görülür.}$$

$(I \cap J)$ nin ideal olması için; $(I \cap J) \subseteq S$ ve $(I \cap J) + S \subseteq (I \cap J)$ olduğunu göstermeliyiz.

$i \in (I \cap J)$ olsun. $i \in (I \cap J) \Rightarrow i \in I \wedge i \in J \Rightarrow i \in I \subseteq S \wedge i \in J \subseteq S$ dir. Dolayısıyla;

$(I \cap J) \subseteq S$ şartı sağlanır. $i \in (I \cap J)$ olmak üzere;

$$i \in (I \cap J) \Rightarrow i \in I \wedge i \in J \Rightarrow (i + s) \in I \wedge (i + s) \in J$$

$$\Rightarrow (i + s) \in (I \cap J) \Rightarrow (I \cap J) + S \subseteq (I \cap J) \text{ olur. } (I \cap J) \text{ nin ideal olduğu görülür.}$$

$(I + J)$ nin ideal olması için; $(I + J) \subseteq S$ ve $(I + J) + S \subseteq (I + J)$ olduğunu göstermeliyiz.

$i + j \in (I + J)$ olsun. $i \in I$ ve $j \in J$ dir. $I \subseteq S$ ve $J \subseteq S$ olduğundan $i \in I \subseteq S$ ve

$j \in J \subseteq S$ olduğundan $(i + j) \in S$ olur. Yani; $I + J \subseteq S$ olur.

$$i + j \in (I + J) \Rightarrow i \in I \wedge j \in J \quad (i + j) + s = \underbrace{i}_{\in I} + \underbrace{(j + s)}_{\in J \text{ (J temel ideal)}} \in I + J \quad \text{dolayısıyla}$$

$(I + J) + S \subseteq I + J$ olur.

7.2 Relative İdeal

Tanım 7.5 S sayısal yarı grup ve $I, \mathbb{Z}$ nin bir alt kümesi olsun. $I + S \subseteq I$ ve bazı $s \in S$ için $I + s \subseteq S$ oluyorsa I ya S nin relative ideali denir. S sayısal yarı grubu tarafından kapsanan relative ideallere S nin integral ideali adı verilir. $\mathbb{Z} \setminus I$ nin en büyük elemanı, I nin Frobenius sayısı olarak adlandırılır ve $F(I)$ ile gösterilir [26].

Tanım 7.6 I ve J S sayısal yarı grubunun relative idealleri olmak üzere; $I + J = \{i + j : i \in I, j \in J\}$ ve $I - J = \{z \in \mathbb{Z} : z + J \subseteq I\}$ olarak tanımlanır. Eğer $z \in \mathbb{Z}$ ise, $z + S = \{z + s : s \in S\}$ z elemanı ile üretilen temel relative idealdir. Bir idealin $I = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ile üretilmesi, $I = (b_1, b_2, \dots, b_n) = (b_1 + S) \cup (b_2 + S) \cup \dots \cup (b_n + S)$ anlamına gelir [14], [26].

Örnek 7.2 $S = \langle 8, 10, 11, 13 \rangle$ sayısal yarı grubu için, $I = (2, 4)$ ve $J = (1, 5)$ ideallerini oluşturalım.

$$S = \langle 8, 10, 11, 13 \rangle = \{0, 8, 10, 11, 13, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, \rightarrow\}$$

$$I = (2 + S) \cup (4 + S) = \{2, 4, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20, \rightarrow\} \quad F(I) = 19, m(I) = 2$$

$$J = (1 + S) \cup (5 + S) = \{1, 5, 9, 11, \rightarrow\}, \quad F(J) = 10, m(J) = 1$$

Tanım 7.7 $I - J = \{z \in \mathbb{Z} : z + J \subseteq I\}$ olarak tanımlanan kümeye J nin I daki duali denir. Eğer, $J = S$ ise, kısaca; I nin duali denir [14], [26].

Örnek 7.3 Örnek 7.2 için; $I + J = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, \rightarrow\}$ $I - J = \{9, 12, 13, 16, 17, 19, \rightarrow\}$ $S - I = \{6, 9, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 24, \rightarrow\}$ şeklinde oluşturulur.

7.3 Kanonikal İdeal

Tanım 7.8 Bir S sayısal yarı grubunun özel bir relative ideali olan kanonikal ideali; Ω sembolü ile gösterilir ve $\Omega = \{F(S) - x : x \in (\mathbb{Z} \setminus S)\}$ şeklinde tanımlanır. Böylece;

$\Omega, z = F(S) - x$ şeklinde sayısal yarıgrubun boşluklarına göre simetrik olan z tamsayılarını kapsıyorsa, z tamsayısı x e göre simetrik olarak adlandırılır [26].

