

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

BULANIK ESNEK GAMMA HALKALARI

SERKAN ONAR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. BAYRAM ALİ ERSOY**

İSTANBUL, 2012

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK ESNEK GAMMA HALKALARI

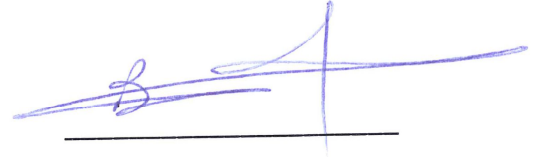
Serkan Onar tarafından hazırlanan tez çalışması 23/07/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

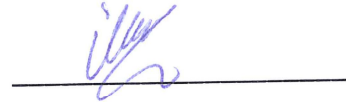
Doç. Dr. Bayram A. ERSOY
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

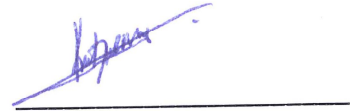
Doç. Dr. Bayram A. ERSOY
Yıldız Teknik Üniversitesi



Doç. Dr. Ünsal TEKİR
Marmara Üniversitesi



Yrd. Doç. Dr. Kürşat H. ORAL
Yıldız Teknik Üniversitesi



Bu alışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'nün 2012-01-03-YL02 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tez çalışmamı yönetip ve danışmanlığımı üstlenen, bu tezin hazırlanmasında, gerekli maddi ve manevi imkânları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve desteğini gördüğüm değerli hocam Sayın Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY'a, her türlü problemimde kıymetli fikirleriyle yardımını esirgemeyen ve tezin yazımında yardımcı olan Yrd. Doç. Dr. Kürşat Hakan Oral'a minnet ve şükranla teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Aynı zamanda tez çalışmalarım sırasında her zaman benden manevi desteğini eksik etmeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2012

Serkan Onar

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
BÖLÜM 1.....	1
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	4
1.3 Hipotez	4
BÖLÜM 2.....	5
TEMEL BİLGİLER.....	5
2.1 Bulanık(Fuzzy) Kümeler	5
2.1.1 Bulanık Kümelerin Yapısı	6
2.1.2 Bulanık Kümeler Üzerinde İşlemler.....	7
2.1.3 Bir Fonksiyon Altında Bulanık Kümelerin Görüntüsü ve Ters Görüntüsü.....	8
2.1.4 Bulanık Alt Gruplar	10
2.1.5 Seviye Alt Gruplar.....	13
2.1.6 Bulanık Halkalar ve Bulanık İdealler	13
2.2 Esnek Kümeler	15
2.3 Bulanık Esnek Kümeler	25
2.4 Gamma Halkaları	29
BÖLÜM 3.....	30
BULANIK ESNEK GAMMA HALKALARI	30
BÖLÜM 4.....	42

SONUÇ VE ÖNERİLER	42
KAYNAKLAR.....	44
ÖZGEÇMİŞ.....	48

SİMGE LİSTESİ

$F(X)$	$X \rightarrow [0,1]$ e tüm bulanık kümeler
μ_A	A bulanık kümesi
$\mu_A(x)$	x 'in A 'ya ait olma derecesi
$f^{-1}(B)$	B bulanık kümesinin ters görüntüsü
$\mu_{f^{-1}}(B)$	B bulanık kümesinin ters görüntüsünün üyelik fonksiyonu
G_t	Seviye alt kümesi
$P(U)$	Kuvvet Kümesi
(F, A)	Esnek Küme
$\neg E$	DEĞİL küme
$(F, A)^c$	Esnek Kümenin tümleyeni
$\tilde{\wedge}$	Bulanık esnek gamma halkalarında "VE" operatörü
$\tilde{\vee}$	Bulanık esnek gamma halkalarında "VEYA" operatörü
$\tilde{\cap}$	Bulanık esnek gamma halkalarında kesişim operatörü
$\tilde{\cup}$	Bulanık esnek gamma halkalarında birleşim operatörü
$\tilde{\triangleright}_{\Gamma}$	Bulanık esnek gamma halkalarda ideal
$\sim_{\Gamma}$	Bulanık esnek gamma homomorfik görüntü
(φ, ψ)	Bulanık esnek gamma homomorfizması

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 2.1 Esnek kümenin tablo gösterimi	17
Tablo 2.2 Bulanık esnek küme gösterimi	28

BULANIK ESNEK GAMMA HALKALARI

Serkan Onar

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY

Molodtsov tarafından ortaya atılan esnek küme teorisi belirsizliklerle başa çıkmak amacıyla etkili bir matematiksel araç görülüp pek çok araştırmacının dikkatini çekerek bu konu ile ilgili geniş kapsamda çalışmalar yapılmasına neden olmuştur. Bu teori, birçok farklı alanlarda uygulanmıştır. Oyun teorisi, işlem araştırmaları, sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, olasılık ölçüm teorisi, Riemann integrasyonu, karar verme problemi vb. alanlarda bulanık esnek küme teorisi kullanılarak başarılı sonuçlara imza atılmıştır.

Bu tez çalışmasında öncelikle bulanık esnek küme kavramı üzerinde temel bilgiler verilecektir. Ardından bulanık esnek küme kullanılarak bulanık esnek gamma halka kavramı verilecektir. Sonra bulanık esnek gamma halka tanımı verilip, bu kavram üzerinde kesişim, birleşim, AND, OR operatörleri uygulanıp bazı özellikler verilerek genelleştirme yapılacaktır. Ayrıca bu kavram üzerinde bulanık esnek gamma ideali gibi çeşitli cebirsel yapılar tanımlanacaktır. Son olarak, bulanık esnek gamma halka homomorfizması tanımı yapılarak bu tanım ile ilgili homomorfik görüntü ve ters görüntü yapıları verilerek ilgili yapıların bulanık esnek gamma halka kavramının yapısını sağladığı gösterilecektir.

Anahtar Kelimeler: Halka, esnek halka, bulanık esnek halka

FUZZY SOFT GAMMA RINGS

Serkan Onar

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Dr. Bayram Ali ERSOY

Soft set theory, proposed by Molodtsov, has been regarded as an effective mathematical tool to deal with uncertainties, has been extensively studied by many authors. This theory has been applied to many different fields such as function smoothness, Riemann and Perron integration, measurement theory, game theory, decision making. Maji et al pointed out several directions information systems etc. which contain uncertainties. They also analyzed several operations on the theory of soft sets.

In this thesis, firstly basic information about the fuzzy soft set has been given. Then, we attempt to study fuzzy soft ring theory by using fuzzy soft sets. We introduce fuzzy soft rings generated by fuzzy soft sets, by using some algebraic operator intersection, union, AND, OR on this structure and generalize to give some properties of them. We study definition of fuzzy soft ideal and derive some results on them. Consequently fuzzy soft gamma ring are introduced and homomorphic image and inverse image are given and show to provide the structure of fuzzy soft gamma ring related to these structures.

Key words: Ring, soft ring, fuzzy soft ring

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

1.1 Literatür Özeti

Karşılaştığımız problemlerdeki bazı belirsizliklerin varoluşu ve bu problemlerin tam olarak tarif edilemediği, problemlerle ilgili bilginin yetersiz veya belirsiz olduğu durumlarda bilinen klasik yöntemlerin uygulanıp buna çözüm bulamaması yeterli doğrulukta modellenemeyen karmaşık sistemlerde ekonomi, çevre, optimizasyon, karar verme, denetim ve sağlık bilimi, mühendislik gibi pek çok disiplinlerde sıkıntı oluşturmaktadır.

Bu belirsizlikleri ortadan kaldırmak amacıyla “Esnek küme teorisi” [1] isimli makalede ifade edildiği üzere matematiksel bir araç olarak göz önüne alabileceğimiz bilinen üç temel teori olarak “Olasılık Teorisi” , “Bulanık Küme Teorisi” ve “Ayrık Matematiği” gösterilmiştir. Zadeh’in [2] bulanık kümeler teorisi bu teoriler arasından en dikkat ve ilgi çekenlerden birisidir.

Bulanık küme teorisi ardındaki temel fikir, bir önermenin ‘doğru’, ‘yanlış’, ‘çok doğru’, ‘çok yanlış’, ‘çok çok doğru’, ‘çok çok yanlış’, ‘yaklaşık olarak doğru’, ‘yaklaşık olarak yanlış’, v.b. gibi, olabileceğidir. Diğer bir deyişle doğruluk, önermelerle, klasik yanlış ve doğru arasındaki sonsuz sayıdaki doğruluk değerlerini içeren bir kümedeki değerler, ya da sayısal olarak $[0, 1]$ gerçel sayı aralığıyla ilişkilendirilen bir fonksiyondur. Bu, Zadeh’in bulanık kümeler üzerindeki ilk çalışmasının bir sonucudur. Aslında, bulanık kümeler için, herhangi bir gerçel sayı aralığı, değer kümesi olarak kullanılabilir, fakat; $[0,1]$ aralığının hepsini temsil edebileceği varsayıldığı ve pratikte kullanımı daha kolay olduğu için kullanılması tercih edilmektedir. Bulanık küme teorisinin belirleyici

özellikleri: “doğru, çok doğru, az çok doğru, daha doğru, yanlış, çok doğru değil, ve çok yanlış” gibi sözel olarak ifade edilen (ya da sayısal olarak $[0,1]$ gerçel sayı aralığında yer alan) doğruluk değerlerine sahip oluşu (bu, belirsizlik içeren doğruluk tablolarını da beraberinde getirir) ve geçerliliği kesin değil, fakat yaklaşık olan çıkarım kurallarına sahip oluşudur. Zadeh [3] 1973’de yayınladığı çalışmalarında, bulanık küme teorisinin, en büyük yaklaşıklıkla insanın karar verme sistemini modelleyebilecek yeterlilikte olduğu fikrini ortaya atmıştır.

Bulanık kümeler üzerinde ilk çalışmalar Zadeh tarafından yapıldıktan sonra, bu mantık, Mamdani [4] tarafından, bulanık mantık denetleyicilerinin (Fuzzy Logic Controller-FLC) tasarımında kullanılmıştır. Mamdani’nin 1974 yılında, bir buhar türbin kontrolü için kullandığı bu yöntem, 1980 yılında çimento sanayine uygulanarak, ilk endüstriyel uygulaması gerçekleştirilmiştir. Bu tarihten sonra, özellikle Japonya’da olmak üzere, birçok uygulama yapılmıştır. Günümüzde de devamlı olarak artan bir popülerlikle kullanılmaya devam edilmektedir.

Son zamanlarda bu teori hızla gelişmesine karşılık bazı yapısal zorlukları içinde barındırmaktadır. Bilindiği üzere bir bulanık küme onun üyelik fonksiyonu yardımıyla tanımlanır. Molodtsov’a [1] göre üyelik fonksiyonun özü fazlasıyla bireyseldir. Bundan dolayı, her bir durum için bir üyelik fonksiyonu inşa etme zorluğu söz konusudur. Bu sebeple, üyelik fonksiyonu inşasından bağımsız bir kümeler teorisine ihtiyaç duyulmuştur. Bu amaçla, esnek kümeler teorisi, Molodtsov [1] tarafından 1992 yılında belirsizlikle başa çıkmak için bir matematiksel araç olarak ortaya atıldı. Molodtsov [1], oyun teorisi, işlem araştırmaları, sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, olasılık, ölçüm teorisi, Riemann integrasyonu, Perron integrasyonu vb. alanlarda esnek küme teorisini kullanarak, başarılı çalışmalara imza atmıştır.

Maji [5,6], Pawlak’ın [7] yaklaşımli küme teorisinden faydalanarak, karar verme probleminde esnek kümelerin bir uygulamasını geliştirerek esnek kümelerde bazı işlemler tanımladı. Xiao [8] esnek küme temelli iyi rekabet kapasitesi için yapay bir hesaplama metodu üzerine başarılı bir çalışma yaptı. Yang [9], esnek kümeler ve yaklaşımli kümelere dayalı klinik teşhisin karar analizi ve indüksiyon başlığıyla çalışmasını yayımladı. Chen [10,11] ile Kong [12] esnek kümelerde parametre

indirgemesi üzerine çalışmalar yaptı. Xiao [13] ile Pei ve Miao [14], esnek tabanlı bilgi sistemleri üzerine pek çok çalışma sundu. Mushrif [15], esnek küme temelli sınıflandırmalar üzerine araştırmalar yapmıştır.

Esnek kümelerin cebirsel özellikleri günümüzde de bazı yazarlar tarafından çalışılmaktadır. Jun [16] esnek BCK/BCI-cebirleri ve esnek alt cebir kavramlarını tanımlayarak, onlarla ilgili bazı temel özelliklere ulaştı. Jun ve Park [17] esnek kümeleri BCK/BCI-cebirlerine uygulayarak, BCK/BCI-cebirlerinde esnek kümelerin cebirsel özelliklerini araştırdı. Park [18], esnek WS-cebirleri üzerine incelemeler yaptı. Feng [19], esnek küme teorisini kullanarak esnek yarı halkalar ile ilgili bir çalışma yaptı. Bu, pek çok yeni çalışmanın önünü açan bir inceleme olmuştur. Sun [20], esnek modüllerin tanımını verdi. Ayrıca modüllerin özelliklerini ve Molodtsov'un esnek küme tanımını kullanarak bazı temel özelliklerin karakterizasyonunu yaptı. Ali [21] esnek kümeler üzerinde bazı yeni işlemler tanımlayarak teorik olarak esnek kümeler üzerinde yapılan çalışmaları genişletti.

Maji [22], bulanık esnek kümeleri tanımlayarak sonrasında pek çok araştırmacının bulanık esnek kümeler üzerine çalışmalar yapmasının önünü açmıştır. Roy ve Maji [23] bir karar verme probleminde bulanık esnek kümelerin bir uygulaması üzerinde bir takım önemli sonuçlar buldu. Yang [24] bulanık esnek kümelerde indirgemeyi tanımlayarak, bulanık esnek kümeler yardımıyla bir karar verme problemini inceledi. Enginoğlu [25], esnek küme işlemlerinin daha işlevsel olan yeni tanımlarını vererek, esnek çarpım tanımladı, geliştirilen yeni esnek yaklaşım metotları sundu. Ayrıca, bu metotların karar verme problemleri üzerine iki uygulamasını verdi.

