

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODU İLE İNTEGRAL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMÜ**

SELİM FINDIK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. NURAN GÜZEL**

İSTANBUL, 2012

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODU İLE İNTEGRAL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMÜ**

Selim FINDIK tarafından hazırlanan tez çalışması 19.07.2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Nuran GÜZEL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Nuran GÜZEL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Hamdullah ŞEVLİ
İstanbul Ticaret Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu çalışma süresince bilgilerini benimle paylaşan ve önerileriyle bana rehberlik eden değerli hocam Doç. Dr. Nuran GÜZEL'e, manevi desteğini hep yanımda hissettiğim sevgili arkadaşım Kenan KAYA'ya ve eşime teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs, 2012

Selim FINDIK

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vi
KISALTMA LİSTESİ	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
ÇİZELGE LİSTESİ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
BÖLÜM 1	1
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Bulgular	3
BÖLÜM 2	4
İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÖZELLİKLERİ VE SINIFLANDIRILMASI	4
2.1 İntegral Denklemlerin Genel Özellikleri.....	4
2.2 İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması.....	4
2.2.1 Lineerliğe Göre Sınıflandırma	5
2.2.2 Tekilliliğe Göre Sınıflandırma.....	5
2.2.3 Yapılarına Göre Sınıflandırma	6
2.2.4 Homojenliğe Göre Sınıflandırma	6
2.2.5 İntegral Sınırlarına Göre Sınıflandırma	7
2.3 İntegro-Diferansiyel Denklemler	8
2.4 İki Boyutlu İntegral Denklemler	8
2.5 İntegral Denklem Sistemleri.....	9

BÖLÜM 3.....	11
HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODUNUN İNTEGRAL DENKLEMLERDE KULLANIMI ...	11
3.1 Homotopi Kavramı, Pertürbasyon Teorisi ve Homotopi Pertürbasyon Metodu	11
3.1.1 Homotopi Kavramı.....	11
3.1.2 Pertürbasyon Teorisi	12
3.1.3 Homotopi Pertürbasyon Metodu	13
3.2 İntegral Denklemlerin Çözümünde Homotopi Pertürbasyon Metodunun Kullanımı	14
3.2.1 Lineer İntegral Denklemlerin Çözümünde HPM'nin Kullanımı.....	15
3.2.2 Lineer Olmayan İntegral Denklemlerin Çözümünde HPM'nin Kullanımı	18
3.3 İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Çözümünde HPM'nin Kullanımı	23
3.4 İki Boyutlu İntegral Denklemlerin Çözümünde HPM'nin Kullanımı.....	24
3.5 İntegral Denklemler Sisteminin Çözümünde HPM'nin Kullanımı	25
3.6 İntegral Denklemlerin Çözümünde Kullanılan Bazı Farklı Metotlar.....	28
3.6.1 Direkt Hesaplama Metodu	28
3.6.2 Seri Çözüm Metodu	29
3.6.3 Adomian Ayrıştırma Metodu	30
3.6.4 Varyasyonel İterasyon Metodu	32
3.6.5 Diferansiyel Dönüşüm Metodu	35
3.7 İntegral Denklemlerin Analitik ve Sayısal Çözümleri	42
3.7.1 İntegral Denklemlerin Analitik Çözümleri	42
3.7.2 İntegral Denklemlerin Sayısal Çözümleri.....	64
BÖLÜM 4.....	84
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	84
KAYNAKLAR.....	85
EK-A.....	89
MATLAB PROGRAMI KODLARI	89
A-1 Örnek 3.12 İçin Matlab Programı Kodları.....	89
A-2 Örnek 3.13 İçin Matlab Programı Kodları.....	91
A-3 Örnek 3.14 İçin Matlab Programı Kodları.....	93
A-4 Örnek 3.15 İçin Matlab Programı Kodları.....	95
A-5 Örnek 3.16 İçin Matlab Programı Kodları.....	96
ÖZGEÇMİŞ.....	98

SİMGE LİSTESİ

A	Genel diferansiyel operatör
A_n	Adomian polinomları
B	Sınır operatörü
F	Fonksiyonel operatör
H_N	He polinomları
L	Diferansiyel veya integral operatörü
M	Lineer operatör
N	Lineer olmayan operatör
u_{AAM}	AAM ile elde edilen yaklaşık çözüm
u_{DDM}	DDM ile elde edilen yaklaşık çözüm
u_{HPM}	HPM ile elde edilen yaklaşık çözüm
u_{VIM}	VİM ile elde edilen yaklaşık çözüm
$\tilde{u}_n$	Sınırlı varyasyon
Ω	Tanım kümesi
Γ	Tanım kümesi sınırı

KISALTMA LİSTESİ

AAM	Adomian Ayrıştırma Metodu
DDM	Diferansiyel Dönüşüm Metodu
DHM	Direkt Hesaplama Metodu
HPM	Homotopi Pertürbasyon Metodu
SÇM	Seri Çözüm Metodu
VİM	Varyasyonel İterasyon Metodu

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1	Örnek 3.12 için HPM ve VİM'in uygulanması sonucu elde edilen sayısal değerler ile tam sonuçlar..... 68
Şekil 3.2	Örnek 3.12 için HPM ve VİM'in uygulanması sonucu oluşan hatalar 68
Şekil 3.3	Örnek 3.13 için HPM ve VİM'in uygulanması sonucu elde edilen sayısal değerler ile tam sonuçlar..... 72
Şekil 3.4	Örnek 3.13 için HPM ve VİM'in uygulanması sonucu oluşan hatalar 72
Şekil 3.5	Örnek 3.14 için HPM, AAM ve VİM'in uygulanması sonucu elde edilen sayısal değerler ile tam sonuçlar..... 77
Şekil 3.6	Örnek 3.14 için HPM, AAM ve VİM'in uygulanması sonucu oluşan hatalar.77

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 3.1	Bazı bir boyutlu fonksiyonların dönüşüm formları 37
Çizelge 3.2	Bazı iki boyutlu fonksiyonların dönüşüm formları 40
Çizelge 3.3	Örnek 3.12 için HPM ve VİM'in uygulanması sonucu oluşan hatalar 67
Çizelge 3.4	Örnek 3.13 için HPM ve VİM'in uygulanması sonucu oluşan hatalar 71
Çizelge 3.5	Örnek 3.14 için HPM, AAM, VİM ve DDM'nin uygulanması sonucu oluşan hatalar..... 76
Çizelge 3.6	Örnek 3.15 için HPM ve DDM'nin uygulanması sonucu elde edilen sayısal sonuçlar..... 80
Çizelge 3.7	Örnek 3.16 için HPM ve DDM'nin uygulanması sonucu oluşan hatalar.. 83

HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODU İLE İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Selim FINDIK

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nuran GÜZEL

Son yıllarda yapılan çalışmalarda integral denklemlerin analitik ve sayısal çözümünü elde etmek için birçok metot geliştirilmiştir. Bu amaçla geliştirilen metotlardan biri de Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM)'dur. Yapılan tez çalışmasında HPM'nin integral denklemlerde kullanımı açıklanmıştır. Bu metodun integral denklemleri çözmedeki etkinliği ve kullanışlılığı çeşitli örneklerde uygulanarak değerlendirilmiştir.

Tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde HPM ile ilgili genel bilgiler ve bu metot kullanılarak yapılan çalışmalar literatür özeti kısmında açıklanmıştır. Tez çalışmasının amacı kısaca ifade edilmiş, elde edilen bulgular açıklanmıştır. İkinci bölümde integral denklemlerin özellikleri açıklanmış ve sınıflandırılması yapılmıştır. Üçüncü bölümde HPM'nin özellikleri ve integral denklemlerde kullanımı incelenmiştir. HPM dışında integral denklemleri çözmek için kullanılan Direkt Hesaplama Metodu (DHM), Seri Çözüm Metodu (SÇM), Adomian Ayrıştırma Metodu (AAM), Varyasyonel İterasyon Metodu (VİM), Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DDM) açıklanmıştır. Bazı integral denklem örneklerine HPM ve açıklanan diğer metotlar uygulanmıştır. Dördüncü bölümde de elde edilen analitik ve sayısal sonuçlara göre HPM'nin etkinliği ve kullanışlılığı değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Integral denklemler, Homotopi pertürbasyon metodu

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SOLUTION OF INTEGRAL EQUATIONS THROUGH
HOMOTOPY PERTURBATION METHOD**

Selim FINDIK

Mathematics Department

M. Sc. Thesis

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Nuran GÜZEL

In this study Homotopy Perturbation Method (HPM) is investigated which is one of the recently developed methods for solving integral equations numerically and analytically. Its effectiveness and practicality in solving integral equations is shown with some specific examples.

This text consists of four sections where the first section includes some introductory explanations about HPM as well as the aim and outcomes of this study. In the second section a classification of integral equations is given and their properties are explained, while in the subsequent section characteristics of HPM and its use in solving integral equations are handled. Also; some other numerical methods such as Direct Method, Series Solution Method, Adomian Decomposition Method, Variational Iteration Method and Differential Transform Method are presented, which are also used to obtain numerical solutions to integral equations. HPM and other methods counted above are employed in solving some integral equations numerically and results obtained through their application are compared with each other. In fourth and last section some judgments are made with regard to effectiveness and practicality of HPM in the light of the applications and their results given in the preceding section.

