

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

MERVE TUNÇARSLAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. ADEM CENGİZ ÇEVİKEL**

İSTANBUL, 2012

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

Merve TUNÇARSLAN tarafından hazırlanan tez çalışması 06.08.2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Adem Cengiz ÇEVİKEL

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Yrd. Doç. Dr. Adem Cengiz ÇEVİKEL

Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Selmahan SELİM

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

Yıldız Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Fizik ve mühendislik uygulamalarında zaman zaman bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında olan denklemleriyle karşılaşılır. Bu tür denklemlere integral denklemler denir. Diferansiyel denklemler ise, bilinmeyen fonksiyonun değişik türevlerinden oluşurlar. Türev, bir fonksiyonun bir nokta ve hemen yakınındaki değerleri kullanarak bulunduğundan, diferansiyel denklemler lokal (yerel) denklemlerdir.

Bu çalışmadaki amaç, daha önce Volterra ve Fredholm integral denklemler için verilen Taylor polinom yöntemini lineer değişken katsayılı Fredholm integral denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri için uygulamak ve önemli özelliklerini ortaya çıkarmaktır. Yöntem; sistemleri bir matris denkleme dönüştürmeye dayanmaktadır. Bu matris denklem bilinmeyen Taylor katsayılarından oluşan bir lineer cebirsel sisteme karşılık gelir. Böylece cebirsel sistemin çözümünden bulunan Taylor katsayıları kullanılarak verilen integral denklem sisteminin sonlu Taylor seri formunda yaklaşık çözümü elde edilmektedir. Daha sonra yarı-analitik çözüm yöntemlerinden homotopi pertürbasyon yöntemi ve varyasyonel iterasyon yöntemi tanıtılmış ve bu yöntemlerin Volterra integral denklemlerine uygulamaları incelenmiştir. Daha önceki çalışmalarda farklı yöntemler ile çözülen problemlere yarı-analitik yöntemler uygulanmış ve yöntemlerin kapasiteleri araştırılmıştır. Ayrıca bu çalışmada, bazı problemlere varyasyonel iterasyon ve homotopi pertürbasyon yöntemleri uygulanmış ve problemlerin tam çözümleri elde edilmiştir.

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını esirgemeyen, devamlı yardımını gördüğüm değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Adem Cengiz ÇEVİKEL'e ayrıca bana daima destek olan eşim Ahmet KAYA'ya ve her sıkıntıda yanımda olan sevgili abim Fatih TUNÇARSLAN' a teşekkürü bir borç bilirim.

Temmuz, 2012

Merve TUNÇARSLAN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Bulgular.....	2
BÖLÜM 2	
İNTEGRAL DENKLEMLER	4
2.1 İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması	4
2.1.1 Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler	4
2.1.2 Singüler ve Singüler Olmayan Lineer İntegral Denklemler.....	5
2.1.3 İntegral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması	5
2.1.4 Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler	6
2.1.5 Volterra ve Fredholm İntegral Denklemler	7
2.1.6 Özel Tipte İntegral Denklemler	8
2.1.7 Parametrelİ İntegral Denklemler	9
2.2 İntegral Denklemlerle Diferansiyel Denklemler Arasındaki İlişki.....	9
2.2.1 Diferansiyel Denklemlerin İntegral Denklemlere Dönüştürülmesi....	10
2.2.2 İntegral Denklemlerin Diferansiyel Denklemlere Dönüştürülmesi....	16
BÖLÜM 3	
TAYLOR SERİSİ YARDIMIYLA İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ	18
3.1 Fredholm İntegral Denklemlerinin Taylor Serisi Yardımıyla Yaklaşık Çözümü	18
3.2 Volterra İntegral Denklemlerin Taylor Serisi İle Yaklaşık Çözümü.....	24

BÖLÜM 4

HOMOTOPİ PERTÜRBASYON YÖNTEMİ İLE İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ	30
4.1 Homotopi Pertürbasyon Yöntemi	30
4.1.1 Lineer Volterra İntegral Denklemlerinin Homotopi Pertürbasyon Yöntemi İle Çözümü	31
4.1.2 Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemlerinin Homotopi Pertürbasyon Yöntemi ile Çözümü	34

BÖLÜM 5

VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİ İLE İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ	38
5.1 Varyasyonel İterasyon Yöntemi	38
5.1.1 Volterra İntegral Denklemlerinin Varyasyonel İterasyon Yöntemi ile Çözümü	39

BÖLÜM 6

YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ İÇİN ÖRNEKLER	42
---	----

BÖLÜM 7

SONUÇ ve ÖNERİLER	54
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ	58

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{Z}$	Tam sayılar
$\sum$	Nitelik indeksi
$\frac{dy}{dx}$	y'nin x'e göre birinci mertebeden türevi
$\frac{d^n y}{dx^n}$	y'nin x'e göre n. mertebeden türevi
$\frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n}$	K(x,t) fonksiyonunun x'e göre n. mertebeden kısmi türevi
$ T $	T'nin determinanı
$\int$	İntegral
$\int \dots (n) \dots \int$	Katlı integralde, (n) katlılık mertebesi

İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

Merve TUNÇARSLAN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Adem Cengiz ÇEVİKEL

Bilindiği gibi integral denklemlerin teori ve uygulamaları, uygulamalı matematikte önemli bir yere sahiptir. Birçok fiziksel olgu integral denklemlerin çeşitli tipleriyle modellenebilir. Bu çalışmada integral denklemlerin bazı nümerik ve yarı-analitik çözüm yöntemleri ele alınmaktadır.

Bu tezde, ilk olarak integral denklemlerin tarihi gelişimi ve özellikleri verildikten sonra, R. P. KANWAL ve K. C. LIU [1] 'nın yaptıkları çalışma ile M. SEZER [2]'in makalesi esas alınıp, bu çalışmalarda verilen metot lineer değişken katsayılı Fredholm integral denklemlere uygulanmıştır.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde konuya giriş yapılmıştır.

İkinci bölümde konu için gerekli temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde lineer değişken katsayılı Fredholm integral denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunması için bir yöntem verilmiştir.

Dördüncü bölümde daha önce çeşitli yöntemler ile çözümü elde edilen integral denklemlere yarı-analitik yöntem olan homotopi pertürbasyon yöntemi uygulanmış ve tam çözümler bulunmuştur.

Beşinci bölümde daha önce çeşitli yöntemler ile çözümü elde edilen integral denklemlere yarı-analitik yöntem olan varyasyonel iterasyon yöntemi uygulanmış ve tam çözümler elde edilmiştir.

Son bölümde ise homotopi pertürbasyon ve varyasyonel iterasyon yöntemlerini anlamak için örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fredholm integral denklem sistemleri, İntegral denklemler, Taylor polinom ve serileri, Diferansiyel denklemler.

APPROXIMATE SOLUTIONS OF INTEGRAL EQUATIONS

Merve TUNÇARSLAN

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Assist. Prof. Dr. Adem ÇEVİKEL

It is well known that the theory and applications of the integral equations have an important role in applied mathematics. Many physical phenomenon can be modelled by various types of integral equations. This thesis is concerned with some numeric and semi-analytic methods for

solving integral equations.

In the present thesis the historical development of integral equations are given firstly. Then the method which was studied in a paper of KANWAL and K. C. LIU [1] and a paper of M. SEZER [2] , is applied to the linear Fredholm integral equation systems with variable coefficients.

This thesis consists of sixth chapters.

In the first chapter subject is introduced.

In the second chapter the basic concepts are given which are necessary for the subject.

In the third chapter, it is investigated a Taylor polynomial solutions of high order lineer Fredholm integral equations with variable coefficients which is given for integral equations.

In the fourth chapter, some well known numeric and semi-analytic methods for Volterra integral equations have been given and the capacity of the methods have been investigated by the considered examples. The semianalytic methods (homotopy

perturbation) have been applied to the several integral equations that solved by different methods and then exact solutions have been found.

In the fifth chapter, some well known numeric and semi-analytic methods for Volterra integral equations have been given and the capacity of the methods have been investigated by the considered examples. The semianalytic methods (variational iteration) has been applied to the several integral equations that solved by different methods and then exact solutions have been obtained.

In the final chapter, some of examples have been given in order to understand the homotopy perturbation and variational iteration methods.

Key words: Fredholm integral equation systems, Integral equations, Taylor polynomials and series, Differential equations.

1.1 Literatür Özeti

İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanmakla birlikte, bu tanım yetersiz kalmaktadır. İntegral denklemlerin bütün türlerini kapsayacak teoriyi kurmak olanaksızdır. Bu nedenle, birbirinden ayrı nitelikteki integral denklemleri tek tek incelemek gerekmektedir. Böylece geniş bir araştırma sahası açılmış olmakta ve konu bu oranda dağınık bir inceleme tarzı göstermektedir.

İntegral denklemlerle ilk uğraşlar 19. yüzyılın ilk yarısında başlamıştır. Önceleri dağınık ve rastgele araştırmalar yapılmışken, aynı yüzyılın sonlarına doğru daha sistematik ve bilinçli araştırmaların yapıldığı ve bir takım sonuçların alınmaya başlandığı izlenmektedir. ABEL 1823 yılında bir mekanik problemini incelediği esnada ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir. Ancak İntegral Denklem deyimini Du Bois REYMOND'un 1888 yılında yayınlanan bir çalışmasında önerdiği anlaşılmaktadır [3]. İntegral denklemlerle ilgili F. G. Tricomi [4], I. G. Petrovsky [5] ve V. W. Lovitt [6] 'e ait kaynaklar mevcuttur.

Bilindiği gibi tabiat kanunları diferansiyel denklemler yardımı ile ifade edilebilirler. Bundan, yakın çevre incelendiğinde evrenin tamamında geçerli tabiat kanunlarının bulunabileceği sonucu çıkarılabilir. Belki de büyük düşünür Albert Einstein'ın "Bu tabiatın en anlaşılmaz yönü anlaşılabilir olmasıdır" sözünün altında yatan gerçeklerden bir tanesidir [7] .

İntegral denklemler ise bütün uzay üzerinden integral alınması gerektirdiklerinden global (evrensel) denklemlerdir. Bu da aranan fonksiyonun bir noktadaki değerinin o fonksiyonun bütün uzay üzerinden integralini içeren ifadeler cinsinden bulunması demektir. İntegral denklemler genel olarak çözülmesi çok daha zor denklemlerdir. Diferansiyel denklemlerin önemli bir özelliği, tek başlarına bir problemi tanımlamaya yetmemeleridir. Onlara sınır şartlarının da ilave edilmesi gerekir. İntegral denklemler ise, bir problemin tam tanımını verirler. İlave şartlara gerek yoktur. Ancak, sınır şartları da uzayın bütününde onların ilgilenilen bölgeye etkisinin dolaylı yoldan denklemlere dahil edilmesi olarak yorumlanabileceğinden, integral denklemler ile diferansiyel denklemler arasında yakın bir ilişki olması da doğaldır. Bu çalışmada görülebileceği gibi diferansiyel denklemler temelde integral denklemler olarak da ifade edilebilirler.

1.2 Tezin Amacı

Sistemlerin çözümü için şu ana kadar sunulmuş genel bir yöntem yoktur. Bu nedenle fizik ve mühendislik alanlarında önemli bir yeri olan sistemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasının faydalı olacağı düşünülmüştür.

Bu çalışmada, önemi giderek artan integral denklemler konusu ele alınmıştır. İkinci bölümde, integral denklemler ile ilgili temel bilgiler verilmiş ve integral denklem tipleri tanıtılmıştır. Çalışmanın üçüncü bölümünde, uygulama alanında önemli bir yeri olan Volterra ve Fredholm integral denklemlerinin Taylor serisi yardımıyla yaklaşık çözümleri incelenmiş, bu yöntemlerdeki materyal ve metotları hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra Volterra integral denklemleri için homotopi pertürbasyon yöntemi ve varyasyonel iterasyon yöntemi ele alınmış ve yarı analitik yöntemler için örneklerle problemlerin tam çözümleri elde edilmiştir.