Aktaş ve Çağman [26] esnek kümeleri, bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümelerin ilgili kavramlarıyla karşılaştırdı. Ayrıca pek çok yeni çalışmanın önünü açan “Esnek Grup Teorisi”ni literatüre kazandırdı. Esnek grup yapısı üzerinde esnek alt grup, normal esnek alt grup, esnek grup homomorfizmi gibi cebirsel yapılar tanımladı. Feng [19] Aktaş’ın esnek grup teorisinden esinlenerek esnek yarı halka kavramını tanıtır, esnek yarı halka üzerinde esnek alt yarı halka, esnek ideal, idealistik esnek yarı halka ve esnek yarı halka homomorfizmi gibi cebirsel yapıları inşa etti. Acar[27] Feng’in inşa ettiği esnek yarı halka kavramını kullanarak esnek halkaları tanımladı. Ayrıca Jun [28] esnek

halkaları, esnek halkalar üzerinde esnek idealleri ve idealistik esnek halkaların yapısını inşa etti. Öztürk [29] bulanık halkalarla esnek halkaları birleştirerek bulanık esnek halka ve bulanık esnek ideal terimlerini literatüre kazandırdı.

Nobusawa [30] halkanın daha geneli olan gamma halkalarını inceledi. Barnes [31] Nobusawa'nın mantığındaki gamma halkanın tanımındaki durumları biraz daha zayıflattı. Bu iki makale yayınlandıktan sonra Barnes ve Nobusawa'nın anlayışındaki gamma halkaların halka teorisindeki sonuçlara paralel olması çoğu matematikçi tarafından başarılı işlere imza atılmasına neden oldu. Jun ve Lee [32] bulanık gamma halka kavramını inşa etti. Bu çalışmadan sonra bu konu üzerindeki çalışmalar yoğunlaştı. Öztürk [33] gamma halkalarında bulanık idealleri tanımladı. Dutta [34] gamma halkalarının bulanık ideallerinin yapısını inceledi ve [35] de gamma halkalarının bulanık asal ideallerini inşa etti. Öztürk [36] esnek halkalarla gamma halkalarını birleştirerek esnek gamma halkalarını, esnek gamma idealini, idealistik esnek gamma idealini tanımladı ve bu cebirsel yapılarla ilgili bazı temel özellikleri verdi.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasında, Öztürk'ün [36] esnek gamma halka tanımı kullanılarak bulanık gamma halkalarına uygulanarak bulanık esnek gamma halka kavramı verilecektir. Bu kavram üzerinde kesişim, birleşim, AND, OR operatörleri uygulanıp bazı özellikler verilerek genelleştirme yapılacaktır. Ayrıca bu kavram üzerinde bulanık esnek gamma ideali gibi çeşitli cebirsel yapılar tanımlanarak, bu yapılar ilgili örneklerle gösterilecek. Bulanık esnek gamma halka homomorfizması tanımı yapılarak bu tanım ile ilgili homomorfik görüntü ve ters görüntü yapılar gibi çeşitli cebirsel yapılar tanımlanarak bu yapılarla ilgili temel teoremler verilecektir.

1.3 Hipotez

Özellikle bulanık esnek gamma halka homomorfizması ile bulanık esnek gamma izomorfizması arasındaki ilişki üzerinde durulacaktır. Son olarak, İnan ve Öztürk'ün Fuzzy soft ring and fuzzy soft ideal [29] makalesi temel alınarak yapılacak olan, fuzzy soft gamma ring ve homomorfizması gösterilecektir.

BÖLÜM 2

TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, tezde kullanacağımız, temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

2.1 Bulanık(Fuzzy) Kümeler

Geleneksel küme teorisinde kesin sınırlı küme kavramı vardır. Bu kavram bir nesnenin bir kümenin elemanı olması ya da olmaması gibi iki seçenekli bir mantığa dayanmaktadır. Bulanık küme kavramı, klasik kümenin gerçek dünyadaki özellikle insanları içeren kısmen karmaşık sistemlerle uğraşırken yetersiz kalınmasından dolayı 1965’ de Zadeh tarafından ortaya atılmıştır. Zadeh, niteliklerin ikili üyelik fonksiyonu ile ifade edildiği klasik kümeler yerine, dereceli üyelik fonksiyonu ile ifade edildiği bulanık kümeler tanımlamasını önermiştir.

Bulanık küme kavramı, duyarlılığın arttırılması açısından, klasik kümelerinkine göre daha uygun olan yeni bir araç sağlamaktadır. Getirdiği yaklaşım, klasik küme kuramlarında kullanılan iki değerli üyeliği çok değerliliğe taşıyarak genelleştirmektedir.

2.1.1 Bulanık Kümelerin Yapısı

Tanım 2.1 U bir evrensel küme olsun. U üzerinde bir X bulanık kümesi

$$\mu_x : U \rightarrow [0,1]$$

fonksiyonu ile tanımlanır. Bu μ_x fonksiyonuna X bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu denir.

$\mu_x(x)$ değeri x elemanının X bulanık kümesine ait olmasının derecesini temsil eder. O halde U üzerinde bir X bulanık kümesi aşağıdaki gibi

$$X = \{(\mu_x(x)/x) : x \in U, \mu_x(x) \in [0,1]\}$$

yazılır [2].

Not 2.1: Bundan sonra U üzerindeki tüm bulanık kümeler $F(U)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2 $X, Y \in F(U)$ olsun. Her $x \in U$ için $\mu_x(x) \leq \mu_y(x)$ ise X, Y 'nin bir alt kümesi ya da X, Y tarafından kapsanıyor denir ve $X \subseteq Y$ şeklinde gösterilir [2].

Tanım 2.3 $X, Y \in F(U)$ olsun. Her $x \in U$ için $\mu_x(x) = \mu_y(x)$ ise X ve Y eşittir denir ve $X = Y$ şeklinde gösterilir. Burada

$$X = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y, Y \subseteq X$$

olduğu açıktır [2].

Tanım 2.4 $X, Y \in F(U)$ olsun. Bu durumda X ve Y 'nin kesişimi $X \cap Y$ ile gösterilir ve bu kümenin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{X \cap Y} = \min \{ \mu_x(x), \mu_y(x) \}$$

şeklinde tanımlanır [2].

Tanım 2.5 $X, Y \in F(U)$ olsun. Bu durumda X ve Y 'nin birleşimi $X \cup Y$ ile gösterilir ve bu kümenin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{X \cup Y} = \max \{ \mu_x(x), \mu_y(x) \}$$

şeklinde tanımlanır [2].

Tanım 2.6 $X \in F(U)$ olsun. Burada X 'in tümleyeni X^c ile gösterilir ve bu kümenin üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi

$$\mu_{X^c}(x) = 1 - \mu_X(x)$$

tanımlanır [2].

Önerme 2.1 $X, Y, Z \in F(U)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

- i. $X \cup X = X, X \cap X = X,$
- ii. $X \cup Y = Y \cup X, X \cap Y = Y \cap X,$
- iii. $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z), (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z),$
- iv. $X \cup (X \cap Y) = X, X \cap (X \cup Y) = X,$
- v. $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z), X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z),$
- vi. $(X^c)^c = X,$
- vii. $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c, (X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$ [2].

2.1.2 Bulanık Kümeler Üzerinde İşlemler

Bu kısımda; bulanık kümelerin çarpımı, toplamı, farkı ve simetrik farkı incelenecektir.

Tanım 2.7 $A, B \in F(U)$ olsun. A ve B nin üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_A ve μ_B olsun. A ile B nin cebirsel çarpımı $A.B$ ile gösterilir ve

$$\mu_{A.B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır [2].

Teorem 2.1 $A, B \in F(U)$ için $A.B \subseteq A \cap B$ dir [2].

İspat : $A, B \in F(U)$ ve her $x \in X$ için $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ ve $0 \leq \mu_B(x) \leq 1$ olduğundan

$$\mu_{A.B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \leq \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}$$

$$\mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \leq \mu_{A \cap B}(x)$$

dir. Dolayısıyla $A.B \subseteq A \cap B$.

Tanım 2.8 Herhangi iki $A, B \in F(U)$ bulanık kümeleri verilsin. A ve B nin üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_A ve μ_B olsun. Her $x \in X$ için

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$

şeklinde tanımlanan bulanık kümeye, A ile B bulanık kümelerinin cebirsel toplamı denir ve genellikle $A + B$ şeklinde gösterilir [2].

Tanım 2.9 $A, B \in F(U)$ bulanık kümeleri olsun. A ve B nin üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_A ve μ_B olsun. Her $x \in X$ için

$$\mu_{A-B}(x) = \min \{ \mu_A(x), 1 - \mu_B(x) \}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanan bulanık kümeye, A ile B bulanık kümelerinin cebirsel farkı denir ve genellikle $A - B$ şeklinde gösterilir [2].

Tanım 2.10 $A, B \in F(U)$ olsun. $(A \cup B) - (A \cap B)$ bulanık kümesine A ile B bulanık kümelerinin simetrik farkı denir ve genellikle $A \Delta B$ şeklinde gösterilir [2].

2.1.3 Bir Fonksiyon Altında Bulanık Kümelerin Görüntüsü ve Ters Görüntüsü

Tanım 2.11 X, Y nokta kümeleri ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. B , Y de bir bulanık küme ve üyelik fonksiyonu μ_B olsun. B 'nin ters görüntüsü $f^{-1}(B)$ de X de bir bulanık kümedir ve üyelik fonksiyonu da $\forall x \in X$ için $\mu_{f^{-1}(B)}(x) = \mu_B(f(x))$ şeklinde tanımlanır. Karşıt olarak A , X de bir bulanık küme ve üyelik fonksiyonu da μ_A olsun. A 'nın görüntüsü $f(A)$, Y de bir bulanık kümedir ve üyelik fonksiyonu da $\forall y \in Y$ için

$$\mu_{f(A)}(y) = \begin{cases} \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) & , f^{-1}(y) \neq \emptyset \text{ ise} \\ 0 & , f^{-1}(y) = \emptyset \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Burada $f^{-1}(y) = \{x : f(x) = y\}$ dir [37].

Örnek 2.1 $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{a, b, c\}$ nokta kümeleri verilsin. $f: X \rightarrow Y$, $f(1) = f(2) = a$, $f(3) = b$, $f(4) = c$ iken Y de üyelik fonksiyonu μ_B olan

$B = \{(a, 0.1), (b, 0.3), (c, 0.6)\}$ bulanık kümesi tanımlansın. Bu takdirde X de $f^{-1}(B)$ bulanık kümesi ve üyelik fonksiyonu $\mu_{f^{-1}(B)}$ ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f^{-1}(B) = \{(1, 0.1), (2, 0.1), (3, 0.3), (4, 0.6)\}$$

$$\mu_{f^{-1}(B)}(1) = \mu_B(f(1)) = \mu_B(a) = 0.1$$

$$\mu_{f^{-1}(B)}(2) = \mu_B(f(2)) = \mu_B(a) = 0.1$$

$$\mu_{f^{-1}(B)}(3) = \mu_B(f(3)) = \mu_B(b) = 0.3$$

$$\mu_{f^{-1}(B)}(4) = \mu_B(f(4)) = \mu_B(c) = 0.6 \quad [37].$$

Örnek 2.2 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$ ve $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu $f(1) = a$; $f(2) = a$ ve $f(3) = b$ olacak şekilde X de bir A bulanık kümesi $A = \{(1, 1), (2, 0.3), (3, 0.7)\}$ şeklinde verilsin. A 'nın üyelik fonksiyonu $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ olsun. Bu takdirde Y 'deki $f(A)$ bulanık kümesi; $f(A) = \{(a, 1), (b, 0.7)\}$ ile tanımlanır. Sonlu sayıda elemana sahip kümelerde maksimum ile supremum çakışacaktır. Ayrıca ;

$$\mu_{f(A)}(y) = \begin{cases} \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) & , f^{-1}(y) \neq \emptyset \text{ ise} \\ 0 & , f^{-1}(y) = \emptyset \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Tanımı sonlu kümelerde;

$$\mu_{f(A)}(x) = \max_{x \in f^{-1}} \{ \mu_A(x) \}$$

veya

$$f(A) = \bigvee_{x \in A} \{ (f(x) / \mu_A(x)) \}$$

tanımları aynıdır [37].

Teorem 2.2 $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- a. Her $B \in F(Y)$ bulanık kümesi için $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$
- b. Her $A \in F(X)$ bulanık kümesi için $f(A^c) \geq (f(A))^c$
- c. Her $B, C \in F(Y)$ bulanık kümeleri için $B \leq C$ ise $f^{-1}(B) \leq f^{-1}(C)$
- d. Her $A, D \in F(X)$ bulanık kümeleri için $A \leq D$ ise $f(A) \leq f(D)$
- e. Her $B \in F(Y)$ bulanık kümesi için $f(f^{-1}(B)) \leq B$
- f. Her $A \in F(X)$ bulanık kümesi için $A \leq f^{-1}(f(A))$
- g. $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow Z$ fonksiyonlar olsun. $g \circ f : X \rightarrow Z$ bileşke fonksiyonu ve herhangi bir $C \in F(X)$ bulanık kümesi için $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ dir [37].

2.1.4 Bulanık Alt Gruplar

Tanım 2.12 G herhangi bir grup olsun ve $\mu : G \rightarrow [0,1]$ dönüşümü olsun. $\forall x, y \in G$ için

$$(i) \quad \mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$

$$(ii) \quad \mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$$

oluyorsa μ 'ye bulanık alt grup denir.

μ , G 'nin bulanık alt grubu ise $\forall x \in G$ için $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$ dir [38].

Önerme 2.2 μ , G 'nin bulanık alt grubudur ancak ve ancak $\forall x, y \in G$ için

$$\mu(xy^{-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$
 olmalıdır [39].

Önerme 2.3 Eğer μ , birimi e ile gösterilen G 'nin bulanık alt grubu ise $\forall x \in G$ için $\mu(e) \geq \mu(x)$ dir [38].

