

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DIŞ DÜZLEM ÜZERİNE BİR q -DİFERANSİYEL HESAP

MERVE YENİGÜN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. SULTAN A. ÇELİK**

İSTANBUL, 2012

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DIŞ DÜZLEM ÜZERİNE BİR q-DİFERANSİYEL HESAP

Merve YENİGÜN tarafından hazırlanan tez çalışması 09.08.2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Sultan A. ÇELİK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Yrd. Doç. Dr. Sultan A. ÇELİK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ergün YAŞAR
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Şeyda Canan TEKİN
İstanbul Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Değişmeli olmayan geometri, son yıllarda matematik ve fizikte ilgi çekici konulardan biri haline gelmiştir. Bu çalışmada dış düzlemin q -diferansiyel geometrisi incelenmiş ve bu diferansiyel yapıyı sağlayan $\mathfrak{R}$ -matrisi elde edilmiştir. Bu işlem yapılırken yeni bir kuantum grubu bulunmuştur.

Bu çalışmanın hazırlanmasında, tez konusunu bana veren, çalışmalarım esnasında beni yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen hocam Yrd. Doç. Dr. Sultan A. ÇELİK'e ve konu hakkındaki yardımlarından dolayı değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ağustos, 2012

Merve YENİGÜN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	1
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
TEMEL BİLGİLER	3
2.1 Ön Bilgiler	3
BÖLÜM 3	
DIŞ DÜZLEM ÜZERİNE BİR q-DİFERANSİYEL HESAP	9
3.1 Dış Düzlem ve Hopf Cebiri Yapısı	9
3.2 Kuantum Düzlem ve Hopf Cebiri Yapısına Kısa Bir Bakış	11
3.3 Diferansiyel Cebir	13
3.4 Kısmi Türevler Arasındaki Bağlılıklar	16
BÖLÜM 4	
$\mathfrak{R}$ -MATRİS YAKLAŞIMI	20
BÖLÜM 5	
BİR $GL_q(2)$ KUANTUM GRUBU	23
5.1 Matris Elemanları Arasındaki Bağlılıklar	23
5.2 Kuantum T Matrisinin Determinantı ve Tersisi	25

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER.....	30
KAYNAKLAR	31
ÖZGEÇMİŞ	32

SİMGE LİSTESİ

C	Kompleks sayılar kümesi
d	Dış diferansiyel operatör
$\deg(f)$	f fonksiyonunun derecesi
$\otimes$	Tensör çarpım
∂	Kısmi türev operatörü
Δ	Eş-çarpım operatörü
ε	Eş-birim operatörü
S	Eş-ters operatörü
$\wedge$	Dış çarpım

DIŞ DÜZLEM ÜZERİNE BİR q-DİFERANSİYEL HESAP

Merve YENİGÜN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Sultan A. ÇELİK

Bu çalışmada dış düzlem üzerine bir q-diferansiyel hesap geliştirilmiştir. Ortaya çıkan sonuçlar değerlendirilmiş ve bu diferansiyel yapıyı koruyan R-matrisi elde edilmiştir. Ayrıca bu q-diferansiyel hesaba etki eden yeni bir kuantum grubu bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Kuantum düzlem, dış düzlem, q-deformasyon, Hopf cebiri, diferansiyel hesap, kuantum grup

ABSTRACT

A q -DIFFERENTIAL CALCULUS ON EXTERIOR PLANE

Merve YENİGÜN

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Asst. Prof. Dr. Sultan A. ÇELİK

In this study, a q -differential calculus on the exterior plane was obtained and the results of this calculus were investigated. After then, the obtained structures were given with a convenient R-matrix. Finally, a new quantum group which is connected with this q -differential calculus was obtained.

Key words: Quantum plane, exterior plane, q -deformation, Hopf algebra, differential calculus, quantum group

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE

1.1 Literatür Özeti

Bir kuantum grubu, grup kavramının bir genelleştirilmesidir. Daha tam olarak, bir kuantum grubu, bir grubun deformasyonu olup deformasyon parametresinin özel değer(ler)i için ele alınan grup ile özdeşleşir. Kuantum grubu terminolojisi, ilk kez 1986'da V. Drinfeld[1] tarafından kullanılmıştır. Kuantum düzlem fikrini daha genel olarak kuantum uzay fikrini ise 1988 yılında Manin[2] ortaya atmıştır.

Kuantum düzlemin diferansiyel geometrisinin inşası şu şekilde yapılmaktadır:

Kuantum düzlemin bileşenlerinin lineer koordinat fonksiyonları oldukları kabul edilerek, ilk iş olarak, onların diferansiyelleri ile olan q -komutasyon bağıntıları bulunur. Sonra, 1-formlar ve kısmi türevler göz önüne alınarak ilgili bütün bağıntılar bulunur. (Wess ve Zumino[3] ve Çelik[4],[5])

Elbette çalışma alanları bu kadarla sınırlı değildir. Süper uzayların q -deformasyonu, kuaternionların deformasyonları, Z_3 -dereceden gruplar ve bunların diferansiyel hesapları ve daha nice konularda birçok çalışmalar yapılmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada, klasik dış düzlem göz önüne alınarak, diferansiyel geometrisine giden yolu açmak üzere, dış düzlemin kuantum düzleme bağlı Hopf cebir yapısı kurulacaktır. Böylece ortaya çıkan Δ eş-çarpımının yardımıyla, amaçlanan bağıntıları kolayca elde edebileceğiz. Daha sonra, elde edilen sonuçların (bağıntıların) çok basit formüllerle ifade edilebileceği bir $\mathfrak{R}$ matrisi bulmaya çalışacağız.

1.3 Hipotez

Bir dış düzlemin bileşenleri olan θ ve φ nin birer lineer koordinat fonksiyonu olduğu kabul edilmiştir. Dolayısıyla, onların diferansiyelleri alınabilir. Eğer bunları $d\theta$ ve $d\varphi$ ile gösterirsek, şüphesiz koordinat fonksiyonları ile diferansiyelleri arasında sağlanması muhtemel bağıntılar olabilir. Bu bağıntıları elde etmenin iki yolu vardır. İlki, Wess-Zumino yaklaşımı, ikincisi de kovaryantlığı kullanmaktır (Celik[4]). Ancak ikincisi için Hopf cebir yapısı kurmak gerekmektedir.

BÖLÜM 2

TEMEL BİLGİLER

2.1 Önbilgiler

Bu bölümde, ileride kullanılacak bazı kavramlar, bütünlük açısından burada tanıtılacaktır.

Tanım 2.1 Üzerinde toplama ve çarpma tanımlanmış bir R kümesine, aşağıdaki özellikler sağlanırsa bir birimli **halka** denir.

1. $(R, +)$ bir değişmeli grup.
2. Her $a, b, c \in R$ için $a.(b + c) = a.b + a.c$ ve $(a + b).c = a.c + b.c$.
3. Her $a \in R$ için $a.1 = 1.a$ olacak şekilde $1 \in R$ elemanı mevcut.
4. Her $a, b, c \in R$ için $a.(b.c) = (a.b).c$.

Eğer her $a, b \in R$ için $a.b = b.a$ oluyorsa R 'ye değişmeli halka denir.

