

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GALILEAN DÜZLEMDE
HAREKETLİ KOORDİNAT SİSTEMİ
VE
EULER SAVARY FORMÜLÜ**

MÜCAHİT AKBIYIK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. SALİM YÜCE**

İSTANBUL, 2012

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GALILEAN DÜZLEMİNDE HAREKETLİ KOORDİNAT SİSTEMİ
VE EULER SAVARY FORMÜLÜ

Mücahit AKBIYIK tarafından hazırlanan tez çalışması 28.06.2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU

Bahçeşehir Üniversitesi

Prof. Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR

Bahçeşehir Üniversitesi



ÖNSÖZ

Bu tezde ilk olarak, Galilean düzleminde yapılacak çalışmalara yardımcı olması amacıyla Galileo Galilean'ın Görecelilik Prensiplerinin Geometrisi ve daha sonra bu geometriye göre bir parametrelili düzlemsel Galilean hareket konusu çalışılmıştır.

Bu zorlu yolda bilgilerinden çokca yararlandığım kıymetli hocam Prof. Dr. Salim YÜCE'ye; fedakârlıklarıyla her zaman yanımda olan eşim Arş. Gör. Seda AKBIYIK ve aileme; ve saygıdeğer seminer grubu arkadaşlarıma en içten şükranlarımı sunarım.

Haziran, 2012

Mücahit AKBIYIK

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ	iii
SİMGE LİSTESİ.....	viii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
ÖZET	xi
ABSTRACT.....	xii
BÖLÜM 1	1
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	1
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	3
GALILEAN GEOMETRİ	3
2.1 Galilean Görecelik Prensibinin Geometrisi	3
2.1.1 Galilean Görecelik Prensibi	3
2.1.2 Düzlem-Paralel hareket.....	3
2.1.3 Doğrusal (Rectilinear) hareket	4
2.1.4 Düzlem-Paralel Galilean Hareket ve Galilean Dönüşümleri.....	4
2.1.5 Doğrusal (Rectilinear) Galilean Hareket ve Galilean Dönüşümleri	6
2.2 Galilean Geometride Afin uzay	8
2.3 Galilean Geometride İç işlem	8
2.4 Galilean Geometride Dış işlem.....	9
2.5 Galilean Geometride İç çarpım	10
2.6 Galilean Geometride Özel İç Çarpım	11
2.7 Düzlemin Ortonormal Baz Vektörleri.....	11
2.8 Galilean Geometride Metrik Özellikler	11
2.8.1 Galilean Geometride Norm	11
2.8.2 Galilean Geometride Özel Norm.....	11

2.8.3	Galilean Geometride Diklik	11
2.8.4	Galilean Geometride İki Nokta Arasındaki Uzaklık	12
2.8.5	İki Nokta Arasındaki Özel Uzaklık	13
2.8.6	Galilean Geometride Merkezil Çember	15
2.8.7	İki Doğru Arasındaki Aç ı	16
2.8.8	İki Doğru Arasındaki Dik Aç ı	18
2.8.9	Paralel Doğrular Arasındaki Aç ı	18
2.8.10	Bir Noktadan Bir Doğruya Uzaklık	18
2.8.11	Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık	20
2.8.12	Metrik Özelliklerin Kinematik Yorumu	20
2.9	Galilean Düzlemde Trigonometri ve Üçgen	23
2.9.1	Bir Üçgenin Kenarları Arasındaki Bağ ıntı	24
2.9.2	Üçgenin Aç ı Formülü	25
2.9.3	Galilean Trigonometri	27
2.9.4	Galilean Geometride Sinüs Kuralı	29
2.9.5	Üçgende Alan	30
2.9.6	Sinüs Alan Formülü	31
2.9.7	İkizkenar Üçgen	32
2.9.8	İkizkenar Üçgende Aç ıortay	32
2.9.9	Üçgende Kenarortay	33
2.9.10	Eşkenar Üçgen	33
2.10	Galilean Düzlemde Genel Çember Denklemi ve Eğriler	34
2.11	Genel Çember (Cycle) Denklemine Özelliklerinin Karakterize Edilmesi ..	37
2.11.1	Yarıçap	37
2.11.2	Eğrilik	41
2.11.3	Çember (Cycle) Kavramının Kinematik Yorumu	42
2.11.4	Eğrilik Yarıçapı	45
2.11.5	Oskulatör Çember	47
2.11.6	Eğrilik Yarıçapının Analitik Olarak İfade Edilmesi	49
2.11.7	Galilean Geometride Eğrinin Kinematik Yorumu	51
BÖLÜM 3		52
BİR PARAMETRELİ DÜZLEMSEL GALİLEAN HAREKETLER		52
3.1	Bir Parametrelili Düzlemsel Galilean Hareketler	52
3.2	Türev Denklemleri	56
3.3	Hızlar ve Hızların Terkibi	56
3.4	Shear Dönme Polü ve Pol Doğruları (Doğru Demeti)	57
3.5	İvmeler ve İvmelerin Terkibi	60
BÖLÜM 4		63
HAREKETLİ KOORDİNAT SİSTEMİ		63
4.1	Birbirine Göre Hareket Eden Düzlemler için Shear Dönme Polü	68
BÖLÜM 5		71
GALİLEAN HAREKETLER ALTINDA EULER SAVARY FORMÜLÜ		71

5.1	Galilean Hareketler Altında Kanonik İzafe Sistemi.....	71
5.2	Euler-Savary Formülü	73
BÖLÜM 6		76
SONUÇ VE ÖNERİLER		76
KAYNAKLAR		77
ÖZGEÇMİŞ		78

SİMGE LİSTESİ

E^2	Öklid düzlemi
L^2	Lorentz düzlemi
G^2	Galilean Düzlem
$\langle , \rangle_G$	Galilean iç çarpım
$\ \ $	Norm
d_{AB}	A ve B noktaları arasındaki uzaklık
δ_{AB}	A ve B noktaları arasındaki özel uzaklık
S	Çember (circle)
Z	Çember (cycle)
$\triangle ABC$	ABC üçgenini
S_{ABC}	ABC üçgeninin alanını
r	Yarıçap
ρ	Eğrilik
$B = G / G'$	Bir parametrelili düzlemsel Galilean Hareket

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2. 1 Düzlem Paralel hareket	4
Şekil 2. 2 Doğrusal (rectilinear) Hareket	6
Şekil 2. 3 Shear Hareketi	7
Şekil 2. 4 Galilean Geometride iki nokta arasındaki uzaklık	13
Şekil 2. 5 Özel uzaklık	14
Şekil 2. 6 Galilean geometride çember (circle)	15
Şekil 2. 7 Galilean geometride sıfır yarıçaplı çember	16
Şekil 2. 8 Galilean geometride açı	16
Şekil 2. 9 Galilean sonsuz açı	18
Şekil 2. 10 Öklid ve Galilean Geometrilere diklik	18
Şekil 2. 11 Galilean geometride en kısa uzaklık	19
Şekil 2. 12 Öklid Düzleminde en kısa uzaklık	19
Şekil 2. 13 Galilean geometride paralel iki doğru arasındaki uzaklık	20
Şekil 2. 14 Açı formülünün kinematik yorumu	22
Şekil 2. 15 Galilean Geometride üçgen	24
Şekil 2. 16 Galilean Geometride kenar uzunlukları toplamı	25
Şekil 2. 17 Galilean Geometride açılar toplamı	26
Şekil 2. 18 Galilean Geometride Üçgende kenarlar toplamının kinematik yorumu	27
Şekil 2. 19 Galilean ve Öklid birim çemberler	28
Şekil 2. 20 Galilean geometride sinüs toplam formülü	28
Şekil 2. 21 Galilean geometride üçgende yükseklik	29
Şekil 2. 22 Galilean geometride alan	31
Şekil 2. 23 Galilean geometride ikizkenar üçgen	32
Şekil 2. 24 Galilean geometride kenarortay	33
Şekil 2. 25 Öklid düzleminde çember	34
Şekil 2. 26 Galilean düzlemde çember (circle)	35
Şekil 2. 27 Galilean düzlemde çember (cycle)	35
Şekil 2. 28 Galilean çemberler (cycle)	37
Şekil 2. 29 Galilean ve Öklid çemberlerde açı	38
Şekil 2. 30 Galilean geometride bir eğrinin uzunluğu	39
Şekil 2. 31 Galilean geometride düzgün olmayan eğri	40
Şekil 2. 32 Galilean geometride pozitif ve negatif yarıçaplı çemberler	41
Şekil 2. 33 Galilean geometride eğrilik tanımı	42

Şekil 2. 34	Galilean geometride eğrilik	44
Şekil 2. 35	Öklid Geometride ortalama eğrilik.....	45
Şekil 2. 36	Galilean geometride ortalama eğrilik	46
Şekil 2. 37	Öklid Öskülatör çember ve Galilean Oskülatör çember (cycle)	48
Şekil 2. 38	Eğrilik yarıçapının analitik incelenmesi	49
Şekil 3. 1	$B = G / G'$ hareketi.....	53
Şekil 3. 2	Galilean bazlar arasındaki ilişki.....	54
Şekil 3. 3	$B = G / G'$ hareketinin pol noktaları.....	59
Şekil 4. 1	Biri sabit diğeri hareketli Galilean düzleme göre hareket.....	63
Şekil 4. 2	Düzlemlerin dönme açıları.....	69

GALILEAN DÜZLEMDE HAREKETLİ KOORDİNAT SİSTEMİ VE EULER SAVARY FORMÜLÜ

Mücahit AKBIYIK

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Salim YÜCE

Bu tezde Yaglom, [6] tarafından verilen Galilean geometrinin temel bilgileri açık ve anlaşılır bir şekilde anlatıldı. Sonra bu geometride bir parametrelili düzlemsel Galilean Hareket konusu incelendi, [7]. Daha sonra ise birbirleri üzerinde hareket eden üç Galilean düzlem göz önüne alınarak bu hareketlerin mutlak, relatif ve sürüklenme hızları elde edildi. Ayrıca bir parametrelili düzlemsel Galilean hareketler için kanonik izafe sistemi tanımlandı. Buna ek olarak bu izafe sistemi yardımı ile elde edilen yörünge eğrilerinin eğrilikleri arasındaki ilişkiyi veren Euler-Savary Formülü hesaplandı.

Anahtar Kelimeler: Galilean geometri, Kinematik, bir parametrelili hareketler, Hareketli koordinat sistemi, Euler Savary Formülü.

ABSTRACT

MOVING COORDINATE SYSTEM AND EULER SAVARY FORMULA ON GALILEAN PLANE

Mücahit AKBIYIK

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Salim YÜCE

In this thesis, the fundamental information of the Galilean geometry was defined by Yaglom, [6] was explained. Then one parameter planar Galilean motions, [7] were studied. Later, one Galilean plane moving relative to two other Galilean planes, one moving and the other fixed, was taken into consideration and the relation between the absolute, relative and sliding velocities of this movement was obtained. Also a canonical relative system for one-parameter Galilean planar motion was defined. In addition, Euler-Savary formula, which gives the relationship between the curvature of trajectory curves, was evaluated with the help of this relative system.

Key words: Galilean geometry, Kinematics, one parameter motion, moving coordinate system, Euler Savary Formula.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE

1.1 Literatür Özeti

H. R. Müller, [1], 1956 yılında E^2 Öklid düzleminde bir parametrelili düzlemsel hareketi ve bu hareket esnasında elde edilen hareketli koordinat sistemi tanıttı ve Euler Savary Formülünü verdi. 1991 ve 1992 yıllarında A. A. Ergin, [2] ve [3], E^2 Öklid düzlemi yerine L^2 Lorentz düzlemini alarak bir parametrelili düzlemsel Lorentz hareketi tanımladı ve bu hareket esnasındaki hareketli koordinat sistemini inceledi. 2003 yılında T. Ikawa, [4], tarafından Minkowski geometrisinde Euler Savary Formülü verildi. Ayrıca I. Aytun, [5], bir parametrelili Lorentz hareketi için Euler-Savary Formülü ve Lorentz anlamında geometrik yorumunu inceledi.

Son yıllarda Galilean geometri üzerinde birçok çalışmalar yapılmış olup en önemlisi 1979 yılında I. M. Yaglom tarafından yayınlanan Galilean geometriyi tanıtan ve bu çalışmamızın temel bilgilerini oluşturan “A simple non-Euclidean Geometry and its Physical Basis” adlı [6] eseridir. Ayrıca, S. Yüce, [7], Galilean geometride bir parametrelili düzlemsel Galilean hareketi ve bu hareket ile ilgili temel kavramları oluşturmuştur.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin ilk bölümü temel kavramlar olarak Galilean geometrisi çalışan herkesin yararlanabilmesi ve Türkçe literatüre Galilean geometrinin tüm temel bilgilerini kazandırılması amacıyla hazırlanmıştır. Bu yüzden bu çalışmada Galilean

geometrisinin temel kavramları anlaşılır şekilde anlatılmaya çalışılmıştır. Daha sonra Galilean düzlemde kinematik çalışmalara temel teşkil eden S. Yüce [7] tarafından verilen bir parametrelili düzlemsel Galilean hareket incelenmiştir. Ayrıca orijinal bölümlerde ise Galilean geometride birbirine göre hareket eden düzlemlere göre bir noktanın hareketi incelenmiş ve Euler Savary Formülü hesaplanmıştır.

1.3 Hipotez

Bu tezde, A. Ergin [3] ve I. Aytun [5] nun çalışmalarına analog olarak E^2 Öklid düzlemi yerine (L^2 lorentz düzlemi [3]) G^2 Galilean düzlemi olarak Müller [1] tarafından verilen Hareketli Koordinat Sistemi incelenmiş ve Euler Savary Formülü hesaplanmıştır.

BÖLÜM 2

GALILEAN GEOMETRİ

Bu bölümde Yaglom, [6], tarafından verilen Galilean geometrinin temel bilgileri anlatılacaktır.

2.1 Galilean Görecelik Prensibinin Geometrisi

2.1.1 Galilean Görecelik Prensibi

“Dış gözlemci tarafından hareket ettiği söylenen bir gemi üzerindeki bir kimse, geminin hareketsiz olduğunu söyleyebilir”. Çünkü “sabit hızla giden bir gözlemci ile sabit duran gözlemci aynı fiziksel yasaları kullanılır”. Yani karada sabit duran gözlemci ile sabit hızla giden gemideki gözlemci aynı fiziksel yasalara tabidir. Bu yüzden sabit hızlı hareket altında tüm mekaniksel özelliklerin büyüklükleri ve yönleri konurur. İşte bu prensibe *Galileo Galilean’ın görecelik prensibi* denir, [6].

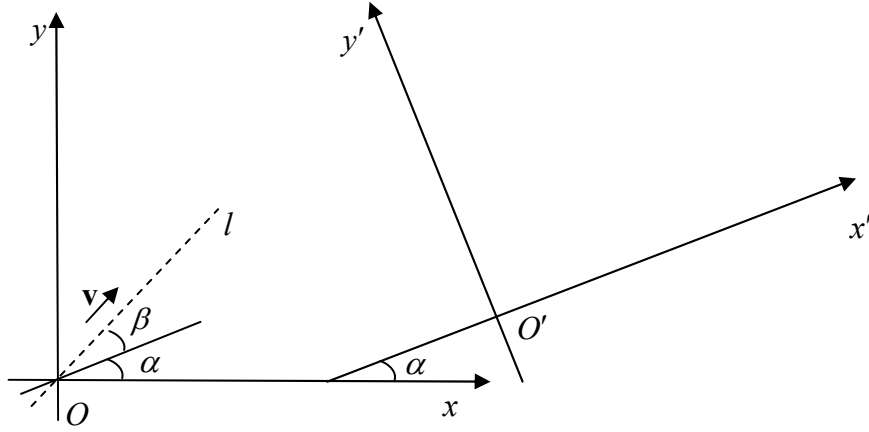
2.1.2 Düzlem-Paralel hareket

Bir Φ objesinin noktalarının düzleme paralel olacak şekilde hareket etmesine *düzlem-paralel hareket* denir, [6].

2.1.3 Doğrusal (Rectilinear) hareket

Düzlem-paralel hareketin özel durumu olan doğrusal (Rectilinear) hareket Φ objesinin noktalarının O ile belirlenmiş yönde, bir doğru boyunca hareket etmesine *doğrusal hareket* denir, [6].

2.1.4 Düzlem-Paralel Galilean Hareket ve Galilean Dönüşümleri



Şekil 2. 1 Düzlem Paralel hareket

$\{x, y\}$ ve $\{x', y'\}$ iki referans çatısı ve $\widehat{xOx'} = \alpha$ olsun, (Şekil 2.1). Bu durumda bu iki referans çatısı arasında, $\{x, y\}$ referans çatısının O orijin noktasının $\{x', y'\}$ referans çatısına göre koordinatları (a, b) olmak üzere

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + a \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + b \end{cases}$$

ilişkisi vardır. Eğer $\{x, y\}$ referans çatısının O orijin noktası l doğrusu boyunca v sabit hızı ile hareket ederse $\widehat{x'O'l} = \beta$ olmak üzere $\{x', y'\}$ referans çatısına göre $a(t)$ ve $b(t)$ koordinatları t zamanında

$$\begin{aligned} a(t) &= a + v(\cos \beta)t \\ b(t) &= b + v(\sin \beta)t \end{aligned}$$

olur. Böylece bir A noktasının (x', y') ve (x, y) koordinatları arasındaki bağıntı

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + v(\cos \beta)t + a \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + v(\sin \beta)t + b \end{cases}$$

ve $t' = t + d$ olduğundan (örneğin, t hicri takvim iken t' miladi takvim)

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + v(\cos \beta)t + a \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + v(\sin \beta)t + b \\ t' = t + d \end{cases}$$

elde edilir, [6].

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + v(\cos \beta)t + a \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + v(\sin \beta)t + b \\ t' = t + d \end{cases}$$

dönüşümüne *düzlem-paralel hareketler için Galilean Dönüşümleri* veya *üç boyutlu Galilean dönüşümleri* denir. Düzlem-paralel hareketler için Galilean dönüşümleri

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y_1 = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ t_1 = t \end{cases}$$

dönme dönüşümü ve xOy düzleminin her noktasını $\mathbf{v} = (v \cos \beta, v \sin \beta, 0)$ vektörü yönünde vt uzaklığa taşıyan

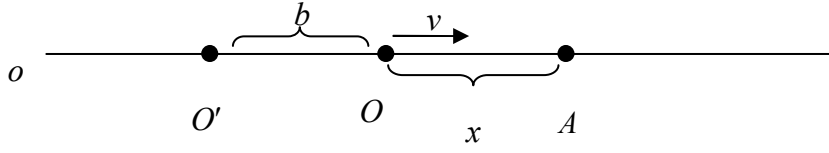
$$\begin{cases} x_2 = x_1 + (v \cos \beta)t_1 \\ y_2 = y_1 + (v \sin \beta)t_1 \\ t_2 = t_1 \end{cases}$$

Shear dönüşümü ve (a, b, d) vektörü ile belirli

$$\begin{cases} x' = x_2 + a \\ y' = y_2 + b \\ t' = t_2 + d \end{cases}$$

öteleme dönüşümünden oluşur, [6].

2.1.5 Doğrusal (Rectilinear) Galilean Hareket ve Galilean Dönüşümleri



Şekil 2. 2 Doğrusal (rectilinear) Hareket

$\{x\}$ ve $\{x'\}$ iki referans çatısı ve $\{x\}$ koordinat sisteminin O orijini v sabit hızı ile $\{x'\}$ koordinat sistemine göre hareket etsin, (Şekil 2.2). Yani , t anında O noktasının $\{x'\}$ referans çatısına göre $b(t)$ koordinatı $b(t) = b + vt$ ile verilsin. Burada t zamanı gösterir ve b , $t = 0$ anında O orijin noktasının $\{x'\}$ koordinatıdır. A noktasının x ve x' koordinatları arasındaki ilişki $x' = x + b(t)$ olduğundan $x' = x + b + vt$ elde edilir. Ayrıca $t' = t + a$ olacağından

$$\begin{aligned} x' &= x + vt + b \\ t' &= t + a \end{aligned}$$

bulunur. Eğer t , zaman parametresi yerine x , x konum parametresi yerine y alınırsa

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = vx + y + b \end{cases} \quad (2.1)$$

dönüşümü elde edilir. Bu dönüşüme doğrusal (rectilinear) hareketler için Galilean dönüşümleri denir, [6].

Tanım 2.1 Doğrusal hareketler için Galilean dönüşümleri altında değişmeyenlerin teorisine *Galileo'nun Görecelik Prensiplerinin Geometrisi* veya *iki boyutlu Galilean Geometri* denir ve G^2 ile gösterilir. Biz kısaca Galilean geometri diyeceğiz, [6].