Keywords: Integral equations, Homotopy perturbation method

1.1 Literatür Özeti

Uygulamalı bilimler ve mühendislikte önemli bir yere sahip olan ve integral denklemlerin çözümü için de kullanılan Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM) He J.H. tarafından ortaya konulmuştur. He J.H., pertürbasyon metodu ile topolojide kullanılan homotopi kavramını birleştirerek bu metodu oluşturmuştur. HPM birçok matematikçi ve mühendis tarafından çeşitli fonksiyonel eşitlikleri çözmede kullanılmıştır. Biazar J. ve Ghazvini H., HPM'yi Schrödinger denklemlerine analitik çözüm elde etmek için AAM metodu ile birlikte uygulamıştır. Yapılan çalışmaya göre HPM etkili ve kolay bir metot olarak değerlendirilmiştir[1]. He J.H HPM'yi lineer olmayan sınır değer problemlerine uygulamıştır. Elde edilen sonuçları Adomian metodunun uygulanması ile oluşan sonuçlarla karşılaştırmıştır. Ele alınan sınır değer problemleri için HPM'yi uygun ve etkili bir metot olarak değerlendirmiştir[2]. Abbasbandy S., Riccati diferansiyel denklemleri için HPM ve AAM'yi uygulamıştır. Elde edilen sonuçlara göre iki metodun karşılaştırmasını yapmış, HPM'yi etkili ve basit bir metot olarak değerlendirmiştir[3]. Biazar J. ve Azimi F. çeşitli Helmholtz denklemleri örneklerinde analitik çözüm elde etmek için HPM'yi uygulamışlardır. Elde ettikleri sonuçlara göre değerlendirme yaparak HPM'yi etkili ve başarılı bulmuşlardır[4]. Liu Y., Li Z. ve Zhang Y. HPM'yi, çeşitli biyolojik popülasyon denklemlerine sayısal çözüm elde etmek için uygulamışlardır. Elde edilen sayısal çözümlere göre HPM başarılı bulunmuştur[5]. Ganji D.D ve Sadighi A. HPM ile VİM'i çeşitli ısı transfer denklemlerine uygulamışlardır. HPM zor olan bir problemi basitleştirerek çözen bir metot olarak ifade edilmiştir. HPM ve VİM uygulandıkları lineer olmayan problemlerden elde edilen sayısal çözümlere göre diğer metotlardan

daha başarılı bulunmuştur[6]. Ganji D.D ve Sadighi A. lineer olmayan reaksiyon-difüzyon denklem sistemlerinde HPM'yi uygulamışlardır. HPM'nin lineer olmayan mühendislik problemlerinde geniş bir kullanım alanına sahip olduğu belirtilmiş ve yapılan çalışmaya göre AAM ile karşılaştırıldığında, HPM'nin daha etkili bir metot olduğu ifade edilmiştir[7]. He J.H. HPM'yi dalga denklemlerinde uygulamıştır. HPM, dalga denklemlerinde geniş uygulama alanına sahip bir metot olarak ifade edilmiştir. Bilgisayar matematik programları kullanıldığında karmaşık lineer olmayan sistemleri çözen güçlü bir metot olarak gösterilmiştir[8]. HPM kullanılarak yapılan çalışmalar göz önüne alındığında bu metodun basit, etkili ve kullanım alanı geniş olan bir metot olduğu söylenebilir.

İntegral denklemlerin analitik veya sayısal çözümüne ulaşmak için Galerkin Metodu[9] Dikdörtgen Kuralı[10], Adomian Ayrıştırma Metodu[11], Diferansiyel Dönüşüm Metodu[12], Yamuk Kuralı[13], Simpson Kuralı[14], Runga-Kutta Yöntemi[15], Homotopi Analiz Metodu[16], Seri Çözüm Metodu[17], Varyasyonel İterasyon Metodu[18],[19] gibi birçok metot ve yöntem geliştirilmiştir.

Analitik metotlarda verilen problemin çözümü fonksiyon şeklinde ifade edilmektedir. Bazı problemlerin analitik çözüm yöntemi olmasına karşın birçoğunun da bilinen yöntemler yardımıyla çözümünü elde etmek mümkün olamamaktadır. Bu nedenle integral denklemlerin sayısal çözümleriyle ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda sayısal yöntemlerin analitik çözümlere yakın sonuçlar verdiği görülmüştür. Nadjafi J.S., Samadi O.R.N. ve Tohidi E. Galerkin Metodu ile iki boyutlu integral denklemlerin[9], Babolian E. ve Dastani N. HPM ile iki boyutlu lineer olan ve lineer olmayan Volterra integral denklemlerin[20], Al-Khaled K. ve Allan F. Ayrıştırma Metodu ile lineer olmayan integro-diferansiyel denklemlerin[11], Arikoglu A. ve Ozkol I. DDM ile integral ve integro-diferansiyel denklemlerin[12], Tari A., Rahimi M.Y., Shahmorad S. ve Talati F. DDM ile iki boyutlu lineer olan ve lineer olmayan Volterra integral denklemlerin[21] sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Elde edilen sayısal çözümlerin analitik çözümlere yakın sonuçlar verdiği görülmüştür. Özellikle son yıllarda bilgisayar teknolojisinin sağladığı imkanların artması ve uygulama kolaylığı nedeniyle sayısal yöntemler analitik yöntemlere tercih edilmektedir.

Matematikte ve mühendislikte birçok alanda sayısal çözüm elde etmek için kullanılan metotlardan biri olan HPM integral denklemlerde de kullanılmaktadır. Babolian E. ve Dastani N. iki boyutlu lineer olan ve lineer olmayan Volterra integral denklemlerde[20], Biazar J. ve Ghazvini, H. lineer olmayan Fredholm integral denklemlerde[22], Mirzaei S.M. Volterra integral denklemlerde[23], Nadjafi J.S. ve Ghorbani A. lineer olmayan integral ve integro-diferansiyel denklemlerde[24], Babolian E. ve Dastani N. lineer olmayan Volterra-Fredholm integral denklemlerinde[25], Golbabai A. ve Javidi M. integro-diferansiyel denklemlerde[26] bu metodu uygulamış ve başarılı bulmuşlardır.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasında integral denklemlerin HPM ile analitik ve sayısal çözümleri incelenecek, çeşitli sayısal örnekler verilecektir. Bu örneklerle Direkt Hesaplama Metodu (DHM), Seri Çözüm Metodu (SÇM), Adomian Ayrıştırma Metodu (AAM), Varyasyonel İterasyon Metodu (VİM), Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DDM) uygulanarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılacaktır. HPM'nin integral denklemlerin çözümünü elde etmedeki etkinliği ve kullanışlılığı incelenecektir.

1.3 Bulgular

HPM'nin integral denklemlerin analitik çözümlerini elde etmede etkili ve uygulanması kolay bir metot olduğu görülmüştür. Fakat her integral denklemin HPM ile veya açıklanan diğer metotlarla analitik çözümünü elde etmek mümkün değildir. Analitik çözümün elde edilemediği durumlarda sayısal çözümlere başvurulmuştur. MATLAB(R2008a) bilgisayar programı kullanılarak çeşitli integral denklem örneklerinin HPM ve açıklanan diğer metotlar ile sayısal çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen sayısal çözümlerdeki başarının ele alınan integral denkleme bağlı olarak değiştiği ve MATLAB bilgisayar programı ile HPM'nin kolay bir şekilde kodlanarak sayısal sonuçların elde edildiği görülmüştür.

İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÖZELLİKLERİ VE SINIFLANDIRILMASI

İntegral denklemler özellikle uygulamaları bilimlerde önemli bir yere sahiptir ve birçok mühendislik alanında yaygın olarak kullanılmaktadır.

İntegral denklemler için yapılan temel tanımlardan biri aşağıdaki şekildedir.

Tanım 2.1 İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında olduğu denklemlerdir[27].

İntegral denklemler çeşitli özelliklerine göre sınıflandırılmıştır.

Bu bölümde önce integral denklemler kısaca genel özellikleri ile açıklanacak, ardından integral denklemlerin sınıflandırılması yapılacaktır.

2.1 İntegral Denklemlerin Genel Özellikleri

İntegral denklemlerin genel yapısını incelemek için;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \quad (2.1)$$

İntegral denklemini ele alınsın. Burada;

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyon, $f(x)$ bilinen fonksiyon, λ parametre, $k(x,t)$ çekirdek fonksiyondur.

2.2 İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

İntegral denklemler lineerliğe, tekilliğe, bilinmeyen fonksiyonun bulunduğu yere, homojenliğe ve sınırlarına göre sınıflandırılır.

2.2.1 Lineerliğe Göre Sınıflandırma

İntegral denklemleri lineerliğe göre sınıflandırırken $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun lineerliği temel alınır. Bu sınıflandırmada integral denklemler lineer olan ve lineer olmayan integral denklemler olmak üzere iki grupta incelenir.

Lineer İntegral Denklemler

Bir integral denklemde yer alan $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu lineer ise bu integral denklem lineer integral denklemdir.

Lineer Olmayan İntegral Denklemler

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) u^n(t) dt \quad (2.2)$$

(2.2) integral denkleminde $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun n . kuvveti ($n \neq 1$) yer aldığından (2.2) yapısındaki integral denklemler lineer olmayan integral denklemlerdir.

2.2.2 Tekillığe Göre Sınıflandırma

İntegral denklemleri tekillığe göre sınıflandırırken, integral sınırları ve $k(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun sürekliliği temel alınır.

Tekil İntegral Denklemler

İntegral denklemin sınır aralıklarında $k(x,t)$ çekirdek fonksiyonu süreksiz olan veya integral sınırlarından en az biri sonsuz olan,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^{\infty} k(x,t) u(t) dt \quad (2.3)$$

yapısındaki integral denklemlere tekil integral denklemler denir.

Tekil Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemin sınır aralıklarında $k(x,t)$ çekirdek fonksiyonu sürekli olan ve integral sınırları sonsuz olmayan integral denklemlere tekil olmayan integral denklemler denir.

2.2.3 Yapılarına Göre Sınıflandırma

Yapılarına göre sınıflandırma integral denklemler üç grupta incelenir.

Birinci Tür İntegral Denklemler

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyonun sadece integral içinde bulunduğu;

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \quad (2.4)$$

yapısındaki integral denklemler birinci tür integral denklemlerdir.

İkinci Tür İntegral Denklemler

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun (2.1) integral denkleminde olduğu gibi, hem integral içinde hem de integral dışında bulunduğu integral denklemler ikinci tür integral denklemlerdir.

Üçüncü Tür İntegral Denklemler

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyonun hem integral içinde, hem de integral dışında başka bir fonksiyon ile çarpım durumunda olduğu;

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \quad (2.5)$$

yapısındaki integral denklemler üçüncü tür integral denklemlerdir.

2.2.4 Homojenliğe Göre Sınıflandırma

Bu sınıflandırmaya göre integral denklemler homojen olan ve homojen olmayan integral denklemler olmak üzere iki grupta incelenir.

