

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN
SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ**

İnanç DUYAR

**FBE Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU (YTU)

İSTANBUL, 2008

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
1. GİRİŞ.....	1
2. $L^2(-\infty, \infty)$ UZAYINDA BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL OPERATÖR	2
2.1 A Operatörünün $L^2 = L^2(-\infty, \infty)$ Üzerinde Sınırsızlığının İncelenmesi.....	2
2.2 A Operatörünün Kapalılığının İncelenmesi.....	3
2.3 A Operatörünün Kapanabilirliğinin İncelenmesi	7
2.4 A Operatörünün Kapanışı	9
2.4.1 $\alpha > 0$ İçin $\rho(\bar{A})$ ' nın Belirlenmesi	10
2.4.2 $\alpha < 0$ İçin $\rho(\bar{A})$ ' nın Belirlenmesi	12
2.4.3 $\alpha = 0$ İçin $\rho(\bar{A})$ ' nın Belirlenmesi	14
2.5 Bir Çarpma Operatörünün $\bar{A}$ - Kompakt Olmasının İncelenmesi.....	16
2.6 $\bar{A}$ Operatörünün Eşleniği.....	23
3. $L^2(-\infty, \infty)$ UZAYINDA $-id/dx$ ile BAĞIMSIZ DEĞİŞKENE ÇARPIM OPERATÖRÜNÜN UNITAR DENKLİĞİ	27
4. $D = id / dx$ OPERATÖRÜNÜN $L^2[0, 1]$ UZAYINDA İNCELENMESİ.....	30
4.1 $D = id / dx$ Operatörünün $L^2(0, +\infty)$ Uzayında İncelenmesi	34
5. SONUÇLAR.....	36
KAYNAKLAR.....	37
ÖZGEÇMİŞ.....	38

ÖNSÖZ

Birinci mertebeden diferansiyel operatörün spektral özelliklerinin incelendiği bu tez çalışmasının hazırlanma sürecinde, sabrını benden esirgemeyen ve değerli katkılarıyla beni yönlendiren danışmanım Sayın Prof. Dr. Mehmet Bayramoğlu'na ve manevi desteği, anlayışı ve sevgisiyle her zaman yanımda olan eşim Erkan Duyar'a teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

İnanç DUYAR

Matematik Mühendisliği, Yüksek Lisans Tezi

$L^2(a, b)$, $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ Hilbert uzayında birinci mertebeden diferansiyel operatörün spektral özellikleri incelenmiştir.

d/dx diferansiyel ifadesi ile oluşturulan operatörün sınırsızlık, kapalılık, kapanabilirlik gibi özellikleri incelenerek kapanışı belirlenmiştir. Bu kapanışın bir fonksiyona çarpım operatörü ile toplamının spektrumu incelenmiştir.

$L^2(-\infty, \infty)$ uzayında id/dx ifadesi ile oluşturulan operatörün kendine eşliği; bağımsız değişkene çarpım operatörü ile unitar denk olduğu gösterilmiş; $L^2[0, 1]$ uzayında kendine eş genişletmeleri verilmiş ve ayrıca $L^2(0, \infty)$ uzayında kendine eş genişletmelerinin olmadığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Spektrum, diferansiyel operatör, unitar denklik.

ABSTRACT

THE SPECTRAL PROPERTIES OF THE FIRST ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR

İnanç DUYAR

Mathematical Engineering, M.S. Thesis

The spectral properties of the first order differential operator were studied in $L^2(a, b)$, $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ Hilbert space.

The properties of d/dx differential operator, such as being bounded, closed or closable, were examined separately and the closure of the operator was determined. The spectrum of the sum of this closure and a multiplication operator was studied showing that it consisted of the imaginary axis.

It was proved that the differential operator id/dx was self adjoint and the spectrum of the sum of this closure and a multiplication operator was consisted of the real axis. It was shown that different self adjoint operators could be made with that differential operator.

The resolution of the identity for $-id/dx$ operator was shown explaining that the differential operator and the multiplication operator were unitary equivalent.

Moreover the closure of this operator, its adjoint and its self adjoint extensions were studied in $L^2[0, 1]$ and $L^2(0, \infty)$ spaces.

Keywords: Spectrum, differential operator, unitary equivalent.

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında $L^2(a, b)$, $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ Hilbert uzayında id/dt diferansiyel ifadesi ile oluşturulan operatörlerin spektral özellikleri ve bunun yanısıra $L^2 = L^2(-\infty, \infty)$ uzayında d/dt operatörü ile fonksiyona çarpım operatörünün toplamının spektrumu da incelenmiştir. Ayrıca $L^2(-\infty, \infty)$ uzayında $-id/dt$ operatörü ile bağımsız değişkene çarpım operatörünün unitar denkliği de gösterilmiştir.

Bu konu çok sayıda kitapta yer almıştır ([Schechter, 2002], [Smirnov, 1964], [Akhiezer ve Glazman, 1987], [Yosida, 1980], [Lyantze ve Storozh, 1983]). Birinci merteben diferansiyel operatörün, fonksiyona çarpma operatörü ile pertürbasyonuna dair bir çok makale vardır ([Chernyavskaya ve Shuster, 2006], [Chernyavskaya ve Shuster, 2007]).

2. $L^2(-\infty, \infty)$ UZAYINDA BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL OPERATÖR

Tüm gerçel doğru üzerinde karesi integrallenebilir $u(t)$ fonksiyonlarının Hilbert uzayını $L^2 = L^2(-\infty, \infty)$ ile gösterelim. $D(A)$ ile $(-\infty, \infty)$ da kendisi ve birinci türevi sürekli olan ve $L^2(-\infty, \infty)$ uzayına ait fonksiyonlar kümesini gösterelim. Bu kümenin $L^2(-\infty, \infty)$ bir lineer manifold oluşturduğu açıktır. Tanım kümesi $D(A)$ olan ve $u(t) \in D(A)$ iken;

$$Au = \frac{du(t)}{dt}$$

formülü ile bir A diferansiyel operatörünü tanımlayalım. A , L^2 uzayını L^2 'ye dönüştüren lineer operatördür. Bu bölümde A diferansiyel operatörünü inceleyeceğiz. Belirtelim ki; $u(t)$ fonksiyonları kompleks değerlidir ve gözönüne aldığımız L^2 uzayı da kompleks Hilbert uzayıdır.

2.1 A Operatörünün $L^2 = L^2(-\infty, \infty)$ Üzerinde Sınırsızlığının İncelenmesi

$\varphi(t) \neq 0$ ve $|t| < 1$ aralığının dışında sıfır olan, herhangi bir non – negatif sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Örneğin, a keyfî bir sabit olmak üzere aşağıdaki fonksiyonu ele alalım.

$$\varphi(t) = \begin{cases} a \cdot \exp\left(\frac{1}{t^2 - 1}\right), & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

Ayrıca,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1 \quad (2.2)$$

olduğunu farzedelim.

$$\varphi_n = n \cdot \varphi(nt) \quad , \quad n = 1, 2 \dots \quad \text{olsun.} \quad (2.3)$$

O halde $\varphi_n \in D(A)$ ve

$$\|\varphi_n\|^2 = n^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(nt)|^2 dt = n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\tau)|^2 d\tau = n \cdot \|\varphi\|^2 \quad \text{olur.} \quad (2.4)$$

$$\|A\varphi_n\|^2 = n^4 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(nt)|^2 dt = n^3 \cdot \|A\varphi\|^2 \quad \text{olarak yazılır.}$$

Burada $A\varphi \neq 0$ olmalıdır, aksi takdirde φ bir sabit olacaktır ki L^2 deki tek sabit 0'dır. Bu nedenle; $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{\|A\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|} = \frac{n \cdot \|A\varphi\|}{\|\varphi\|} \rightarrow \infty$ olur.

Bu da A operatörünün sınırlı olmadığını gösterir.

2.2 A Operatörünün Kapalılığının İncelenmesi

A operatörünün kapalı olup olmadığını incelemek için (2.1) ve (2.3) ile gösterilen fonksiyonlardan yararlanalım.

Ayrıca herhangi bir $u \in L^2$ için;

$$J_n u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x-t) \cdot u(t) dt \quad (2.5)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$\|J_n u\| \leq \|u\| \quad (2.6)$$

olacağından $J_n u \in L^2$ 'dir. Ayrıca; herhangi bir $u \in L^2$ için ;

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \|u - J_n u\| \rightarrow 0 \text{ elde ederiz.} \quad (2.7)$$

Öncelikle (2.6) ve (2.7)'nin doğru olduğunu farzedelim ve L^2 'de tanımlı bir $u(t)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilsin.

$$u(t) = \begin{cases} 1+t & , \quad -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t & , \quad 0 < t \leq 1 \\ 0 & , \quad |t| > 1 \end{cases}$$

Açıkça görülüyor ki; $u(t)$ fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ aralığında sürekli fakat türevi sürekli değildir. Bu nedenle $u \notin D(A)$ olur. Bununla birlikte $\forall n$ için $J_n u \in D(A)$ 'dır. (2.5)'te verilen integral sadece -1'den +1'e uzanır ve $u(t)$ sürekli. Böylece integral işaretinin altında türetilabilir ve sürekli bir fonksiyon elde edebiliriz. $J_n u, |t| > 2$ için sıfırdır; aynı şey türevi için de geçerlidir. Bu da her n için; $J_n u \in D(A)$ olduğunu gösterir. Ayrıca $u'(t)$ sürekli olmayabilir, fakat yine de L^2 içindedir.

$$u'(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ -1, & 0 < t < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

Ayrıca;

$$\begin{aligned} A J_n u(x) &= \int_{-1}^1 \varphi'_n(x-t) u(t) \cdot dt \\ &= \int_{-1}^0 \varphi'_n(x-t) \cdot (1+t) dt + \int_0^1 \varphi'_n(x-t) \cdot (1-t) dt \\ &= \int_{-1}^0 \varphi_n(x-t) dt - \int_0^1 \varphi_n(x-t) dt \\ &= \int_{-1}^1 \varphi_n(x-t) \cdot u'(t) dt = J_n u' \end{aligned}$$

Şimdi (2.7) yi doğru kabul edersek; $n \rightarrow \infty$ iken

$\|u - J_n u\| \rightarrow 0, \|u' - A J_n u\| \rightarrow 0$ olmalıdır. Bu durumda eğer A kapalı bir operatör ise; $u \in D(A)$

olacaktır ki bunun da yanlış olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla A operatörü kapalı değildir.

