

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

***I*-ASAL ELEMANLAR**

BÜNYAMİN ŞAHİN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. KÜRŞAT HAKAN ORAL**

İSTANBUL, 2013

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

I-ASAL ELEMANLAR

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Yrd. Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. A. Göksel Ağargün
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Ünsal Tekir
Marmara Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen ve akademik çalışmaların içinde olmam için beni sürekli teşvik eden değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Kürşat Hakan Oral'a çok teşekkür ediyorum.

Mayıs, 2013

Bünyamin ŞAHİN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	vi
KISALTMA LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	iv
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
TEMELBİLGİLER.....	3
2.1 HalkaYapısı.....	3
2.2 Alt Halka ve İdealler.....	4
2.3 Bölüm Halkaları.....	6
2.4 Halka Homomorfizmaları.....	6
2.5 Tek Türlü Asal Çarpanlara Ayrılabilen Bölge	8
2.6 Matrislerin Merkezleştiricileri	10
BÖLÜM 3	
I-TERSENEBİLİRLİK ve I-MATRİSLER	18
BÖLÜM 4	
BİR I-MATRİSİN MERKEZLEŞTİRİCİSİ	28
BÖLÜM 5	

I-BÖLÜNEBİLME.....	33
BÖLÜM 6	
SONUÇ VE ÖNERİLER	36
KAYNAKLAR.....	37
ÖZGEÇMİŞ.....	39

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{Z}[x]$	Katsayıları Tam Sayılardan Oluşan Polinom Halkaları
$\mathbb{R}[x]$	Katsayıları Reel Sayılardan Oluşan Polinom Halkaları
$\theta: R \rightarrow S$	R den S ye Halka Homomorfizması
$M_2(R)$	2×2 Boyutlu Matris Halkası
$a \mid_I b$	a I -Böler b yi
$a \sim_I b$	a ile b I -igili
$\langle a \rangle$	a nın Ürettiği ideal
$Ebob(a, b)$	a ile b nin En Büyük Ortak Bölünü
$der(p(x))$	$p(x)$ Polinomunun Derecesi

KISALTMA LİSTESİ

$TİB$	Temel İdeal Bölgesi
$T\dot{C}AH$	Tek Türlü Asal Çarpanlarına Ayrılabilen Halka
EB	Euclid Bölgesi
$TA\dot{C}$	Tek Türlü Asal Çarpanlarına Ayrılabilen Bölge
$Mer(s)$	s nin Merkezleştiricisi
Sfr	Sıfırlayıcı
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar

***I*-ASAL ELEMANLAR**

Bünyamin ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Kürşat Hakan Oral

Bu çalışmada halkalar teorisinin temel kavramları hatırlatıldıktan sonra bir elemanın merkezleştiricisi problemi matrisler halkasında incelenmiştir. Matrisler halkası değişmeli olmadığından bu problem oldukça zordur. Bunun için daha önce ***I***-matrislerin merkezleştiricileri hakkında yapılan çalışmalar bir araya getirildi. Son olarak halkalarda ***I***-bölünebilme tanımlanarak bu konudaki özellikler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: ***I***-indirgenemez, ***I*** -terslenebilir

***I*-PRIME ELEMENTS**

Bünyamin ŞAHİN

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Asst. Prof. Dr. Kürşat Hakan Oral

In this study, after the reminding of fundamental notions of the Ring Theory, we investigate the centralizer problem of an element in matrix rings. Because of the noncommutative of the matrix rings this matter is very hard. Therefore we investigate the centralizers of *I*-matrix. Finally we define the *I*-divisibility and investigate the property of this term in rings.

Key Words: *I*-irreducible, *I*-invertible

1.1 Literatür Özeti

Tek Türlü Çarpanlara Ayrılabilen (TAÇ) bölge konusu cebirde çok önemli bir rol oynamaktadır. TAÇ bölge, Tam sayılar kümesinin en önemli teoremlerinden biri olan Aritmetiğin Temel Teoremine denk düşer, yani bir genellemesidir. Tek Türlü Çarpanlara Ayrılabilen bölgeleri ilk çalışanlardan biri “Unique Factorization”[1] isimli makalesiyle Fransız matematikçi Pierre Samuel dir. Pierre Samuel Euclid Bölgeleri [2] üzerine, TAÇ bölge ve TAÇ bölge üzerinde inşa edilen kuvvet serileri üzerine[3] çok önemli çalışmalar yapmıştır.

Daha sonra Samuel’in öğrencileri TAÇ bölge üzerine, sıfır bölenli yapılarda çarpanlamanın değişmeli halkalara ve modüllere genişletilmesi üzerine çalışmışlardır. Galovich [4] sıfırdan ve birimden farklı bir elemanın indirgenemez olma şartlarını inceleyerek Tek türlü Çarpanlarına Ayrılabilen Halkaları(TÇAH) tanımlamıştır. Bouvier[5] de indirgenemezlik, ilgililik ve TÇAH ları tanımladı. Bu iki bilim adamı birbirine denk yollardan aynı sonuca vardıkları için bu halkalar her iki bilim adamının adıyla Bouvier-Galovich TÇA halkalar(BG-TÇA) olarak adlandırılmıştır. Fletcher[6] TAÇ bölge kavramını değişmeli halkalara farklı bir yoldan genişletmiştir.

Hem Bouvier-Galovich TÇAH hem de Fletcher ın TÇA halka tanımlarını içeren daha yeni bir yolla Ağargün, Anderson ve Leon[7] zayıf TAÇ bölge tanımını elde ettiler. TAÇ bölge ile ilgili çalışmalar bunlarla sınırlı olmayıp daha pek çok bilim adamı tarafından değişik çalışmalar yapılmıştır. Yapılan bu çalışmalar incelendiğinde, bir halka ile bölüm halkası arasında TAÇ bölge olma özelliğinin taşınmadığı gözlemlenmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı bölüm halkalarındaki asallık, indirgenemezlik ve çarpanlara ayrılabilme özellikleri üzerine farklı tanımlar getirmektir. Bunu yapabilmek için bir homomorfizma yardımıyla alınan bir elemanın ters görüntüleri kullanılmıştır. Önce I -bölünebilme tanımlanıp özellikleri incelenecektir. Ayrıca I -indirgenemezlik ve I -asallık kavramları tanımlanacak ve özellikleri incelenecektir.

1.3 Hipotez

R bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. $\theta: R \rightarrow R/I$ bir halka homomorfizması olmak üzere bir $\hat{b} \in R/I$ nün $r\delta$ biçimindeki ters görüntülerini ele alalım. Bu ters görüntüler $(r, k) = 1$ ve $\delta \mid k$ olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Eğer $\hat{b} \in R/I$ nün ters görüntüsünün aralarında asal parçası olan $\hat{r} \in R/I$ da indirgenemez ise $\hat{b} \in R/I$ I -indirgenemezdir. Benzer biçimde I -asallık kavramı tanımlanacaktır. Bu anlatılanlar, halkalar, matrisler ve TAÇ bölge ile ilgili temel kavramlar hatırlatılıp 2×2 boyutlu matris halkalarında merkezleştiricilerin tanımı yapıldıktan sonra son bölümde incelenecektir.

Bu bölümde tez içerisinde kullanılacak bazı temel kavramlar verilecektir. İspatı olmayanlar için Çallıalp (2009)[8] ve Karakaş (2010)[9] isimli kaynaklara bakılabilir.

2.1 Halka Yapısı

Tanım 2.1 $R \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem $+$ ve $\cdot$ olsun. Aşağıdaki aksiyomları taşıyan $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir **halka** denir [8].

- (1) $(R, +)$ bir değişmeli gruptur,
- (2) $\cdot$ işleminin R de birleşme özelliği vardır,
- (3) $\cdot$ işleminin $+$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır, yani her $a, b, c \in R$ için, $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$.

Halkanın $+$ işlemine göre etkisiz elemanına halkanın sıfır elemanı denir ve 0_R ile gösterilir. Halkanın $\cdot$ işlemine göre etkisiz elemanı olmayabilir. Eğer etkisiz elemanı varsa böyle bir halkaya **birimli halka** denir, bu etkisiz elemana da halkanın birim elemanı denir ve 1_R ile gösterilir. Halka ikinci işleme göre değişme özelliğine sahip ise halkaya **değişmeli halka** denir.

Not 2.2 Gruplarda olduğu gibi, iki eleman için tanımlı $+$ ve $\cdot$ işlemleri, sonlu sayıda eleman için de tümevarımla tanımlanabilir. Bu durumda genel birleşme ve genel dağılma özellikleri de sağlanır.

$$\left(\sum_{i=1}^k a_i \right) + \left(\sum_{i=k+1}^n a_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i, \quad \left(\prod_{i=1}^k a_i \right) \left(\prod_{i=k+1}^n a_i \right) = \prod_{i=1}^n a_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_i b_j \right).$$

Tanım 2.3 Bir halkada sıfırın her elemanla çarpımı sıfırdır. Fakat sıfırdan farklı iki elemanın çarpımı da sıfır olabilir. R halkasında $a \in R$ elemanı için $ab = 0_R$ (veya $ba = 0_R$) olacak şekilde $\exists 0_R \neq b \in R$ bulunabilirse a ya, halkanın **sıfır böleni**, böyle bir b yoksa **sıfır böleni değildir** denir [8].

Tanım 2.4 Sıfır elemanından başka sıfır böleni olmayan halkaya **tam halka** denir. Birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz (sıfırdan farklı) halkaya da bir **tamlık bölgesi** denir [9].

Örnek 2.5 $2\mathbb{Z}$ değişmeli ama birimsiz bir halkadır.

Örnek 2.6 $M_n(R)$, R halkası üzerindeki $n \times n$ lik matrisler kümesi matris toplamı ve matris çarpım işlemleriyle birimli ama değişmeli olmayan bir halkadır.

Örnek 2.7 $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi birimli, değişmeli bir halka ve sıfır bölensizdir. Yani bir tamlık bölgesidir.

Tanım 2.8 R birimli ve değişmeli bir halka ve $R - \{0_R\} = R^*$, ikinci işlem $\cdot$ ya göre bir grup ise R ye bir **cisim** denir. Bir cisimde sıfırdan farklı her elemanın çarpımsal tersi var ve tektir. Ayrıca her sonlu elemana sahip tamlık bölgesinin bir cisim olduğunu belirtmekte fayda vardır [8].

Örnek 2.9 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir cisimdirler. Fakat $\mathbb{Z}$ bir cisim değildir.

Örnek 2.10 p asal iken $\mathbb{Z}_p$, p elemanlı tamlık bölgesi olduğundan bir cisimdir.

Tanım 2.11 R bir tamlık bölgesi olsun. $m1_R = 0_R$ olacak şekilde bir $m > 0$ tam sayısı varsa böyle m lerin en küçüğüne R nin **karakteristiği** denir. Eğer bu özellikte hiçbir $m > 0$ bulunamıyorsa halkanın **karakteristiği sıfır** denir [8].

Tanım 2.12 R halkasında $-a$ ya a nın **ters işaretlisi**, eğer ikinci işleme göre tersi varsa a^{-1} çarpımsal tersine de **tersi** denir [8].

2.2 Alt Halka ve İdealler

Tanım 2.13 R bir halka ve $\emptyset \neq S \subset R$ olsun. R deki işlemlere göre S alt kümesi kendi başına bir halka ise S ye R halkasının bir **alt halkası** denir. Alt halkayı karakterize

edersek, R bir halka ve $\emptyset \neq S \subset R$ olduğunda S nin, R nin bir alt halkası olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in S$ için, $a - b \in S$ ve $ab \in S$ olmasıdır [9].

Teorem 2.14 Bir halkanın bir takım alt halkalarının arakesiti de bir alt halkadır [9].

Tanım 2.15 A, R halkasının bir alt kümesi olsun. R nin A yı kapsayan bütün alt halkalarının arakesitine A nın **ürettiği alt halka** denir ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir. A nın elemanlarına da $\langle A \rangle$ alt halkasının **üreteçleri** denir. $\langle A \rangle$ nın tanımından, $\langle A \rangle$ nın A yı kapsayan en küçük alt halka olduğu, yani $A \subset H$ ve H, R nin bir alt halkası ise $\langle A \rangle \subset H$ olduğu görülür. $A = \emptyset$ ise $\langle A \rangle$ sıfır halkadır [8].

Örnek 2.16 $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ nin bir alt halkasıdır.

Örnek 2.17 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ nin bir alt halkasıdır

Tanım 2.18 R bir halka ve $\emptyset \neq I \subset R$ olsun.

i) $\forall a, b \in I$ için $a - b \in I$ ve

ii) $\forall a \in I$ ve $\forall r \in R$ için $ra \in I$ (veya $ar \in I$)

ise I ya R nin bir **sol (veya sağ) ideali** denir. Hem sol hem de sağ bir ideale **iki taraflı ideal** veya kısaca **ideal** denir. İdealin tanımından her idealin bir alt halka olduğu anlaşılır [8].

Tanım 2.19 $\{0_R\}$ ve R , her R halkasının birer idealidirler. Bunlara R nin **aşık idealleri** denir. Halkanın aşık ideallerinden farklı ideallerine de **öz idealleri** denir [8].

Teorem 2.20 Bir halkanın bir takım ideallerinin arakesiti de bir idealdir [9].

Tanım 2.21 A, R halkasının bir alt kümesi olsun. R nin, A yı kapsayan bütün ideallerinin arakesitine A nın **ürettiği ideal** denir ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir. Eğer $A = \{a\}$ tek elemanlı bir küme ise A nın ürettiği ideale **temel ideal** denir ve kısaca $\langle a \rangle$ ile gösterilir [8].

Not 2.22 Eğer $A = \emptyset$ ise $\langle A \rangle$ sıfır ideali olur. $\langle A \rangle$ nın tanımından, $\langle A \rangle$ nın A yı kapsayan en küçük ideal olduğu, yani $A \subset I$ ve I, R nin bir ideali ise $\langle A \rangle \subset I$ olduğu açıktır.

Tanım 2.23 Her ideali temel ideal olan bir tamlık bölgesine bir **temel ideal bölgesi** denir(TİB) [9].

Tanım 2.24 I ve J bir R halkasının iki ideali olsun.

$$I + J = \{a + b : a \in I, b \in J\}$$

kümesine I ve J **ideallerinin toplamı** denir. Ayrıca bu küme de bir idealdir [8].