1.3 Bulgular

Uygulamalı bilim dallarında bazı problemler tek bir denklem ile ifade edilemezler, ancak onun yerine birden çok bilinmeyen fonksiyon içeren diferansiyel, integral veya bunların lineer birleşiminden oluşan integro diferansiyel denklemlerin bir bütünü olarak ifade edilirler. Bu tip denklem sistemleri, bilhassa parçalı olanlar, birçok fizik ve mühendislik dalında ortaya çıkmaktadır. Örneğin, diferansiyel denklem sistemleri;

Elastikiyet teorisi [8], Dinamik [9], Akışkanlar mekaniği [10], Devre problemleri [11], Salınım problemleri [12], [13], Kuantum dinamiği [14] gibi konularda, integral ve integro diferansiyel denklem sistemleri ise Elektromanyetik teori [15], Termoelastikiyet [16], Biyoloji [17], Mekanik [18], [19] Dalgaların kırınımı [20] gibi alanlarda ortaya çıkmaktadır.

İNTEGRAL DENKLEMLER

İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlayabiliriz ama bu tanım bizim için yeterli değildir. Bunun için integral denklemleri sınıflandırırken değişik durumlarda inceleyeceğiz.

Tek değişkenli fonksiyonlarda bir integral denklemin en genel durumunu verirse,

$$\psi(x).\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \phi(t) dt$$

burada a ve b sabit; λ bir parametre; $\psi(x)$, $f(x)$, $K(x,t)$; tanım bölgesi, $a \leq x$; $t \leq b$ olan bilinen fonksiyonlar; $\phi(x)$ ise bilinmeyen fonksiyondur. $K(x,t)$ fonksiyonuna çekirdek adı verilir.

2.1 İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

2.1.1 Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemleri lineer ve lineer olmayan integral denklemler olmak üzere inceleyelim. $\phi(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere;

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t) \phi(t) dt$$

bu integral denklemde $\phi(x)$ bilinmeyen fonksiyonu lineer ise integral denklem lineerdir.

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t) \phi^n(t) dt \quad n \neq 1 \quad (2.1)$$

ise bu integral denklemde $\phi(x)$ bilinmeyen fonksiyonun n . kuvveti bulunduğundan (2.1) integral denklemi lineer olmayan integral denklemdir.

2.1.2 Singüler ve Singüler Olmayan Lineer İntegral Denklemler

İntegral denklemi $K(x,t)$ çekirdeğinin süreklilik durumuna göre sınıflandırılır. $K(x,t)$ fonksiyonu $a \leq x \leq b$; $a \leq t \leq b$ aralığında sürekli ise integral denklem singüler (tekil) olmayan bir integral denklemdir. Eğer $K(x,t)$ verilen aralıkta sürekli değilse integral denklem singüler integral denklemdir.

Örneğin $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^\alpha}$$

şeklindeki bir integral denklem singüler integral denklem sınıfına girmektedir. Ayrıca, integral sınırlarından en az birinin sonsuz olması halinde de denklem, singüler integral denklem sınıfında olacaktır.

$$f(x) = \int_0^\infty \sin xt \, u(t)dt \quad (2.2)$$

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} u(t)dt \quad (2.3)$$

denklemleri bu türe birer örnek teşkil etmektedir. (2.2) in ikinci yanı ile tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu $u(x)$ 'in Fourier Sinüs Transformasyonu, (2.3) de ise $u(x)$ 'in Laplace Transformasyonu olarak kullanılır [21].

2.1.3 İntegral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması

$$u(x) = \int_a^b K(x,t) \phi(t)dt \quad (2.4)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t) \phi(t) dt \quad (2.5)$$

(2.4) ve (2.5) $\phi(x)$ bilinmeyen fonksiyon, $u(x)$, $f(x)$, $K(x,t)$ bilinen fonksiyon olmak üzere integral denklemleri 1. çeşit integral denklemlerdir. Burada bilinmeyen fonksiyon sadece integral içindedir.

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t) \phi(t) dt \quad (2.6)$$

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t) \phi(t) dt \quad (2.7)$$

Burada $\phi(x)$ bilinmeyen fonksiyon; $f(x)$, $K(x,t)$ bilinen fonksiyondur. (2.6) ve (2.7) integral denklemleri 2. çeşit integral denklemlerdir. Burada bilinmeyen fonksiyon denklemin hem içinde hem de dışındadır.

$$u(x)\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t) \phi(t) dt \quad (2.8)$$

$u(x)$, $f(x)$, $K(x,t)$ bilinen fonksiyonlar, $\phi(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere (2.8) deki integral denklem 3. çeşit integral denklemdir. Burada integral dışındaki bilinmeyen fonksiyonun katsayısına göre 1. ve 2. çeşit integral denkleme dönüştürülebilir.

2.1.4 Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler

Bir integral denkleminde integralin dışında ve bilinmeyen ϕ fonksiyonu haricinde f gibi bir fonksiyon bulundurmeyen integral denklemlere homojen integral denklem denir. f fonksiyonu bulunduran integral denklemlere homojen olmayan integral denklem denir.

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t) \phi(t) dt \quad (2.9)$$

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t) \phi(t) dt \quad (2.10)$$

(2.9) denklemi homojen integral denklem, (2.10) denklemi ise homojen olmayan integral denklemdir.

2.1.5 Volterra ve Fredholm İntegral Denklemler

İntegral denklemler integral sınırlarının değişken ya da sabit olmasına göre de sınıflandırılır. $t > x$ için $K(x, t) = 0$ şartını sağlayan

$$f(x) = \int_a^x K(x, t) \phi(t) dt$$

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) \phi(t) dt$$

$$\psi(x) \cdot \phi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) \phi(t) dt$$

denklemleri sırasıyla 1. 2. ve 3. çeşit Volterra integral denklemleridir.

$a, b \in \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $K: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \infty$$

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt \leq \infty$$

özelliklerine sahip bilinen fonksiyonlar ve ϕ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere;

$$f(x) = \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt$$

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt$$

$$\psi(x) \cdot \phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt$$

denklemleri sırasıyla 1. , 2. ve 3. çeşit Fredholm denklemleridir.

2.1.6 Özel Tipte İntegral Denklemler

$K(x,t)$ çekirdeği sadece $x - y$ farkına bağlı yani $x - y$ 'yi değişken kabul eden bir değişkenli fonksiyon olmak üzere genel bir konvolisyon integral denklemi,

$$\phi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) \phi(y) dy \quad (2.11)$$

ve hemen hemen konvolisyon integral denklemi ise,

$$\phi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, x-y) \phi(y) dy \quad (2.12)$$

formundadır.

(2.12) de $K(x, x-y)$ çekirdeği (2.11) deki K çekirdeğinden farklı iki değişkenli fonksiyondur. (2.11) de $x - y < 0$ iken $K(x-y) = 0$ olması halinde

$$\phi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^x K(x-y) \phi(y) dy \quad (2.13)$$

$x < y$ veya $y < 0$ iken $K(x-y) = 0$ olması halinde

$$\phi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-y) \phi(y) dy$$

tipinde ve (2.13) ün özel hali olan konvolisyon çekirdekli Volterra integral denklem ortaya çıkar.

İntegral denklemlerin bir türü de integro diferensiyel denklemlerdir. Bilinmeyen fonksiyonun türevlerinin bulunduğu bir integral denklemdir. Yani,

$$\phi'(x) = F\{x, u(x), \int_0^x K(x,t) u(t) u'(t) dt\}$$

.

.

$$\phi^{(n)}(x) = F\{x, u(x), u'(x), u''(x), \dots, u^{(n-1)}(x)\} + \int K(x, t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t)) dt$$

$[0, \infty)$ aralığında tanımlı konvolisyon çekirdekli

$$\phi(x) = f(x) + \int_0^{\infty} K(x-y) \phi(y) dy$$

integral denklemine Wiener-Hopf denklemi denir.

İki boyutlu integral denklemler

$$\phi(x, y) = f(x, y) + \int_a^b \int_a^b K(x, y, t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

ile verilir.

2.1.7 Parametrelİ İntegral Denklemler

$\lambda \neq 0$ ve $\lambda \neq 1$ olan bir parametre olmak üzere şu ana kadar gördüğümüz integral denklemlere, λ parametresinin ilave edilmesiyle daha genel durum elde ederiz. Örneğin;

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \phi(t) dt$$

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt$$

λ parametresi reel veya kompleks olabilir.

2.2 İntegral Denklemlerle Diferansiyel Denklemler Arasındaki İlişki

Başlangıç koşulu ile verilen değişken veya sabit katsayılı bir difereansiyel denklem Volterra tipinde bir integral denkleme dönüştürülebilir. Dolayısıyla bir integral denklem de bir diferansiyel denkleme dönüşebilir.

2.2.1 Diferansiyel Denklemlerin İntegral Denklemlere Dönüştürülmesi

$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$ başlangıç koşulları ile verilen

$$\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} + a_1(x) \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} + a_2(x) \frac{d^{(n-2)}y}{dx^{(n-2)}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x) \quad (2.14)$$

n . mertebeden lineer diferansiyel denklemi verilsin. Bu denklem, integral denkleme dönüştürülebilir:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u(x) \text{ olsun.}$$

$$\int_0^x \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right) dx = \int_0^x u(x) dx$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_0^x u(x) dx + c_{n-1}$$

olur. Benzer şekilde,

$$\int_0^x \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \right) dx = \int_0^x \left(\int_0^x u(x) dx + c_{n-1} \right) dx$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_0^x \int_0^x u(x) dx + c_{n-1}x + c_{n-2}$$

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(x) dx + \frac{1}{2!} c_{n-1}x^2 + c_{n-2}x + c_{n-3}$$

.

.

.

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \dots n-1 \dots \int_0^x u(x) dx + \frac{1}{(n-2)!} c_{n-1}x^{n-2} + \frac{1}{(n-3)!} c_{n-2}x^{n-3} + \dots c_2x + c_1$$

$$y = \int_0^x \dots (n) \dots \int_0^x u(x) dx \dots dx + \frac{1}{(n-1)!} c_{n-1} x^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!} c_{n-2} x^{n-2} + \dots c_1 x + c_0$$

(2.14) de yerine koyarsak

$$\begin{aligned} u(x) + a_1(x) \int_0^x u(x) dx + c_{n-1} a_1(x) + a_2(x) \int_0^x \int_0^x u(x) dx dx + c_{n-1} x a_2(x) + c_{n-2} a_2(x) \\ + a_3(x) \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(x) dx dx dx + \frac{1}{2!} c_{n-1} x^2 a_3(x) + \dots + a_{n-1}(x) \int_0^x \dots (n-1) \dots \int_0^x u(x) dx \\ + \frac{1}{(n-2)!} c_{n-1} x^{n-2} a_{n-1}(x) + \dots + c_1 a_{n-1}(x) + a_n(x) \int_0^x \dots (n) \dots \int_0^x u(x) dx \\ + \frac{1}{(n-1)!} c_{n-1} x^{n-1} a_n(x) + \dots + c_1 x a_n(x) + c_0 a_n(x) = f(x) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} u(x) + a_1(x) \int_0^x u(x) dx + a_2(x) \int_0^x \int_0^x u(x) dx dx + a_3(x) \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(x) dx dx dx + \dots \\ + a_n(x) \int_0^x \dots (n) \dots \int_0^x u(x) dx \dots dx = \\ f(x) - c_{n-1} a_1(x) - c_{n-1} x a_2(x) - \dots - \frac{1}{(n-1)!} c_{n-1} x^{n-1} a_n(x) - \dots - c_{n-2} a_2(x) - c_{n-2} x a_3(x) - \dots \\ - \frac{1}{(n-2)!} c_{n-2} x^{n-2} a_n(x) - \dots - c_1 a_{n-1}(x) - c_1 x a_n(x) - c_0 a_n(x) \end{aligned}$$

dır. Eşitliğin sağ tarafı x 'in fonksiyonu olduğundan $F(x)$ ile gösterelim.