Homojen İntegral Denklemler

$f(x)$ bilinen fonksiyonu bulunmayan,

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u(t) dt \quad (2.6)$$

yapısındaki integral denklemler homojen integral denklemler olarak sınıflandırılır.

Homojen Olmayan İntegral Denklemler

$f(x)$ bilinen fonksiyonu sıfırdan farklı olan integral denklemler homojen olmayan integral denklemler olarak sınıflandırılır.

Örneğin; (2.1) yapısındaki integral denklemler homojenliğe göre, homojen olmayan integral denklemlerdir.

2.2.5 İntegral Sınırlarına Göre Sınıflandırma

İntegral sınırlarına göre sınıflandırmada integral sınırlarının sabit olma veya değişken içerme durumu dikkate alınır. Bu sınıflandırmaya göre integral denklemler Fredholm ve Volterra integral denklemler olmak üzere iki grupta toplanır.

Fredholm İntegral Denklemleri

İntegral sınırları sabitlerden oluşan (2.1) yapısındaki integral denklemler Fredholm integral denklemleri olarak sınıflandırılır.

Volterra İntegral Denklemleri

İntegral sınırlarından biri değişken olan,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t) dt \quad (2.7)$$

yapısındaki integral denklemler Volterra integral denklemleri olarak sınıflandırılır.

2.3 İntegro-Diferansiyel Denklemler

İçinde bilinmeyen fonksiyonun türevlerinin bulunduğu integral denklemler integro-diferansiyel denklemlerdir. İntegro-diferansiyel denklemlerin özel çözümlerinde verilen başlangıç şartları göz önüne alınır.

Bilinmeyen fonksiyonun n . mertebeden türevinin bulunduğu,

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) u(t) dt \quad (2.8)$$

Fredholm integro-diferansiyel denklemi ve

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) u(t) dt \quad (2.9)$$

Volterra integro-diferansiyel denklemi ele alınsın. Burada $u^{(n)}(x) = \frac{d^n u}{dx^n}$ şeklinde ifade edilir. İntegral denklemin çözümü için başlangıç şartları olarak $u(0)$, $u'(0)$, $u''(0), \dots, u^{(n-1)}(0)$ değerleri integral denklem ile birlikte verilir[17].

Örneğin;

$$u''(x) = x + \int_0^1 (1+x-t) u(t) dt, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0$$

İntegro-diferansiyel denklemi; içinde bilinmeyen fonksiyonun ikinci mertebeden türevinin bulunduğu Fredholm integro-diferansiyel denklemdir. Bu integro-diferansiyel denklemle beraber verilen $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$ değerleri de başlangıç şartlarıdır.

2.4 İki Boyutlu İntegral Denklemler

$u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyonun iki katlı integralin içinde bulunduğu integral denklemler iki boyutlu integral denklemlerdir.

İki boyutlu Fredholm integral denklemleri,

$$u(x, t) = f(x, t) + \int_c^d \int_a^b k(x, t, y, z) u(y, z) dy dz, \quad x \in [a, b], \quad t \in [c, d] \quad (2.10)$$

yapısına; iki boyutlu Volterra integral denklemler ise,

$$u(x,t) = f(x,t) + \int_0^t \int_0^x k(x,t,y,z)u(y,z) dydz \quad (2.11)$$

yapısına sahiptir. Bu integral denklemlerdeki $k(x,t,y,z)$ çekirdek fonksiyonlar, $f(x,t)$ bilinen fonksiyonlar ve $u(x,t)$ bilinmeyen fonksiyonlardır.

Örneğin;

$$u(x,t) = x^2 e^t + \frac{1}{14} x^7 - \frac{1}{14} x^7 e^{2t} - \frac{1}{5} x^5 t + \int_0^t \int_0^x (y^2 + e^{-2z}) u^2(y,z) dydz, \quad x \in [0,1]$$

İntegral denklemi iki boyutlu lineer olmayan Volterra integral denklemidir.

2.5 İntegral Denklem Sistemleri

İntegral denklem sistemleri, birden fazla integral denklemin bir arada ele alındığı sistemlerdir. İntegral denklem sistemlerinin analitik çözümlerine ulaşmak genellikle zordur. Bundan dolayı çoğu zaman yaklaşık çözümleri bulunur.

n bilinmeyenli n tane denklemden oluşan lineer Fredholm integral denklem sistemi;

$$a_{11}(x)u_1(x) + a_{12}(x)u_2(x) + \dots + a_{1n}(x)u_n(x) = f_1(x) + \int_a^b \{k_{11}(x,t)u_1(t) + k_{12}(x,t)u_2(t) + \dots + k_{1n}(x,t)u_n(t)\} dt$$

$$a_{21}(x)u_1(x) + a_{22}(x)u_2(x) + \dots + a_{2n}(x)u_n(x) = f_2(x) + \int_a^b \{k_{21}(x,t)u_1(t) + k_{22}(x,t)u_2(t) + \dots + k_{2n}(x,t)u_n(t)\} dt$$

.

.

.

$$a_{n1}(x)u_1(x) + a_{n2}(x)u_2(x) + \dots + a_{nn}(x)u_n(x) = f_n(x) + \int_a^b \{k_{n1}(x,t)u_1(t) + k_{n2}(x,t)u_2(t) + \dots + k_{nn}(x,t)u_n(t)\} dt \quad (2.12)$$

yapısında ifade edilir. (2.12) integral denklem sistemi daha kısa olarak;

$$\sum_{i=1}^n a_{ji}(x)u_i(x) = f_j(x) + \int_a^b \sum_{i=1}^n k_{ji}(x,t)u_i(t)dt, \quad j=1,2,\dots,n \quad (2.13)$$

şeklinde de ifade edilebilir. (2.13) integral denklem sistemindeki $u_i(x)$ bilinmeyen fonksiyonlar, $k_{ji}(x,t)$ çekirdek fonksiyonlar, $a_{ji}(x)$ katsayı fonksiyonları ve $f_j(x)$ bilinen fonksiyonlardır[12],[28],[29].

Örneğin;

$$u_1(x) = \frac{x}{18} + \frac{17}{36} + \int_0^1 \frac{x+t}{3}(u_1(t) + u_2(t))dt$$

$$u_2(x) = x^2 - \frac{19}{12}x + 1 + \int_0^1 xt(u_1(t) + u_2(t))dt$$

integral denklem sistemi, iki bilinmeyen fonksiyon ve iki denklemden oluşan lineer Fredholm integral denklem sistemidir.

$$u_1(x,t) = e^xt + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}e^{2x}t^3 - \frac{1}{2}x^2e^t + \int_0^t \int_0^x (-u_1(y,z)^2 + u_2(y,z))dydz$$

$$u_2(x,t) = xe^t - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}e^xt^2 + \frac{1}{2}x^2e^t + \int_0^t \int_0^x (u_1(y,z) - u_2(y,z))dydz$$

integral denklem sistemi ise, iki bilinmeyen fonksiyon ve iki denklemden oluşan lineer olmayan iki boyutlu Volterra integral denklem sistemidir.

HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODUNUN İNTEGRAL DENKLEMLERDE KULLANIMI

Bu bölümde HPM'nin genel özellikleri ve integral denklemlerde kullanımı ve integral denklemlerin analitik ve sayısal çözümlerinde kullanılan diğer metotlardan bazıları açıklanacaktır. Ele alınacak integral denklem örneklerinin açıklanacak metotlarla çözümleri bulunacak ve elde edilen sonuçlar yorumlanacaktır.

3.1 Homotopi Kavramı, Pertürbasyon Teorisi ve Homotopi Pertürbasyon Metodu

HPM, diferansiyel topolojideki homotopi ile pertürbasyon teorisinden yararlanılarak oluşturulmuş bir metottur. Homotopi kavramı ve pertürbasyon teorisi açıklanıp HPM'nin genel özellikleri incelenir.

3.1.1 Homotopi Kavramı

Homotopi kavramı 1895'te Henri Poincaré tarafından bir makale ile ifade edilmiştir. 1911 yılında ise L.E.J. Brouwer tarafından iki dönüşüm arasında homotopinin genel tanımı yapılmıştır. Homotopi teknikleri lineer olmayan cebirsel denklemlerin bütün köklerini bulmak için yaygın olarak kullanılır.

Tanım 3.1 $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümler ve $I = [0,1]$ olsun. Her $x \in X$ için $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ eşitliklerini sağlayan bir $H : X \times I \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü var ise f ve g homotopiktir denir. H dönüşümüne ise f ve g arasında bir homotopidir denir.

Örnek 3.1 $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ sürekli dönüşümler olsun. $H: X \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ olmak üzere $H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$, $H(x, 0) = f(x)$ ve $H(x, 1) = g(x)$ şeklinde tanımlanan H dönüşümü f ve g arasında homotopidir. Bu durumda f ve g homotopiktir[16].

3.1.2 Pertürbasyon Teorisi

Pertürbasyon teorisi bir problemin yaklaşık çözümünü bulmak için kullanılan matematiksel metotlar içermektedir. Bir problem küçük bir terim eklendiğinde tam olarak çözüme ulaşılabilecek şekilde formülle ifade edilebiliyorsa, bu probleme pertürbasyon teorisi uygulanabilir. Bu teori ile bir problemin çözümü, tam çözümü bulunabilen probleminden sapmayı ölçen küçük bir parametrenin kuvvet serisi cinsinden bulunur. Kuvvet serisinin ilk terimi tam çözümü bulunabilen problemin çözümü, diğer terimler ise başlangıç problemine göre sapmayı ifade eder.

ε küçük bir parametre olmak üzere u çözümüne yaklaşım için;

$$u = u_0 + \varepsilon^1 u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (3.1)$$

serisi yazılsın. Burada u_0 kesin çözümü bulunabilen başlangıç probleminin bilinen kesin çözümünü, $u_1, u_2, \dots$ belirli bir metot kullanılarak iterasyonla bulunan daha yüksek dereceden çözümleri ifade eder. Küçük ε değerleri için bu serinin yakınsak olması yüksek dereceden çözümlerin daha az etkili olduğunu gösterir. Pertürbasyon teorisinin etkili sonuçlar verebilmesi için ε küçük parametresinin uygun olarak belirlenmesi gerekir.