Örnek 2.25 $\mathbb{Q}$ da $A = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ nin ürettiği alt halka,

$$\left\{a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_r}{2^r} : r \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, r\right\} \text{ dir.}$$

Örnek 2.26 $\mathbb{Z}$ de 3 ün ürettiği alt halka $3\mathbb{Z}$ dir. $\mathbb{Z}$ de 3 ün ürettiği ideal de $3\mathbb{Z}$ dir.

Örnek 2.27 R birimli ve değişmeli bir halka ve $a \in R$ ise ,

$$\langle a \rangle = aR = \{aR : r \in R\} \text{ dir.}$$

2.3 Bölüm Halkaları

Tanım 2.28 R bir halka ve I R nin bir ideali olsun. Her $a, b \in R$ için,

$$a \equiv b \pmod{I} \Leftrightarrow a - b \in I$$

ile bir bağıntı tanımlayalım. R halkasının bir I idealine göre tanımlanan $\equiv$ bağıntısı, R de bir denklik bağıntısıdır. $r \in R$ nin denklik sınıfı da

$$\bar{r} = r + I = \{r + a : a \in I\} \text{ dir.}$$

Bütün denklik sınıfları kümesi R/I ile gösterilir. R halkasının bir I idealine göre tanımlanan denklik sınıfları arasında;

$$(a + I) \oplus (b + I) = (a + b) + I \quad \text{ve} \quad (a + I) \odot (b + I) = (ab + I)$$

ile tanımlanan $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerine göre R/I bir halkadır. Bu halkaya R nin I idealine göre **bölüm halkası** denir [8].

Örnek 2.29 $\mathbb{Z}$ nin $\langle m \rangle$ idealine göre bölüm halkası $\mathbb{Z}_m$ dir.

2.4 Halka Homomorfizmaları

Tanım 2.30 R ve S iki halka ve $f: R \rightarrow S$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall a, b \in R$ için;

$$i) f(a + b) = f(a) + f(b) \text{ ve}$$

$$ii) f(ab) = f(a)f(b)$$

oluyorsa f ye, R den S ye bir **halka homomorfizması** denir [8].

Teorem 2.31 R ve S iki halka ve $f: R \rightarrow S$ bir homomorfizma ise,

$$i) f(0_R) = 0_S \text{ ve}$$

$$ii) \forall a \in R \text{ için, } f(-a) = -f(a) \text{ dır.}$$

Teorem 2.32 R ve S iki halka ve $f: R \rightarrow S$ örten bir homomorfizma olsun. Bu durumda

i) U , R nin bir alt halkası ise $f(U)$, S nin bir alt halkasıdır.

ii) R değişmeli ise S de değişmelidir.

iii) R birimli ise S de birimli ve $f(1_R) = 1_S$ dir.

Tanım 2.33 R ve S iki halka $f: R \rightarrow S$ homomorfizması 1-1 ve örten ise f ye bir **izomorfizma**, R ile S ye de **izomorf halkalar** denir ve $R \cong S$ ile gösterilir [8].

Tanım 2.34 R ve S iki halka $f: R \rightarrow S$ bir homomorfizma ise f nin **çekirdeği**

$\text{Çek } f = \{a \in R: f(a) = 0_S\} = f^{-1}(0_S)$ ile tanımlanır [8].

Tanım 2.35 R ve S iki halka ve $\forall a \in R$ için $f(a) = 0_S$ ile tanımlı $f: R \rightarrow S$ bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmaya **sıfır homomorfizma** denir [9].

Örnek 2.36 $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $f(n) = \bar{n}$ ile tanımlı $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$ fonksiyonu bir örten homomorfizmadır.

Örnek 2.37 R değişmeli halka ve R nin karakteristiği 2 ise, bu durumda, $\sigma: R \rightarrow R$, $\sigma(x) = x^2$, R den R ye bir halka homomorfizmasıdır.

Örnek 2.38 R bir halka ve I onun bir ideali ise,

$$\theta: R \rightarrow R/I, \theta(x) = x + I$$

dönüşümü R den R/I ya bir örten halka homomorfizmasıdır. θ ya R den R/I ya *doğal homomorfizma* denir.

Önerme 2.39 R ve S birer halka ve $\theta: R \rightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. Bu durumda $\Psi: M_n(R) \rightarrow M_n(S)$, $\Psi([a_{ij}]) = [\theta(a_{ij})]$ ile bir halka homomorfizması olur[14].

İspat: $A, B \in M_n(R)$ olmak üzere,

$$\Psi(A + B) = \Psi(A) + \Psi(B), \Psi(AB) = \Psi(A) \Psi(B)$$

olduğunu gösterelim. θ nın bir halka homomorfizması olduğunu biliyoruz. Buna göre

$\forall a_i, b_i \in R$ ve $i \in \{1, \dots, n\}$ için ,

$\theta(a_i + b_i) = \theta(a_i) + \theta(b_i)$ ve $\theta(a_i b_i) = \theta(a_i) \theta(b_i)$ dir. $A, B \in M_n(R)$ olmak üzere,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned} \Psi(A + B) &= \Psi \left[\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} \theta(a_{11} + b_{11}) & \cdots & \theta(a_{1n} + b_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta(a_{n1} + b_{n1}) & \cdots & \theta(a_{nn} + b_{nn}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \theta(a_{11}) + \theta(b_{11}) & \cdots & \theta(a_{1n}) + \theta(b_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta(a_{n1}) + \theta(b_{n1}) & \cdots & \theta(a_{nn}) + \theta(b_{nn}) \end{pmatrix} \\ &= \Psi(A) + \Psi(B) \end{aligned}$$

Aynı şekilde matris çarpımı yapıldığında $\Psi(AB) = \Psi(A)\Psi(B)$ elde edilir.

Önerme 2.40 R bir halka ve I bir ideali olsun. $\theta_I: R \rightarrow R/I$ bir halka homomorfizmasıdır.

Bu durumda $\Psi_I: M_2(R) \rightarrow M_2(R/I)$ bir halka homomorfizması olur. $\hat{B}_I = \Psi_I(B)$ ile gösterilir [10].

2.5 Tek Türlü Asal Çarpanlara Ayrılabilen Bölge

Tanım 2.41 R bir halka ve $x \in R$ olsun. ($x \neq 0_R$ ve x birimden farklı)

- a. x in aritmetik birimlerden ve x ile ilgili elemanlardan başka hiçbir böleni yoksa x elemanına R nin bir **indirgenemez elemanı**,
- b. $a, b \in R$ için, $x \mid ab$ olduğunda $x \mid a$ veya $x \mid b$ ise x elemanına **asal eleman** denir.

Bir R tamlık bölgesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa R ye bir **tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge** denir(TAÇ) [8].

- i) R deki sıfır ve birimsel elemanlardan farklı her eleman R nin indirgenemez elemanlarının bir çarpımı olarak yazılabilir.
- ii) (i) deki yazılış, çarpanların sırası ve teklik düşünülmezsizin tek türlüdür.

Teorem 2.42 TAÇ bölgede asal ve indirgenemez elemanlar aynıdır [9].

Örnek 2.43 $\mathbb{Z}$ bir TAÇ bölgedir.

Teorem 2.44 R bir TİB ise TAÇ bölgedir [8].

İspat Önce TAÇ tanımındaki (i) özelliğini sağladığını gösterelim. $0 \neq x \in R$ ve $x \notin U_R$ olsun. Olmayana ergi metodunu kullanarak x in indirgenemez elemanların bir çarpımı olarak yazılamadığını kabul edelim. Bu durumda x in kendisi de indirgenemez olamaz ve $x = a_1 b_1$ olacak şekilde aritmetik birim olmayan $\exists a_1, b_1 \in R$ bulunabilir. x asalların bir çarpımı olmaması kabulünden dolayı a_1 ve b_1 den en az biri de bu özelliktedir. Kabul edelim ki a_1 bu özellikte olsun. $a_1 \mid x$ olduğundan, $(x) \subset (a_1)$ olur. $b_1 \notin U_R$ olduğundan $(x) \neq (a_1)$ dir. Yukarıdaki işleme x yerine a_1 alınarak devam edilirse, $(a_0) = (x) \subset (a_1) \subset (a_2) \subset \dots$

şeklinde, her biri bir sonrakinin içinde ve eşitliğin sağlanmadığı bir idealler zinciri elde edilir. $I = \bigcup_{i \geq 0} (a_i)$ nin de bir ideal olduğu gösterilebilir. Fakat R bir TİB olduğundan, $I = (a)$ olacak şekilde $\exists a \in R$ bulunabilir. $a \in I$ olacağından, $\exists k \geq 0$ için $a \in (a_k)$ dolayısı ile $(a) \in (a_k)$ bulunur. Diğer taraftan $(a_k) \subset I = (a)$ olduğundan, $I = (a) = (a_k) \subsetneq (a_{k+1})$ çelişkisi elde edilir. Bu durumda başlangıçta kabul ettiğimiz gibi bir x elemanı yoktur. Yani $\forall 0 \neq x \in R$, $x \notin U_R$ elemanı birtakım indirgenemez elemanların çarpımıdır.

Şimdi yazılışın tekliğini, yani TAÇ tanımındaki (ii) özelliğini sağlayalım.

π_i ve λ_j ler indirgenemez elemanlar olmak üzere $x = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_s = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_t$ olsun. π_i lerin indirgenemez eleman oldukları göz önünde tutularak,

$$\pi_1 \mid \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_t \Rightarrow \exists i = 1, 2, \dots, t; \pi_1 \mid \lambda_i \Rightarrow \pi_1 \approx \lambda_i$$

olur. Sırayı ve ilgililiği göz önüne almadığımızdan, $\pi_1 = \lambda_1$ kabul edebiliriz. Tamlık bölgesinde kısaltma yapılabileceğinden, yukarıdaki eşitlikten π_1 ile λ_1 kısaltılarak $\pi_2 \dots \pi_s = \lambda_2 \dots \lambda_t$ bulunur.

$\pi_2 \mid \lambda_2 \dots \lambda_t$ olduğundan, yukarıdaki düşünce ile $\pi_2 = \lambda_2$ alınabilir ve bu şekilde devam edilirse tüm π_i lerin, sıra ve ilgililik düşünülmezsizin λ_j lerden biri olduğu anlaşılır. π_i ve λ_j lerin rolleri simetrik olduğundan $r = s$ olacağı da açıktır.

Tanım 2.45 R bir tamlık bölgesi olmak üzere $a, b \in R$ olsun. Eğer $b = ac$ olacak şekilde bir $c \in R$ varsa, a elemanı b yi **böler** veya a elemanı b nin bir **çarpanıdır** denir ($a \mid b$) [9]. R bir tamlık bölgesi ve $a, b \in R$ olsun.

i) $c \mid a$ ve $c \mid b$ olacak biçimde bir $c \in R$ varsa, c ye a ile b nin bir **ortak bölüneni** denir.

ii) c , a ile b nin herhangi bir ortak bölüneni olsun. Eğer a ile b nin her e ortak bölüneni için

$e \mid c$ ise c ye, a ile b nin bir **en büyük ortak böleni (ebob)** denir [8].

Tanım 2.46 Ebob leri aritmetik birimler (birimsel elemanlar) olan elemanlara **aralarında asal** denir ve $(a, b) = 1$ ile gösterilir [9].

Teorem 2.47 R bir TİB olsun. R nin her ikisi de sıfır olmayan her iki elemanının bir en büyük ortak böleni vardır [8].

Teorem 2.48 R bir TİB, a ve b ikisi de sıfır olmayan iki eleman olsunlar. a ve b nin ebob leri $x, y \in R$ olmak üzere, $xa + yb$ şeklindedir. Özel olarak, $(a, b) = 1$ ise $1_R = xa + yb$ olacak şekilde $\exists x, y \in R$ bulunabilir [8].

2.6 Matrislerin Merkezleştiricileri

Bir R halkasının bir s elemanının merkezleştiricisi $Mer_R(s)$ ile gösterilir. Değişmeli bir R halkası üzerindeki $n \times n$ matris halkası $M_n(R)$, değişmeli olmayan halkaya bir örnektir. $B \in M_n(R)$ olmak üzere $Mer_{M_n(R)}(B)$ Marais[10] e göre günümüze kadar karakterize edilememiştir. Sadece bazı özel durumlarda verilmiştir.

Tanım 2.49 R bir halka, x bir bilinmeyen ve $a_0, a_1, \dots, a_k$ lar R nin elemanları olmak üzere,

$$a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$$

şeklindeki bir ifadeye R den katsayılı bir **polinom** denir. R den katsayılı tüm polinomların kümesi $R[x]$ ile gösterilir [8].

Tanım 2.50 $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ ve $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_kx^k$, $R[x]$ de iki polinom olsunlar.

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow \forall i \geq 0, \quad a_i = b_i,$$

yani, **polinomların eşitliği** karşılıklı katsayıların eşit olması ile mümkündür [8].

Tanım 2.51 R nin her bir elemanı da bir polinom olarak düşünülebilir. Bu polinomlara **sabit polinomlar** denir. Bütün katsayıları sıfır olan polinoma **sıfır polinom** denir. [8]

Tanım 2.52 R bir halka ve $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in R[x]$ ve $a_n \neq 0$ ise a_n ye **polinomun baş katsayısı** ve n ye de **polinomun derecesi** denir. $p(x)$ polinomunun derecesi $der(p(x))$ ile gösterilir [8].

Tanım 2.53 R bir halka ve $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$, $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n \in R[x]$ olsun. $\forall i \geq 0$ için, $c_i = a_i + b_i$ olmak üzere, **p ve q polinomlarının toplamı,**

$$p(x) + q(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_tx^t, \quad t = \max\{m, n\}$$

ile tanımlanır [8].

Tanım 2.54 Yukarıdaki gibi $p(x)$ ve $q(x)$ polinomlarının çarpımı $\forall i \geq 0$ için,

$$c_i = a_ib_0 + a_{i-1}b_1 + \dots + a_0b_i \text{ olmak üzere,}$$

$$p(x)q(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_kx_k$$

ile tanımlanır. Burada $k = m + n$ dir [8].

Tanım 2.55 $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in R[x]$ ve $r \in R$ olsun.

$p(r) = a_0 + a_1r + \dots + a_nr^n \in R$ ye p polinomunun r deki **değeri** denir. Eğer $r \in R$ için,

$p(r) = 0$ ise r ye **p polinomunun bir kökü** denir [8].