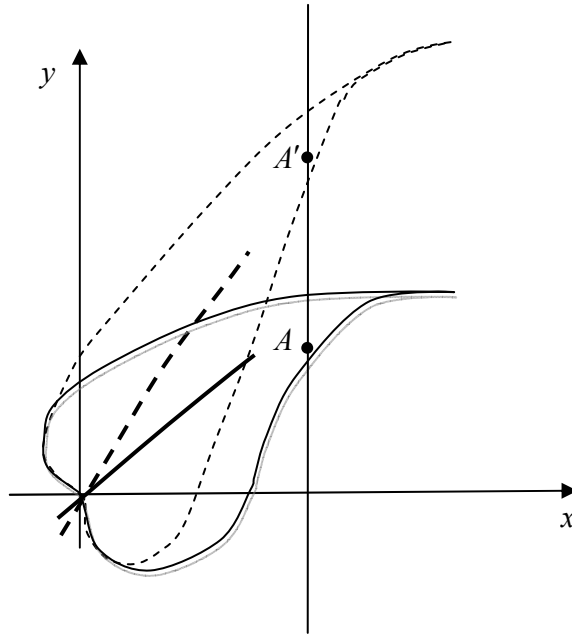
Doğrusal hareketler için Galilean dönüşümleri

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = vx + y \end{cases} \quad (\text{veya} \begin{cases} x_1 = x + vt \\ t_1 = t \end{cases}) \quad (2.1a)$$

dönüşümü (O doğrusunda hareket eden $\{y_1\}$ koordinat sisteminin O_1 orijinin v sabit hızlı düzgün hareketini tarif eder) ve

$$\begin{cases} x' = x_1 + a \\ y' = y_1 + b \end{cases} \quad (\text{veya} \quad \begin{cases} x' = x_1 + b \\ t' = t_1 + a \end{cases}) \quad (2.1b)$$

dönüşümünden (O_1 in O' noktasına bir ötelemesini tarif eder) oluşur. (2.1b) nin geometrik anlamı bir *öteleme* iken (2.1a) dönüşümü y – *ekseni* yönünde v katsayılı bir *shear* (kayılma) belirtir, (Şekil 2.39). Böylece iki boyutlu Öklid Geometri ve iki boyutlu Galilean Geometri arasındaki temel fark, Öklidyen geometri hareketleri dönme ve öteleme dönüşümlerinden oluşurken Galilean geometri hareketlerinin öteleme ve shear dönüşümlerinden oluşmasıdır, [6].



Şekil 2. 3 Shear Hareketi

Teorem 2.1

(2.1) Galilean Dönüşümleri

- a) Doğruları doğrular üzerine
- b) Paralel doğruları paralel doğrular üzerine

c) Doğrudaş AB ve CD doğru parçalarını $\frac{C'D'}{A'B'} = \frac{CD}{AB}$ özelliğine sahip $A'B'$ ve $C'D'$ doğrudaş doğru parçaları üzerine

d) F cismini aynı alanlı F' cismi üzerine dönüştürür, [6].

Yani doğrular, paralel doğrular, doğrudaş doğru parçalarının oranları ve cisimlerin alanları sadece Öklid geometride değil ayrıca Galilean geometride de önemlidir.

Ayrıca herhangi bir (2.1) dönüşümü y -eksenine paralel her doğruyu y -eksenine paralel bir diğer doğru içine alır. Böylece Öklid geometride “ y -eksenine paralel doğrular” terimi geometrik öneme sahip değil iken Galilean geometride “ y -eksenine paralel doğrular” bütün diğer doğrulardan farklı öneme sahiptir, [6].

Tanım 2.2 Oy -eksenine paralel olan doğrulara özel doğru (special line) denir, [6].

Tanım 2.3 Oy -eksenine paralel olmayan doğrulara sıradan doğru (ordinary line) denir, [6].

Not 2.1 Ox -eksenine paralel doğrular sıradan doğrulardan ayrılmaz, [6].

2.2 Galilean Geometride Afin uzay

G^2 iki boyutlu Galilean geometrisi;

I. Her bir $A \in G^2$ noktası ve $\alpha \in \mathbb{R}^2$ vektörü için $\mathbf{AB} = \alpha$ olacak şekilde bir tek $B \in G^2$ noktası vardır.

II. Herhangi üç $A, B, C \in G^2$ noktası için $\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC}$ dir.

özelliklerini sağladığından bir afin uzaydır, [6].

2.3 Galilean Geometride İç işlem

Galilean geometride $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G^2$ olmak üzere

$$+ : G^2 \times G^2 \rightarrow G^2$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y}$$

iç işlemi;

I. Değişme, yani her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G^2$ için $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$

II. Birleşme, yani her $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in G^2$ için $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$

III. Etkisiz eleman, yani her $\mathbf{x} \in G^2$ vektörü için $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ olacak şekilde bir $\mathbf{0} \in G^2$ vektörü

IV. Ters eleman, yani her $\mathbf{x} \in G^2$ vektörü için $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{0}$ olacak şekilde bir $\mathbf{x}' \in G^2$ vektörü

özelliklerini sağladığından G^2 iki boyutlu Galilean geometrisi “+” (toplama) işlemine göre bir Abel grubudur, [6].

2.4 Galilean Geometride Dış işlem

Galilean geometride $(G^2, +)$ bir abel grup $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bir cisim olduğundan her $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in G^2$ ve her $a \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times G^2 &\rightarrow G^2 \\ (a, \mathbf{x}) &\rightarrow a \odot \mathbf{x} \end{aligned}$$

dış işlemi;

i. Her $\mathbf{x}$ vektörü için $1 \odot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ olacak şekilde $1 \in \mathbb{R}$

ii. Her $\mathbf{x}$ vektörü ve $a, b \in \mathbb{R}$ sayısı için $a \odot (b \odot \mathbf{x}) = (ab) \odot \mathbf{x}$

iii. Her $\mathbf{x} \in G^2$ vektörü için ve her $a, b \in \mathbb{R}$ sayısı için $(a + b) \odot \mathbf{x} = a \odot \mathbf{x} + b \odot \mathbf{x}$

iv. Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G^2$ ve $a \in \mathbb{R}$ sayısı için $a \odot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a \odot \mathbf{x} + a \odot \mathbf{y}$

özelliklerini sağladığından G^2 iki boyutlu Galilean geometri $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

Ayrıca $\{\mathbf{g}_1 = (1, 0), \mathbf{g}_2 = (0, 1)\}$ vektör sistemi lineer bağımsız ve germe aksiyomunu sağladığından G^2 vektör uzayının bir bazıdır. Dolayısıyla $\dim G^2 = 2$ dir, [6].

2.5 Galilean Geometride iç çarpım

Tanım 2.4 İki boyutlu Galilean geometride $\mathbf{x} = (x_1, y_1), \mathbf{y} = (x_2, y_2) \in G^2$ olmak üzere Galilean iç çarpımı $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ şeklinde gösterilir ve

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_G = x_1 x_2$$

olarak tanımlanır, [6].

Galilean Geometride iç çarpımın özellikleri

i. Simetri özelliği

Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G^2$ vektörü için $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$

dir.

ii. Bilineerlik özelliği

Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G^2$ vektörü ve $a \in \mathbb{R}$ skaler sayısı için

$$\langle a\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_G = (ax_1)x_2 = a(x_1x_2) = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_G$$

ve her $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ vektörü için

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \text{ ve } \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$$

dir.

iii. Yarı pozitif tanımlılık özelliği

Her $\mathbf{x} = (x_1, y_1) \in G^2$ için $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_G = x_1^2$ elde edilir. Eğer $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_G = 0$ ise $x_1 = 0$ olup $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ olabilir.

Her $\mathbf{x} \in G^2$ vektörü için $\langle \mathbf{x}, \mathbf{o} \rangle_G = 0$ olacak şekilde bütün $\mathbf{o} \in G^2$ vektörlerinin kümesi bir Öklid doğrudur, [6].

Örnek 2.1 $\mathbf{g}_1 = (1, 0), \mathbf{g}_2 = (0, 1)$ için $\langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1 \rangle_G = 1.1 = 1$ ve $\langle \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2 \rangle_G = 0.0 = 0$ bulunur.

Tanım 2.5 G^2 Galilean geometride $\mathbf{g}_2$ vektörüne paralel olan vektörlere *özel vektör* denir, [6].

2.6 Galilean Geometride Özel İç Çarpım

Tanım 2.6 İki boyutlu Galilean geometride $\mathbf{x} = (0, y_1), \mathbf{y} = (0, y_2) \in G^2$ özel vektörlerinin Galilean özel iç çarpımı $\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta$ ile gösterilir ve

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_\delta = y_1 y_2$$

olarak tanımlanır, [6].

2.7 Düzlemin Ortonormal Baz Vektörleri

Tanım 2.7 G^2 Galilean geometride $\{\mathbf{g}_1 = (1, 0), \mathbf{g}_2 = (0, 1)\}$ vektörlerine *ortonormal baz vektörleri* denir

2.8 Galilean Geometride Metrik Özellikler

2.8.1 Galilean Geometride Norm

Tanım 2.8 Galilean düzlemin her $\mathbf{a} = (x_1, y_1) \in G^2$ vektörünün normu $\|\mathbf{a}\|_G$ ile gösterilir ve

$$\|\mathbf{a}\|_G = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_G} = |x_1|$$

şeklinde tanımlanır. $\|\mathbf{a}\|_G = 1$ ise $\mathbf{a}$ vektörüne birim vektör denir, [6].

2.8.2 Galilean Geometride Özel Norm

Tanım 2.9 Galilean geometride $\mathbf{a} = (0, y_1) \in G^2$ özel vektörlerinin normu $\|\mathbf{a}\|_\delta$ ile gösterilir ve

$$\|\mathbf{a}\|_\delta = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_\delta} = |y_1|$$

şeklinde tanımlanır, [6].

2.8.3 Galilean Geometride Diklik

Tanım 2.10 Galilean geometride $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G^2$ vektörleri için

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_G = 0$$

olması $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_G \neq 0$ için $\mathbf{b} = (0, y_2)$ olduğunda sağlanır. Bu durumda $\mathbf{b}$ vektörüne $\mathbf{a}$ vektörünün *diki* denir ve $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ ile gösterilir, [6].

2.8.4 Galilean Geometride İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Öklid geometride biliyoruz ki $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık d_{AB} ile gösterilir ve $d_{AB} = \|\mathbf{AB}\| = \sqrt{\langle \mathbf{AB}, \mathbf{AB} \rangle}$, $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ olmak üzere

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.2)$$

formülü ile tanımlanır. Eğer bu noktalar arasındaki uzaklık sıfır ise, bu iki noktaya çakışık denir. Ayrıca $l \dots y = kx + s$ ve $l_1 \dots y = k_1x + s_1$ denklemleri iki l ve l_1 doğruları arasındaki açı

$$\tan \delta_{l_1} = \frac{k_1 - k}{kk_1 + 1} \quad (2.3)$$

formülü ile tanımlanır ve $k_1 = k$ ise l ve l_1 paraleldir, ve bu durumda bu iki doğru arasındaki açı sıfıra eşittir. Bu durumda iki doğru arasındaki uzaklık

$$d_{l_1} = \frac{|s_1 - s|}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad (2.4)$$

ile tanımlanır. (2.4) formülü eğer (2.3) açısı sıfır ise tanımlıdır ve iki doğru ancak ve ancak d uzaklığı sıfır ve δ açısı sıfır olduğunda kesişir, [6].

Şimdi Galilean geometriye geri dönelim.

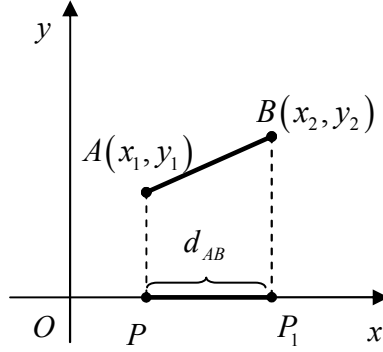
Tanım 2.11 $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2) \in G^2$ noktaları arasındaki uzaklık d_{AB} ile gösterilir ve

$$d_{AB} = \|\mathbf{AB}\|_G = \sqrt{\langle \mathbf{AB}, \mathbf{AB} \rangle_G}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ olmak üzere işaretli uzaklık

$$d_{AB} = x_2 - x_1 \quad (2.5)$$

uzaklığına eşittir, yani AB doğru parçasının x -ekseni üzerindeki PP_1 dik izdüşümünün işaretli uzunluğuna eşittir, (Şekil 2.4) , [6].



Şekil 2. 4 Galilean Geometride iki nokta arasındaki uzaklık

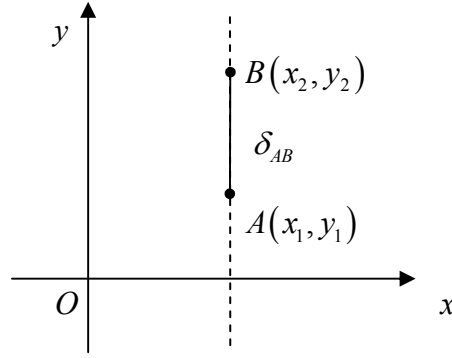
Not 2.2 (2.5) formülünü tanımlayabilmemiz için Galilean dönüşümler altında değişmemesi gerekir. Gerçekten, (2.1) hareketi altında A noktasının x_1 koordinatı $x'_1 = x_1 + a$ ya dönüştüğü için A ve B in apsisleri farkı bu hareket altında değişmez, [6].

2.8.5 İki Nokta Arasındaki Özel Uzaklık

Tanım 2.12 Eğer A ve B noktaları arasındaki uzaklık sıfır ise, yani $x_1 = x_2$ ise, A ve B aynı özel doğru üzerindedir, (Şekil 2.5). Böyle noktalar için işaretli özel uzaklık $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (0, y_2 - y_1)$ olmak üzere

$$\delta_{AB} = \sqrt{\langle \mathbf{AB}, \mathbf{AB} \rangle_\delta} = y_2 - y_1 \quad (2.6)$$

ile tanımlanır. (Burada $y_2 > y_1$ dir), [6].



Şekil 2. 5 Özel uzaklık

Gerçekten, eğer $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ in apsisleri kesişir ($x_2 = x_1$) ise bu durumda

(2.1) hareketi bu noktaları $x'_1 = x'_2 = x_1 + a$ ve

$$y'_1 = vx_1 + y_1 + b$$

$$y'_2 = vx_1 + y_2 + b$$

ile $A'(x'_1, y'_1)$ ve $B(x'_2, y'_2)$ noktalarına dönüştürür. Böylece

$$\begin{aligned} y'_2 - y'_1 &= (vx_1 + y_2 + b) - (vx_1 + y_1 + b) \\ &= y_2 - y_1 \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak $y_2 - y_1$ farkı Galilean hareket altında değişmez ve Galilean geometride geometrik bir özelliktir. Ayrıca $x_1 \neq x_2$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} y'_2 - y'_1 &= (vx_2 + y_2 + b) - (vx_1 + y_1 + b) \\ &= y_2 - y_1 + v(x_2 - x_1) \\ &\neq y_2 - y_1 \end{aligned}$$

bulunur, [6].

Not 2.3 Galilean geometride iki A ve B noktasının çakışması için d_{AB} uzaklığının ve δ_{AB} özel uzaklığının sıfır olması gerekir, [6].

2.8.6 Galilean Geometride Merkezil Çember

Tanım 2.13 Sabit bir Q noktasına uzaklıkları mutlak değerce sabit ve r olan $M(x, y)$ noktalarının kümesine *çember (circle)* denir ve S ile gösterilir. Burada $Q(a, b)$ noktasına S çemberinin *merkezi* ve negatif olmayan r sayısına çemberin *yarıçapı* denir.

$$d_{QM} = x - a$$

olduğu için

$$d_{QM}^2 = r^2$$

dir. Böylece S çemberi

$$(x - a)^2 = r^2$$

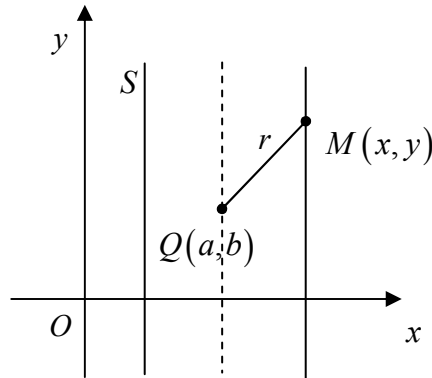
veya

$$x^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0$$

veya $p = -a, q = a^2 - r^2$ olmak üzere

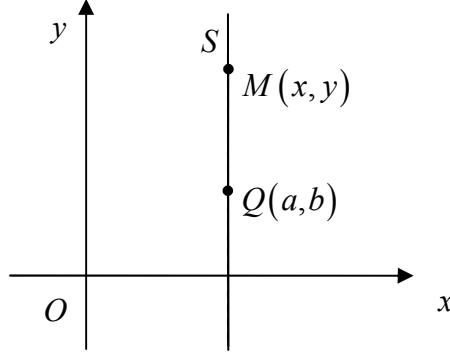
$$x^2 + 2px + q = 0 \tag{2.7}$$

olarak tanımlanabilir. Ayrıca Q merkezli r yarıçaplı S çemberi; Q dan Öklid uzaklığı r olan iki özel doğrudan oluşur. (Şekil 2.6), [6].



Şekil 2. 6 Galilean geometride çember (circle)

Eğer $r = 0$ ise bu durumda bu iki özel doğru çakışır. (Şekil 2.7), [6].



Şekil 2. 7 Galilean geometride sıfır yarıçaplı çember

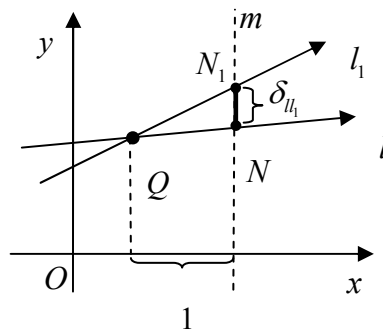
Not 2.4 S çemberi, bir yarıçap tanımlarken (yarıçap, iki eş özel doğru arasındaki Öklid uzaklığın yarısına eşit) Q noktasından geçen özel doğrunun noktaları sayısınca (sonsuz sayıda) merkeze sahiptir, [6].

2.8.7 İki Doğru Arasındaki Aç

l ve l_1 arasındaki açığı belirlemek için Q kesişim noktasının 1 birim sağına m özel doğrusunu çizelim. Eğer m özel doğrusu l ve l_1 doğrularını sırasıyla N ve N_1 noktalarında kesiyor ise

$$\delta_{ll_1} = NN_1 = \delta_{NN_1}$$

bulunur, (Şekil 2.8), [6].



Şekil 2. 8 Galilean geometride açı

Eğer l ve l_1 in denklemleri, sırası ile $y = kx + s$ ve $y = k_1x + s_1$ ve $Q = (x_0, y_0)$ ise m özel doğrusunun denklemi $x = x_0 + 1$ dir. Böylece

$$N = (x_0 + 1, k(x_0 + 1) + s)$$

ve

$$N_1 = (x_0 + 1, k_1(x_0 + 1) + s_1)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\delta_{ll_1} &= \delta_{NN_1} \\ &= [k_1(x_0 + 1) + s_1] - [k(x_0 + 1) + s] \\ &= [k_1x_0 + s_1 - kx_0 + s] - [k_1 - k]\end{aligned}$$

ve $Q(x_0, y_0)$ noktası l ve l_1 üzerinde olduğundan

$$\delta_{ll_1} = k_1 - k$$

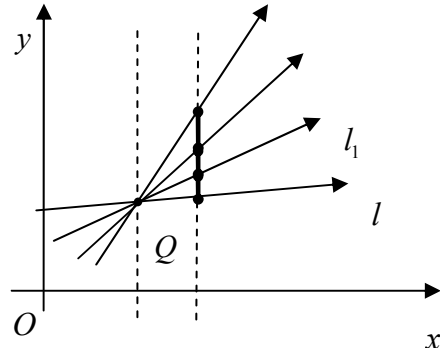
bulunur, [6].

Tanım 2.14 Bir $Q = (x_0, y_0)$ noktasında kesişen $y = kx + s$ ve $y = k_1x + s_1$ doğruları arasındaki açı

$$\delta_{ll_1} = k_1 - k \tag{2.8}$$

formülü ile tanımlanır, [6].

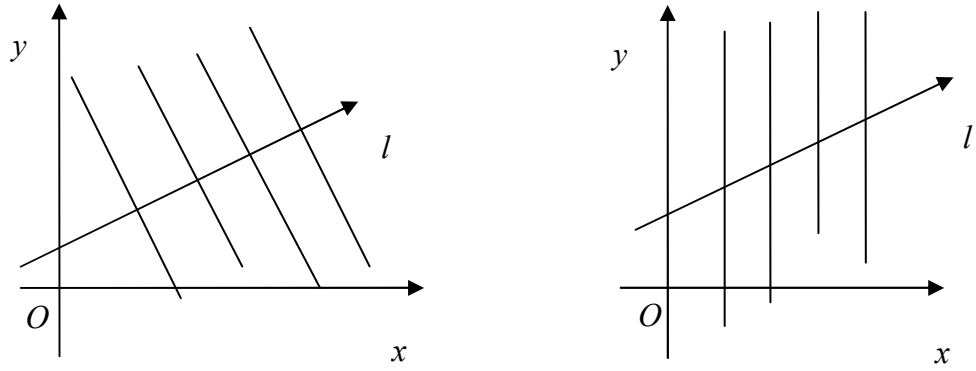
Eğer l_1 doğrusu Q etrafında Q noktasından geçen m özel doğrusuna yaklaşacak şekilde saatin tersi yönde döndürülürse, δ_{ll_1} açısı sonsuz büyür ve $\delta_{ll_1} = \infty$ olur. (Şekil 2.9), [6].