Geriye (2.6) ve (2.7) yi kanıtlamak kalıyor.

Cauchy – Schwarz eşitsizliğini (2.5)'e uygularsak;

$$|J_n u(x)|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x-t) dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x-t) \cdot |u(t)|^2 dt \text{ elde ederiz.}$$

(2.2) ile;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x-t)dt = 1 \quad (2.8)$$

yazılabilir. Böylece;

$$\begin{aligned} \int_a^b |J_n u(x)|^2 dx &\leq \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x-t) \cdot |u(t)|^2 dt \cdot dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^b \varphi_n(x-t) \cdot |u(t)|^2 dx \cdot dt \end{aligned}$$

(İntegrasyon sırası değiştirilebilir; çünkü çift integral mutlak yakınsaktır.)

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi_n(x-t)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x-t)dx = 1 \quad \text{olduğundan;}$$

$$\int_a^b |J_n u(x)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt = \|u\|^2 \quad \text{elde edilir.}$$

$a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow \infty$ seçersek; $\|J_n u\| \leq \|u\|$ olur. Bu durumda; $J_n u \in L^2$ olduğunu görürüz ve (2.6) kanıtlanır.

(2.7)'yi ise, sürekli $u \in L^2$ fonksiyonları için kanıtlamanın yeterli olduğunu söyleyebiliriz. Bunun sebebi, sürekli fonksiyonların L^2 de yoğun olmasıdır. Ayrıca biliyoruz ki $\forall u \in L^2$ için (2.6) sağlanır ve L^2 de yoğun bir u kümesi için (2.7) kanıtlanırsa; o zaman (2.7) $\forall u \in L^2$ için sağlanır (Schechter, 2002).

(2.7)'yi sürekli $u \in L^2$ fonksiyonları için kanıtlarken; $\varepsilon > 0$ ve R aşağıdaki koşulu sağlayacak kadar geniş seçilsin.

$$\int_{|t|>R-1} |u(t)|^2 dt < \frac{\varepsilon}{16}$$

$u(t)$, sınırlı aralıklarda düzgün sürekli olduğu için, $|t| < R$ ve $|s| \leq \delta$ iken aşağıdaki koşulu sağlayan bir $\delta > 0$ vardır.

$$|u(s+t) - u(t)|^2 < \frac{\varepsilon}{4R}$$

Böylece;

$$\int_{-R}^R |u(s+t) - u(t)|^2 dt < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |s| \leq \delta \quad \text{yazılabilir.}$$

$\delta < 1$ olduğunu farzedelim. O halde;

$$\begin{aligned} \int_R^\infty |u(s+t) - u(t)|^2 dt &\leq 2 \cdot \int_R^\infty (|u(s+t)|^2 + |u(t)|^2) dt \\ &= 2 \cdot \int_{R+s}^\infty |u(r)|^2 dr + 2 \cdot \int_R^\infty |u(t)|^2 dt < \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

Benzer bir eşitsizliği $(-\infty, -R)$ aralığı için de yazabiliriz.

Eşitsizlikleri birleştirirsek;

$$\int_{-\infty}^\infty |u(s+t) - u(t)|^2 dt < \varepsilon, \quad |s| \leq \delta \quad (2.9)$$

elde ederiz.

Şimdi (2.5) ile;

$$J_n u(x) = \int_{-\infty}^\infty \varphi_n(s) \cdot u(x-s) ds \quad (2.10)$$

Ayrıca (2.8) ile;

$$J_n u(x) - u(x) = \int_{-\infty}^\infty \varphi_n(s) \cdot [u(x-s) - u(x)] ds \quad (2.11)$$

bulunur.

Schwartz'ın eşitsizliğini uygularsak ve x 'e göre integral alırsak;

$$\int_{-\infty}^{\infty} |J_n u - u|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(s) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |u(x-s) - u(x)|^2 \cdot dx \cdot ds \quad (2.12)$$

elde ederiz.

Şimdi; (2.1) ve (2.3) ile $\forall |ns| > 1$ için $\varphi_n(s)$ sıfıra gider. Böylece, (2.12) deki s 'ye göre integrasyon sadece $|s| < \frac{1}{n}$ aralığında yapılabilir. Eğer $n > \frac{1}{\delta}$ alırsak; s için bu aralıkta (2.9) sağlanacaktır. Bu da;

$$\|J_n u - u\|^2 < \varepsilon \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(s) ds = \varepsilon \text{ eşitsizliğini verecektir.}$$

Yani $\varepsilon > 0$ için $n \rightarrow \infty$ iken $\|u - J_n u\| \rightarrow 0$ yazılır ve böylece (2.7)'nin ispatı tamamlanmış olur.

2.3 A Operatörünün Kapanabilirliğinin İncelenmesi

A operatörünün L^2 de kapalı ve sınırlı olmadığını gösterdik. Şimdi de A'nın kapalı bir devamı olup olmadığını araştıralım. Aslında bu soru A'nın kapanabilir olup olmadığını sormakla aynıdır. Çünkü biliyoruz ki; yalnız ve ancak bir lineer operatör kapanabilir ise kapalı bir devamı vardır (Schechter, 2002).

A'nın kapanabilir olduğunu kanıtlamak için; $\{u_n\}$ L^2 'de, $u_n \rightarrow 0$ ve $Au_n \rightarrow f$ koşullarını sağlayan, $D(A)$ 'daki fonksiyonların bir dizisi iken; $f = 0$ olduğunu göstermemiz gerekir.

Bunu görmek için; $|t|$ aralığının dışında sıfır olan, $D(A)$ daki herhangi bir fonksiyon v olsun.

Kısmi integral alırsak; $\forall n$ için aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz.

$$(Au_n, v) = -(u_n, v') \quad (2.13)$$

v , sonlu bir aralığın dışında sıfırlandığından sınır terimleri yoktur.

$n \rightarrow \infty$ için limit alırsak $\forall v$ için;

$$(f, v) = 0 \quad (2.14)$$

elde ederiz. Bu da $f = 0$ olduğu anlamına gelir.

Bu eşitliği aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$\forall R > 0$ için, f_R şu şekilde tanımlanmış olsun.

$$f_R = \begin{cases} f & , \quad |t| \leq R \\ 0 & , \quad |t| > R \end{cases} \quad (2.15)$$

$f \in L^2$ olduğundan; $f_R \in L^2$ olur. (2.7)'yi kullanarak $\forall \varepsilon > 0$ için, n 'yi yeterince büyük seçersek,

$$\|f - J_n f\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.16)$$

yazabiliriz.

Ayrıca R 'yi aşağıdaki eşitsizliği sağlayacak kadar geniş seçebiliriz.

$$\|f - f_R\|^2 = \int_{|t|>R} |f|^2 dt < \frac{\varepsilon^2}{4} \quad (2.17)$$

$$(2.6)'ya göre ise; \quad \|J_n f - J_n f_R\| \leq \|f - f_R\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{olur.}$$

Böylece;

$$\|f - J_n f_R\| < \varepsilon \quad (2.18)$$

olduğu görülür.

$\forall n$ ve R için, $J_n f_R$ fonksiyonu $|t|$ aralığının dışında sıfırdır. Ayrıca; eğer (2.1) ile verilmiş olan ϕ fonksiyonunu kullanırsak; $J_n f_R$ sonsuz kere diferansiyellenebilir.

Özel olarak, $\forall n$ ve R için $J_n f_R \in D(A)$ 'dır ve $(f, J_n f_R) = 0$ olur.

Böylece $\forall n$ için,

$$\|f\|^2 = (f, f - J_n f_R) \leq \|f\| \cdot \|f - J_n f_R\| \quad \text{elde edilir.}$$

O halde (2.18) ile; $\|f\| < \varepsilon$ yazılabilir.

ε keyfi olarak seçilebildiğinden $f = 0$ alınır ve böylece ispat tamamlanmış olur. Yani A operatörü kapanabilir, dolayısıyla kapalı bir devamı vardır.

Bilindiği gibi, $|t|$ aralığının dışında sıfırlanan bir $\varphi(t)$ fonksiyonunun “*kompakt dayanağı*” vardır (Schechter, 2002). Burada C_0^∞ ile kompakt dayanaklı, sonsuz kere diferansiyellenebilir fonksiyonların bir sınıfı gösterilirse; C_0^∞ ’un L^2 de yoğun olduğu açıktır.

2.4 A Operatörünün Kapanışı

A operatörünün kapanışı olan $\bar{A}$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$\forall u, f \in L^2$ için, $u_n \rightarrow u$ ve $Au_n \rightarrow f$ olacak şekilde bir $\{u_n\} \subset D(A)$ dizisi varsa; $u \in D(\bar{A})$ olur ve $\bar{A}u, f$ olarak tanımlanır (Schechter, 2002).