İspat : Her $x, y \in G$ için $\mu(xy^{-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ olduğundan $y = x^{-1}$ alınırsa

$$\mu(xx^{-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(x^{-1})\}$$

$$\mu(e) \geq \min\{\mu(x), \mu(x)\}$$

$$\mu(e) \geq \mu(x) \text{ olur.}$$

Tanım 2.13 G bir grup ve μ de G 'nin bulanık alt kümesi olsun; eğer her $x, y \in G$ için

$$(i) \quad \mu(xy) \geq \min \{ \mu(x), \mu(y) \}$$

$$(ii) \quad \mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$$

$$(iii) \quad \mu(e) = 1$$

ise μ 'ye G 'nin bulanık alt grubu denir [40].

Önerme 2.4 G bir grup olsun. μ , G 'nin bulanık alt grubu ise $\mu(x) \neq \mu(y)$ olan her $x \in G$ için $\mu(xy) = \min \{ \mu(x), \mu(y) \}$ dır [40].

İspat: $\mu(x) > \mu(y)$ kabul edelim. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \mu(y) &= \mu(x^{-1}xy) \geq \min \{ \mu(x^{-1}), \mu(xy) \} \\ &= \min \{ \mu(x), \mu(xy) \} = \mu(xy) \geq \min \{ \mu(x), \mu(y) \} \\ &= \mu(y) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Böylece $\mu(xy) = \mu(y) = \min \{ \mu(x), \mu(y) \}$ dir

Önerme 2.5 μ , sonlu bir G 'nin bulanık alt kümesi ve G 'deki işleme göre kapalı ise μ bir bulanık alt gruptur [38].

İspat

$x \in G$ olsun. G sonlu olduğundan x sonlu mertebeye sahiptir. x in mertebesi n olsun.

O zaman $x^n = e$ dir. $x^n = e \Rightarrow x^{n-1} = x^{-1}$ dir. Bulanık alt grup tanımını kullanarak;

$$\mu(x^{-1}) = \mu(x^{n-1}) = \mu(x^{n-2}x) = \min \{ \mu(x^{n-2}), \mu(x) \} \geq \mu(x) \text{ elde edilir.}$$

$$\mu(x^{-1}) \geq \mu(x) \text{ bulunur} \tag{2.1}$$

$$x^n = e \Rightarrow x^{n+1} = x^1$$

$$\mu(x) = \mu(x^{n+1}) = \mu(x^{n+2}x^{-1})$$

$$\mu(x) \geq \min \{ \mu(x^{n+2}), \mu(x^{-1}) \} \text{ ve } \mu(x^{n+2}) \geq \mu(x) \text{ olduğundan } \mu(x) \geq \mu(x^{-1}) \text{ dir} \quad (2.2)$$

(2.1) ve (2.2) eşitliğinden μ bir bulanık alt gruptur.

Önerme 2.6 μ , G 'nin bir bulanık alt grubu olsun. Her $x, y \in G$ için $\mu(xy) = \mu(y)$ olması için gerek ve yeter koşul $\mu(x) = \mu(e)$ olmasıdır [38].

İspat: $\mu(xy) = \mu(y)$ olduğunu kabul edelim. Eğer $y = e$ alırsak $\mu(x) = \mu(e)$ dir.

Karşıt olarak $\mu(x) = \mu(e)$ olduğunu kabul edelim. $\mu(xy) \geq \min \{ \mu(x), \mu(y) \}$ den

$$\mu(xy) \geq \mu(y) \quad (2.3)$$

dir. $\mu(y) = \mu(x^{-1}xy) \geq \min \{ \mu(x^{-1}), \mu(xy) \}$ den

$$\mu(y) \geq \mu(xy) \quad (2.4)$$

dir. (2.3) ve (2.4) ten

$$\mu(xy) = \mu(y)$$

olduğu görülür.

Önerme 2.7 μ , G grubunun bir bulanık alt grubu olsun. $\forall x, y \in G$ için $\mu(x) < \mu(y)$ ise $\mu(xy) = \mu(yx) = \mu(x)$ dir [38].

İspat: $\mu(x) < \mu(y)$ olduğunu kabul edelim. $\mu(xy) \geq \min \{ \mu(x), \mu(y) \} = \mu(x)$ olduğundan $\mu(xy) \geq \mu(x)$ olur. $\mu(x) = \mu(xy y^{-1}) \geq \min \{ \mu(xy), \mu(y) \}$ den $\mu(x) \geq \mu(xy)$ elde edilir. Sonuç olarak $\mu(xy) = \mu(x)$ dir. $\mu(x) = \mu(yx)$ olduğunu benzer şekilde gösterebiliriz. $\mu(x) < \mu(y)$ olduğundan $\mu(yx) \geq \min \{ \mu(y), \mu(x) \} = \mu(x)$ dir. Buradan $\mu(yx) \geq \mu(x)$ olur. $\mu(x) = \mu(y^{-1}yx) \geq \min \{ \mu(y), \mu(yx) \}$ den $\mu(x) \geq \mu(yx)$ elde edilir. Sonuç olarak $\mu(yx) = \mu(x)$ dir.

Örnek 2.3 Klein dörtlü grup $G = \{e, a, b, ab : a^2 = b^2 = e, ab = ba\}$ için $\mu : G \rightarrow [0,1]$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$\mu(e) = 1, \mu(a) = \mu(b) = t, 0 < t < 1$ ve $\mu(ab) = 1$ olsun. Bu durumda μ, G nin bir bulanık alt grubudur. Burada $\mu(ab) = \mu(ba)$ olduğu halde $\mu(a) = \mu(b)$ olduğundan önermenin tersi doğru değildir [41].

2.1.5 Seviye Alt Gruplar

Tanım 2.14 μ, G kümesinin bulanık alt kümesi olsun. Herhangi $t \in [0,1]$ için $G_t = \{x \in G : \mu(x) \geq t\}$ kümesine μ bulanık alt kümesinin bir seviye alt kümesi denir [42].

Teorem 2.3 μ, G 'nin bir bulanık alt grubu ve e de G 'nin birimi olsun. Bu durumda $t \in [0,1]$ olmak üzere $t \leq \mu(e)$ için seviye alt küme G_t, G 'nin bir alt grubudur [42].

İspat : $G_t = \{x \in G : \mu(x) \geq t\}$ ve $\mu(e) \geq t$ olduğundan $e \in G_t$ dir. Böylece $G_t \neq \emptyset$ dir. μ bir bulanık alt grup olduğundan $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ dir. Buradan $\mu(xy) \geq t$ olur. Öyle ise $xy \in G_t$ dir. $x \in G_t$ ise $\mu(x) \geq t$ dir. μ bir bulanık alt grup olduğundan $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$ dir. Buradan $\mu(x^{-1}) \geq t$ bulunur. Bu ise $x^{-1} \in G_t$ demektir. Sonuç olarak G_t seviye alt kümesi G 'nin bir alt grubudur.

Teorem 2.4 G bir grup ve μ de G nin bir bulanık alt kümesi olsun. $t \in [0,1]$ olmak üzere $t \leq \mu(e)$ için G_t, G 'nin bir alt grubu ise μ, G 'nin bir bulanık alt grubudur [42].

2.1.6 Bulanık Halkalar ve Bulanık İdealler

Tanım 2.15 R halkasındaki μ bulanık alt kümesi $\forall x, y \in R$ için

$$(i) \quad \min\{\mu(x), \mu(y)\} \leq \mu(x - y)$$

$$(ii) \quad \min\{\mu(x), \mu(y)\} \leq \mu(xy)$$

şartlarını sağlıyorsa R de bir bulanık alt halkadır [43].

Tanım 2.16 μ , R halkasının bir bulanık alt halkası ve $0 \leq t \leq \mu(0)$ olsun. μ_t , alt halkası μ 'nün bir seviye alt halkası olarak tanımlanır. Eğer $\text{Im } \mu = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, $t_0 > t_1 > \dots > t_n$ olduğunda $\mu_{t_0} \subset \mu_{t_1} \subset \dots \subset \mu_{t_n} = R$ zinciri oluşturur [44].

Lemma 2.1 μ , R halkasının bir bulanık alt halkası olsun. $x, y \in R$ için $\mu(x) < \mu(y)$ olduğunda $\mu(x - y) = \mu(x) = \mu(y - x)$ olur. Eğer μ , R halkasının herhangi bulanık alt halkası μ_t , $t \leq \mu(0)$ olduğunda her bir seviye alt kümesi R 'nin alt halkası olur [44].

Teorem 2.5 R halkasının bir μ bulanık alt kümesi R 'nin bir bulanık alt halkasıdır $\Leftrightarrow \mu_t$, $t \in \text{Im } \mu$ seviye alt kümeleri R 'nin bulanık alt halkalarıdır [44].

Önerme 2.8 R 'nin herhangi bulanık alt halkalarının kesişimi R 'nin bulanık alt halkasıdır [44].

Tanım 2.17 R halkasındaki μ bulanık alt kümesi $\forall x, y \in R$ için

$$(i) \quad \min \{ \mu(x), \mu(y) \} \leq \mu(x - y)$$

$$(ii) \quad \mu(y) \leq \mu(xy)$$

şartlarını sağlıyorsa R de bir bulanık sol idealdir. R halkasındaki μ bulanık alt kümesi $\forall x, y \in R$ için

$$(iii) \quad \min \{ \mu(x), \mu(y) \} \leq \mu(x - y)$$

$$(iv) \quad \mu(x) \leq \mu(xy)$$

şartlarını sağlıyorsa R de bir bulanık sağ idealdir [43].

Tanım 2.18 R halkasındaki μ bulanık alt kümesi $\forall x, y \in R$ için

$$(i) \quad \mu(x - y) \geq \min \{ \mu(x), \mu(y) \}$$

$$(ii) \quad \mu(xy) \geq \max \{ \mu(x), \mu(y) \}$$

şartlarını sağlıyorsa R de bir bulanık idealdir [45].

Tanım 2.19 R de ki μ bulanık alt kümesi, herhangi $t \in \text{Im } \mu$ için $\mu_t = \{x \in R : \mu(x) \geq t\}$ kümesine R nin μ seviyesine göre alt kümesi denir [46].

Teorem 2.6 μ, R nin bulanık alt kümesi olsun. $\forall t \in \text{Im } \mu$ için μ_t nin R de ideal olması için gerek ve yeter koşul μ nün R nin bir bulanık ideal olmasıdır. Burada μ, R nin ideali ise μ_t, μ nün seviye idealleridir [46].

Teorem 2.7 μ, R nin bulanık ideali olsun. μ 'nün μ_t ve μ_s gibi iki seviye ideali eşittir ancak ve ancak $s \leq \mu(x) \leq t$ şartını sağlayan bir $x \in R$ bulunmamasıdır [41].

İspat : $\mu_t = \mu_s$ olsun. $s \leq \mu(x) \leq t$ şartını sağlayan bir $x \in R$ bulunsun. O zaman $\mu_t \not\subset \mu_s$ olur. Çünkü x, μ_s nin elemanıdır fakat μ_t nin elemanı değildir. Bu da baştaki kabulümüzle çelişir. Tersine, $s \leq \mu(x) \leq t$ şartını sağlayan bir $x \in R$ bulunmasın. $s \leq t$ olduğu için $\mu_t \subset \mu_s$ dir. $x \in \mu_s$ olsun. O zaman $\mu(x) \geq s$ olur ve $\mu(x), s$ ile t arasında bir değer almadığından $\mu(x) \geq t$ olur. Bunun sonucu olarak $x \in \mu_t$ olur. Böylece $\mu_s \subset \mu_t$ dir. Sonuç olarak $\mu_t = \mu_s$ olur. Bununla ispat tamamlanmış olur.

2.2 Esnek Kümeler

Tanım 2.20 U evrensel küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. $P(U)$, U 'nun kuvvet kümesi ve $A \subset E$ olarak gösterilsin. (F, A) sıralı ikilisi U üzerinde esnek küme olarak adlandırılır, burada $F : A \rightarrow P(U)$ ile verilen bir tasvirdir. Diğer bir ifadeyle, U üzerinde bir esnek küme, U evreninin alt kümelerinin parametrize edilmiş bir ailesidir. $\varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon), (F, A)$ esnek kümesinin ε –yaklaşımli elemanlarının cümlesi olarak göz önüne alınabilir [1].

Örnek 2.4 Kabul edelim ki, U göz önüne alınan şartlar altındaki evlerin kümesi ve E parametrelerin kümesi olsun. Her bir parametre bir kelime ya da cümledir. $E = \{pahalı, güzel, ahşap, ucuz, etrafı bahçeli, modern, iyi durumda, kötü durumda\}$ olarak alalım. Bu durumda bir esnek küme tanımlamak, pahalı evler, güzel evler ve diğerlerini belirtmek anlamına gelir. (F, E) esnek kümesi, Mr. X 'in satın alacağı “evlerin çekiciliği”ni belirtiyor. Sonraki tartışmalarımız için aynı örneği daha detaylı olarak aşağıda göz önüne alalım. Kabul edelimki $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ ile verilen U evreninde 6 ev olsun ve e_1 “pahalı” parametresini, e_2 “güzel” parametresini, e_3

“ahşap” parametresini, e_4 “ucuz” parametresini, e_5 “bahçeli” parametresini göstermek üzere, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ şeklinde verilsin. Kabul edelim ki $F(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $F(e_2) = \{h_1, h_3\}$, $F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$, $F(e_4) = \{h_1, h_3, h_5\}$ ve $F(e_5) = \{h_1\}$ olsun. (F, E) esnek kümesi U kümesinin alt kümelerinin $\{F(e_i), i=1, 2, 3, \dots\}$ parametrize edilmiş bir ailesidir ve bir nesnenin yaklaşık tanımlarının bir koleksiyonunu verir. Göz önüne alınan F tasviri “evler(.)” şeklindedir. Burada nokta (.), bir $e \in E$ parametresi ile doldurulur. Bu yüzden, $F(e_1)$ fonksiyonel değeri $\{h_2, h_4\}$ kümesi olan “pahalı evler” anlamına gelmektedir.

Bu nedenle, biz (F, E) esnek kümesi aşağıdaki gibi yaklaşımların bir koleksiyonu olarak gösterebiliriz;

$$(F, E) = \left\{ \begin{array}{l} (pahalı\ evler, \{h_2, h_4\}), (güzel\ evler, \{h_1, h_3\}), \\ (tahta\ evler, \{h_3, h_4, h_5\}), \\ (ucuz\ evler, \{h_1, h_3, h_5\}), (bahçeli\ evler, \{h_1\}) \end{array} \right\}$$

Burada her bir yaklaşımın iki kısmı vardır.