Şekil 2. 9 Galilean sonsuz açı

2.8.8 İki Doğru Arasındaki Dik Aç

Tanım 2.15 Galilean geometride özel doğrular ile sıradan doğrular arasındaki açuya dik açı denir ve özel doğrulara sıradan doğruların dikleri denir, (Şekil 2.10) , [6].



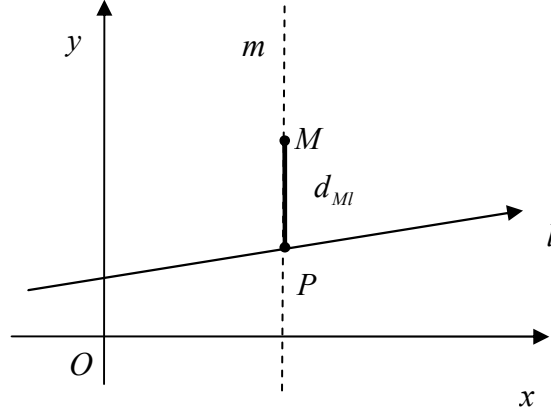
Şekil 2. 10 Öklid ve Galilean Geometrilere diklik

2.8.9 Paralel Doğrular Arasındaki Aç

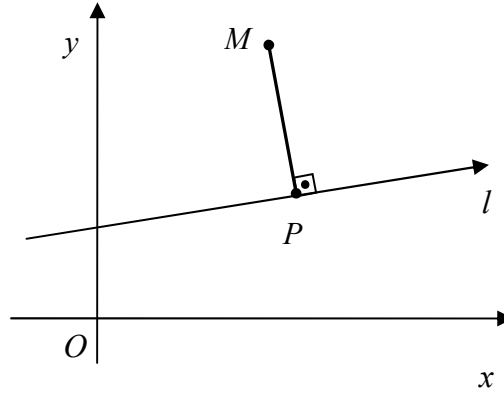
Eğer l ve l_1 doğruları birbirine paralel ise bu durumda (2.8) denklemi yani l ve l_1 doğruları arasındaki açı sıfır bulunur, [6].

2.8.10 Bir Noktadan Bir Doğruya Uzaklık

Tanım 2.16 Bir M noktasından bir l doğrusuna uzaklık, M den geçen özel doğru ile hesaplanır, (Şekil 11 ve 12), [6].



Şekil 2. 11 Galilean geometride en kısa uzaklık



Şekil 2. 12 Öklid Düzleminde en kısa uzaklık

Gerçekten, Öklid geometride bir $M(x_0, y_0)$ noktasından bir l doğrusuna uzaklık, M den l üzerindeki M ye en yakın bir P noktasına uzaklık olarak tanımlanır. Galilean geometride de bu tanımlı kullanırsak M ye en yakın l üzerindeki P noktası M den sıfır uzaklıktadır, $d_{MP} = 0$ dir. Bu nedenle M den l ye uzaklığı M den P ye özel uzaklık ile ölçmeye götürür:

$$d_{MI} = \delta_{MP}.$$

Eğer l nin denklemi $y = kx + s$ ise bu durumda P nin koordinatları $(x_0, kx_0 + s)$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}
-MP &= -\delta_{MP} = y_0 - (kx_0 + s) \\
-d_{MI} &= y_0 - kx_0 - s
\end{aligned}
\tag{2.9}$$

elde edilir, [6].

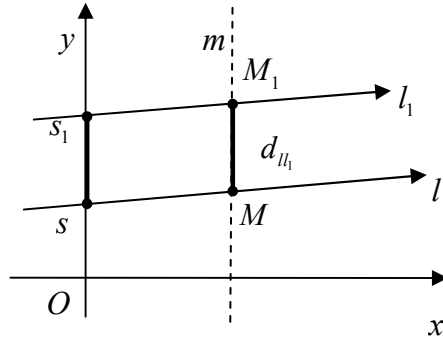
2.8.11 Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık

Eğer l ve l_1 doğrusu paralel ise bu durumda l ve l_1 doğrusu arasındaki d_{ll_1} uzaklığı, bir özel doğruya ait l ve l_1 doğruları arasındaki yönlendirilmiş MM_1 doğru parçasının uzunluğu olarak tanımlayabiliriz. Bu tanım gerçekten anlamlıdır, çünkü (2.1) hareketi özel doğruları özel doğrulara götürür, [6].

Tanım 2.17 $y = kx + s$ ve $y = kx + s_1$ denklemleri l ve l_1 doğruları arasındaki uzaklık

$$d_{ll_1} = s_1 - s \tag{2.10}$$

ile tanımlanır (Şekil 2. 13), [6].



Şekil 2. 13 Galilean geometride paralel iki doğru arasındaki uzaklık

2.8.12 Metrik Özelliklerin Kinematik Yorumu

I. $M(x, y)$ Noktasının Kinematik Yorumu

Açıkça Galilean geometride bir $M(x, y)$ noktasının kinematik karşılığı t zamanında o -doğrusunda x konumuyla tanımlı (t, x) olayıdır. Buradan $M(x, y)$ nin

x – koordinatı (t, x) in t zaman koordinatına ve $M(x, y)$ nin y – koordinatı (t, x) in x – uzay koordinatına karşılık gelir, [6].

II. İki Nokta Arasındaki d Uzaklığının Kinematik Yorumu

Galilean geometride iki A ve B noktasının arasındaki d – uzaklığının kinematik karşılığı A ve B noktalarına karşılık gelen olaylar arasındaki $t_2 - t_1$ zaman aralığıdır, [6].

III. δ – Özel Uzaklığın Kinematik Yorumu

Eğer $x_2 - x_1$ aralığı sıfır ise yani bu olaylar aynı anlı (eş zamanlı) ise, $y_2 - y_1$ özel uzaklığının kinematik karşılığı; bu olayların o – doğrusu üzerindeki uzay aralığına (birbirinden uzaklıkları farkına) eşittir, [6].

Dikkat ediniz ki δ – uzay aralığı aynı anlı olaylar için geçerlidir. Ayrıca iki olay arasındaki d – uzaklığı ve aynı anlı olaylar arasındaki δ – özel uzaklığı karşılaştırılmaz. Çünkü d – uzaklığının birimi zaman biriminde (dakika, saat,..) iken δ – özel uzaklığının birimi uzunluk birimindedir (metre, kilometre,...), [6].

IV. Doğrunun Kinematik Yorumu

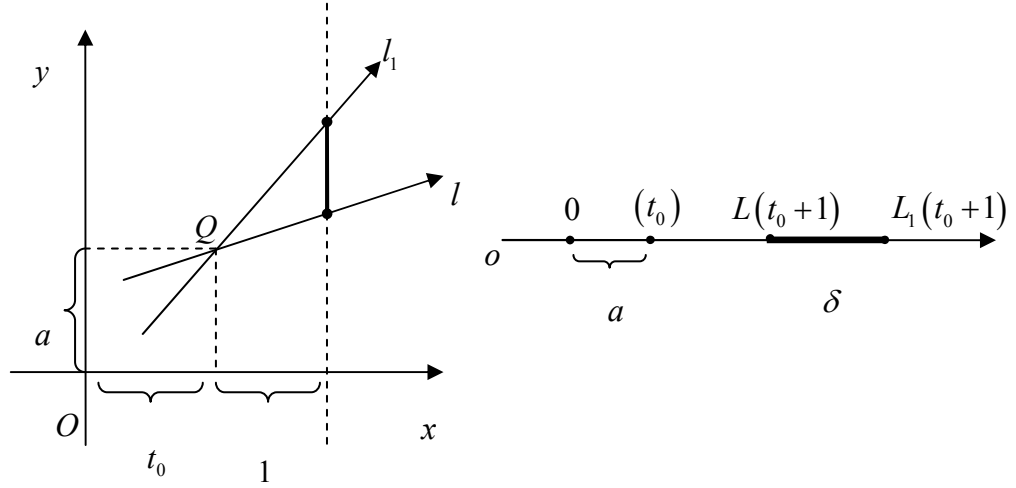
Galilean Düzleinde $y = kx + s$ denklemleri bir l doğrusu o – doğrusu boyunca k hızlı, $x = kt + s$ denklemleri düzgün hareketi belirtir, [6].

V. İki Doğru Arasındaki Uzaklığın Kinematik Yorumu

$y = kx + s$ ve $y = k_1x + s_1$ denklemleri iki doğru arasındaki $k_1 - k$ uzaklığı, $x = kt + s$ ve $x = k_1t + s_1$ düzgün hareketli L ve L_1 noktaları arasındaki hızların farkına karşılık gelir, [6].

VI. Açının Kinematik Yorumu

Eğer t_0 zamanında iki nokta o – doğrusunda aynı konumda ise δ_{l_1} açısı $t_0 + 1$ zamanında L ve L_1 arasındaki δ – uzay aralığını gösterir, (Şekil 2.14), [6].



Şekil 2. 14 Açık formülünün kinematik yorumu

VII. Özel – Doğruların Kinematik Yorumu

Galilean Geometride denklemi $x = a$ olan m –özel doğrusu $t = a$ zamanındaki anı tanımlamaya karşılık gelir. Bu, $t = a$ zamanında o –doğrusunun bütün noktalarını içerdiği için “sonsuz hızlı bir hareket” olarak düşünülebilir. Bu ise, bir özel doğrunun eğimi ile x –ekseni arasındaki açının tanjantının sonsuz olması ile bağdaşır, [6].

VIII. Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığının Kinematik Yorumu

Bir $M(x, y)$ noktasından (olayından) bir l doğrusuna (yani, o –doğrusunda hareket eden bir L noktası) uzaklığı, M olayı zamanında ölçülmüş M den L uzaklık olarak tanımlanır, [6].

IX. İki Paralel Doğru Arasındaki Uzaklığın Kinematik Yorumu

Galilean Geometride iki paralel doğru, herhangi referans çatısına göre hızları aynı olan iki düzgün hareket eden L ve L_1 noktalarına karşılık gelir. Bu noktalar $x = kt + s$ ve $x = kt + s_1$ denklemlerine göre hareket eder ve relatif hızları δ_{ll_1} sıfırdır. Böyle hareket eden noktalar arasındaki d_{ll_1} uzaklığını (veya paralel doğrular arasındaki uzaklığı) konuşmak anlamlıdır. $t = 0$ zamanında (veya herhangi sabit anda) o –doğrusundaki noktaların koordinatlarının $s_1 - s$ farkına eşittir, [6].

X. Çemberin kinematik yorumu

Q merkezli r – yarıçaplı Galilean Geometrideki bir çember sabit $Q(t, x)$ olayından uzaklıkları r -zaman aralığına eşit $(t - r, x)$ ve $(t + r, x)$ (r keyfi) olaylarının kümesini gösterir, [6].

Bu kavramları özetlersek:

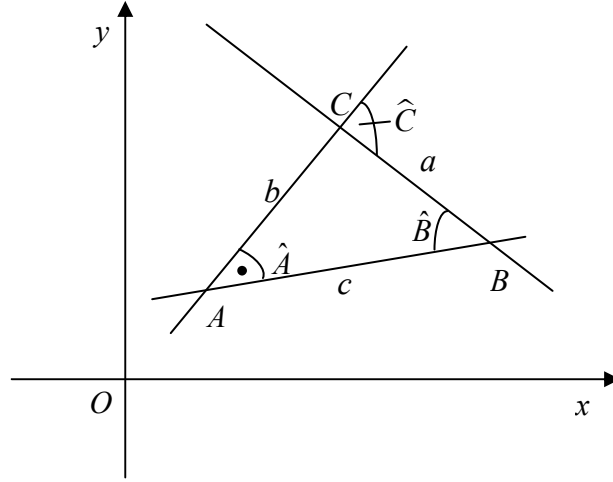
Geometrik Kavramlar	Kinematik Kavramlar
Nokta	Olay
Doğru	Düzgün hareket
Özel doğru	Zamandaki an
Noktalar arasındaki d – uzaklığı	Olaylar arasındaki zaman aralığı
Noktalar arasındaki özel δ – uzaklığı	Aynı anlı olaylar arasındaki uzay aralığı
Paralel doğrular arasındaki d – uzaklığı	Bir diğerine göre hareketsiz o noktaları arasındaki uzaklık
Noktadan doğruya uzaklık	Verilen zamanda sabit o noktasından düzgün hareket altında bir noktaya uzaklık
r yarıçaplı çember	Sabit olaydan önce veya sonra birim r zamanı oluşturan olayların kümesi

[6].

2.9 Galilean Düzlemde Trigonometri ve Üçgen

Galilean geometride en basit poligon üç noktası ve üç sıradan doğru ile oluşturulmuş $\triangle ABC$ dir. Öklid geometride olduğu gibi a, b, c üçgenin kenarlarını göstermekte kullanılır, yani $|d_{BC}| = a, |d_{CA}| = b, |d_{AB}| = c$ (pozitif) uzaklıklarıdır. A, B, C sadece üçgenin kenarları için değil ayrıca açılarının (pozitif) büyüklükleri için

$|\delta_{bc}| = A, |\delta_{ca}| = B, |\delta_{ab}| = C$ kullanırız. Genellikle AB doğru parçasının $|d_{AB}|$ uzunluğunu aynı AB ile gösteririz (Şekil 2.15), [6].



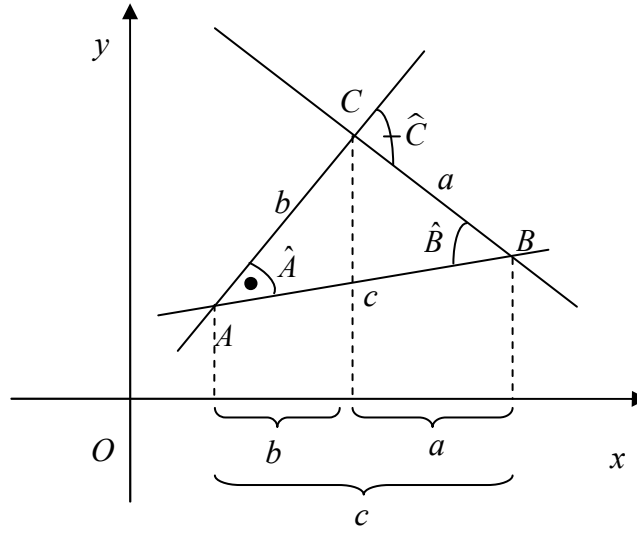
Şekil 2. 15 Galilean Geometride üçgen

2.9.1 Bir Üçgenin Kenarları Arasındaki Bağıntı

Eğer $\triangle ABC$ üçgeninin en geniş kenarı c ise bu durumda Şekil 2.16 dan görüleceği gibi

$$a + b = c \quad (2.11)$$

bulunur, [6].



Şekil 2. 16 Galilean Geometride kenar uzunlukları toplamı

Üçgenin Kenar Formülünün Kinematik Yorumu

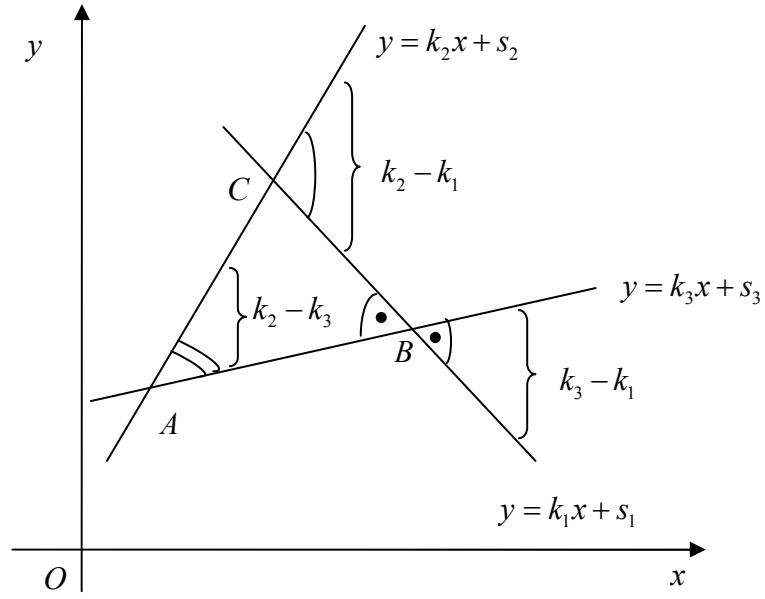
Eğer A, B ve C keyfi üç olay ise birinci ve sonuncu olay arasındaki zaman aralığı; birinci ile ikinci arasındaki zaman aralığı ile ikinci ve sonuncu arasındaki zaman aralığının toplamına eşittir, [6].

2.9.2 Üçgenin Açı Formülü

$\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ üçgeninin en geniş açısı $\hat{C}$ olsun. Eğer BC, CA ve AB doğru parçalarının eğimleri sırasıyla k_1, k_2 ve k_3 ise $A = k_2 - k_3, B = k_3 - k_1$ ve $C = k_2 - k_1$ dir. Böylece

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} \quad (2.12)$$

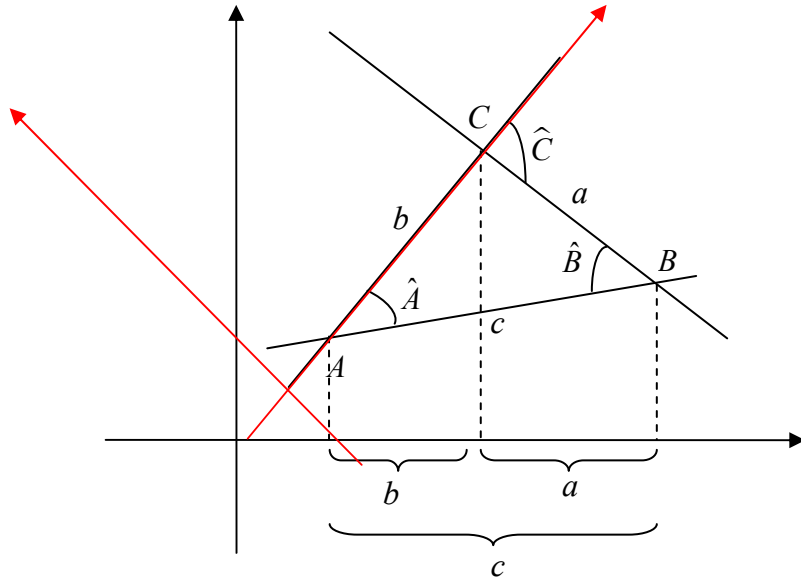
bulunur, (Şekil 2.17), [6].



Şekil 2. 17 Galilean Geometride açılar toplamı

Üçgenin Açı Formülünün Kinematik Yorumu

Üçgenin AC kenarını hareketsiz duruma getiren bir referans çatısı seçeriz. Diğer bir ifadeyle (2.1) hareketi AC yi x eksenine yatırsın. Bu durumda $-B$, c hareketi ile belirlenen bir hareketli referans çatısına göre a hareketinin hızı (diğer bir ifadeyle, c nin hareketsiz durumdaki referans çatısına göre a nın hızı) iken, $-A$ ve $-C$ sırasıyla c ve a doğruları ile Galilean geometride ifade edilen düzgün hareketlerin hızlarıdır. Böylece a, b ve c doğruları ile ifade edilen düzgün hızların uygun etiketlenmesi ile (2.12) formülü klasik kuraldaki toplamı verir. Bir hareketin mutlak hızı, yani sabit referans çatısına göre hızı, relatif hızı, yani hareket eden çatıya göre hızı ve transport hızı yani hareket eden çatının hızının toplamıdır, (Şekil 2.18).



Şekil 2. 18 Galilean Geometride Üçgende kenarlar toplamının kinematik yorumu

Örneğin hareket eden bir trenin arkasından önüne yürüyen bir yolcuyu düşünelim. Araca göre kendi hızı, trendeki hızı ve trenin hızının toplamıdır, [6].