Öncelikle $\bar{A}$ operatörünün resolvent kümesi olan $\rho(\bar{A})$ ’yı belirleyelim:

Yani $\forall f \in L^2$ için;

$$(\bar{A} - \lambda) \cdot u = f \quad (2.19)$$

denkleminin tek bir $u \in D(\bar{A})$ çözümünün olabilmesi için λ ’nın hangi değerlerde olması gerektiğini bulalım. İlk olarak u ve f ’nin (2.19) koşulunu sağlayan düzgün fonksiyonlar olduğunu varsayalım. Bu durumda $\bar{A}$ operatörü, A ’ya indirgenir ve (2.19) aşağıdaki şekilde yazılır.

$$u' - \lambda u = f \quad (2.20)$$

Bu diferansiyel denklemin her iki tarafını $e^{-\lambda t}$ ile çarpar ve 0’dan x ’e integralini alırsak;

$$e^{-\lambda x} \cdot u(x) = u(0) + \int_0^x e^{-\lambda t} \cdot f(t) \cdot dt \quad (2.21)$$

eşitliğini elde ederiz.

$\lambda = \alpha + i\beta$ olsun. Genel olarak,

$$|u(x)| = e^{\alpha x} \cdot \left| u(0) + \int_0^x e^{-\lambda t} f(t) \cdot dt \right| \quad (2.22)$$

yazılabilir. Burada λ 'ya bağlı birkaç durumu inceleyeceğiz.

2.4.1 $\alpha > 0$ İçin $\rho(\bar{A})$ 'nın Belirlenmesi

$$u(0) + \int_0^\infty e^{-\lambda t} \cdot f(t) \cdot dt = 0 \quad (2.23)$$

olmadıkça;

$x \rightarrow \infty$ iken $|u(x)| \rightarrow \infty$ olur.

Bu durumda $\alpha > 0$ için, u 'nun L^2 'de olabilmesinin tek yolu (2.23) koşulunun sağlanmasıdır.

Bu koşul sağlandığında,

$$u(x) = - \int_x^\infty e^{\lambda \cdot (x-t)} \cdot f(t) dt \quad (2.24)$$

olarak yazılabilir ve bu fonksiyon L^2 'dedir.

Burada Cauchy – Schwarz eşitsizliğini uygularsak;

$$|u(x)|^2 \leq \int_x^\infty e^{\alpha \cdot (x-t)} dt \cdot \int_x^\infty e^{\alpha \cdot (x-t)} |f(t)|^2 dt \quad \text{elde edilir.}$$

$$\int_x^\infty e^{\alpha \cdot (x-t)} dt = \frac{1}{\alpha} \quad \text{olduğundan,}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx &\leq \frac{1}{\alpha} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_x^{\infty} e^{\alpha(x-t)} \cdot |f(t)|^2 dt \cdot dx \\
&= \frac{1}{\alpha} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^t e^{\alpha(x-t)} \cdot dx \cdot |f(t)|^2 dt \\
&= \frac{1}{\alpha^2} \cdot \|f\|^2
\end{aligned} \tag{2.25}$$

O halde $\alpha > 0$ iken; her sürekli fonksiyon $f \in L^2$ için, (2.20) denkleminin tek bir sürekli diferansiyellenebilir $u \in L^2$ çözümü vardır ve (2.24) ile verilen bu çözüm;

$$\|u\| \leq \frac{\|f\|}{\alpha} \tag{2.26}$$

eşitsizliğini sağlar.

Şimdi de f 'nin, L^2 de herhangi bir fonksiyon olduğunu düşünelim. Biliyoruz ki C_0^∞ daki fonksiyonların, $f \in L^2$ 'ye yakınsayan bir $\{f_n\}$ dizisi vardır (Schechter, 2002).

$\forall f_n$ için;

$$(A - \lambda) \cdot u_n = f_n \tag{2.27}$$

denkleminin $u_n \in D(A)$ olacak şekilde bir çözümü vardır.

Bununla birlikte (2.26) ile; $\{u_n\}$ dizisinin L^2 de bir Cauchy dizisi olduğu da gösterilebilir.

$$m, n \rightarrow \infty \text{ iken} \quad \|u_n - u_m\| \leq \frac{\|f_n - f_m\|}{\alpha} \rightarrow 0 \tag{2.28}$$

L^2 uzayı tam olduğundan, $u_n \rightarrow u$ olacak şekilde bir $u \in L^2$ fonksiyonu vardır. $\bar{A}$ tanımı ile; $u \in D(\bar{A})$ ve $(\bar{A} - \lambda) \cdot u = f$ olduğunu biliyoruz. $\forall n$ için $\|u_n\| \leq \frac{\|f_n\|}{\alpha}$ olduğundan, u ve f fonksiyonları (2.26)'yı sağlar.

Bu da, $\alpha > 0$ olduğu zaman $\forall f \in L^2$ için (2.19) denkleminin çözülebildiğini gösterir. Aynı durum $\alpha < 0$ için de geçerlidir.

2.4.2 $\alpha < 0$ İçin $\rho(\bar{A})$ 'nın Belirlenmesi

$$u(0) = \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda t} \cdot f(t) dt \quad (2.29)$$

olmadıkça;

$x \rightarrow -\infty$ iken $|u(x)| \rightarrow \infty$ olur.

Böylece $\alpha < 0$ için (2.20) diferansiyel denkleminin istenen çözümü;

$$u(x) = \int_{-\infty}^x e^{\lambda \cdot (x-t)} \cdot f(t) \cdot dt \quad (2.30)$$

olacaktır. Schwarz'ın eşitsizliğinin basit uygulamaları ile u fonksiyonunun

$$\|u\| \leq \frac{\|f\|}{|\alpha|} \quad (2.31)$$

eşitsizliğini sağladığını görebiliriz.

Ayrıca limit işlemini de yukarıdaki gibi uygularsak, (2.19) denkleminin $\forall f \in L^2$ için çözülebildiğini göstermiş oluruz.

Bununla birlikte (2.20) diferansiyel denkleminin çözümü sürekli diferansiyellenebilir olduğundan tektir fakat aynı durum (2.19) denklemi için geçerli değildir.

Teklik durumunu incelemek için; $\alpha \neq 0$ ve bazı $f \in L^2$ fonksiyonları için, (2.19) denkleminin iki farklı çözümü olduğunu varsayalım. O halde bu çözümlerin farkı olan u aşağıdaki denklemin çözümüdür.

$$(\bar{A} - \lambda) \cdot u = 0 \quad (2.32)$$

$u \in D(\bar{A})$ olduğundan; $Au_n \rightarrow \lambda u$ iken $u_n \rightarrow u$ koşulunu sağlayan bir $\{u_n\} \subset D(A)$ dizisi vardır. v ise, $D(A)$ 'da herhangi bir fonksiyon olsun ve (2.13)'ün gerçekleştiğini farzedelim.

Böylece;

$$\lambda(u, v) = -(u, v') \quad \text{elde ederiz.}$$

Buradan $\forall v \in D(A)$ için ,

$$(u, v' + \bar{\lambda}v) = 0 \quad \text{olduğu görülür.}$$

$$\operatorname{Re}(-\bar{\lambda}) = -\operatorname{Re}\lambda = -\alpha \neq 0 \quad \text{olduğundan, } \forall g \in C_0^\infty \text{ için;}$$

$$v' + \bar{\lambda}v = g \quad \text{koşulunu sağlayan bir } v \in D(A) \text{ vardır ve } \forall g \in C_0^\infty \text{ için;}$$

$$(u, g) = 0 \quad \text{yazılır.}$$

Bu durumda C_0^∞, L^2 de yoğun olduğundan; $u = 0$ olur.Yani (2.19) denkleminin tek bir çözümü vardır.

Şimdi de , $\forall v \in D(\bar{A})$ için (2.13)'ü kanıtlayalım.

$v \in C_0^\infty$ iken (2.13) eşitliği sağlandığından; $\forall v \in D(A)$ için aşağıdaki koşulu sağlayan, bir $\{\phi_k\} \in C_0^\infty$ dizisinin varlığını göstermek yeterlidir.

$$k \rightarrow \infty \text{ iken} \quad \|\phi_k - v\| \rightarrow 0, \quad \|\phi_k' - v'\| \rightarrow 0 \quad (2.33)$$

Bunu kanıtlamak için; $\psi \in C_0^\infty$ ve $w \in L^2$ için;

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-t)w(t)dt \right|^2 dx \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\tau)|d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)|dx \cdot |w(t)|^2 dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\tau)|d\tau \right)^2 \cdot \|w\|^2 \end{aligned}$$

olduğunu belirtelim (Schechter, 2002).

Özel olarak $\psi(t) = \varphi'_n(t)$ ve $w = u - u_R$ alırsak, $\forall n$ ve $\forall u \in L^2$ için $R \rightarrow \infty$ iken

$$A J_n u_R \rightarrow A J_n u \quad (2.34)$$

olduğunu görürüz.

Ayrıca v , $D(A)$ 'daki herhangi bir fonksiyon olmak üzere $\varepsilon > 0$ verilsin ve n, R aşağıdaki koşulları sağlayacak kadar geniş seçilsin.

$$\begin{aligned} \|v - J_n v\| &< \frac{\varepsilon}{2}, & \|v' - J_n v'\| &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \|J_n(v_R - v)\| &< \frac{\varepsilon}{2}, & \|AJ_n(v_R - v)\| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Burada $J_n v_R \in C_0^\infty$ ve $AJ_n v = J_n v'$ olduğundan, (2.33) kanıtlanır. Böylece $\forall v \in D(\bar{A})$ için (2.13) 'ün doğru olduğu görülür.

1.4.3 $\alpha = 0$ İçin $\rho(\bar{A})$ 'nın Belirlenmesi

$\operatorname{Re} \lambda > 0$ ve $\operatorname{Re} \lambda < 0$ yarı düzlemlerinin $\rho(\bar{A})$ içinde olduğunu gösterdik.