Tanım 2.2 $(M, +)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. Eğer

$$\varphi: R \times M \rightarrow M, (a, x) \mapsto a.x, \quad (\varphi: M \times R \rightarrow M, (x, a) \mapsto x.a)$$

şeklinde tanımlanan tasvir aşağıdaki şartları sağlarsa, M 'ye bir **sol (sağ) R -modül**, kısaca sol (sağ) modül, φ tasvirine de sol (sağ) R - modül M 'nin **yapı tasviri** adı verilir:

$$\forall a, b \in R \text{ ve } \forall x, y \in M \text{ için,}$$

$$\text{i) } a(x+y) = ax+ay, \quad ((x+y)a = xa+ya)$$

$$\text{ii) } (a+b)x = ax+bx, \quad (x(a+b) = xa+xb)$$

$$\text{iii) } (a.b)x = a(bx), \quad (x(a.b) = (xa)b)$$

$$\text{iv) } 1_R x = x, \quad (x1_R = x)$$

Eğer M hem sağ hem sol R -modül ise M 'ye kısaca **modül** denir. Ek olarak R halkası bir cisim ise, M modülüne **vektör** uzayı veya bir **lineer uzay** denir.

Tanım 2.3 V ve W , K üzerinde birer vektör uzayı olmak üzere,

$$T: V \rightarrow W$$

tasviri, her $v_1, v_2 \in V$ ve $a, b \in K$ için

$$T(av_1 + bv_2) = aT(v_1) + bT(v_2)$$

şartını sağlarsa, bir **lineer** tasvir adını alır.

Tanım 2.4 U, V ve W , K üzerinde birer vektör uzayı olmak üzere $\varphi: U \times V \rightarrow W$ tasviri aşağıdaki iki şartı sağlıyorsa φ ye bir **bi-lineer** tasvir denir.

$u, u' \in U; v, v' \in V$ ve $\lambda, \mu \in K$ için,

$$\text{i) } \varphi(\lambda u + \mu u', v) = \lambda \varphi(u, v) + \mu \varphi(u', v),$$

$$\text{ii) } \varphi(u, \lambda v + \mu v') = \lambda \varphi(u, v) + \mu \varphi(u, v').$$

Kabul edelim ki U, m – boyutlu ve V, n – boyutlu birer vektör uzayı olmak üzere

$\{\vec{u}_i\}_{i=1}^m$, U nun ve $\{\vec{v}_j\}_{j=1}^n$, V nin taban elemanlarının kümesidir. Bu takdirde $1 \leq i \leq m$

ve $1 \leq j \leq n$ olmak üzere mn tane (i, j) indisi mevcut olduğundan bu indis çiftleri W

daki bir $\{\vec{w}_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m, n}$ tabanını indislemek için kullanılabilir. Böyle yapınca,

$\varphi: U \times V \rightarrow W$ tasviri $\vec{x} = x^i \vec{u}_i$ ve $\vec{y} = y^j \vec{v}_j$ olmak üzere

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = x^i y^j \vec{w}_{ij}$$

şeklinde tanımlanır. Aşikâr olarak φ , bir bi-lineer tasvirdir ve $\varphi(U \times V) \subseteq W$ (görüntü) kümesi, $\{\vec{w}_{ij}\}$ tabanını ihtiva eder. Dolayısıyla φ bi-lineer tasviri W uzayını gerer.

Sonuç olarak, U ve V iki vektör uzayı olmak üzere bir W vektör uzayı için aşağıdaki iki şart sağlanıyorsa W uzayına, U ve V uzaylarının **tensör** çarpımı denir ve sembolik olarak $U \otimes V$ ile gösterilir.

i) $\varphi(U \times V), W$ yı gerer.

ii) $\Psi : U \times V \mapsto W'$ herhangi bir bi-lineer tasvir ise $\Psi = \Phi \circ \varphi$ olacak şekilde bir $\Phi : W \mapsto W'$ lineer tasvir mevcut.

Tanım 2.5 $T_1 : U_1 \mapsto V_1$, $T_2 : U_2 \mapsto V_2$, birer lineer tasvir olsun. Bu takdirde, $u_1 \in U_1$ ve $u_2 \in U_2$ için

$$\Phi : U_1 \otimes U_2 \mapsto V_1 \otimes V_2, \quad \Phi(u_1 \otimes u_2) = T_1(u_1) \otimes T_2(u_2)$$

şeklinde tanımlanan bir lineer tasvir mevcuttur. Buradaki Φ 'ye T_1 ve T_2 'nin **tensör çarpımı** denir ve $\Phi = T_1 \otimes T_2$ ile gösterilir.

Tanım 2.6 G bir grup ve K bir cisim olsun. A ile G 'den K 'ya olan fonksiyonların kümesini gösterelim. Yani

$$A = \text{Map}(G, K) = \{f \mid f : G \mapsto K\}$$

olsun. Eğer aşağıdaki üç aksiyom sağlanırsa, A 'ya bir K -**cebiri** denir:

$$(1) (\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

$$(2) (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(3) (fg)(x) = f(x)g(x), \quad f, g \in A, \quad \alpha \in K, \quad x \in G.$$

Eğer bir lineer $T : A \rightarrow A$ tasviri

$$T(f.g) = T(f).T(g)$$

eşitliğini de sağlarsa, T 'ye bir **lineer homomorfizm** veya **cebir homomorfizmi** denir.

Eğer, T

$T(f.g) = T(g)T(f)$ eşitliğini sağlarsa T 'ye **cebiri anti-homomorfizmi** denir.

Bir K – cebirini (basitlik için sadece cebiri diyeceğiz), genel olarak aşağıdaki şekilde tanımlayacağız. Bir cebiri, iki adet lineer tasvir ile birlikte bir K -vektör uzayı olarak düşünülür:

$$\mu: A \otimes A \rightarrow A, \mu(a \otimes b) = a.b,$$

$$\eta: K \rightarrow A, \eta(k) = k.I.$$

Burada I , A 'nın birim elemanıdır. Bu tasvirler için

$$\begin{aligned} \mu \circ (\text{id} \otimes \mu) &= \mu \circ (\mu \otimes \text{id}) \quad (\text{Ass}) \\ \mu \circ (\text{id} \otimes \eta) &= \mu \circ (\eta \otimes \text{id}) \quad (\text{Uni}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

özellikleri geçerlidir. (Ass) aksiyomu, μ çarpma tasvirinin asosiyatifliğini ifade ederken, (Uni) aksiyomu, $\eta(1)$ 'in A 'nın hem sağ hem de sol birim elemanı olduğunu ifade etmektedir. Burada $\text{id}: A \rightarrow A$ özdeşlik tasvirini göstermektedir.

Böylece ortaya çıkan (A, μ, η) üçlüsüne bir **cebiri** diyeceğiz.