Teorem 2.56 R bir halka olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

- (i) $R[x]$ de bir halkadır.
- (ii) R birimli ise $R[x]$ de birimli,
- (iii) R değişmeli ise $R[x]$ de değişmeli,
- (iv) R tamlık bölgesi ise $R[x]$ de tamlık bölgesidir.
- (v) R bir cisim ise $R[x]$ bir temel ideal bölgesidir.
- (vi) R bir tamlık bölgesi ve $\forall f, g \in R[x]$ için,

$$\text{der}((fg)) = \text{der}(f) + \text{der}(g)$$
dir.

(vii) R değişmeli bir halka ve $f, g \in R[x]$ olsun. $g(x) \neq 0$ ve $g(x)$ polinomunun baş katsayısı terslenebilsin. Bu durumda,

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \quad \text{ve} \quad \text{der}(r) < \text{der}(g)$$

olacak şekilde tek türlü olarak belirli $\exists q, r \in R[x]$ polinomları bulunabilir.

Tanım 2.57 Bir R halkası üzerinde tanımlanan $n \times n$ tipindeki (karesel) tüm matrisler kümesi $M_n(R)$ ile gösterilir. Karesel bir matriste esas köşegen dışındaki elemanların tümü sıfır ise; böyle bir matrise **diagonal (köşegen) matris** denir. Diagonal matriste esas

köşegen üzerindeki elemanlar birbirine eşitse, buna **skaler matris** denir. $a \neq 0$ ve $a \in R$

olmak üzere, $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ bir skaler matristir.

Tanım 2.58 A , $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer $A - \lambda I$ matrisinin determinantını açarsak, λ değişken olmak üzere n . dereceden bir polinom elde ederiz. Bu polinoma ($P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$) **karakteristik polinom**, $\det(A - \lambda I) = 0$ denkleminde ise A nın **karakteristik denkleminde** denir [11].

Örnek 2.59 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ matrisini ele alalım.

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$ olur. Karakteristik polinom, $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$

olarak bulunur.

Tanım 2.60 Bir $A \in M_n(R)$ matrisi ve $g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in R[x]$ polinomunu alalım. Eğer $g(A) = a_0I + a_1A + \dots + a_nA^n = 0$ yani $g(A)$ sıfır matrisi oluyorsa, A matrisi $g(x)$ i sağlar denir. A nın sağlamış olduğu polinomlar içinde en küçük dereceli polinoma A nın **minimal polinomu** denir ve $m_A(x)$ ile gösterilir [12].

Önerme 2.61 Bir A matrisinin karakteristik polinomu ile minimal polinomu aynı köklere sahiptir fakat köklerin katlılıkları farklı olabilir.

Örnek 2.62 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin minimal polinomunu bulalım. Önce A nın

karakteristik polinomunu bulalım. $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3$ dir. Minimal

polinom, karakteristik polinom ile aynı köklü ve $m(A) = 0$ olacak şekilde en küçük dereceli polinom olur. Diğer taraftan $A^2 = 0$ ve $A \neq 0$ olduğundan A nın minimal polinomu $m_A(x) = x^2$ dir.

$R[x]$, R halkası üzerinde x değişkenine bağlı polinom halkası olmak üzere

$$\{f(B): f(x) \in R[x]\} \subseteq \text{Mer}_{M_n(R)}(B) \quad (1)$$

olduğu kolayca görülür. Ayrıca

$$\{f(B): f(x) \in R[x]\} = \text{Mer}_{M_n(R)}(\text{Mer}_{M_n(R)}(B))$$

olduğu bilinmektedir [13].

Aşağıdaki teorem (1) kapsama özelliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli şartları ifade etmektedir.

Teorem 2.63 B , F cismi üzerinde bir $n \times n$ matris olsun.

$Mer_{M_n(F)}(B) = \{f(B) : f(x) \in F[x]\}$ olması için gerek ve yeter şart B nin karakteristik polinomu ile minimum polinomunun eşit olmasıdır [12].

$Mer_{M_n(R)}(B)$ ye geçmeden önce bazı tanımları ve teoremleri verelim.

Tanım 2.64 R bir halka olmak üzere, $M = \{x \in R : \forall y \in R, xy = yx\}$ kümesine **halkanın merkezi** denir. $a \in R$ olmak üzere, $Mer(a) = \{x \in R : ax = xa\}$ ye a nın **merkezleştiricisi** denir [8].

Önerme 2.65 R bir halka ve $a \in R$ olmak üzere,

(i) $M = \{x \in R : \forall y \in R, xy = yx\}$ bir idealdir.

(ii) $Mer(a) = \{x \in R : ax = xa\}$ bir idealdir.

(iii) $M = \bigcap_{a \in R} Mer(a)$ dir. [8]

Tanım 2.66 R değişmeli bir halka ve K boş olmayan bir alt kümesi olsun. $K_0 = \{a \in R : \forall x \in K, ax = 0\}$ kümesine K nın **sıfırlayıcısı** denir ve $sfr(K)$ ile gösterilir. $x \in R$ iken $\{x\}$ in sıfırlayıcısı $sfr(x)$ ile gösterilir [9].

Önerme 2.67 R değişmeli bir halka olsun I . ve J , R nin idealleri olmak üzere,

(i) $sfr(I)$ bir idealdir.

(ii) $sfr(I + J) = sfr(I) \cap sfr(J)$ dir [9].

Halkalardaki merkezleştirici problemi Matris halkalarına taşındığında çok daha büyük bir problem halini almaktadır. Matrisler fizikte, matematiğin çeşitli dallarında ve iktisatta çeşitli denklemlerin çözümünde çok kullanışlı olduğundan matrislerin merkezleştiricileri bu alanlarda önemli katkılar sağlamaktadır.

Teorem 2.68 B bir F cismi üzerinde 2×2 boyutlu bir matris ise,

$Mer_{M_2(F)}(B) = \begin{cases} M_2(F) & , B \text{ skaler bir matris ise} \\ \{f(B) : f(x) \in F[x]\} & , B \text{ skaler bir matris değilse} \end{cases}$ dir [10].

İspat: Öncelikle B nin skaler bir matris olması durumunu ele alalım. $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ olsun.

$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M_2(F)$ alalım.

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae & af \\ ag & ah \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae & af \\ ag & ah \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

olduğundan $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in \text{Mer}_{M_2(F)}(B)$ elde edilir.

Şimdi ikinci duruma bakalım. $B \in M_2(F)$ olsun. $q(x)$ B nin karakteristik polinomu olsun. Karakteristik polinomun monik olmasından dolayı ve Cayley-Hamilton Teoremi[15] uyarınca $q(B) = 0$ olur. Bu durumda B nin minimum polinomu $m(x)$ olmak üzere $\text{der}(q(x)) = \text{der}(m(x))$ olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. B , 2×2 boyutlu bir matris olduğundan $\text{der}(q(x)) = 2$ dir. B skaler olmayan bir matris olduğundan $\forall t \in F$ için $B \neq tI$ ve buradan $\forall s, t \in F$ için $sB + tI \neq 0$ olur. Böylece $\text{der}(m(x)) \geq 2$ olur. Sonuçta $\text{der}(q(x)) = \text{der}(m(x))$ bulunur.

Teorem 2.69 R değişmeli bir halka ve $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M_2(R)$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{Mer}_{M_2(R)}(B)$
- (ii) $(a - d)f = b(e - h)$, $bg = cf$, $c(e - h) = (a - d)g$
- (iii) $A' + vE$ ile B değişmeli
- (iv) $A' + vE$ ile $B' + wE$ değişmeli
- (v) A' ile B' değişmelidir [10].

Burada $A' = \begin{bmatrix} a - d & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ ve $B' = \begin{bmatrix} e - h & f \\ g & 0 \end{bmatrix}$ olarak alınacaktır.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) $A \in \text{Mer}_{M_2(R)}(B)$ olduğundan $AB = BA$ dir. Yani,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{dir. Buradan da,}$$

$$ae + bg = ae + fc, \tag{1}$$

$$af + bh = be + fd, \quad (2)$$

$$ce + dg = ag + ch, \quad (3)$$

$$cf + dh = gb + dh, \quad (4)$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu eşitlikler yardımıyla, $bg = fc, (a - d)f = b(e - h)$ ve $c(e - h) = (a - d)g$ elde edilir.

(ii)⇒(iii): Şimdi $A' + vE$ ile B nin değişmeli olduğunu gösterelim. Yani

$(A' + vE)B = B(A' + vE)$ olduğunu göstermeye çalışıyoruz.

$$A' + vE = \begin{bmatrix} a - d + v & b \\ c & v \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$(A' + vE)B = \begin{bmatrix} ae - de + ve + bg & af - df + vf + bh \\ ce + vg & cf + bh \end{bmatrix} \quad \text{ve}$$

$$B(A' + vE) = \begin{bmatrix} ae - de + ev + cf & eb + fv \\ ag - dg + vg + hc & gb + hv \end{bmatrix} \text{ eşitliklerinde karşılıklı elemanların eşit olduğu görülür.}$$

(iii)⇒ (iv): $A' + vE$ ile B değişmeli olsun.

$A' + vE$ ile A değişmeli, aynı şekilde B ile de $B' + wE$ değişmelidir. Değişmeliliğin geçişme özelliğinden $A' + vE$ ile $B' + wE$ değişmelidir.

(iv)⇒ (v): $A' + vE$ ile $B' + wE$ değişmeli olsun.

$$(A' + vE)(B' + wE) = (B' + wE)(A' + vE) \text{ olduğundan,}$$

$A'B' + A'wE + vEB' + vEwE = B'A' + B'vE + wEA' + wEvE$ dir. Burada eşitliğin her iki yanında gerekli kısaltmalar yapıldıktan sonra $A'B' = B'A'$ elde edilir. Yani A' ile B' değişmelidir.

(v)⇒ (i): A' ile B' değişmeli olsun. Bu durumda $A'B' = B'A'$ dir. Yani,

$$\begin{bmatrix} a - d & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e - h & f \\ g & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e - h & f \\ g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - d & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (a-d)(e-h) + bg & (a-d)f \\ c(e-h) & cf \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e-h)(a-d) + cf & (e-h)b \\ g(a-d) & bg \end{bmatrix}$$

Matrislerin eşitliğinden $(a-d)(e-h) + bg = (e-h)(a-d) + cf \Rightarrow bg = cf$

$(a-d)f = (e-h)b \Rightarrow af + bh = be + df$ (2 numaralı eşitlik)

$c(e-h) = g(a-d) \Rightarrow ce + dg = ag + ch$ (3 numaralı eşitlik) elde edilir.

Bu durumda A' ile B' değişmeli ise A ve B matrisleri de değişmeli ve $A \in Mer_{M_2(R)}(B)$ dir.

Teorem 2.70 $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M_2(R)$ ve R bir TAÇ bölge olsun. Bu durumda,

$$Mer(B) = \begin{cases} M_2(R), e = h, f = 0 \text{ ve } g = 0 \text{ ise} \\ \left\{ m^{-1}w \begin{bmatrix} e-h & f \\ g & 0 \end{bmatrix} + vE : v, w \in R \right\}, e-h, f \neq 0 \text{ veya } g \neq 0 \end{cases}$$

eşitliği ile bulunur. Burada m^{-1} , $m = Ebbob(e-h, f, g)$ olmak üzere m nin tersini ifade etmektedir[10].

İspat: $e-h, f, g$ den en az birinin 0 dan farklı olduğunu ve A' ve B' nün bir önceki teoremden belirtildiği gibi olduğunu kabul edelim. Teorem 2.6.21 (ii) deki denklem sistemlerini kullanarak $(e-h) \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Böylece (ii) kullanılarak $e-h \mid (a-d)f$ ve $e-h \mid (a-d)g$ olması $e-h \mid m(a-d)$ sonucunu doğurur. Bu durumda $w \in R$ olmak üzere $m(a-d) = w(e-h)$ bulunur. (ii) denklem sistemi tekrar kullanılarak $(a-d)f = b(e-h)$ ve $c(e-h) = (a-d)g$ eşitliklerinden $mb = wf$ ve $mc = wg$ elde edilir. Böylece $mA' = wB'$ elde edilir ve bir önceki teorem yardımıyla ispat tamamlanır.

Örnek 2.71 $R = \mathbb{Z}$ ve $B = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ve $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ olsun. Bir önceki teorem yardımıyla,

$$Mer_{M_2(\mathbb{Z})}(B) = \left\{ \begin{bmatrix} 2w+v & w \\ 2w & v \end{bmatrix} : v, w \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$Mer_{M_2(\mathbb{Z})}(D) = \left\{ \begin{bmatrix} v & 3w \\ 0 & v \end{bmatrix} : v, w \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{elde edilir. Ayrıca } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ için}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Mer_{M_2(\mathbb{Z})}(C) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$$

$$2 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} 2$$

olur ki bu $Mer_{M_2(\mathbb{Z})}(C) = M_2(R)$ demektir.

Teorem 2.72 S, R halkasının bir alt halkası ve $s \in S$ alalım. Bu durumda

$$Mer_S(s) = S \cap Mer_R(s) \text{ dir [10].}$$

İspat: $t \in Mer_S(s) \Leftrightarrow t \in S \subseteq R$ ve $ts = st \Leftrightarrow t \in S \cap Mer_R(s)$ dir.