$\alpha = 0$ için (2.22) denklemini incelediğimizde, (2.23) ve (2.29)'un birlikte sağlanması halinde u 'nın L^2 'de olabileceğini görürüz. Bu durumda;

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta t} f(t) dt = 0 \quad (2.35)$$

olmalıdır.

$\alpha = 0$ iken (2.20) denkleminin bir çözümünün olabilmesi için (2.35) gerekli bir koşuldur.

Eğer bazı $a > 0$ için,

$$f(t) = \frac{e^{i\beta t}}{t}, \quad t \geq a$$

olarak seçilirse; (2.21) yeniden yazıldığında $\forall x > a$ için;

$$e^{-i\beta x} u(x) = u(0) + \int_0^a e^{-i\beta t} f(t) dt + \int_a^x \frac{dt}{t}$$

$$= C + \log \frac{x}{a}$$

elde edilir.

Açıkça görülüyor ki; f sürekli bir fonksiyon ve $f \in L^2$ olsa bile, bu eşitlik L^2 de değildir.

Bununla birlikte; $\lambda = i\beta$ iken $\forall$ sürekli fonksiyon $f \in L^2$ için (2.20) denklemini çözemeyeceğimiz gerçeği; λ 'nın spektrum $\sigma(\bar{A})$ içinde olduğunu göstermeye yetmez.

$\lambda \in \sigma(\bar{A})$ olduğunu kanıtlamak için;

$\psi(t) \in C_0^\infty$, $\|\psi\| = 1$ koşulunu sağlayan herhangi bir fonksiyon olarak seçilsin. $\forall \varepsilon > 0$ için;

$$\psi_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon} \cdot e^{i\beta t} \cdot \psi(\varepsilon t) \quad (2.36)$$

olsun. O halde;

$$A\psi_\varepsilon = i\beta\psi_\varepsilon + \varepsilon^{3/2} \cdot e^{i\beta t} \cdot \psi'(\varepsilon t),$$

$$\|(A - i\beta)\psi_\varepsilon\|^2 = \varepsilon^3 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(\varepsilon t)|^2 dt = \varepsilon^2 \cdot \|\psi'\|^2 \quad \text{olur.}$$

Fakat;

$$\|\psi_\varepsilon\|^2 = \varepsilon \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\varepsilon t)|^2 dt = \|\psi\|^2 = 1 \quad \text{olacağından,}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ seçilirse;

$$\|\psi_\varepsilon\| = 1 \quad \text{ve} \quad \|(A - i\beta)\psi_\varepsilon\| \rightarrow 0 \quad (2.37)$$

olduğunu görürüz.

Bu da $\lambda = i\beta$ 'nın $\rho(\bar{A})$ içinde olamayacağını gösterir. O halde, sadece ve sadece $\text{Re } \lambda = 0$ iken $\lambda \in \sigma(\bar{A})$ olur.

2.5 Bir Çarpma Operatörünün $\bar{A}$ - Kompakt Olmasının İncelenmesi

Tanım-1: X, Y Banach uzayı, A kapalı bir operatör ve $B: X \rightarrow Y$ tanımlı lineer bir operatör olsun. Eğer $D(B) \supset D(A)$ ve $\|x_n\|_{D(A)} = \|x_n\| + \|Ax_n\| \leq C$ (C sabit) olacak şekilde seçilen $\forall \{x_n\} \subset D(A)$ dizisi için $\{Bx_n\}$ 'in yakınsak bir alt dizisi varsa; B operatörü A -kompakttır (Schechter, 2002).

Tanım-2: B operatörü A kompakt ise;

$$\sigma_e(A) = \bigcap \sigma(A + B)$$

olarak tanımlanan $\sigma_e(A)$, A operatörünün esas spektrumudur ve kompakt bir operatörün A 'ya eklenmesi ile spektrumdan çıkarılamayan $\sigma(A)$ noktalarından oluşur (Schechter, 2002).

Teorem-1: B operatörü A kompakt ise;

$$\sigma_e(A + B) = \sigma_e(A) \quad \text{olur (Schechter, 2002).}$$

$q(t)$, $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $L^2(-\infty, \infty)$ üzerinde bir Q operatörünü şu şekilde tanımlayalım:

Eğer $qu \in L^2$ ise; $u \in L^2$ fonksiyonu $D(Q)$ 'dadır. Bu durumda; $Qu = qu$ olarak yazılır.

Öncelikle Q 'nun $\bar{A}$ - kompakt olmasını sağlayan koşulları inceleyelim. Böyle bir durumda Tanım-2'ye göre;

$$\sigma_e(\bar{A} + Q) = \sigma_e(\bar{A}) \quad (2.38)$$

olur. Fakat;

$$\sigma_e(\bar{A}) = \sigma(\bar{A}) \quad (2.39)$$

ve $\sigma(\bar{A})$ sanal eksen olarak bilindiğinden, $\sigma_e(\bar{A} + Q)$ spektrumu da sanal eksenden oluşur (Schechter, 2002).

Tanım-1'e göre Q operatörünün $\bar{A}$ - kompakt olması için, $D(Q) \supset D(\bar{A})$ olmalıdır ve

$$\|u_n\| + \|\bar{A}u_n\| \leq C, \quad (C \text{ sabit}) \quad (2.40)$$

koşulunu sağlayan bir $\{u_n\} \in D(\bar{A})$ dizisi için,
 $\{Qu_n\}$ 'nin yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu da ancak;

$$\|qu\| \leq C_1 (\|u\| + \|\bar{A}u\|), \quad u \in D(\bar{A}) \quad (2.41)$$

ise doğru olabilir.

Eğer (2.41) gerçekleşmezse; $\|qu_n\| \rightarrow \infty$ iken, (2.40)'ı sağlayan bir $\{u_n\} \in D(\bar{A})$ dizisi olacaktır ki bu durumda; Q operatörü $\bar{A}$ - kompakt olamaz.

(2.41)'in daha zayıf bir şekli;

$$\|qu\| \leq C_1 \cdot (\|u\| + \|Au\|), \quad u \in D(A) \quad (2.42)$$

olarak yazılır. Bu da Q operatörünün $\bar{A}$ - kompakt olması için gerekli bir koşuldur.

(2.42)'nin q fonksiyonu için ne anlama geldiğini görelim:

$\varphi \in C_0^\infty$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde seçilsin.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\geq 0, & -\infty < t < \infty, \\ \varphi &\geq 1, & 0 < t < 1. \end{aligned}$$

$\forall$ reel değerli a için; $\psi_a(t) = \varphi(t-a)$ fonksiyonu C_0^∞ 'dadır ve böyle bir fonksiyon kesinlikle $D(A)$ dadır. Bu nedenle; (2.42)'nin sağlanması için;

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q\psi_a|^2 dt \leq C_1 \cdot (\|\psi_a\| + \|\psi'_a\|) \quad \text{olmalıdır ki bununla}$$

$$\int_a^{a+1} |q(t)|^2 dt \leq C_1 \cdot (\|\varphi\| + \|\varphi'\|) = C_1 C_2 \quad \text{eşitsizliği elde edilir.}$$

Böylece; (2.42) eşitsizliği için;

$$\int_a^{a+1} |q(t)|^2 dt \leq M < \infty, \quad (\text{a reel sayı}) \quad (2.43)$$

olması gerektiği gösterilmiş olur.

Ayrıca, Q 'nun $\overline{A}$ - kompakt olması için; (2.43)'e ek olarak aşağıdaki koşul da sağlanmalıdır:

$$|a| \rightarrow \infty \text{ iken,} \quad \int_a^{a+1} |q(t)|^2 dt \rightarrow 0 \quad (2.44)$$

Bunu kanıtlamak için; (2.44)'ün doğru olmadığını varsayalım. O halde; $|a_k| \rightarrow \infty$ iken,

$$\int_{a_k}^{a_k+1} |q(t)|^2 dt \geq \delta > 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.45)$$

olacak şekilde bir $\{a_k\}$ dizisi vardır. Yukarıda tanımlanan $\varphi(t)$ fonksiyonu,

$$v_k(t) = \varphi(t - a_k) \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.46)$$

olarak yazılsın. Buradan açıkça görülüyor ki;

$$\|v_k\| + \|Av_k\| = \|\varphi\| + \|\varphi\| = C_2.$$

Eğer Q , $\overline{A}$ - kompakt olsaydı; $\{v_k\}$ ile gösterilen bir alt dizi olacaktı; öyle ki qv_k , L^2 'de bir f fonksiyonuna yakınsayacaktı. (2.45) ile;

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |qv_k|^2 dt &\geq \int_{a_k}^{a_k+1} |q(t)|^2 dt \geq \delta, \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &\geq \delta \quad \text{bulunur.} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Diğer bir taraftan; herhangi bir sonlu I aralığı için; k yeterince büyük seçilirse; $v_k(t) \equiv 0$ olur (Schechter, 2002).

Bu da, her sınırlı I aralığı için;

$$\int_I |f(t)|^2 dt = 0 \quad \text{olduğunu gösterir.}$$

Bu durum açıkça (2.47) ile çelişir. Yani (2.44) doğrulanmış olur.

$\Rightarrow$ (2.43) ve (2.44), Q operatörünün $\overline{A}$ -kompakt olması için gerekli koşullardır.

Şimdi de Q'nun $\overline{A}$ -kompakt olması için (2.43) ve (2.44)'ün yeterli koşullar olduğunu gösterelim:

İlk olarak (2.43)'den yararlanarak (2.42)'yi kanıtlayalım. Açıkça görülüyor ki ,bunu da reel değerli q, u için yapmak yeterlidir. I, 1 birim uzunluğunda herhangi bir aralık ve x ile x' bu aralıktaki herhangi iki nokta olsun.