- i. Bir tahmini p ; ve
- ii. Bir v yaklaşık değer kümesi (veya basitçe v değer kümesi)

Örneğin $pahalı\ evler, \{h_2, h_4\}$ yaklaşımı için biz, aşağıdaki özelliklere sahibiz.

- i. Tahmini isim yaklaşık evlerdir.
- ii. Yaklaşık değer kümesi veya değer kümesi $\{h_2, h_4\}$ ’tür.

U	“pahalı”	“güzel”	“ahşap”	“ucuz”	“bahçeli”
h_1	0	1	0	1	1
h_2	1	0	0	0	0
h_3	0	1	1	1	0
h_4	1	0	1	0	0
h_5	0	0	1	1	0
h_6	0	0	0	0	0

Tablo 2.1 Esnek kümenin tablo gösterimi

Bu yüzden bir (F, E) esnek kümesi;

$$(F, E) = \{(p_1, v_1), (p_2, v_2), \dots, (p_n, v_n)\}$$

olacak şekilde yaklaşımların koleksiyonu olarak gösterilebilir. Bir esnek kümeyi bir bilgisayarda depolamak ve kodlamak için, esnek kümenin yerini tutan Tablo 2.1'deki ifadeyle temsil edebiliriz [47].

Tanım 2.21 (F, E) esnek kümesinin tüm değer kümelerinin sınıfına, esnek kümenin değer sınıfı denir ve $C_{(F, E)}$ ile gösterilir. Yukarıdaki örnek için, $C_{(F, E)} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ şeklindedir. Açıkça $C_{(F, E)} \subseteq P(U)$ kapsamı doğrudur [4].

Tanım 2.22 U üzerinde (F, A) ve (G, B) esnek kümeleri için, eğer

- (i) $A \subseteq B$ ve
- (ii) $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon)$ ve $G(\varepsilon)$ özdeş yaklaşımlar ise;

(F, A) , (G, B) 'nin esnek alt kümesidir diyebiliriz ve $(F, A) \subseteq (G, B)$ ile gösteririz.

Eğer (G, B) , (F, A) 'nin esnek alt kümesi ise (F, A) 'ya (G, B) 'nin esnek üst kümesidir denir ve $(F, A) \supseteq (G, B)$ ile gösterilir [1].

Tanım 2.23 Eğer (F, A) , (G, B) 'nin esnek alt kümesi ve (G, B) de (F, A) 'nın esnek kümesi ise (F, A) ve (G, B) esnek kümelerine U üzerinde esnek eşittir denir [1].

Örnek 2.5 $A = \{e_1, e_3, e_5\} \subset E$ ve $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \subset E$ şeklinde olsun. Açıkça $A \subset B$ 'dir. (F, A) ve (G, B) aynı $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel kümesi üzerinde $G(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $G(e_2) = \{h_1, h_3\}$, $G(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$, $G(e_5) = \{h_1\}$, $F(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$ ve $F(e_5) = \{h_1\}$ olacak şekilde iki esnek küme olsun. Bu durumda $(F, A) \subseteq (G, B)$ dir [47].

Tanım 2.24 $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ parametrelerin bir kümesi olsun. $\neg E$ ile gösterilen DEĞİL küme $\neg E = \{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_3, \dots, \neg e_n\}$ ile tanımlanır. Burada $\neg e_i = \text{değil } e_i$ her i için [4].

Önerme 2.9 Aşağıdaki sonuçlar aşikardır.

- (i) $\neg(\neg A) = A$
- (ii) $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$
- (iii) $\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$ [4].

Örnek 2.6 Örnek 2.4'de verilen örnek düşünülürse $\neg E = \{\text{pahalı değil, güzel değil, ahşap değil, ucuz değil, bahçeli değil, modern değil, iyi durumda değil, kötü durumda değil}\}$ şeklinde yazılır [47].

Tanım 2.25 Bir (F, A) esnek kümesinin $(F, A)^c$ ile gösterilen tümleyeni $(F, A)^c = (F^c, \neg A)$ olarak tanımlanır. Burada $F^c : \neg A \rightarrow P(U)$, $F^c(\alpha) = U - F(\neg \alpha)$, $\forall \alpha \in \neg A$ ile verilen bir dönüşümdür.

F^c 'yi F 'nin esnek tümleyen fonksiyonu olarak isimlendirelim. Açıkça, $(F^c)^c = F$ ile aynıdır ve $((F, A)^c)^c = (F, A)$ şeklindedir [4].

Örnek 2.7 Örnek 2.4 gözönüne alınırsa $(F, E)^c = \{(pahalı olmayan evler, \{h_1, h_3, h_5, h_6\}), (güzel olmayan evler, \{h_2, h_4, h_5, h_6\}), (ahşap olmayan evler, \{h_1, h_2, h_6\}), (ucuz olmayan evler, \{h_2, h_4, h_6\}), (bahçeli olmayan evler, \{h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\})\}$ şeklinde yazılır [47].

Tanım 2.26 Eğer $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) = \emptyset$ (boş küme) ise U üzerinde bir (F, A) esnek kümesi boş esnek küme olarak isimlendirilir ve $\emptyset$ ile gösterilir [4].

Örnek 2.8 Kabul edelim ki U , göz önüne alınan şartlar altındaki ahşap evlerin kümesi ve A parametrelerin bir kümesi olsun. $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ ile verilen U evreninde beş ev olsun ve $B = \{\text{tuğla, çamur, çelik, taş}\}$ şeklinde verilsin. (F, A) esnek kümesi “evlerin yapımı” olarak tanımlansın. Tuğladan yapılan evler anlamına gelen $F(\text{tuğla})$; çamurdan yapılan evler anlamına gelen $F(\text{çamur})$; çelikten yapılan evler anlamına gelen $F(\text{çelik})$; taştan yapılan evler anlamına gelen $F(\text{taş})$ olarak tanımlanan (F, A) esnek kümesi yaklaşımlarının bir koleksiyonu olarak

$$(F, A) = \left\{ (Tuğladan yapılan evler, \emptyset), (\text{çamurdan yapılan evler}, \emptyset), (\text{çelikten yapılan evler}, \emptyset), (\text{taştan yapılan evler}, \emptyset) \right\}$$

şeklinde yazılır. Burada (F, A) boş esnek kümedir [47].

Tanım 2.27 Eğer $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) = U$ ise U üzerinde bir (F, A) esnek kümesi mutlak esnek küme olarak isimlendirilir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir. Açıkça $\tilde{A}^c = \emptyset$ ve $\emptyset^c = \tilde{A}$ dir [4].

Örnek 2.9 Kabul edelim ki U , göz önüne alınan şartlar altındaki ahşap evlerin kümesi ve B parametrelerin bir kümesi olsun. $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ ile verilen U evreninde beş ev olsun ve $B = \{\text{tuğla değil, çamur değil, çelik değil, taş değil}\}$ şeklinde verilsin. (G, B) esnek kümesi “evlerin yapımı” olarak tanımlansın. Tuğla olmayan evler anlamına gelen $G(\text{tuğla değil})$; çamur olmayan evler anlamına gelen $G(\text{çamur değil})$; çelik olmayan evler anlamına gelen $G(\text{çelik değil})$; taş olmayan evler anlamına gelen

G (taş değil) olarak tanımlanan (G, B) esnek kümesi yaklaşımlarının bir koleksiyonunu olarak

$$(G, B) = \left\{ \left(\text{tuğla olmayan evler}, \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\} \right), \left(\text{çamur olmayan evler}, \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\} \right), \right. \\ \left. \left(\text{çelik olmayan evler}, \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\} \right), \left(\text{taş olmayan evler}, \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\} \right) \right\}$$

şeklinde yazılır. Burada (G, B) mutlak esnek kümedir [47].

Tanım 2.28 Eğer (F, A) ve (G, B) iki esnek küme ise, $(F, A) \wedge (G, B)$ ile gösterilen " $(F, A) \vee (G, B)$ " işlemi $(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B)$ ile tanımlanır. Burada $H(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cap G(\beta), \forall (\alpha, \beta) \in A \times B$ şeklindedir [1]..

Örnek 2.10 “evlerin pahası” ile tanımlanan (F, A) ve “evlerin çekiciliği” olarak tanımlanan (G, B) esnek kümelerini göz önüne alınsın. Kabul edelim ki, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\}$ $A = \{\text{çok pahalı, pahalı, ucuz}\}$ ve $B = \{\text{güzel, bahçeli, ucuz}\}$ şeklinde verilsin. $F(\text{çok pahalı}) = \{h_2, h_4, h_7, h_8\}$, $F(\text{pahalı}) = \{h_1, h_3, h_5\}$, $F(\text{ucuz}) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$, $G(\text{güzel}) = \{h_2, h_3, h_7\}$, $G(\text{bahçeli}) = \{h_5, h_6, h_8\}$, $G(\text{ucuz}) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$ olsun. Bu durumda $(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B)$ olduğundan burada $H(\text{çok pahalı, güzel}) = \{h_2, h_7\}$, $H(\text{çok pahalı, bahçeli}) = \{h_8\}$, $H(\text{çok pahalı, ucuz}) = \emptyset$, $H(\text{pahalı, güzel}) = \{h_3\}$, $H(\text{pahalı, bahçeli}) = \{h_5\}$, $H(\text{pahalı, ucuz}) = \emptyset$, $H(\text{ucuz, güzel}) = \emptyset$, $H(\text{ucuz, bahçeli}) = \{h_6\}$, $H(\text{ucuz, ucuz}) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$ şeklindedir [47].

Tanım 2.29 (F, A) ve (G, B) iki esnek küme olmak üzere $(F, A) \vee (G, B)$ ile gösterilen " $(F, A) \vee (G, B)$ " işlemi $(F, A) \vee (G, B) = (O, A \times B)$ ile tanımlanır. Burada $O(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cup G(\beta), \forall (\alpha, \beta) \in A \times B$ şeklindedir [1]..

Örnek 2.11 Örnek 2.10 göz önüne alınsın. Bu durumda $(F, A) \vee (G, B) = (O, A \times B)$ olduğundan burada $O(\text{çok pahalı, güzel}) = \{h_2, h_3, h_4, h_7, h_8\}$, $O(\text{çok pahalı, bahçeli}) = \{h_2, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8\}$,

$$\begin{aligned}
O(\text{çok pahalı, ucuz}) &= \{h_2, h_4, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\}, \quad O(\text{pahalı, güzel}) = \{h_1, h_2, h_3, h_5, h_7\}, \\
O(\text{pahalı, bahçeli}) &= \{h_1, h_3, h_5, h_6, h_8\}, \quad O(\text{pahalı, ucuz}) = \{h_1, h_3, h_5, h_6, h_9, h_{10}\}, \\
O(\text{ucuz, güzel}) &= \{h_2, h_3, h_6, h_7, h_9, h_{10}\}, \quad O(\text{ucuz, bahçeli}) = \{h_5, h_6, h_8, h_9, h_{10}\}, \\
O(\text{ucuz, ucuz}) &= \{h_6, h_9, h_{10}\} \text{ şeklindedir [47].}
\end{aligned}$$

Önerme 2.10 Aşağıdaki işlemler De Morgan kurallarını sağlar.

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad & ((F, A) \vee (G, B))^c = (F, A)^c \wedge (G, B)^c \\
\text{(ii)} \quad & ((F, A) \wedge (G, B))^c = (F, A)^c \vee (G, B)^c \text{ [4].}
\end{aligned}$$

İspat

(i) Kabul edelimki, $(F, A) \vee (G, B) = (O, A \times B)$ olsun. Bu durumda $((F, A) \vee (G, B))^c = (O, A \times B)^c = (O^c, \neg(A \times B))$ şeklindedir. Buradan

$$\begin{aligned}
(F, A)^c \wedge (G, B)^c &= (F^c, \neg A) \cap (G^c, \neg B) \\
&= (J, \neg A \times \neg B) \\
&= (J, \neg(A \times B))
\end{aligned}$$

burada $J(x, y) = F^c(x) \cap G^c(y)$ elde edilebilir. $(\neg\alpha, \neg\beta) \in \neg(A \times B)$ alalım. Bu takdirde;

$$\begin{aligned}
O^c(\neg\alpha, \neg\beta) &= U - O(\alpha, \beta) \\
&= U - [F(\alpha) \cup G(\beta)] \\
&= [U - F(\alpha)] \cap [U - G(\beta)] \\
&= F^c(\neg\alpha) \cap G^c(\neg\beta) \\
&= J(\neg\alpha, \neg\beta)
\end{aligned}$$

O^c ve J aynıdırlar. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

(ii) Kabul edelim ki, $(F, A) \cap (G, B) = (H, A \times B)$ olsun. Bu durumda,

$((F, A) \cap (G, B))^c = (H, A \times B)^c = (H^c, \neg(A \times B))$ şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned} (F, A)^c \cup (G, B)^c &= (F^c, \neg A) \cup (G^c, \neg B) \\ &= (K, \neg A \times \neg B) \\ &= (K, \neg(A \times B)) \end{aligned}$$

burada $K(x, y) = F^c(x) \cup G^c(y)$ elde edilir. Şimdi $(\neg\alpha, \neg\beta) \in \neg(A \times B)$ alalım. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} H^c(\neg\alpha, \neg\beta) &= U - H(\alpha, \beta) \\ &= U - [F(\alpha) \cap G(\beta)] \\ &= [U - F(\alpha)] \cup [U - G(\beta)] \\ &= F^c(\neg\alpha) \cup G^c(\neg\beta) \\ &= K(\neg\alpha, \neg\beta) \end{aligned}$$

H^c ve K aynıdırlar. Bundan dolayı ispat tamamlanır.

Tanım 2.30 U üzerinde (F, A) ve (G, B) esnek kümelerinin birleşimi, (H, C) dir.

Burada; $C = A \cup B$ olmak üzere $\forall e \in C$ için,

$$H(e) = \begin{cases} F(e) & \text{eğer } e \in A - B, \\ G(e) & \text{eğer } e \in B - A, \\ F(e) \cup G(e) & \text{eğer } e \in A \cap B, \end{cases}$$

ile tanımlanır. Bunu $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C)$ şeklinde yazarız [1]..