$$\begin{aligned} a_1(x) + x a_2(x) + \frac{x^2}{2!} a_3(x) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} a_n(x) = f_{n-1}(x) \\ a_2(x) + x a_3(x) + \dots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} a_n(x) = f_{n-2}(x) \end{aligned}$$

.

$$a_{n-1}(x) + xa_n(x) = f_1(x)$$

$$a_n(x) = f_0(x)$$

$$F(x) = f(x) - \{c_{n-1} f_{n-1}(x) + c_{n-2} f_{n-2}(x) + \dots + c_1 f_1(x) + c_0 f_0(x)\}$$

ve eşitliğin sol yanı ise

$$\int_0^x \dots (n) \dots \int_0^x u(t) dt \dots dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t) dt \quad (2.15)$$

bağıntısı yardımıyla tek katlı integral olarak ifade edilir.

$$u(x) + a_1(x) \int_0^x u(x) dx + \dots + a_n(x) \int_0^x \dots (n) \dots \int_0^x u(x) dx \dots dx = F(x) \quad (2.16)$$

(2.15) yardımıyla

$$u(x) + a_1(x) \int_0^x u(t) dt + a_2(x) \int_0^x (x-t) u(t) dt + \dots + a_n(x) \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t) dt = F(x)$$

şeklinde ifade edilir. Belirli integralden

$$u(x) + \int_0^x \left[a_1(x) + a_2(x)(x-t) + a_3(x) \frac{(x-t)^2}{2!} + \dots + a_n(x) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right] u(t) dt = F(x)$$

$$K(x, t) = a_1(x) + a_2(x)(x-t) + \dots + a_n(x) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

ifadesi çekirdek fonksiyonu olarak isimlendirilir.

$$u(x) + \int_0^x K(x, t) u(t) dt = F(x)$$

dolayısıyla 2.çeşit Volterra integral denkleminde ulaşırız.

(2.15) ile verilen

$$\int_0^x \dots (n) \dots \int_0^x u(t) dt \dots dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t) dt$$

şeklindeki bağıntı aşağıdaki gibi ispatlanabilir.

(2.15) bağıntısı aşağıdaki gibi düzenlenip, eşitliğin sağ tarafı I_n ile gösterilsin ve bu ifadenin daha genel incelenmesi için alt sınırı da a olarak alınsın.

$$(n-1)! \int_a^x \dots (n) \dots \int_a^x u(t) dt \dots dt = \int_a^x (x-t)^{n-1} u(t) dt$$

$$I_n(x) = \int_a^x (x-t)^{n-1} u(t) dt \quad (2.17)$$

olsun. Burada n pozitif bir tam sayı ve a bir sabittir.

İntegral işareti altında türev almaya yarayan Leibnitz formülünden yararlanarak

$$F(x, t) = (x-t)^{n-1} u(t)$$

alınırsa, türev alındığında,

$$\frac{dI_n}{dx} = (n-1) \int_a^x (x-t)^{n-2} u(t) dt + \left\{ (x-t)^{n-1} u(t) \right\}_{t=x}$$

bulunur. Böylece $n > 1$ için,

$$\frac{dI_n}{dx} = (n-1) I_{n-1} \quad (2.18)$$

olur. Özel olarak ise,

$$\frac{dI_1}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^x u(t) dt = u(x) \quad (2.19)$$

bulunur. (2.18) den türev almaya devam edilirse,

$$\frac{d^2 I_n}{dx^2} = (n-1)(n-2)I_{n-2}$$

$$\frac{d^3 I_n}{dx^3} = (n-1)(n-2)(n-3)I_{n-3}$$

.

.

.

.

$$\frac{d^k I_n}{dx^k} = (n-1)(n-2)\dots(n-k)I_{n-k} \quad , \quad (n > k)$$

.

.

.

$$\frac{d^{n-1} I_n}{dx^{n-1}} = (n-1)(n-2)\dots 2.1.I_1 \quad (2.20)$$

ve n mertebeden türev için

$$\frac{d^n I_n}{dx^n} = (n-1)! \frac{dI_n}{dx} = (n-1)! u(x)$$

bulunur. $n \geq 1$ iken $I_n(a) = 0$ olduğuna dikkat edilirse, (2.20) bağıntısından, $I_n(x)$ 'in ve onun ilk $(n-1)$ adet türevinin $x = a$ için sağlandığı sonucuna varılabilir.

Şimdi, yukarıdaki bağıntılardan geriye doğru hareket edilerek, integral işlemleri yapılırsa (2.19) dan

$$I_1(x) = \int_a^x u(x) dx$$

elde edilir. Buradan

$$I_2(x) = \int_a^x I_1(x_2) dx_2 = \int_a^x \int_a^{x_2} u(x_1) dx_1 dx_2$$

yazılabilecektir. Burada x_1 ve x_2 birer parametredir. İşlemlere bu şekilde devam edilirse,

$$I_n(x) = (n-1)! \int_a^x \int_a^{x_n} \int_a^{x_{n-1}} \dots \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} u(x_1) dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1} dx_n$$

bulunur. İfadeyi düzenlemek için, her iki tarafı $(n-1)!$ bölüp, I_n yerine (2.17) bağıntısındaki eşiti yazılırsa,

$$\int_a^x \int_a^{x_n} \int_a^{x_{n-1}} \dots \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} u(x_1) dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1} dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} u(t) dt$$

ve burada $x = x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n$ kabul edilirse, gösterilmek istenilen,

$$\int_0^x \dots (n) \dots \int_0^x u(t) dt \dots dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t) dt$$

bağıntısı bulunmuş olur.

Örnek 2.1

$$u'' - 5u' - 4u = 0$$

$$u(0) = 0 \text{ ve } u'(0) = 0$$

başlangıç koşulları ile verilen diferansiyel denkleme karşılık gelen integral denklemini bulalım.

$$u'' = \frac{d^2 u}{dx^2} = u(x)$$

olarak tanımlanırsa,

$$\int_0^x u''(x) dx = \int_0^x u(x) dx$$

$$u'(x) \Big|_0^x = \int_0^x u(x) dx$$

$$u'(x) = \int_0^x u(x) dx \quad (2.21)$$

tekrar integral alırsak;

$$u(t) \Big|_0^x = \int_0^x \int_0^x u(t) dt dt$$

$$u(x) = \int_0^x (x-t) u(t) dt \quad (2.22)$$

(2.21) ve (2.22) verilmiş olan diferansiyel denklemde yerine koyulduğunda

$$u(x) - 5 \int_0^x u(t) dt - 4 \int_0^x (x-t) u(t) dt = 0$$

$$u(x) = \int_0^x (4(x-t) + 5) u(t) dt = 0$$

integral denklemine ulaşılmış olunur.

2.2.2 İntegral Denklemlerin Diferansiyel Denklemlere Dönüştürülmesi

Şimdi de bir integral denklemin bir diferansiyel denkleme dönüştürülmesini görelim.

Bunun için Leibnitz formülünün uygulanması yeterlidir.

Örnek 2.2

$$u(x) = x^2 - \lambda^2 \int_0^x (x-t) u(t) dt$$

integral denklemini diferansiyel denkleme dönüştürelim.

Her iki tarafın x 'e göre türevini alalım,

$$\frac{du}{dx} = 2x - \lambda^2 \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t) u(t) dt$$

Leibnitz formülüne göre

$$\frac{d}{dx} \int_0^x (x-t) u(t) dt = \int_0^x u(t) dt$$

$$\frac{du}{dx} = 2x - \lambda^2 \int_0^x u(t) dt$$

dir. Tekrar türev alınırsa,

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 2 - \lambda^2 \frac{d}{dx} \int_0^x u(t) dt$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 2 - \lambda^2 u(x) \quad u'' + \lambda^2 u - 2 = 0$$

olur.

**TAYLOR SERİSİ YARDIMIYLA İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK
ÇÖZÜMLERİ****3.1 Fredholm İntegral Denklemlerinin Taylor Serisi Yardımıyla Yaklaşık Çözümü**

Bu kısımda, Taylor seri çözümlerine sahip 1. ve 2. çeşit lineer Fredholm integral denklemlerinin yaklaşık çözümleri incelenmiştir. Bu denklemlerin çözümü için kullanılan yöntem, R. P. Kanwal ve K. C. Liu tarafından sunulan yöntemin bir genellemesidir. Bu yöntemde ilk olarak integral denklemin her iki tarafının n defa türevi alınır ve sonra sonuç denkleminde bilinmeyen fonksiyonun Taylor seri açılımında yerine konulur. Burada lineer cebirsel sistem uygun bir yerde kesilerek yaklaşık bir çözüm bulunur. Elde edilen çözüm, bir Taylor seri yaklaşımı olup bu Taylor seri açılımının katsayıları bir lineer cebirsel sistemin çözümleridir. Katsayılar çekirdeğe bağlı matris denklemleri yardımıyla hesaplanır. Yöntem, bazı lineer Fredholm integral denklemlere uygulanarak aşağıdaki gibi açıklanabilir.

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt = 0 \quad (3.1)$$

ve

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt = 0 \quad (3.2)$$

denklemlerini göz önüne alalım. Bu denklemlerdeki a ve b sabitleri $a \leq x$, $t \leq b$ integralin sınırlarıdır. Her iki denklemde de y bilinmeyen bir fonksiyon, $f(x)$ ve

$K(x, t)$ bilinen fonksiyonlardır. $\lambda \neq 0$ reel veya kompleks bir parametredir. Eğer çekirdek fonksiyonlar $K(x, t) = K(t, x)$ şeklinde birbirine eşit ise simetriktir.

(3.2) ile verilen Fredholm integral denkleminin

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^{(n)}(c)(x-c)^n \quad a \leq c \leq b \quad (3.3)$$

formunda bir Taylor seri çözümü aransın. (3.2) denkleminin x 'e göre n defa türevi alınıp

$$y^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + \lambda \int_a^b \frac{\partial^{(n)} K(x, t)}{\partial x^n} y(t) dt$$

x yerine c değeri konulduğunda

$$y^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + \lambda \int_a^b \frac{\partial^{(n)} K(x, t)}{\partial x^n} \Big|_{x=c} y(t) dt \quad (3.4)$$

elde edilir. Sonra $y(t)$, $t = c$ 'de Taylor serisine açılırsa

$$y(t) = \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} y^{(m)}(c)(t-c)^m \quad (3.5)$$

$$y^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + \lambda \int_a^b \frac{\partial^{(n)} K(x, t)}{\partial x^n} \Big|_{x=c} \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} y^{(m)}(c)(t-c)^m dt$$

elde edilir. Bu düzenlendiğinde

$$y^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + \lambda \sum_{m=0}^N T_{nm} y^{(m)}(c) \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.6) daki T_{nm}

$$T_{nm} = \frac{1}{m!} \int_a^b \frac{\partial^{(n)} K(x, t)}{\partial x^n} \Big|_{x=c} (t-c)^m dt \quad (3.7)$$

formundadır. Böylece Taylor katsayıları ile sonsuz (3.6) bağıntıları bir sonsuz lineer cebirsel sistem oluştururlar. (3.6) sistemi, uygun bir yerde kesilerek yaklaşık çözülebilir. Bu takdirde,

$$\mathbf{T}\mathbf{Y} = \mathbf{F} \quad (3.8)$$

matris denklemi elde edilir. (3.8) matris denklemindeki matrisler

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y^{(0)}(c) \\ y^{(1)}(c) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{(N)}(c) \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda T_{00} - 1 & \lambda T_{01} & \dots & \lambda T_{0N} \\ \lambda T_{10} & \lambda T_{11} - 1 & \dots & \lambda T_{1N} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \lambda T_{N0} & \lambda T_{N1} & \dots & \lambda T_{NN} - 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -f^{(0)}(c) \\ -f^{(1)}(c) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -f^{(N)}(c) \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(3.1) integral denkleminin çözümü için (3.8) matris denklemi kullanılabilir. Buradaki $\mathbf{T}$ matrisi

$$\mathbf{T} = \lambda [T_{nm}] - I \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (3.9)$$

olup eğer $\mathbf{T} \neq 0$ ise (3.8) denklemi

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{F} \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir. (3.10) yardımı ile $y^{(n)}(c)$, bilinmeyen katsayılar belirlenir ve bu değerler (3.3) de yerine konulursa

$$y(x) \cong \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} y^{(n)}(c)(x-c)^n \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (3.11)$$

Taylor seri çözümü elde edilir [22].