Örnek 3.2 Aşağıdaki cebirsel denklemde pertürbasyon tekniği kullanılsın.

$$u = 1 + \varepsilon u^3$$

Ele alınan örnekte $\varepsilon = 0$ için $u = 1$ 'dir. $\varepsilon \neq 0$ için;

$$u = 1 + \varepsilon^1 u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$$

serisi yazılır. Bu seri verilen örnekte yerine yazılırsa;

$$\varepsilon^1 u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots = \varepsilon(1 + \varepsilon^1 u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)^3$$

ifadesi elde edilir. Buradan;

$$\varepsilon^1 u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots = \varepsilon \left[1 + 3\varepsilon^1 u_1 + 3\varepsilon^2 (u_2 + u_1^2) + \dots \right]$$

eşitliği oluşturulur. ε 'un aynı kuvvetlerinin katsayıları bir araya getirilirse;

$$\varepsilon^1 (u_1 - 1) + \varepsilon^2 (u_2 - 3u_1) + \varepsilon^3 (u_3 - 3u_2 - 3u_1^2) + \dots = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten yararlanılarak;

$$u_1 - 1 = 0$$

$$u_2 - 3u_1 = 0$$

$$u_3 - 3u_2 - 3u_1^2 = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan; $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 12$ olarak bulunur. Bulunan bu değerler serideki yerlerine yazılırsa;

$$u = 1 + \varepsilon^1 + 3\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3 + \dots$$

elde edilir. Buradan $\varepsilon = 0$ için $u = 1$ olmak üzere yaklaşık çözüm bulunur[16],[30].

3.1.3 Homotopi Pertürbasyon Metodu

Topolojideki homotopi kavramı ile pertürbasyon teorisinden yararlanılarak ortaya konulan HPM için öncelikle;

A genel diferansiyel operatör, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen analitik fonksiyon Γ ise Ω bölgesinin sınırı olmak üzere;

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega \quad (3.2)$$

diferansiyel denklemi,

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, \quad r \in \Gamma \quad (3.3)$$

(3.3) sınır koşullarına göre ele alınsın. A genel diferansiyel operatörü genellikle M lineer olan ve N lineer olmayan operatör olmak üzere ikiye ayrılır. Bundan dolayı (3.2) denklemi çoğu kez;

$$M(u) + N(u) - f(r) = 0 \quad (3.4)$$

yapısında yazılır.

$v(r, p): \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$ olmak üzere $r \in \Omega$ ve homotopi parametresi olan $p \in [0, 1]$ olsun. (3.2) denkleminin başlangıç yaklaşımı olarak u_0 seçilirse;

$$H(v, p) = (1 - p)[M(v) - M(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0 \quad (3.5)$$

homotopisi elde edilir. Bu homotopiden;

$$H(v, 0) = M(v) - M(u_0) = 0, \quad H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0 \quad (3.6)$$

eşitlikleri kolayca bulunabilir. p 'nin 0'dan 1'e doğru değişmesi $H(v, p)$ 'nin $M(v) - M(u_0)$ 'dan $A(v) - f(r)$ 'ye yaklaşması olarak yorumlamak mümkündür. Bu durum topolojide deformasyon olarak adlandırılır. Buna göre $M(v) - M(u_0)$ ve $A(v) - f(r)$ ifadeleri homotopiktir. $p \in [0, 1]$ küçük bir parametre olduğu için pertürbasyon tekniği kullanılarak (3.5) homotopi denkleminin çözümü p 'nin bir kuvvet serisi olarak;

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (3.7)$$

şeklinde ifade edilebilir. p parametresi 1'e yakınsarken (3.2) denkleminin yaklaşık çözümü;

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (3.8)$$

olarak bulunur. (3.8) serisi çoğu durum için yakınsaktır. Yakınsaklık oranı $A(v)$ 'ye bağlı olarak değişir[24],[30].

HPM özellikle uygulamalı bilimlerde birçok alanda denklemlerin analitik veya sayısal çözümünü elde etmede kullanılan basit ve etkili bir metottur.

3.2 İntegral Denklemlerin Çözümünde Homotopi Pertürbasyon Metodunun

Kullanımı

HPM'nin integral denklemlerde kullanımı, lineer olan ve lineer olmayan integral denklemler için ayrı iki başlıkta ele alınsın.

3.2.1 Lineer İntegral Denklemlerin Çözümünde HPM'nin Kullanımı

HPM'nin lineer integral denklemlerde kullanımı, birinci tür ve ikinci tür lineer integral denklemlerde ayrı ayrı ele alınsın.

Birinci Tür Lineer İntegral Denklemlerin Çözümünde HPM'nin Kullanımı

$$f(x) = \int_a^b k(x,t)v(t) dt \quad (3.9)$$

yapısına sahip birinci tür Fredholm integral denklemi ele alınsın.

(3.9) integral denklemi için $L(u)$ operatörü;

$$L(u) = \int_a^b k(x,t)u(t) dt - f(x) = 0 \quad (3.10)$$

eşitliği ile ifade edilsin. (3.9) integral denklemi için homotopi denklemi,

$$H(u, p) = (1-p)u(x) + pL(u) = 0. \quad (3.11)$$

şeklinde ifade edilir. Bu homotopi denklemindeki p gömme parametresi, tanımlı olduğu $p \in [0,1]$ aralığında düzenli olarak yükselir. HPM bu genişlemenin kullanımını ortaya koyar.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots \quad (3.12)$$

(3.12) serisi (3.11) homotopi denkleminde yerine yazıldığında;

$$H(u, p) = (1-p)(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) + p \left(\int_a^b k(x,t)(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) dt - f(x) \right) = 0$$

denklemi elde edilir. p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri bir araya getirildiğinde;

$$H(u, p) = u_0 + p \left(u_1 - u_0 + \int_a^b k(x,t)u_0 dt - f(x) \right) + p^2 \left(u_2 - u_1 + \int_a^b k(x,t)u_1 dt \right) + \dots = 0$$

ifadesi elde edilir. Buradan;

$$p^0 : u_0(x) = 0$$

$$p^1 : u_1(x) = f(x)$$

$$p^2 : u_2(x) = u_1(x) - \int_a^b k(x,t) u_1(t) dt$$

.

.

.

$$p^{n+1} : u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_a^b k(x,t) u_n(t) dt, \quad n \geq 1 \quad (3.13)$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla ele alınan integral denklemin HPM ile çözümü;

$$v(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots \quad (3.14)$$

olarak bulunur.

Yakınsaklık için;

$$k(x,t) = g(x)h(t) \quad (3.15)$$

yapısında ayrılabilir çekirdek fonksiyona sahip olan integral denklemin;

$$\left| 1 - \int_a^b k(t,t) dt \right| < 1 \quad (3.16)$$

eşitsizliğini sağlaması gerekmektedir[17],[31],[32].

İkinci Tür Lineer İntegral Denklemlerin Çözümünde HPM'nin Kullanımı

Bilinmeyen fonksiyonun hem integral içinde hem de integral dışında bulunduğu;

$$v(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t) v(t) dt, \quad a \leq x \leq b \quad (3.17)$$

yapısındaki lineer Fredholm integral denklemi ele alınsın. İncelenen yapıdaki integral denklemin çözümü $u(x) = v(x)$ olmak üzere $F(u)$ fonksiyonel operatörü;

$$F(u) = u(x) - f(x) \quad (3.18)$$

eşitliği ile, $L(u)$ operatörü ise;

$$L(u) = u(x) - f(x) - \int_a^b k(x,t)u(t) dt = 0 \quad (3.19)$$

eşitliği ile ifade edilsin.

Homotopi denklemi, (3.18) ve (3.19) operatörleri kullanılarak;

$$H(u, p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0 \quad (3.20)$$

şeklinde ifade edilir. Oluşturulan Homotopi denkleminde;

$$H(u, 0) = F(u), \quad H(u, 1) = L(u) \quad (3.21)$$

eşitlikleri kolaylıkla elde edilebilir.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots$$

serisi (3.20) homotopi denkleminde yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} H(u, p) = (1-p) \left((u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) - f(x) \right) \\ + p \left((u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) - f(x) - \int_a^b k(x,t)(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) dt \right) = 0 \end{aligned}$$

denklemi elde edilir. p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri bir araya getirildiğinde;

$$H(u, p) = p^0(u_0 - f(x)) + p^1 \left(u_1 - \int_a^b k(x,t)u_0 dt \right) + p^2 \left(u_2 - \int_a^b k(x,t)u_1 dt \right) + \dots = 0$$

ifadesi bulunur. Buradan;

$$p^0 : u_0(x) - f(x) = 0 \Rightarrow u_0(x) = f(x)$$

$$p^1 : u_1(x) - \int_a^b k(x,t)u_0(t) dt = 0$$

$$p^2 : u_2(x) - \int_a^b k(x,t)u_1(t) dt = 0$$

.

.

.

$$p^{n+1} : u_{n+1}(x) = \int_a^b k(x,t)u_n(t) dt, \quad n \geq 0 \quad (3.22)$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla (3.22) eşitliklerinden ele alınan integral denklemin HPM ile çözümü;

$$v(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots$$

olarak bulunur[31],[32].

(2.7) yapısındaki ikinci tür lineer Volterra integral denklemlerin HPM ile çözümünde de benzer bir yol izlenir[23],[33].

3.2.2 Lineer Olmayan İntegral Denklemlerin Çözümünde HPM'nin Kullanımı

Lineer olmayan integral denklemlerde HPM'nin kullanımı, lineer integral denklemlerde olduğu gibi birinci tür ve ikinci tür lineer olmayan integral denklemlerde ayrı ayrı ele alınsın.

Birinci Tür Lineer Olmayan İntegral Denklemlerin Çözümünde HPM'nin Kullanımı

Lineer olmayan birinci tür bir Fredholm integral denklemin HPM ile çözümü, integral denklemin bilinmeyen fonksiyonuna dönüşüm yapıp integral denklem lineer yapıya çevrildikten sonra birinci tür lineer Fredholm integral denklemlerin HPM ile çözümüne benzer bir yol izlenerek bulunur.