Teorem 2.73 R değişmeli bir halka ve $B = [b_{ij}] \in M_n(R)$ olsun. Bu durumda

$$A_{ij} = \left(\bigcap_{k, k \neq j} sfr(\hat{b}_{jk}) \right) \cap \left(\bigcap_{k, k \neq i} \hat{b}_{ki} \right) \cap (sfr(\hat{b}_{ii} - \hat{b}_{jj}))$$

olduğunda,

$$\Psi(Mer(B)) + [A_{ij}] \subseteq Mer(\hat{B}) \text{ elde edilir [10].}$$

İspat:

$$\Psi(Mer(B)) + [A_{ij}] \subseteq Mer(\hat{B}) \quad (5)$$

olduğu açıktır. Öyleyse şimdi

$$[A_{ij}] \subseteq Mer(\hat{B}) \quad (6)$$

olduğunu göstermeliyiz. $[a_{ij}] \in [A_{ij}]$ olsun. Bu noktadan hareketle $\hat{B}[a_{ij}] - [a_{ij}]\hat{B}$

ifadesinden alınan r . satır ve n . sütun elemanı aşağıda belirtilen ifadedir:

$$\hat{b}_{r1}\hat{a}_{1t} + \dots + \hat{b}_{r,r-1}\hat{a}_{r-1,t} + \hat{b}_{rr}\hat{a}_{rt} + \hat{b}_{r,r+1}\hat{a}_{r+1,t} + \dots + \hat{b}_{rn}\hat{a}_{nt} -$$

$$(\hat{a}_{r1}\hat{b}_{1t} + \hat{a}_{r2}\hat{b}_{2t} + \dots + \hat{a}_{r,t-1}\hat{b}_{t-1,t} + \hat{a}_{rt}\hat{b}_{tt} + \hat{a}_{r,t+1}\hat{b}_{t+1,t} + \dots + \hat{a}_{rn}\hat{b}_{nt}) \quad (7)$$

$\hat{a}_{lt} \in sfr(\hat{b}_{rl})$ olduğundan $r \neq l$ olacak şekilde her l için ve $\hat{a}_{rq} \in sfr(\hat{b}_{qt})$ olduğundan

$q \neq t$ olacak şekilde her q için $[A_{ij}]$ nin tanımı gereğince (7) aşağıdaki sonuca eşittir:

$$\hat{b}_{rr}\hat{a}_{rt} - \hat{a}_{rt}\hat{b}_{tt} = \hat{a}_{rt}(\hat{b}_{rr} - \hat{b}_{tt}) \quad (8)$$

$\hat{a}_{rt} \in sfr(\hat{b}_{rr} - \hat{b}_{tt})$ olduğundan $[A_{ij}]$ nin tanımı gereğince (8) eşitliği $\hat{0}$ a eşittir. Böylece

$[a_{ij}]\hat{B} - \hat{B}[a_{ij}]$ den alınan r . satır, n .sütun elemanı $\hat{0}$ dır. Bu (6) kapsama bağıntısını

ispatlar.

BÖLÜM 3

I-TERSLENEBİLİRLİK ve *I*-MATRİSLER

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe R yi bir TAÇ bölge olarak kabul edeceğiz. I , R de sıfırdan farklı bir ideal ve $k = \text{Ebob}(I) \neq 0$ olarak alınacaktır.

Teorem 3.1 R bir TAÇ bölge olsun. Eğer $(b, k) \neq 1$ ise bir $\hat{b} = \theta(b) \in R/I$ elemanı bir sıfır bölendir[10].

İspat $\text{Ebob}(b, k) \neq 1$ olsun. $p_1, \dots, p_m$ birbirinden farklı asallar ve $n_1, n_2, \dots, n_m \geq 1$ olmak üzere $k = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$ olsun. $\text{Ebob}(b, k) \neq 1$ olduğundan $i \in \{1, \dots, m\}$ olacak şekilde $\exists p_i$ için $p_i \mid b$ dir. Diğer taraftan $\exists x \in R$ vardır öyle ki $kx \in I$ fakat

$$(p_1^{n_1} \dots p_{i-1}^{n_{i-1}} p_i^{n_i-1} p_{i+1}^{n_{i+1}} \dots p_m^{n_m})x \notin I \text{ dir.}$$

Buradan

$$\begin{aligned} b p_1^{n_1} \dots p_{i-1}^{n_{i-1}} p_i^{n_i-1} p_{i+1}^{n_{i+1}} \dots p_m^{n_m} x &= b' p_i (p_1^{n_1} \dots p_{i-1}^{n_{i-1}} p_i^{n_i-1} p_{i+1}^{n_{i+1}} \dots p_m^{n_m})x \\ &= b' kx \in I \end{aligned}$$

olduğundan $a = (p_1^{n_1} \dots p_{i-1}^{n_{i-1}} p_i^{n_i-1} p_{i+1}^{n_{i+1}} \dots p_m^{n_m})x$ alınırsa $\hat{a}_I \neq \hat{0}_I$ olduğu halde

$\hat{b}_I \hat{a}_I = \hat{0}_I$ bulunur. Yani $\hat{b}_I$ bir sıfır bölendir.

Teorem 3.2 R bir TİB olsun. $k \in R$ olmak üzere bir $\hat{b} \in R/\langle k \rangle$ elemanının terslenebilir olması için gerek ve yeter şart $\text{Ebob}(b, k) = 1$ olmasıdır [10].

İspat R bir TİB ve $\text{Ebob}(b, k) = 1$ olduğundan $u, v \in R$ olmak üzere $ub + vk = 1$ dir.

$I = \langle k \rangle$ alındığında,

$$\hat{u}_k \hat{b}_k = \hat{u}_k \hat{b}_k + \underbrace{\hat{v}_k \hat{k}_k}_{=\hat{0}_k} = \hat{1}_k \text{ elde edilir.}$$

Tersine olarak $\hat{b}_k, R/\langle k \rangle$ da terslenebilir ise bir en az bir $\hat{u}_k \in R/\langle k \rangle$ için $\hat{b}_k \hat{u}_k = \hat{1}_k$ veya başka bir ifadeyle bazı $v \in R$ için $bu = 1 + vk$ elde edilir. Şimdi $d = \text{Ebob}(b, k)$ olsun. Bu durumda $d \mid bu$ ve $d \mid vk$ olur ki bu da $d \mid 1$ demektir. Yani d birimsel elemandır. Neticede $\text{Ebob}(b, k) = 1$ olur.

Tanım 3.3 Bir $\hat{b} \in R/I$ elemanının bir I -ters görüntüsü; $\text{Ebob}(r, k) = 1$ ($\delta=0$ veya $\delta \mid k$) olmak üzere $r\delta$ şeklindedir. Eğer $\hat{b}=\hat{0}$ ise $\delta:=0$ olarak tanımlanır. r ve δ sırasıyla, $r\delta$ ters görüntüsünün **aralarında asal parçası** ve **bölen parçası** olarak adlandırılır. Eğer $\hat{r}, \hat{b}$ nün en az bir ters görüntüsü $\widehat{r\delta}$ için R/I da terslenebilir ise $\hat{b}$ elemanına **I -terslenebilir** denir [10].

Not 3.4 Tanım 3.3 e ilave olacak biçimde eğer bir $\hat{b} \in R/I$ I -terslenebilir ise o zaman bir $\hat{c} \in R/I$ vardır ki: $\hat{c}\hat{b}$ çarpımı k nın böleni olacak şekilde bir δ ters görüntüsüne sahiptir. Bu durumun tersi genellikle doğru değildir. Aşağıda aksi bir örnek gösterilmektedir [10].

Örnek 3.5 $R = \mathbb{Z}[x]$ ve $I = \langle 5x^2 \rangle$ olsun. $\hat{b}_I = 3x^2$ alındığında $\hat{b}_I$ I -terslenebilir değildir fakat $\hat{2}_I \hat{b}_I = \theta_I(6x^2 - 5x^2) = \widehat{x^2}_I$ olur. Buradan da $\text{Ebob}(I) = 5x^2 = k$ olduğundan $x^2 \mid k$ olduğu görülür.

Teorem 3.6 Bir $\hat{b}_I \in R/I$ nın bir ters görüntüsünün bölen kısmı δ olsun. $\hat{c}_I \hat{b}_I = \hat{\delta}_I$ olacak şekilde bir $\hat{c}_I \in R/I$ olması için gerek ve yeter şart $\widehat{b\delta^{-1}}_I$ nın tersi $\hat{c}_I$ olmak üzere R/I 'da terslenebilir olmasıdır [10].

İspat $\hat{b}_I \in R/I$ I -terslenebilir olsun. Bu durumda, $\theta(r\delta) = \hat{b}$ için $\hat{r}$ terslenebilirdir. Yani, $r\delta + I = b + I$

$$(r + I)(\delta + I) = b + I$$

$$\delta + I = (r^{-1} + I)(b + I)$$

elde edilir ki burada $r^{-1} + I = \theta(r^{-1}) = \hat{c}_I$ dır.

Tersine olarak, $\hat{c}_I \hat{b}_I = \hat{\delta}_I$ ve $\hat{c}_I$ terslenebilir olsun. $\hat{c}_I$ nın tersi $\hat{c}_I^{-1}$ olmak üzere her iki tarafı ters elemanla işleme sokalım. Bu durumda $\hat{b} = \hat{c}_I^{-1} \hat{\delta}_I$ olmak üzere istenen elde edilir.

Teorem 3.7 Bir $\hat{b}_I \in R/I$ elemanın I -terslenebilir olması için gerek ve yeter şart $\hat{c}_I \hat{b}_I = \hat{\delta}_I$ olacak biçimde terslenebilir bir $\hat{c}_I \in R/I$ elemanın mevcut olmasıdır. Burada $\delta, \hat{b}_I$ elemanın I -ters görüntüsünün bölen kısmıdır [10].

İspat $\hat{b}_I$, I -terslenebilir ise Tanım 3.3 den $\hat{c}_I \hat{b}_I = \hat{\delta}_I$ olacak biçimde $\hat{c}_I \in R/I$ elemanı vardır. Tersine olarak, $\hat{c}_I \hat{b}_I = \hat{\delta}_I$ olacak biçimde terslenebilir bir $\hat{c}_I \in R/I$ elemanın mevcut olduğunu kabul edelim. $\hat{c}_I$ terslenebilir olduğundan $b_I = \hat{c}_I^{-1} \delta_I$ elde edilir. $c' \in R$ $\hat{c}_I^{-1}$ nün ters görüntüsü olsun. c' sıfır bölen olmadığından $\text{Ebob}(c', k) = 1$ dir. $c' \delta$, $\hat{b}_I$ elemanın bir I -ters görüntüsü olduğundan istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.8 R/I halkasındaki her eleman bir I -ters görüntüye sahiptir [10].

İspat $\hat{b} \in R/I$ olsun. k birim eleman ise sonuç açıktır. k nın sıfırdan ve birimden farklı olduğunu kabul edelim. R TAÇ bölge olduğundan $k = p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s}$ olacak biçimde ($m_1, \dots, m_s \geq 1$) $p_1, \dots, p_s$ asalları mevcuttur. $1 \neq 0$, $\hat{0}$ nün bir ters görüntüsü olduğundan $\hat{b}$ nün sıfır olmadığını kabul edelim. b , $\hat{b}$ nün ters görüntüsü olsun. Yine R TAÇ bölge olduğundan b ,

$r_0 p_1^{q_1} \dots p_s^{q_s}$ biçiminde ifade edilebilir ($p_i \nmid r_0, i=1, \dots, s$ ve $q_1, \dots, q_s \geq 0$). Bu nedenle $\text{Ebob}(r_0, k) = 1$ ve

$$\hat{b} = \widehat{r_0 p_1^{q_1} \dots p_s^{q_s}} \text{ elde edilir.}$$

Her $\widehat{p_i^{q_i}}$ nün $\text{Ebob}(r_i, k) = 1$ ve $t_i \leq m_i$ iken $r_i p_i^{t_i}$ ters görüntüsüne sahip olduğunu kabul edelim. Öyleyse

$$\hat{b} = \widehat{r_0} \left(\widehat{p_1^{q_1}} \right) \dots \left(\widehat{p_s^{q_s}} \right) = \widehat{r_0} \widehat{r_1} \dots \widehat{r_s} \left(\widehat{p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s}} \right) = \theta(r p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s})$$

elde edilir ki burada $r = r_0 r_1 \dots r_s$ 'dir. $\text{Ebob}(r_i, k) = 1$ ($i=0, 1, \dots, s$) olduğundan $\text{Ebob}(r, k) = 1$ olur. Yine $t_i \leq m_i$ olduğundan ($i=1, \dots, s$)

$$\delta := p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s} \mid p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s} = k$$

olması $r \cdot \delta$ nın $\hat{b}$ nün bir I -ters görüntüsü olduğunu gösterir. Şimdi her $\widehat{p_i^{q_i}}$ nün $(r_i, k) = 1$ ve $t_i \leq m_i$ için $r_i p_i^{t_i}$ şeklinde bir ters görüntüye sahip olduğunu gösterelim.

Eğer $q_i \leq m_i$ ise $t_i = q_i \leq m_i$ ve $\text{Ebob}(r_i, k) = 1$ için $p_i^{q_i} = 1 p_i^{q_i}$ olur ki bu $r_i = 1$ olması demektir.

Şimdi $m_i < q_i$ durumunu ele alalım. $p_i^{m_i+1} \nmid k$ olduğundan $p_i \nmid a'$ olacak biçimde bir $a = a' k \in I$ elemanı vardır. Bundan sonra

$$\widehat{p_i^{q_i}} = p_i^{q_i} + a'k$$

ve

$$p_i^{q_i} + a'k = p_i^{q_i} + a'p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s} = p_i^{m_i} (p_i^{q_i-m_i} + a'p_1^{m_1} \dots p_{i-1}^{m_{i-1}} p_{i+1}^{m_{i+1}} \dots p_s^{m_s})$$

olduğundan

$$r_i = p_i^{q_i-m_i} + a'p_1^{m_1} \dots p_{i-1}^{m_{i-1}} p_{i+1}^{m_{i+1}} \dots p_s^{m_s}$$

olmak üzere $p_i^{m_i} r_i = r_i p_i^{m_i}$ ifadesi $\widehat{p_i^{q_i}}$ 'nin bir ters görüntüsüdür.

$$p_i \mid p_i^{p_i-q_i} (q_i > m_i) \text{ ve } p_i \nmid a'p_1^{m_1} \dots p_{i-1}^{m_{i-1}} p_{i+1}^{m_{i+1}} \dots p_s^{m_s}$$

olduğundan $p_i \nmid r_i$ elde edilir. Ayrıca tüm $l \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, s\}$ için

$$p_l \nmid p_i^{q_i-m_i} \text{ ve } p_l \mid a'p_1^{m_1} \dots p_{i-1}^{m_{i-1}} p_{i+1}^{m_{i+1}} \dots p_s^{m_s}$$

olması $p_l \nmid r_i$ demektir. Böylece r_i ve k aralarında asal ve $t_i = m_i \leq m_i$ elde edilir.

Şimdi R/I halkasındaki elemanlar için I -terslenebilirlik üzerinde duralım.

Teorem 3.9 Eğer R bir TİB ise R/I halkasındaki her eleman I -terslenebilirdir [10].