Eğer $A \otimes A = \text{Map}(G \times G, K)$ ve $A = \text{Map}(G, K)$ olduğunu kabul edersek, G deki işlemi kullanarak aşağıdaki lineer homomorfizmleri tanımlayabiliriz. Her $x, y \in G$ için

$$\Delta: A \rightarrow A \otimes A, \Delta f(x \otimes y) = f(x.y),$$

$$\varepsilon: A \rightarrow K, \varepsilon(f) = f(e).$$

Burada e , G nin birim elemanıdır. Δ 'ya cebirin bir **eş-çarpması** ve ε tasvirine de cebirin **eş-birimi** denmektedir. Δ ve ε cebiri homomorfizmleri, sırasıyla μ ve η tasvirleri için verilen (2.1) denklemindeki (Ass) ve (Uni) özelliklerine dual olan özelliklere sahiptir. Yani

$$\begin{aligned} (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta &= (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta \quad (\text{coass}) \\ \mu \circ (\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta &= \text{id} = \mu \circ (\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta \quad (\text{counit}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

dır. Genel olarak, K üzerindeki bir lineer A uzayına, yukarıda tanımlanan μ, η, Δ lineer tasvirleriyle birlikte bir **K-kocebiri** (kısaca **kocebiri**) ve A lineer uzayına $\mu, \eta, \Delta, \varepsilon$

lineer tasvirleriyle birlikte bir **K-bicebir** (kısaca **bicebir**) denir. Ek olarak, $f \in A, x \in G$ için

$$S : A \rightarrow A, Sf(x) = f(x^{-1})$$

şeklinde tanımlanan ve

$$\mu \circ (\text{id} \otimes S)\Delta = \eta \circ \varepsilon = \mu \circ (S \otimes \text{id})\Delta \quad (2.3)$$

özellikliğini sağlayan bir S cebir antihomomorfizm (eş-ters) ile $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ altılısına bir **Hopf** cebiri denir. Bundan sonra, kısalığı bakımından bir Hopf cebiri için, $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ altılısını değil sadece A 'yı kullanacağız.

Eğer A bir Hopf cebiri ise, $A \otimes A$ 'daki çarpma

$$(X \otimes Y)(Z \otimes W) = (-1)^{\deg(Y)\deg(Z)}(XZ \otimes YW) \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\deg(f) = \begin{cases} 0, & f \text{ çift dereceden} \\ 1, & f \text{ tek dereceden} \end{cases} \quad (2.5)$$

şeklinde dir. Burada, tek ve çift koordinat fonksiyonlarının özelliği; çift koordinat fonksiyonları, tüm fonksiyonlarla komutatif; tek koordinat fonksiyonları ise tek olan fonksiyonlarla anti-komutatif, çift olanlarla komutatif olacaktır:

$$1) x\theta = \theta x \text{ ve } \theta_1\theta_2 = -\theta_2\theta_1$$

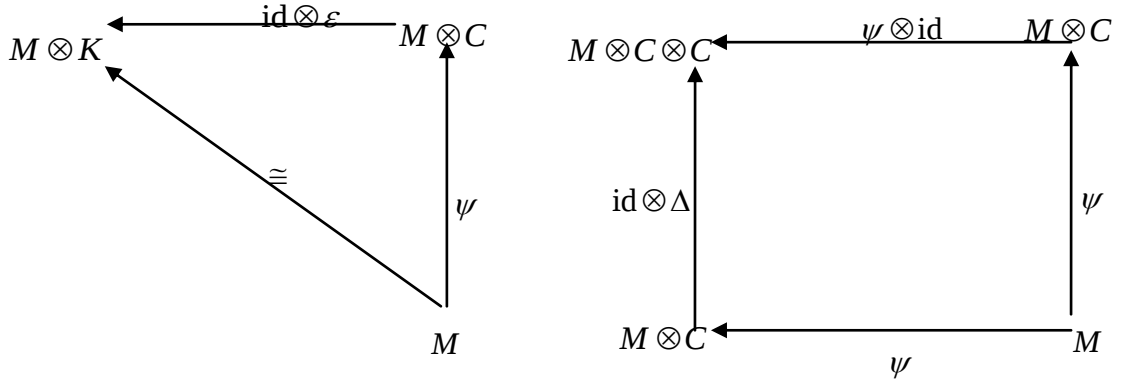
$$2) \theta \text{ koordinat fonksiyonu tek ise;}$$

$$\theta^2 = 0 \text{ 'dır.}$$

Tanım 2.7 C , bir kocebiri olsun. Eğer bir lineer M uzayı ve bir lineer

$$\Psi : M \rightarrow M \otimes C$$

tasviri için aşağıdaki diyagramlar komutatif ise (M, Ψ) ikilisine bir sağ C – komodül denir. Bir sol C – komodül de benzer şekilde tanımlanabilir.



Bir bimodülün tanımı için aşağıdaki açıklamalara ihtiyaç vardır:

B , bir bicebir ve M de

$$\varphi_M : M \otimes B \rightarrow M, \quad \varphi_M(m \otimes x) = mx$$

şeklinde tanımlanan yapı dönüşümüyle birlikte bir sağ B -modül olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \varphi_{M \otimes B} : (M \otimes B) \otimes B &\rightarrow M \otimes B, \\ \varphi_{M \otimes B}(m \otimes x \otimes y) &= \sum_{(y)} my_{(1)} \otimes xy_{(2)}, \quad m \otimes x \in M \otimes B \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan yapı dönüşümüyle birlikte, $M \otimes B$ de bir sağ B -modül olur. Buna ek olarak,

$$\Psi_M : M \rightarrow M \otimes B$$

K -lineer yapı dönüşümü ile birlikte M bir B -komodül ise,

$$\begin{aligned} \Psi_{M \otimes B} : M \otimes B &\rightarrow (M \otimes B) \otimes B, \\ \Psi_{M \otimes B}(m \otimes x) &= \sum_{(m)(x)} m_{(0)} \otimes x_{(1)} \otimes m_{(1)}x_{(2)}, \quad m \otimes x \in M \otimes B \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan K -lineer yapı dönüşümüyle birlikte $M \otimes B$ bir B -komodül olur.

Tanım 2.8 Eğer M , hem sağ B -modül ve hem de B -komodül olmak üzere aşağıdaki koşul sağlanırsa M 'ye bir **B -bimodül** denir:

- φ_M 'nin bir sağ B -komodül homomorfizmi olması için gerek ve yeter şart Ψ_M 'nin bir sağ B -modül homomorfizmi olmasıdır.

DIŞ DÜZLEM ÜZERİNE BİR q -DİFERANSİYEL HESAP

Dış düzlem üzerine iki-parametrelili bir diferansiyel hesap, Celik ve Arık tarafından [6] da verilmiştir. O çalışmada, Wess-Zumino tarafından geliştirilen teknik kullanılmıştır.

Bu bölümde, dış düzlem üzerine bir diferansiyel hesap kurulacaktır. Bu yapılırken, Celik tarafından [4] te verilen kovaryantlık tekniği takip edilmiştir. Dolayısıyla, [6] da bulunan sonuçlardan tamamen bağımsız yeni neticeler ortaya çıkmıştır.

3.1 Dış Düzlem ve Hopf Cebiri Yapısı

Burada kullanacağımız θ ve φ tek elemanlardır, yani çift elemanlarla komutatif ve kendi aralarında anti-komutatifler. Aynı zamanda kareleri sıfırdır.(Bu sayfa 7’de açıklanmıştır.)

Tanım 3.1 $k\{\theta, \varphi\}$ bir serbest cebir olsun. Dış düzlemi,

I_1 , $\theta\varphi + \varphi\theta$, θ^2 , φ^2 elemanlarıyla oluşturulmuş $k\{\theta, \varphi\}$ serbest cebirinin iki taraflı ideali olmak üzere,

$$k_1[\theta, \varphi] = k\{\theta, \varphi\} / I_1$$

bölüm cebiri olarak tanımlıyoruz. Daha açık olarak $k_1[\theta, \varphi]$, jeneratörleri

$$\theta\varphi + \varphi\theta = 0$$

$$\theta^2 = 0 = \varphi^2 \quad (3.1)$$

bağıntılarını sağlayan bir cebirdir.