Yakınsaklık için $k(x,t) = g(x)h(t)$ ayrılabilen yapıya sahip çekirdek fonksiyonun;

$$\left| 1 - \int_a^b k(t,t) dt \right| < 1$$

eşitsizliğini sağlaması gerekmektedir[17].

Örnek 3.3 Aşağıdaki lineer olmayan birinci tür Fredholm integral denkleminin HPM ile çözümü incelensin.

$$\frac{32}{63}x^2 = \int_{-1}^1 x^2 t^2 u^2(t) dt.$$

Öncelikle, $v(x) = u^2(x)$ olmak üzere bilinmeyen fonksiyona;

$$u(x) = \sqrt{v(x)}$$

dönüşümü yapılsın. Ele alınan integral denklem bu dönüşüme göre;

$$\frac{32}{63}x^2 = \int_{-1}^1 x^2 t^2 v(t) dt$$

olarak yeniden ifade edilir. İntegral denklemin çekirdek fonksiyonu $k(x,t) = g(x)h(t)$ yapısındadır. Yakınsaklık için (3.16) eşitsizliğinin sağlanıp sağlanmadığı incelesin.

$$\left| 1 - \int_{-1}^1 k(t,t) dt \right| = \left| 1 - \int_{-1}^1 t^4 dt \right| = \frac{3}{5} < 1$$

İncelenen birinci tür lineer olmayan Fredholm integral denklemi yakınsaklık şartını yerine getirmektedir.

Ele alınan integral denklem için $L(v)$ operatörü;

$$L(v) = \int_{-1}^1 x^2 t^2 v(t) dt - \frac{32}{63}x^2 = 0$$

olmak üzere (3.11) eşitliğinden yararlanılarak homotopi denklemi,

$$H(v, p) = (1-p)v(x) + p \left(\int_{-1}^1 x^2 t^2 v(t) dt - \frac{32}{63}x^2 \right) = 0$$

şeklinde oluşturulur.

$$v = v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \dots$$

serisi oluşturulan homotopi denkleminde yerine yazılırsa;

$$H(v, p) = (1-p)(v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \dots) + p \left(\int_{-1}^1 x^2 t^2 (v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \dots) dt - \frac{32}{63}x^2 \right) = 0$$

ifadesi elde edilir. p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri bir araya getirilirse;

$$H(v, p) = v_0 + p^1 \left(v_1 - \frac{32}{63}x^2 \right) + p^2 \left(v_2 - v_1 + \int_{-1}^1 x^2 t^2 v_1 dt \right) + p^3 \left(v_3 - v_2 + \int_{-1}^1 x^2 t^2 v_2 dt \right) + \dots = 0$$

eşitliği elde edilmiş olur. Buradan;

$$p^0 : v_0(x) = 0$$

$$p^1 : v_1(x) = \frac{32}{63}x^2$$

$$p^2 : v_2(x) = v_1(x) - \int_{-1}^1 x^2 t^2 v_1(t) dt = \frac{96}{315} x^2$$

.

.

.

eşitlikleri bulunur. Bu eşitlikler bir araya getirilerek;

$$v(x) = v_0(x) + v_1(x) + v_2(x) + \dots = \frac{32}{63} x^2 \left(1 + \frac{3}{5} + \frac{9}{25} + \dots \right)$$

ifadesi oluşur. Eşitliğin sağ tarafında yer alan geometrik seri için; $a_1 = 1$ ve $r = \frac{3}{5}$ olmak üzere;

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}, \quad |r| < 1$$

yakınsaklık şartı gerçekleşir. Elde edilen geometrik serinin $S = \frac{5}{2}$ değeri $v(x)$

ifadesinde yerine yazılırsa;

$$v(x) = \frac{32}{63} x^2 \left(1 + \frac{3}{5} + \frac{9}{25} + \dots \right) = \frac{80}{63} x^2$$

elde edilir. Sonuç olarak incelenen birinci tür lineer olmayan Fredholm integral denklemin analitik çözümü;

$$u(x) = \sqrt{v(x)} = \sqrt{\frac{80}{63}} x$$

olarak HPM ile elde edilir.

Ele alınan integral denklemin lineer olmadığı için bir çözümü daha bulunmaktadır. Bu çözüm $u(x) = x^2 + x^3$ şeklindedir.

İkinci Tür Lineer Olmayan İntegral Denklemlerin Çözümünde HPM'nin Kullanımı

Lineer olmayan ikinci tür integral denklemlerin çözümünde HPM'nin kullanımını incelemek için;

$$v(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)(v(t))^n dt \quad (3.23)$$

yapısındaki Fredholm integral denklemi ele alınsın. Ele alınan integral denklemde; $n \in N$, $n \geq 2$, $\lambda \in R$, $k(x,t)$ çekirdek fonksiyonu $[a,b] \times [a,b]$ 'da sürekli fonksiyon, $f(x)$ bilinen fonksiyonu tanımlanan $[a,b]$ aralığında sürekli olsun ve $x \in [a,b]$ olsun.

İncelenen (3.23) yapısındaki lineer olmayan integral denklem için başlangıç yaklaşımı $v_0(x) = u_0(x) = f(x)$ olmak üzere homotopi denklemi;

$$H(u, p) = (1-p)(u(x) - f(x)) + p \left(u(x) - f(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)(u(t))^n dt \right) = 0 \quad (3.24)$$

şeklinde oluşturulur.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots$$

serisi (3.24) homotopi denkleminin çözümü olarak varsayıp homotopi denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} H(u, p) &= (1-p)(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) - f(x) \\ &+ p \left((u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) - f(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)^n dt \right) = 0 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlenirse $j \geq 1$ olmak üzere;

$$p^0 : u_0(x) - f(x) = 0 \Rightarrow u_0(x) = f(x)$$

$$p^1 : u_1(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)(u_0(t))^n dt = 0$$

$$p^2 : \begin{cases} n=2 \Rightarrow u_2(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)(2u_0u_1)dt = 0 \\ n=3 \Rightarrow u_2(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)(3(u_0)^2u_1)dt = 0 \\ n=4 \Rightarrow u_2(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)(4(u_0)^3u_1)dt = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases}$$

·
·
·

$$p^j : \begin{cases} n=2 \Rightarrow u_j(x) - \lambda \int_a^b k(x,t) \sum_{r=0}^{j-1} (u_r u_{j-r-1}) dt = 0 \\ n=3 \Rightarrow u_j(x) - \lambda \int_a^b k(x,t) \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{r=0}^{j-m-1} (u_m u_r u_{j-r-m-1}) dt = 0 \\ n=4 \Rightarrow u_j(x) - \lambda \int_a^b k(x,t) \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{r=0}^{j-m-1} \sum_{l=0}^{j-m-r-1} (u_m u_r u_l u_{j-l-r-m-1}) dt = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases}$$

·
·
·

(3.25)

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla ele alınan lineer olmayan (3.23) integral denkleminin HPM ile çözümü;

$$v(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots$$

olarak bulunur[22].

3.3 İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Çözümünde HPM'nin Kullanımı

HPM'nin integro-diferansiyel denklemlerde kullanımını incelemek için;

$$v'(x) + g(x)v(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)v(t) dt, \quad v(a) = v_0, \quad a \leq x \leq b \quad (3.26)$$

lineer Volterra integro-diferansiyel denklemi ele alınsın.

Ele alınan (3.26) integro-diferansiyel denklemi için homotopi denklemi;

$$H(u, p) = u' - v'_0 + pv'_0 - p \left[-g(x)u(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t) dt + f(x) \right] = 0 \quad (3.27)$$

eşitliği ile ifade edilir.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots$$

serisi homotopi denkleminde yerine yazılırsa ve p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlenirse $u'_0 = v'_0$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere;

$$p^0 : u'_0 - v'_0 = 0$$

$$p^1 : u'_1 + v'_0 + g(x)u_0(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)u_0(t) dt - f(x) = 0$$

$$p^2 : u'_2 + g(x)u_1(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)u_1(t) dt = 0$$

.

.

.

$$p^{n+1} : u'_{n+1} + g(x)u_n(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)u_n(t) dt = 0, \quad n \geq 1 \quad (3.28)$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla (3.26) integro-diferansiyel denklemin çözümü;

$$v = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

olarak bulunur[34].

3.4 İki Boyutlu İntegral Denklemlerin Çözümünde HPM'nin Kullanımı

HPM'nin iki boyutlu integral denklemlerde kullanımını incelemek için;

$$u(x, t) = f(x, t) + \int_0^t \int_0^x k(x, t, y, z, u(y, z)) dy dz \quad (3.29)$$

iki boyutlu Volterra integral denklemi ele alınsın.

Burada k ve f sürekli fonksiyonlar olsun ve çekirdek fonksiyon;

$$k(x, t, y, z, u(y, z)) = \sum_{i=0}^p v_i(x, t) w_i(y, z, u(y, z)) \quad (3.30)$$

yapısına sahip olsun.

HPM için (3.29) iki boyutlu integral denklemi;

$$L(u) = u(x, t) - f(x, t) - \int_0^t \int_0^x k(x, t, y, z, u(y, z)) dy dz = 0 \quad (3.31)$$

şeklinde yeniden düzenlensin. İntegral denklemin HPM ile çözümü için;

$$H(u, p) = (1 - p)F(u) + pL(u) = 0$$

(3.20) homotopi denklemi oluşturulsun. Oluşturulan homotopi denkleminden;

$$H(u, 0) = F(u), \quad H(u, 1) = L(u)$$

(3.21) eşitlikleri kolayca elde edilir. Homotopi denkleminin çözümü;

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots$$

serisi ile ifade edilir.

p parametresi 1'e yakınsarken ele alınan iki boyutlu integral denkleminin yaklaşık çözümü;

$$u(x, t) = \lim_{p \rightarrow 1} u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (3.32)$$

olarak bulunur. (3.32) serisi çoğu durum için yakınsaktır. Yakınsaklık oranı $F(u)$ ve $L(u)$ operatörlerine bağlıdır.