$u \in D(A)$ için;

$$u^2(x) - u^2(x') = \int_{x'}^x \frac{d}{dt}[u^2(t)]dt = 2 \cdot \int_{x'}^x u'(t) \cdot u(t) \cdot dt \quad \text{olarak yazılır.}$$

Böylece;

$$|u^2(x) - u^2(x')| \leq 2 \cdot \int_I |u'(t) \cdot u(t)| dt \leq \int_I [(u')^2 + u^2] \cdot dt \quad (2.48)$$

olur.

Ortalama değer teoremi ile, x' aşağıdaki şekilde seçilebilir.

$$u^2(x') = \int_I u^2 \cdot dt$$

Bu durumda (2.48) ile ;

$$u^2(x) \leq \int_I [(u')^2 + 2u^2] dt \quad (2.49)$$

elde edilir.

Denklemin her iki tarafını da $q^2(x)$ ile çarpıp; I aralığında integral alırsak; (2.43) ile;

$$\int_I q^2(x) \cdot u^2(x) dx \leq \int_I q^2(x) dx \cdot \int_I [(u')^2 + 2u^2] dt \leq M \cdot \int_I [(u')^2 + 2u^2] dt \quad (2.50)$$

bulunur. Birim uzunluktaki aralıkları toplayarak;

$$\int_{-\infty}^{\infty} q^2(x) \cdot u^2(x) dx \leq M \int_{-\infty}^{\infty} [(u')^2 + 2u^2] dt \quad (2.51)$$

elde edilir ki bu da (2.42)'nin doğru olduğu anlamına gelir.

Şimdi de (2.15) ile gösterilen q_R fonksiyonunu gözönüne alalım. Buna karşılık gelen operatör de Q_R ile gösterilsin. Bu durumda; $R < \infty$ için Q_R operatörü $\bar{A}$ - kompakttır.

Bunu göstermek için; $u \in D(A)$, I sınırlı bir aralık ve $x, x' \in I$ olmak üzere,

$$u(x) - u(x') = \int_{x'}^x u'(t) dt \text{ eşitliğini ele alalım.}$$

Bu durumda;

$$|u(x) - u(x')|^2 \leq |x - x'| \cdot \int_{x'}^x |u'(t)|^2 dt \leq |x - x'| \cdot \|Au\|^2 \quad \text{olur.} \quad (2.52)$$

Ayrıca x' , ortalama değer teoremi ile ;

$$u(x') = \int_I u(t) dt \quad \text{olarak seçilirse ve } I \text{ aralığı bir birim uzunluğunda ise;}$$

$$|u(x')|^2 \leq \int_I |u(t)|^2 dt \leq \|u\|^2 \quad (2.53)$$

olarak yazılır. Burada (2.52) ve (2.53) birleştirildiğinde;

$$|u(x)| \leq \|u\| + \|Au\| \quad (2.54)$$

elde edilir.

Şimdi de $u \in D(\bar{A})$ fonksiyonlarının sürekli olduğunu ve aşağıdaki eşitsizlikleri sağladığını iddia edelim.

$$|u(x)| \leq \|u\| + \|\bar{A}u\|, \quad u \in D(\bar{A}) \quad (2.55)$$

$$|u(x) - u(x')|^2 \leq |x - x'| \cdot \|\bar{A}u\|^2, \quad u \in D(\bar{A}) \quad (2.56)$$

Aslında; eğer $u \in D(\bar{A})$ ise; L^2 'de $u_n \rightarrow u$, $Au_n \rightarrow \bar{A}u$ olacak şekilde bir $\{u_n\} \in D(A)$ dizisi vardır. (2.54) ile yazılabilen;

$$|u_n(x) - u_m(x)| \leq \|u_n - u_m\| + \|Au_n - Au_m\|$$

eşitsizliği; sürekli fonksiyonların $\{u_n(x)\}$ dizisinin; herhangi bir sınırlı aralıkta monoton yakınsadığını gösterir. Limit u olacağından; u sürekli fonksiyonların monoton limitidir ve sonuç olarak süreklidir.

Ayrıca (2.52) ile $\forall n$ için ;

$$|u_n(x) - u_n(x')|^2 \leq |x - x'| \cdot \|Au_n\|^2$$

bulunur ve $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak; (2.56)'yı elde ederiz.

Q_R 'nin $\bar{A}$ - kompakt olduğunu göstermek için; bir $\{u_n\} \in D(\bar{A})$ dizisinin, (2.40)'ı sağladığını farzedelim. O halde (2.55) ve (2.56) ile;

$$|u_n(x)| \leq C, \quad |u_n(x) - u_n(x')|^2 \leq C^2 \cdot |x - x'| \quad \text{yazılır.}$$

İlk eşitsizlik; u_n 'in monoton sınırlı olduğunu; ikinci eşitsizlik ise bunların eş sürekli olduğunu gösterir. Bu durumda Arzela – Ascoli teoreminden yararlanabiliriz.

Teorem-2 (Arzela – Ascoli): Sonlu bir aralıkta monoton sınırlı eş sürekli bir dizi; monoton yakınsak bir alt diziye sahiptir. [Schechter,2002]

$[-R, R]$ aralığında yine $\{u_n\}$ ile göstereceğimiz bir alt diziye ele alalım:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |q_R|^2 \cdot |u_n - u_m|^2 dt &= \int_{-R}^R |q|^2 \cdot |u_n - u_m|^2 dt \\
&\leq \max_{|x| \leq R} |u_n(x) - u_m(x)|^2 \cdot \int_{-R}^R |q|^2 \cdot dt \\
&\leq 2 \cdot (R+1) \cdot M \cdot \max_{|x| \leq R} |u_n(x) - u_m(x)|^2 \rightarrow 0 \quad , \quad (m, n \rightarrow \infty \text{ iken}).
\end{aligned}$$

Bu da $\{q_R u_n\}$ dizisinin L^2 'de yakınsadığını gösterir. Bu durumda $Q_R, \bar{A}$ - kompakttır.

Şimdi de Q 'nun $\bar{A}$ - kompakt olduğunu gösterebiliriz. İlk olarak (2.51) ile;

$$\|qu\| \leq C_3 \cdot M \cdot (\|u\| + \|Au\|), \quad u \in D(A), \quad (2.57)$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada C_3 sabiti, u yada q 'ya bağlı değildir ve M , (2.43) koşulunu sağlar. (2.57) ile;

$$D(Q) \supset D(\bar{A}) \text{ ve};$$

$$\|qu\| \leq C_3 \cdot M \cdot (\|u\| + \|\bar{A}u\|), \quad u \in D(\bar{A}) \quad (2.58)$$

yazılabilir. Bunu gösterelim:

Eğer $u \in D(\bar{A})$ ise; L^2 'de $u_n \rightarrow u$, $Au_n \rightarrow \bar{A}u$ olacak şekilde bir $\{u_n\} \subset D(A)$ dizisi vardır ve u_n noktasal olarak u 'ya yakınsar. (2.57) ile; $\{qu_n\}$ L^2 de bir Cauchy dizisidir ve bir $h \in L^2$ fonksiyonuna yakınsar. Fakat qu_n , noktasal olarak qu 'ya yakınsar. Bu nedenle; $u \in D(Q)$ olduğunu göstererek $h = qu$ olarak yazılır. (2.57)'yi u_n 'e uygulayıp, limit alınırsa; (2.58) elde edilir.

$\bar{A}$ kapalı olduğu için; $D(\bar{A})$ 'yı, bir grafik normu tanıtarak, Banach uzayına dönüştürebiliriz. (2.58) eşitsizliği, Q 'nun $D(\bar{A})$ 'dan L^2 'ye, $C_3 M$ veya daha küçük bir norm ile sınırlı bir operatör olduğunu belirtir. Eğer Q yerine $Q - Q_R$ yazılırsa;

$$\|Q - Q_R\| \leq C_3 \cdot \sup_a \int_a^{a+1} |q(t) - q_R(t)|^2 dt \leq C_3 \cdot \sup_{|a| \geq R-1} \int_a^{a+1} |q(t)|^2 dt$$

olacak şekilde, $Q - Q_R$ 'nin $D(\bar{A})$ 'dan L^2 'ye sınırlı bir operatör olduğu da görülür. Böylece (2.44) ile, $R \rightarrow \infty$ iken $\|Q - Q_R\| \rightarrow 0$ olur.

$\forall R < \infty$ için Q_R 'nin $D(\bar{A})$ 'dan L^2 'ye kompakt bir operatör olduğunu biliyoruz. Bu durumda Q 'nın $D(\bar{A})$ dan L^2 'ye kompakt bir operatör olduğunu göstermek için aşağıdaki teoremi kullanalım.

Teorem-3: X normlu bir vektör uzayı, Y Banach uzayı olmak üzere $K(X, Y)$, X 'den Y 'ye tanımlı tüm kompakt operatörlerin kümesi ve de $B(X, Y) : X \rightarrow Y$ tanımlı tüm sınırlı, lineer operatörlerin kümesi olsun. Eğer; $L \in B(X, Y)$ operatörü için $n \rightarrow \infty$ iken, $\|L - K_n\| \rightarrow 0$ olacak şekilde bir $\{K_n\} \subset K(X, Y)$ dizisi varsa; $L \in K(X, Y)$ olur (Schechter, 2002).

Burada $L=Q$ ve $K_n=Q_R$ olarak seçilirse; bu teorem ile ispat tamamlanmış olur.