Örnek 3.1

$$y(x) = x + \lambda \int_0^1 (xt^2 + x^2t)y(t)dt$$

şeklindeki homojen olmayan Fredholm integral denkleminin çözümü aransın.

Burada, $K(x,t) = xt^2 + x^2t$, $f(x) = x$, $a = 0$ ve $b = 1$ olup $c = 0$ ve $N = 2$ alınırsa

$f^{(n)}(0)$ ve T_{nm} değerleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$f(x) = x \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$T_{nm} = \frac{1}{m!} \int_a^b \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n} \Big|_{x=c} (t-c)^m dt$$

$$T_{00} = \frac{1}{0!} \int_0^1 \frac{\partial^{(0)} (xt^2 + x^2t)}{\partial x^{(0)}} \Big|_{x=0} (t-0)^0 dt = \int_0^1 (xt^2 + x^2t) \Big|_{x=0} dt = \int_0^1 0 dt = 0$$

$$T_{01} = \frac{1}{1!} \int_0^1 \frac{\partial^{(0)} (xt^2 + x^2t)}{\partial x^{(0)}} \Big|_{x=0} (t-0)^1 dt = \int_0^1 (xt^2 + x^2t) \Big|_{x=0} t dt = \int_0^1 0 t dt = 0$$

$$T_{02} = \frac{1}{2!} \int_0^1 \frac{\partial^{(0)} (xt^2 + x^2t)}{\partial x^{(0)}} \Big|_{x=0} (t-0)^2 dt = \int_0^1 (xt^2 + x^2t) \Big|_{x=0} t^2 dt = \int_0^1 0 t^2 dt = 0$$

$$T_{10} = \frac{1}{0!} \int_0^1 \frac{\partial^{(1)} (xt^2 + x^2t)}{\partial x^{(1)}} \Big|_{x=0} (t-0)^0 dt = \int_0^1 (t^2 + 2xt) \Big|_{x=0} dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$T_{11} = \frac{1}{1!} \int_0^1 \frac{\partial^{(1)} (xt^2 + x^2t)}{\partial x^{(1)}} \Big|_{x=0} (t-0)^1 dt = \int_0^1 (t^2 + 2xt) \Big|_{x=0} t dt = \int_0^1 t^2 t dt = \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$T_{12} = \frac{1}{2!} \int_0^1 \frac{\partial^{(1)} (xt^2 + x^2t)}{\partial x^{(1)}} \Big|_{x=0} (t-0)^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (t^2 + 2xt) \Big|_{x=0} t^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 t^2 dt = \frac{1}{2} \frac{t^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{10}$$

$$T_{20} = \frac{1}{0!} \int_0^1 \frac{\partial^{(2)} (xt^2 + x^2t)}{\partial x^{(2)}} \Big|_{x=0} (t-0)^0 dt = \int_0^1 (2t) \Big|_{x=0} dt = \int_0^1 2t dt = t^2 \Big|_0^1 = 1$$

$$T_{21} = \frac{1}{1!} \int_0^1 \frac{\partial^{(2)} (xt^2 + x^2t)}{\partial x^{(2)}} \Big|_{x=0} (t-0)^1 dt = \int_0^1 (2t) \Big|_{x=0} t dt = \int_0^1 2t^2 dt = \frac{2t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$T_{22} = \frac{1}{2!} \int_0^1 \frac{\partial^{(2)}(xt^2 + x^2t)}{\partial x^{(2)}} \Big|_{x=0} (t-0)^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (2t) \Big|_{x=0} t^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^1 2t^3 dt = \frac{1}{2} \frac{2t^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

olup

$$T_{00} = 0 \quad T_{01} = 0 \quad T_{02} = 0$$

$$T_{10} = \frac{1}{3} \quad T_{11} = \frac{1}{4} \quad T_{12} = \frac{1}{10}$$

$$T_{20} = 1 \quad T_{21} = \frac{2}{3} \quad T_{22} = \frac{1}{4}$$

değerleri belirlenir.

Bu değerler $\mathbf{TY} = \mathbf{F}$ de yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \lambda \cdot 0 - 1 & \lambda \cdot 0 & \lambda \\ \lambda \cdot \frac{1}{3} & \lambda \cdot \frac{1}{4} - 1 & \lambda \cdot \frac{1}{10} \\ \lambda \cdot 1 & \lambda \cdot \frac{2}{3} & \lambda \cdot \frac{1}{4} - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y^{(0)}(0) \\ y^{(1)}(0) \\ y^{(2)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \lambda \\ \frac{\lambda}{3} & \frac{\lambda}{4} - 1 & \frac{\lambda}{10} \\ \lambda & \frac{2\lambda}{3} & \frac{\lambda}{4} - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y^{(0)}(0) \\ y^{(1)}(0) \\ y^{(2)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

matris denklemi elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$y^{(0)}(0) = 0$$

$$\frac{\lambda}{3} y^{(0)}(0) + \left(\frac{\lambda}{4} - 1 \right) y^{(1)}(0) + \frac{\lambda}{10} y^{(2)}(0) = -1$$

$$\lambda y^{(0)}(0) + \frac{2\lambda}{3} y^{(1)}(0) + \left(\frac{\lambda}{4} - 1 \right) y^{(2)}(0) = 0$$

Bulunur. Burada $y^{(0)}(0) = 0$ ve $y^{(1)}(0) = y_1$, $y^{(2)}(0) = y_2$ değerleri denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\frac{\lambda - 4}{4} \cdot y_1 + \frac{\lambda}{10} \cdot y_2 = -1$$

$$\frac{2\lambda}{3} \cdot y_1 + \frac{\lambda - 4}{4} \cdot y_2 = 0$$

olur. Buradan

$$y_1 = \frac{3}{2\lambda} \cdot \frac{4 - \lambda}{4} y_2$$

$$\frac{\lambda - 4}{4} \cdot \frac{3}{2\lambda} \cdot \frac{4 - \lambda}{4} y_2 + \frac{\lambda}{10} \cdot y_2 = -1$$

$$y_2 \left(\frac{-3(\lambda - 4)^2}{32\lambda} + \frac{\lambda}{10} \right) = -1$$

$$y_2 = \frac{-320\lambda}{2\lambda^2 + 240\lambda - 480} = \frac{-160\lambda}{\lambda^2 + 120\lambda - 240}$$

$$y_1 = \frac{-160\lambda}{\lambda^2 + 120\lambda - 240} \cdot \frac{3}{2\lambda} \cdot \frac{4 - \lambda}{4} = \frac{60\lambda - 240}{\lambda^2 + 120\lambda - 240}$$

elde edilir. Bu değerler (3.11) de yerine yazılırsa

$$y(x) = \sum_{n=0}^2 \frac{1}{n!} y^{(n)}(0) (x - 0)^n$$

$$y(x) = y^{(0)}(0) + y^{(1)}(0)x + \frac{1}{2} \cdot y^{(2)}(0) \cdot x^2$$

$$y(x) = \frac{[(60\lambda - 240) \cdot x - 80\lambda \cdot x^2]}{\lambda^2 + 120\lambda - 240}$$

bulunur. Bu sonuç tam çözümü verir [23].

3.2 Volterra İntegral Denklemlerin Taylor Serisi İle Yaklaşık Çözümü

Bu kısımda, Volterra integral denklemler için Taylor seri çözüm yöntemi incelenmiştir.

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt \quad (3.12)$$

Volterra integral denklemi göz önüne alınsın.

$$y(x) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} y^{(k)}(c) \cdot (x-c)^k, \quad a \leq c \leq x \quad (3.13)$$

şeklindeki $x = c$ noktasında ki Taylor serisi çözümü aransın.

(3.12) denkleminin (3.13) şeklinde bir çözümünü elde etmek için ilk olarak x 'e göre n defa türev alınırsa

$$y^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + \lambda I^{(n)}(x) \quad (3.14)$$

olur. Buradaki

$$I^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x K(x,t)y(t)dt \quad (3.15)$$

dır. $n = 0$ için

$$I^{(0)}(x) = I(x) = \int_a^x K(x,t)y(t)dt$$

olur. n defa integralin diferansiyelinin alınması ile ilgili Leibnitz formülü $I^{(n)}(x)$

integraline uygulanırsa, $n \geq 1$ için

$$I^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} [h_i(x) \cdot y(x)]^{n-i-1} + \int_a^x \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n} y(t)dt \quad (3.16)$$

ifadesi elde edilir. Buradaki

$$h_i(x) = \frac{\partial^{(i)} K(x,t)}{\partial x^i} \Big|_{t=x} \quad (3.17)$$

dır. Fonksiyonların çarpımının diferansiyeli ile ilgili Leibnitz formülünden $[h_i(x).y(x)]^{(n-i-1)}$ hesaplanıp (3.16) denkleminde yerine konursa, (3.15) denklemi

$$I^{(n)}(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-m-1} \binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-1)}(x) y^{(m)}(x) + \int_a^x \frac{\partial^n K(x,t)}{\partial x^n} \cdot y(t) dt \quad (3.18)$$

şeklinde olur.. (3.18) denkleminde

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-m-1} (...) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-m-1} (...)$$

olduğuna dikkat edilmelidir.

İlk olarak (3.14) denkleminde $x = 0$ yazılıp, (3.18) denkleminde ve $t = c$ noktasındaki $y(t)$ Taylor açılımı

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} y^{(m)}(c) \cdot (t-c)^m$$

ifadesi yerine yazılırsa

$$y^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + \lambda \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-m-1} \binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-i-1)}(c) y^{(m)}(c) +$$

$$\lambda \int_a^c \frac{\partial^n K(x,t)}{\partial x^n} \Big|_{x=c} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} y^{(m)}(c) \cdot (t-c)^m dt$$

veya kısaca

$$y^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + \lambda \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} (H_{nm} + T_{nm}) y^{(m)}(c) + \sum_{m=n}^{\infty} T_{nm} \cdot y^{(m)}(c) \right\} \quad (3.19)$$

elde edilir. (3.19) daki

$$H_{nm} = \sum_{i=0}^{n-m-1} \binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-i-1)}(c) \quad (3.20)$$

ve

$$T_{nm} = \frac{1}{m!} \int_a^c \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n} \Big|_{x=c} (t-c)^m dt \quad (3.21)$$

şeklinde tanımlanırlar. (3.19) da $n = 0$ için

$$\sum_{m=0}^{n-1} (H_{nm} + T_{nm}) y^{(n)}(c) = 0, \quad (n = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots, n-1 \quad n > m \text{ olur. (3.20) de } n \leq m$$

için $H_{nm} = 0$ elde edilir.

(3.18) bağıntısından sonsuz lineer denklem elde edilir. $y(x)$ 'in N . dereceden bir Taylor polinomuna yaklaştığı kabul edilirse, $(n, m = 0, 1, 2, \dots, N)$ alınabilir. Sonra (3.18) denkleminin bilinmeyen $y^{(0)}(c), y^{(1)}(c), \dots, y^{(N)}(c)$ katsayıları için; $(N+1)$ bilinmeyenli $(N+1)$ denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi ortaya çıkar. Bu sistem standart metotlarla nümerik olarak çözülebilir ya da

$$\mathbf{TY} = \mathbf{F} \quad (3.22)$$

şeklindeki matris denklemi haline getirilir ve $|\mathbf{T}| \neq 0$ ise (3.21) matris denklem

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{F} \quad (3.23)$$

şeklinde yazılır.