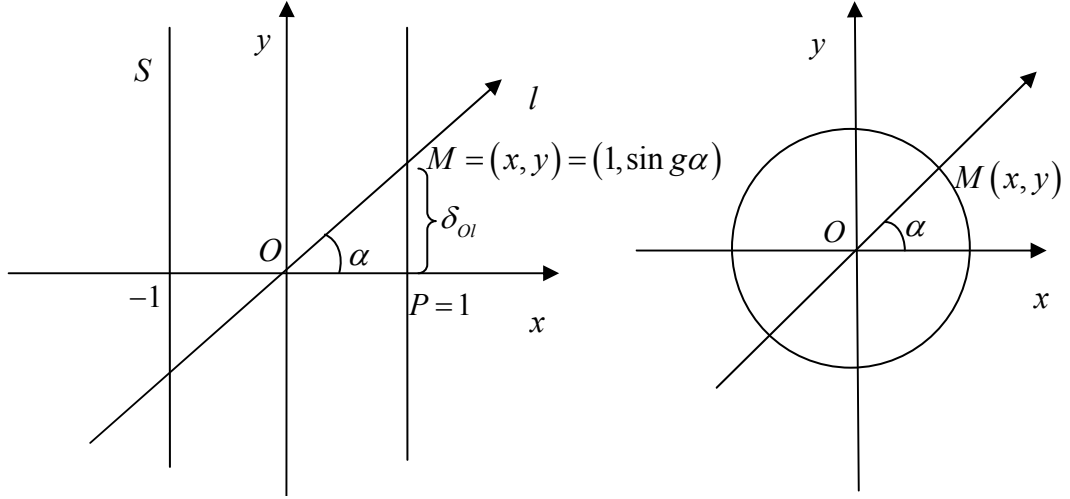
Üçgende Açı Formülünün Kinematik Yorumu

Üç düzgün hareketle belirli üç relatif hızın en büyüğü geri kalan ikisinin toplamıdır, [6].

2.9.3 Galilean Trigonometri

S , O merkezli birim çember ve M , x ve y koordinatlı S üzerinde bir nokta olsun.

l , OM doğrusunu ve α , δ_{Ol} açısını gösterebilirsin, (Şekil 2.23), [6].



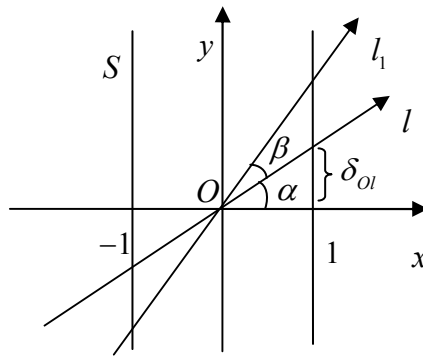
Şekil 2. 19 Galilean ve Öklid birim çemberler

Böylece

$$\cos g\alpha = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{1} = 1 \quad (2.18)$$

$$\sin g\alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{\delta_{Ol}}{1} = \frac{\alpha}{1} = \alpha \quad (2.19)$$

bulunur. l doğrusu ile aralarındaki açı β olacak şekilde l_1 doğrusu verilsin. Bu durumda Şekil 2.24 den görüldü gibi



Şekil 2. 20 Galilean geometride sinüs toplam formülü

$$\begin{aligned}\cos g(\alpha + \beta) &= 1 \\ \sin g(\alpha + \beta) &= \alpha + \beta \\ &= \alpha.1 + 1.\beta\end{aligned}$$

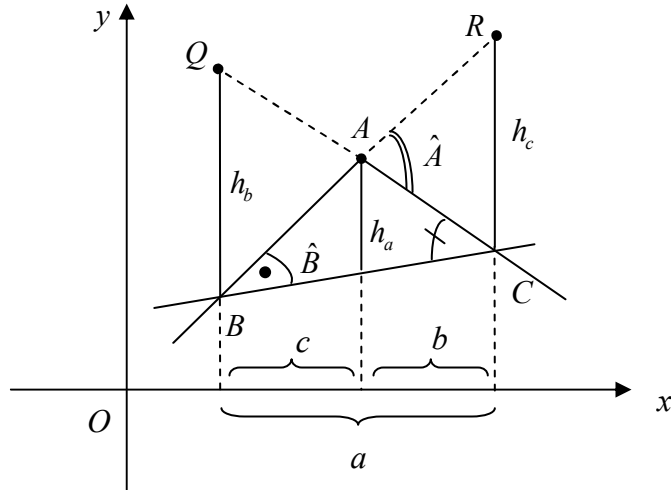
olduğundan

$$\begin{aligned}\cos g(\alpha + \beta) &= \cos g\alpha \cos g\beta \\ \sin g(\alpha + \beta) &= \sin g\alpha \cos g\beta + \cos g\alpha \sin g\beta\end{aligned}\tag{2.20}$$

yazılabilir, [6].

2.9.4 Galilean Geometride Sinüs Kuralı

Galilean geometride açı tanımından (Şekil 2.19)



Şekil 2. 21 Galilean geometride üçgende yükseklik

$$\begin{aligned}h_c &= BR \sin gB \\ &= a.B\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}h_c &= AR. \sin gA \\ &= b.A\end{aligned}$$

veya

$$h_c = B.a = A.b\tag{2.13}$$

elde edilir. Böylece $\frac{a}{A} = \frac{b}{B}$ bulunur.

Benzer olarak h_b ve h_a yüksekliklerini kullanarak $\frac{a}{A} = \frac{c}{C}$ ve $\frac{b}{B} = \frac{c}{C}$ bulunur.

Buradan

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} \quad (2.14)$$

elde edilir.

Sonuç olarak Öklid geometrideki

$$\frac{a}{\sin eA} = \frac{b}{\sin eB} = \frac{c}{\sin eC} \quad (2.14e)$$

sinüs kuralının benzeri olan

$$\frac{a}{\sin gA} = \frac{b}{\sin gB} = \frac{c}{\sin gC} \quad (2.14g)$$

elde edilir.

(2.13) bağıntısı Galilean geometride herhangi üçgenin kenarları açılarla orantılı olduğunu ifade eder, yani

$$a = \lambda A, b = \lambda B, c = \lambda C \quad (2.15)$$

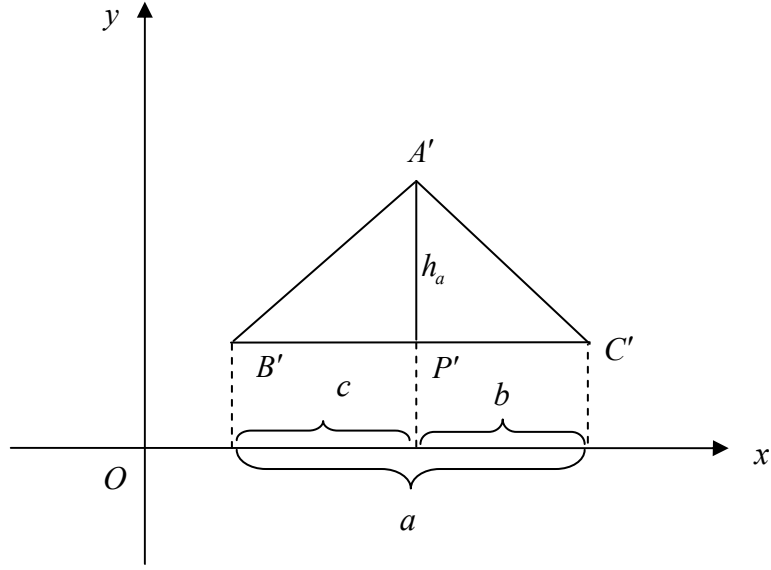
dir, [6].

2.9.5 Üçgende Alan

S_{ABC} , $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ üçgeninin alanı olmak üzere

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \quad (2.16)$$

dir, (Şekil 2.20).



Şekil 2. 22 Galilean geometride alan

Çünkü Galilean hareketini $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ üçgenine uygularsak $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ üçgenin görüntüsü x – eksenine paralel $B'C'$ kenarlı $A'\hat{B}'C'$ olur. Bu durumda $B'C'$ kenarının ve h_a' yüksekliğinin, Galilean uzunlukları Öklid uzunlukları ile aynıdır. Böylece $S'_{A'B'C'} = \frac{1}{2}a'h_a'$ bulunur. Burada $S'_{A'B'C'}$, $A'\hat{B}'C'$ üçgeninin alanıdır ve cisimlerin alanı her iki geometride de aynıdır. a, h_a ve S_{ABC} nicelikleri Galilean hareketler altında değişmez olduğu için $a' = a, h_a' = h_a$ ve $S'_{A'B'C'} = S_{ABC}$ dir. Fakat bu durumda $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a$ bulunur.

Benzer olarak $S_{ABC} = \frac{1}{2}bh_b$ ve $S_{ABC} = \frac{1}{2}ch_c$ olduğu gösterilebilir, [6].

2.9.6 Sinüs Alan Formülü

$S_{ABC} = \frac{1}{2}ch_c$ ve (2.15) formülünden $h_c = Ab$ olduğunu kullanırsak $S_{ABC} = \frac{1}{2}cbA$

bulunur. Simetriden

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A \quad (2.17)$$

elde edilir. Böylece Galilean geometrinin trigonometrik özellikleri kullanılırsa

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin gC = \frac{1}{2}ac\sin gB = \frac{1}{2}bc\sin gA \quad (2.17g)$$

Galilean sinüs alan bağıntısı

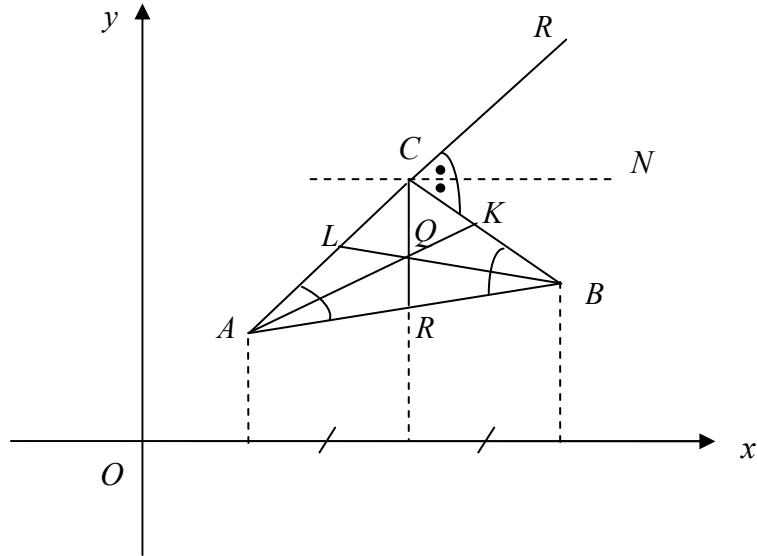
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin eC = \frac{1}{2}ac\sin eB = \frac{1}{2}bc\sin eA \quad (2.17e)$$

sinüs Öklid alan bağıntısının benzeri olarak elde edilir, [6].

2.9.7 İkizkenar Üçgen

Öklid geometride eğer $\hat{ABC}$ üçgeninin a ve b kenarları denk ise, bu durumda karşılıklı A ve B açıları da denktir. (2.13) formülünden bu sonuç Galilean geometride de sağlanır. (ispat $\frac{a}{A} = \frac{b}{B}$) Böylece bir üçgen ikizkenardır ancak ve ancak iki eşit açiya sahiptir, [6].

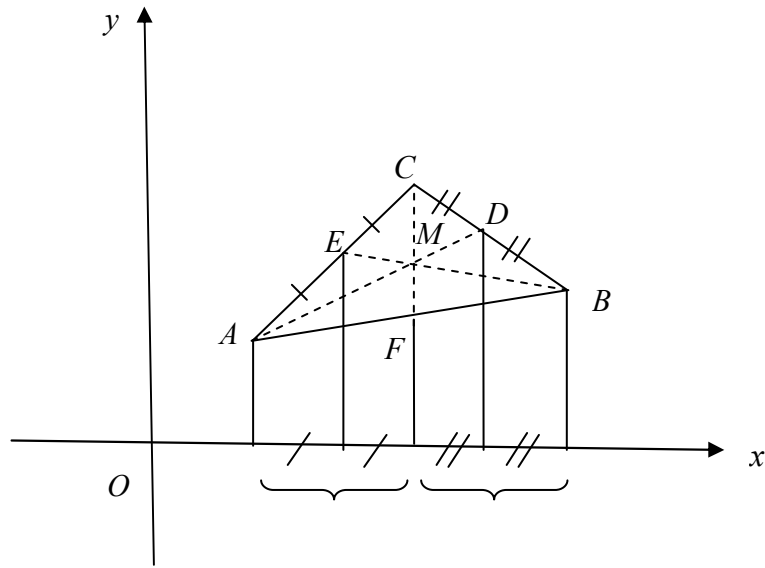
2.9.8 İkizkenar Üçgende Açıortay



Şekil 2. 23 Galilean geometride ikizkenar üçgen

Galilean geometride Şekil 2.21 deki $\triangle ABC$ ikizkenar üçgeninin CR yüksekliği AB kenarını keser ($AR = AC = b, BR = BC = b$) ve CR yüksekliği C açısını kesmez. Çünkü özel doğrunun bir açıyı kesmesi mümkün değildir. Bu Galilean Geometride açıortayların bir noktada kesişmesine gerek olmadığını gösterir. A ve B açılarının AK ve BL açıortayları, CR yüksekliğinin Q orta noktasında kesişir. Fakat CR yüksekliği C açısının CN açıortayı değildir (Şekil 2.21), [6].

2.9.9 Üçgende Kenarortay



Şekil 2. 24 Galilean geometride kenarortay

Öklid geometride olduğu gibi Galilean geometride de bir $\triangle ABC$ üçgeninin AD, BE ve CF kenarortayları, uzunluklarını 2:1 oranında kesecek şekilde bir M noktasında kesişir. Çünkü Galilean geometride bir üçgenin kenarortayları Öklid kenarortaylarla aynıdır. Buradan kesişim noktasıda aynı Öklid nokta olur. Sonuç olarak istenilen elde edilir, (Şekil 2.22) , [6].

2.9.10 Eşkenar Üçgen

Galilean Geometride eşkenar üçgen yoktur. Eğer üçgenin iki kenarı denk ise bu durumda üçüncü kenar iki katıdır. Benzer sonuç açılar için de sağlanır, [6].

2.10 Galilean Düzlemde Genel Çember Denklemi ve Eğriler

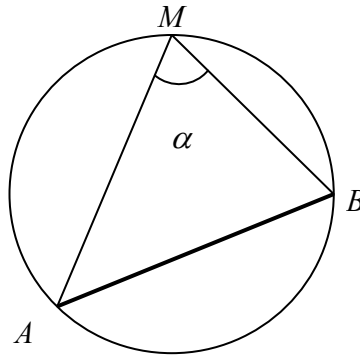
Öklid düzleminde çember; “verilen bir Q noktasından sabit r uzaklıktaki noktaların kümesi” olarak tanımlanır. Öklid düzleminde bu tanıma denk olarak “verilen bir AB doğru parçasını sabit yönlü α açısından gören noktaların kümesi” tanımı verilebilir. Gerçekten, Şekil 2.25 deki gibi $A(a_1, a_2)$ ve $B(b_1, b_2)$ Öklid düzleminde iki nokta ve $M(x, y)$, $\widehat{AMB} = \alpha$ olacak şekilde bir nokta olsun. Bu durumda MA ve MB doğru parçalarının eğimlerinden

$$\frac{\left[\frac{(b_2 - y)}{(b_1 - x)} \right] - \left[\frac{(a_2 - y)}{(a_1 - x)} \right]}{\left[\frac{(b_2 - y)}{(b_1 - x)} \right] \cdot \left[\frac{(a_2 - y)}{(a_1 - x)} \right] + 1} = \tan \alpha$$

elde edilir. Buradan

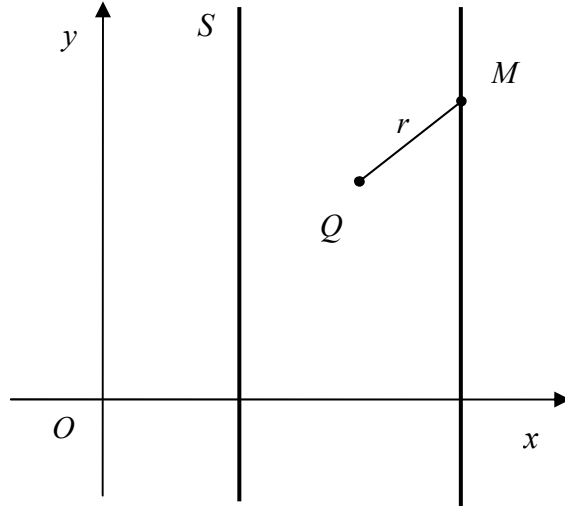
$$\begin{aligned} (\tan \alpha)(x^2 + y^2) &+ \left[(b_2 - a_2) - \tan \alpha (b_1 + a_1) \right] x \\ &+ \left[(b_1 - a_1) - \tan \alpha (b_2 + a_2) \right] y \\ &+ \left[(b_1 a_2 - b_2 a_1) - \tan \alpha (a_1 b_1 + a_2 b_2) \right] = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu son denklem ise Öklid düzleminde bir çember denklemdir.



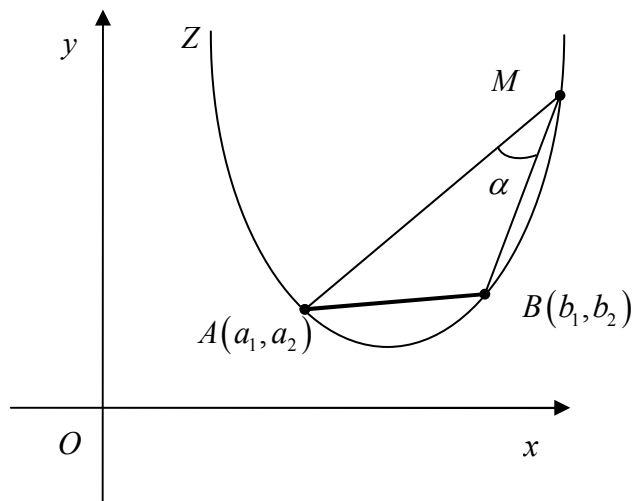
Şekil 2. 25 Öklid düzleminde çember

Benzer şekilde, Galilean Düzleminde verilen bir Q noktasından sabit r uzaklıktaki noktaların kümesi olarak tanımlı Galilean geometrideki S çemberi (Şekil 2.26) özel doğru çifti şeklinde olduğunu biliyoruz, [6].



Şekil 2. 26 Galilean düzlemde çember (circle)

Fakat daha ilginç olan verilen sıradan bir doğru parçasını sabit yönlü α açısından gören M noktalarının Z kümesidir. Bu Z kümesine Galilean düzleminde genel *çember (cycle)* adı verilir, (Şekil 2.27), [6].



Şekil 2. 27 Galilean düzlemde çember (cycle)

$A(a_1, a_2)$ ve $B(b_1, b_2)$ Galilean düzlemde iki nokta ve $M(x, y)$, $\widehat{AMB} = \alpha$ olacak şekilde bir nokta olsun. MA ve MB doğru parçalarının k ve k_1 eğimleri

$$k = \frac{y - a_2}{x - a_1}$$

ve

$$k_1 = \frac{y - b_2}{x - b_1}$$

ile verilir. Buradan

$$\alpha = k_1 - k = \frac{y - b_2}{x - b_1} - \frac{y - a_2}{x - a_1}$$

olur. Sonuç olarak, $\widehat{AMB} = \alpha$ olacak şekilde bütün $M(x, y)$ noktalarının koordinatları

$$\frac{y - b_2}{x - b_1} - \frac{y - a_2}{x - a_1} = \alpha$$

veya

$$\alpha(x - b_1)(x - a_1) - (x - a_1)(y - b_2) + (x - b_1)(y - a_2) = 0$$

denklemlerini sağlar. İkinci denklem

$$(b_1 - a_1)y = \alpha x^2 + [(b_2 - a_2) - \alpha(b_1 - a_1)]x + \alpha a_1 b_1 - a_1 b_2 + a_2 b_1$$

veya

$$y = \alpha x^2 + 2bx + c, \quad (b_1 - a_1 \neq 0) \quad (2.21)$$

olarak yazılabilir. Bu (2.21) denklemi Öklid geometride bir parabol denklemdir. Böylece Galilean düzlemin genel çemberleri (cycle) Öklid parabolldir. Ayrıca (2.21) denklemi

$$\alpha x^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + c = 0 \quad (2.22)$$

denklemleri ile verilen noktaların kümesine uygulanabilir. Çünkü (2.22) denklemi (2.21) denkleminden daha geneldir ve $b_2 \neq 0, a \neq 0$ olduğunda (2.21) denklemine indirgenir. Ayrıca $b_2 = 0, a \neq 0, b_1^2 - ac > 0$ olduğunda ($\Delta > 0, b_1^2 - ac > 0$ olduğundan) bir çember elde edilir. Eğer $b_2 = 0, a \neq 0, b_1^2 - ac = 0$ veya $a = b_2 = 0, b_1 \neq 0$ ise bu durumda

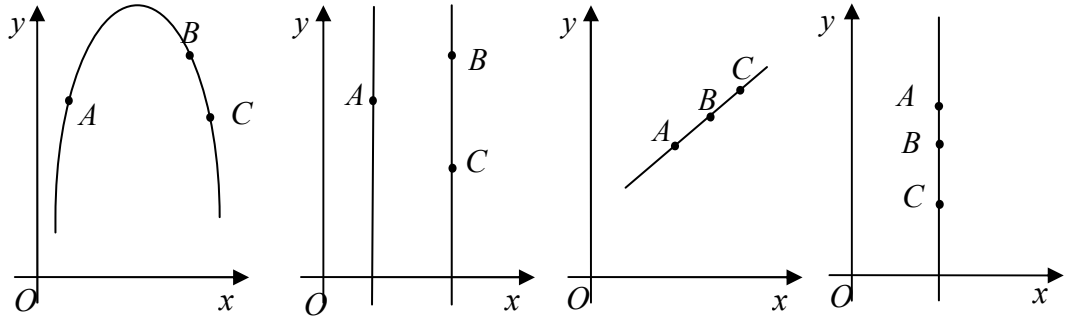
$$-2b_1x + c = 0$$

özel doğru elde edilir. Eğer $a = 0, b_2 \neq 0$ ise bu durumda

$$-2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

sıradan doğrusu elde edilir.