$F(u) = u(x, t) - f(x, t)$ olarak alınıp;

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots$$

serisi oluşturulan homotopi denkleminde yerine yazılırsa ve p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlenirse $u_0(x,t) = f(x,t)$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere;

$$u_{N+1}(x,t) = \int_0^t \int_0^x k(x,t,y,z) H_N(y,z) dydz, \quad N = 0,1,2,\dots \quad (3.33)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki H_N 'ler He polinomlarıdır ve

$$H_N(u_0, u_1, \dots, u_N) = \frac{1}{N!} \frac{\partial^N}{\partial p^N} \left(\left(\sum_{m=0}^N p^m u_m \right)^r \right)_{p=0}, \quad N = 0,1,2,\dots \quad (3.34)$$

(3.34) denklemi ile hesaplanır[20].

3.5 İntegral Denklem Sistemlerinin Çözümünde HPM'nin Kullanımı

İntegral denklem sistemlerinin çözümünde HPM'nin kullanımını incelemek için;

$$v_i(x) = f_i(x) + g_i(x, v(x)) + \int_a^b k_i(x,t, v(t)) dt, \quad i = 1(1)n \quad (3.35)$$

Fredholm integral denklem sistemi ve

$$v_i(x) = f_i(x) + g_i(x, v(x)) + \int_a^x k_i(x,t, v(t)) dt, \quad i = 1(1)n \quad (3.36)$$

Volterra integral denklem sistemi ele alınsın.

(3.35) ve (3.36) integral denklem sistemlerinin HPM ile çözümü için öncelikle;

$$H(u, p) = (1-p)F(u) + pL(u)$$

(3.20) homotopi denklemi oluşturulur. Burada $L(u)$ integral veya diferansiyel operatörü ile $F(u)$ fonksiyonel operatörü verilen integral denkleme göre belirlenir.

Homotopi eşitliklerinin çözümü p 'nin bir kuvvet serisi olarak;

$$u_i = \sum_{j=0}^{\infty} p^j u_{ij} = u_{i0} + pu_{i1} + p^2u_{i2} + \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.37)$$

şeklinde ifade edilir. p parametresi 1'e yakınsarken (3.35) ve (3.36) integral denklem sistemlerinin yaklaşık çözümü;

$$v = \lim_{p \rightarrow 1} u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$$

olarak bulunur. Bu seri çoğu durum için yakınsaktır. Yakınsaklık oranı $L(u)$ ve $F(u)$ 'ya bağlı olarak değişir.

(3.35) Fredholm ve (3.36) Volterra integral denklem sistemlerinin HPM ile çözümü;

$$v_1(x) = u_{10} + u_{11} + u_{12} + \dots$$

$$v_2(x) = u_{20} + u_{21} + u_{22} + \dots$$

.

.

.

(3.38)

denklemleri ile ifade edilir[28].

Şimdi de HPM'nin iki boyutlu integral denklem sistemlerinde kullanımı incelenir. Bunun için ilk olarak,

$$u(x, t) = g(x, t) + \int_0^t \int_{\Omega} k(x, t, y, z, u(y, z)) dy dz, \quad (x, t) \in [0, T] \times \Omega. \quad (3.39)$$

lineer olmayan Volterra-Fredholm integral denkleminin yapısı ele alınsın. Burada $u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyon, $g(x, t)$ ve $k(x, t, y, z, u(y, z))$ analitik fonksiyonlardır.

$D = [0, T] \in \Omega$ ve Ω, R^n ($n = 1, 2, 3$)'de kapalı alt küme olsun.

Buna göre lineer olmayan iki boyutlu Volterra-Fredholm integral denklem sistemi;

$$U(x, t) = G(x, t) + \int_0^t \int_{\Omega} K(x, t, y, z, U(y, z)) dy dz, \quad (x, t) \in [0, T] \times \Omega \quad (3.40)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikteki;

$$G(x, t) = (g_1(x, t), \dots, g_n(x, t))^t \quad (3.41)$$

$$U(x,t) = (u_1(x,t), \dots, u_n(x,t))^t \quad (3.42)$$

$$K(x,t,y,z,U(y,z)) = (k_1(x,t,y,z,U(y,z)), \dots, k_n(x,t,y,z,U(y,z)))^t \quad (3.43)$$

olarak ifade edilir.

HPM'nin iki boyutlu Volterra-Fredholm integral denklem sistemlerinde kullanımı incelensin.

$$u_i(x,t) = g_i(x,t) + \int_0^t \int_{\Omega} k_i(x,t,y,z,u_1(y,z), \dots, u_n(y,z)) dydz \quad (3.44)$$

iki boyutlu Volterra-Fredholm integral denklem sistemi için homotopi denklemi;

$$H(U, p) = (1-p)F(U) + pL(U) = 0 \quad (3.45)$$

olarak belirlenir. Oluşturulan homotopi denkleminde $F(U)$ ve $L(U)$;

$$F(U) = U(x,t) - G(x,t) \quad (3.46)$$

$$L(U) = U(x,t) - G(x,t) - \int_0^t \int_{\Omega} K(x,t,y,z,U(y,z)) dydz \quad (3.47)$$

şeklinde tanımlanan operatörlerdir. Homotopi denklemi kullanılarak;

$$H(U, 0) = F(U), \quad H(U, 1) = L(U) \quad (3.48)$$

eşitlikleri kolayca elde edilir. Oluşturulan homotopi denkleminin çözümü;

$$u_i = \sum_{j=0}^{\infty} p^j u_{i,j} = u_{i0} + p u_{i1} + p^2 u_{i2} + \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(3.37) serisi ile ifade edillir. p parametresi 1'e yakınsarken (3.44) integral denklem sisteminin yaklaşık çözümü;

$$u_i(x,t) = \lim_{p \rightarrow 1} u_i = u_{i0} + u_{i1} + u_{i2} + \dots \quad (3.49)$$

olarak bulunur. (3.49) ifadesi çoğu durum için yakınsaktır ve yakınsaklık oranı L ve F operatörüne bağlıdır.

$$F(U) = U(x,t) - G(x,t) \text{ olmak üzere;}$$

(3.37) serisi (3.45) homotopi denkleminde yerine yazılırsa ve p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlenirse $u_{i0}(x,t) = g_i(x,t)$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere;

$$u_{iN+1}(x,t) = \int_0^t \int_{\Omega} H_{iN} dydz \quad (3.50)$$

eşitliği elde edilir. Buradaki H_{iN} ile ifade edilen He polinomları,

$$H_{iN}(x,t,y,z,u_{10},...,u_{1N},...,u_{n0},...,u_{nN}) = \frac{1}{N!} \left\{ \frac{\partial^N}{\partial p^N} k_i \left(x,t,y,z, \sum_{m=0}^N p^m u_{1m}, ..., \sum_{m=0}^N p^m u_{nm} \right) \right\} \Big|_{p=0}$$

$$N = 0,1,2,... \quad (3.51)$$

(3.51) denklemi ile hesaplanır[25].

3.6 İntegral Denklemlerin Çözümünde Kullanılan Bazı Farklı Metotlar

İntegral denklemlerin analitik ve sayısal çözümleri için kullanılan metotlardan bazıları; Direkt Hesaplama Metodu (DHM), Seri Çözüm Metodu(SÇM), Adomian Ayrıştırma Metodu (AAM), Varyasyonel İterasyon Metodu (VİM), Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DDM)'dur.

Öncelikle bu metotların integral denklemlerde kullanımları kısaca açıklansın.

3.6.1 Direkt Hesaplama Metodu

DHM'nin integral denklemlerde kullanımını incelemek için;

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt \quad (3.52)$$

Fredholm integral denklemi ele alınsın. Bu metot ile integral denklemin çözülebilmesi için çekirdek fonksiyonunun;

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^n g_i(x)h_i(t) \quad (3.53)$$

şeklinde ayrılabilir yapıda olması gerekir. İlk olarak (3.53) çekirdek fonksiyonu (3.52) Fredholm integral denkleminde yerine yazılırsa;

$$u(x) = f(x) + g_1(x) \int_a^b h_1(t) u(t) dt + g_2(x) \int_a^b h_2(t) u(t) dt + \dots + g_n(x) \int_a^b h_n(t) u(t) dt \quad (3.54)$$

integral denklemi elde edilir. (3.54) integral denkleminde eşitliğin sağ tarafında yer alan sınırları sabit olan integraller t 'ye bağlı integrallerdir. Bu, her integralin bir sabite eşit olduğu anlamına gelir. Buna göre (3.54) integral denklemi;

$$u(x) = f(x) + \lambda a_1 g_1(x) + \lambda a_2 g_2(x) + \dots + \lambda a_n g_n(x) \quad (3.55)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$a_j = \int_a^b h_j(t) u(t) dt, \quad 1 \leq j \leq n \quad (3.56)$$

(3.55) ifadesi (3.56) denkleminde yerine yazıldığında a_j ($1 \leq j \leq n$) sabitlerini bulmak için çözülebilen n adet cebirsel denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Buradan elde edilen a_j sayısal değerleri (3.55) denkleminde yerine yazılarak Fredholm integral denklemin çözümü olan $u(x)$ hali hazırda elde edilmiş olur[17].

3.6.2 Seri Çözüm Metodu

Bu metot çoğunlukla diferansiyel denklemler ve integral denklemlerde Taylor serilerine bağlı olarak kullanılan bir metottur.

SÇM'nin integral denklemlerde kullanımını incelemek için;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t) u(t) dt$$

(2.7) ikinci tür lineer Volterra integral denklemi ele alınsın.

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun analitik fonksiyon olduğu düşünülürse bu fonksiyon;

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (3.57)$$

serisi ile ifade edilebilir. Bu seri incelenen (2.7) ikinci tür Volterra integral denklem eşitliğinin her iki tarafında yerine yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_0^x k(x,t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \quad (3.58)$$

eşitliği elde edilir. (3.58) eşitliğinin her iki tarafındaki seriler açılırsa;

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = T(f(x)) + \lambda \int_0^x k(x,t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt \quad (3.59)$$

elde edilir. Bu eşitlikte yer alan $T(f(x))$ ifadesi $f(x)$ fonksiyonunun Taylor serisidir. (3.58) veya (3.59) eşitliğinin sağ tarafında yer alan integral alınıp x 'in aynı kuvvetlerinin katsayıları bir araya getirildiğinde ve eşitliğin diğer tarafında yer alan aynı kuvvetlere sahip x 'in katsayılarıyla eşitlendiğinde yineleme bağıntısı elde edilir. Elde edilen yineleme bağıntısı çözülerek a_n ($n \geq 0$) katsayıları bulunur. Bulunan bu katsayılar (3.57) serisinde yerine yazıldığında integral denklemin bir çözümü var ise bu çözüm elde edilir. Tam çözümün bulunmadığı durumlarda bu metot sayısal çözüm için de kullanılabilir[17],[24].