Tanım 3.2 $k\{d\theta, d\varphi\}$ bir serbest cebir olsun. $k_q[d\theta, d\varphi]$ ile göstereceğimiz dual düzlem, $q \neq 0$ bir kompleks sayı olmak üzere;

$$d\theta \, d\varphi = q \, d\varphi \, d\theta \quad (3.2)$$

bağıntısı ile tanımlanmıştır.

Daha tam olarak,

dI_q , $d\theta \, d\varphi - q \, d\varphi \, d\theta$ elemanı ile oluşturulmuş $k\{d\theta, d\varphi\}$ serbest cebirinin iki taraflı ideali olmak üzere,

$$k\{d\theta, d\varphi\} / dI_q = k_q[d\theta, d\varphi]$$

şeklinde tanımlanır.

Burada θ ve φ nin diferansiyellerini, sırasıyla, kuantum düzlemin x ve y koordinat fonksiyonları olarak düşünebiliriz. [Kuantum düzlem ve onun geometrisi ile ilgili ayrıntılı bilgiler mesela Celik[4] te bulunabilir. Aşağıda ihtiyacımız olduğu kadar kısım yer almaktadır.] Bu durumda x ve y nin diferansiyellerini de θ ve φ olarak düşünebiliriz.

Jeneratörleri $\theta, \varphi, d\theta, d\varphi$ olan cebiri A ile gösterelim. Bu A cebiri üzerindeki bir cebir homomorfizmi olan $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ eş-çarpımının koordinat fonksiyonları ve diferansiyelleri üzerine etkisini

$$\Delta(\theta) = \theta \otimes d\theta + d\theta \otimes \theta$$

$$\Delta(\varphi) = \theta \otimes d\varphi + \varphi \otimes 1 + d\theta \otimes \varphi$$

$$\Delta(d\theta) = d\theta \otimes d\theta$$

$$\Delta(d\varphi) = d\theta \otimes d\varphi + d\varphi \otimes 1 \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlayalım.

Bu tasvir,

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta$$

şeklindeki koasosyatiflik özelliğine sahiptir, (3.1) ve (3.2) bağıntılarını korur.

A cebiri üzerindeki eş-birim ve eş-ters tasvirleri ise şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\varepsilon : A \rightarrow C,$$

$$\varepsilon(\theta)=0, \quad \varepsilon(\varphi)=0$$

$$\varepsilon(d\theta)=1, \quad \varepsilon(d\varphi)=0 \quad (3.4)$$

$$S : A \rightarrow A,$$

$$S(\theta) = -(d\theta)^{-1} \theta (d\theta)^{-1}, \quad S(\varphi) = (d\theta)^{-1} (\theta (d\theta)^{-1} d\varphi - \varphi)$$

$$S(d\theta) = (d\theta)^{-1}, \quad S(d\varphi) = -(d\theta)^{-1} d\varphi \quad (3.5)$$

Bu tasvirler,

$$\mu \circ (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id = \mu \circ (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta,$$

$$\mu \circ (S \otimes id) \circ \Delta = \varepsilon = \mu \circ (id \otimes S) \circ \Delta$$

özelliklerini sağlar, (3.1) ve (3.2) bağıntılarını korur. Böylece A cebirinin bir Hopf cebiri yapısına sahip olduğu söylenir.

3.2 Kuantum Düzlem ve Hopf Cebiri Yapısına Kısa Bir Bakış

Tanım 3.3 $k\{x, y\}$ bir serbest cebir olsun. Manin[2] kuantum düzlemi, x, y koordinat fonksiyonları için, $q \neq 0$ kompleks bir sayı olmak üzere;

$$xy = qyx \quad (3.6)$$

bağıntısı ile tanımlanmıştır.

Aslında, kuantum düzlem;

I_q , $xy - qyx$ elemanı ile oluşturulmuş, $k\{x, y\}$ serbest cebirinin iki taraflı ideali olmak üzere;

$$k\{x, y\} / I_q = k_q[x, y]$$

bölüm cebiri olarak tanımlanır.

Bu cebire birim elemanın eklenmesiyle elde edilen cebiri A ile göstereceğiz.

Aşağıda verilen kuantum düzlemin Hopf cebir yapısı ile ilgili bağıntılar Çelik[4] ten alınmıştır.

Kabul edelim ki x 'in tersi mevcut olsun, yani

$$xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$$

olsun. Bu durumda A cebiri üzerindeki bir cebir homomorfizmi olan $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ eş-çarpımının koordinat fonksiyonları üzerine etkisini şu şekilde tanımlarız:

$$\Delta(x) = x \otimes x$$

$$\Delta(y) = x \otimes y + y \otimes 1 \quad (3.7)$$

Bu tasvir,

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta \quad (3.8)$$

şeklindeki koasosyatiflik özelliğine sahiptir ve (3.6) bağıntılarını korur.

A cebiri üzerindeki eş-birim ve eş-ters tasvirleri ise şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\varepsilon : A \rightarrow C, \quad \varepsilon(x) = 1, \quad \varepsilon(y) = 0 \quad (3.9)$$

$$S : A \rightarrow A, \quad S(x) = x^{-1}, \quad S(y) = -x^{-1}y \quad (3.10)$$

Bu tasvirler,

$$\mu \circ (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id = \mu \circ (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta,$$

$$\mu \circ (S \otimes id) \circ \Delta = \varepsilon = \mu \circ (id \otimes S) \circ \Delta$$

özelliklerini sağlar ve (3.6) bağıntısını korur. Böylece A cebirinin bir Hopf cebiri yapısına sahip olduğu söylenir.

3.3 Diferansiyel Cebir

Bu kısımda amacımız, θ ve φ koordinat fonksiyonlarının, diferansiyelleri ile olan bağıntıları elde etmektir. Önce d diferansiyel operatörünün özelliklerini verelim. d operatörü, A 'nın jeneratörlerini diferansiyellerine dönüştüren bir operatördür:

$$d : A \rightarrow dA \quad a \rightarrow da, \quad a \in \{\theta, \varphi, d\theta, d\varphi\}.$$

Bu d operatörü;

$$d \wedge d =: d^2 = 0 \quad (\text{nilpotentlik}) \quad (3.11)$$

ve

$$d(fg) = d(f)g + (-1)^{\deg(f)} fd(g) \quad (\text{Leibniz}) \quad (3.12)$$

özelliklerine sahiptir. Burada $\deg(f)$, f fonksiyonunun derecesidir.

Önerme 3.4 θ ve φ koordinat fonksiyonları ile bunların diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntıları

$$\theta d\theta = qd\theta\theta$$

$$\theta d\varphi = qd\varphi\theta + (q-1)d\theta\varphi$$

$$\varphi d\theta = d\theta\varphi$$

$$\varphi d\varphi = qd\varphi\varphi \quad (3.13)$$

şeklindedir.

İspat: Sağlanması gereken, muhtemel komutasyon bağıntıları;

$$\theta d\theta = Ad\theta\theta$$

$$\theta d\varphi = F_{11}d\varphi\theta + F_{12}d\theta\varphi$$

$$\varphi d\theta = F_{21}d\theta\varphi + F_{22}d\varphi\theta$$

$$\varphi d\varphi = Bd\varphi\varphi \quad (3.14)$$

şeklindedir.