Eğer çember (cycle) (2.22) formundaki bir denkleme sahip bir eğri ise bu durumda bu eğrinin üç noktası bu çemberi (cycle) belirler, (Şekil 2.28) , [6].

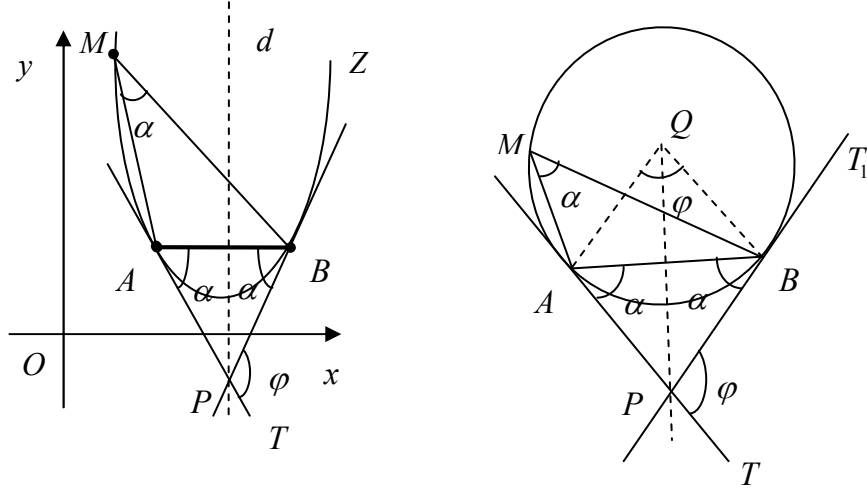


Şekil 2. 28 Galilean çemberler (cycle)

2.11 Genel Çember (Cycle) Denkleminin Özelliklerinin Karakterize Edilmesi

2.11.1 Yarıçap

Sabit bir AB doğru parçasına karşılık gelen açılar sabit bir α değerine sahiptir. Yani Z çemberinin (cycle) AB kirişi arasındaki açı ve AB nin uç noktalarındaki Z ye teğeti α ya eşittir. Gerçekten, M noktası A noktasına yaklaşır iken (Şekil 2.29) AM kirişi, A noktasında AT tanjantına ve MB kirişi de AB kirişine eğilir. Bütün AM ve MB doğru çiftleri α açısını oluşturur. Bu sonuç çemberin P noktasındaki PA ve PB teğetlerinin eşit olduğunu gösterir, (Şekil 2.29) , [6].



Şekil 2. 29 Galilean ve Öklid çemberlerde açı

Öklid çemberde yarıçap çemberin merkezinden noktalarına olan uzaklık olarak tanımlanır. Bu tanım Galilean düzleme merkezsizlik nedeni ile taşınamaz. Ayrıca bu durum Öklid geometride S çemberinin AB yayının s uzunluğunun $\varphi = \angle AQB$ radyan merkez açısına oranı tanımı için de geçerlidir. Fakat φ merkez açısı ile $\alpha = \frac{\varphi}{2}$ açısını yer değiştirerek ikinci tanım yeniden kullanılabilir ve

$$r = \frac{s}{2\alpha} \quad (2.23a)$$

elde edilir, [6].

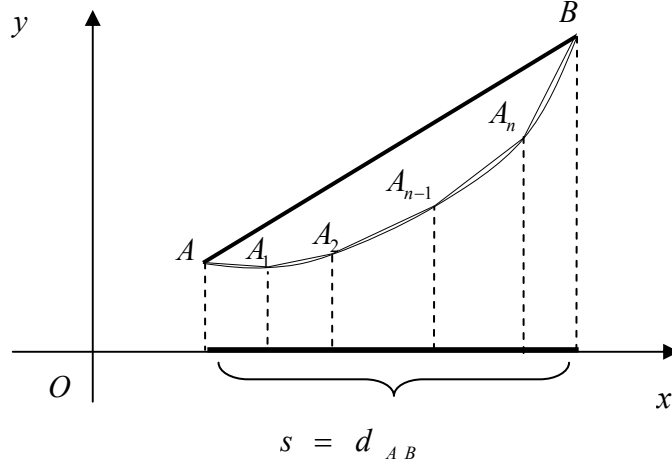
Eğer Z çemberinin (cycle) yukarıdaki tanımını kullanırsak verilen bir Z çemberi (cycle) için herhangi bir $\widehat{AB}$ yayı için $\frac{s}{\alpha}$ oranı sabittir. Fakat ilk önce Galilean düzlemde bir Γ eğrisinin bir $\widehat{AB}$ yayının uzunluğunu tanımlayalım:

Tanım doğal olarak yine Öklid tanıma dayanır ve bir Γ eğrisinin bir AB yayının uzunluğu $AA_1A_2...A_nB$ poligonal doğrusunun (poligonal doğruya en uzun bağlantı sıfıra yaklaşıken)

$$AA_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n + A_nB$$

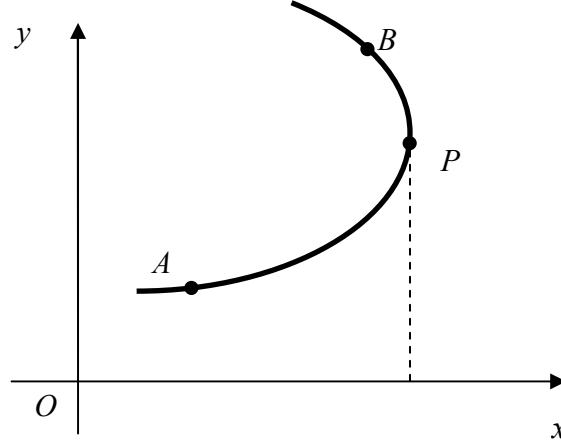
uzunluğunun limitidir. $\widehat{AB}$ yayında $AA_1A_2\cdots A_nB$ poligonal doğrusu Galilean uzunluğu tanımladığı için AB kirişinin Galilean uzunluğuna eşittir (Şekil, 2.30), [6].

Tanım 2.18 Bir eğrinin $\widehat{AB}$ yayının uzunluğu $\overline{AB}$ kirişinin $s = d_{AB}$ uzunluğu ile tanımlanır, [6].



Şekil 2. 30 Galilean geometride bir eğrinin uzunluğu

Not 2.6 Γ eğrisi düzgün ise her noktasında teğet doğrusuna sahiptir ve bu teğet doğrular özel doğrular değildir. Çünkü özel doğrular, doğru sınıfında değildir. Şekil 2.31 deki eğri P noktasında teğet doğrusu özel doğru olduğundan düzgün değildir, [6].



Şekil 2. 31 Galilean geometride düzgün olmayan eğri

Z çemberinin (cycle) $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ uç noktaları olmak üzere bir kirişi AB olsun ve α , AB yayının altına çizilmiş doğru ile belirlenmiş açı olsun. Bu durumda

$$\frac{s}{\alpha} = \frac{d_{AB}}{\alpha} = \frac{b_1 - a_1}{\alpha} = \frac{1}{a}, a = \frac{\alpha}{b_1 - a_1} \neq 0$$

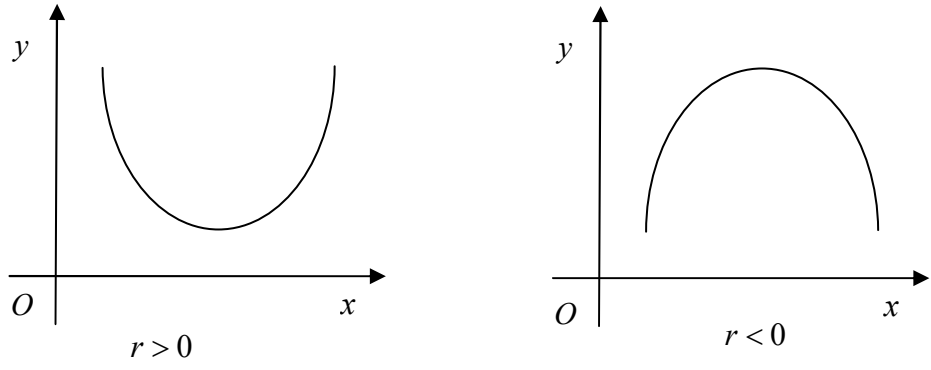
bulunur. Böylece $\frac{s}{\alpha}$ gerçekten sabittir, [6].

$y = ax^2 + 2bx + c$ Galilean çember (cylce) denkleminde a , x^2 nin katsayısı olmak üzere

$$r = \frac{1}{2} \frac{s}{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{b_1 - a_1}{\alpha} = \frac{1}{2a} \quad (2.23b)$$

dır, [6].

S çemberinin yarıçapının aksine Z çemberinin (cycle) yarıçapı, çemberin (cycle) yukarı ve aşağı açık (Şekil 2.32) çember olmasına göre pozitif veya negatif olabilir, [6].



Şekil 2. 32 Galilean geometride pozitif ve negatif yarıçaplı çemberler

Trigonometride açıların işaretinden bahsedilir. Öklid geometride S çemberinin r yarıçapı, $r = \frac{s}{\varphi}$ olarak tanımlanır ise bu durumda S çemberi saat yönünde veya saatin ters yönünde çizilmesine göre yarıçap pozitif ya da negatif olabilir. Galilean Geometride de Z çemberinin (cycle) yarıçapının işareti, x -ekseninin pozitif yönüyle belirlenmiş (artan zaman değerinin yönü) çember ile belirlenir, [6].

2.11.2 Eğrilik

S Öklid çemberinin r yarıçapı bütün sınırlar boyunca artar ve S çemberi bir l doğrusuna teğet kalır ise bu durumda S çemberi l doğrusuna eğilir. Örnek olarak Dünya küresel olmasına rağmen yolların düz olması verilebilir. Diğer yandan eğer çemberin yarıçapı azalır ise bu durumda çemberin eğriliği daha çoktur. Bu yüzden çemberin yarıçapının ρ karşıtı olarak eğrilikten bahsedilir. (2.23a) denkleminde

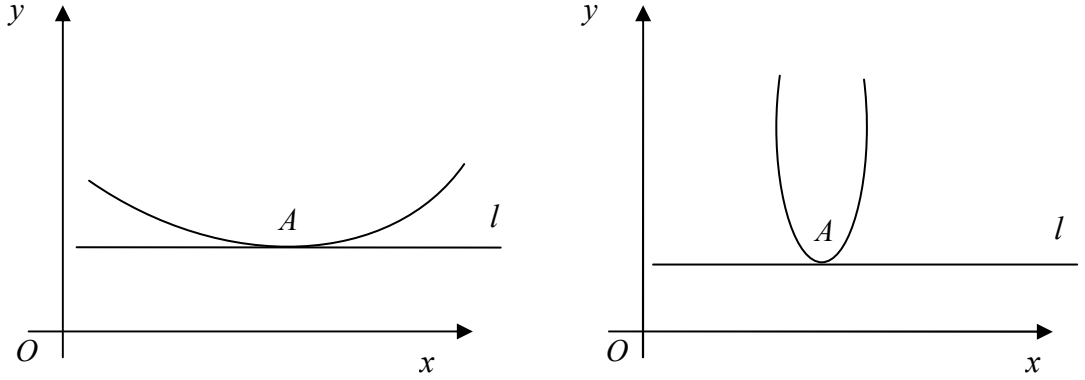
$$\rho = \frac{1}{r} = \frac{2\alpha}{s}$$

elde edilir, [6].

Benzer olarak Z çemberinin (cycle) $\rho = \frac{1}{r}$ eğriliği

$$\rho = \frac{1}{r} = 2 \frac{\alpha}{s} = 2a \quad (2.24)$$

bulunur. Eğer $r \rightarrow \infty$ ($\rho \rightarrow 0$) ise çember bir doğruya yaklaşır, (Şekil 2.33) , [6].



Şekil 2. 33 Galilean geometride eğrilik tanımı

2.11.3 Çember (Cycle) Kavramının Kinematik Yorumu

Galilean geometrideki bir Γ eğrisi,

$$y = f(x) \quad (2.25)$$

denklemleriyle verilsin. x, t zamanında o doğrusunda P noktasının konumunu göstermek üzere

$$x = f(t) \quad (2.25')$$

boyunca P noktasının hızına karşılık gelir. Z çemberine (cycle) karşılık gelen (2.25') denklemi

$$x = at^2 + 2bt + c \quad (2.21')$$

formundadır. Böyle denklemler sabit ivmeli hızları karakterize eder. Gerçekten (2.21') denkleminin t zamanındaki v hızı

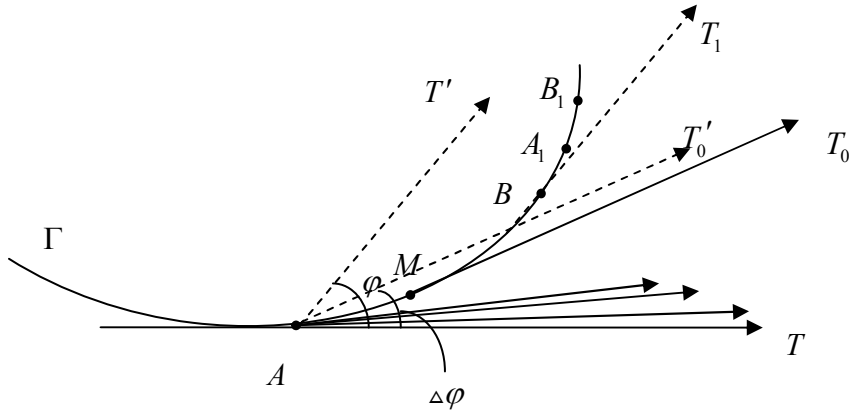
$$\begin{aligned}
v &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a(t + \Delta t)^2 + 2b(t + \Delta t) + c - (at^2 + 2bt + c)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2a\Delta t + a(\Delta t)^2 + 2b\Delta t}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2at + a\Delta t + 2b) \\
&= 2at + 2b
\end{aligned}$$

ve ω ivmesi

$$\begin{aligned}
\omega &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[2a(t + \Delta t)^2 + 2b] - (2at + 2b)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2a\Delta t}{\Delta t} \\
&= 2a
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece Galilean geometrideki Z çemberi (cycle), o doğrusu üzerindeki bir noktanın ivmesi ($\omega = 2a$ sabit) bu Z çemberinin eğriliğine eşit bir hareket belirtir. Özel olarak pozitif eğrilikli çembere (cycle) pozitif sabit ivmeli hareket, negatif eğrilikli çembere (cycle) negatif ivmeli hareket karşılık gelir, [6].

Öklid veya Galilean Geometrideki herhangi bir Γ eğrisinin ρ eğriliğini (r eğrilik yarıçapını) tanımlamak mümkündür. Bunu yapmak için, eğrilik kavramı teğete dayandığı için ilk önce Γ eğrisinde M noktası A noktasına yaklaşır iken AM sekantının limit konumu olarak Γ eğrisinin A noktasındaki teğeti tanımlanır, [6].



Şekil 2. 34 Galilean geometride eğrilik

Sezgisel olarak, özel bir eğri olan Γ doğrusunun eğriliği (doğruluğu), yönünün yani teğetlerinin bütün noktalarda aynı olmasından sıfırdır ve diğer eğrilerin eğriliği ise teğetlerinin bütün noktalarda aynı olmamasından dolayı sıfır değildir. Eğriliğin nümerik ölçümü teğetin değişiminin açısal oranıdır. Daha açık olarak, eğer A ve B Γ eğrisi üzerinde AB yayının uzunluğu $s = \text{arc}AB$ ve A ve B noktalarında AT ve BT_1 teğetleri arasındaki açı $\varphi = \angle TAT', (AT' \parallel BT_1)$ olan iki nokta ise AB yayı üzerinde Γ eğrisinin ρ_{ort} ortalama eğriliği

$$\rho_{ort} = \frac{\varphi}{s} \quad (2.26)$$

olarak tanımlanır, (Şekil 2.34). Açıkça büyük ortalama eğrilikli Γ eğrisinin kısımları küçük ortalama eğrilikli kısımlarından daha eğridir. A noktasında Γ eğrisinin eğriliği A noktasındaki teğetin değişiminin oranı olarak tanımlanır, yani A noktasında Γ eğrisinin eğriliği, M noktası Γ eğrisi boyunca A noktasına yaklaşır iken AM yayı üzerinde ρ_{ort} ortalama eğriliğinin limitir. Böylece

$$\rho = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}, \Delta s = \text{arc}AM \text{ ve } \Delta \varphi = \angle TAT_0', (AT_0' \parallel MT_0) \quad (2.26a)$$

bulunur, [6].

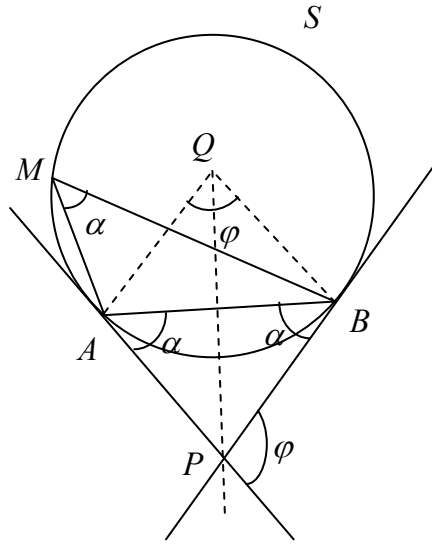
2.11.4 Eğrilik Yarıçapı

Tanım 2.19 Bir Γ eğrisinin A noktasındaki r eğrilik yarıçapı

$$r = \frac{1}{\rho} \quad (2.27)$$

olarak tanımlanır, [6].

Öklidde S çemberi bütün noktalarda aynı yapıya yani aynı eğrilik değerine sahiptir (Şekil 2.35), [6].

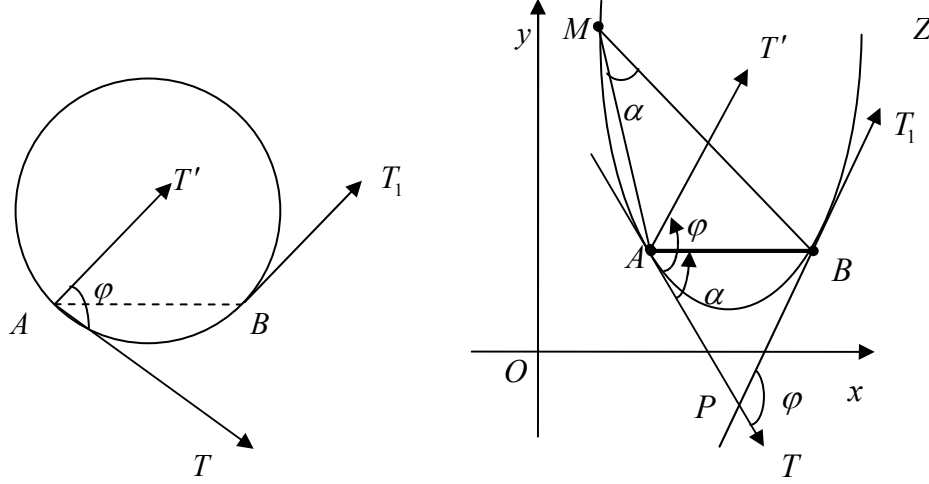


Şekil 2. 35 Öklid Geometride ortalama eğrilik

Gerçekten; φ açısı $\triangle PAB$ ikizkenar üçgeninin dış açısı olduğu için $\varphi = 2\angle PAB = 2\alpha$ dır. Bunu kullanarak

$$\begin{aligned} s &= \text{arc}AB \\ &= r\angle AQB \\ &= r2(\angle AMB) \\ &= r.2\alpha \\ &= r\varphi \end{aligned}$$

bulunur. Böylece r yarıçaplı S çemberinin ortalama eğriliği her AB yayı için aynıdır, [6].