(3.22) deki $\mathbf{T}, \mathbf{Y}$ ve $\mathbf{F}$ matrisleri

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda T_{00} - 1 & \lambda T_{01} & \dots & \lambda T_{0N} \\ \lambda(H_{10} + T_{10}) & \lambda T_{11} - 1 & \dots & \lambda T_{1N} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \lambda(H_{N0} + T_{N0}) & \lambda(H_{N1} + T_{N1}) & \dots & \lambda T_{NN} - 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = [y^{(0)}(c) \quad y^{(1)}(c) \quad \dots \quad y^{(N)}(c)]$$

$$\mathbf{F} = [-f^{(0)}(c) \quad -f^{(1)}(c) \quad \dots \quad -f^{(N)}(c)]$$

şeklinde dirler. Böylece $y^{(n)}(c)$, $(n, m = 0, 1, 2, \dots, N)$ katsayıları (3.23) denklemiyle tek bir şekilde belirlenir. Bu yüzden (3.12) integral denkleminin çözümü tektir. Bu çözüm,

$$y(x) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} y^{(n)}(c) (x-c)^n \quad (3.24)$$

Taylor polinomudur.

(3.21) integralinin değerini hesaplamak genelde zordur. Bu yüzden $c = a$ seçilmesi uygun olur. Böylece T_{nm} değerleri (3.19) denkleminin bir rekürans bağıntısına indirgenir ve aşağıdaki gibi kolayca hesaplanır.

$$y^{(0)}(a) = f^{(0)}(a)$$

$$y^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + \lambda \sum_{m=0}^{n-1} H_{nm} \cdot y^{(m)}(a), \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (3.25)$$

Bu bağıntıdan bilinmeyen katsayılar kolayca ard arda hesaplanır. Ek olarak $n \rightarrow \infty$ olduğunda Taylor seri çözümü elde edilir [24].

Örnek 3.2

$$y(x) = 1 + x + \lambda \int_0^x (x-t) \cdot y(t) dt \quad (3.26)$$

lineer Volterra integral denkleminin 5. dereceden bir Taylor polinomu ile $y(x)$ 'in yaklaşık bir fonksiyonu bulunmak istensin. Burada

$$f(x) = 1 + x \quad K(x, t) = x - t \quad a = 0 \text{ olup } N = 5 \quad c = a = 0$$

seçilirse, ilk olarak H_{nm} ve T_{nm} değerleri

$$h_i(x) = \frac{\partial^{(i)} K(x, t)}{\partial x^i} \Big|_{t=x}$$

$$H_{nm} = \sum_{i=0}^{n-m-1} \binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-i-1)}(c)$$

$$T_{nm} = \frac{1}{m!} \int_a^c \frac{\partial^{(n)} K(x, t)}{\partial x^n} \Big|_{x=c} (t-c)^m dt \quad (n, m = 0, 1, \dots, 5)$$

ifadeleri yardımı ile

$$\begin{aligned}
H_{10} &= 0 & H_{11} &= 0 & H_{12} &= 0 & H_{13} &= 0 & H_{14} &= 0 \\
H_{20} &= 1 & H_{21} &= 0 & H_{22} &= 0 & H_{23} &= 0 & H_{24} &= 0 \\
H_{30} &= 0 & H_{31} &= 0 & H_{32} &= 0 & H_{33} &= 0 & H_{34} &= 0 \\
H_{40} &= 0 & H_{41} &= 0 & H_{42} &= 1 & H_{43} &= 0 & H_{44} &= 0 \\
H_{50} &= 0 & H_{51} &= 0 & H_{52} &= 0 & H_{53} &= 1 & H_{54} &= 0
\end{aligned} \tag{3.27}$$

ve

$$T_{nm} = 0 \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots, 5) \tag{3.28}$$

olarak bulunur.

Sonra $f(x) = 1 + x$ fonksiyonu ve türevlerinden

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = 0 \tag{3.29}$$

değerleri elde edilir.

Daha sonra (3.27), (3.28), (3.29) değerleri (3.22) matris denkleminde yerine

konulursa

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{(0)}(0) \\ y^{(1)}(0) \\ y^{(2)}(0) \\ y^{(3)}(0) \\ y^{(4)}(0) \\ y^{(5)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

matris denklemi elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$-y^{(0)}(0) = -1 \Rightarrow y^{(0)}(0) = 1$$

$$-y^{(1)}(0) = -1 \Rightarrow y^{(1)}(0) = 1$$

$$\lambda \cdot y^{(0)}(0) - y^{(2)}(0) = 0 \Rightarrow y^{(2)}(0) = \lambda$$

$$\lambda \cdot y^{(1)}(0) - y^{(3)}(0) = 0 \Rightarrow y^{(3)}(0) = \lambda$$

$$\lambda \cdot y^{(2)}(0) - y^{(4)}(0) = 0 \Rightarrow y^{(4)}(0) = \lambda^2$$

$$\lambda \cdot y^{(3)}(0) - y^{(5)}(0) = 0 \Rightarrow y^{(5)}(0) = \lambda^2$$

olur. Buradan da

$$y^{(0)}(0) = y^{(1)}(0) = 1, \quad y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = \lambda, \quad y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = \lambda^2$$

değerleri elde edilir. Bu değerler (3.24) denkleminde yerine yazılırsa

$$y(x) = \sum_{n=0}^5 \frac{1}{n!} y^{(n)}(0) \cdot x^n$$

$$y(x) = \frac{1}{0!} y^{(0)}(0) \cdot x^0 + \frac{1}{1!} y^{(1)}(0) \cdot x^1 + \frac{1}{2!} y^{(2)}(0) \cdot x^2 + \frac{1}{3!} y^{(3)}(0) \cdot x^3 + \frac{1}{4!} y^{(4)}(0) \cdot x^4 + \frac{1}{5!} y^{(5)}(0) \cdot x^5$$

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2!} \lambda \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \lambda \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \lambda^2 \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \lambda^2 \cdot x^5$$

$$y(x) = 1 + x + \lambda \left[\frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 \right] + \lambda^2 \left[\frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 \right]$$

bulunur. Burada $\lambda = 1$ ve yeterince büyük bir n alındığında tam çözüm olan $y(x) = e^x$ ifadesinin elde edileceği görülmektedir. Aynı sonuçlar (3.25) bağıntısı ile de kolayca bulunur [23].

HOMOTOPİ PERTÜRBASYON YÖNTEMİ İLE İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

4.1 Homotopi Pertürbasyon Yöntemi

He'nin homotopi pertürbasyon yöntemi; çalışılan zor problemi, çözümü daha kolay olan bir probleme dönüştürdüğü için bilim adamları ve mühendisler tarafından son yıllarda çok kullanılan bir yöntemdir. Homotopi pertürbasyon yöntemi, He tarafından 1998 yılında ortaya atılmış ve geliştirilmiştir. Birçok durumda, çözüm serisine çok hızlı bir yakınsaklık verir. Genellikle, tek iterasyon çözüme yüksek kesinlik sağlar.

Homotopi-pertürbasyon teorisinin temel fikrini açıklamak için, A genel integral operatör, B bir sınır operatörü, $f(r)$ bilinen analitik fonksiyon ve Γ, Ω bölgesinin sınırı olmak üzere

$$A(u) - f(r) = 0 \quad r \in \Omega \quad (4.1)$$

doğrusal olmayan integral denklemini

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0 \quad r \in \Gamma \quad (4.2)$$

sınır koşulları ile ele alalım.

A operatörü, genel olarak, L doğrusal ve N doğrusal olmayan olmak üzere iki parçaya ayrılabilir. Bu sebeple (4.1) denklemi,

$$L(u) + N(U) - f(r) = 0 \quad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir.

$v : \Omega \times [0,1] \rightarrow R$ ve $r \in \Omega$ olsun. Homotopi parametresi olarak adlandırılan $p \in (0,1]$ ve (4.1)'in başlangıç yaklaşımı v_0 olmak üzere

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(v_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0 \quad (4.4)$$

veya

$$H(v, p) = L(v) - L(v_0) + pL(v_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \quad (4.5)$$

ifadesini sağlayan bir homotopi H tarafından oluşturulmuştur.

Burada

$$H(v, 0) = L(v) - L(v_0) = 0, \quad H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0 \quad (4.6)$$

olduğu açıktır ve p' nin 0'dan 1'e değişme süreci $H(v, p)$ 'nin $L(v) - L(v_0)$ 'dan $A(v) - f(r)$ 'ye dönüşümüdür. Topolojide bu deformasyon, $L(v) - L(v_0)$ ve $A(v) - f(r)$ de homotopik olarak adlandırılır. Pertürbasyon tekniği uygulanarak $0 < p \leq 1$ küçük bir parametre olarak ele alınabileceği için (4.4) veya (4.5) denklemlerinin çözümü, p 'nin bir serisi olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots \quad (4.7)$$

$p \rightarrow 1^-$ iken, (4.4) veya (4.5), (4.3) ifadesine karşılık gelir ve (4.3) ifadesinin yaklaşık çözümü halini alır, yani

$$u = \lim_{p \rightarrow 1^-} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots \quad (4.8)$$

olur. Bu seri ele alınan probleme göre genellikle yakınsaktır [25].

4.1.1 Lineer Volterra İntegral Denklemlerinin Homotopi Pertürbasyon Yöntemi İle Çözümü

İntegral denklemlerin yarı-analitik çözümlerini elde etmek için kullanılan bir yöntem homotopi pertürbasyon yöntemidir [26].

2. çeşit Volterra integral denklemini şu şekilde göz önünde bulunduralım,

$$\phi(x) - \lambda \int_0^x K(x, y)\phi(y)dy = f(x) \quad (4.9)$$

$$L(u) = u(x) - f(x) - \lambda \int_0^x K(x, y)\phi(y)dy = 0 \quad (4.10)$$

$u(x) = \phi(x)$ tam çözümü ile verilsin. Homotopi şu şekilde tanımlanır :

$$H(u, 0) = F(u), \quad H(u, 1) = L(u)$$

Burada $F(u)$ fonksiyonel operatördür. Konveks homotopi şu şekilde seçilebilir:

$$H(u, p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0 \quad (4.11)$$

ve tam olarak tanımlanmış eğri boyunca, başlangıç noktası $H(u_0, 0)$ dan $H(\phi, 1)$ bitiş noktasına kadar sürekli bir yol izler. Konveks homotopiye yerleştirilmiş olan p parametresi 0 dan 1 e monoton olarak artarken, $F(u) = 0$ aşıkâr problemi de sürekli olarak $L(u) = 0$ orijinal problemine dönüşür. $p \in [0, 1]$ parametresine homotopi parametresi adı verilir. p' 'ye göre açılım şu şekildedir:

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \quad (4.12)$$

(4.12) ifadesi (4.11) de yerine yazılır ve p' 'nin aynı kuvvetlerine göre yazılarak $u_0, u_1, u_2,$ değerleri bulunur. $p \rightarrow 1$ iken

$$\phi = \lim_{p \rightarrow 1} u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \quad (4.13)$$

ifadesi (4.10) denkleminin çözümüne yakınsar. (4.13) serisi çoğu durumda yakınsaktır ve yakınsama oranı $L(u)$ 'ya bağlıdır. $F(u) = u(x) - f(x)$ alınırsa, (4.12) ve (4.10) yerine yazılırsa,

$$p^0 : u_0 - f(x) = 0 \Rightarrow u_0 = f(x)$$

$$p^1 : u_1 - \int_0^x K(x, y)u_0(y)dy = 0 \Rightarrow u_1 = \int_0^x K(x, y)u_0(y)dy$$

.

.

ve genel olarak ,

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_{n+1} = \int_0^x K(x, y)u_n(y)dy$$

sonuç olarak (4.9) serisinden istenilen sonuca ulaşılabilir [27]. Bu yöntemin açıklaması örnek ile verildikten sonra yöntem farklı problemlere uygulanarak kapasitesi araştırılmıştır.