Buradaki A, B, F_{ij} katsayıları, muhtemelen q deformasyon parametresine bağlıdır ve onları belirleme işi komutatif olmayan diferansiyel hesabın kovaryantlık metodu kullanılarak yapılabilir (Çelik[4]).

Bunun için Δ 'yı (3.14)'deki her bir bağıntıya uyguluyoruz. Dördüncü bağıntıya uygulayınca,

$$\Delta(\varphi d\varphi - Bd\varphi\varphi) = 0$$

olduğundan, Δ 'nın bir cebir homomorfizmi olması gerçeğini kullanarak uygun bağıntılara ulaşabiliriz:

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi d\varphi) &= \Delta(\varphi) \Delta(d\varphi) \\ &= (\theta \otimes d\varphi + \varphi \otimes 1 + d\theta \otimes \varphi)(d\theta \otimes d\varphi + d\varphi \otimes 1) \\ &= \theta d\theta \otimes (d\varphi)^2 + \theta d\varphi \otimes d\varphi + \varphi d\theta \otimes d\varphi + \varphi d\varphi \otimes 1 + (d\theta)^2 \otimes \varphi d\varphi \\ &\quad + d\theta d\varphi \otimes \varphi \\ &= Ad\theta \otimes (d\varphi)^2 + F_{11}d\varphi \theta \otimes d\varphi + F_{12}d\theta \varphi \otimes d\varphi + F_{21}d\theta \varphi \otimes d\varphi \\ &\quad + F_{22}d\varphi \theta \otimes d\varphi + Bd\varphi \varphi \otimes 1 + (d\theta)^2 \otimes Bd\varphi \varphi + q d\varphi d\theta \otimes \varphi.\end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\Delta(d\varphi \varphi) &= \Delta(d\varphi) \Delta(\varphi) \\ &= (d\theta \otimes d\varphi + d\varphi \otimes 1)(\theta \otimes d\varphi + \varphi \otimes 1 + d\theta \otimes \varphi) \\ &= d\theta \otimes (d\varphi)^2 + d\theta \varphi \otimes d\varphi + (d\theta)^2 \otimes d\varphi \varphi + d\varphi \theta \otimes d\varphi + d\varphi \varphi \otimes 1 + \\ &\quad + d\varphi d\theta \otimes \varphi.\end{aligned}$$

Bulduğumuz ifadeleri $\Delta(\varphi d\varphi - Bd\varphi\varphi) = 0$ eşitliğinde yerine yazdığımızda şu sonuçlara ulaşırız:

$$F_{11} + F_{22} = B; \quad F_{12} + F_{21} = B; \quad A = B; \quad B = q.$$

Benzer şekilde, $\Delta(\theta d\theta - Ad\theta\theta) = 0$ eşitliğinden yeni bir şey çıkmaz.

Aynı şekilde, $\Delta(\theta\varphi + \varphi\theta) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\Delta(\theta\varphi) &= \Delta(\theta)\Delta(\varphi) \\
&= (\theta \otimes d\theta + d\theta \otimes \theta)(\theta \otimes d\varphi + \varphi \otimes 1 + d\theta \otimes \varphi) \\
&= \theta^2 \otimes d\theta d\varphi + \theta\varphi \otimes d\theta + \theta d\theta \otimes d\theta\varphi - d\theta\theta \otimes \theta d\varphi - d\theta\varphi \otimes \theta + (d\theta)^2 \otimes \theta\varphi \\
&= -\varphi\theta \otimes d\theta + Ad\theta\theta \otimes d\theta\varphi - d\theta\theta \otimes F_{11}d\varphi\theta - d\theta\theta \otimes F_{12}d\theta\varphi - d\theta\varphi \otimes \theta \\
&\quad - (d\theta)^2 \otimes \varphi\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(\varphi\theta) &= \Delta(\varphi)\Delta(\theta) \\
&= (\theta \otimes d\varphi + \varphi \otimes 1 + d\theta \otimes \varphi)(\theta \otimes d\theta + d\theta \otimes \theta) \\
&= \theta^2 \otimes d\varphi d\theta + \theta d\theta \otimes d\varphi\theta + \varphi\theta \otimes d\theta + \varphi d\theta \otimes \theta - d\theta\theta \otimes \varphi d\theta + (d\theta)^2 \otimes \varphi\theta \\
&= Ad\theta\theta \otimes d\varphi\theta + \varphi\theta \otimes d\theta + F_{21}d\theta\varphi \otimes \theta + F_{22}d\varphi\theta \otimes \theta - d\theta\theta \otimes F_{21}d\theta\varphi \\
&\quad - d\theta\theta \otimes F_{22}d\varphi\theta + (d\theta)^2 \otimes \varphi\theta
\end{aligned}$$

olur ve buradan,

$$\begin{aligned}
\Delta(\theta\varphi + \varphi\theta) &= \Delta(\theta)\Delta(\varphi) + \Delta(\varphi)\Delta(\theta) \\
&= -\varphi\theta \otimes d\theta + Ad\theta\theta \otimes d\theta\varphi - F_{11}d\theta\theta \otimes d\varphi\theta - F_{12}d\theta\theta \otimes d\theta\varphi - d\theta\varphi \otimes \theta \\
&\quad - (d\theta)^2 \otimes \varphi\theta + Ad\theta\theta \otimes d\varphi\theta + \varphi\theta \otimes d\theta + F_{21}d\theta\varphi \otimes \theta + F_{22}d\varphi\theta \otimes \theta \\
&\quad - F_{21}d\theta\theta \otimes d\theta\varphi - F_{22}d\theta\theta \otimes d\varphi\theta + (d\theta)^2 \otimes \varphi\theta \\
&= (A - F_{12} - F_{21})d\theta\theta \otimes d\theta\varphi + (A - F_{11} - F_{22})d\theta\theta \otimes d\varphi\theta + (-d\theta\varphi + F_{21}d\theta\varphi \\
&\quad + F_{22}d\varphi\theta) \otimes \theta
\end{aligned}$$

olur ve şu denklemlere ulaşırız:

$$F_{12} + F_{21} = A; \quad F_{11} + F_{22} = A; \quad F_{21} = 1; \quad F_{22} = 0.$$

Burada $A = B = q$ olduğundan;

$$F_{11} = q; \quad F_{12} = q - 1; \quad F_{21} = 1; \quad F_{22} = 0; \quad A = q; \quad B = q$$

şeklinde elde ederiz. Bulduğumuz katsayıları (3.14) bağıntılarında yerine yazarsak istediğimiz bağıntılara ulaşmış oluruz.

3.4 Kısmi Türevler Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, θ ve φ koordinat fonksiyonlarının kısmi türevlerinin; koordinat fonksiyonları ile olan komutasyon bağıntıları, koordinat fonksiyonlarının diferansiyelleri ile olan komutasyon bağıntıları ve kısmi türevlerin kendi aralarında sağlanan komutasyon bağıntıları ortaya konacaktır.

İlk olarak, koordinat fonksiyonları ile onların kısmi türevleri arasındaki bağıntıları elde edeceğiz.

Önerme 3.5 Kısmi türevler ile koordinat fonksiyonları arasındaki bağıntılar

$$\begin{aligned}\partial_{\theta} \theta &= 1 - q\theta \partial_{\theta} + (1-q)\varphi \partial_{\varphi} \\ \partial_{\theta} \varphi &= -\varphi \partial_{\theta} \\ \partial_{\varphi} \theta &= -q\theta \partial_{\varphi} \\ \partial_{\varphi} \varphi &= 1 - q\varphi \partial_{\varphi}\end{aligned}\tag{3.15}$$

şeklindedir.