Şekil 2. 36 Galilean geometride ortalama eğrilik

Şimdi Galilean geometriye geri dönelim. Yukarıdaki (2.26) ve (2.26a) denklemleri yardımıyla A noktasında Γ eğrisinin $\widehat{AB}$ yayı üzerinde ρ_{ort} ortalama eğriliği tanımlanır. Özel olarak Γ eğrisi, Z çemberi olmak üzere, AB yayının ortalama eğriliği

$$\rho_{ort} = \frac{\varphi}{s}$$

şeklindedir, (Şekil 2.36). Burada $s = \text{arc}AB$ ve $\varphi = \angle TAT' = \angle TPT_1$ ($AT' \parallel BT_1$) dir.

Eğer (2.12) açı formülü $\triangle ABP$ üçgeninde uygulanırsa

$$\varphi = \angle APB = 2\angle PAB = 2\alpha$$

bulunur. Böylece $\rho_{ort} = \frac{\varphi}{s} = \frac{2\alpha}{s} = 2a$ (a , Z çemberinde x^2 nin katsayısı) Z çemberinin (cycle) bütün AB yayları $\rho_{ort} = 2a$ aynı ortalama eğriliğe sahiptir. Bu Z çemberinin (cycle) ρ eğriliği her bir A noktasında

$$\rho = 2a \quad (2.27a)$$

değerine sahip olduğunu gösterir. Böylece Öklid çemberdeki gibi, Z çemberin (cycle) eğrilik yarıçapı

$$r = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2a} \quad (2.27b)$$

elde edilir, [6].

2.11.5 Oskülatör Çember

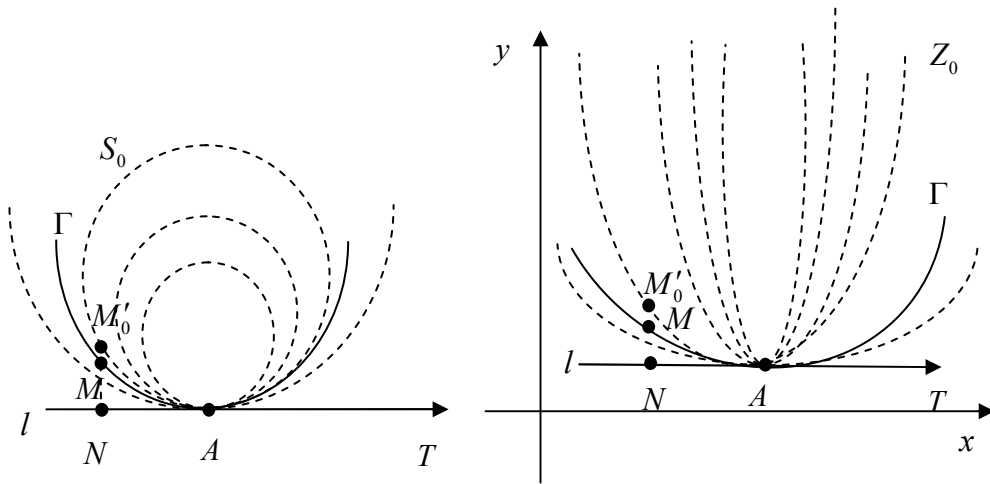
Öklid çember ve Galilean çemberin (cycle) eğrilik tanımları bize Γ eğrisinde herhangi bir noktada r eğrilik yarıçapı ve ρ eğrilik kavramına yeni bir yaklaşım verir.

Γ eğrisinin A noktasından geçen ve Γ gibi A noktasında $AT = l$ teğetine sahip bütün Öklid çemberleri göz önüne alalım. Bu çemberlerden , Γ eğrisine en yakın Öklid S_0 çemberini seçelim. Bu durumda herhangi diğer Öklid S çemberleri ve Γ eğrisi üzerindeki M ve M' noktaları arasındaki MM' uzaklığı A noktasında yeterince yakındır. Hatta bu noktalar A noktası üzerinde aynı N noktasına izdüşümü olan noktalardır. Fakat bu MM' uzaklığı Γ ve S_0 üzerinde karşılık gelen M ve M'_0 noktaları arasındaki uzaklıktan daha büyüktür. Bu yüzden S_0 çemberine A noktasında Γ nın *oskülatör (osculating) çemberi* denir. $\rho = \frac{1}{r}$ eğriliğine A noktasındaki Γ eğrisinin *eğriliği* denir ve S_0 çemberinin r yarıçapına A noktasındaki Γ eğrisinin *eğrilik yarıçapı* adı verilir, (Şekil 2.37) , [6].

Eğer Γ eğrisi $AT = a$ teğetinden daha yakın S çemberi yoksa bu durumda l doğrusu A_0 noktasında S_0 oskülatör çemberi rolü oynar. Bu durumda A noktasındaki Γ eğrisinin ρ eğriliği sıfırdır, [6].

Benzer şekilde, Γ eğrisinin A noktasından geçen ve Γ gibi A noktasında $AT=l$ teğetine sahip bütün Galilean çemberleri göz önüne alalım. Bu Galilean çemberlerden, Γ eğrisine en yakın Galilean Z_0 çemberini (cycle) seçelim. Bu durumda herhangi diğer Galilean Z çemberleri (cycle) ve Γ eğrisi üzerindeki M ve M' noktaları arasındaki MM' uzaklığı A noktasında yeterince yakın ve bu noktalar A noktası üzerinde aynı N noktasına izdüşümü olan noktalardır. Fakat bu MM' uzaklığı Γ ve Z_0 üzerinde karşılık gelen M ve M'_0 noktaları arasındaki uzaklıktan daha büyüktür. Bu yüzden Z_0 çemberine (cycle) A noktasında Γ nın *oskületör çemberi* (cycle) denir. $\rho = \frac{1}{r}$ (veya $\rho = 2a$) eğriliğine A noktasındaki Γ eğrisinin *eğriliği* denir ve Z_0 çemberinin (cycle) r yarıçapına A noktasındaki Γ eğrisinin *eğrilik yarıçapı* adı verilir, (Şekil 2.37), [6].

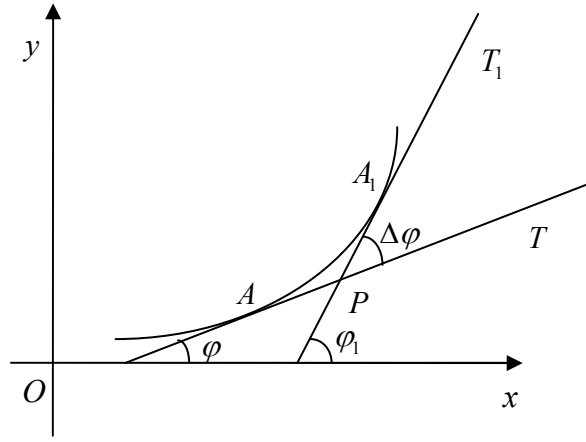
Eğer Γ eğrisi $AT=a$ teğetinden daha yakın Z çemberi (cycle) yoksa bu durumda l doğrusu A_0 noktasında Z_0 oskületör çemberi (cycle) rolü oynar. Bu durumda A noktasındaki Γ eğrisinin ρ eğriliği sıfırdır (ve r eğrilik yarıçapı sonsuzdur), [6].



Şekil 2. 37 Öklid Öskületör çember ve Galilean Oskületör çember (cycle)

2.11.6 Eğrilik Yarıçapının Analitik Olarak İfade Edilmesi

$y = f(x)$ eğrisinin teğetinin eğimi, $f(x)$ fonksiyonunun $f'(x)$ türevi ile verilir. A ve A_1 komşuluk noktalarında AT ve A_1T_1 teğetler ve φ ve φ_1 , AT ve A_1T_1 ile x eksenini arasındaki Galilean açılar olsun. Bu durumda $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, $\angle TPT_1$ açısıdır. Δs , $\widehat{AA_1}$ yayının Galilean uzunluğu olsun. Bizim problemimiz $\rho = \lim_{A_1 \rightarrow A} (\Delta\varphi / \Delta s)$ hesaplamaktır (Şekil 2.38), [6].



Şekil 2. 38 Eğrilik yarıçapının analitik incelenmesi

$A_1 = (x + \Delta x, y + \Delta y)$ olsun. İki doğru arasındaki Galilean açısı, eğimleri farkına eşit olduğundan

$$\Delta\varphi = f'(x + \Delta x) - f'(x)$$

ve bir yayın Galilean uzunluğu uç noktalarının apsisleri farkına eşit olduğundan

$$\Delta s = (x + \Delta x) - x = \Delta x$$

yazılabilir. Böylece

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

bulunur. Buradan

$$\rho = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = f''(x) \quad (2.28g \rho)$$

elde edilir. Bu durumda r eğrilik yarıçapı için

$$r = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{f''(x)} \quad (2.28g r)$$

bulunur. Dolayısıyla Öklid geometride

$$\rho = \frac{f''(x)}{\left[1 + f'(x)^2\right]^{3/2}} \quad (2.28e \rho)$$

ve

$$r = \frac{1}{\rho} = \frac{\left[1 + f'(x)^2\right]^{3/2}}{f''(x)} \quad (2.28e r)$$

denklemlerine analog olarak Galilean Geometride

$$\rho = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = f''(x)$$

ve

$$r = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{f''(x)}$$

eşitlikleri elde edilir, [6].

(2.28e ρ) ve (2.28g ρ) denklemleri yardımıyla $x^2 + y^2 = r^2$ çemberinin eğriliği her noktada $\frac{1}{r}$ ve $y = ax^2 + bx + c$ çemberinin eğriliğinin her noktada $2a$ dır. Ayrıca bu

formüller ile sabit ρ eğrilikli eğrilerin; Öklid çemberler ve Galilean çemberler (cycle) olduğu görülür. Bunu göstermek için sabit sıfır eğrilikli (ve sonsuz eğrilik çaplı) çemberlerin (veya Galilean çemberler (cycle)) limit durumlarını sıradan doğrular almalıyız. Böylece Galilean geometride $y = f(x)$; eğriliği $\rho = f''(x) = \text{sabit}$ olan bir eğri ise bu durumda c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak

$$y = \frac{1}{2} \rho x^2 + c_1 x + c_2$$

olan bir çemberdir (cycle). Açık bir genelleme olarak, Öklid ve Galilean Geometride herhangi bir Γ eğrisi, eğriliği ile, yani

$$\rho = \rho(s) \quad (2.29)$$

denklemleri ile belirlenir. Burada ρ , Γ nın A noktasındaki eğriliği ve s , Γ üzerinde keyfi fakat sabit Q orijin noktasından ölçülen Γ nın $\widehat{QA}$ yayının uzunluğudur. Bu ifadeye düzlem üzerindeki *temel teorem* adı verilir. (2.29) denkleminde de Γ eğrisinin *doğal denklemi* denir, [6].

2.11.7 Galilean Geometride Eğrinin Kinematik Yorumu

$y(x)$ denklemi ile tanımlı Γ eğrisinin $A(x, y)$ noktasındaki $\rho = y''(x)$ eğriliği $x = f(t)$ denkleminde göre o doğrusu boyunca hareket eden bir noktanın t zamanındaki $w = \frac{d^2x}{dt^2}$ ivmesi verir. Ayrıca A noktasındaki Γ eğrisinin Z_0 oskülatör çemberi (cycle) bir noktanın sabit ivmeli hareketini tanımlar. Bu bağlamda Γ eğrisinin A noktasındaki a teğeti; t zamanındaki v hızlı düzgün hareketine karşılık gelir. Ayrıca Γ eğrisinin teğetinin $k = v$ eğimi Galilean hareket altında değişmez değildir. Fakat oskülatör çemberin $r = \frac{1}{\rho}$ eğrilik yarıçapı ve $\rho = w$ eğriliği Galilean hareket altında değişmezdir (çünkü bu w ivmesi bütün Galilean referans çatıları için aynıdır ve ikinci mekaniksel öneme sahiptir.), [6].

Newton'un 2. Hareket kanununda m , bir noktanın kütlesi, f nokta üzerindeki hareket ettiren kuvvet olmak üzere $f = mw$ olduğunu görürüz. Burada $\rho = w$ eğriliği sadece m sabit çarpanı ile kuvvetten farklıdır. Böylece Galilean Geometrideki eğriler üzerine temel teoreminden bir doğru üzerindeki bir noktanın hareketi o nokta üzerindeki f kuvveti ile belirlenir, [6].

BİR PARAMETRELİ DÜZLEMSEL GALILEAN HAREKETLER

Bu bölümde, S. Yüce, [7], tarafından verilen bir parametrelî düzlemsel Galilean hareketler tanıtılacaktır.

3.1 Bir Parametrelî Düzlemsel Galilean Hareketler

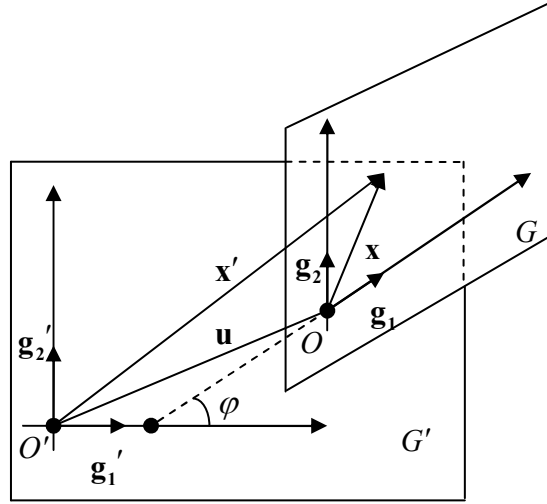
Tanım 3.1 G ve G' , sırası ile, hareketli ve sabit Galilean düzlemler ve $\{O; \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}, \{O'; \mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2\}$ ise G ve G' düzlemlerinin koordinat sistemleri olsun.

$$\mathbf{OO}' = \mathbf{u} = u_1 \mathbf{g}_1 + u_2 \mathbf{g}_2, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}$$

hareketin öteleme vektörü olmak üzere

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{u} \tag{3.1}$$

dönüşümü ile tanımlı hareket *bir parametrelî düzlemsel Galilean hareket* diye adlandırılır ve $B = G / G'$ ile gösterilir. Burada $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ vektörleri $X = (x_1, x_2) \in G$ noktasının hareketli ve sabit dik koordinat sistemlerine göre konum vektörleri olmak üzere $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ ve $\mathbf{u}$ vektörü ve $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}'_1$ vektörleri arasındaki φ shear dönme açısı t zaman parametresinin sürekli diferensiyallenebilir fonksiyonlarıdır, (Şekil 3.1), [7].



Şekil 3. 1 $B = G / G'$ hareketi

Eğer $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_1'$ arasındaki açı $\varphi = \varphi(t)$ alınırsa bu durumda

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1' + \varphi \mathbf{g}_2' \\ \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_2' \end{cases} \quad (3.2)$$

elde edilir, [7]. Bu denklemi iki yolla gösterebiliriz:

Birinci yol: burada $\mathbf{g}_1$ vektörüne dik olan vektör y – eksenine paralel vektördür. $\mathbf{g}_2$ ve $\mathbf{g}_2'$ birim vektör olduğundan $\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_2'$ dir. $\mathbf{g}_1$ vektörü $\mathbf{g}_1'$ ve $\mathbf{g}_2'$ vektörlerinin gerdiği düzlemde olduğundan $\mathbf{g}_1 = \cos \varphi \mathbf{g}_1' + \sin \varphi \mathbf{g}_2'$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1' + \varphi \mathbf{g}_2' \\ \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_2' \end{cases}$$

bulunur.

İkinci yol: $\begin{cases} x' = x \\ y' = x\varphi + y \end{cases}$ olduğundan

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

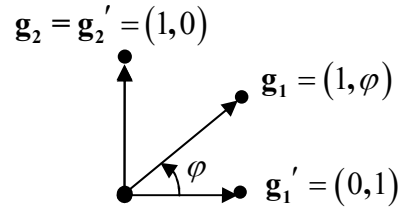
yazılabilir. Dolayısıyla $(1,0)$ ve $(0,1)$ noktası bu son denklemde yazılırsa

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \varphi \end{bmatrix};$$

ve

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

noktası bulunur, (Şekil 3.2). Yani $(1,0)$ noktasının dönme altındaki resmi $(1,\varphi)$ ve $(0,1)$ vektörünün dönme altındaki resmi $(0,1)$ elde edilir.



Şekil 3. 2 Galilean bazlar arasındaki ilişki

Böylece

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1' + \varphi \mathbf{g}_2' \\ \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_2' \end{cases}$$

bulunur.

Bu çalışmada sırf ötelemekten kaçınmak için $\dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi}{dt} \neq 0$ olduğu kabul edilecektir.

Düzlemin bir X noktası hem hareketli sistemdeki (x_1, x_2) koordinatları hem de sabit sistemdeki (x_1', x_2') koordinatları yardımıyla göz önüne alınabilir. Buna göre her iki sistemdeki X noktasına ait konum vektörleri için

$$\mathbf{x} = \mathbf{OX} = x_1 \mathbf{g}_1 + x_2 \mathbf{g}_2 \quad (3.3)$$

ve

$$\mathbf{x}' = \mathbf{O'X} = x_1' \mathbf{g}_1' + x_2' \mathbf{g}_2' \quad (3.4)$$

yazılabilir. Böylece

$$\mathbf{O}'\mathbf{X} = \mathbf{O}'\mathbf{O} + \mathbf{OX} = -\mathbf{OO}' + \mathbf{OX}$$

veya

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{u} = (x_1 - u_1)\mathbf{g}_1 + (x_2 - u_2)\mathbf{g}_2 \quad (3.5)$$

vektörel denklemi elde edilir. Bu denkleme *bir parametrelî düzlemsel Galilean hareketin vektörel denklemi* denir. Buradan

$$\begin{aligned} x'_1\mathbf{g}'_1 + x'_2\mathbf{g}'_2 &= (x_1 - u_1)\mathbf{g}_1 + (x_2 - u_2)\mathbf{g}_2 \\ &= (x_1 - u_1)(\mathbf{g}'_1 + \varphi\mathbf{g}'_2) + (x_2 - u_2)\mathbf{g}'_2 \\ &= (x_1 - u_1)\mathbf{g}'_1 + [(x_1 - u_1)\varphi + (x_2 - u_2)]\mathbf{g}'_2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - u_1 \\ x'_2 = (x_1 - u_1)\varphi + (x_2 - u_2) \end{cases} \quad (3.6)$$

elde edilir. Bu ifadeye $B = G / G'$ hareketinin *Kartezyen denklemi* denir.

Son eşitlik

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - u_1 \\ x'_2 = \varphi x_1 + x_2 - u_1\varphi - u_2 \end{cases}$$

veya

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_1 \\ -u_1\varphi - u_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} -u_1 \\ -u_1\varphi - u_2 \end{bmatrix}$ dersek $B = G / G'$ bir

parametrelî düzlemsel Galilean hareket

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{C} \quad (3.7)$$

şeklinde matris formunda da gösterilebilir. Burada A matrisine *shear dönme* matrisi denir. Ayrıca A matrisinin tersi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi & 1 \end{bmatrix}$$

olup $A^T \neq A^{-1}$ dir. Dolayısıyla E^2 Öklid düzleminde dönme matrisi ortogonal olmasına rağmen Galilean geometride dönme matrisi ortogonal değildir, [7].

3.2 Türev Denklemleri

Hareket esnasında bir $X \in G$ noktasının her iki G ve G' düzlemine göre hızlarını araştırmak için hareketimizin türev denklemlerini teşkil edeceğiz. Bunun için

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1' + \varphi \mathbf{g}_2' \\ \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_2' \end{cases}$$

denklemlerinin $\mathbf{g}_1', \mathbf{g}_2'$ vektörlerini sabit kabul ederek t zamanına göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{g}_1}{dt} &= \dot{\mathbf{g}}_1 = \dot{\varphi} \mathbf{g}_2, \\ \frac{d\mathbf{g}_2}{dt} &= \dot{\mathbf{g}}_2 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}} = \dot{u}_1 \mathbf{g}_1 + \left(u_1 \dot{\varphi} + \dot{u}_2 \right) \mathbf{g}_2$$

elde edilir. Dolayısıyla $B = G / G'$ hareketinin türev denklemleri

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{g}}_1 = \dot{\varphi} \mathbf{g}_2 \\ \dot{\mathbf{g}}_2 = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{u}} = \dot{u}_1 \mathbf{g}_1 + \left(u_1 \dot{\varphi} + \dot{u}_2 \right) \mathbf{g}_2 \end{cases} \quad (3.8)$$

bulunur. Bu denklemlere $B = G / G'$ hareketinin türev denklemleri denir, [7].