İspat $\hat{b}_l \in R/I$ olsun. Bu durumda $k = \text{Ebob}(I)$ için $(r, k) = 1$ ve $\delta \mid k$ olacak şekilde $\hat{b}_l$ nün $r\delta$ şeklinde bir ters görüntüsü vardır. R bir TİB olduğundan $a \in R$ olmak üzere $I = \langle a \rangle$ alabiliriz. Bu durumda $\text{Ebob}(I) = a$ olur ve böylece $\delta \mid a$ elde edilir.. Buradan $(r, a) = 1$ ve bunun sonucunda $u, v \in R$ için

$$1 = ru + av$$

$$1 + I = (ru + av) + I \quad (av \in I)$$

$$1 + I = ru + 1$$

$$= (r + I)(u + I)$$

$$\theta(1) = \theta(r)\theta(u)$$

bulunur. Yani $\hat{r}$ birimseldir.

Örnek 3.10 (a) $R = \mathbb{Z}$ ve $I = \langle 12 \rangle$ olsun. $12=2^2 \cdot 3$ olduğundan Teorem 3.8 in kanıtında yer alan işlem basamakları uygulanırsa

$$\hat{9}_I = \theta(2^0 \cdot 3^2) = \theta_I(1 \cdot (3^2 + 12)) = \theta_I(3(7)) = (\widehat{7 \cdot 3})_I$$

$\text{Ebob}(7,12)=1$ ve $3 \mid 12$ 'dir. $7_I \in \mathbb{Z}_{12}$ 'de terslenebildiğinden $\hat{9}_I$ I -terslenebilirdir.

(b) Şimdi $R = \mathbb{Z}[x]$ ve I sıfırdan farklı bir ideal ve $2^4 x^4 \in I$ ve $k = \text{Ebob}(I) = 2^3 x^3$ olsun.

$$\widehat{24x^5}_I + \widehat{8x^4}_I + \widehat{4x^2}_I = \theta_I(24x^5 + 8x^4 + 4x^2) = \theta_I((6x^3 + 2x^2 + 1)2^2 x^2),$$

$\text{Ebob}(6x^3 + 2x^2 + 1, 2^3 x^3)=1$ ve $2^2 x^2 \mid 2^3 x^3$ olur.

$$\widehat{6x^3}_I + \widehat{2x^2}_I + \hat{1}_I = \theta_I((3x + 1)2x^2 + 1) \text{ ifadesinden,}$$

$$\begin{aligned}
& \theta_I((3x+1)2x^2+1) \\
&= \theta_I((3x+1)2x^2+1) \theta_I(1-(3x+1)2x^2+(3x+1)^2 2^2 x^4 - (3x+1)^3 2^3 x^6) \\
&= \theta_I(1+(3x+1)2x^2 - (3x+1)2x^2 - (3x+1)^2 2^2 x^4 + (3x+1)^2 2^2 x^4 + \\
& \quad (3x+1)^3 2^3 x^6 - (3x+1)^3 2^3 x^6 - (3x+1)^4 2^4 x^8) \\
&= \theta_I(1 - (3x+1)^4 x^4 2^4 x^4) \\
&\text{elde edilir. } 2^4 x^4 \in I \text{ olduğundan } (3x+1)^4 x^4 2^4 x^4 \in I \text{ olur. Bu durumda } \widehat{6x^3}_I + \widehat{2x^2}_I + \\
& \quad \widehat{1}_I \text{ } R/I \text{ halkasında terslenebilir olduğundan } \widehat{24x^5}_I + \widehat{8x^4}_I + \widehat{4x^2}_I \text{ } I\text{-terslenebilirdir.}
\end{aligned}$$

Örnek 3.5 den R nin bir TAÇ bölge olması halinde Teorem 3.9 un genellikle sağlanmadığını söyleyebiliriz. Bu durum I nin bir temel ideal olması halinde de aynıdır. Teorem 3.12, Teorem 3.15, Teorem 3.16 ve Teorem 3.20 bize R/I halkasında bir elemanın TİB olmayıp TAÇ bölge olması halinde hangi şartlar altında I -terslenebilir olamayacağı hakkında yardımcı olacaktır. Bir $\hat{b} \in R/I$ elemanının I -terslenebilir olmadığını göstermek için $\hat{b}$ nün her $r\delta$ I -ters görüntüsü için $\hat{r}$ nün R/I da terslenemediğini göstermemiz gerekmektedir. Bununla birlikte eğer $\hat{b}$ temel eleman ise (Tanım 3.14), Teorem 3.15 de $\hat{b}$ nün en azından bir $r\delta$ I -ters görüntüsü için $\hat{r}$ nün R/I halkasında terslenemediğini göstermenin yeterli olacağını kanıtlayacağız. İlk olarak R/I halkasında bir elemanın I -ters görüntülerinin bölen kısımları arasında ilişki kurup bu ilişkiyi karakterize edelim [10].

Teorem 3.11 R bir TAÇ bölge olmak üzere $\hat{0} \neq \hat{b} \in R/I$ olsun. Bu şartlar altında δ nın $\hat{b}$ nün bir I -ters görüntüsünün bölen kısmı olması için gerek ve yeter şart $\text{Ebob}(b, k) = \delta$ olmasıdır. Yani $\hat{b}$ nün I -ters görüntülerinin bölen kısımları ilgilidir [10].

İspat $r\delta$, $\hat{b}$ nün bir I -ters görüntüsü olsun. O halde $b = r\delta + sk$ olur. $\text{Ebob}(r, k) = 1$ olduğundan $\text{Ebob}(b, k) = \text{Ebob}(r\delta + sk, k) = \text{Ebob}(\delta, k) = \delta$ dır.

Tersine b ve k nın en büyük ortak bölenleri ilgili olsun. R/I da her elemanın en az bir I - ters görüntüye sahip olduğunu Teorem 3.8 den biliyoruz. Öyleyse keyfi bir t birimi için $\hat{b}$ nün bazı I -ters görüntülerinin bölen kısımlarının $t\delta$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur. $\widehat{rt^{-1}t\delta} = \widehat{r\delta} = \hat{b}$ olduğundan $\text{Ebob}(rt^{-1}, k) = 1$ ve $t\delta \mid k$ elde edilir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Sonuç 3.12 $\hat{0} \neq \hat{b} \in R/I$ olsun. Eğer $\text{Ebob}(b, k) = 1$ iken $\hat{b}$ nün I -terslenebilir olması için gerek ve yeter şart $\hat{b}$ nün R/I halkasında terslenebilir olmasıdır [10].

Sonuç 3.13 k birim eleman ise Teorem 3.12 den her $\hat{0} \neq \hat{b} \in R/I$ elemanının I -terslenebilir olması için gerek ve yeter şart $\hat{b}$ nün R/I halkasında terslenebilir olmasıdır [10].

Tanım 3.14 R bir TAÇ bölge olsun. $k = p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s} \in R$ birimden farklı, $p_1, \dots, p_s$ birbirinden farklı asallar, $m_1, \dots, m_s \geq 1$ ve $\hat{b} \in R/I$ olsun. Eğer $\delta = \text{Ebob}(b, k) = p_1^{q_1} \dots p_s^{q_s}$ ise $\hat{b}$, R/I nın bir **temel elemanı** olarak tanımlanır. Eğer $\widehat{\delta^{-1}k}$ temel eleman ise $\delta = p_1^{q_1} \dots p_s^{q_s}$ $q_i \geq 1$ ve $i=1, \dots, s$ için $\hat{b}$, q -**temel eleman** olarak adlandırılır [10].

Teorem 3.15 R bir TAÇ bölge olmak üzere k birimden farklı ve $\hat{0} \neq \hat{b} \in R/I$ bir temel eleman olsun. Bu durumda ya $\hat{b}$ nün her $r\delta$ I -ters görüntüsü için $\hat{r}$, R/I da terslenebilir ya da hiçbir $\hat{r}$ R/I da terslenebilir değildir [10].

İspat Teorem 3.8'e göre $\hat{b}$ nün R de $\text{Ebob}(r, k) = 1$ olacak biçimde bir $r\delta$ ters görüntüsü bulunmaktadır. Buna göre tüm $r\delta$ ters görüntüleri aşağıdaki biçimdedir:

$$r\delta + cp_1^{m_1}p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s} \quad (9)$$

($cp_1^{m_1}p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s} \in I$)

Teorem 3.11 e göre $\hat{b}$ nün tüm I -ters görüntülerinin bölen kısımları $u\delta$ (u birim eleman) biçiminde olduğundan (9) ifadesinin devamı olarak $\hat{b}$ nün aralarında asal kısımları şu şekildedir:

$$u^{-1}r + cu^{-1}p_1^{m_1-q_1} \dots p_s^{m_s-q_s} \quad (10)$$

($cp_1^{m_1}p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s} \in I$ ve u birimsel eleman)

Şimdi $\hat{r}$ nün R/I da terslenebilir olduğunu ve tersinin $\hat{y}$ olduğunu kabul edelim. Yani

$$yr = 1 + dp_1^{m_1}p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}$$

elde edilir. ($dp_1^{m_1}p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s} \in I$) Eğer $\hat{b}$ nün bir I -ters görüntüsünün aralarında asal kısmının θ dönüşümü altındaki görüntüsünün terslenebilir olduğunu gösterebilirsek kanıt tamamlanmış olur.

$u^{-1}r + cu^{-1}p_1^{m_1-q_1} \dots p_s^{m_s-q_s}$ ifadesi $\hat{b}$ nün bir I -ters görüntüsünün aralarında asal kısmı olsun. Ayrıca $l \in \mathbb{N}$ için

$$2^l > \max \left\{ \frac{m_i}{m_i - q_i} : i \in \{1, \dots, s\} \right\} > 0 \quad (11)$$

olsun. Yazımı kolaylaştırmak amacıyla

$$v = dp_1^{q_1} \dots p_s^{q_s} + cy \quad \text{ve} \quad w = p_1^{m_1-q_1} p_2^{m_2-q_2} \dots p_s^{m_s-q_s}$$

olsun. O halde

$$\begin{aligned} & (u^{-1}r + cu^{-1}p_1^{m_1-q_1} \dots p_s^{m_s-q_s})yu(1-vw)(1+(vw)^{2^1})(1+(vw)^{2^2}) \dots (1+(vw)^{2^{l-1}}) \\ &= (1 + dp_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s} + cy p_1^{m_1-q_1} p_2^{m_2-q_2} \dots p_s^{m_s-q_s}) \\ & \quad (1-vw)(1+(vw)^{2^1})(1+(vw)^{2^2}) \dots (1+(vw)^{2^{l-1}}) \\ &= (1+vw)(1-vw)(1+(vw)^{2^1}) \dots (1+(vw)^{2^{l-1}}) \\ &= 1 - (vw)^{2^l} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $1 \leq i \leq s$ olsun. $m_i > q_i$ olduğundan (11) ifadesinin devamında

$$2^l(m_i - q_i) > \frac{m_i}{m_i - q_i}(m_i - q_i) = m_i$$

elde edilir ve böylece

$$w^{2^l} = ap_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}$$

bazı $a \in R$ için elde edilir. $dp_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s} \in I$ ve $cp_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s} \in I$ olduğundan

$vw^{2^l} \in I$ ve $(vw)^{2^l} \in I$ elde edilir. Bu nedenle

$$\begin{aligned} \theta &= ((u^{-1}r + cu^{-1}p_1^{m_1-q_1} \dots p_s^{m_s-q_s})yu(1-vw)(1+(vw)^{2^1}) \\ & \quad (1+(vw)^{2^2}) \dots (1+(vw)^{2^{l-1}})) \\ &= \theta(1 - (vw)^{2^l}) = \hat{1} \end{aligned}$$

$$\text{Böylece, } \theta \left(yu(1-vw)(1+(vw)^{2^1})(1+(vw)^{2^2}) \dots (1+(vw)^{2^{l-1}}) \right)$$

ifadesinin θ dönüşümü altında $\hat{b}$ nün keyfi seçilmiş bir I -ters görüntüsünün aralarında asal kısmının tersi olduğunu göstermiş olduk.

Sonuç 3.16 $p \in R$ asal olmak üzere eğer $I = \langle p^n \rangle$ ise ($n > 0$) o zaman her $\hat{0} \neq \hat{b} \in R/I$ elemanı temel elemandır. Bu nedenle Teorem 3.15 R/I halkasındaki tüm elemanlara uygulanabilir. Ayrıca $\hat{0} \neq \hat{b}$ nün tüm ters görüntülerinin bir I -ters görüntü olduğunu belirtmeye yarar. Şimdi Teorem 3.15 in $q_i = m_i$ olması durumunda bazı i ler için genellikle sağlanmadığını göstereceğiz [10].

Örnek 3.17 $R = \mathbb{Z}[x]$ ve $k = 2x$ (2 ve $x \in \mathbb{Z}[x]$ 'de asaldır) ve $I = \langle 2x \rangle$ olsun. $\hat{0} \neq \hat{x} \in \mathbb{Z}[x]/\langle 2x \rangle$ elemanını ele alalım. Bu durumda $1.x$ ve $3.x$ $\hat{x}$ nün, aralarında asal kısımları

sırasıyla 1 ve 3 olmak üzere, $\langle 2x \rangle$ -ters görüntüleri olmasına rağmen $\widehat{1} \in \mathbb{Z}[x]/\langle 2x \rangle$ 'de terslenebilir ama $\widehat{3}$ terslenemez.

Teorem 3.18 k birimden farklı ve $\delta, \widehat{b}$ nün bir I -ters görüntüsünün bölen kısmı olmak üzere $\widehat{0} \neq \widehat{b} \in R/I$ temel eleman olsun. Bu durumda $\widehat{c}_I \widehat{b}_I = \widehat{\delta}_I$ olacak biçimde bir $\widehat{c}_I \in R/I$ olması için gerek ve yeter şart $\widehat{b}$ nün I -terslenebilir olmasıdır [10].