Örnek 4.1

$$u(x) = (1+x) + \int_0^x (x-y)u(y)dy$$

2. çeşit lineer Volterra integral denkleminin $u(x) = e^x$ sonucuna sahip olduğu daha önce Taylor seri yönteminde bulunmuştur. Şimdi aynı örneği Homotopi pertürbasyon yöntemi ile çözelim.

Homotopi pertürbasyon metodunu uygulamak için, konveks homotopiyi şu şekilde tanımlayalım:

$$H(u, p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0 \quad (4.14)$$

$$F(u) = u(x) - (1+x)$$

$$L(u) = u(x) - (1+x) - \int_0^x (x-y)u(y)dy$$

olarak alınırsa ifade şu şekilde olur:

$$H(u, p) = (1-p)(u(x) - (1+x)) + p[u(x) - (1+x) - \int_0^x (x-y)u(y)dy] = 0$$

$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots$ ifadesi elde edilen konveks homotopi (4.11) de yerine yazılırsa ve p 'nin aynı kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek aşağıdaki denklemler takımı elde edilir:

$$p^0 : u_0(x) = f(x) \Rightarrow u_0(x) = (1+x)$$

$$p^1 : u_1(x) - \int_0^x (x-y)u_0(y)dy = 0 \Rightarrow u_1(x) = \int_0^x (x-y)(1+y)dy \Rightarrow u_1(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

$$p^2 : u_2(x) - \int_0^x (x-y)u_1(y)dy = 0 \Rightarrow u_2(x) = \int_0^x (x-y)\left(\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}y^2\right)dy = \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{24}x^4$$

$$p^3 : u_3(x) - \int_0^x (x-y)u_2(y)dy = 0 \Rightarrow u_3(x) = \int_0^x (x-y)\left(\frac{1}{120}y^5 + \frac{1}{24}y^4\right)dy = \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{720}x^6$$

.

.

Böylece yaklaşık çözüm

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = (1+x) + \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) + \left(\frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{24}x^4\right) + \left(\frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{720}x^6\right) + \dots = e^x$$

olarak yazılabilir [27].

4.1.2 Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemlerinin Homotopi Pertürbasyon Yöntemi ile Çözümü

Homotopi pertürbasyon metodunun lineer olmayan denklemler için de uygulamaları mevcuttur. Bunun için ikinci tip Volterra integral denklemini göz önünde bulunduralım.

2. çeşit lineer olmayan Volterra integral denklemi,

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x,y)\{R(u) + N(u)\}dy \quad (4.15)$$

olarak gösterilsin. Burada $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon, $R(u)$ ve $N(u)$ u 'nun lineer veya lineer olmayan fonksiyonları, $K(x,y)$ çekirdek olarak verilmiştir. Homotopi pertürbasyon metodunu uygulamak için

$$L(u) = u(x) - f(x) - \int_0^x K(x,y)\{R(u) + N(u)\}dy = 0 \quad (4.16)$$

İkinci tip lineer olmayan Volterra integral denklemini göz önünde bulunduralım. Bu durumda $H(u, p)$ şu şekildedir:

$$H(u, 0) = F(u) \quad H(u, 1) = L(u)$$

burada $F(u)$ fonksiyonel operatördür. Konveks homotopi şu şekilde seçilebilir:

$$H(u, p) = (1 - p)F(u) + pL(u) = 0 \quad (4.17)$$

ve tam olarak tanımlanmış eğri boyunca, başlangıç noktası $H(u_0, 0)$ dan $H(U, 1)$ bitiş noktasına kadar sürekli bir yol izler. Konveks homotopiye yerleştirilmiş olan p parametresi 0 dan 1 e monoton olarak artarken, $F(u) = 0$ aşıkâr problemi de sürekli olarak $L(u) = 0$ orijinal problemine dönüşür. $p \in [0, 1]$ parametresine homotopi parametresi adı verilir. p 'ye göre açılım şu şekildedir:

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots \quad (4.18)$$

(4.18) ifadesi (4.17) de yerine yazılır ve p 'nin aynı kuvvetlerine göre yazılarak $u_0, u_1, u_2, \dots$ değerleri bulunur. $p \rightarrow 1$ iken

$$U = \lim_{p \rightarrow 1} u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (4.19)$$

ifadesi (4.16) denkleminin çözümüne yakınsar. (4.19) serisi çoğu durumda yakınsaktır ve yakınsama oranı $L(u)$ 'ya bağlıdır. $F(u) = u(x) - f(x)$ alınırsa, (4.18) ve (4.16) konveks homotopi (4.17) de yerine yazılır ve p 'nin aynı kuvvetlerine göre denklem yeniden yazılırsa,

$$p^0 : u_0 - f(x) = 0 \Rightarrow u_0 = f(x)$$

$$p^1 : u_1 - \int_0^x K(x, y) \{R(u_0) + N(u_0)\} dy = 0$$

.

.

ve genel olarak ,

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_{n+1} = \int_0^x K(x, y) \{R(u_n) + N(u_n)\} dy$$

iterasyonları ile sonuca ulaşılır [27].

Bu yöntemin açıklaması örnek ile verildikten sonra yöntem farklı problemlere uygulanarak kapasitesi araştırılmıştır.

Örnek 4.2

$$u(x) = \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + 3x - 2 \int_0^x (1 - u^2(t)) dt$$

lineer olmayan Volterra integral denklemini ele alalım.

Burada verilen integral denkleme homotopi pertürbasyon yöntemi uygulanacaktır.

Öncelikle $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$ açılımından yararlanarak denklemini

$$u(x) = \cos x + 2 \int_0^x (\cos^2 t - u^2(t)) dt$$

biçiminde yazalım.

Homotopi pertürbasyon yöntemi ile

$$H(v, p) = v(x) - f(x) - 2p \int_0^x (\cos^2 t - v^2(t)) dt = 0$$

şeklinde homotopi seçilebilir.

$$v = v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + p^3 v_3 + \dots$$

ifadesi $p \rightarrow 1^-$ iken integral denklemin çözümü halini alır, yani

$$v = \lim_{p \rightarrow 1^-} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

olur. $v = v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + p^3 v_3 + \dots$ ifadesini homotopide yerine yazalım.

Denklemden $f(x) = \cos x$ olduğu için

$$(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots) - \cos x - p \cdot 2 \int_0^x (\cos^2(t) - (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots)^2) dt = 0$$

ifadesi elde edilir.

Burada p 'nin aynı kuvvetleri eşitlenir ise

$$p^0 : v_0 - \cos x = 0 \Rightarrow v_0 = \cos x$$

$$p^1 : v_1 = 2 \int_0^x (\cos^2 t - v_0^2(t)) dt$$

$$v_1 = 2 \int_0^x (\cos^2 t - \cos^2 t) dt \Rightarrow v_1 = 0$$

$$p^2 : v_2 = -4 \int_0^x (v_0(t) - v_1(t)) dt \Rightarrow v_2 = 0$$

$$p^3 : v_3 = 2 \int_0^x (-v_1^2(t) - 2v_0(t)v_2(t)) dt \Rightarrow v_3 = 0$$

$$p^4 : v_4 = 0$$

•
•
•

olur ve bu yaklaşım tekrarlanırsa $v_4(x) = v_5(x) = \dots = 0$ olarak elde edilir. Buna göre denklemin çözümü ise $v(x) = \cos x$ olur [25].

**VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİ İLE İNTEGRAL DENKLEMLERİN
YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ****5.1 Varyasyonel İterasyon Yöntemi**

Varyasyonel iterasyon yönteminin temel özelliği, sistem için bir düzeltme fonksiyoneli oluşturmasıdır. Son zamanlarda, varyasyonel iterasyon yöntemi çeşitli lineer olmayan problemlere, örneğin, kesirli (fractional) diferansiyel denklemler, lineer olmayan diferansiyel denklemler, lineer olmayan dalga denklemleri gibi denklemlere uygulanmıştır.

L lineer operatör, N lineer olmayan operatör ve $g(t)$ verilen sürekli fonksiyon olmak üzere, $L[u(t)] + N[u(t)] = g(t)$ genel lineer olmayan sistemi ele alalım.

λ , varyasyonel teoriyle tanımlanabilen Langrange çarpanı, u_n n . yaklaşım çözümü ve $\tilde{u}_n$ bir kısıtlanmış varyasyon yani $\delta \tilde{u}_n = 0$ olmak üzere, varyasyonel iterasyon yöntemi sistem için bir düzeltme fonksiyoneli

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(s) [Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s)] ds$$

şeklinde oluşturmaktadır.

$K(x, t)$ integral denklemin çekirdeği olmak üzere,

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t) u(t) dt$$

şeklindeki 2. çeşit Volterra integral denklemi için basit iterasyon formülü

$$u_{n+1}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)u_n(t)dt$$

biçimindedir [25].

5.1.1 Volterra İntegral Denklemlerinin Varyasyonel İterasyon Yöntemi ile Çözümü

İntegral denklemleri çözmek için kullanılan yarı- analitik yöntemlerden biri de varyasyonel iterasyon yöntemidir [28]. Bu yöntemin integral denklemler için uygulaması örnek ile açıklandıktan sonra yöntem farklı problemler için uygulanarak kapasitesi araştırılacaktır.

Örnek 5.1

$$u(x) = (1+x) + \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad (5.1)$$

2. çeşit lineer Volterra integral denkleminin $u(x) = e^x$ sonucuna sahip olduğu daha önce Taylor seri yönteminde ve Homotopi pertürbasyon yönteminde bulunmuştu. Şimdi aynı örneğe Varyasyonel iterasyon yöntemini uygulayalım.

İterasyon formülü:

$$u_{n+1}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)u_n(t)dt \text{ olduğundan,}$$

$$u_{n+1}(x) = (1+x) + \int_0^x (x-t)u_n(t)dt \quad (5.2)$$

şeklinde yazılabilir. $u_0(x) = 1+x$ olarak alınabilir.

$$u_1(x) = (1+x) + \int_0^x (x-t)u_0(t)dt = 1+x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$u_2(x) = (1+x) + \int_0^x (x-t)u_1(t)dt = 1+x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \quad (5.3)$$

elde edilir. $u(x)$ çözümü kapalı formda

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x \quad (5.4)$$

şeklinde elde edilir [29].

Örnek 5.2

$$u(x) = e^x - \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{3} + \int_0^x u^3(t)dt$$

lineer olmayan Volterra integral denklemini ele alalım. Bu denkleme daha önce homotopi pertürbasyon yöntemi uygulanmış [30] ve tam çözümü $u(x) = e^x$ olarak bulunmuştur.

Alternatif olarak verilen denkleme varyasyonel iterasyon yöntemini uygulayalım.

İteratif bir yapı oluşturmak için denklemi

$$u(x) = e^x + \int_0^x (e^{-3t} + u^3(t))dt$$

şeklinde yazalım.

Varyasyonel iterasyon yöntemine göre, $L(u) = u(x) - f(x) = 0$, $L(u_0) = u_0(x) - e^x = 0$ alınabileceği için başlangıç değeri denklemden $u_0(x) = e^x$ olarak seçilebilir.

Varyasyonel iterasyon yöntemine göre

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

biçimindeki Volterra integral denklemi için basit iterasyon formülü

$$u_{n+1}(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u_n(t)dt$$

şeklinde alınabilir [31]. Burada $u_0(x) = e^x$ konulursa şu yaklaşımlar elde edilir:

$$u_1(x) = e^x + \int_0^x (-e^{3t} + u_0^3(t))dt$$

$$= e^x + \int_0^x (-e^{3t} + e^{3t})dt \Rightarrow u_1(x) = e^x$$

$$u_2(x) = e^x + \int_0^x (-e^{3t} + u_1^3(t))dt$$

$$= e^x + \int_0^x (-e^{3t} + e^{3t})dt \Rightarrow u_2(x) = e^x$$

$$u_3(x) = e^x$$

.