2.6 $\bar{A}$ Operatörünün Eşleniği

$\bar{A}$ kapalı bir operatör ve $D(\bar{A})$, L^2 de yoğun olduğundan; $\bar{A}$ nın bir eşleniği vardır ve $\bar{A}^*$ ile gösterilir (Schechter, 2002). Burada $\bar{A}^*$ yı belirlemeye çalışalım.

$\forall u, v \in D(\bar{A})$ için;

$$(\bar{A}u, v) = -(u, \bar{A}v) \quad (2.59)$$

olarak yazılır.

Öncelikle (2.59) eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

$u \in D(A)$ ve $v \in C_0^\infty$ için kısmi integrasyonla (2.13) eşitliği doğrudur. (2.33) ile; L^2 'de $\varphi_k \rightarrow v$, $A\varphi_k \rightarrow Av$ olacak şekilde bir $\{\varphi_k\} \subset C_0^\infty$ dizisi vardır.

Bu durumda $(Au, \varphi_k) = -(u, A\varphi_k)$ olarak yazılır.

Son olarak, eğer $u, v \in D(\bar{A})$ ise, o zaman L^2 'de $u_n \rightarrow u$, $Au_n \rightarrow \bar{A}u$, $v_n \rightarrow v$, $Av_n \rightarrow \bar{A}v$ koşullarını sağlayan $\{u_n\}, \{v_n\} \subset D(A)$ dizileri de vardır.

Bu nedenle,

$$(Au_n, v_n) = -(u_n, Av_n)$$

olur ve limit ile (2.59) elde edilir.

(2.59)'dan; $\bar{A}^*$ nin, $-\bar{A}$ nin bir uzantısı olması beklenir. Aslında;

$$\bar{A}^* = -\bar{A} \quad (2.60)$$

olduğu gösterilebilir.

Bunun için; $v \in D(\bar{A}^*)$ daki herhangi bir fonksiyon ve $\lambda \neq 0$ bir reel sayı olsun. Bu durumda; $\pm \lambda \in \rho(\bar{A})$ 'dır.

Özel olarak; bir $w \in D(\bar{A})$ vardır ve;

$$-(\bar{A} + \lambda)w = (\bar{A}^* - \lambda)v \quad (2.61)$$

olarak yazılır. Eğer $u \in D(\bar{A})$ ise; (2.59) ile;

$$((\bar{A} - \lambda)u, v) = (u, (\bar{A}^* - \lambda)v) = -(u, (\bar{A} + \lambda)w) = ((\bar{A} - \lambda)u, w) \text{ elde edilir.}$$

Buradan; $\forall u \in D(\bar{A})$ için;

$$((\bar{A} - \lambda)u, v - w) = 0 \text{ bulunur.}$$

$\lambda \in \rho(\bar{A})$ olduğundan; $R(\bar{A} - \lambda)$ görüntü kümesi L^2 'nin tamamıdır. Bu durumda $u \in D(\bar{A})$ için $(\bar{A} - \lambda)u = v - w = 0$ olur (Schechter, 2002). Buradan $v = w \in D(\bar{A})$ dır ve (2.61) ile; $\bar{A}^* v = -\bar{A}v$ bulunur. Böylece (2.60) gösterilmiş olur.

(2.60) ile;

$$(i\bar{A})^* = (-i) \cdot (-\bar{A}) = i\bar{A} \quad (2.62)$$

olur ki bu da, $i\bar{A}$ operatörünün kendine eş olduğunu gösterir. Burada $\sigma(\bar{A})$ sanal eksen olduğundan; $\sigma(i\bar{A})$ da reel eksenden oluşur.

$q(t)$ (2.43) ve (2.44)'ü sağlayan reel bir fonksiyon olsun. O zaman Q operatörü $i\bar{A}$ - kompakttır ve

$$\sigma_e(i\bar{A} + Q) = \sigma_e(i\bar{A}) = \sigma(i\bar{A}) \quad (2.63)$$

reel eksenden oluşur.

Reel olmayan bir λ noktası, eğer yalnızca bir özdeğer ise $\sigma(i\bar{A} + Q)$ 'da olabilir. Fakat $(i\bar{A}u, u)$ ve (Qu, u) 'nun her ikisi de reel olduğundan, reel olmayan λ noktaları $(i\bar{A} + Q)$ 'nın özdeğerleri olamaz. ($i\bar{A}$ kendine eş operatör ve q reel değerli olduğundan her ikisi de reeldir.) Böylece eğer;

$$\begin{aligned} (i\bar{A} + Q - \lambda)u &= 0 & \text{ise;} \\ \Im_m((i\bar{A} + Q - \lambda)u, u) &= -\Im_m \lambda \cdot \|u\|^2 = 0 & \text{elde ederiz.} \end{aligned}$$

Bu da λ 'nın reel olduğunu ya da $u = 0$ olduğunu gösterir. Böylece, $i\bar{A} + Q$ operatörünün reel olmayan özdeğerleri olamaz. Sonuç olarak tüm reel olmayan noktalar $\rho(i\bar{A} + Q)$ içindedir ve $\sigma(i\bar{A} + Q)$ reel eksenden oluşur. Ayrıca (2.60) ile ; $i\bar{A} + Q$ operatörünün kendine eş olduğu da görülebilir.

Burada belirtmeliyiz ki; $L^2(-\infty, \infty)$ uzayında, $i\bar{A} = \text{id} / dt$ diferansiyel ifadesi ile farklı kendine eş operatörler oluşturulabilir.

$H' \subset L^2(-\infty, \infty)$ olmak üzere; $i\bar{A} = B$ operatörünün tanım kümesi;

$$D(B) = \{f \in H'(-\infty, 0) \oplus H'(0, \infty) : f(0) = 0\} \text{ olsun.}$$

Burada $H'(a, b)$ ile kendisi ve birinci genelleştirilmiş türevi $L^2(a, b)$ uzayına ait fonksiyonların Sobelev uzayı gösterilmiştir (Lyantze ve Storozh, 1983).

Bu durumda B^* operatörünün tanım kümesinin de,

$$D(B^*) = H'(-\infty, 0) \oplus H'(0, \infty)$$

şeklinde olduğu açıktır.

B operatörünün her kendine eş genişletilmesi $\tilde{B}$ aşağıdaki şekilde tanımlanır (Lyantze ve Storozh, 1983).

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0 \quad \text{ve} \quad |\alpha_1| = |\alpha_2| \quad \text{olmak üzere;}$$

$$D(\tilde{B}) = \{f \in H'(-\infty, 0) \oplus H'(0, \infty) : \alpha_1 f(-0) + \alpha_2 f(+0) = 0\}$$

ve $f \in D(\tilde{B})$ için,

$$\tilde{B}f = if' \quad \text{olur.}$$

3. $L^2(-\infty, \infty)$ UZAYINDA $-id/dx$ ile BAĞIMSIZ DEĞİŞKENE ÇARPIM OPERATÖRÜNÜN UNITAR DENKLİĞİ

$L^2(-\infty, \infty)$ uzayında s bağımsız değişkenine çarpım Q operatörünü tanımlayalım:

$$D(Q) = \{y(s) \in L^2(-\infty, \infty) : sy(s) \in L^2(-\infty, \infty)\} \quad \text{ve} \quad y(s) \in D(Q) \text{ iken;} \\ Qy(s) = s.y(s).$$

Bu şekilde tanımlanmış Q operatörü kendine eş operatördür ve $-\infty < \lambda < \infty$ olmak üzere Q 'nun birim açılımı olan $E(\lambda)$ aşağıdaki şekildedir:

$$E(\lambda)y(s) = \begin{cases} y(s) & , \quad s \leq \lambda \\ 0 & , \quad s > \lambda \end{cases}$$

ve

$$Q = s. = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda) \quad (3.1)$$

olarak yazılır (Yosida, 1980).

Bu bölümde $L^2(-\infty, \infty)$ uzayında Q çarpım operatörü ile kendine eş $H = -id / dx$ operatörünün unitar denk oldukları gösterilecek ve buradan da $H = -id/dx$ operatörünün biriminin açılımı olan $\{E'(\lambda)\}$ elde edilecektir.

Bilindiği gibi $U: L^2(-\infty, \infty) \rightarrow L^2(-\infty, \infty)$ Fourier-Plancherel unitar operatörü

$$f(x) = U y(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(s) e^{isx} ds$$

ile gösterilir. Burada $E(\lambda)$ birimin açılımı ise;

$$E'(\lambda) = U E(\lambda) U^{-1} \quad (3.2)$$

fonksiyonu da birimin açılımıdır (Yosida, 1980).

Şimdi $H = -id/dx$ operatörü ile Q çarpım operatörünün unitar denk olduklarını gösterelim:

Eğer $y(s)$ ve $sy(s) \in L^2(-\infty, \infty) \cap L^1(-\infty, \infty)$ ise;

$$\begin{aligned} H f(x) &= -\frac{id}{dx} f(x) = -\frac{id}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} y(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} s y(s) ds = U(sy(s)) = Us U^{-1} f(x) \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

Ya da sembolik olarak;

$$H = -i \frac{d}{dx} = Us U^{-1} = U Q U^{-1} \quad \text{yazılır.}$$

Bu nedenle kendine eş operatör $Q = s = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)$ için

$y(s)$ ve $sy(s) \in L^2(-\infty, \infty) \cap L^1(-\infty, \infty)$ iken (3.2) ile,

$$U^{-1} H U \cdot y(s) = s \cdot y(s) = Q y(s) \quad \text{elde edilir.}$$

Herhangi bir $y(s) \in D(Q) = D(s)$ için ,

$$y_n(s) = \begin{cases} y(s) & , \quad |s| \leq n \\ 0 & , \quad |s| > n \end{cases}$$

olarak tanımlansın. O halde,

$$y_n(s) \text{ ve } sy_n(s) \in L^2(-\infty, \infty) \cap L^1(-\infty, \infty) \text{ ve } s - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, \quad s - \lim_{n \rightarrow \infty} Q y_n = Q y$$

olur. Böylece kendine eş $U^{-1} H U$ ve Q operatörleri kapalı olduklarından, $y \in D(Q)$ için;

$$(U^{-1} H U) y_n = Q y_n, \quad (U^{-1} H U) y = Q y \quad \text{elde edilir.}$$

Buradaki $U^{-1} H U$ operatörü, kendine eş operatör Q 'nun kendine eş açılımıdır.