İspat: f , A cebiri üzerinde tanımlanmış keyfi bir fonksiyon olsun. d dış türev operatörü,

$$df = (d\theta \partial_{\theta} + d\varphi \partial_{\varphi}) f\tag{3.16}$$

şeklinde tanımlanır. Kısmi türevlerin koordinat fonksiyonlarıyla bağıntılarını bulabilmek için (3.16)'da f yerine sırasıyla θ ve φ yazarak Leibniz kuralını uyguluyoruz.

İşlemin bir tanesini açık olarak gösterelim:

$$\begin{aligned}d(\theta) &= (d\theta)f - \theta(df) \quad (\theta \text{ tek eleman olduğu için (-) geldi}) \\ &= (d\theta)f - \theta (d\theta \partial_{\theta} + d\varphi \partial_{\varphi}) f \\ &= (d\theta)f - (qd\theta \theta \partial_{\theta} + [qd\varphi\theta + (q-1)d\theta\varphi] \partial_{\varphi}) f\end{aligned}$$

$$= [d\theta[1 - q\theta \partial_\theta + (1-q)\varphi d\varphi] - d\varphi(q\theta \partial_\varphi)] f \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} d(\theta f) &= (d\theta \partial_\theta + d\varphi \partial_\varphi)(\theta f) \\ &= (d\theta \partial_\theta \theta + d\varphi \partial_\varphi \theta) f \end{aligned} \quad (3.18)$$

(3.17) ve (3.18) eşitliklerinin son hallerinde diferansiyellerin katsayılarını eşitleyerek,

$$\partial_\theta \theta = 1 - q\theta \partial_\theta + (1-q)\varphi d\varphi$$

$$\partial_\varphi \theta = -q\theta \partial_\varphi$$

buluruz.

Yukarıdaki işlemlerde (3.13) bağıntıları kullanılmıştır.

Benzer işlemler φf için de tekrarlanarak, kısmi türevlerin koordinat fonksiyonları ile değişimleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\partial_\theta \theta = 1 - q\theta \partial_\theta + (1-q)\varphi \partial_\varphi$$

$$\partial_\theta \varphi = -\varphi \partial_\theta$$

$$\partial_\varphi \theta = -q\theta \partial_\varphi$$

$$\partial_\varphi \varphi = 1 - q\varphi \partial_\varphi$$

Sonuç 3.6 Kısmi türevlerin kendi aralarındaki bağıntılar

$$\partial_\theta^2 = 0 = \partial_\varphi^2$$

$$\partial_\theta \partial_\varphi = -q \partial_\varphi \partial_\theta$$

şeklindedir.

İspat: $d^2 = 0$ olması şartından,

$$df = (d\theta \partial_\theta + d\varphi \partial_\varphi) f$$

$$d^2 f = (d^2 \theta \partial_\theta + d\theta d\partial_\theta + d^2 \varphi d\varphi + d\varphi d\partial_\varphi) f$$

$$d^2 f = [d\theta(d\theta \partial_\theta + d\varphi \partial_\varphi) \partial_\theta + d\varphi(d\theta \partial_\theta + d\varphi \partial_\varphi) \partial_\varphi] f$$

$$0 = (d\theta)^2 \partial_\theta^2 + d\varphi d\theta (q \partial_\varphi \partial_\theta + \partial_\theta \partial_\varphi) + (d\varphi)^2 \partial_\varphi^2$$

dir. Buradan,

$$\partial_\theta^2 = 0 = \partial_\varphi^2; \quad \partial_\theta \partial_\varphi = -q \partial_\varphi \partial_\theta$$

bulunur.

Önerme 3.7 Kısmi türevlerin diferansiyellerle bağıntıları

$$\partial_\theta d\theta = q^{-1} d\theta \partial_\theta$$

$$\partial_\theta d\varphi = q^{-1} d\varphi \partial_\theta$$

$$\partial_\varphi d\theta = d\theta \partial_\varphi$$

$$\partial_\varphi d\varphi = q^{-1} d\varphi \partial_\varphi + (q^{-1} - 1) d\theta \partial_\theta \quad (3.19)$$

şeklindedir.

İspat: Kısmi türevlerin diferansiyellerle bağıntıları

$$\partial_\theta d\theta = A_{11} d\theta \partial_\theta + A_{12} d\varphi \partial_\varphi$$

$$\partial_\theta d\varphi = A_{21} d\varphi \partial_\theta + A_{22} d\theta \partial_\varphi$$

$$\partial_\varphi d\theta = B_{11} d\theta \partial_\varphi + B_{12} d\varphi \partial_\theta$$

$$\partial_\varphi d\varphi = B_{21} d\varphi \partial_\varphi + B_{22} d\theta \partial_\theta$$

bağıntı sisteminde A_{ij} ve B_{ij} katsayılarının belirlenmesiyle bulunur. Bu katsayıları belirlemek için ∂_θ ve ∂_φ kısmi türev operatörlerini (3.13) bağıntılarına uyguluyoruz. Örneğin,

$$\theta d\theta - q d\theta \partial_\theta = 0 \Rightarrow \partial_\theta (\theta d\theta - q d\theta \partial_\theta) = 0$$

$$d\theta - q (\partial_\theta d\theta) \theta = 0$$

$$d\theta - q (A_{11} d\theta \partial_\theta + A_{12} d\varphi \partial_\varphi) \theta = 0$$

$$d\theta (1 - q A_{11}) = 0$$

$$\Rightarrow A_{11} = q^{-1}$$

$$\theta d\theta - qd\theta\theta = 0 \Rightarrow \partial_\varphi (\theta d\theta - qd\theta\theta) = 0$$

$$\partial_\varphi \theta d\theta - q\partial_\varphi d\theta \theta = 0$$

$$-q (B_{11}d\theta \partial_\varphi + B_{12}d\varphi \partial_\theta) \theta = 0$$

$$-qB_{12}d\varphi\theta = 0$$

$$\Rightarrow B_{12} = 0$$

olarak buluruz. Benzer işlemlerle diğer katsayılar da tespit edilerek kısmi türev operatörlerinin, diferansiyellerle değişimlerinin

$$\partial_\theta d\theta = q^{-1}d\theta \partial_\theta$$

$$\partial_\theta d\varphi = q^{-1}d\varphi \partial_\theta$$

$$\partial_\varphi d\theta = d\theta \partial_\varphi$$

$$\partial_\varphi d\varphi = q^{-1}d\varphi \partial_\varphi + (q^{-1} - 1)d\theta \partial_\theta$$

şeklinde olduğu görülür.

BÖLÜM 4

$\mathfrak{R}$ -MATRİS YAKLAŞIMI

Bu bölümde, önceki bölümlerde bulduğumuz bağıntıları koruyan bir $\mathfrak{R}$ -matrisi elde edilecektir.