Örnek 7.4 $S = \langle 4, 7, 13 \rangle = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için $F(S) = 10$ ve $\mathbb{Z} \setminus S = \{10, 9, 6, 5, 3, 2, 1, -1, -2, \dots\}$ olarak bulunur. Kanonikal ideal tanımı ile; $\Omega = \{F(S) - x : x \in \mathbb{Z} - S\} = \{0, 1, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \rightarrow\}$ olarak elde edilir.

Teorem 7.1 S bir sayısal yarıgrup olmak üzere; aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{N}$

(ii) S nin her I relative ideali için, $\Omega - I = \{F(S) - x : x \in (\mathbb{Z} \setminus I)\}$

(iii) Eğer I ve J , S nin $I \subseteq J$ şartını sağlayan relative idealleri ise, o zaman $Card(J \setminus I) = Card((\Omega - I) \setminus (\Omega - J))$ [26].

İspat: (i) Eğer $s \in S$ ise o zaman, $x = F(S) - s \notin S$ sağlanır. Bu yüzden, $s = F(S) - \underbrace{(F(S) - s)}_x = F(S) - x \in \Omega$ olacağından $S \subseteq \Omega$

Eğer, $z \in \mathbb{Z}, z < 0$ ise, o zaman $F(S) - z > F(S)$, bu yüzden $(F(S) - z) \in S$ ve $z \notin \Omega$ elde edilir. Yani; $\Omega \subseteq \mathbb{N}$

(ii) İspat için, S sayısal yarıgrubunun her I relative ideali için, $x \in I \Rightarrow (F(S) - x) \notin \Omega - I$ veya $x \notin I \Rightarrow (F(S) - x) \in \Omega - I$ olduğunu göstermeliyiz. $x \in I$ olsun. Eğer, $(F(S) - x) \in \Omega - I$ ise o zaman, $F(S) - x + I \subseteq \Omega$. Özel olarak; $F(S) - x + x = F(S) \in \Omega$ olur ki bu durum çelişkidir. $x \notin I$ olsun. Eğer, $(F(S) - x) \notin \Omega - I$ ise o zaman, $(F(S) - x + i) \notin \Omega$ olacak şekilde $\exists i \in I$ vardır. Buradan, $(F(S) - x + i)$ elemanının S nin bir elemanına göre simetrik olduğu sonucuna varılır. Özel olarak, $F(S) - (F(S) - x + i) = x - i \in S$ ve böylece, $x \in i + S \subseteq I$ çelişkisi elde edilir.

(iii) $z \in \mathbb{Z}$ olsun. (ii) den, $z \in J \setminus I$ ancak ve ancak $(F(S) - z) \in ((\Omega - I) \setminus (\Omega - J))$, bu sebepten iki küme arasında bire-bir eşleme vardır ve aynı kardinaliteye sahiptirler.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, bir sayısal yarıgrubun; temelde üreteç kümesini katsayı kabul eden diyafont denklemin pozitif çözümlerinden elde edildiği, göstermiş olduğu özellikler ile çeşitlere ayrıldığı ortaya konularak, her sayısal yarıgrubun sıfırdan farklı elemanı ile oluşturulan Apery kümeleri ve bunlara ait özelliklerden söz edilmiştir. Ayrıca, Apery kümesiyle aynı kardinaliteye sahip olan bir kümenin Apery kümesi olma şartı belirtilmiştir. Literatürde verilmiş olan kutup noktaları kümesi boşluklar kümesine bağlı olarak ifade edilerek, simetrik sayısal yarıgrubun kutup noktaları kümesine bağlı geçişinden yararlanarak benzer bir ifade pseudo-simetrik sayısal yarıgruplar için yapılmıştır. İki üreteçli sayısal yarıgruplar için, simetriklik tanımından faydalananak, aslında boşluklar kümesini oluştururken S ye ait elemanların Frobenius sayısı ile farkı alınarak oluşturulduğuna dikkat çekilmiştir.