Eşlenik alırsak da, $Q^* = Q$ operatörünün $(U^{-1}H U)^* = U^{-1}H U$ nun bir açılımı olduğu görülür. Bu nedenle,

$U^{-1}H U = Q$ olur. Ayrıca (3.1) ve (3.2) ile ,

$$H = U Q U^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(UE(\lambda)U^{-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE'(\lambda) \quad \text{elde edilir.}$$

Böylece $H = -id/dx$ operatörünün birim açılımının $E'(\lambda)$ olduğu gösterilmiş olur.

4. $D = id / dx$ OPERATÖRÜNÜN $L^2[0, 1]$ UZAYINDA İNCELENMESİ

$D = id/dx$ operatörü, $L^2[0,1]$ Hilbert uzayında genelleştirilmiş bir türeve sahip olan, kompleks değerli tüm $L^2[0,1]$ fonksiyonlarında tek olarak tanımlanabilen bir operatör olsun. Öncelikle belirli sınır koşullarına bağlı düzgün fonksiyonların bir kümesindeki diferansiyel operatörün özelliklerini araştıralım:

$[0,1]$ aralığındaki sürekli diferansiyellenebilir tüm fonksiyonların kümesi $C^{(1)}[0,1]$ üzerinde tanımlı D operatörü, A ile gösterilsin. $\varphi(x) \in D(A)$ için A 'nın değeri,

$$A\varphi = i \frac{d\varphi(x)}{dx} \quad (4.1)$$

ile hesaplanır ve $D(A)$, $L^2[0,1]$ uzayında yoğundur (Smirnov, 1964).

A operatörü simetriktir.

$\forall \varphi(x)$ ve $\psi(x) \in D(A)$ için (4.1) ile;

$$(A\varphi, \psi) = \int_0^1 i \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot \overline{\psi(x)} dx = - \int_0^1 i \varphi(x) \cdot \frac{d\overline{\psi(x)}}{dx} \cdot dx = (\varphi, A\psi)$$

olduğu görülür.

A operatörünün simetrik olması; A 'nın kapanışa ve eşleniğe sahip olduğunu, aynı zamanda $A \subseteq \overline{A} \subseteq A^*$ olarak yazılabildiğini gösterir. Burada A^* , A 'nın eşleniğidir.

Öncelikle $D(\overline{A})$ ve $D(A^*)$ tanım kümelerini oluşturan fonksiyonları bulalım.

$\varphi_m(x) \in D(A)$ ve $\varphi_m(x) \Rightarrow \varphi(x)$; $A\varphi_m = \psi_m(x) \Rightarrow \psi(x)$ olsun. O halde;

$\varphi(x) \in D(\overline{A})$ ve $\psi(x) = \overline{A}\varphi(x)$ olur.

Genelleştirilmiş türev teorisi ile; A 'nın bu kapanışı $D(A)$ 'yı; $D(\overline{A}) = \overset{0}{W}_2^{(1)}[0,1]$ 'e genişletir.

Burada $\overset{0}{W}_2^{(1)}[0,1]$ Sobelev uzayıdır. $\forall \varphi(x) \in \overset{0}{W}_2^{(1)}[0,1]$ fonksiyonu, $L^2[0,1]$ uzayında birinci türeve sahip, sonlarda sıfıra eşit, mutlak sürekli fonksiyondur. $D(\overline{A})$ 'nın $\varphi(x)$

üzerindeki $\bar{A}$ operatörü; (4.1)'den hesaplanır; tek fark d/dx 'in artık genelleştirilmiş ve klasik olmayan türevi ifade etmesidir (Smirnov, 1964).

Şimdi de $D(A^*)$ yi meydana getiren fonksiyonları bulalım:

Eğer $\forall w(x) \in D(A)$ için;

$$\int_0^1 i \cdot \frac{dw(x)}{dx} \overline{\varphi(x)} dx = \int_0^1 w(x) \cdot \overline{\psi(x)} dx \quad (4.2)$$

yani $(Aw, \varphi) = (w, \psi)$ olacak şekilde bir $\psi(x) \in L^2[0,1]$ fonksiyonu varsa; $\varphi(x) \in D(A^*)$ olur.

Fakat bu da; $\varphi(x)$ fonksiyonunun $d\varphi(x)/dx = -i\psi(x)$ şeklinde bir genelleştirilmiş türeve sahip olduğunu, yani; (4.2) eşitliğini sağlayan her $\varphi(x) \in W_2^{(1)}[0,1]$ fonksiyonu için $id\varphi(x)/dx = \psi(x)$ olduğunu ifade eder. Böylece; $D(A^*) = W_2^{(1)}[0,1]$ ve $A^* \varphi = id\varphi(x)/dx$ olarak yazıldığı gösterilmiş olur. $W_2^{(1)}[0,1]$ 'in; $\overset{0}{W}_2^{(1)}[0,1]$ 'den daha geniş olduğu açıktır. A^* operatörünün $D(A^*)$ 'de simetrik olmadığı kolayca kanıtlanır.

Şimdi de A operatörünün, $R(A)$ üzerinde sınırlı bir tersinin olduğunu gösterelim. Buradan $R(\bar{A})$ nın bir alt uzay olduğu sonucu çıkacaktır.

$\varphi(x) \in D(A)$ olsun. O halde;

$$\varphi(x) = \frac{1}{i} \cdot \int_0^x A\varphi(x) dx \quad \text{ve Buniakowski eşitsizliği ile;}$$

$$\|\varphi\|^2 = \int_0^1 \left| \int_0^x A\varphi(x) dx \right|^2 dx \leq \|A\varphi\|^2 \quad \text{olacaktır (Smirnov, 1964).}$$

Buradan; $R(A)$ 'da A^{-1} 'in varlığı ve $\|A^{-1}\| \leq 1$ olduğu sonucuna varılır.

A operatörünün farklı kendine eşlenik eklerinin olma olasılığını da inceleyelim.

Verilen her simetrik $\tilde{A}$ eki için; $A \subset \tilde{A} \subseteq A^*$ olduğunu biliyoruz, yani; $D(A^*)$ nin elemanlarını $D(A)$ 'ya eklemeli ve bu eklenmiş z elemanlarını $\tilde{A}z = A^*.z$ olarak almalıyız. Ayrıca ekleme sırasında operatörün simetrikliğinin kaybolmadığını da bilmeliyiz.

H'yi aşağıdaki şekilde yazalım:

$$H = R(\bar{A}) \oplus U$$

Bilindiği gibi; U, eşlenik operatörün sıfırları olan, $u(x)$ fonksiyonlarından oluşur (Smirnov, 1964). Fakat $A^*u = i \, du(x) / dx$ olduğundan, $u(x) = \text{sabit}$ 'tir. Burada $R(A)$ 'yı H 'ye genişletip, operatörün simetrik kalmasını sağlayacak şekilde, A 'yı genişletmeye çalışalım. Bu da; $A^* \varphi = \text{sabit}$, denklemlerinin tüm çözümlerini alıp; aralarından D operatörünün simetrik olduklarını seçerek yapılabilir.

Açıkça görülüyor ki; $\varphi(x)$ fonksiyonu, $\varphi(x) = C_1 \cdot (x + C)$ biçimindedir. Burada, D operatörü $\varphi(x)$ üzerinde simetrik olacak şekilde, yani;

$$\begin{aligned} 0 &= (D\varphi, \varphi) - (\varphi, D\varphi) = i\varphi(x) \cdot \overline{\varphi(x)} \Big|_0^1 = i \cdot |C_1|^2 \cdot [(1+C) \cdot (1+\bar{C}) - C \cdot \bar{C}] \\ &= i \cdot |C_1|^2 \cdot [1 + C + \bar{C}] \end{aligned}$$

olacak şekilde C ve C_1 sabitlerini seçeriz.

Bu nedenle β keyfî bir reel sayı iken; $C = \frac{-1}{2} + \beta_i$ ve keyfî C_1 sabitleri vardır. β sabit bir

reel sayı ve C_1 keyfî bir kompleks sayı olmak üzere; $\varphi(x) = C_1 \left(x - \frac{1}{2} + \beta_i \right)$ elemanlarını

$D(\bar{A})$ ile birleştiririz. $D(A)$ ile elde edilen küme ve $\tilde{A}$ ile de o kümenin üzerindeki D operatörü gösterilirse buradan; $\tilde{A}$ operatörünün, A 'nın simetrik bir eki olduğu kolayca görülür.

Diğer taraftan; $\tilde{A}$ 'nın tanım kümesi H nin tamamıdır; bu sebeple $\tilde{A}$, A operatörünün kendine eşlenik bir ekidir (Smirnov, 1964). Bu ekin, eklenmiş elemanlarının aşağıdaki sınır koşulunu sağladıkları kolayca görülebilir.

$$\varphi(1) = \frac{\frac{1}{2} + \beta_i}{-\frac{1}{2} + \beta_i} \cdot \varphi(0) \Rightarrow \quad \varphi(1) = e^{i\theta} \cdot \varphi(0) \quad , \quad (0 < \theta < 2\pi) . \quad (4.3)$$

$D(\bar{A})$ 'nın elemanlarının da bu koşulu sağladığı açıktır.