.

.

Bu yaklaşım devam ettirilirse $u_4(x) = u_5(x) = u_6(x) = \dots = e^x$ olur. Bu nedenle tam çözüm olarak $u(x) = e^x$ fonksiyonu bulunur [25].

YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ İÇİN ÖRNEKLER

Bu kısımda, homotopi pertürbasyon ve varyasyonel iterasyon yöntemlerinin kapasitelerini araştırmak için çeşitli problemler ele alınmıştır. Çeşitli yöntemler ile yaklaşık çözümü bulunan veya tam çözümü daha zor elde edilen bazı problemler için de yarı-analitik yöntemler uygulanarak problemlerin tam çözümleri elde edilmiştir [26].

Örnek 6.1

$$u(x) + \int_0^x (u^2(t) + u(t))dt = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

lineer olmayan Volterra integral denklemini ele alalım.

Bu denkleme varyasyonel iterasyon yöntemini uygulayalım.

Denklemini

$$u(x) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x} - \int_0^x (u^2(t) + u(t))dt$$

$$u(x) = 1 + \int_0^x (e^{-2t} - u^2(t) - u(t))dt$$

şeklinde yazalım.

Varyasyonel iterasyon yöntemine göre bu denklemden $u_0(x) = e^{-x}$ seçilebilir.

$$u_{n+1}(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u_n(t)dt$$

$$u_{n+1}(x) = 1 + \int_a^x (e^{-2t} - u_n^2(t) - u_n(t))dt$$

iterasyonu kullanılırsa

$$u_1(x) = 1 + \int_0^x (e^{-2t} + u_0^2(t) - u_0(t))dt$$

$$= 1 + \int_0^x (e^{-2t} - e^{-2t} - e^{-t})dt \Rightarrow u_1(x) = e^{-x}$$

$$u_2(x) = 1 + \int_0^x (e^{-2t} + u_1^2(t) - u_1(t))dt$$

$$= 1 + \int_0^x (e^{-2t} - e^{-2t} - e^{-t})dt \Rightarrow u_2(x) = e^{-x}$$

.

.

.

olur ve bu yaklaşım devam ettirilirse $u_3(x) = u_4(x) = u_5(x) = \dots = e^{-x}$ bulunur.

O halde tam çözüm basit bir şekilde $u(x) = e^{-x}$ fonksiyonu olarak elde edilmektedir [25].

Örnek 6.2

$$u(x) = \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + 3x - 2 \int_0^x (1 - u^2(t))dt$$

Lineer olmayan Volterra integral denklemini ele alalım.

Burada verilen integral denkleme daha önce homotopi-pertürbasyon yöntemi uygulanmış ve şimdi de varyasyonel iterasyon yöntemi uygulanacaktır.

Öncelikle $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$ açılımından yararlanarak denklemi

$$u(x) = \cos x + 2 \int_0^x (\cos^2 t - u^2(t)) dt$$

biçiminde yazalım.

Alternatif olarak verilen denklemin çözümünü bulmak için varyasyonel iterasyon yöntemini uygulayalım.

$$u(x) = \cos x + 2 \int_0^x (\cos^2 t - u^2(t)) dt$$

denklemini için iterasyon formülü

$$u_{n+1}(x) = \cos x + 2 \int_0^x (\cos^2 t - u_n^2(t)) dt$$

biçimindedir. Varyasyonel iterasyon ile

$L(u) = u(x) - f(x) = 0$, $L(u_0) = u_0(x) - \cos x = 0$ olduğu için $u_0(x) = \cos x$ seçilebilir.

iterasyon formülünde bu ifade yerine konulursa

$$u_1(x) = \cos x + 2 \int_0^x (\cos^2 t - u_0^2(t)) dt$$

$$= \cos x + 2 \int_0^x (\cos^2 t - \cos^2 t) dt \Rightarrow u_1(x) = \cos x$$

$$u_2(x) = \cos x + 2 \int_0^x (\cos^2 t - u_1^2(t)) dt \Rightarrow u_2(x) = \cos x$$

.

.

olarak bulunur. Bu yaklaşım devam ettirilirse, $u_3(x) = u_4(x) = \dots = \cos x$ elde edilir. O halde denklemin tam çözümü kısa sürede $u(x) = \cos x$ olarak elde edilir [25].

Örnek 6.3

$$u(x) = x + \int_0^x (t - x)u(t) dt$$

Lineer Volterra integral denklemi için Homotopi-pertürbasyon yöntemini kullanalım.

Bu denkleme daha önce Varyasyonel iterasyon yöntemi uygulanmış [31] ve $u(x) = \sin x$ tam çözümü elde edilmiştir.

Homotopi-pertürbasyon teorisine göre,

$$H(v, p) = v(x) - g(x) - p \int_0^x (t-x)v(t)dt = 0$$

şeklinde bir homotopi seçilirse

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots$$

ifadesi bu homotopide yerine konulduğunda,

$$v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots - g(x) - p \int_0^x (t-x)(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots)dt = 0$$

elde edilir. Burada p 'nin kuvvetleri eşitlenirse

$$p^0 : v_0(x) = g(x) \Rightarrow v_0(x) = x$$

$$p^1 : v_1(x) = \int_0^x (t-x)v_0(t)dt$$

$$v_1(x) = \int_0^x (t-x)t dt \Rightarrow v_1(x) = -\frac{1}{6}x^3$$

$$p^2 : v_2(x) = \int_0^x (t-x)v_1(t)dt$$

$$v_2(x) = \int_0^x (t-x)\left(-\frac{t^3}{6}\right)dt \Rightarrow v_2(x) = \frac{1}{120}x^5$$

$$p^3 : v_3(x) = \int_0^x (t-x)v_2(t)dt$$

$$v_3(x) = \int_0^x (t-x)\left(\frac{t^5}{120}\right)dt \Rightarrow v_3(x) = -\frac{1}{5040}x^7$$

.

.

olur ve bu yaklaşım tekrarlanırsa

$$u(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = \sin x$$

tam çözümü elde edilir [25].

Örnek 6.4

$$u(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad 0 < x < 1$$

Lineer Volterra integral denklemini ele alalım.

Homotopi pertürbasyon yöntemini uygulamak için denklemi

$$u(x) = 1 + \int_0^x (-1 - t + (x-t)u(t))dt$$

şeklinde yeniden yazalım. $g(x) = 1$ olmak üzere

$$H(v, p) = v(x) - g(x) - p \int_0^x (-1 - t + (x-t)v(t))dt$$

şeklinde bir homotopi seçilebilir.

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots$$

ifadesi bu homotopide yerine yazılırsa,

$$v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots - 1 - p \int_0^x (-1 - t + (x-t)(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots))dt = 0$$

$$v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots - 1 - p \int_0^x (-1 - t + v_0(x-t) + pv_1(x-t) + p^2v_2(x-t) + \dots)dt = 0$$

olur. Burada p 'nin aynı kuvvetlerinin eşitlenmesi ile

$$p^0 : v_0 - 1 = 0 \Rightarrow v_0 = 1$$

$$p^1 : v_1 = \int_0^x (-1 - t + (x - t)v_0(t))dt$$

$$= \int_0^x (-1 - t + (x - t))dt \Rightarrow v_1 = -x$$

$$p^2 : v_2 = \int_0^x (x - t)v_1(t)dt$$

$$= \int_0^x (x - t)(-t)dt \Rightarrow v_2 = -\frac{1}{6}x^3$$

$$p^3 : v_3 = \int_0^x (x - t)v_2(t)dt$$

$$= \int_0^x (x - t)\left(-\frac{1}{6}t^3\right)dt \Rightarrow v_3 = -\frac{1}{120}x^5$$

$$p^4 : v_4 = \int_0^x (x - t)v_3(t)dt$$

$$= \int_0^x (x - t)\left(-\frac{1}{120}t^5\right)dt \Rightarrow v_4 = -\frac{1}{5040}x^7$$

.

.

.

elde edilir ve bu yaklaşım devam ettirilirse

$$v_5(x) = -\frac{x^9}{9!}, v_6(x) = -\frac{x^{11}}{11!}, \dots, v_n(x) = -\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \dots,$$

olacağı için

$$u(x) = 1 - \left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots \right)$$

olarak bulunur ve $u(x) = 1 - \sinh x$ tam çözümünü elde edilir [25].

Örnek 6.5

$$u(x) = 2x - \frac{1}{2}x^4 + \int_0^x \frac{1}{4}(u(t))^3 dt$$

Lineer olmayan Volterra integral denklemini ele alalım.

Bu denkleme daha önce Adomian yöntemi uygulanmış [32] ve yaklaşık çözüm elde edilmiştir. Aynı denkleme homotopi pertürbasyon ve varyasyonel iterasyon yöntemlerini uygulayalım.

Öncelikle iteratif bir yapı oluşturması için denklemi

$$u(x) = 2x + \int_0^x \frac{1}{4}(u^3(t) - 8t^3) dt$$

şeklinde yeniden yazalım. Homotopi pertürbasyon teorisine göre

$$H(v, p) = v(x) - 2x - p \int_0^x \frac{1}{4}(u^3(t) - 8t^3) dt$$

şeklinde bir homotopi seçilebilir.

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots$$

ifadesi bu homotopide yerine yazılırsa

$$v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots - 2x - p \int_0^x \frac{1}{4} \left((v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots)^3 - 8t^3 \right) dt = 0$$

olur. Burada p 'nin aynı kuvvetlerinin eşitlenmesi ile

$$p^0 : v_0 - 2x = 0 \Rightarrow v_0 = 2x$$

$$p^1 : v_1 = \int_0^x \frac{1}{4} (v_0^3(t) - 8t^3) dt \Rightarrow v_1 = 0$$

$$p^2 : v_2 = \int_0^x \frac{1}{4} (3v_0^2(t) - v_1(t)) dt \Rightarrow v_2 = 0$$

$$p^3 : v_3 = \int_0^x \frac{1}{4} (3v_0(t) - v_1^2(t)) dt \Rightarrow v_3 = 0$$

.

.

olarak elde edilir ve bu yaklaşım devam ettirilirse $v_4(x) = v_5(x) = \dots = 0$ bulunur ve bu problemin tam çözümü $u(x) = 2x$ şeklinde bulunur.

Aynı denkleme varyasyonel iterasyon yöntemini uygulayalım.

$$u(x) = 2x + \int_0^x \frac{1}{4} (u^3(t) - 8t^3) dt$$

denklemini için

$$u_{n+1}(x) = 2x + \int_0^x \frac{1}{4} (u_n^3(t) - 8t^3) dt$$

biçiminde iterasyon uygulanabilir.

Varyasyonel iterasyon ile, $f(x) = 2x$ olmak üzere

$L(u_0) = u_0(x) - f(x) = 0$, $u_0(x) = 2x$ alınabilir. Bu değer iterasyon formülünde yerine yazılırsa,

$$u_1(x) = 2x + \int_0^x \frac{1}{4} (u_0^3(t) - 8t^3) dt \Rightarrow u_1(x) = 2x$$

$$u_2(x) = 2x + \int_0^x \frac{1}{4} (u_1^3(t) - 8t^3) dt \Rightarrow u_2(x) = 2x$$

....

olur. O halde varyasyonel iterasyon yöntemi ile denklemin tam çözümü $u(x) = 2x$ olarak elde edilir.

Bu denkleme daha önce Adomian metodu uygulanmış [32] ve denklemin yaklaşık çözümü elde edilmiştir. Bu çalışmada homotopi pertürbasyon ve varyasyonel iterasyon yöntemleri uygulanarak denklemin tam çözümü elde edilmiştir [25].