İspat $r\delta, \widehat{b}$ nün bir I -ters görüntüsü olsun. $\widehat{c}_I \widehat{b}_I = \widehat{\delta}_I$ olacak biçimde bir $\widehat{c}_I \in R/I$ bulunduğunu kabul edelim. Teorem 3.6 dan $cr = cb\delta^{-1} = 1 + \gamma\delta^{-1}k$ eşitliği $\gamma k \in I$ olacak şekilde bazı $\gamma \in R$ için elde edilir. $p_1, \dots, p_s$ asallar ve $q_1, \dots, q_s \geq 1$ için $k = p_1^{q_1} \dots p_s^{q_s}$ olduğunu kabul edelim. $\widehat{b}_I$ temel ideal olduğundan $k\delta^{-1}$, $w = p_1^{v_1} \dots p_s^{v_s}$ şeklindedir. ($v_1, \dots, v_s \geq 1$)

Şimdi $2^l > \max\{q_1, \dots, q_s\}$ olacak şekilde $l \in \mathbb{N}$ olsun. O halde $(1 + \gamma\delta^{-1}k)(1 - \gamma\delta^{-1}k)(1 + (\gamma\delta^{-1}k)^{2^1}) \dots (1 + (\gamma\delta^{-1}k)^{2^{l-1}}) = 1 - (\gamma\delta^{-1}k)^{2^l}$ olması aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$cr(1 - \gamma\delta^{-1}k)(1 + (\gamma\delta^{-1}k)^{2^1}) \dots (1 + (\gamma\delta^{-1}k)^{2^{l-1}}) = 1 - (\gamma\delta^{-1}k)^{2^l}$$

$(k \setminus (\delta^{-1}k)^{2^l})$. $\gamma k \in I$ olduğundan $(\gamma\delta^{-1}k)^{2^l} \in I$ elde edilir. Böylece $\widehat{r}_I$ nün R/I da terslenebilir olduğu gösterilmiş ve bunun sonucunda $\widehat{b}_I$ nün R/I da I -terslenebilir olduğu sonucunu elde etmiş olduk. Tersi Teorem 3.4 den elde edilir.

Not 3.19 k birimden farklı olmak üzere $\widehat{0} \neq \widehat{b} \in R/I$ temel eleman olsun. Teorem 3.7 ve Teorem 3.18 kullanılarak $\widehat{b}_I \widehat{c}_I = \widehat{\delta}_I$ olacak biçimde R/I' 'da bir $\widehat{c}_I$ elemanının var olup olmadığını anlamak için yalnızca R/I da terslenebilir elemanları düşünmeliyiz [10].

Teorem 3.20 $k \in R$ birimden ve sıfırdan farklı olsun. Eğer $\widehat{b} \in R/I$ $b' + 1$ şeklinde bir ters görüntüye sahipse ($\widehat{b}'$ q -temel ideal ve $\widehat{b}' \widehat{k} \in I$) $\widehat{b}$ R/I da terslenebilirdir [10].

Not 3.21 Teorem 3.20 nin tersi genelde doğru değildir. Mesela $\widehat{3} = (\widehat{2+1})$ $\mathbb{Z}_5$ 'de $5 \nmid 2$ olmasına rağmen terslenebilirdir.

Örnek 3.22 $R = F[x, y]$ ve $I = \langle y^5 \rangle$ olsun. $\widehat{x^5}_I \in F[x, y]/\langle y^5 \rangle$ de terslenemediğinden Teorem 3.16 dan I -terslenebilir olamaz. Ayrıca $Ebob(x^5, y^5) = 1$ olduğundan Teorem 3.12 gereğince $\widehat{x^5}_I$ nün yine I -terslenebilir olmadığı gösterilir.

Tanım 3.23 Bir $\begin{bmatrix} \hat{e}_I & \hat{f}_I \\ \hat{g}_I & \hat{h}_I \end{bmatrix} \in M_2(R/I)$ matrisi eğer $\langle \hat{e}_I - \hat{h}_I, \hat{f}_I \rangle = \langle \hat{t}_I \rangle$ veya

$\langle \hat{e}_I - \hat{h}_I, \hat{g}_I \rangle = \langle \hat{t}_I \rangle$ veya $\langle \hat{f}_I, \hat{g}_I \rangle = \langle \hat{t}_I \rangle$ ($t \mid k$) şartlarından birini taşıyorsa bu matris Marais[16] e göre **I-matris** olarak adlandırılır [16].

Teorem 3.24 $\hat{a}_I, \hat{b}_I \in R/I$ olsun. Eğer $t \mid k$ olacak şekilde $\langle \hat{a}_I, \hat{b}_I \rangle = \langle \hat{t}_I \rangle$ ise $t = \text{Ebob}(a, b, k)$ elde edilir [16].

Tanım 3.25 Bir matris aşağıdaki şartları taşıyorsa bir **I-matris** olur.

(i) $\hat{e}_I - \hat{h}_I, \hat{f}_I$ ve $\hat{g}_I$ elemanlarından ilk önce birini seçelim. Seçtiğimiz elemanı $\hat{a}_I$ ile gösterelim. $\hat{c}_I \hat{a}_I = \hat{\delta}_I$ olacak şekilde bir $\hat{c}_I \in R/I$ mevcuttur. Burada $\delta, \hat{a}_I$ nün bir I-ters görüntüsü $r\delta$ olmak üzere bölen kısmını oluşturmaktadır. Bir elemanı böyle seçtikten sonra kalan iki eleman $\hat{a}_I$ ve $\hat{b}_I$ olarak adlandırılıp benzer bir yol takip edilebilir.
(ii) $\hat{a}_{\langle \delta \rangle}$ ve $\hat{b}_{\langle \delta \rangle}$ elemanlarının ilk önce birini seçelim. Seçtiğimiz bu elemanı $\hat{\beta}_{\langle \delta \rangle}$ ile gösterirsek $\hat{d}_{\langle \delta \rangle} \hat{\beta}_{\langle \delta \rangle} = \hat{t}_{\delta}$ ($t \mid \delta$) olacak biçimde bir $\hat{d}_{\langle \delta \rangle} \in R/\langle \delta \rangle$ mevcuttur [10].

Not 3.26 δ nın birim eleman olması halinde Teorem 3.25(i) sağlanıyorsa 3.25 (ii) daima sağlanır.

Teorem 3.27 $\hat{a}_I, \hat{b}_I \in R/I$ olsun. Kabul edelim ki $\hat{a}_I$ 'nün bir I-ters görüntüsünün bölen kısmı δ olmak üzere $\hat{c}_I \hat{a}_I = \hat{\delta}_I$ şartını sağlayan bir $\hat{c}_I$ bulunsun. Bu durumda $t \mid k$ için $\langle \hat{a}_I, \hat{b}_I \rangle = \langle \hat{t}_I \rangle$ olması için gerek ve yeter şart $\hat{d}_{\langle \delta \rangle} \hat{b}_{\langle \delta \rangle} = \hat{t}_{\delta}$ olacak biçimde bir $\hat{d}_{\langle \delta \rangle}$ 'nın bulunmasıdır [10].

İspat Kabul edelim ki $\delta \hat{a}_I$ 'nün bir I-ters görüntüsünün bölen kısmı olmak üzere $\hat{c}_I \hat{a}_I = \hat{\delta}_I$ şartını sağlayan bir $\hat{c}_I \in R/I$ bulunsun. Teorem 3.24 kullanılarak kabul edelim ki $t = \text{Ebob}(\delta, b, k) = \text{Ebob}(\delta, b)$ için $\langle \hat{a}_I, \hat{b}_I \rangle = \langle \hat{\delta}_I, \hat{b}_I \rangle = \langle \hat{t}_I \rangle$ olsun. O halde $t \nmid \delta \nmid k$ olduğundan $\alpha\delta + \beta b \equiv t + I$ bazı $\alpha, \beta \in R$ için elde edilir. Böylece $\alpha\delta + \beta b = t + \gamma\delta$ (bazı $\gamma \in R$) ve $\beta b = t + (\gamma - \alpha)\delta$ elde edilir.

Tersi açıktır.

Teorem 3.28 Eğer $\hat{e}_I - \hat{h}_I, \hat{f}_I$ veya $\hat{g}_I$ R/I da terslenebilir ise $\begin{bmatrix} \hat{e} & \hat{f} \\ \hat{g} & \hat{h} \end{bmatrix} \in M_2(R/I)$ matrisi bir I-matristir [10].

İspat Kabul edelim ki $\hat{c}_I \in \{\hat{e}_I - \hat{h}_I, \hat{f}_I, \hat{g}_I\} R/I$ halkasında terslenebilir olsun. O zaman Teorem 3.12 den $\hat{c}_I$ I-terslenebilirdir ve $\hat{c}_I$ bölen kısmı 1 olmak üzere $c \cdot 1$ biçiminde bir I-ters görüntüsüne sahiptir. Böylece Teorem 3.4, Teorem 3.24 ve Teorem 3.26 yardımıyla istenen sonuç elde edilir.

Aşağıdaki teorem Teorem 3.4, Teorem 3.9 ve Teorem 3.25 in direkt bir sonucudur.

Teorem 3.29 R bir TİB ise $M_2(R/I)$ halkasındaki her matris bir I -matrisdir. [10]

Şimdi Teorem 3.29 un TAÇ bölgede genellikle sağlanmadığını örnekle gösterelim.

Örnek 3.30 $R = \mathbb{Z}[x]$ ve I , R de sıfırdan farklı bir ideal olsun. $2^4 x^4 \in I$ ve $k = 2^3 x^3$ olsun.

(a) da I -matrise bir örnek ve (b) de I -matris olmayan bir matris örnek gösterilecektir.

(a) $\hat{B}_I = \begin{bmatrix} \widehat{7x^2}_I & \widehat{24x^5}_I + \widehat{8x^4}_I + \widehat{4x^2}_I \\ \widehat{14x}_I & \hat{0}_I \end{bmatrix} \in M_2(R/I)$ olsun. Örnek 3.10 (b) de

$\widehat{24x^5}_I + \widehat{8x^4}_I + \widehat{4x^2}_I$ ifadesinin I-terslenebilir olduğunu ve bölen kısmının $\delta = 2^2 x^2$ olduğunu görmüştük. $\widehat{7x^2}_{\langle \delta \rangle} = -\widehat{1x^2}_{\langle \delta \rangle}$ olduğundan $\widehat{7x^2}_{\langle \delta \rangle}$ $\langle \delta \rangle$ -terslenebilirdir. Böylece Teorem 3.4 ve Teorem 3.25 kullanılarak $\hat{B}_I$ bir I -matristir sonucuna varılır.

(b) $\hat{B}_I = \begin{bmatrix} \hat{3}_I & \widehat{24x^5}_I + \widehat{8x^4}_I + \widehat{4x^2}_I \\ \widehat{14x}_I & \hat{0}_I \end{bmatrix} \in M_2(R/I)$

olsun. İlk olarak $\langle \hat{3}_I, \widehat{24x^5}_I + \widehat{8x^4}_I + \widehat{4x^2}_I \rangle$ ve $\langle \widehat{14x}_I, \widehat{24x^5}_I + \widehat{8x^4}_I + \widehat{4x^2}_I \rangle$ ideallerini ele alalım. Örnek 3.10 (b) de $\widehat{24x^5}_I + \widehat{8x^4}_I + \widehat{4x^2}_I$ ifadesinin I -terslenebilir olduğunu ve bölen kısmının $\delta = 2^2 x^2$ olduğunu görmüştük. $\hat{3}_{\langle \delta \rangle}$ ve $\widehat{14x}_{\langle \delta \rangle} = \hat{7}_{\langle \delta \rangle} \widehat{2x}_{\langle \delta \rangle}$ elemanlarının her ikisi de temel eleman olduğundan Teorem 3.15 den $\hat{3}_{\langle \delta \rangle}$ ve $\widehat{14x}_{\langle \delta \rangle}$ elemanlarının her ikisi de $\langle \delta \rangle$ -terslenebilir olamaz. Bu nedenle $\hat{B}_I$ matrisinin bir I -matris olması için gerek ve yeter şart $\langle \hat{3}_I, \widehat{14x}_I \rangle = R/I$ olmasıdır. Bu durumda $\hat{B}_I$ bir I -matris olamaz.

BÖLÜM 4

BİR I -MATRİSİN MERKEZLEŞTİRİCİSİ

Bu bölümün amacı $M_2(R/I)$ halkasında bir I -matrisin merkezleştiricisinin somut bir tanımını elde etmektir. Bunun için R yi bir TAÇ bölge, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $k = Ebob(I)$ alacağız. Ayrıca TİB olmayıp TAÇ bölge olan ve $M_2(R/I)$ halkasında Teorem 2.73 de değinilen ters kapsamanın sağlanmadığı bir matrisin I -matris olamayacağını örnekle göstereceğiz.

Bu bölümde son olarak R nin bir TAÇ bölge olup R/I halkasının bir tamlık bölgesi olmaması halinde $n \geq 3$ biçimindeki her matris için Teorem 2.73 de gösterilen eşitliği sağlamayan bir matrisin $M_n(R)$ de bulunduğunu bir örnekle göstereceğiz. [17]

Teorem 4.1 R bir TAÇ bölge ve I, R de sıfırdan farklı bir ideal olsun. $\hat{B}_I = \begin{bmatrix} \hat{e}_I & \hat{f}_I \\ \hat{g}_I & \hat{h}_I \end{bmatrix} \in$

$M_2(R/I)$ bir I -matris olsun. Bu durumda [18] yardımıyla

$$Mer(\hat{B}) = \Psi(Mer(B)) + \begin{bmatrix} \hat{0} & sfr(\hat{g}) \cap sfr(\hat{e} - \hat{h}) \\ sfr(\hat{g}) \cap sfr(\hat{e} - \hat{h}) & sfr(\hat{f}) \cap sfr(\hat{g}) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$= \Psi(Mer(B)) + \begin{bmatrix} sfr(\hat{f}) \cap sfr(\hat{g}) & sfr(\hat{g}) \cap sfr(\hat{e} - \hat{h}) \\ sfr(\hat{f}) \cap sfr(\hat{e} - \hat{h}) & \hat{0} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$= \Psi(Mer(B)) + \begin{bmatrix} sfr(\hat{f}) \cap sfr(\hat{g}) & sfr(\hat{g}) \cap sfr(\hat{e} - \hat{h}) \\ sfr(\hat{f}) \cap sfr(\hat{e} - \hat{h}) & sfr(\hat{f}) \cap sfr(\hat{g}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

olur [16].