3.3 Hızlar ve Hızların Terkibi

Tanım 3.2 X noktasının G -düzleminde hareket ederken sahip olduğu hız vektörüne, yani X noktası G düzlemindeki yörüngesini çizerken sahip olduğu vektörel hıza X noktasının *relatif hızı* denir ve $\mathbf{V}_r$ ile gösterilir. Bu hız $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{g}_1 + x_2 \mathbf{g}_2$ denkleminde $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$ sabit tutup türev alarak

$$\mathbf{V}_r = \dot{x}_1 \mathbf{g}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{g}_2 \quad (3.9)$$

şeklinde bulunur. Eğer X noktası G düzleminde sabit ise $\mathbf{V}_r$ relatif hızı sıfırdır.

Tanım 3.3 X noktasının hareket ederken G' düzlemine göre sahip olduğu hızı X noktasının *mutlak hızı* denir ve $\mathbf{V}_a$ ile gösterilir.

$\mathbf{x}' = (x_1 - u_1) \mathbf{g}_1 + (x_2 - u_2) \mathbf{g}_2$ denkleminin t ye göre türevi alınır

$$\mathbf{V}_a = \left(\dot{x}_1 - \dot{u}_1 \right) \mathbf{g}_1 + (x_1 - u_1) \dot{\mathbf{g}}_1 + \left(\dot{x}_2 - \dot{u}_2 \right) \mathbf{g}_2 + (x_2 - u_2) \dot{\mathbf{g}}_2$$

elde edilir. Hareketin türev denklemleri $\dot{\mathbf{g}}_1 = \dot{\phi} \mathbf{g}_2$ ve $\dot{\mathbf{g}}_2 = -\dot{\phi} \mathbf{g}_1$ olduğundan

$$\mathbf{V}_a = \left(\dot{x}_1 - \dot{u}_1 \right) \mathbf{g}_1 + (x_1 - u_1) \dot{\phi} \mathbf{g}_2 + \left(\dot{x}_2 - \dot{u}_2 \right) \mathbf{g}_2 - (x_2 - u_2) \dot{\phi} \mathbf{g}_1$$

bulunur. Bu denklem yeniden düzenlenirse

$$\mathbf{V}_a = -\dot{u}_1 \mathbf{g}_1 + \left(-\dot{u}_2 - u_1 \dot{\phi} + x_1 \dot{\phi} \right) \mathbf{g}_2 + \mathbf{V}_r \quad (3.10)$$

elde edilir. Burada

$$\mathbf{V}_f = -\dot{u}_1 \mathbf{g}_1 + \left(-\dot{u}_2 - u_1 \dot{\phi} + x_1 \dot{\phi} \right) \mathbf{g}_2 \quad (3.11)$$

vektörüne X noktasının *sürüklenme hız vektörü* denir.

Teorem 3.1 $B = G / G'$; bir parametrelili düzlemsel Galilean hareketi esnasında $X \in G$ noktası her iki sisteme göre hareketli ise $X \in G$ noktasının hız vektörleri arasında

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_f + \mathbf{V}_r \quad (3.12)$$

bağıntısı vardır, [7].

3.4 Shear Dönme Polü ve Pol Doğruları (Doğru Demeti)

Genel düzlemsel hareketler için, hareket etmeyen yani $\{O; \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ ve $\{O'; \mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2\}$ referans koordinat sistemlerinin her ikisinde de koordinatları aynı olan bir nokta vardır. Bu noktaya *pol noktası* veya *anlık shear dönme pol merkezi* denir. Bu

durumda $\mathbf{V}_f = \mathbf{0}$ elde edilir. $\mathbf{V}_f = -\dot{u}_1 \mathbf{g}_1 + \left(-\dot{u}_2 - u_1 \dot{\varphi} + x_1 \dot{\varphi} \right) \mathbf{g}_2$ denklemi

kullanılarak $B = G / G'$ hareketinin $P = (p_1, p_2) \in G$ pol noktası; $\mathbf{V}_f = \mathbf{0}$ olduğundan

$$\begin{cases} -\dot{u}_1 = 0 \\ -\dot{u}_2 - u_1 \dot{\varphi} + x_1 \dot{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{cases} 0.x_1 + 0.x_2 = \dot{u}_1 \\ \dot{\varphi} x_1 + 0.x_2 = \dot{u}_2 + u_1 \dot{\varphi} \end{cases}$$

yazılabilir. Buradan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\varphi} & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \dot{u}_1 \\ \dot{\varphi} & 0 & \dot{u}_2 + u_1 \dot{\varphi} \end{array} \right]$$

denilirse bu lineer denklem sisteminin çözümü $\text{rank} A < \text{rank} [A|B] = 2$ olduğundan

$$\begin{cases} x_1 = \frac{u_1 \dot{\varphi} + \dot{u}_2}{\dot{\varphi}} \\ x_2 = (p_2(t))(\lambda), \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

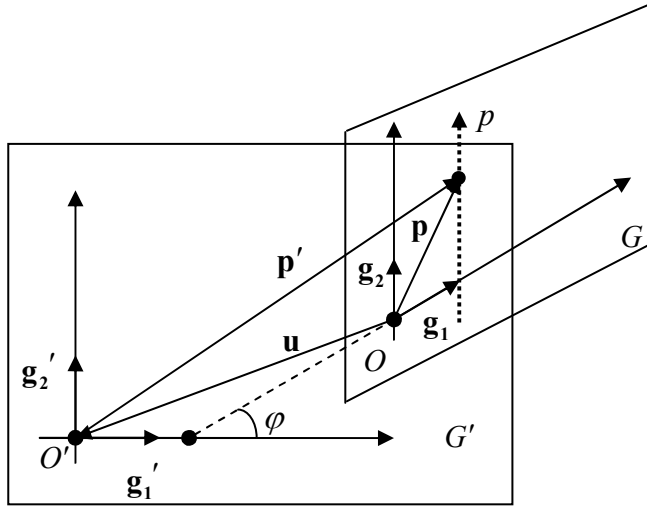
bulunur. Böylece

$$\begin{cases} p_1 = x_1 = u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\varphi}} \\ p_2 = x_2 = (p_2(t))(\lambda), \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.14)$$

p pol doğrusu elde edilir. Burada $\mathbf{V}_f = \mathbf{0}$ olduğundan her t için $u_1(t) = c = \text{sabit}$ olduğundan

$$u(t) = (c, u_2(t)) = c\mathbf{g}_1 + u_2\mathbf{g}_2$$

yazılabilir. (Şekil 3.3), [7].



Şekil 3. 3 $B = G / G'$ hareketinin pol noktaları

Sonuç 3.1 $B = G / G'$ hareketinin herhangi t anındaki her iki düzlemdeki değişmez noktaları G düzleminde y -eksenine paralel doğrular üzerindedir. Yani herhangi t anında G düzleminde sadece pol doğrusu vardır. Bütün $t \in I$ lar için bu pol doğruları y -eksenine ve birbirine paraleldir ve bir paralel doğru demeti oluşturur, [7].

(3.13) ve (3.14) denklemlerini kullanarak

$$\mathbf{V}_f = -\dot{u}_1 \mathbf{g}_1 + \left(-\dot{u}_2 - u_1 \dot{\varphi} + x_1 \dot{\varphi} \right) \mathbf{g}_2$$

sürüklenme hızı

$$\mathbf{V}_f = \{ 0 \mathbf{g}_1 + (x_1 - p_1) \mathbf{g}_2 \} \dot{\varphi} \quad (3.15)$$

şeklinde tekrar düzenlenebilir.

Şimdi (3.15) denklemden aşağıdaki sonuçları verebiliriz:

Sonuç 3.2 $B = G / G'$ bir parametrelili düzlemsel hareketi esnasında

$$\mathbf{PX} = (x_1 - p_1) \mathbf{g}_1 + (x_2 - p_2) \mathbf{g}_2$$

pol ışını ile

$$\mathbf{V}_f = \{0\mathbf{g}_1 + (x_1 - p_1)\mathbf{g}_2\} \dot{\varphi}$$

sürüklenme hızı Galilean anlamında diktir. Çünkü

$$\langle \mathbf{PX}, \mathbf{V}_f \rangle_G = 0 \cdot (x_1 - p_1) = 0$$

dır. Yani pol ışını hareketin her t anında sürüklenme hızına diktir. $B = G / G'$ hareketi altında, $X \in G$ noktasının odakları, normali P dönme polünden geçen yörünge eğrisidir, [7].

Sonuç 3.3 $B = G / G'$ hareketi altında, $\mathbf{V}_f$ sürüklenme hızının Galilean özel normu

$$\|\mathbf{V}_f\|_\delta = \|\mathbf{PX}\|_G \left| \dot{\varphi} \right| \text{ dir. Yani, } B = G / G' \text{ hareketi esnasında } X \in G \text{ noktalarının bütün}$$

yörünge eğrileri, normal doğruları P polünden geçen eğrilerdir. $B = G / G'$ hareketi P pol noktası etrafında $\dot{\varphi}$ açısal hızı ile Galilean anlık shear dönmesidir, [7].

Tanım 3.4 $B = G / G'$ bir parametrelili düzlemsel Galilean hareketi esnasında her t anında pol noktaları olduğundan herhangi bir P noktası G ve G' düzlemlerinde çeşitli konumlarda bulunur. P noktasının konumu G hareketli düzleminde genellikle bir eğridir ve bu eğri *hareketli pol eğrisi* diye adlandırılır. (P) ile gösterilir. Ayrıca bu P pol noktasının konumu sabit G' düzleminde de genellikle bir eğridir ve bu eğriye de *sabit pol eğrisi* denir ve (P') ile gösterilir.

3.5 İvmeler ve İvmelerin Terkibi

Bu bölümde $B = G / G'$ bir parametrelili düzlemsel hareket esnasında relatif, mutlak, sürüklenme ve Coriolis ivme vektörlerini tanımlayalım.

$B = G / G'$; bir parametrelili düzlemsel Galilean hareket esnasında X noktasının G düzlemine göre olan ivme vektörüne *relatif ivme vektörü* denir. Bu ivme vektörü $\mathbf{b}_r$ ile gösterilir ve $\mathbf{V}_r$ relatif hızının t ye göre türevi alınarak

$$\mathbf{b}_r = \dot{\mathbf{V}}_r = \ddot{x}_1 \mathbf{g}_1 + \ddot{x}_2 \mathbf{g}_2 \quad (3.16)$$

şeklinde bulunur. Burada $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$ sabit olarak kabul edilmiştir, [7].

X noktasının G' düzlemine göre ivme vektörüne *mutlak ivme vektörü* denir ve $\mathbf{b}_a$ ile gösterilir. O halde $\mathbf{V}_a = \{0\mathbf{g}_1 + (x_1 - p_1)\mathbf{g}_2\}\dot{\varphi} + \dot{x}_1\mathbf{g}_1 + \dot{x}_2\mathbf{g}_2$ denkleminin t ye göre türevi alınarak;

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_a = \dot{\mathbf{V}}_a = & \left\{ \left(\dot{x}_1 - \dot{p}_1 \right) \mathbf{g}_2 \right\} \dot{\varphi} + \left\{ (x_1 - p_1) \mathbf{g}_2 \right\} \ddot{\varphi} + \left\{ (x_1 - p_1) \mathbf{g}_2 \right\} \dot{\varphi} + \ddot{x}_1 \mathbf{g}_1 \\ & + \dot{x}_1 \ddot{\mathbf{g}}_1 + \ddot{x}_2 \mathbf{g}_2 + \dot{x}_2 \ddot{\mathbf{g}}_2\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan türev denklemleri $\dot{\mathbf{g}}_1 = \dot{\varphi} \mathbf{g}_2$ ve $\dot{\mathbf{g}}_2 = \mathbf{0}$ olduğundan

$$\mathbf{b}_a = \ddot{x}_1 \mathbf{g}_1 + \left\{ (x_1 - p_1) \ddot{\varphi} - \dot{p}_1 \dot{\varphi} + 2 \dot{x}_1 \dot{\varphi} + \ddot{x}_2 \right\} \mathbf{g}_2 \quad (3.17)$$

bulunur. (3.17) ifadesindeki

$$\mathbf{b}_f = 0 \cdot \mathbf{g}_1 + \left\{ (x_1 - p_1) \ddot{\varphi} - \dot{p}_1 \dot{\varphi} \right\} \mathbf{g}_2 \quad (3.18)$$

ve

$$\mathbf{b}_c = 0 \cdot \mathbf{g}_1 + 2 \dot{x}_1 \dot{\varphi} \mathbf{g}_2 \quad (3.19)$$

İfadelerine, sırası ile, $B = G / G'$ bir *parametrelili düzlemsel Galilean hareketinin sürüklenme ivmesi ve Coriolis ivmesi* denir, [7].

Buna göre ivmelerin terkibi şu teoremle ifade edilebilir:

Teorem 3.2 $B = G / G'$ bir parametrelili düzlemsel Galilean hareketi esnasında bir noktanın ivme vektörü, sürüklenme ivme vektörü ile Coriolis ivme vektörü ve relatif ivme vektörünün toplamına eşittir. Yani

$$\mathbf{b}_a = \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_c + \mathbf{b}_r \quad (3.20)$$

sağlanır, [7].

Sonuç 3.4 $B = G / G'$ hareketi esnasında, $\mathbf{b}_c$ Coriolis ivme vektörü ve $\mathbf{V}_r$ relatif hız vektörü Galilean anlamında birbirine diktir. Yani

$$\langle \mathbf{V}_r, \mathbf{b}_c \rangle_G = \left\langle x_1 \mathbf{g}_1 + x_2 \mathbf{g}_2, 0 \mathbf{g}_1 + 2 \dot{x}_1 \dot{\varphi} \mathbf{g}_2 \right\rangle = 0$$

dır, [7].

Şimdi bir B hareketinde herhangi bir t anında sürüklenme ivmesi sıfır olan noktaları araştıralım:

$$\mathbf{b}_f = 0 \cdot \mathbf{g}_1 + \left\{ (x_1 - p_1) \ddot{\varphi} - \dot{p}_1 \dot{\varphi} \right\} \mathbf{g}_2 = \mathbf{0} \text{ için elde edilen}$$

$$(x_1 - p_1) \ddot{\varphi} - \dot{p}_1 \dot{\varphi} = 0$$

lineer denklem sistemi

$$\begin{cases} q_1(t) = p_1(t) + \dot{p}_1(t) \frac{\dot{\varphi}(t)}{\ddot{\varphi}(t)} \\ q_2(t) = (q_1(t))(\mu), \mu \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.21)$$

çözümüne sahiptir, [7].

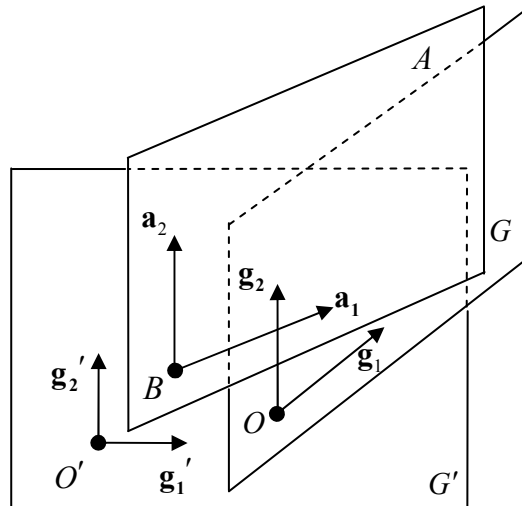
Sonuç 3.5 $B = G / G'$ hareketi esnasında herhangi t anındaki her iki düzlemde hareket etmeyen sabit noktaları G düzleminde y -eksenine paralel doğrular üzerindedir. Yani, herhangi t anında G düzleminde sadece ivme polü vardır. Bütün $t \in I$ lar için bu hareketli pol doğruları y -eksenine ve birbirine paraleldir ve bir paralel doğru demeti oluşturur, [7].

HAREKETLİ KOORDİNAT SİSTEMİ

Tezimizin orijinal kısımlarından ilki olan bu bölümde üç düzlemin birbirine göre Galilean hareketleri incelenecektir.

G hareketli düzlemi $\{O; \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ koordinat sistemi ile G' sabit düzlemi ise $\{O'; \mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2\}$ koordinat sistemi ile verilsin. Bu durumda $B = G / G'$ hareketi esnasında G düzleminde aldığımız bir noktanın G' sabit düzlemine göre izafe ettik. Tersine, eğer G' hareketli, G sabit olsaydı benzer formülleri bulurduk.

Şimdi ise G ve G' düzlemlerine göre hareketli bir A düzlemi üzerinde bir noktanın hareketini inceleyeceğiz. (Şekil 4.1)



Şekil 4. 1 Biri sabit diğeri hareketli Galilean düzleme göre hareket

Formüllerimizin bir ve iki parametrelili hareketlerde geçerli olması için diferansiyel yazış tarzını kullanacağız. Bir noktanın veya vektörün G düzlemine göre değişimini " $d...$ " ve G' düzlemine göre değişimini de " $d'...$ " ile göstereceğiz.

A düzlemi $\{B; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ koordinat sistemi ile verilsin. Artık A düzleminin G ve G' düzlemlerine göre hareketlerini daha önce gördüğümüz G nin G' düzlemine göre hareketi gibi gösterilebilir. Burada φ ve ψ nin, sırası ile, A/G ve A/G' bir parametrelili düzlemsel Galilean hareketlerin shear dönme açısı olduğunu kabul edelim.

$B = G / G'$ hareketinde türev denklemleri

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{g}}_1 = \dot{\varphi} \mathbf{g}_2 \\ \dot{\mathbf{g}}_2 = 0 \\ \dot{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} \mathbf{g}_1 + \begin{pmatrix} \dot{u}_2 - u_1 \dot{\varphi} \end{pmatrix} \mathbf{g}_2. \end{cases}$$

Benzer şekilde A/G hareketinin türev denklemleri $\mathbf{OB} = \mathbf{b} = b_1 \mathbf{a}_1 + b_2 \mathbf{a}_2$ olmak üzere

$$\begin{cases} d\mathbf{a}_1 = d\varphi \mathbf{a}_2 \\ d\mathbf{a}_2 = 0 \\ d\mathbf{b} = (db_1) \mathbf{a}_1 + (db_2 + b_1 d\varphi) \mathbf{a}_2 \end{cases}$$

ve A/G' hareketinin türev denklemleri $\mathbf{O'B} = \mathbf{b}' = b'_1 \mathbf{a}_1 + b'_2 \mathbf{a}_2$ olmak üzere

$$\begin{cases} d'\mathbf{a}_1 = d\psi \mathbf{a}_2 \\ d'\mathbf{a}_2 = 0 \\ d'\mathbf{b}' = (db'_1) \mathbf{a}_1 + (db'_2 + b'_1 d\psi) \mathbf{a}_2 \end{cases}$$

bulunur. Kısallığı temin etmek maksadıyla

$$\begin{cases} d\varphi = \tau \\ db_1 = \sigma_1 \\ db_2 + b_1 d\varphi = \sigma_2 \end{cases}, \begin{cases} d\psi = \tau' \\ db'_1 = \sigma'_1 \\ db'_2 + b'_1 d\psi = \sigma'_2 \end{cases}$$

ve $\mathbf{d'b} = \mathbf{d'b'}$ olsun.

Tanım 4.1 Burada $\sigma_j, \sigma'_j, \tau, \tau'$ büyüklüklerine, bir parametrelili harekete ait *Pfaff formları* (lineer diferansiyel form) denir.

Böylece A nın G – düzlemine göre hareketinin türev denklemleri

$$\begin{cases} \mathbf{da}_1 = \tau \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{da}_2 = 0 \\ \mathbf{db} = \sigma_1 \mathbf{a}_1 + \sigma_2 \mathbf{a}_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

ve A nın G' – düzlemine göre hareketinin türev denklemleri

$$\begin{cases} \mathbf{d'a}_1 = \tau' \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{d'a}_2 = 0 \\ \mathbf{d'b'} = \sigma'_1 \mathbf{a}_1 + \sigma'_2 \mathbf{a}_2 \end{cases} \quad (4.2)$$

şeklinde verilmiş olur.

Şimdi de A düzleminde koordinatları (x_1, x_2) olan bir X noktası ele alalım.

$\mathbf{BX} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2$ olmak üzere

$$\mathbf{x} = \mathbf{OX} = \mathbf{OB} + \mathbf{BX} = \mathbf{b} + x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2$$

ve

$$\mathbf{x'} = \mathbf{O'X} = \mathbf{O'B} + \mathbf{BX} = \mathbf{b'} + x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2$$

vektörlerini teşkil edelim.

(4.1) türev denklemleri yardımıyla X in G düzlemine göre değişimi

$$\mathbf{dx} = \mathbf{db} + x_1 \mathbf{da}_1 + dx_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{da}_2 + dx_2 \mathbf{a}_2$$

veya

$$\mathbf{dx} = (dx_1 + \sigma_1) \mathbf{a}_1 + (dx_2 + \sigma_2 + \tau x_1) \mathbf{a}_2 \quad (4.3)$$

yazılabilir. Buradan X noktasının G düzlemine göre hızı bulunur. Buna da *relatif hız vektörü* denir ve

$$\mathbf{V_r} = \frac{\mathbf{dx}}{dt}$$

ile hesaplanır.