3.6.3 Adomian Ayrıştırma Metodu

AAM, George Adomian tarafından 1980'lerin başında geliştirilen adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bir metottur. Bu metodu kullanarak integral denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek mümkündür. Bu metoda ilişkin temel kavramlar ele alınsın.

AAM'de $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu;

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad n \geq 0 \quad (3.60)$$

yapısında bir sonsuz seri olarak düşünülür. Buradaki $u_n(x)$ bileşenleri genellikle yineleme ile belirlenir ve

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, \dots, u_n) \quad (3.61)$$

$N(u)$ operatörü yapısında ayrıştırma serisinin toplamı olduğu kabul edilir. Burada A_n ; $u_0, u_1, \dots, u_n$ 'e bağlı Adomian polinomlarını temsil etmektedir. Bu polinomlar;

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.62)$$

eşitliği ile ifade edilir.

Örneğin; $N(u) = u^3$ için Adomian polinomları;

$$A_0 = N(u_0) = u_0^3$$

$$A_1 = u_1 N'(u_0) = 3u_0^2 u_1$$

$$A_2 = u_2 N'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 N''(u_0) = 3u_0^2 u_2 + 3u_0 u_1^2$$

$$A_3 = u_3 N'(u_0) + u_1 u_2 N''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 N'''(u_0) = 3u_0^2 u_3 + 6u_0 u_1 u_2 + u_1^3$$

şeklinde yazılır[17],[24],[35].

AAM'nin lineer integral denklemlerin çözümünde kullanımını incelemek için;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) u(t) dt$$

yapısındaki (2.7) ikinci tür lineer Volterra integral denklemi ele alınsın.

Öncelikle (3.60) serisi integral denklemin her iki tarafında yerine yazılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt \quad (3.63)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu eşitlik kullanılarak $u_0(x) = f(x)$ olmak üzere;

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_{n+1}(x) = \lambda \int_0^x k(x, t) u_n(t) dt, \quad n \geq 0 \quad (3.64)$$

yineleme bağıntısı oluşturulur. Ele alınan (2.7) integral denkleminin AAM ile çözümü

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots \quad (3.65)$$

olarak ifade edilir.

AAM'nin lineer olmayan integral denklemlerin çözümünde kullanımını incelemek için;

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t) N(u(t)) dt \quad (3.66)$$

yapısındaki lineer olmayan ikinci tür Volterra integral denklemi ele alınsın.

(3.66) eşitliğinde yer alan $N(u(t))$ fonksiyonu lineer olmayan fonksiyon olmak üzere integral denklem hem lineer olan $u(x)$ fonksiyonunu hem de lineer olmayan $N(u(x))$ fonksiyonunu içermektedir. Buradaki eşitliğin sol tarafında yer alan $u(x)$ lineer fonksiyonu yerine (3.60) serisi, eşitliğin sağ tarafında yer alan $N(u(x))$ fonksiyonu yerine (3.62) Adomian polinomları yazılarak ele alınan integral denklemin AAM ile çözümü için yineleme bağıntısı oluşturulur. Oluşturulan yineleme bağıntısı kullanılarak integral denklemin çözümü;

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots$$

olarak ifade edilir[17].

3.6.4 Varyasyonel İterasyon Metodu

Bu metot Ji-Huan He tarafından geliştirilen bir metottur. Sistem için bir düzeltme fonksiyoneli oluşturması bu metodun temel özelliğidir. Lineer olmayan denklemlerin çözümünde etkili bir metottur. Son zamanlarda bu metot kesirli diferansiyel denklemlerde, doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerde, doğrusal olmayan dalga denklemlerinde de kullanılmıştır. Bu metot ayrıca integral denklemlerin çözümünde kullanılabilen bir metottur.

İncelenen metodun temel özellikleri ve kullanımı açıklansın.

M lineer operatör, N lineer olmayan operatör ve $g(x)$ bilinen analitik fonksiyon olmak üzere;

$$Mu + Nu = g(x) \quad (3.67)$$

fonksiyonel denklemi ele alınsın. Varyasyonel iterasyon yönteminde sistem için düzeltme fonksiyoneli;

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(s) \{Mu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s)\} ds \quad (3.68)$$

yapısında oluşturulmaktadır.

Burada λ , varyasyonel teoriyle tanımlanan bir Lagrange çarpanı, u_n ifadesi n . yaklaşım çözümü, δ varyasyonel türev ve $\delta\tilde{u}_n = 0$ olmak üzere $\tilde{u}_n$ sınırlı varyasyondur [18],[19],[36].

$$u(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)u(t) dt \quad (3.69)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t) dt \quad (3.70)$$

VİM'in (3.69) ikinci tür Volterra integral denklemleri ile (3.70) ikinci tür Fredholm integral denklemlerinde kullanımı incelensin.

Öncelikle ikinci tür (3.69) Volterra ve (3.70) Fredholm integral denklemlerinin x 'e bağlı kısmi türevleri alınsın.

(3.69) ikinci tür Volterra integral denklemi için;

$$u'(x) = f'(x) + \frac{d}{dx} \int_a^x k(x,t)u(t) dt \quad (3.71)$$

eşitliği, (3.70) ikinci tür Fredholm integral denklemi için ise,

$$u'(x) = f'(x) + \int_a^b k'(x,t)u(t) dt \quad (3.72)$$

eşitliği elde edilir.

$\frac{d}{dx} \int_a^x k(x,t)u(t) dt$ ve $\int_a^b k'(x,t)u(t) dt$ sınırlı varyasyonlar olarak göz önüne alınırsa;

(3.69) Volterra integral denklemi için;

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(s) \left\{ u_n'(s) - f'(s) - \frac{d}{ds} \int_a^s k(s, y) u_n(y) dy \right\} ds \quad (3.73)$$

denklemini, (3.70) Fredholm integral denklemini için ise,

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(s) \left\{ u_n'(s) - f'(s) - \int_a^b k'(s, y) u_n(y) dy \right\} ds \quad (3.74)$$

denklemini elde edilir. u_n bağımsız değişkeni göz önüne alınarak $\delta u_n(0) = 0$ olmak üzere;

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \lambda \delta u_n \Big|_{s=x} - \int_0^x \lambda' \delta u_n ds = 0 \quad (3.75)$$

ifadesi bulunur. Buradan;

$1 + \lambda(s) \Big|_{s=x} = 0$, $\lambda'(s) \Big|_{s=x} = 0$ eşitliklerine göre genel Lagrange çarpanının;

$$\lambda = -1 \quad (3.76)$$

olduğu kolayca görülür ve sonuç olarak (3.69) ikinci tür Volterra integral denklemini için düzeltme fonksiyoneli;

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left\{ u_n'(s) - f'(s) - \frac{d}{ds} \int_a^s k(s, y) u_n(y) dy \right\} ds \quad (3.77)$$

olarak yazılır. (3.70) Fredholm integral denklemini için düzeltme fonksiyoneli ise;

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left\{ u_n'(s) - f'(s) - \int_a^b k'(s, y) u_n(y) dy \right\} ds \quad (3.78)$$

şeklinde yazılır [17], [18], [23].

ViM'in integro-diferansiyel denklemlerde kullanımını incelenmek için;

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t) u(t) dt \quad (3.79)$$

yapısındaki Volterra ve

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t) u(t) dt \quad (3.80)$$

yapısındaki Fredholm integro-diferansiyel denklemleri ele alınsın.

Burada $u^{(i)}(x) = \frac{d^i u}{dx^i}$ olmak üzere $u(0), u'(0), \dots, u^{(i-1)}(0)$ başlangıç şartlarıdır.

(3.79) ve (3.80) yapılarına sahip integro-diferansiyel denklemlerden (3.79) Volterra integro-diferansiyel denklemi için;

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(s) \left\{ u_n^{(i)}(s) - f(s) - \int_0^s k(s, y) \tilde{u}_n(y) dy \right\} ds \quad (3.81)$$

düzeltilme fonksiyoneli, (3.80) Fredholm integro-diferansiyel denklemi için ise;

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(s) \left\{ u_n^{(i)}(s) - f(s) - \int_a^b k(s, y) \tilde{u}_n(y) dy \right\} ds \quad (3.82)$$

düzeltilme fonksiyoneli kullanılır. Burada $u_0(x)$ başlangıç yaklaşımı, verilen başlangıç şartlarına göre belirlenir. Lagrange çarpanı olan λ ise verilen integro-diferansiyel denkleme göre;

$$u' + f(u(s), u'(s)) = 0, \quad \lambda = -1$$

$$u'' + f(u(s), u'(s), u''(s)) = 0, \quad \lambda = s - x$$

$$u''' + f(u(s), u'(s), u''(s), u'''(s)) = 0, \quad \lambda = -\frac{1}{2!}(s - x)^2$$

$$u^{(n)} + f(u(s), u'(s), u''(s), \dots, u^{(n)}(s)) = 0, \quad \lambda = (-1)^n \frac{1}{(n-1)!}(s - x)^{(n-1)} \quad (3.83)$$

olarak belirlenir[17].

3.6.5 Diferansiyel Dönüşüm Metodu

DDM diferansiyel ve integral denklemlerin çözümünde kullanılan bir metottur. Son yıllarda bu metot; diferansiyel denklem sistemlerinde[37], kısmi diferansiyel denklemlerde[38],[39], integral ve integro-diferansiyel denklemlerde[40],[41], iki boyutlu lineer ve lineer olmayan Volterra integral denklemlerde[21] uygulanmıştır.

Bu metodun integral denklemlerde kullanımı, bir boyutlu integral denklemlerde DDM'nin kullanımı ve iki boyutlu integral denklemlerde DDM'nin kullanımı olmak üzere ayrı ayrı ele alınsın.