İspat Teorem 2.69 (ii) denklem sisteminde simetri özelliğini kullanmak Teorem 3.24 yardımıyla $t = \text{Ebob}(f, g, k)$ olacak biçimde $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle \hat{t} \rangle$ eşitliğini elde etmek için yeterli olur. $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ olacak şekilde $\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{bmatrix} \in M_2(R/I)$ olduğunu kabul edelim. Yani $AB \equiv BA + I$ olacak biçimde $A \in M_2(R)$ dir. $c(e - h) \equiv (a - d)g + I$ ve $t \mid g, k$ olduğundan $t \mid c(e - h)$ elde edilir. $m = \text{Ebob}(e - h, f, g, k)$ olsun. Bu durumda $\text{Ebob}(e - h, t) = m$ olur ve bu da $t \mid cm$ sonucunu doğurur. Benzer biçimde $(a - d)f = b(e - h) + I$ durumu $t \mid bm$ neticesini sağlar. $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle \hat{t} \rangle$ olduğundan $\hat{t} = \hat{\alpha}\hat{f} + \hat{\beta}\hat{g}$ olacak biçimde $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in R$ vardır. Yani $t \equiv \alpha f + \beta g + I$ olur. Şimdi $w = \alpha f + \beta c$ olacak biçimde $w \in R$ olsun, o halde $t \mid wm$ dir. $vt = wm$ olacak biçimde $v \in R$ alalım. Teorem 2.69 (ii) yardımıyla $fA' \equiv bB' + I$ ve $gA' \equiv cB' + I$ kullanılarak $wB' \equiv tA' + I$ elde edilir. B' ifadesini mB'' olarak yazalım. O zaman $vtB'' = wmB'' = wB' \equiv tA' + I$ elde edilir.

$\hat{K} = \begin{bmatrix} \hat{e}' & \hat{f}' \\ \hat{g}' & \hat{h}' \end{bmatrix}$ matrisi $A' - vB''$ nün $M_2(R/I)$ halkasındaki görüntüsü ve $L = vB''$ olsun.

Bu durumda Teorem 2.70 den $L \in \text{Mer}(B)$ $\hat{t}\hat{K} = \hat{0}$ ve $\hat{A}' = \hat{L} + \hat{K}$ elde edilir.

Burada $\hat{K} \hat{B}'$ ile değişmeli olup bu nedenle $\hat{B}$ ile de değişmelidir. Böylece $(\hat{e}' - \hat{h}')\hat{f} = \hat{f}'(\hat{e} - \hat{h})$, $\hat{f}'g = \hat{g}'f$ ve $\hat{g}'(\hat{e} - \hat{h}) = (\hat{e}' - \hat{h}')\hat{g}$ elde edilir. Fakat $(\hat{e}' - \hat{h}')\hat{t} = \hat{0}$ ve $t \mid f$ olduğundan $(\hat{e}' - \hat{h}')\hat{f} = \hat{0}$ olur. Benzer biçimde $(\hat{e}' - \hat{h}')\hat{g} = \hat{0}$, $\hat{f}'g = \hat{0}$, $\hat{f}'(\hat{e} - \hat{h}) = \hat{0}$, $\hat{g}'f = \hat{0}$ ve $\hat{g}'(\hat{e} - \hat{h}) = \hat{0}$ elde edilir. Böylece

$$\hat{K} \subseteq \begin{bmatrix} \text{sfr}(\hat{f}) \cap \text{sfr}(\hat{g}) & \text{sfr}(\hat{g}) \cap \text{sfr}(\hat{e} - \hat{h}) \\ \text{sfr}(\hat{f}) \cap \text{sfr}(\hat{e} - \hat{h}) & \text{sfr}(\hat{f}) \cap \text{sfr}(\hat{g}) \end{bmatrix}$$

olur. $\hat{A} = \hat{A}' + d\hat{E}$ olması nedeniyle (14) eşitliğindeki $\subseteq$ kapsamı sağlanır.

Tersi Teorem 2.73 den elde edilir.

Örnek 4.2 Örnek 3.30 (a) daki $\hat{B}_I = \begin{bmatrix} \widehat{7x}_I & \widehat{24x^5}_I + \widehat{8x^4}_I + \widehat{4x^2}_I \\ \widehat{14x}_I & \hat{0}_I \end{bmatrix} \in M_2(R/I)$ matrisini

$I = \langle 5, 2^3x^3, 2^4x^4 \rangle$ idealiyle birlikte ele alalım. Teorem 4.1 (13) eşitliğini $\text{Mer}(\hat{B})$ yi bulmak için kullanalım. Teorem 2.70 kullanılarak,

$$\text{Mer}(B) = \left\{ \begin{bmatrix} h_1 + 7h_2 & (24x^4 + 8x^3 + 4x)h_2 \\ 14h_2 & h_1 \end{bmatrix} : h_1, h_2 \in Z[x] \right\} \quad (15)$$

elde edilir. Ayrıca

$$sfr(\widehat{7x}) \cap sfr(\widehat{14x}) = \langle \widehat{5 \cdot 2^3 x^2}, \widehat{2^4 x^3} \rangle$$

$$sfr(\widehat{14x}) \cap sfr(\widehat{24x^5 + 8x^4 + 4x^2}) = \langle \widehat{5 \cdot 2^2 x^2}, \widehat{2^3 x^3} \rangle$$

$$sfr(\widehat{7x}) \cap sfr(\widehat{24x^5 + 8x^4 + 4x^2}) = \langle \widehat{5 \cdot 2^3 x^2}, \widehat{2^4 x^3} \rangle$$

olur. Böylece (15) ve Teorem 4.1 (12) kullanılarak

$$\begin{aligned} Mer(\widehat{B}) = \Psi \left(\left\{ \begin{bmatrix} h_1 + 7h_2 & (24x^4 + 8x^3 + 4x)h_2 \\ 14h_2 & h_1 \end{bmatrix} : h_1, h_2 \in Z[x] \right\} \right) \\ + \begin{bmatrix} \widehat{0} & \langle \widehat{5 \cdot 2^3 x^2}, \widehat{2^4 x^3} \rangle \\ \langle \widehat{5 \cdot 2^3 x^2}, \widehat{2^4 x^3} \rangle & \langle \widehat{5 \cdot 2^2 x^2}, \widehat{2^3 x^3} \rangle \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \text{elde edilir.}$$

Not 4.3 Yukarıdaki örnekte

$$\Psi(Mer(B)) \not\subseteq \begin{bmatrix} sfr(\widehat{f}) \cap sfr(\widehat{g}) & sfr(\widehat{g}) \cap sfr(\widehat{e} - \widehat{h}) \\ sfr(\widehat{f}) \cap sfr(\widehat{e} - \widehat{h}) & sfr(\widehat{f}) \cap sfr(\widehat{g}) \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} sfr(\widehat{f}) \cap sfr(\widehat{g}) & sfr(\widehat{g}) \cap sfr(\widehat{e} - \widehat{h}) \\ sfr(\widehat{f}) \cap sfr(\widehat{e} - \widehat{h}) & sfr(\widehat{f}) \cap sfr(\widehat{g}) \end{bmatrix} \not\subseteq \Theta(Mer(B))$$

olduğuna dikkat edilmelidir. [10]

Teorem 3.29 a göre R bir TİB olmak üzere Teorem 4.1 R/I bölüm halkası üzerindeki tüm 2×2 biçimindeki matrislere uygulanabilir. Diğer bir ifadeyle TİB üzerine kurulan bölüm halkaları üzerindeki tüm 2×2 biçimindeki matrisler Teorem 2.73 deki eşitliği sağlar. Fakat bu durum R bir TAÇ bölge olmak üzere R/I bölüm halkasındaki 2×2 biçimindeki matrisler için geçerli değildir. Aşağıdaki örnek bunu gösterecektir. [10]

Örnek 4.4 $\widehat{B} = \begin{bmatrix} \widehat{x} + \widehat{y} & \widehat{y} \\ \widehat{x} & \widehat{x} \end{bmatrix} \in M_2(F[x, y]/\langle x^2 \rangle)$ olsun. Teorem 2.6.22(ii) den

$$Mer(B) = \left\{ \begin{bmatrix} h_1 & yh_2 \\ xh_2 & h_1 - yh_2 \end{bmatrix} : h_1, h_2 \in F[x, y] \right\} \quad (16)$$

elde edilir. (13) eşitliğinin sağ tarafının ikinci kısmı $sfr(\widehat{y}) = \widehat{0}$ olduğundan

$$\begin{bmatrix} sfr(\widehat{y}) \cap sfr(\widehat{x}) & sfr(\widehat{x}) \cap sfr(\widehat{y}) \\ sfr(\widehat{y}) \cap sfr(\widehat{y}) & \widehat{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} \end{bmatrix} \quad \text{olur.}$$

Ayrıca (13) eşitliğinin sağ tarafı

$$\left\{ \begin{bmatrix} \hat{h}_1 & \hat{y}\hat{h}_2 \\ \hat{x}\hat{h}_2 & \hat{h}_1 - \hat{y}\hat{h}_2 \end{bmatrix} : \hat{h}_1, \hat{h}_2 \in F[x, y]/\langle x^2 \rangle \right\}$$

ifadesine eşittir. Bu ifade $\begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{x} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{bmatrix}$ matrisini kapsamamaktadır. Halbuki doğrudan kontrol edildiğinde $\begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{x} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{bmatrix} \in \text{Mer}(\hat{B})$ olduğu görülmektedir.

Aşağıdaki örnekte R bir TAÇ bölge ve I bir ideal ve R/I halkası sıfır bölenleriyle birlikte ele alınacaktır. $n \geq 3$ biçimindeki her matris için bir $B \in M_n(R)$ matrisinin bulunduğu fakat bu matrisin Teorem 2.73 deki eşitliği sağlamadığı gösterilecektir.

Örnek 4.5 R bir TAÇ bölge, I R de bir ideal ve R/I halkası sıfır bölenli bir halka olsun. Bu nedenle $\hat{d}\hat{d}' \in R$ için $\hat{d}, \hat{d}' \neq \hat{0}$ olmak üzere $\hat{d}\hat{d}' = \hat{0}$ olduğunu kabul edelim.

Şimdi $B = \begin{bmatrix} 0 & d & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(R)$ olsun. $\hat{d} \neq \hat{0}$ olduğundan $d \neq 0$ olduğuna dikkat

edelim. B matrisinin karakteristik polinomu ile minimum polinomu birbirine eşit olduğundan Teorem 2.60 ve Teorem 2.72 yardımıyla

$$\text{Mer}_{M_3(R)}(B) = \left\{ a \begin{bmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & d & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in R \right\} \cap M_3(R)$$

olarak elde edilir ve $\Psi(\text{Mer}(B))$ üzerindeki her $(2,1)$ elemanı $\hat{0}$ olur. Ayrıca Teorem 2.73 deki gösterim kullanılarak

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} \hat{0} & \hat{0} & R/I \\ \hat{0} & \hat{0} & \text{sfr}(\hat{d}) \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece $\Psi(\text{Mer}(B)) + [A_{ij}]$ içindeki her matrisin $(2,1)$ elemanı $\hat{0}$ olur. Fakat direkt çarpım göstermektedir ki

$$\begin{bmatrix} \hat{d}' & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{d}' & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{d}' \end{bmatrix} \in \text{Mer}(\hat{B})$$

olur ve Teorem 2.73 deki eşitlik bu durumda sağlanmaz. Şimdi yine R bir TAÇ bölge, I R de bir ideal ve R/I sıfır bölenli bir halka olsun. Aşağıdaki matrisi göz önüne alalım.

$$B' = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & d & 1 & \circ \\ 0 & 0 & 1 & \circ \\ 0 & 0 & 0 & \circ \\ \hline & \circ & & \circ \end{array} \right] \in M_n(R).$$

Bu durumda,

$$\text{Mer}(B') \subseteq \left[\begin{array}{c|c} \text{Mer}(B) & R/I \\ \hline R/I & R/I \end{array} \right] \quad \text{ve} \quad [A_{ij}] \subseteq \left[\begin{array}{ccc|c} \hat{0} & \hat{0} & R/I & R/I \\ \hat{0} & \hat{0} & \mathbf{sfr}(\hat{d}) & R/I \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & R/I \\ \hline R/I & & & R/I \end{array} \right]$$

elde edilir.

$$\hat{A} := \left[\begin{array}{ccc|c} \hat{d}' & \hat{0} & \hat{0} & \widehat{\circ} \\ \hat{d}' & \hat{0} & \hat{0} & \widehat{\circ} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{d}' & \widehat{\circ} \\ \hline \widehat{\circ} & & & \widehat{\circ} \end{array} \right] \in \text{Mer}(\widehat{B'}),$$

olduğundan açıkça $\hat{A} \notin \Psi(\text{Mer}(B')) + [A_{ij}]$ dir. Yani Teorem 2.73 deki kapsama sağlanmaz.

BÖLÜM 5

I-ASAL ELEMANLAR

Bu bölümde R bir halka dendiğinde TAÇ bölge kastedilecektir. I , R nin bir ideali olsun. $\theta: R \rightarrow R/I$ bir halka homomorfizması olmak üzere bir $\hat{a} \in R/I$ elemanının ters görüntüsü $(r, k) = 1$ ve $\delta \mid k$ olmak üzere $r\delta$ biçiminde alınacaktır.

Tanım 5.1 R bir halka ve $\theta: R \rightarrow R/I$ örten bir homomorfizma olsun. $\hat{a}, \hat{b} \in R/I$ elemanlarının sırasıyla aralarında asal kısımları r_a, r_b ve bölen kısımları δ_a, δ_b olsun. $\hat{a}, \hat{b}$ nün $\hat{a} = \hat{r}_a \hat{\delta}_a$ ve $\hat{b} = \hat{r}_b \hat{\delta}_b$ olacak şekilde ters görüntüleri vardır. Eğer $\hat{r}_a \mid \hat{r}_b$ ise $\hat{a}, \hat{b}$ nü ***I*-böler** denir ve $\hat{a} \mid_I \hat{b}$ ile gösterilir.

Örnek 5.2 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası ve $\theta: \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}[x]/\langle 100x \rangle$ örten bir homomorfizma olsun. $\hat{a} = \widehat{14x}$ ve $\hat{b} = \widehat{84x}$ olsun. $\hat{a} = \widehat{7} \cdot \widehat{2x}$ ve $\hat{b} = \widehat{21} \cdot \widehat{4x}$ olarak yazıldığında $\hat{r}_a = \widehat{7}$ ve $\hat{r}_b = \widehat{21}$ olur ki bu durumda $\widehat{7} \mid \widehat{21}$ olduğundan $\widehat{14x} \mid_I \widehat{21x}$ olur.