Yukarıda söz edilen durumlar; sayısal yarıgruplarla ileride yapılacak olan çalışmalara da temel oluşturarak bizi bu konuya dair yeni sonuçlara götürebilir. Bu durum ileride yeni boyutlarıyla ele alınacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Beck, M., (2008). How to Change Coins, M&M's or Chicken nuggets: The Linear Diophantine Problem of Frobenius, Resources For Teaching Discrete Mathematics, Mathematical Association of America, USA, 65-74
- [2] Rosales, J.C. ve Branco, M.B., (2011). "The Frobenius Problem for Numerical Semigroups with Multiplicity Four", Semigroup Forum, 83: 468-478
- [3] Sylvester, J.J.,(1884). "Mathematical Questions with Their Solutions", Educational Times, 41:171-178
- [4] İlhan, S., (2010). "An Approach to Numerical Semigroups", Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 39(3): 411-415
- [5] Madero-Craven, M. ve Herzinger, K., (2005). "Apery Sets of Numerical Semigroups", Communications in Algebra, 33: 3831-3838
- [6] Rosales, J.C., Garcia-Sanchez, P.A., (2009). Numerical Semigroups, Vol 20, Springer Developments in Mathematics, New York.
- [7] İlhan, s., (2007). "Some Criteria for Subsemigroups of a Symmetric Numerical Semigroups", Int. J. Contemp. Math., Vol 2(10): 465-468
- [8] İlhan, S., (2004). "Keyfi Katlılık ve Gömme Boyutu 3 Olan Simetrik Sayısal Yarıgrupların Bir Sınıfı Üzerine", F.Ü. Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 16(1): 127-130
- [9] Rosales, J.C., (2003). "Principal Ideals of Numerical Semigroups", Bull. Belg. Math. Soc., 10: 329-343
- [10] İlhan, S., Baykal, A. ve Kaya, A., (2010). "Some Applications of Computational Semigroups", International Journal of Information Science and Computer Mathematics, Vol 1: 49-57
- [11] İlhan, S., (2007). "On The Set of Gaps in Numerical Semigroups", International Journal of Algebra, 1(3): 145-149
- [12] Rosales, J.C. ve Vasco, P., (2008). "Numerical Semigroups with Many Gaps of The Same Parity", Semigroup Forum, 77: 267-278

- [13] Rosales, J.C., (2009). "Atoms of The Set of Numerical Semigroups with Fixed Frobenius Number", *Linear Algebra and its Applications*, 430: 41-51
- [14] Madero-Craven, M.G., (2003). *Apery Sets of Numerical Semigroups*, Yüksek Lisans Tezi, The Faculty of Graduate School of The University of Maryland, USA
- [15] Rosales, J.C. ve Branco, M.B., (2011). "The Frobenius Problem for Numerical Semigroups", *Journal of Number Theory*, 131: 2310-2319
- [16] İlhan, S. ve Herzinger, K., (2009). "On Principal Ideals of Triply-Generated Telescopic Semigroups", *General Mathematics*, Vol 17(1): 39-47
- [17] İlhan, S. ve Suer, M., (2009). "A Note on a Pseudo-Symmetric Numerical Semigroups", *Acta University Apulensis* 20: 139-142
- [18] Fröberg, R., Gottlieb, C. ve Haggkvist, R., (1987). "On Numerical Semigroups", *Semigroup Forum*, 35(1): 63-83
- [19] İlhan, S., (2006). "On Apery Sets of Symmetric Numerical Semigroups", *International Mathematical Forum*, 1(10): 481-484
- [20] Robles-Perez, A.M., Rosales, J.C. ve Vasco, P., (2009). "The Doubles of a Numerical Semigroup", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 213: 387-396
- [21] Leher, E., (2009). "On The Frobenius Problem of Numerical Semigroups", *Communication in Algebra*, 37(2): 639-649
- [22] Nari, H., (2013). "Symmetries on almost symmetric numerical semigroups", *Semigroup Forum*, Vol 86(1): 140-154
- [23] Rosales, J.C., Garcia-Sanchez, P.A., Garcia-Garcia, J.I. ve Jimenez Madrid, J.A., (2004). "Fundamental Gaps in Numerical Semigroups", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 189(1-3): 301-313
- [24] Rosales, J.C., Garcia-Sanchez, P.A. ve Garcia-Garcia J.I., (2004). "Fundamental Gaps in Numerical Semigroups with Respect to Their Multiplicity", *Acta Mathematica Sinica*, Vol 20(4): 629-646
- [25] Blanco, V. ve Rosales, J.C., (2011), *The Tree Of Irreducible Numerical Semigroups With Fixed Frobenius Number*, <http://arxiv.org/abs/1101.4112>, 11 Mayıs 2011
- [26] Barucci, V., (2009). *On Propinquity of Numerical Semigroups and One-Dimensional Local Cohen-Macaulay Rings*, in *Commutative Algebra and its Applications*, Walter de Gruyter, Berlin, 49-60

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Esra AYDIN

Doğum Tarihi ve Yeri :14/03/1979 Eyüp

Yabancı Dili :İngilizce

E-posta :esraydin1979@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik Öğrt.	Marmara Üniversitesi	2000
Lise	Bilgi İşlem	İTO Anadolu Ticaret M.L.	1996

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2010	Bakırköy And. İ.H.L.	Matematik Öğr.
2007	Siyavuşpaşa Kız Teknik L.	Matematik Öğr.

2003	Şehit Samet Kırbaş T. ve E.M.L.	Matematik Öğr.
2000	Eyüp Mareşal Fevzi Çakmak T.M.L.	Matematik Öğr.