Eğer $\mathbf{V}_r = 0$ veya $d\mathbf{x} = 0$ ise X noktası G de tespit edilmiştir. O halde X in G de sabit olma şartları

$$dx_1 = -\sigma_1, \quad dx_2 = -\sigma_2 - \tau x_1 \quad (4.4)$$

elde edilir.

Tamamen benzer şekilde X in G' ye göre değişimi için

$$d'\mathbf{x} = d'\mathbf{x} = (dx_1 + \sigma_1')\mathbf{a}_1 + (dx_2 + \sigma_2' + \tau'x_1)\mathbf{a}_2 \quad (4.5)$$

elde edilir. Buradan da X in G' düzlemine göre değişimi yani X in mutlak hız vektörü

$$\mathbf{V}_a = \frac{d'\mathbf{x}}{dt}$$

yazılabilir.

Eğer $\mathbf{V}_a = 0$ veya $d'\mathbf{x} = 0$ ise X noktası G' de sabittir. O halde X in G' düzleminde sabit olma şartları için

$$dx_1 = -\sigma_1', \quad dx_2 = -\sigma_2' - \tau'x_1 \quad (4.6)$$

yazılabilir.

X noktası G de sabit tutulduğunda $\mathbf{V}_f = \frac{d_f\mathbf{x}}{dt}$ sürüklenme hızı X in G' düzlemine göre $d_f\mathbf{x}$ değişimine karşılık gelir. Buna göre (4.4) deki şartlar (4.5) de yerine yazılırsa

$$d_f\mathbf{x} = \{(\sigma_1' - \sigma_1)\}\mathbf{a}_1 + \{(\sigma_2' - \sigma_2) + (\tau' - \tau)x_1\}\mathbf{a}_2 \quad (4.7)$$

elde edilir.

Böylece (4.3), (4.4) ve (4.7) denklemlerinden $d'\mathbf{x} = d_f\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ olduğunu görüyoruz. Yani hızlar kanunu korunmuş olur ($\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_f + \mathbf{V}_r$). Burada G ve G' düzlemleri sabit kabul edilmiştir.

A/G hareketinde $\widetilde{\mathbf{V}}_a$, X noktasının A/G hareketine göre hızı yani

$$\sigma_1 \mathbf{a}_1 + \{\sigma_2 + \tau x_1\} \mathbf{a}_2 + dx_1 \mathbf{a}_1 + dx_2 \mathbf{a}_2$$

değişimine eşittir. $\widetilde{\mathbf{V}}_r$, X in kendi düzlemine (A düzlemine) göre hızı

$$dx_1 \mathbf{a}_1 + dx_2 \mathbf{a}_2$$

değişimine karşılık gelir. Böylece A/G hareketine göre $\widetilde{\mathbf{V}}_r$ sürüklenme hızı

$$\sigma_1 \mathbf{a}_1 + \{\sigma_2 + \tau x_1\} \mathbf{a}_2$$

değişimidir.

Aynı şekilde A/G' hareketinde $\widetilde{\mathbf{V}}'_a$, X noktasının A/G' hareketine göre hızı yani

$$\sigma'_1 \mathbf{a}_1 + \{\sigma'_2 + \tau' x_1\} \mathbf{a}_2 + dx_1 \mathbf{a}_1 + dx_2 \mathbf{a}_2$$

değişimine, $\widetilde{\mathbf{V}}'_r$, X in kendi düzlemine (A düzlemine) göre hızı yani

$$dx_1 \mathbf{a}_1 + dx_2 \mathbf{a}_2$$

değişimine karşılık gelir. Böylece X noktası A düzleminde sabit iken X in G' düzlemine göre $\widetilde{\mathbf{V}}'_r$ hızı,

$$\sigma'_1 \mathbf{a}_1 + \{\sigma'_2 + \tau' x_1\} \mathbf{a}_2$$

değişimine eşittir.

Ayrıca, G/G' hareketi; A/G nin ters hareketi ve A/G' hareketi ile karakterize edilir. Böylece G/G' hareketinde $\mathbf{d}_r \mathbf{x}$ sürüklenme hızı, A/G' hareketindeki sürüklenme hızı ile A/G hareketindeki sürüklenme hızının farkı olarak elde edilir. Buna göre, G/G' hareketinin sürüklenme hızı

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_r \mathbf{x} &= \widetilde{\mathbf{V}}'_r - \widetilde{\mathbf{V}}_r \\ &= [\sigma_1 \mathbf{a}_1 + \{\sigma_2 + \tau x_1\} \mathbf{a}_2] - [\sigma'_1 \mathbf{a}_1 + \{\sigma'_2 + \tau' x_1\} \mathbf{a}_2] \\ &= \{(\sigma_1 - \sigma'_1)\} \mathbf{a}_1 + \{(\sigma_2 - \sigma'_2) + (\tau - \tau') x_1\} \mathbf{a}_2 \end{aligned}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Dolayısıyla G/G' hareketinin Shear Dönme Polü,

$\mathbf{BP} = p_1 \mathbf{a}_1 + p_2 \mathbf{a}_2$ olmak üzere sürüklenme hızının sıfır olmasıyla bulunur. $\mathbf{d}_r \mathbf{x} = 0$

için

$$\begin{cases} (\sigma_1' - \sigma_1) = 0 \\ (\sigma_2' - \sigma_2) + (\tau' - \tau)x_1 = 0 \end{cases}$$

yazılabilir. Elde edilen bu lineer denklem sistemi

$$\begin{cases} p_1 = x_1 = \frac{\sigma_2' - \sigma_2}{\tau' - \tau} \\ p_2 = x_2 = p_2(\lambda), \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.8)$$

çözümüne sahiptir.

4.1 Birbirine Göre Hareket Eden Düzlemler için Shear Dönme Polü

Sisteme A düzleminin girmesiyle A, G, G' gibi birbirlerine göre hareket eden ve yine birbirine göre ikişer ikişer bir parametrelili hareket meydana getiren üç düzlem vardır. Belirli bir t anında (A, G) , (A, G') , (G, G') düzlem çiftlerinin her biri tamamen belirli birer shear dönme polüne sahiptir ve ani dönme hareketleri bu dönme polleri etrafında belirli bir açısal hız ile meydana gelir. Buna göre birbirine göre hareket eden üç düzlem bir üç-üyel kinematik zinciri teşkil eder.

A nın G düzlemine göre A/G hareketi (4.1) denklem sistemi ile elde edilir. Burada $d\varphi = \tau$ sonsuz küçük dönme açısı yani, $\frac{\tau}{dt}$ açısal hızıdır.

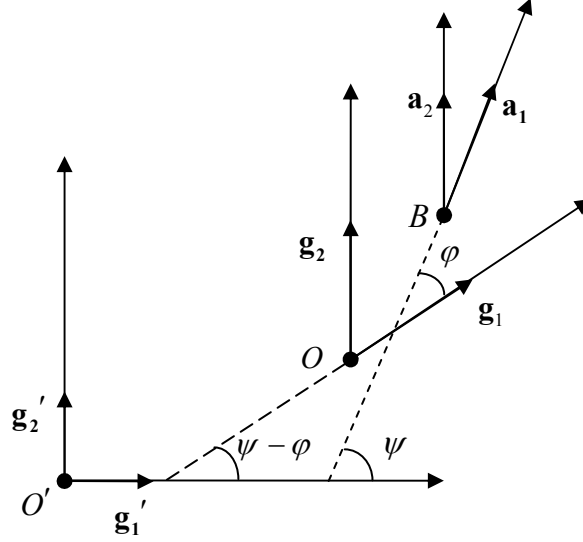
X noktasının A ya göre $d\mathbf{B}\mathbf{X} = dx_1\mathbf{a}_1 + dx_2\mathbf{a}_2$ değişimine X in A düzlemine göre (relatif) hız vektörü karşılık gelir. Eğer x_1, x_2 sabit ise X noktası A düzleminde sabittir. (4.3) formülü ile X in G düzlemine göre değişimi verilmişti. Buna göre X in A/G hareketinde sürüklenme hızına $(\sigma_1)\mathbf{a}_1 + (\sigma_2 + x_1\tau)\mathbf{a}_2$ değişimi karşılık gelir. Fakat hareketin shear dönme polü sürüklenme hızının sıfır olmasıyla karakterize edildiğinden q shear dönme pol doğrusu

$$q \cdots \begin{cases} q_1 = -\frac{\sigma_2}{\tau}, \\ q_2 = q_2(\xi), \xi \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.9)$$

bulunur. Benzer şekilde q' shear dönme pol doğrusu (A/G' hareketinin)

$$q' \dots \begin{cases} q_1' = -\frac{\sigma_2'}{\tau'}, \\ q_2' = (\mu), \mu \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.10)$$

olur.



Şekil 4. 2 Düzlemlerin dönme açıları

G/G' hareketinin açısal hızı $\frac{d(\psi - \varphi)}{dt} = \frac{d\psi - d\varphi}{dt} = \frac{\tau' - \tau}{dt}$ dir (Şekil 4.2) ve p shear dönme pol doğrusu

$$p \dots \begin{cases} p_1 = -\frac{\sigma_2' - \sigma_2}{\tau' - \tau}, \\ p_2 = p_2(\lambda), \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.11)$$

denklemleri ile verilebilir.

Teorem 4.1 Üç Galilean düzlem ikişer ikişer birbirine göre bir parametrelili düzlemsel Galilean hareket meydana getirirse, her t anında üç relatif shear dönme pol doğrusu vardır ve bu doğruların her biri birbirine paraleldir.

Sonuç 4.1 Genel olarak, ikişer ikişer her defasında birbirine göre düzlemsel hareket yapan, n düzlemimiz olsa bu taktirde bir n -üyelili kinematik zincirden bahsedebiliriz. Bu hareketlerin her biri t (zaman) reel parametresine bağlı ise her t

değerine karşılık $\binom{n}{2}$ sayıda relatif shear dönme pol doğrusu mevcuttur ve bu pol doğruları birbirlerine paraleldir.

Teorem 4.2 Üç Galilean düzlem ikişer ikişer birbirlerine göre bir parametrelili düzlemsel Galilean hareket meydana getirirse, bu durumda üç relatif shear dönme polünün uzaklıkları oranı açısal hızların oranına eşittir.

İspat

$$q_1 = -\frac{\sigma_2}{\tau}, q_1' = -\frac{\sigma_2'}{\tau} \text{ ve } p_1 = -\frac{\sigma_2' - \sigma_2}{\tau' - \tau}$$

olduğundan

$$\frac{(p_1 - q_1')}{\tau} = \frac{(q_1' - q_1)}{(\tau' - \tau)} = \frac{(q_1 - p_1)}{-\tau'}$$

sağlanır. Galilean geometride iki nokta arasındaki uzaklık apsisler farkına eşit olduğundan

$$\|QQ'\|_G : \|Q'P\|_G : \|PQ\|_G = (\tau' - \tau) : \tau : -\tau'$$

yazılabilir.

GALİLEAN HAREKETLER ALTINDA EULER SAVARY FORMÜLÜ

Tezimizin ikinci ve son orijinal kısmı olan bu bölümde bir parametrelili düzlemsel Galilean hareketleri için Euler Savary formülü elde edilecektir.

5.1 Galilean Hareketler Altında Kanonik İzafe Sistemi

G ve G' Galilean düzlemlerine göre hareketli bir A Galilean düzleminin hareketini yani $\{O; \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ koordinat sistemi ile $\{O'; \mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2\}$ koordinat sistemine göre hareket eden $\{B, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ koordinat sisteminin hareketini inceledik. Şimdi ise bu bölümde

- i) Sistemin B başlangıcı bir P ani shear dönme polü yani $B = P$,
- ii) $\{B, \mathbf{a}_1\}$ eksen pol teğeti ile yani $(P), (P')$ pol eğrilerinin ortak teğeti ile çakışacak şekilde,

özel bir $\{B, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ koordinat sistemi üzerinde çalışacağız.

Eğer i) şartını göz önüne alırsak (4.8) denklemden $p_1 = p_2 = 0$ ve $\sigma_1 = \sigma'_1$, $\sigma_2 = \sigma'_2$ elde edilir. Böylece

$$\mathbf{db} = \mathbf{dp} = \sigma_1 \mathbf{a}_1 + \sigma_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{d'p} = \mathbf{db'}$$

yazılabilir. Ayrıca ii) şartından $\sigma_2 = \sigma'_2 = 0$ bulunur. Böylece düzlemi A_p ile gösterilen bu eksen sistemi için (4.1) ve (4.2) denklem sistemleri daha basit hale

gelir. Kısıtlığın temini maksadıyla $\sigma_1 = \sigma'_1 = \sigma$ alırsak $\{P, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ kanonik izafe sistemine ait türev denklemleri

$$\begin{cases} d\mathbf{a}_1 = \tau \mathbf{a}_2 \\ d\mathbf{a}_2 = 0 \\ d\mathbf{p} = \sigma \mathbf{a}_1 \end{cases}, \text{ ve } \begin{cases} d'\mathbf{a}_1 = \tau' \mathbf{a}_2 \\ d'\mathbf{a}_2 = 0 \\ d'\mathbf{p} = \sigma \mathbf{a}_1 \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Burada σ , (P) ve (P') pol eğrilerinin skaler yay elementidir.

Çünkü $s = \int \|\mathbf{V}_r\| dt$ veya $ds = \|\mathbf{V}_r\| dt$ olup buradan $ds = \frac{db}{dt} dt$ olmak üzere $ds = db = \sigma$ elde edilir.

Ayrıca τ , (P) hareketli pol eğrisinin komşu iki teğeti arasındaki kotengez açısı olmak üzere (P) hareketli pol eğrisinin P noktasındaki eğriliği $\tau : \sigma$ dir. Aynı şekilde τ' , (P') sabit pol eğrisinin komşu iki teğeti arasındaki kotengez açısı olmak üzere (P') sabit pol eğrisinin P noktasındaki eğriliği $\tau' : \sigma$ dir. O halde (P) ve (P') pol eğrilerinin eğrilik yarıçapları, sırası ile

$$r = \frac{\sigma}{\tau} \quad (5.1)$$

ve

$$r' = \frac{\sigma}{\tau'} \quad (5.2)$$

yazılabilir.

Hareketli G düzlemi dt zaman aralığında P polü etrafında sabit G' düzlemine göre $d\phi = \tau' - \tau$ sonsuz küçük ani shear dönme açısı ile döner. Böylece hareketli G düzleminin sabit G' düzlemine göre açısal hızı

$$\frac{\tau' - \tau}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = \dot{\phi} = \omega \quad (5.3)$$

bulunur. Böylece

$$\frac{\tau' - \tau}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \quad (5.4)$$

elde edilir. G düzleminin G' düzlemine nazaran ani shear dönme hareketinin açısal hızı genellikle ω ile gösterilir. Eğer $\ddot{\phi} = \dot{\omega}$ ise ω , G düzleminin G' düzlemine göre açısal ivmesidir.

$\mathbf{a}_1$ teğet birim vektörünün yönünün (P) ve (P') pol eğrilerinin pozitif x -ekseni yönüne göre çizilişi ile tesbit edilen yönde verilmiş olsun. Yani $\frac{ds}{dt} > 0$ olacak şekilde seçilsin. Eğrilerin oluşum hareketi ile $\mathbf{a}_1$ in hareketi hep aynı yönde olduğundan r pozitifdir. Benzer şekilde r' de pozitiftir.

5.2 Euler-Savary Formülü

Şimdi $B = G / G'$ hareketinde hareketli G düzleminin bir X noktasının sabit G' düzleminde çizdiği yörünge eğrisinin eğrilik çemberinin (cycle) d çapı üzerindeki herhangi bir X' noktasının durumunu inceleyeceğiz. Kanonik izafe sistemde G ve G' düzlemlerindeki X ve X' noktalarının koordinatları, sırası ile, (x_1, x_2) ve (x'_1, x'_2) olsun. X ve X' noktaları, her t anında X noktasına ait anlık yörünge normali üzerinde anlık P shear dönme polü ile birlikte yer alır. Böylece

$$\mathbf{PX} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 \quad (5.6)$$

ve

$$\mathbf{PX}' = x'_1 \mathbf{a}_1 + x'_2 \mathbf{a}_2 \quad (5.7)$$

vektörleri P polünden geçen aynı yönlü vektörlerdir. Dolayısıyla

$$x_1 : x_2 = x'_1 : x'_2 \quad (5.8)$$

veya

$$x_1 x'_2 - x'_1 x_2 = 0 \quad (5.9)$$

yazılabilir. ii) şartını tekrar göz önüne alırsak X noktasının hareketli G düzleminde sabit olması için

$$dx_1 = -\sigma, \quad dx_2 = -\tau x_1 \quad (5.10)$$

ve X' noktasının sabit G' düzleminde sabit olması için

$$dx'_1 = -\sigma, \quad dx'_2 = -\tau'x'_1 \quad (5.11)$$

bulunur. (5.9) denkleminin diferensiyeli alınır ve (5.10) ve (5.11) şartları göz önünde bulundurulursa

$$dx_1x'_2 + x_1dx'_2 - dx'_1x_2 - x'_1dx_2 = 0 \quad (5.12)$$

veya

$$-\sigma x'_2 + x_1(-\tau'x'_1) - (-\sigma)x_2 - x'_1(-\tau x_1) = 0$$

veya

$$(x_2 - x'_2)\sigma + x_1x'_1(\tau - \tau') = 0$$

elde edilir. Eğer kutupsal koordinatlara geçerilir ise a ve a' , sırası ile P noktasından X ve X' noktaları arasındaki uzaklıkları ve α , $PX = PX'$ pol ışını ile pol eğrilerinin ortak teğeti arasındaki açığı göstermek üzere

$$\begin{cases} x_1 = a \cos g\alpha = a, \\ x_2 = a \sin g\alpha = a\alpha \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x'_1 = a' \cos g\alpha = a, \\ x'_2 = a' \sin g\alpha = a'\alpha \end{cases} \quad (5.13)$$

olduğundan son denklemden

$$(a \sin g\alpha - a' \sin g\alpha)\sigma + aa'(\tau - \tau') = 0 \quad (5.14)$$

yazılabilir. (5.14) denklemi ve (5.4) denkleminde

$$\left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{a}\right) \sin g\alpha = \frac{\tau'}{\sigma} - \frac{\tau}{\sigma} = \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{d\phi}{ds} \quad (5.15)$$

elde edilir. Burada r ve r' sırasıyla (P) ve (P') pol eğrilerinin eğrilik yarıçaplarıdır.

Tanım 5.1 (5.15) denkleminde Galilean düzleminde bir parametrelili hareketler için *Euler-Savary formülü* denir.

Teorem 5.1 G ve G' , sırası ile, hareketli ve sabit Galilean düzlemler olmak üzere $B = G / G'$ bir parametrelili düzlemsel Galilean hareketi esnasında G düzlemindeki bir X noktası, normal eğrilik eksenini üzerindeki bir noktası G' düzlemindeki X'

olan bir yörünge çizer. X ve X' arasındaki bağıntı (5.15) Euler-Savary formülü ile verilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde G^2 Galilean geometride temel bilgiler detaylı bir şekilde incelenmiş ve bu geometride hareket ve hareketli koordinat sistemleri araştırılmıştır. Ayrıca Öklid ve Lorentz düzleminde elde edilenlere analog olarak Euler Savary formülü hesaplanmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Blaschke, W. and Müller, H.R., Ebene Kinematik, Verlag Oldenbourg, München, 1956.
- [2] A. A. Ergin, "On the one-parameter Lorentzian motion", Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara, Series A 40, 59.66, 1991.
- [3] A.A.Ergin, "Three Lorentzian Planes Moving With Respect To One Another And Pole Points", Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara, Series A 41, 79- 84, 1992.
- [4] T. Ikawa, "Euler-savary's formula on minkowski geometry", Balkan Journal of Geometry and Its Applications, 8 (2), 31- 36, 2003.
- [5] I. Aytun, Euler-Savary formula for one-parameter Lorentzian plane motion and its lorentzian geometrical interpretation, M. Sc. Thesis, Celal Bayar University, 2002.
- [6] Yaglom, I.M., A simple non-Euclidean Geometry and its Physical Basis, Springer-Verlag, NewYork, 1979.
- [7] Akar, M., Yüce, S. and Kuruoglu, N., "One-Parameter-Planar Motion in the Galilean Plane", (Submitted).

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Mücahit AKBİYİK
Doğum Tarihi ve Yeri :18.08.1985, Zonguldak
Yabancı Dili :İngilizce
E-posta :makbiyik@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Zonguldak Karaelmas Üniversitesi	2009
Lise	Fen Bilimleri	Y.D.A Kilimli Lisesi	2004

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2010-2011	Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2011-...	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Bildiri

1. Mücahit Akbıyık and Salim Yüce, On the Moving Coordinate System on Galilean Plane And Pole Lines, International Conference on Applied Analysis and Algebra, pp. 195, (2012)