Örnek 6.6

$$u(x) = e^x + \int_0^x e^{x-y} u(y) dy$$

İkinci tip lineer Volterra integral denkleminin $u(x) = e^{2x}$ çözümüne sahip olduğu bilinmektedir. Homotopi pertürbasyon metodunu uygulamak için, konveks homotopiyi şu şekilde tanımlayalım:

$$H(u, p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0$$

$$F(u) = u(x) - e^x$$

$$L(u) = u(x) - e^x - \int_0^x e^{x-y} u(y) dy$$

olarak alınırsa ifade şu şekilde olur:

$$H(u, p) = (1-p)(u(x) - e^x) + p[u(x) - e^x - \int_0^x e^{x-y} u(y) dy] = 0$$

$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots$ ifadesi elde edilen konveks homotopi

$$L(u) = u(x) - f(x) - \lambda \int_0^x K(x, y) \phi(y) dy = 0$$

denkleminde yerine yazılırsa ve p 'nin aynı kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek aşağıdaki denklemler takımı elde edilebilir:

$$p^0 : u_0(x) = f(x) \Rightarrow u_0(x) = e^x$$

$$p^1 : u_1(x) - \int_0^x e^{x-y} u_0(y) dy = 0 \Rightarrow u_1(x) = \int_0^x e^{x-y} e^y dy \Rightarrow u_1(x) = xe^x$$

$$p^2 : u_2(x) - \int_0^x e^{x-y} u_1(y) dy = 0 \Rightarrow u_2(x) = \int_0^x e^{x-y} y e^y dy \Rightarrow u_2(x) = \frac{x^2}{2} e^x$$

$$p^3 : u_3(x) - \int_0^x e^{x-y} u_2(y) dy = 0 \Rightarrow u_3(x) = \int_0^x e^{x-y} \frac{y^2}{2} e^y dy \Rightarrow u_3(x) = \frac{x^3}{6} e^x$$

.

.

buradan $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ den sonuç olarak

$$u(x) = e^x + x e^x + \frac{x^2}{2!} e^x + \frac{x^3}{3!} e^x + \dots = e^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) = e^{2x}$$

çözümü elde edilir [27].

Örnek 6.7

$u_0(x) = 1$ başlangıç koşulu ile verilen

$u(x) = 1 + \int_0^x (x-t)u(t)dt$ integral denklemini ele alalım. Homotopi

$u(x) = 1 + p \int_0^x (x-t)u(t)dt$ şeklinde alınabilir. Bu denklemin bir çözümünü

$$v(x) = v_0(x) + p v_1(x) + p^2 v_2(x) + \dots$$

şeklinde olduğu göz önüne alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$p^0 : v_0(x) = 1$$

$$p^1 : v_1(x) = \int_0^x (x-t).v_0(t)dt = \frac{x^2}{2!}$$

$$p^2 : v_2(x) = \int_0^x (x-t).v_1(t)dt = \int_0^x (x-t) \frac{t^2}{2!} dt = \frac{x^4}{4!}$$

elde edilir. Buradan çözüm

$$u(x) = \lim_{p \rightarrow 1} v(x) = v_0(x) + v_1(x) + v_2(x) + \dots$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \cosh(x) \text{ olarak bulunur [29].}$$

Örnek 6.8

$$u(x) = e^x + \frac{1}{2}x(e^{2x} - 1) - \int_0^x xu(y)^2 dy$$

ikinci tip lineer olmayan Volterra integral denklemi $u_0(x) = e^x$ başlangıç çözümü ile birlikte verilsin. Homotopi pertürbasyon metodunu uygulamak için, konveks homotopiyi şu şekilde tanımlayalım:

$$H(u, p) = (1 - p)F(u) + pL(u) = 0$$

$$F(u) = u(x) - e^x$$

$$L(u) = u(x) - e^x - \frac{1}{2}x(e^{2x} - 1) + \int_0^x xu(y)^2 dy \text{ olarak alınırsa ifade şu şekilde olur:}$$

$$H(u, p) = (1 - p)(u(x) - e^x) + p[u(x) - e^x - \frac{1}{2}x(e^{2x} - 1) + \int_0^x xu(y)^2 dy] = 0$$

veya

$$H(u, p) = (u(x) - e^x) + p[\frac{1}{2}x(e^{2x} - 1) - \int_0^x xu(y)^2 dy] = 0$$

$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots$ ifadesi elde edilen konveks homotopide yerine yazılırsa ve p 'nin aynı kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek aşağıdaki denklemler takımı elde edilebilir:

$$p^0 : u_0(x) = e^x$$

$$p^1 : u_1(x) = \frac{1}{2}x(e^{2x} - 1) - \int_0^x xu_0(y)^2 dy \Rightarrow u_1(x) = 0$$

$$p^2 : u_2(x) = \int_0^x 2xu_0(y)u_1(t)dy \Rightarrow u_2(x) = 0$$

$$p^3 : u_3(x) = \int_0^x x(2u_0(t)u_2(t) + u_1(t)^2)dy \Rightarrow u_3(x) = 0$$

.

buradan sonuç olarak

$$U(x) = \lim_{p \rightarrow 1} u(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

$$U(x) = e^x + 0 + 0 + 0 + \dots = e^x \text{ çözümü elde edilir [27].}$$

SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında öncelikle integral denklemler tanıtılmış, ve daha sonra, uygulamada önemli bir yeri olan Volterra integral denklemlerinin nümerik ve yarı-analitik çözüm yöntemleri üzerinde durulmuştur. Nümerik yöntemler tanıtıldıktan sonra ele alınan farklı problemlerin çözümleri için yöntemlerin karşılaştırılması örnekler üzerinde yapılmıştır. Nümerik yöntemlerde pratikte hatayı sıfıra indirmek kolay olmadığından problemin yapısına göre tam çözüm verebilen yöntemlere ihtiyaç duyulmuştur. Bu düşünce ile problemin fiziksel davranışının incelenmesine olanak sağlayan yarı-analitik yöntemler ele alınmıştır. Homotopi-pertürbasyon ve varyasyonel iterasyon yöntemleri tanıtıldıktan sonra ele alınan farklı örnekler ile yöntemlerin kapasiteleri gösterilmiş, problem bağımlı oldukları gözlenmiştir. Daha önce yapılan çalışmalarda çözümleri farklı yöntemlerle elde edilen problemlere homotopi-pertürbasyon ve varyasyonel iterasyon yöntemleri uygulanmış, bu yöntemler ile yaklaşık çözümü bulunan bazı problemlerin tam çözümleri elde edilmiş ve yöntemlerin başarısı değişik örnekler üzerinde gösterilmiştir. Problemlere bir çözüm yöntemi uygulamadan önce problemin fiziksel yapısının incelenmesi ve beklentilere göre çözüm yöntemlerinin kullanılmasının daha uygun olacağı sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Kanwall, R.P., ve Liu, K.C., (1989). "A Taylor Expansion Approach for Solving Integral Equations", Int. J. Math. Educ. Sci. Technol, 20, (3): 411-414.
- [2] Sezer, M., (1996). "A Method for The Approximate Solutation of The Second-Order Linear Differential Equations in Terms of Taylor Polynomials", Int. J. Math. Educ. Sci. Technol, 27, (6): 821-834.
- [3] Bocher, M., (1913). An Introduction to the Study of Integral Equations, second edition, Cambridge Universty Pres, New York.
- [4] Tricomi, F.G., (1955). Integral Equations, University of Turin, Italy.
- [5] Petrovsky, I.G., (1953). Lectures on the theory of Integral Equations, Würzburg.
- [6] Lovitt, W.V., (1924). Linear Integral Equations, new edition s.d, McGraw-Hill, New York.
- [7] Bayın, S.Ş., (2000). Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler, Metu Press, Ankara.
- [8] Ezechias, J., (1998). "Contribution to the calculation of thick arcs with respect to shearing strain and extension of the centroid axis", Computers and Structures, 29, (4): 645-656.
- [9] Kant, T., Varaiya, J. ve Arora, H.C.P., (1990). "Finite element transient analysis of composite and sandwich plates based on a refined theory and implicit time integration schemes", Computers and Structures, 36, (3): 401-420.
- [10] Agarwal, R.S., Bhargava, R. ve Balaji, A.V.S. (1990). "Finite elementsolutions of nonsteady three-dimensional micropolar fluid flow at astagnationpoint", Int. J. Engineering Sci., 28, (8): 851-857.
- [11] Zimmerman, W.R., (1996). "Time domain solutations to partial differential equations using spice", IEEE Transactions on Education, 39 , (4): 563-573.
- [12] Pesterev, A.V. ve Bergman, L.A., (1997). "Response of elastic continuum carrying moving linear oscillator", Journal of Engineering Mechanics, 123, (8): 878-884.
- [13] Gürgöze, M., (1992). "On some series occuring in the theory of vibrations", Int. J. Math. Educ. Sci. Technol, 23, (3): 493-496.

- [14] Greenspan, D., (1998). "Dynamical simulation of the simplest hydrides", Computers Math. Applic., 35, (10): 55-62.
- [15] Bloom, F., (1980). "Asymptotic bounds for solutions to a system of damped integrodifferential equations of elektromanyetic theory", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 73, (2), 524-542.
- [16] Kopeikin, I.D. ve Shishkin, V.P., (1984). "Integral form of the general solution of equations of steady-state thermoelasticity", Journal of Applied Mathematics and Mechanics (PMM U.S.S.R.), 48, (1): 117-119.
- [17] Holmekar, K., (1993). "Global asytmotic stability for a stationary solution of a system of integro-differential equations describing the formation of liver zones", SIAM Journal Math. Anal., 24, (1): 116-128.
- [18] Yue, Z.Q., ve Selvadurai, A.P.S., (1995). "Contac problem for saturated poroelastic solid", Journal of Engineering Mechanics, 121, (4): 502-512.
- [19] Abedzadeh, F., ve Pak, R.Y.S., (1995). "Horizontal translation and rocking rotation of a rigid tubular foundation", Geotechnique, 45, (1): 83-94.
- [20] Büyükaksoy, A., ve Alkumru, A., (1995). "Multiple diffraction of plane waves by a soft/hard strip", Journal of Engineering Mathematics, 29, (2): 105-120.
- [21] Porter, D., ve Stirling, S.G., (1990). Integral Equations, a Practical Treatment, From Spectral Theory To Applications, Cambridge University Pres, New York
- [22] Sezer, M., (1992). "The Solutions of Certain Classes of Ferdholm Integral Equations by Means of Taylor Series", Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakülteleri Dergisi, 19,(2): 17-24.
- [23] Tulga, İ., (2006). İntegral Denklem Sistemlerinin Yaklaşık Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta
- [24] Sezer, M., (1994). "Taylor Polynomial Solutation of Volterra Integral Equations", Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 25, (5): 625-633.
- [25] Odabaşı, M., (2008). İntegral ve İntegro Diferansiyel Denklemlerin Yarı Analitik Çözümleri Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir
- [26] He, J., (2003). "Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique", Applied Mathematics and Computation, 135,(1): 73-79.
- [27] Şeber, Y., (2009). Homotopi Pertürbasyon Metodu İle İntegral Denklemlerin Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya
- [28] He, J., (1999). "Homotopy perturbation technique", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 178, (3-4): 257-262.
- [29] Kızıltoprak, D., (2008). Lineer Olmayan Denklemlerin Analitik ve Yaklaşık Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir

- [30] Ghasemi, M., Tavassoli, K., ve Babolian, E., (2007). "Application of He's homotopy perturbation method to nonlinear integro differential equations", *Applied Mathematics and Computation*, 188, (1): 538-548.
- [31] Xu, L., (2007), "Variational iteration method for solving integral equations", *Computers and Mathematics with Applications*, 54: 1071-1078.
- [32] Javadi, SH., Davari, A. and Babolian, E., (2007). Numerical implementation of the Adomian decomposition method for nonlinear Volterra integral equations of the second kind", *International Journal of Computer Mathematics*, 84, (1): 75 –79.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Merve TUNÇARSLAN.
Doğum Tarihi ve Yeri : 1986 - Erzincan
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : mervetuncarslan@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2011
Lise		Özel Otlukbeli Lisesi	2004