Yukarıdaki örnekte, $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C)$ olduğundan burada;

$$H(\text{çok pahalı}) = \{h_2, h_4, h_7, h_8\}, \quad H(\text{pahalı}) = \{h_1, h_3, h_5\}, \quad H(\text{ucuz}) = \{h_2, h_3, h_7\},$$

$$H(\text{güzel}) = \{h_2, h_3, h_7\}, \quad H(\text{bahçeli}) = \{h_5, h_6, h_8\} \text{ şeklindedir.}$$

Tanım 2.31 U üzerinde (F, A) ve (G, B) esnek kümelerinin kesişimi, (H, C) dir. Burada; $C = A \cap B$ olmak üzere $\forall e \in C$ için, $H(e) = F(e)$ veya $H(e) = G(e)$, (her ikisinde aynı küme olduğunda) ile tanımlanır. Bu ifade $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, C)$ şeklinde gösterilir [1].

Yukarıdaki örnekte (F, A) ve (G, B) esnek kümelerin kesişimi (H, C) dir. Burada; $A \cap B = C = \{\text{ucuz}\}$ olduğundan $H(\text{ucuz}) = \{h_2, h_3, h_7\}$ şeklindedir.

Aşağıdaki sonuçlar açıktır.

Önerme 2.11

- (i) $(F, A) \tilde{\cup} (F, A) = (F, A)$
- (ii) $(F, A) \tilde{\cap} (F, A) = (F, A)$
- (iii) $(F, A) \tilde{\cup} \emptyset = (F, A)$, burada $\emptyset$ boş esnek kümedir.
- (iv) $(F, A) \tilde{\cap} \emptyset = \emptyset$
- (v) $(F, A) \tilde{\cup} \tilde{A} = \tilde{A}$, burada $\tilde{A}$ mutlak esnek kümedir.
- (vi) $(F, A) \tilde{\cap} \tilde{A} = (F, A)$ [4].

Önerme 2.12

- (i) $((F, A) \tilde{\cup} (G, B))^c = (F, A)^c \tilde{\cap} (G, B)^c$
- (ii) $((F, A) \tilde{\cap} (G, B))^c = (F, A)^c \tilde{\cup} (G, B)^c$ [4].

İspat.

- (i) Kabul edelimki $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C)$ olsun. Burada;

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \text{eğer } \alpha \in A - B, \\ G(\alpha) & \text{eğer } \alpha \in B - A, \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \text{eğer } \alpha \in A \cap B, \end{cases}$$

şeklindedir. Bu takdirde, $((F, A) \tilde{\cup} (G, B))^c = (H, A \cup B)^c = (H^c, \neg A \cup \neg B)$ şeklindedir.

$H^c(\neg\alpha) = U - H(\alpha)$, $\forall \neg\alpha \in \neg A \cup \neg B$ alalım. Bu takdirde,

$$H^c(\neg\alpha) = \begin{cases} F^c(\neg\alpha) & \text{eğer } \neg\alpha \in \neg A - \neg B, \\ G^c(\neg\alpha) & \text{eğer } \neg\alpha \in \neg B - \neg A, \\ F^c(\neg\alpha) \cup G^c(\neg\alpha) & \text{eğer } \neg\alpha \in \neg A \cap \neg B, \end{cases}$$

şeklindedir. Tekrar, $(F, A)^c \tilde{\cup} (G, B)^c = (F^c, \neg A) \tilde{\cup} (G^c, \neg B) = (K, \neg A \cup \neg B)$ dir.

Burada,

$$K(\neg\alpha) = \begin{cases} F^c(\neg\alpha) & \text{eğer } \neg\alpha \in \neg A - \neg B, \\ G^c(\neg\alpha) & \text{eğer } \neg\alpha \in \neg B - \neg A, \\ F^c(\neg\alpha) \cup G^c(\neg\alpha) & \text{eğer } \neg\alpha \in \neg A \cap \neg B, \end{cases}$$

H^c ve K aynıdır. Bu durumda ispat tamamlanır.

(ii) Kabul edelimki $((F, A) \tilde{\cap} (G, B))^c$ olsun. Bu takdirde,

$$((F, A) \tilde{\cap} (G, B))^c = (H^c, \neg A \cap \neg B)$$

dir. Şimdi $(F, A)^c \tilde{\cap} (G, B)^c = (F^c, \neg A) \tilde{\cap} (G^c, \neg B) = (K, \neg A \cap \neg B)$ alalım. Burada,

$\forall \neg\alpha \in \neg A \cap \neg B$ için

$$K(\neg\alpha) = F^c(\neg\alpha) \text{ veya } K(\neg\alpha) = G^c(\neg\alpha)$$

$$K(\neg\alpha) = F(\alpha) \text{ veya } K(\neg\alpha) = G(\alpha)$$

$$K(\neg\alpha) = H(\alpha), \text{ burada } \alpha \in A \cap B$$

$$K(\neg\alpha) = H^c(\neg\alpha)$$

K ve H^c aynı fonksiyonlardır. Bu yüzden ispat tamamlanmıştır.

Önerme 2.13

Eğer $(F, A), (G, B)$ ve (H, C) U üzerinde üç esnek küme ise bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) $(F, A) \circ ((G, B) \circ (H, C)) = ((F, A) \circ (G, B)) \circ (H, C)$
- (ii) $(F, A) \cap ((G, B) \cap (H, C)) = ((F, A) \cap (G, B)) \cap (H, C)$
- (iii) $(F, A) \cap ((G, B) \circ (H, C)) = ((F, A) \cap (G, B)) \circ ((F, A) \cap (H, C))$
- (iv) $(F, A) \circ ((G, B) \cap (H, C)) = ((F, A) \circ (G, B)) \cap ((F, A) \circ (H, C))$ [4].

Önerme 2.14 $(F, A), (G, B)$ ve (H, C) U üzerinde üç esnek küme olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

- (i) $(F, A) \cup ((G, B) \cup (H, C)) = ((F, A) \cup (G, B)) \cup (H, C)$
- (ii) $(F, A) \cap ((G, B) \cap (H, C)) = ((F, A) \cap (G, B)) \cap (H, C)$
- (iii) $(F, A) \cap ((G, B) \cup (H, C)) = ((F, A) \cap (G, B)) \cup ((F, A) \cap (H, C))$
- (iv) $(F, A) \cup ((G, B) \cap (H, C)) = ((F, A) \cup (G, B)) \cap ((F, A) \cup (H, C))$ [4].

2.3 Bulanık Esnek Kümeler

Bu bölümde Çağman'ın [48,49] makalelerinden yararlanılmıştır.

Tanım 2.32 U başlangıç evrensel kümesi olmak üzere E parametrelerin kümesi olsun. $P(U)$, U 'nun bir kuvvet kümesidir ve $A \subseteq E$ dir. U evrenindeki bir F_A esnek kümesi

$$F_A = \{(x, f_A(x)) : x \in E, f_A(x) \in P(U)\}$$

düzenli sıralı ikililerin kümesiyle tanımlanmaktadır. Burada $f_A : E \rightarrow P(U)$ olarak verilen bir tasvirdir.

f_A, F_A esnek kümesinin yaklaşık fonksiyonu olarak adlandırılır. U üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi $S(U)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.33 $F_A \in S(U)$ olsun. Her $x \in E$ için $f_A(x) = \emptyset$ ise, F_A $F_\emptyset$ ile gösterilen bir boş küme olarak adlandırılır. $f_A(x) = \emptyset$ ifadesi U 'da parametre ile ilişkili olan elemanın olmadığı anlamına gelmektedir.

Tanım 2.34 $F_A \in S(U)$ olsun. Her $x \in E$ için $f_A(x) = E$ ise, F_A $F_{\tilde{A}}$ tarafından gösterilen A evrensel küme olarak adlandırılır. Eğer $A = E$ ise, A evrensel esnek küme $F_{\tilde{E}}$ tarafından gösterilen evrensel küme olarak adlandırılır. Şimdi bulanık esnek kümeyi tanımlayalım.

Bundan sonra, U üzerinden tüm bulanık kümelerin bir kümesi yerine $F(U)$ kullanacağız ve düzeni sağlamak amacıyla sırasıyla bulanık esnek kümeler için $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C \dots$ sembollerini ve bunların uygun bulanık kümeleri için de $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C \dots$ sembollerini kullanacağız.

Tanım 2.35 U başlangıç evrensel kümesi olmak üzere E parametrelerin kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. U evrenindeki bir Γ_A bulanık esnek kümesi

$$\Gamma_A = \{(x, \gamma_A(x)) : x \in E, \gamma_A(x) \in F(U)\}$$

şeklinde sıralı ikililer tarafından tanımlanmış olur. Burada $\forall x \in E$ için

$$\gamma_A : E \rightarrow F(U), \gamma_A(x) = \{\mu_{\gamma_A(x)}(u), u \in U, \mu_{\gamma_A(x)}(u) \in [0, 1]\}$$

U üzerinde bir bulanık kümedir. U üzerindeki tüm bulanık esnek kümelerin kümesini $FS(U)$ olarak gösterilecektir.

Tanım 2.36 $\Gamma_A \in FS(U)$ olsun. Her $x \in A$ için $\gamma_A(x) = \emptyset$ ise, bu durumda $\Gamma_A; \Gamma_\emptyset$ olarak gösterilen bir boş bulanık esnek küme olarak adlandırılır.

Tanım 2.37 $\Gamma_A \in FS(U)$ olsun. Her $x \in A$ için $\gamma_A(x) = U$ ise, bu durumda $\Gamma_A; \Gamma_{\tilde{A}}$ olarak gösterilen bir evrensel bulanık esnek küme olarak adlandırılır. Eğer $A = E$ ise,

bu durumda bir evrensel bulanık esnek küme $\Gamma_{\tilde{E}}$ olarak gösterilen evrensel bulanık esnek küme olarak adlandırılır.

Örnek 2.12 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ bir evrensel kümesi ve $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ tüm parametrelerin bir kümesi olarak alalım. $A = \{x_2, x_3, x_4\}$ olmak üzere $\gamma_A(x_2) = \{0.5/u_2, 0.9/u_4\}$, $\gamma_A(x_3) = \emptyset$, $\gamma_A(x_4) = U$ ise, $\Gamma_A = \{(x_2, \{0.5/u_2, 0.9/u_4\}), (x_4, U)\}$ olarak yazılabilir.

Eğer $B = \{x_1, x_3\}$ ve $\gamma_B(x_1) = \emptyset$, $\gamma_B(x_3) = \emptyset$ ise, Γ_B bulanık esnek kümesi $\Gamma_B = \Gamma_{\emptyset}$ bir boş bulanık esnek kümedir.

Eğer $C = \{x_1, x_2\}$ ve $\gamma_C(x_1) = U$, $\gamma_C(x_2) = U$ ise Γ_C bulanık esnek kümesi $\Gamma_C = \Gamma_{\tilde{C}}$ bir C evrensel bulanık esnek küme olur.

Eğer $D = E$ ve her $x_i \in E$ için $\gamma_D(x_i) = U$ ise, Γ_D bulanık esnek kümesi $\Gamma_D = \Gamma_{\tilde{E}}$ bir evrensel bulanık esnek küme olur.

Tanım 2.38 $\Gamma_A, \Gamma_B \in FS(U)$ olsun. Bu durumda Γ_A her $x \in E$ için $\gamma_A(x) \subseteq \gamma_B(x)$ ise $\Gamma_A \subseteq \Gamma_B$ olarak gösterilen Γ_B bulanık esnek kümesinin bir bulanık esnek alt kümesi olarak adlandırılır.

Not 2.2: Klasik alt kümelerin tanımlarında olduğu gibi, $\Gamma_A \subseteq \Gamma_B$ olmak üzere Γ_A bulanık esnek kümesinin her elemanının Γ_B bulanık esnek kümesinin her elemanı olacağı anlamına gelmez. Örneğin $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ nesnelerin bir evrensel kümesi ve $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ kümesini tüm parametrelerin bir kümesi olarak alalım. Eğer

$A = \{x_1\}$, $B = \{x_1, x_3\}$, $\Gamma_A = \{(x_1, \{0.2/u_2\})\}$ ve $\Gamma_B = \{(x_1, \{0.9/u_2, 0.3/u_3, 0.05/u_4\}), (x_3, \{0.2/u_1, 0.7/u_5\})\}$ verilsin. Bu durumda her $x \in E$ için $\gamma_A(x) \subseteq \gamma_B(x)$ ifadesi geçerli olur. Böylece, $\Gamma_A \subseteq \Gamma_B$ 'dır. $(x_1, \{0.2/u_2\})$ olduğu halde $(x_1, \{0.2/u_2\}) \notin \Gamma_B$ dir.

Tanım 2.39 $\Gamma_A \in FS(U)$ olsun. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $A \subseteq E$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Γ_A bulanık esnek küme gösterimi aşağıdaki biçimde sunulabilir.

	x_1	x_2	$\dots$	x_n
u_1	$\mu_{\gamma_A(x_1)}(u_1)$	$\mu_{\gamma_A(x_2)}(u_1)$	$\dots$	$\mu_{\gamma_A(x_n)}(u_1)$
u_2	$\mu_{\gamma_A(x_1)}(u_2)$	$\mu_{\gamma_A(x_2)}(u_2)$	$\dots$	$\mu_{\gamma_A(x_n)}(u_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
u_m	$\mu_{\gamma_A(x_1)}(u_m)$	$\mu_{\gamma_A(x_2)}(u_m)$	$\dots$	$\mu_{\gamma_A(x_n)}(u_m)$

Tablo 2.2 Bulanık esnek küme gösterimi

Burada $\mu_{\gamma_A(x)}$, γ_A bulanık esnek kümesinin üyelik fonksiyonudur. Eğer $i = 1, 2, \dots, m$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ için $\mu_{\gamma_A(x_j)}(u_i)$ ise, bu durumda Γ_A bulanık esnek kümesi bir matris olarak tek biçimde karakterize edilebilir.

$$[a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Bu U üzerinde tanımlı Γ_A bulanık esnek kümesinin bir $m \times n$ bulanık esnek matrisi olarak adlandırılır.

2.4 Gamma Halkaları

Şimdi, Γ – halkalarının tanımını ve bir Γ – halkanın ideal tanımını vereceğiz.