$Y = \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$ olsun. $dY = \begin{pmatrix} d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix}$ aldığımızda,

$$Y \otimes dY = \mathfrak{R} dY \otimes Y$$

eşitliğini sağlayan uygun $\mathfrak{R}$ matrisini bulmak istiyoruz. Burada

$$Y \otimes dY = \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta d\theta \\ \theta d\varphi \\ \varphi d\theta \\ \varphi d\varphi \end{pmatrix},$$

$$dY \otimes Y = \begin{pmatrix} d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\theta\theta \\ d\theta\varphi \\ d\varphi\theta \\ d\varphi\varphi \end{pmatrix},$$

ve

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{11} & F_{12} & 0 \\ 0 & F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$Y \otimes dY = \Re \, dY \otimes Y$ eşitliği için bulduğumuz matrisleri yerine yazarsak,

$$\begin{pmatrix} \theta d\theta \\ \theta d\varphi \\ \varphi d\theta \\ \varphi d\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{11} & F_{12} & 0 \\ 0 & F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta\theta \\ d\theta\varphi \\ d\varphi\theta \\ d\varphi\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \theta d\theta \\ \theta d\varphi \\ \varphi d\theta \\ \varphi d\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ad\theta\theta \\ F_{11}d\theta\varphi + F_{12}d\varphi\theta \\ F_{21}d\theta\varphi + F_{22}d\varphi\theta \\ Bd\varphi\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \theta d\theta = Ad\theta\theta$$

$$\theta d\varphi = F_{11}d\theta\varphi + F_{12}d\varphi\theta$$

$$\varphi d\theta = F_{21}d\theta\varphi + F_{22}d\varphi\theta$$

$$\varphi d\varphi = Bd\varphi\varphi$$

olduğu görülür. (3.13) bağıntılarından,

$$A = q,$$

$$F_{11} = q - 1, \quad F_{12} = q$$

$$F_{21} = 1, \quad F_{22} = 0$$

$$B = q$$

dur.

Bu durumda $\Re$ matrisi,

$$\Re = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q-1 & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$\theta^1 = \theta$, $\theta^2 = \varphi$, $\partial_1 = \partial_\theta$, $\partial_2 = \partial_\varphi$ ve $\mathfrak{R}$ matrisinin tersi

$$\mathfrak{R}^{-1} = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q^{-1} & q^{-1} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

sırasıyla koordinat fonksiyonları arasındaki bağıntıları, koordinat fonksiyonları ile diferansiyelleri arasındaki bağıntıları, koordinat fonksiyonları ve kısmi türevleri arasındaki bağıntıları, koordinat fonksiyonlarının diferansiyelleri ve kısmi türevleri arasındaki bağıntıları, kısmi türevlerin kendi aralarındaki bağıntıları $\mathfrak{R}$ matrisi ile şu şekilde formülize edebiliriz:

$$\theta^i \theta^j = -\mathfrak{R}_{kl}^{ij} \theta^k \theta^l$$

$$\theta^i d\theta^j = \mathfrak{R}_{kl}^{ij} d\theta^k \theta^l$$

$$\partial_i \theta^j = \delta_i^j - \mathfrak{R}_{il}^{jk} \theta^l \partial_k$$

$$\partial_i d\theta^j = (\mathfrak{R}^{-1})_{il}^{jk} d\theta^l \partial_k$$

$$\partial_i \partial_j = -\mathfrak{R}_{ji}^{kl} \partial_l \partial_k$$

Not 2: Her bir bağıntıda, tekrarlanan indis(ler) üzerinden toplam alınmaktadır. Mesela,

$$\theta^i \theta^j = -\sum_{k,l=1}^2 \mathfrak{R}_{kl}^{ij} \theta^k \theta^l \text{ dir.}$$

BÖLÜM 5

BİR $GL_q(2)$ KUANTUM GRUBU

Bu bölümde, Bölüm 3’de ortaya konan q-diferansiyel hesaba etki eden q-simetri grubu elde edilecektir.

5.1 Matris Elemanları Arasındaki Bağlılıklar

Şimdi T , 2×2 tipinde bir matris yani

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ olsun.}$$

T matrisinin matris elemanları arasındaki komutasyon bağıntılarını bulmak için

$\Re$ -matris yaklaşımını kullanacağız. Bunu;

$$\Re T_1 T_2 = T_1 T_2 \Re \quad (5.1)$$

kuantum-grup bağıntısı ile yapacağız.

Önerme 5.1 T nin matris elemanları arasında sağlanan q-komutasyon bağıntıları

$$ab = ba$$

$$ac = qca$$

$$bc = qcb$$

$$bd = qdb$$

$$cd = dc$$

$$ad - da = (q - 1)cb = (1 - q^{-1})bc \quad (5.2)$$

dir.

İspat: Yukarıdaki T matrisi ile

$$T_1 = T \otimes I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

ve

$$T_2 = I \otimes T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

diyelim. Bu takdirde,

$$T_1 T_2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ba & b^2 \\ ac & ad & bc & bd \\ ca & cb & da & db \\ c^2 & cd & dc & d^2 \end{pmatrix}$$

olup,

$$\begin{aligned} RT_1 T_2 &= \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q-1 & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & ab & ba & b^2 \\ ac & ad & bc & bd \\ ca & cb & da & db \\ c^2 & cd & dc & d^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} qa^2 & qab & qba & qb^2 \\ (q-1)ac + qca & (q-1)ad + qcb & (q-1)bc + qda & (q-1)bd + qdb \\ ac & ad & bc & bd \\ qc^2 & qcd & qdc & qd^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
T_1 T_2 R &= \begin{pmatrix} a^2 & ab & ba & b^2 \\ ac & ad & bc & bd \\ ca & cb & da & db \\ c^2 & cd & dc & d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q-1 & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} qa^2 & (q-1)ab + ba & qab & qb^2 \\ qac & (q-1)ad + bc & qad & qbd \\ qca & (q-1)cb + da & qcb & qdb \\ qc^2 & (q-1)cd + dc & qcd & qd^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

dir. Şimdi, (5.1) eşitliğini kullanırsak, T nin matris elemanları arasındaki q -komutasyon bağıntılarını buluruz.

5.2 Kuantum T Matrisinin Determinantı ve Tersi

T matrisinin determinantını Gauss ayrışımını kullanarak,

$$T = T_A T_D T_U$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

den, (5.2) bağıntılarıyla

$$\det_q(T) = a(d - ca^{-1}b) = ad - aca^{-1}b$$

$$= ad - qcb$$

$$= da + (1 - q^{-1})bc - bc$$

$$= da - q^{-1}bc$$

$$\det_q(T) = ad - qcb$$

$$= da - q^{-1}bc \tag{5.3}$$

şeklinde buluruz.

T matrisinin tersini bulmak için $TT^{-1} = I = T^{-1}T$ eşitliğini kullanırız. Eğer

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ dersek,}$$

$$TT^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA+bC & aB+bD \\ cA+dC & cB+dD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. Ortaya çıkan denklem sistemini çözünce

$$A = \det_q^{-1}(T)d, \quad B = -\det_q^{-1}(T)q^{-1}b, \quad C = -\det_q^{-1}(T)qc, \quad D = \det_q^{-1}(T)a$$

elde ederiz. Böylece, $\det_q(T) \neq 0$ iken

$$T^{-1} = \frac{1}{\det_q(T)} \begin{pmatrix} d & -q^{-1}b \\ -qc & a \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

bulunur ve $T^{-1}T = I$ eşitliğini sağlar.