Örnek 5.3 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası ve $\theta: \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}[x]/\langle 100x \rangle$ örten bir homomorfizma olsun. $\hat{a} = \widehat{14x}$ ve $\hat{b} = \widehat{6x}$ olsun. $\hat{a} = \widehat{14x}$ in ters görüntüleri

$$\hat{a} = \widehat{14x} = \widehat{7} \cdot \widehat{2x}$$

$$\hat{a} = \widehat{114x} = \widehat{57} \cdot \widehat{2x}$$

$$\hat{a} = \widehat{214x} = \widehat{107} \cdot \widehat{2x} = \widehat{7} \cdot \widehat{2x}$$

$$\hat{a} = \widehat{314x} = \widehat{157} \cdot \widehat{2x} = \widehat{57} \cdot \widehat{2x}$$

ve bu şekilde aralarında asal kısım $\widehat{7}$ ve $\widehat{57}$ olacak şekilde periyodik şekilde tekrar eden bir yapı oluşur. Aynı şekilde $\hat{b} = \widehat{6x}$ in ters görüntüleri

$$\hat{b} = \widehat{6x} = \widehat{3} \cdot \widehat{2x}$$

$$\hat{b} = \widehat{106x} = \widehat{53} \cdot \widehat{2x}$$

$$\hat{b} = \widehat{206x} = \widehat{103} \cdot \widehat{2x} = \widehat{3} \cdot \widehat{2x}$$

$$\widehat{b} = \widehat{306x} = \widehat{153 \cdot 2x} = \widehat{53 \cdot 2x}$$

olmak üzere aralarında asal kısım $\widehat{3}$ ve $\widehat{53}$ olacak şekilde periyodik şekilde tekrar eden bir durum ortaya çıkar. $\widehat{a}$ nün bütün ters görüntüleri alındığında $\widehat{b}$ nün hiçbir ters görüntüsünü bölemez. Yani $\widehat{r}_a \nmid \widehat{r}_b$ olduğundan $\widehat{a} \nmid_I \widehat{b}$ elde edilir.

Teorem 5.4 R bir halka(TAÇ) ve I R nin bir ideali olmak üzere $\theta: R \rightarrow R/I$ bir halka homomorfizması olsun. $\widehat{a}, \widehat{b} \in R/I$ ve $\widehat{u} \in R/I$ I -birimsel eleman olmak üzere,

- i) $\widehat{a} \mid_I \widehat{b} \Leftrightarrow \langle \widehat{r}_b \rangle \subseteq \langle \widehat{r}_a \rangle$
- ii) $\widehat{u} \in R/I$ I -birimsel eleman ise her $\widehat{a} \in R/I$ için $\widehat{u} \mid_I \widehat{a}$ olur.
- iii) $\widehat{u} \in R/I$ I - birimsel eleman ise $\langle \widehat{r}_u \rangle = R/I$ olur.

İspat i) $\Rightarrow$: $\widehat{a} \mid_I \widehat{b}$ ise $\widehat{a} = \widehat{r}_a \widehat{\delta}_a$ ve $\widehat{b} = \widehat{r}_b \widehat{\delta}_b$ olacak biçimde $r_a \delta_a$ ve $r_b \delta_b$ ters görüntüleri mevcuttur. I -bölmenin tanımından $\widehat{r}_a \mid \widehat{r}_b$ ve $\langle \widehat{r}_b \rangle \subseteq \langle \widehat{r}_a \rangle$ elde edilir.

$\Leftarrow$: $\langle \widehat{r}_b \rangle \subseteq \langle \widehat{r}_a \rangle$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\widehat{r}_b = \widehat{r}_a \widehat{c}$ olacak şekilde $\widehat{c} \in R/I$ vardır.

Bu durumda $\widehat{r}_a \mid \widehat{r}_b$ ve böylece $\widehat{a} \mid_I \widehat{b}$ elde edilir.

ii) $\widehat{u} \in R/I$ I -birimsel eleman ise $\widehat{u} = \widehat{r}_u \widehat{\delta}_u$ olacak şekilde $\widehat{r}_u \in R/I$ birimsel elemanı vardır. Bu durumda her $\widehat{a} \in R/I$ için $\widehat{r}_u \mid \widehat{a}$ ve böylece $\widehat{u} \mid_I \widehat{a}$ elde edilir.

iii) $\widehat{u} \in R/I$ I -birimsel eleman ise $\widehat{u} = \widehat{r}_u \widehat{\delta}_u$ olacak şekilde $\widehat{r}_u \in R/I$ birimsel elemanı vardır. Yani $\widehat{r}_u \widehat{r}_u^{-1} = \widehat{1}$ olur. Bu durumda $\langle \widehat{r}_u \rangle = \langle \widehat{1} \rangle = R/I$ olur.

Tanım 5.5 R bir halka ve $\theta: R \rightarrow R/I$ örten bir homomorfizma olsun. $\widehat{a}, \widehat{b} \in R/I$ elemanlarının sırasıyla aralarında asal kısımları r_a, r_b ve bölen kısımları δ_a, δ_b olsun. $\widehat{a}$ ve $\widehat{b}$ nün $\widehat{a} = \widehat{r}_a \widehat{\delta}_a$ ve $\widehat{b} = \widehat{r}_b \widehat{\delta}_b$ olacak şekilde ters görüntüleri vardır. Eğer $\widehat{a} \mid_I \widehat{b}$ ve $\widehat{b} \mid_I \widehat{a}$ ise $\widehat{a}$ ve $\widehat{b}$ **I -ilgilidir** denir ve $\widehat{a} \sim_I \widehat{b}$ ile gösterilir.

Teorem 5.6 $\widehat{a}, \widehat{b} \in R/I$ ve $\widehat{u} \in R/I$ I -birimsel eleman olmak üzere,

- i) $\widehat{a} \sim_I \widehat{b} \Leftrightarrow \langle \widehat{r}_b \rangle = \langle \widehat{r}_a \rangle$
- ii) $\widehat{a} \sim_I \widehat{b}$ bir denklik bağıntısıdır.

İspat i) $\widehat{a} \sim_I \widehat{b} \Leftrightarrow \widehat{a} \mid_I \widehat{b}$ ve $\widehat{b} \mid_I \widehat{a}$
 $\Leftrightarrow \langle \widehat{r}_b \rangle \subseteq \langle \widehat{r}_a \rangle$ ve $\langle \widehat{r}_a \rangle \subseteq \langle \widehat{r}_b \rangle$
 $\Leftrightarrow \langle \widehat{r}_a \rangle = \langle \widehat{r}_b \rangle$

elde edilir.

ii) Her $\widehat{a} \in R/I$ için $\widehat{a} \mid_I \widehat{a}$ olduğundan $\widehat{a} \sim_I \widehat{a}$ elde edilir.(Yansıma Özelliği)

$\hat{a} \sim_I \hat{b}$ ise $\hat{a} \mid_I \hat{b}$ ve $\hat{b} \mid_I \hat{a}$ olduğundan $\hat{b} \sim_I \hat{a}$ elde edilir. (Simetri Özelliği)

$\hat{a} \sim_I \hat{b}$ ve $\hat{b} \sim_I \hat{c}$ ise $\hat{r}_a \mid \hat{r}_b$ ve $\hat{r}_b \mid \hat{r}_c$ olduğundan $\hat{r}_a \mid \hat{r}_c$ elde edilir.

Benzer şekilde $\hat{r}_c \mid \hat{r}_b$ ve $\hat{r}_b \mid \hat{r}_a$ olduğundan $\hat{r}_c \mid \hat{r}_a$ elde edilir. Böylece $\hat{r}_a \mid \hat{r}_c$ ve $\hat{r}_c \mid \hat{r}_a$ dan $\hat{a} \mid_I \hat{c}$ ve $\hat{c} \mid_I \hat{a}$ elde edilir ki bu $\hat{a} \sim_I \hat{c}$ olması demektir. (Geçişme Özelliği) Böyle denklik bağıntısı olma şartlarını gösterdik.

Tanım 5.7 R bir halka ve $\theta: R \rightarrow R/I$ örten bir homomorfizma olsun. Bir $\hat{a} \in R/I$ elemanı sıfırdan ve birimsel elemanlardan farklı olmak üzere eğer $\hat{r}_a$, R/I halkasında indirgenemez ise $\hat{a}$ ne **I -indirgenemez** denir.

Örnek 5.8 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası ve $\theta: \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}[x]/\langle 12x \rangle$ bir halka homomorfizması olmak üzere $\widehat{10x} \in \mathbb{Z}[x]/\langle 12x \rangle$ alalım. $\widehat{10x} = \widehat{5} \cdot \widehat{2x}$ olarak yazıldığında $r = 5$ ve $\delta = 2x$ olur. Bu durumda $(5, 12x) = 1$ ve $\delta = 2x \mid 12x$ dir. $\widehat{5} \in \mathbb{Z}[x]/\langle 12x \rangle$ de indirgenemez olduğundan $\widehat{10x}$ I -indirgenemezdir.

Sonuç 5.9 R bir TİB ise R/I da her eleman I -terslenebilir olduğundan R/I bölüm halkasında I -indirgenemez eleman yoktur.

Tanım 5.10 R bir halka ve I R nin bir ideali olmak üzere $\theta: R \rightarrow R/I$ bir halka homomorfizması olsun. Bir $\hat{a} \in R/I$ elemanı sıfırdan ve birimsel elemanlardan farklı olmak üzere $\hat{r}_a$, R/I halkasında asal ise $\hat{a}$ ne **I -asal** denir.

Sonuç 5.11 R bir halka ve I R nin bir ideali olmak üzere $\theta: R \rightarrow R/I$ bir halka homomorfizması olsun. $\hat{a} \in R/I$ bir I -asal eleman olmak üzere $\hat{a} \mid_I \hat{b}\hat{c}$ iken $\hat{a} \mid_I \hat{b}$ veya $\hat{a} \mid_I \hat{c}$ olacak şekilde $\hat{b}, \hat{c} \in R/I$ vardır.

İspat $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in R/I$ alalım. $\hat{a} = \hat{r}_a \hat{\delta}_a$, $\hat{b} = \hat{r}_b \hat{\delta}_b$ ve $\hat{c} = \hat{r}_c \hat{\delta}_c$ olsun. $\hat{a} \in R/I$ bir I -asal olmak üzere $\hat{a} \mid_I \hat{b}\hat{c}$ olduğunda I -bölmenin tanımı gereği $\hat{r}_a \mid \hat{r}_b \hat{r}_c$ elde edilir. $\hat{r}_a$, R/I halkasında asal olduğundan $\hat{r}_a \mid \hat{r}_b \hat{r}_c$ iken $\hat{r}_a \mid \hat{r}_b$ veya $\hat{r}_a \mid \hat{r}_c$ yani $\hat{a} \mid_I \hat{b}$ veya $\hat{a} \mid_I \hat{c}$ dir.

Örnek 5.12 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası ve $\theta: \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}[x]/\langle 50x \rangle$ bir halka homomorfizması olmak üzere $\widehat{14x} \in \mathbb{Z}[x]/\langle 50x \rangle$ olsun. $\widehat{14x} = \widehat{7} \cdot \widehat{2x}$ olarak alınabilir. $\widehat{7} \in \mathbb{Z}[x]/\langle 50x \rangle$ de asal olduğundan $\widehat{14x}$ I -asaldır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmamızda bölüm halkalarında asallık, indirgenemezlik ve çarpanlara ayrılabilme özelliklerine farklı bir bakış açısıyla yaklaştık. İlerleyen çalışmalarda bir bölüm halkasının I -indirgenemezlerin çarpımı olarak tek türlü olarak yazılabilme durumuna bakılabilir. Ayrıca I -matrisler terslenebilme özelliği yerine I -indirgenemezlik özelliği üzerinden tanımlanıp bu durumdaki merkezleştiricilerine bakılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Samuel, P.(1968)., "Unique Factorization",The American Mathematical Monthly, 75:945-952.
- [2] Samuel, P.,(1971)., "About Euclidean Rings", J. Algebra, 19:282-301.
- [3] Samuel, P.,(1961)., "On Unique Factorization Domains", Illinois J. Mat.,5:1-17.
- [4] Galovich, S., (1978)., " Unique Factorization Rings With Zero Divisors", Math. Mag, 51:276-283.
- [5] Bouvier, A., (1974)., "Structure Des Anneaux a Factorisation Unique", Publ. Dep. Math., 11:39-49 .
- [6] Fletcher, C.R., (1969)., " Unique Factorization Rings", Proc. Cambridge Philos. Soc., 65:579-583.
- [7] Ağargün, G., Anderson, D.D., Leon, S.V.,(1999)., " Unique Factorization Rings With Zero Divisors", Com. İn Algebra,27:1967-1974.
- [8] Çallıalp, F., (2009)., Örneklerle Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- [9] Karakaş, H. İ., (2010).,Cebir Dersleri, Tüba Yayınları, Ankara.
- [10] Marais, S.M., (2010)., "The Centralizer of an I - matrix, R an UFD", Algebra Colloquim, (Baskıda).
- [11] Pullman, N.J.,(1976).,Matrix Theory and Its Applications, Dekker, New York
- [12] Pullman, N.J.,(1976).,Matrix Theory and Its Applications, Dekker, New York
- [13] Hou, X.,(1997)., "On The Centralizer of The Centralizer of a Matrix", Linear Algebra Applications, 256: 251-261
- [14] Brown, W.C.,(1992)., Matrices Over Commutative Rings, Marcel Dekker, New York
- [15] Hungerford T.W., (1974)., Algebra, Springer-Verlag, New York
- [16] Marais, S.M.,(2011)., "On The Centralizer of an I - matrix, I a Principal İdeal and R UFD",arxiv:1112.1532v1[math. RA]
- [17] Marais, S.M,(2010)., Contributions To Centralizers On Matrix Rings, Doktora Tezi, Stellenboch Üniversitesi, Matieland

- [18] Suprenenko, D.A., Tyshkevich R.I., (1968)., Commutative Matrices, Academic Press, New York ve Londra

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Bünyamin ŞAHİN
Doğum Tarihi ve Yeri :09.08.1985 ve Erzurum
Yabancı Dili :İngilizce
E-posta :shnbnymn25@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	İlk. Mat. Öğr.	Atatürk Üniversitesi	2008
Lise	Fen Bilimleri	Erzurum Anadolu Lisesi	2003

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Kurum	Görevi
2008-2013	Büyük Halkalı Orta Okulu	Öğretmen