Diğer bir taraftan; herhangi bir $\varphi(x) \in D(A^*)$ ve keyfî bir $w(x) \in D(\tilde{A})$ için (4.3) koşulunu sağlayan,

$$\int_0^1 i \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot \overline{w(x)} \cdot dx = \int_0^1 \varphi(x) \cdot i \cdot \frac{dw(x)}{dx} \cdot dx \quad \text{elde edilir.}$$

Bundan dolayı $\varphi(x) \in D(\tilde{A}^*)$ ve $\tilde{A}^* \varphi = id\varphi(x)/dx$ olur. Fakat $\tilde{A}$, A 'nın kendine eşlenik eki, yani $A^* = \tilde{A}$ olduğundan; $D(\tilde{A})$, $D(A^*)$ nın (4.3) koşulunu sağlayan bütün elemanlarından oluşur. Bu da; $\overset{0}{W}_2^{(1)}[0,1] = D(\bar{A})$ nın, $L^2[0,1]$ uzayında türeve sahip ve aralığın uçlarında sıfırlanan tüm mutlak sürekli $\varphi(x)$ fonksiyonlarından oluştuğunu gösterir.

Buraya kadar $R(\tilde{A}) = H$ olacak şekilde A operatörünün muhtemel tüm kendine eşlenik eklerini belirledik. Bu eklerin her biri; keyfî bir reel β parametresi ya da $0 < \theta < 2\pi$ aralığındaki bir θ reel sayısı ile tanımlanır.

Şimdi de; $R(A') = R(A)$ olacak şekilde A operatörünün kendine eşlenik A' eklerini araştıralım:

Eğer böyle bir ek varsa; o zaman $D(\bar{A})$ sadece A^* operatörünün sıfırları, yani $\varphi(x) = \text{sabit}$, elemanları ile dolu olacaktır. $(D(A) + \text{Sabitler})$ kümesi üzerindeki D operatörü, $\bar{A}$ nın bir eki olan simetrik A' operatörüdür. $D(A')$ kümesi; $\varphi(0) = \varphi(1)$ olan tüm $\varphi(x) \in D(A^*)$ elemanlarından oluşur.

Öncelikle $D(A'^*) = D(A')$ olduğunu gösterelim:

$\varphi(x) \in D(A'^*)$; yani verilen $\forall w(x) \in D(A')$ için;

$$0 = (A'w, \varphi) - (w, \psi) \text{ olsun.} \quad (4.4)$$

$D(A'^*) \subseteq D(A^*)$ olduğundan;

$$(A'w, \varphi) = \int_0^1 i \cdot \frac{dw(x)}{dx} \cdot \overline{\varphi(x)} \cdot dx = \int_0^1 w(x) \cdot i \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot dx + iw(x)\overline{\varphi(x)} \Big|_0^1$$

(4.4) ve $w(x) \in D(A')$ ile;

$\psi(x) = id\varphi(x)/dx$ ve $\varphi(0) = \varphi(1)$, yani $\varphi(x) \in D(A')$ elde ederiz.

Böylece A' operatörünün A nın kendine eşlenik eki olduğu gösterilmiş olur. Ayrıca eğer $D(A')$ fonksiyonlarının sağladığı sınır koşulları $\varphi(0) = \varphi(1)$ ile (4.3) koşulunu karşılaştırırsak; $\theta = 0$ ya da $\beta = \infty$ olduğu görülür.

A operatörünün $\theta \neq 0$ olan kendine eşlenik eklerinin sınırlı $\tilde{A}^{-1}$ tersleri de vardır.

Eğer $\tilde{A}\varphi = \frac{id\varphi(x)}{dx} = 0$ ise o zaman $\varphi(x) = C$ 'dir ve (4.3) ile,

$C = e^{i\theta} \cdot C$, yani $C = 0$ olur.

Bu nedenle $\tilde{A}^{-1}$ in vardır ve tüm H üzerinde tanımlı ve kendine eşlenik bir operatör olduğu için; sınırlıdır (Smirnov, 1964).

Ayrıca A' operatörünün $R(A') = R(\bar{A})$ üzerinde tersi yoktur.

4.1 $D = id / dx$ Operatörünün $L^2(0, +\infty)$ Uzayında İncelenmesi

Sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar üzerinde tanımlı olan D operatörü, A ile gösterilsin. Bu durumda benzer işlemlerle, A 'nın eşleniği olan A^* nın D operatörü olduğu; $L^2(0, +\infty)$ uzayında türevi olan ve herhangi bir sonlu $[0, a]$ aralığında mutlak sürekli olan $D(A^*)$ nın, $\varphi(x) \in H$ fonksiyonlarının kümesi olduğu ve $D(\bar{A}) = D(A^{**})$ nin, $\tilde{A}\varphi(x) = \frac{id\varphi(x)}{dx}$ iken $\varphi(0) = 0$ koşulunu sağlayan $\varphi(x) \in D(A^*)$ fonksiyonlarının bir kümesi olduğu gösterilebilir.

$(\bar{A})^* = A^*$ olduğundan; $D(A^*)$, $D(\bar{A})$ den daha geniştir ve $\bar{A}$ kendine eşlenik bir operatör değildir (Smirnov, 1964).

$\bar{A}$ nın kendine eşlenik eklerinin olmadığını gösterelim:

$\tilde{A}$ kendine eşlenik bir ek olsun. $\tilde{A} \subseteq A^*$ olduğundan; $\tilde{A}\varphi = \frac{id\varphi(x)}{dx}$ yazılabilir, ve $D(\tilde{A})$,

$D(\bar{A})$ dan daha geniş olmalıdır.

Fakat eğer $\varphi(x) \in D(\tilde{A})$ ise o zaman $\varphi(x) \in \overline{D(A)}$ olur ve bu çelişki bize A nın kendine eş ekleri olmadığını gösterir.

$\varphi(x) \in D(\tilde{A})$, dolayısıyla $\varphi(x) \in D(A^*)$ olsun.

$(\tilde{A}\varphi, \varphi) = (\varphi, \tilde{A}\varphi)$ formülü ile;

$$\int_0^\infty i \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot \overline{\varphi(x)} \cdot dx = \int_0^\infty \varphi(x) \cdot i \cdot \overline{\frac{d\varphi(x)}{dx}} \cdot dx$$

eşitliği elde edilir. Burada;

$x \rightarrow +\infty$ iken $\varphi(x) \rightarrow 0$ olacağından;

$\varphi(0) = 0$ yani $\varphi(x) \in D(\bar{A})$ olduğu görülür.

5. SONUÇLAR

$A = \frac{d}{dt}$ diferansiyel operatörü, $L^2 = L^2(-\infty, \infty)$ uzayında kapalı ve sınırlı değildir; fakat kapalı bir devamı vardır ve kapanışı $\overline{A}$ ile gösterilir.

$\overline{A}$ operatörünün öz değerleri (λ) incelendiğinde; $\text{Re } \lambda > 0$ ve $\text{Re } \lambda < 0$ yarı düzlemlerinin $\rho(\overline{A})$ içinde olduğu; $\text{Re } \lambda = 0$ iken $\lambda \in \sigma(\overline{A})$ spektrumunda olduğu görülür.

Ayrıca $\overline{A}$ - kompakt olan bir çarpım operatörünün $\overline{A}$ ile toplamının spektrumu da sanal eksenenden oluşur.

$iA = i \frac{d}{dt}$ operatörü kendine eş bir operatördür ve $\overline{A}$ - kompakt olan bir çarpım operatörünün $i\overline{A}$ ile toplamının spektrumu reel eksenenden oluşur. $i\overline{A}$ operatörü ile farklı kendine eş operatörler oluşturulabilir.

$L^2 = L^2(-\infty, \infty)$ uzayında, $-i \frac{d}{dx}$ diferansiyel operatörü ile kendine eş bir çarpım operatörü unitar denktir.

$-i \frac{d}{dx}$ operatörü $L^2[0,1]$ uzayında simetriktir ve kapanışı, eşleniği vardır. Fakat eşleniği simetrik değildir.

$-i \frac{d}{dx}$ operatörü $L^2(0, \infty)$ uzayında incelendiğinde, kapanışının kendine eşlenik olmadığı ve aynı zamanda kendine eş devamının olmadığı görülür.

KAYNAKLAR

Akhiezer, N. I., Glazman, I. M., (1987), Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Dover Publications, INC., New York.

Chernyavskaya, N. A., Shuster, L. A., (2006), “Conditions for Correct Solvability of a Simplest Singular Boundary Value Problem of General Form I”, Journal for Analysis and its Applications V. 25 (2006): 205-235.

Chernyavskaya, N. A., Shuster, L. A., (2007), “Conditions for Correct Solvability of a Simplest Singular Boundary Value Problem of General Form II”, Journal for Analysis and its Applications V. 26 (2007): 439-458.

Lyantze, V. E., Storozh, O. G., (1983), Methods of the Unbounded Operator Theory, (Rusça), Kiev.

Schechter, M., (2002), Principles of Functional Analysis, Second Edition, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Smirnov, V. I., (1964), A Course of Higher Mathematics, New York.

Yosida, K., (1980), Functional Analysis, Springer-Verlay, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 23.01.1981

Doğum yeri İstanbul

Lise 1994-1998 Kadir Has Anadolu Lisesi

Lisans 1998-2003 Marmara Üniversitesi Fen Edebiyat Fak.
Matematik Bölümü

Lisans 2001-2005 Anadolu Üniversitesi İşletme Fak.
İşletme Bölümü

Çalıştığı kurumlar

1999-2006 İlkumut Açıköğretim Kursları

2006-Devam ediyor Anadolu Sigorta