Tanım 2.40 S ve Γ iki toplamsal abelyan grup olsunlar. Eğer $S \times \Gamma \times S \rightarrow S$ olacak şekilde bir dönüşüm $(a, \alpha, b) \mapsto a\alpha b$ olmak üzere aşağıdaki durumları sağlarsa S 'ye Γ – halka denir; her $a, b, c \in S$ ve her $\alpha, \beta \in \Gamma$ için,

$$(i) \quad (a + b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c,$$

$$(ii) \quad a\alpha(b + c) = a\alpha b + a\alpha c,$$

$$(iii) \quad a(\alpha + \beta)b = a\alpha b + a\beta b,$$

$$(iv) \quad a\alpha(b\beta c) = (a\alpha b)\beta c.$$

S 'nin bir alt kümesi olan A , S Γ – halkasının bir sol (sağ) ideali; S 'nin bir toplamsal alt grubudur ve $S\Gamma A = \{x\alpha y \mid x, y \in S, \alpha \in \Gamma\}$ olmak üzere $S\Gamma A \subset A$ ($S\Gamma A \subset A$) şeklindedir. Eğer A hem sol ideal hemde bir sağ ideal ise, bu durumda A S 'nin bir Γ – ideali (gamma ideali) olarak adlandırılır [34].

Tanım 2.41 S ve K iki Γ – halka ve f S 'den K 'ya bir dönüşüm olsun. $\forall a, b \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $f(a + b) = f(a) + f(b)$ ve $f(a\alpha b) = f(a)\alpha f(b)$ oluyorsa f 'ye bir Γ – homomorfizma denir [35].

Tanım 2.42 μ , S Γ – halkasında bulanık küme olmak üzere $\forall x, y \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$ için aşağıdaki koşulları sağlarsa μ 'ye S Γ – halkasının bir bulanık ideali denir.

$$(i) \quad \mu(x - y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$

ve

$$(ii) \quad \mu(x\alpha y) \geq \max\{\mu(x), \mu(y)\} \text{ [34].}$$

BÖLÜM 3

BULANIK ESNEK GAMMA HALKALARI

Bu bölümde A boştan farklı küme olmak üzere bir Γ – halka ve burada R , A ’nın bir elemanı, Γ ’nın bir elemanı ve A ’nın bir elemanı arasındaki keyfi bir üçlü bağıntısı olarak bahsedeceğiz. Yani R , $A \times \Gamma \times A$ ’nın bir altkümesidir aksi takdirde bu durum açıklanamaz. Değer fonksiyon kümesini $f : N \rightarrow P(A)$ olarak gösteririz ve her $a \in N$ için, $f(a) = \{b \in A \mid R(a\alpha b); \forall \alpha \in \Gamma\}$ olarak tanımlanabilir. Bu durumda (f, N) çifti A üzerinde bir esnek kümedir.

Tanım 3.1 (f, N) ’yi A Γ – halkası üzerinde bir esnek küme olarak alalım. Bu durumda (f, N) A üzerinde bir esnek Γ – halkası olarak adlandırılabilmesi için her $a \in N \subset A$ olmak üzere $f(a)$ A ’nın bir alt Γ – halkasıdır.

Tanım 3.2 $(R, +, \cdot)$ bir halka olarak alalım ve $A \subset E$ olacak şekilde E bir parametre kümesi olsun. Bir f dönüşümü $f : A \times \Gamma \times A \rightarrow [0, 1]^R$ şeklinde verilsin, burada $[0, 1]^R$ R ’nin bütün bulanık alt kümelerini ifade eder ve;

$$f : A \times \Gamma \times A \rightarrow [0, 1]^R$$

$$(a, \alpha, b) \mapsto f(a\alpha b) = f_{a\alpha b}$$

$$f_{a\alpha b} = f_\mu : R \rightarrow [0, 1], \{\mu = a\alpha b\}$$

şeklinde tanımlansın. $N = A \times \Gamma \times A$ alındığında eğer (f, N) aşağıdaki durumları sağlarsa R üzerinde bir bulanık esnek Γ – halka olarak adlandırılır. $\forall x, y \in R$ için;

- (i) $f_\mu(x+y) \geq f_\mu(x) \wedge f_\mu(y)$
- (ii) $f_\mu(-x) \geq f_\mu(x)$
- (iii) $f_\mu(x\alpha y) \geq f_\mu(x) \wedge f_\mu(y)$

Diğer bir deyişle $\forall a, b \in A$ ve $\alpha \in \Gamma$ için f 'nin f_μ bulanık alt kümesine karşılık gelen dönüşümü altındaki görüntüsü R 'nin bir bulanık esnek Γ – althalkadır.

Teorem 3.1 (f, N) R üzerinde bir bulanık esnek Γ – kümesi olsun. Bu durumda (f, N) 'nin R üzerinde bir bulanık esnek Γ – halkası olması için gerek ve yeter koşul her $\mu \in N$ ve $x, y \in R$ için aşağıdakileri sağlaması gerekir;

- (i) $f_\mu(x-y) \geq f_\mu(x) \wedge f_\mu(y)$
- (ii) $f_\mu(x\alpha y) \geq f_\mu(x) \wedge f_\mu(y)$.

İspat : İlk olarak varsayalım ki (f, N) R üzerinde bir bulanık esnek Γ – halka olsun. Burada $\forall \mu \in N$ ve $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} f_\mu(x-y) &= f_\mu(x+(-y)) \\ &\geq f_\mu(x) \wedge f_\mu(-y) \\ &\geq f_\mu(x) \wedge f_\mu(y) \end{aligned}$$

sağlanır. Tersine, verilen durumların sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $\forall \mu \in N$ ve $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} f_\mu(0) &= f_\mu(x-x) \\ &\geq f_\mu(x) \wedge f_\mu(x) \\ &= f_\mu(x) \end{aligned}$$

olur ve burada 0 R 'nin toplamaya göre birimidir.

$$\begin{aligned} f_\mu(-x) &= f_\mu(0-x) \\ &\geq f_\mu(0) \wedge f_\mu(x) \\ &\geq f_\mu(x) \wedge f_\mu(x) \end{aligned}$$

$$= f_{\mu}(x).$$

Şimdi,

$$\begin{aligned} f_{\mu}(x+y) &= f_{\mu}(x-(-y)) \\ &\geq f_{\mu}(x) \wedge f_{\mu}(-y) \\ &\geq f_{\mu}(x) \wedge f_{\mu}(y). \\ f_{\mu}(x\alpha y) &\geq f_{\mu}(x) \wedge f_{\mu}(y) \end{aligned}$$

dolayısıyla ispat tamamlanır.

Örnek 3.1 $R = Z_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, $A = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ ve $\Gamma = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ olarak alalım ve $\forall \bar{x}, \bar{y} \in R, \alpha \in \Gamma$ için $\bar{x}\alpha\bar{y} = \overline{x\alpha y}$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda R bir Γ -halkadır. $N = A \times \Gamma \times A$ olmak üzere, $f: N \rightarrow P(R)$ bir değer fonksiyon kümesini alırsak

$$f_a = \{(\bar{0}, 0.8), (\bar{1}, 0.2), (\bar{2}, 0.4), (\bar{3}, 0.2), (\bar{4}, 0.4), (\bar{5}, 0.2)\}$$

$$f_b = \{(\bar{0}, 0.9), (\bar{1}, 0.5), (\bar{2}, 0.5), (\bar{3}, 0.1), (\bar{4}, 0.5), (\bar{5}, 0.5)\}$$

ve

$$f_c = \{(\bar{0}, 0.7), (\bar{1}, 0.3), (\bar{2}, 0.3), (\bar{3}, 0.3), (\bar{4}, 0.3), (\bar{5}, 0.3)\}$$

olacak şekilde tanımlayalım. Açıkça (f, N) , R üzerinde bulanık esnek kümedir. Ayrıca $\forall \mu \in N$ için f_{μ} R 'nin bir bulanık ideali olduğunu görüyoruz. Böylece (f, N) R üzerinde bir bulanık esnek Γ -halkadır.

Tanım 3.3 (f, N) ve (g, M) R üzerinde iki bulanık esnek Γ -halka olsun.

" $(f, N) \text{ AND } (g, M)$ " ifadesi $(f, N) \tilde{\wedge} (g, M)$ şeklinde gösterilir ve $(f, N) \tilde{\wedge} (g, M) = (h, S)$ olarak tanımlanır, burada $S = N \cap M$ olmak üzere $\forall s \in S$ için $h_s = f_s \cap g_s$ dir.

Teorem 3.2 (f, N) ve (g, M) R üzerinde iki bulanık esnek Γ – halka ise, bu durumda $(f, N) \tilde{\wedge} (g, M)$ de R üzerinde bir bulanık esnek Γ – halkadır.

İspat: $(f, N) \tilde{\wedge} (g, M) = (h, S)$ olsun ve burada $S = N \cap M$ olmak üzere $\forall s \in S$ için $h_s = f_s \cap g_s$ dir. $\forall x, y \in R$ ve $\alpha \in \Gamma$ alınırsa

$$\begin{aligned} h_s(x - y) &= f_s(x - y) \cap g_s(x - y) \\ &\geq (f_s(x) \wedge f_s(y)) \wedge (g_s(x) \wedge g_s(y)) \\ &= (f_s(x) \wedge g_s(x)) \wedge (f_s(y) \wedge g_s(y)) \\ &= (f_s \cap g_s)(x) \wedge (f_s \cap g_s)(y) \\ &= h_s(x) \wedge h_s(y) \end{aligned}$$

$$h_s(x - y) \geq h_s(x) \wedge h_s(y)$$

$$\begin{aligned} h_s(x\alpha y) &= f_s(x\alpha y) \cap g_s(x\alpha y) \\ &\geq f_s(x) \wedge f_s(y) \wedge \alpha \wedge (g_s(x) \wedge g_s(y)) \\ &= (f_s(x) \wedge g_s(x)) \wedge (f_s(y) \wedge g_s(y)) \wedge \alpha \\ &= (f_s \cap g_s)(x) \wedge (f_s \cap g_s)(y) \wedge \alpha \\ &= h_s(x) \wedge h_s(y) \wedge \alpha \end{aligned}$$

$$h_s(x\alpha y) \geq h_s(x) \wedge h_s(y).$$

Böylece $\forall s \in S = N \cap M$ için, h_s R 'nin bir bulanık esnek Γ – alt halkasıdır ve dolayısıyla $(f, N) \tilde{\wedge} (g, M)$ ifadesi R üzerinde bir bulanık esnek Γ – halkadır.

Tanım 3.4 (f, N) ve (g, M) R üzerinde iki bulanık esnek Γ – halka olsun " $(f, N) OR (g, M)$ " ifadesi $(f, N) \tilde{\vee} (g, M)$ şeklinde gösterilir, $(f, N) \tilde{\vee} (g, M) = (h, S)$ burada $S = N \cup M$ olmak üzere $\forall s \in S$ için $h_s = f_s \cup g_s$ olarak tanımlanır.

Teorem 3.3 (f, N) ve (g, M) R üzerinde iki bulanık esnek Γ – halka ise, bu durumda $(f, N) \tilde{\vee} (g, M)$ de R üzerinde bir bulanık esnek Γ – halkadır.

İspat : Teorem 3.2'nin ispatına benzer olarak yapılabilir.

Tanım 3.5 (f, N) ve (g, M) iki bulanık esnek Γ –halkasının R üzerindeki arakesiti $(f, N) \tilde{\cap} (g, M)$ şeklinde gösterilir, $(f, N) \tilde{\cap} (g, M) = (h, S)$, burada $S = N \cap M$ ve $\forall \mu \in S$ için ya $f_\mu = h_\mu$ ya da $g_\mu = h_\mu$ olarak tanımlanır.

Teorem 3.4 (f, N) ve (g, M) R üzerinde iki bulanık esnek Γ –halka olsun. Bu durumda $(f, N) \tilde{\cap} (g, M)$ de R üzerinde bir bulanık esnek Γ –halkadır.

İspat: $(f, N) \tilde{\cap} (g, M) = (h, S)$, burada $\mu \in S = N \cap M$ olmak üzere $\forall x, y \in R, \alpha \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} h_\mu(x-y) &= f_\mu(x-y) \wedge g_\mu(x-y) \\ &\geq f_\mu(x) \wedge f_\mu(y) \wedge g_\mu(x) \wedge g_\mu(y) \\ &= (f_\mu(x) \wedge g_\mu(x)) \wedge (f_\mu(y) \wedge g_\mu(y)) \\ &= (f_\mu \wedge g_\mu)(x) \wedge (f_\mu \wedge g_\mu)(y) \\ &= h_\mu(x) \wedge h_\mu(y). \end{aligned}$$

Burada f_μ, g_μ, h_μ $\mu \in S$ parametresine karşılık gelen R 'nin bulanık esnek Γ – alt kümeleridir.

$$\begin{aligned} h_\mu(x\alpha y) &= f_\mu(x\alpha y) \wedge g_\mu(x\alpha y) \\ &\geq f_\mu(x) \wedge f_\mu(y) \wedge g_\mu(x) \wedge g_\mu(y) \\ &= (f_\mu(x) \wedge g_\mu(x)) \wedge (f_\mu(y) \wedge g_\mu(y)) \\ &= (f_\mu \wedge g_\mu)(x) \wedge (f_\mu \wedge g_\mu)(y) \\ &= h_\mu(x) \wedge h_\mu(y). \end{aligned}$$

Tanım 3.6 (f, N) ve (g, M) iki bulanık esnek Γ –halkasının R üzerindeki birleşimi $(f, N) \tilde{\cup} (g, M)$ şeklinde gösterilir. $(f, N) \tilde{\cup} (g, M) = (h, C)$ olmak üzere burada $\forall c \in C = N \cup M, \forall x, y \in R$ ve $\alpha \in \Gamma$ için

$$h_c = \begin{cases} f_c & , \text{eğer } c \in N - M \\ g_c & , \text{eğer } c \in M - N \\ f_c \vee g_c & , \text{eğer } c \in N \cap M \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.5 (f, N) ve (g, M) R üzerinde iki bulanık esnek Γ -halka olsun. Bu durumda $N \cap M = \emptyset$ ise, $(f, N) \tilde{\cup} (g, M)$ de R üzerinde bir bulanık esnek Γ -halkadır.