Önerme 5.2 $\det_q(T)$ nin, T nin matris elemanları ile komutatıflığı şu şekildedir:

$$a \det_q(T) = \det_q(T)a$$

$$b \det_q(T) = q \det_q(T)b$$

$$c \det_q(T) = q^{-1} \det_q(T)c$$

$$d \det_q(T) = \det_q(T)d \quad (5.5)$$

İspat: İşlemler (5.2) bağıntıları kullanılarak şu şekilde yapılır:

$$a \det_q(T) = a(ad - qcb)$$

$$= aad - qacb$$

$$= a(da + (q-1)cb) - qacb$$

$$= ada + qacb - acb - qacb$$

$$= ada - qcba$$

$$= (ad - qcb)a = \det_q(T)a$$

$$b \det_q(T) = b(ad - qcb)$$

$$= bad - qbcba$$

$$\begin{aligned}
&= abd - qbc b \\
&= qadb - q^2 cbb \\
&= q(ad - qcb)b = q \det_q(T) b
\end{aligned}$$

Diğerleri de benzer şekilde bulunur.

Tanım 5.3 Yukarıda determinantı, tersi ve elemanları arasındaki komutasyon bağıntıları verilen T matrislerinin oluşturduğu grup bir kuantum gruptur.

Önerme 5.4 Gerekli işlemleri yaptığımızda (3.1), (3.2) ve (3.13) bağıntıları

$$\begin{aligned}
\theta &\rightarrow a\theta + b\varphi, & d\theta &\rightarrow ad\theta + bd\varphi \\
\varphi &\rightarrow c\theta + d\varphi, & d\varphi &\rightarrow cd\theta + dd\varphi
\end{aligned} \tag{5.6}$$

dönüşümleri altında sağlanır.

İşlemlerde (5.2) bağıntıları kullanılır.

İspat: Dönüşümlerin birkaç bağıntı için sağlandığını gösterelim:

$$\begin{aligned}
\theta' \varphi' + \varphi' \theta' &= (a\theta + b\varphi)(c\theta + d\varphi) + (c\theta + d\varphi)(a\theta + b\varphi) \\
&= ac\theta^2 + ad\theta\varphi + bc\varphi\theta + bd\varphi^2 + ca\theta^2 + cb\theta\varphi + da\varphi\theta + db\varphi^2 \\
&= (ad - da)\theta\varphi + (cb - bc)\theta\varphi \\
&= (ad - da)\theta\varphi + [(1-q)cb]\theta\varphi, \quad (ad - da = (q-1)cb) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\theta' d\theta' = qd\theta' \theta'$$

$$\begin{aligned}
\theta' d\theta' &= (a\theta + b\varphi)(ad\theta + bd\varphi) \\
&= a^2\theta d\theta + ab\theta d\varphi + ba\varphi d\theta + b^2\varphi d\varphi \\
&= qa^2d\theta\theta + ab(qd\varphi\theta + (q-1)d\theta\varphi) + abd\theta\varphi + qb^2d\varphi\varphi \\
qd\theta' \theta' &= (ad\theta + bd\varphi)(a\theta + b\varphi) \\
&= qa^2d\theta\theta + qabd\theta\varphi + qbad\varphi\theta + qb^2d\varphi\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta' d\theta' - qd\theta' \theta' &= qa^2 d\theta\theta + ab (qd\varphi \theta + (q-1)d\theta \varphi) + abd\theta\varphi + qb^2 d\varphi\varphi \\
&\quad - qa^2 d\theta\theta - qabd\theta\varphi - qabd\varphi\theta - qb^2 d\varphi\varphi \\
&= 0
\end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\theta^2 &= 0 = \varphi^2 \\
d\theta d\varphi &= q d\varphi d\theta \\
\theta d\varphi &= qd\varphi \theta + (q-1)d\theta \varphi \\
\varphi d\theta &= d\theta \varphi \\
\varphi d\varphi &= qd\varphi \varphi
\end{aligned}$$

bağıntılarının da (5.6) dönüşümlerinin altında sağlandığını gösterebiliriz.

Önerme 5.5 (5.4) eşitliğindeki T^{-1} matrisi için

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

yazılırsa, T^{-1} matrisinin matris elemanları

$$\begin{aligned}
a'b' &= b'a' \\
a'c' &= q^{-1}c'a' \\
b'c' &= q^{-1}c'b' \\
b'd' &= q^{-1}d'b' \\
c'd' &= d'c' \\
a'd' &= d'a' - (q-1)b'c'
\end{aligned} \tag{5.7}$$

bağıntılarını sağlar.

İspat: $T^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \frac{1}{\det_q(T)} \begin{pmatrix} d & -q^{-1}b \\ -qc & a \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
a'b' &= \det_q^{-1}(T)d \det_q^{-1}(T)(-q^{-1}b) \\
&= \det_q^{-1}(T)\det_q^{-1}(T)(-q^{-1}db) \\
&= \det_q^{-1}(T)\det_q^{-1}(T)(-q^{-1}q^{-1}bd) \\
&= \det_q^{-1}(T)(-q^{-1}b)\det_q^{-1}(T)(d) \\
&= b'a'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c'd' &= -\det_q^{-1}(T)qc(\det_q^{-1}(T)a) \\
&= -\det_q^{-1}(T)qq\det_q^{-1}(T)ca \\
&= -\det_q^{-1}(T)qq\det_q^{-1}(T)q^{-1}ac \\
&= \det_q^{-1}(T)a\det_q^{-1}(T)(-qc) \\
&= d'c'
\end{aligned}$$

bulunur.

Diğerleri de benzer şekilde yapılır. İşlemlerimizde (5.2) ve (5.5) bağıntıları kullanılır.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada dış düzlemin bileşenlerinin lineer koordinat fonksiyonu olduğu kabul edilerek, diferansiyelleri ve kısmi türevleri ile olan bağıntıları bulundu. Bunun için Δ eş-çarpımından yararlanıldı. Daha sonra elde edilen bağıntıların basit formüllerle ifade edilebileceği bir $\mathfrak{R}$ matrisi bulundu. Son olarak elde ettiğimiz diferansiyel hesaba etki eden yeni bir kuantum grubu bulundu.

KAYNAKLAR

- [1] Drinfeld, V.G., (1986). ‘Quantum Groups’, Proc. ICM, Berkeley, 798-820
- [2] Manin, Yu.I., (1988). ‘Quantum Groups and Noncommutative Geometry, Montreal University, Montreal.
- [3] Wess, J. ve Zumino, B., (1990). “Covariant Differential Calculus on the Quantum Hyperplane”, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl., 18:302-312
- [4] Celik, S. ve Celik, S.A., (2000). “Differential Geometry of the q-Plane”, Int. J. Modern Phys., A, 15:9695-9701.
- [5] Celik, S. ve Celik, S.A., (2002). “Differential Geometry of the Z_3 -Graded Quantum Superplane”, Journal of Physics, A, 35:4257-4268.
- [6] Celik, S., Celik, S.A. ve Arık, M., (1998). ‘Comment on the Differential Calculus on the Quantum Exterior Plane, Modern Physics Letters A, Vol. 13, No. 20, 1645-1651
- [7] Woronowicz, S.L., (1989). “Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups (Quantum Groups)”, Communications in Mathematical Physics, 122:125-170.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	Merve YENİGÜN
Doğum Tarihi ve Yeri	17.04.1987
Yabancı Dili	İngilizce
E-posta	merrwe87@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2010
Lise	Fen Bilimleri	Kabataş Erkek(Anadolu) Lisesi	2005

Bildiri

1.2011-YTÜ	International Conference on Applied Analysis and Algebra, ‘On Fuzzy Interior Γ -Hyperideals of Γ -Semihypergroups’
------------	--