İspat : $(f, N) \tilde{\cup} (g, M) = (h, C)$ alınırsa burada $\forall c \in C = N \cup M, \forall x, y \in R$ ve $\alpha \in \Gamma$ için

$$h_c = \begin{cases} f_c & , eğer \ c \in N - M \\ g_c & , eğer \ c \in M - N \\ f_c \vee g_c & , eğer \ c \in N \cap M \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz.

$c \in N - M$ için:

$$\begin{aligned} h_c(x - y) &= f_c(x - y) \\ &\geq f_c(x) \wedge f_c(y) \end{aligned}$$

$c \in N - M$ olduğundan dolayı $h_c(x) = f_c(x)$ ve $h_c(y) = f_c(y)$ olduğunu söyleyebiliriz, dolayısıyla $h_c(x - y) \geq h_c(x) \wedge h_c(y)$ elde edilir.

$$\begin{aligned} h_c(x\alpha y) &= f_c(x\alpha y) \\ &\geq f_c(x) \wedge f_c(y) \\ &= h_c(x) \wedge h_c(y) \\ h_c(x\alpha y) &\geq h_c(x) \wedge h_c(y). \end{aligned}$$

$c \in M - N$ için:

$$\begin{aligned} h_c(x - y) &= g_c(x - y) \\ &\geq g_c(x) \wedge g_c(y) \\ &= h_c(x) \wedge h_c(y) \\ h_c(x - y) &\geq h_c(x) \wedge h_c(y). \end{aligned}$$

$$h_c(x\alpha y) = g_c(x\alpha y)$$

$$\geq g_c(x) \wedge g_c(y)$$

$$= h_c(x) \wedge h_c(y)$$

$$h_c(x\alpha y) \geq h_c(x) \wedge h_c(y).$$

Tanım 3.7 (f, N) ve (g, M) R üzerinde iki bulanık esnek Γ –halka olsun. (g, M) bulanık esnek Γ –halkası aşağıdaki koşulları sağlarsa (f, N) ’nin bulanık esnek alt Γ –halkası olarak adlandırılır;

- (i) $M \subset N$
- (ii) $\forall \mu \in N$ için, g_μ f_μ ’nin bulanık alt Γ –halkasıdır.

Tanım 3.8 $(f_i, N_i)_{i \in I}$ ailesi bulanık esnek Γ –halkaları olsun. O halde bu bulanık esnek Γ –halkaların arakesiti aşağıdaki koşulları sağlarsa (g, M) bulanık esnek Γ –halkası olarak tanımlanır;

- (i) $M = \bigcap_{i \in I} N_i$
- (ii) Her $\mu \in M$ için, bir tane $i_0 \in I$ vardır öyle ki $g_\mu = f_{\mu}(i_0)$. Bu durumda, $\bigcap_{i \in I} (f_i, N_i) = (g, M)$ olarak yazabiliriz.

Tanım 3.9 $(f_i, N_i)_{i \in I}$ ailesi bulanık esnek Γ –halkaları olsun. Bu durumda;

- (i) $(g, M) = \tilde{\bigwedge}_{i \in I} (f_i, N_i)$ bir bulanık esnek Γ –halkadır her $\mu = (\mu_i)_{i \in I} \in M$ için $M = \prod_{i \in I} N_i$ ve $g_\mu = \bigcap_{i \in I} f_{i, \mu_i}$.
- (ii) $(g, M) = \tilde{\bigvee}_{i \in I} (f_i, N_i)$ bir bulanık esnek Γ –halkadır her $\mu = (\mu_i)_{i \in I} \in M$ için $M = \prod_{i \in I} N_i$ ve $g_\mu = \bigcup_{i \in I} f_{i, \mu_i}$.

Teorem 3.6 (f, N) R üzerinde bulanık esnek Γ –halka olsun. $\{(f_i, N_i) | i \in I\}$ (f, N) ’nin bulanık esnek alt Γ –halkasının boş olmayan bir ailesi ise, burada I index kümesi, bu durumda;

- (i) $\tilde{\bigwedge}_{i \in I} (f_i, N_i)$ (f, N) ’nin bulanık esnek alt Γ –halkasıdır.

- (ii) $\tilde{\wedge}_{i \in I}(f_i, N_i) (f, N)$ 'nin bulanık esnek alt Γ – halkasıdır.
- (iii) $\tilde{\vee}_{i \in I}(f_i, N_i) (f, N)$ 'nin bulanık esnek alt Γ – halkasıdır, burada her $i, j \in I$ için $N_i \cap N_j = \emptyset$.

İspat: Tanım 3.8'den ve $\forall i \in I$ için (f_i, N_i) ailesi (f, N) 'nin bulanık esnek alt Γ – halkası olduğundan, her $\mu \in M = \bigcap_{i \in I} N_i \subset N$ ve $i \in I$ için $g_\mu = f_{i, \mu}$ kullanarak $g : M \rightarrow P(R)$ elde edilir. Bu durumda her $\mu \in M$ ve $i \in I$ için $f_{i, \mu} R$ 'nin bir alt Γ – halkasıdır bundan dolayı $\bigcap_{i \in I} f_{i, \mu} R$ 'nin bir alt Γ – halkasıdır. Böylece $(g, M) R$ üzerinde bir bulanık esnek Γ – halkadır. Sonuç olarak $(g, M) = \tilde{\bigcap}_{i \in I}(f_i, N_i) (f, N)$ 'nin bulanık esnek alt Γ – halkasıdır. (ii) ve (iii) durumların ispatları benzer şekilde yapılabilir.

Tanım 3.10 $(f, N) R$ üzerinde bir bulanık esnek Γ – halka olsun. Bu durumda (f, N) aşağıdaki durumları sağlarsa R üzerinde bir bulanık esnek Γ – ideal olarak isimlendirilir. Her $\mu \in N$ ve $x, y \in R, \alpha \in \Gamma$ için,

- (i) $f_\mu(x - y) \geq f_\mu(x) \wedge f_\mu(y)$
- (ii) $f_\mu(x \alpha y) \geq f_\mu(x) \vee f_\mu(y)$

ve $(f, N) \tilde{\succ}_\Gamma R$ olarak gösterilir.

Teorem 3.7 R üzerinde alınan (f, N) ve (g, M) bulanık esnek Γ – idealleri için $N \cap M \neq \emptyset$ olmak üzere $(f, N) \tilde{\cap} (g, M) \tilde{\succ}_\Gamma R$ dir.

İspat: Tanım 3.5'den $S = N \cap M$ olup her $s \in S = N \cap M$ için, $h_s = f_s \cap g_s$ olmak üzere $(f, N) \tilde{\cap} (g, M) = (h, S)$ yazabiliriz. $\forall x, y \in R$,

$$\begin{aligned} h_s(x - y) &= f_s(x - y) \cap g_s(x - y) \\ &\geq (f_s(x) \wedge f_s(y)) \cap (g_s(x) \wedge g_s(y)) \\ &= (f_s(x) \wedge g_s(x)) \wedge (f_s(y) \wedge g_s(y)) \end{aligned}$$

$(f, N) \tilde{\triangleright}_{\Gamma} R$ ve $(g, M) \tilde{\triangleright}_{\Gamma} R$ olduğundan, her $s \in S$ için f_s ve g_s R 'nin bulanık esnek Γ – idealleri olduğunu biliyoruz, dolayısıyla $h_s(x-y) \geq h_s(x) \wedge h_s(y)$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
h_s(x\alpha y) &= f_s(x\alpha y) \cap g_s(x\alpha y) \\
&\geq (f_s(x) \vee f_s(y)) \wedge (g_s(x) \vee g_s(y)) \\
&= (f_s(x) \wedge (g_s(x)) \vee (f_s(y) \wedge g_s(y))) \\
&= f_s \cap g_s(x) \vee f_s \cap g_s(y) \\
&= h_s(x) \vee h_s(y).
\end{aligned}$$

(h, S) bulanık esnek Γ – ideal ve bundan dolayı da $(f, N) \tilde{\cap} (g, M) = (h, S) \tilde{\triangleright}_{\Gamma} R$.

Teorem 3.8 I ve J ayrık olmak üzere, R üzerinde (f, I) ve (g, J) bulanık esnek Γ – idealleri için $(f, I) \tilde{\cup} (g, J) \tilde{\triangleright}_{\Gamma} R$ dir.

İspat: $(f, I) \tilde{\triangleright}_{\Gamma} R$ ve $(g, J) \tilde{\triangleright}_{\Gamma} R$ olduğunu varsayalım, Tanım 3.6'dan her $\mu \in K$ için $K = I \cup J$ ve $(f, I) \tilde{\cup} (g, J) = (h, K)$ olmak üzere;

$$h_{\mu}(c) = \begin{cases} f_{\mu}(c) & , eğer \quad c \in I - J \\ g_{\mu}(c) & , eğer \quad c \in J - I \\ f_{\mu}(c) \vee g_{\mu}(c) & , eğer \quad c \in I \cap J \end{cases}$$

yazabiliriz. $I \cap J = \emptyset$ olduğundan her $c \in K$ için ya $c \in I - J$ veya $c \in J - I$ dir. Eğer $c \in I - J$ ise, bu durumda $(f, I) \tilde{\triangleright}_{\Gamma} R$ olduğundan $h_{\mu} = f_{\mu}$ R 'nin idealidir. Eğer $c \in J - I$ ise, bu durumda da $(g, J) \tilde{\triangleright}_{\Gamma} R$ olduğundan $h_{\mu} = g_{\mu}$ R 'nin idealidir. Böylece her $c \in K$ için, h_{μ} R 'nin idealidir ve dolayısıyla $(f, I) \tilde{\cup} (g, J) = (h, K) \tilde{\triangleright}_{\Gamma} R$ elde edilir.

Teorem 3.9 (f, N) , R üzerinde bir bulanık esnek Γ –ideal olsun. J index kümesi olmak üzere eğer $\{(f_j, I_j) \mid j \in J\}$ ailesi (f, N) ’nin bulanık esnek Γ –ideallerinin boştan farklı bir ailesi ise, burada;

$$(i) \quad \bigcap_{j \in J} (f_j, I_j) \tilde{\triangleright}_{\Gamma} R$$

$$(ii) \quad \bigwedge_{j \in J} (f_j, I_j) \tilde{\triangleright}_{\Gamma} R$$

$$(iii) \quad \bigvee_{j \in J} (f_j, I_j) \tilde{\triangleright}_{\Gamma} R, \text{ burada } I_j \cap I_k = \{0\} \text{ her } j, k \in J.$$

Tanım 3.11 (f, N) ve (g, M) sırasıyla A ve B üzerinde iki bulanık esnek Γ –halka olarak alalım. $F: A \rightarrow B$ ve $G: N \rightarrow M$ iki fonksiyon olsun. Bu durumda, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa (F, G) ikilisi bulanık esnek Γ –halka homomorfizması olarak adlandırılır;

$$(i) \quad F \text{ bir örten halka homomorfizmasıdır,}$$

$$(ii) \quad G \text{ bir örten halka homomorfizmasıdır,}$$

$$(iii) \quad \forall \mu \in N \text{ için, } F(f_{\mu}) = (g_{\mu})G.$$

Eğer (f, N) ve (g, M) arasında bir bulanık esnek Γ –halka homomorfizması varsa, (f, N) (g, M) ’ye bulanık esnek homomorfik olduğunu söyleriz, ve $(f, N) \sim_{\Gamma} (g, M)$ şeklinde gösterilir. Ek olarak eğer F bir izomorfizma ve (f, N) (g, M) ’ye bulanık esnek homomorfik ise $(f, N) \simeq_{\Gamma} (g, M)$ şeklinde gösterilir.

Şimdi, bulanık esnek Γ –halkalarının homomorfik görüntüsünü ve ters görüntüsünü göstereceğiz. Ayrıca homomorfik görüntüsünün ve ters görüntüsünün bir bulanık esnek Γ –halka olduklarını söyleyeceğiz.

Tanım 3.12 N ve M sırasıyla X ve Y bulanık esnek Γ –kümeleri için parametre kümeleri olmak üzere, $\varphi: X \rightarrow Y$ ve $\psi: N \rightarrow M$ iki fonksiyon olsun. Bu durumda (φ, ψ) ikilisi X ’den Y ’e bir bulanık esnek Γ –fonksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 3.13 (f, N) ve (g, M) , X ve Y üzerinde iki bulanık esnek Γ –halka olsun. (φ, ψ) ikilisi X ’den Y ’e bir bulanık esnek Γ –fonksiyonu olarak alalım.

- (i) (f, N) ’nin görüntüsü (φ, ψ) bulanık esnek Γ –fonksiyonu altında $(\varphi, \psi)(f, N)$ şeklinde gösterilir ve Y üzerinde bulanık esnek Γ –halkadır, $(\varphi, \psi)(f, N) = (\varphi(f), \psi(N))$ olarak ifade edilir. Burada $\forall k \in \varphi(N), \forall y \in Y$ için,

$$\varphi(f)_k(y) = \begin{cases} \bigvee_{\varphi(x)=y} \bigvee_{\varphi(a)=k} f_a(x) & , \text{eğer } x \in \varphi^{-1}(y) \\ 0 & , \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

- (ii) (g, M) ’nin ters görüntüsü (φ, ψ) bulanık esnek Γ –fonksiyonu altında $(\varphi, \psi)^{-1}(g, M)$ şeklinde gösterilir ve X üzerinde bulanık esnek Γ –halkadır, $(\varphi, \psi)^{-1}(g, M) = (\varphi^{-1}(g), \psi^{-1}(M))$ olarak ifade edilir. Burada $\forall x \in X$ ve $\forall a \in \psi^{-1}(M)$ için, $\varphi^{-1}(g)_a(x) = g_{\psi(a)}(\varphi(x))$ şeklindedir.

Eğer φ ve ψ bire-bir(örten) ise, bu durumda (φ, ψ) ikilisi de bire-bir(örten) olur.

Tanım 3.14 (φ, ψ) ikilisi X ’den Y ’e bir bulanık esnek Γ –fonksiyonu olarak alalım. Eğer φ X ’den Y ’e bir homomorfizma ise, bu durumda (φ, ψ) ikilisi bulanık esnek Γ –homomorfizması olarak adlandırılır. Eğer φ , X ’den Y ’e bir izomorfizma ve ψ bire-bir dönüşümü N ’den M ’ye örten ise, bu durumda (φ, ψ) ikilisi bulanık esnek Γ –izomorfizması olarak adlandırılır.

Teorem 3.10 (f, N) , R üzerinde bir bulanık esnek Γ –halka ve (φ, ψ) , R ’den S ’ye bir bulanık esnek Γ –homomorfizması olsun. Bu durumda $(\varphi, \psi)(f, N)$, S üzerinde bir bulanık esnek Γ –halkadır.

İspat: $k \in \psi(N)$ ve $y_1, y_2 \in Y$ olarak alalım. Eğer $\varphi^{-1}(y_1) = \emptyset$ veya $\varphi^{-1}(y_2) = \emptyset$ ise ispat açıktır. $\varphi(x_1) = y_1, \varphi(x_2) = y_2$ olduğunu varsayalım. Her $x_1, x_2 \in X$ için

$$\begin{aligned} \varphi(f)_k(y_1 - y_2) &= \bigvee_{\varphi(x_1 - x_2) = y_1 - y_2} \bigvee_{\psi(a)=k} f_a(k) \\ &\geq \bigvee_{\psi(a)=k} f_a(x_1 - x_2) \\ &\geq \bigvee_{\psi(a)=k} (f_a(x_1) \wedge f_a(x_2)) \end{aligned}$$

$$= \bigvee_{\psi(a)=k} f_a(x_1) \wedge \bigvee_{\psi(a)=k} f_a(x_2)$$

bu eşitsizlik sağlanır, burada $\varphi(x_1) = y_1$, $\varphi(x_2) = y_2$ bulunur. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \varphi(f)_k(y_1 - y_2) &\geq \left(\bigvee_{\varphi(x_1)=y_1} \bigvee_{\psi(a)=k} f_a(x_1) \right) \wedge \left(\bigvee_{\varphi(x_2)=y_2} \bigvee_{\psi(a)=k} f_a(x_2) \right) \\ &= \varphi(f)_k(y_1) \wedge \varphi(f)_k(y_2) \end{aligned}$$

elde edilir ve benzer olarak $\varphi(f)_k(y_1 \alpha y_2) \geq \varphi(f)_k(y_1) \wedge \varphi(f)_k(y_2)$ bulunur.

Teorem 3.11 (g, M) , S üzerinde bir bulanık esnek Γ – halka ve (φ, ψ) , R 'den S 'ye bir bulanık esnek Γ – homomorfizması olsun. Bu durumda $(\varphi, \psi)^{-1}(g, M)$ R üzerinde bir bulanık esnek Γ – halkadır.

İspat: $a \in \psi^{-1}(B)$ ve $x_1, x_2 \in X$, $\alpha \in \Gamma$ olarak alalım.

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(g)_a(x_1 \alpha x_2) &= g_{\psi(a)}(\varphi(x_1 \alpha x_2)) \\ &= g_{\psi(a)}(\varphi(x_1) \alpha \varphi(x_2)) \\ &\geq g_{\psi(a)}(\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2)) \\ &= \varphi^{-1}(g)_a(x_1) \wedge \varphi^{-1}(g)_a(x_2) \end{aligned}$$

ve benzer olarak $\varphi^{-1}(g)_a(x_1 - x_2) \geq \varphi^{-1}(g)_a(x_1) \wedge \varphi^{-1}(g)_a(x_2)$ elde edilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Ekonomi, çevre ve sağlık bilimi, mühendislik gibi pek çok alandaki karmaşık problemlerdeki bazı belirsizlik tiplerinin varlığı, bu problemleri çözmek için bilinen klasik metotları başarılı bir şekilde kullanmamızı engeller.

Bulanık esnek küme üzerinde yapılan araştırmalar, ortaya çıktığı günden bu yana hızla büyümüştür. Oluşturduğu kavramsal çerçeve ve sonuçları itibarıyla şu anda oldukça geniş bir perspektife sahiptir.

Uygulama alanlarının genişliği ve bu alanlarda oluşturduğu sonuçların etkisi bakımından bulanık esnek küme teorisi bugün bilimsel çalışmalarda önemli bir yer tutmaktadır. Bunların yanı sıra teori, endüstriyel sahalarda uygulanmaya başlamıştır. Geliştirilen son teoremler, bulanık esnek kavramı ilke olmak üzere mühendislik, fizik, kimya, biyoloji, ekonomi gibi konularda sistemleri modellemek üzere kullanılmaktadır.

Bu tez çalışmasında, Öztürk [36] da esnek gamma halka tanımı kullanılarak bulanık halkalara uygulanması sonucunda bulanık esnek gamma halka kavramı verildi. Bu kavram üzerinde kesişim, birleşim, AND, OR operatörleri uygulanıp bazı özellikler verildi ve genelleştirme yapıldı. Ayrıca bu kavram üzerinde bulanık esnek gamma ideali gibi çeşitli cebirsel yapılar tanımlandı, bu yapılar ilgili örneklerle gösterildi. Bulanık esnek gamma halka homomorfizması tanımı yapıldı ve bu tanım ile ilgili homomorfik görüntü ve ters görüntü yapılar gibi çeşitli cebirsel yapılar tanımlandı. Bu yapıların aynı zamanda bulanık esnek gamma halkası olduğu ifade edildi.

Çalışmanın temel amacı bulanık esnek küme kavramını tanıtarak çeşitli cebirsel yapıları uygulayarak genişletmeyi, bu kavramları araştırmacılara sunmak ve bunları yeni uygulama alanları için teşvik etmek beklenmektedir.

Bizim bu tezle yaptığımız çalışmada Bulanık Esnek Gamma Halkası hakkında temel teoremler verilerek bu sonuçların yukarıda belirtilen uygulamalara benzer gelecekte alana ait mühendisler tarafından bir teorik alt yapı oluşturması beklenmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Molodtsov, D., (1999). "Soft set theory-first results", Comput.Math. Appl., 37, 19-37.
- [2] Zadeh, L.A., (1965). "Fuzzy sets", Inform. Control., 8, 338-353.
- [3] Zadeh, L.A., (1973). "Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes", IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, smc-3:1.
- [4] Mamdani E.H ve Asillian S., (1974). "An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller", Int. S. Man. Mach. Studies, 7 (1),1-13.
- [5] Maji, P.K., Roy, A.R. ve Biswas R., (2002). "An application of soft sets in a decision making problem", Comput.Math. Appl., 44, 1077-1083.
- [6] Maji, P.K., Roy, A.R. ve Biswas R., (2003). "Soft set theory", Comput.Math. Appl.,45,555-562.
- [7] Pawlak,Z., (1982). "Rough Sets", International Journal of Information and Computer Sciences, 11 (1),341-356.
- [8] Xiao, Z., Li, Y., Zhong, B. ve Yang, X. (2003). "Research on synthetically evaluating method for business competitive capacity based on soft set", Statical Research, 52-54.
- [9] Yang, H., Qu, C. ve Li N-C. (2004), "The induction and decision analysis of clinical diagnosis based on rough sets and soft sets" (Fangzhi Gaoxiao Jichukexue Xuebao Ed.), 17(3), 208-212.
- [10] Chen, D., Tsang, E.C.C. ve Yeung D.S. (2005), "Some notes on the parameterization reduction of soft sets an", International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 3,1442-1445.
- [11] Chen, D., Tsang, E.C.C., Yeung, D.S. ve Wang, X. (2005). "The parameterization reduction of soft sets and its applications", Comput. Math Appl., 49, 757-763.
- [12] Kong, Z., Gao, L., Wang, L. ve Li S. (2008), " The normal Parameter Reduction of Soft Sets and Its Algorithm", Computers and Mathematics with Applications, 56 (1) 3029-3037.

- [13] Xiao, Z., Chen, L., Zhong, B. ve Ye S. (2005), "Recognition for Soft Information Based on The Theory of Soft Sets", In Proceedings of ICSSSM-05 (Ed: J.Chen), IEEE, 2, 1104-1106
- [14] Pei, D. ve Miao, D. (2005), "From Soft Sets to Information Systems , In proceedings of Granular Computing"(Eds: X. Hu., Q. Liu, A. Skowron, T.Y.Lin, R.R. Yager, B. Zhang) IEEE, 2, 617-621.
- [15] Mushrif, M.M., Sengupta, S. ve Ray, A.K. (2006), "Texture Classification Using a Novel, Soft Set Theory Based on Clasification Algorithm", Lecture Notes In Computer Science, 3851, 246-254.
- [16] Jun, Y.B.,(2008),"Soft BCK/BCI-algebras" Comput.Math. Appl., 56, 1408-1413.
- [17] Jun, Y.B. ve Park, C.H. (2008),"Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI- algebras", Inform. Sci., 178, 2466-2475.
- [18] Park, C.H., Jun, Y.B. ve Öztürk, M.A. (2008), "Soft WS-algebras". Commun., Korean Math. Soc., 23 (3), 313-324.
- [19] Feng, F., Jun Y.B. ve Zhao X. (2008), "Soft semirings", Computers and Mathematics with Applicaitons, 56 (10), 2621-2628.
- [20] Sun, Q-M., Zhang, Z-L. ve Liu J. (2008)," Soft Sets and Modules"(In Guoyin Wang,Tian-rui Li, Jerzy W. Grzymala-Busse,Duoqian Miao, Andrzej Skowron, Yiyu 54 Yao Eds.) Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT, Proceedings, Springer,403-409.
- [21] Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K. ve Shabir, M. (2009), "On some new operations in soft set theory", Comput. Math. Appl., 57 (9), 1547-1553.
- [22] Maji, P.K., Biswas, R. ve Roy A.R. (2001)," Fuzzy Soft Sets", Journal Of Fuzzy Mathematics, 9 (3), 589-602.
- [23] Roy, A.R. ve Maji, P.K. (2007), "A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems", Journal of Computational and Applied Mathematics, 203 (1),412-418.
- [24] Yang, X., Yu, D., Yang, J. ve Wu C. (2007)," Generalization of Soft Set Theory: From Crisp to Fuzzy Case". In Fuzzy Information and Engineering: Proceedings of ICFIE, (Bing-Yuan Cao Ed.), Advances in Soft Computing, Springer, 345-355.
- [25] Enginoğlu, S. (2008), Esnek Karar Verme Metodları, Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tokat.
- [26] Aktas, H. ve Çağman N. (2007), "Soft sets and soft groups", Inform. Sci., 177, 2726-2735.
- [27] Acar U., Koyuncu F. ve Tanay B. (2010)," Soft sets and soft ring", Computers and Mathematics with Applicaitons, 59 , 3458-3463.
- [28] Jun Y.B., Lee D.S ve Öztürk M.A. (2011), "Applications of soft sets in rings" .
- [29] İnan, E. ve Öztürk, M.A. (2011)," Fuzzy Soft Rings and fuzzy soft ideals", Neural Comput. and Appl.

- [30] Nobusawa N. (1978), "On generalization of the ring theory", Osaka J. Math. 1,185-190.
- [31] Barnes W.E. (1966), "On the Γ – rings of Nobusawa", Pasific J. Math. 18,411-422.
- [32] Jun Y.B. ve Lee C.Y. (1992) "Fuzzy Γ – rings", Pusan Kyongman Math. J. 8,163-170.
- [33] Öztürk M.A., Uçkun M. ve Jun Y.B. (2003), "Fuzzy ideals in gamma rings", Turk-J. Math. 27(3),369-374.
- [34] Dutta, T.K. ve Chanda T. (2005). "Structures of fuzzy ideals of Γ -ring", Bull. Malays.Math. Sci. Soc., 28, 9-18.
- [35] Dutta, T.K. ve Chanda, T. (2007), "Fuzzy prime ideals in Γ -rings", Bull. Malays.Math. Sci. Soc., 30, 65-73.
- [36] Öztürk M.A. ve İnan E. (2011), "Soft Γ -rings and idealistic soft Γ -rings", Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics ,1(1),71-80.
- [37] Keskin E. (2006), "Fuzzy Cebirsel Yapılar", Yüksek Lisans Tezi, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [38] Asaad, M. ve Abou-Zaid S. (1993), "Groups and fuzzy subgroups II" Fuzzy Sets and Systems, 56, 375 – 377.
- [39] Foster, D.H. (1979), "Fuzzy topological groups", Journal of Mathematical Analysis and Applications, (67),549-564
- [40] AKGÜL, M. 1988. Some properties of fuzzy groups. Journal of mathematical Analysis and Applications, (133):93-100.
- [41] Ersoy, B.A. (1999) Bulanık Gruplar üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [42] Das, P.S. (1981), "Fuzzy Groups and Level Subgroups", Journal of Mathematical Analysis and Appl., (84), 264-269.
- [43] Gupta, K.C. ve Kantroo M.K. (2001), "Generalized product of fuzzy subsets of a ring", Fuzzy Sets and Systems, (117), 419-429.
- [44] Dixit, V.N. (1992), "On Fuzzy Rings", Fuzzy Sets and Systems,(49), 205-213.
- [45] De-Gang, C. ve Su Yun, L. (1998), "Fuzzy Factor Rings", Fuzzy Sets and Systems, (94), 125-127.
- [46] Ersoy, B.A. (2004), "On the generalization of cartesian product of fuzzy subgroups and ideals", Journal of Engineering and Natural Sciences, (1), 95-100
- [47] Enginoğlu S. (2008), Esnek kümeler ve esnek karar verme metodları, Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [48] Çağman, N., Çıtak, F. ve Enginoğlu, S. (2010), "Fuzzy parametrized fuzzy soft set theory and its applications", Turkish Journal of Fuzzy Systems, 1 (1), 21-35.

- [49] Çağman, N., Çitak, F. ve Enginoğlu S. (2010), “Fuzzy Soft theory and its applications”, Iranian Journal of fuzzy systems.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Serkan ONAR
Doğum Tarihi ve Yeri : 20.02.1988 / Bakırköy
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : serkan10ar@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2010
Lise	Sayısal	İbrahim Turhan Lisesi	2006

YAYINLARI

Makale

S. Onar, B.A. Ersoy and U.Tekir, Fuzzy soft Γ -ring, Iranian Journal Of Science and Technology Transaction A: Science, (2012)

Bildiri

S. Onar, B.A. Ersoy and U.Tekir, Fuzzy soft Γ -ring, INTERNATIONAL CONFERENCE ON APPLIED ANALYSIS AND ALGEBRA (ICAAA2012)