Bir Boyutlu İntegral Denklemlerde DDM'nin Kullanımı

Tek bileşenden oluşan $f(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $F(k)$ olmak üzere, bu fonksiyonun tek boyutlu diferansiyel dönüşümü;

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (3.84)$$

olarak ifade edilir.

$f(x)$ orijinal fonksiyon ve $F(k)$ dönüşüm fonksiyonu olmak üzere, $F(k)$ 'nin diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu ise;

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k)(x-x_0)^k \quad (3.85)$$

serisi ile ifade edilir.

(3.84) ve (3.85) eşitliklerinden yararlanılarak;

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x=x_0} \quad (3.86)$$

ifadesi yazılabilir.

Sık kullanılan bazı fonksiyonların dönüşüm fonksiyonları Çizelge 3.1'de verilmiştir.

Çizelge 3.1 Bazı bir boyutlu fonksiyonların dönüşüm formları

Orijinal Fonksiyon	Dönüşüm Fonksiyonu
$f(x) = u(x) \pm v(x)$	$F(k) = U(k) \pm V(k)$
$f(x) = au(x)$	$F(k) = aU(k)$
$f(x) = v(x)u(x)$	$F(k) = \sum_{k_1=0}^k V(k_1)U(k - k_1)$
$f(x) = \frac{du(x)}{dx}$	$F(k) = (k+1)U(k+1)$
$f(x) = \frac{d^n u(x)}{dx^n}$	$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} U(k+n)$
$f(x) = \int_{x_0}^x u(t)dt$	$F(k) = \frac{U(k-1)}{k}, \quad k \geq 1, \quad F(0) = 0$
$f(x) = x^n$	$F(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$
$f(x) = e^{\lambda x}$	$F(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$
$f(x) = \sin(wx + \alpha)$	$F(k) = \frac{w^k}{k!} \sin(\pi k / 2 + \alpha)$
$f(x) = \cos(wx + \alpha)$	$F(k) = \frac{w^k}{k!} \cos(\pi k / 2 + \alpha)$

Çizelge 3.1’de verilen fonksiyonlar dışında teoremlerle verilen bir boyutlu yapıdaki fonksiyonların dönüşüm fonksiyonları da integral denklemlerin DDM ile çözümünde sıkça kullanılmaktadır.

Teorem 3.1 $f(x) = u_1(x)u_2(x)...u_{n-1}(x)u_n(x)$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu;

$$F(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} ... \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} U_1(k_1)U_2(k_2 - k_1)...U_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2})U_n(k - k_{n-1}) \quad (3.87)$$

olarak ifade edilir.

Teorem 3.2 $f(x) = \int_{x_0}^x v(t)u(t)dt$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu;

$$F(k) = \sum_{k_1=0}^{k-1} V(k_1) \frac{U(k - k_1 - 1)}{k}, \quad F(0) = 0 \quad (3.88)$$

olarak ifade edilir.

Teorem 3.3 $f(x) = \int_{x_0}^x u_1(t)u_2(t)...u_{n-1}(t)u_n(t)dt$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu;

$$F(k) = \frac{1}{k} \sum_{k_{n-1}=0}^{k-1} \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} ... \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} U_1(k_1)U_2(k_2 - k_1)...U_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2})U_n(k - k_{n-1} - 1) \quad (3.89)$$

olarak ifade edilir.

Teorem 3.4 $f(x) = v(x) \int_{x_0}^x u(t)dt$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu;

$$F(k) = \sum_{k_1=0}^{k-1} V(k_1) \frac{U(k - k_1 - 1)}{k - k_1}, \quad F(0) = 0 \quad (3.90)$$

olarak ifade edilir.

Teorem 3.5 $f(x) = v_1(x)v_2(x)...v_{n-1}(x)v_n(x) \int_{x_0}^x u_1(t)u_2(t)...u_{n-1}(t)u_n(t)dt$ fonksiyonu için

dönüşüm fonksiyonu;

$$F(k) = \sum_{k_{m+n-1}=1}^k \sum_{k_{m+n-2}=1}^{k_{m+n-1}} ... \sum_{k_2=1}^{k_3} \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_m} U_1(k_1 - 1)U_2(k_2 - k_1)...U_{m-1}(k_{m-1} - k_{m-2})U_m(k_m - k_{m-1}) \\ \times V_1(k_{m+1} - k_m)V_2(k_{m+2} - k_{m+1})...V_{n-1}(k_{m+n-1} - k_{m+n-2})V_n(k - k_{m+n-1}) \quad (3.91)$$

olarak ifade edilir[12],[41],[42].

İki Boyutlu İntegral Denklemlerde DDM'nin Kullanımı

İki bileşenden oluşan $f(x,t)$ fonksiyonunun (x_0, t_0) için iki boyutlu diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $F(m,n)$ olmak üzere;

$$F(m,n) = \frac{1}{m!n!} \left[\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} f(x,t) \right]_{x=x_0, t=t_0} \quad (3.92)$$

şeklinde tanımlanır. $F(m,n)$ fonksiyonun ters dönüşümü ise;

$$f(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} F(m,n) (x-x_0)^m (t-t_0)^n \quad (3.93)$$

serisi ile ifade edilir. (3.92) ve (3.93) eşitliklerinden yararlanılarak;

$$f(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} \left[\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} f(x,t) \right]_{x=x_0, t=t_0} (x-x_0)^m (t-t_0)^n \quad (3.94)$$

elde edilir. Ayrıca (3.93) serisi, sonlu seri olarak;

$$f(x,t) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N F(m,n) (x-x_0)^m (t-t_0)^n \quad (3.95)$$

eşitliği ile gösterilir[21],[42].

Sık kullanılan bazı iki boyutlu fonksiyonların dönüşüm fonksiyonları Çizelge 3.2'de verilmiştir.

Çizelge 3.2 Bazı iki boyutlu fonksiyonların dönüşüm formları

Orijinal Fonksiyon	Dönüşüm Fonksiyonu
$f(x,t) = u(x,t) \pm v(x,t)$	$F(m,n) = U(m,n) \pm V(m,n)$
$f(x,t) = \alpha u(x,t)$	$F(m,n) = \alpha U(m,n)$
$f(x,t) = u(x,t)v(x,t)$	$F(m,n) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n U(k,l)V(m-k,n-l)$
$f(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$	$F(m,n) = (m+1)U(m+1,n)$
$f(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$	$F(m,n) = (n+1)U(m,n+1)$
$f(x,t) = \frac{\partial^{k+l} u(x,t)}{\partial x^k \partial t^l}$	$F(m,n) = \frac{(m+k)!}{k!} \frac{(n+l)!}{l!} U(m+k,n+l)$
$f(x,t) = \int_0^t \int_0^x u(y,z) dy dz$	$F(m,n) = \frac{1}{mn} U(m-1,n-1)$
$f(x,t) = x^k t^l$	$F(m,n) = \delta_{m,k} \delta_{n,l} = \delta(m-k,n-l) = \begin{cases} 1 & m=k, n=l \\ 0 & m \neq k, n \neq l \end{cases}$
$f(x,t) = x^k e^{at}$	$F(m,n) = \frac{a^n}{n!} \delta_{m,k} = \frac{a^n}{n!} \delta(m-k)$
$f(x,t) = x^k \sin(at+b)$	$F(m,n) = \frac{a^n}{n!} \delta_{m,k} \sin\left(\frac{n\pi}{2} + b\right) = \frac{a^n}{n!} \delta(m-k) \sin\left(\frac{n\pi}{2} + b\right)$
$f(x,t) = x^k \cos(at+b)$	$F(m,n) = \frac{a^n}{n!} \delta_{m,k} \cos\left(\frac{n\pi}{2} + b\right) = \frac{a^n}{n!} \delta(m-k) \cos\left(\frac{n\pi}{2} + b\right)$

Çizelge 3.2’de verilen iki boyutlu fonksiyonlar dışında teoremlerle verilen yapılardaki iki boyutlu fonksiyonların dönüşüm fonksiyonları da integral denklemlerin DDM ile çözümünde sıkça kullanılmaktadır.

$F(m, 0) = F(0, n) = 0, \quad m, n = 0, 1, \dots$ olmak üzere;

Teorem 3.6 $f(x, t) = \int_0^t \int_0^x u(y, z) v(y, z) dy dz$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu;

$$F(m, n) = \frac{1}{mn} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} U(k, l) V(m-k-1, n-l-1) \quad (3.96)$$

olarak ifade edilir.

Teorem 3.7 $f(x, t) = \int_0^t \int_0^x u_1(y, z) u_2(y, z) u_3(y, z) dy dz$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu;

$$F(m, n) = \frac{1}{mn} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{n-l-1} \sum_{p=0}^{m-k-1} U_1(k, l) U_2(p, q) U_3(m-k-p-1, n-l-q-1) \quad (3.97)$$

olarak ifade edilir.

Teorem 3.8 $f(x, t) = v(x, t) \int_0^t \int_0^x u(y, z) dy dz$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu;

$$F(m, n) = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} V(k, l) \frac{U(m-k-1, n-l-1)}{(m-k)(n-l)} \quad (3.98)$$

olarak ifade edilir.

Teorem 3.9 $f(x, t) = \int_0^t \int_0^x \frac{u(y, z)}{v(y, z)} dy dz$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu;

$$U(m, n) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n (m-k+1)(n-l+1) V(k, l) F(m-k+1, n-l+1) \quad (3.99)$$

olarak ifade edilir.

Teorem 3.10 $f(x, t) = \int_0^t \int_0^x \frac{1}{v(y, z)} dy dz$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu;

$$\frac{1}{(m+1)(n+1)}U(m,n) = \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{l=0}^{n+1} V(k,l)F(m-k+1,n-l+1) \quad (3.100)$$

olarak ifade edilir[21],[42],[43],[44].

3.7 İntegral Denklemlerin Analitik ve Sayısal Çözümleri

HPM ve açıklanan diğer metotlar ile integral denklemlerin çözümleri analitik ve sayısal çözümler olmak üzere iki başlık altında incelenecektir. Açıklanan metotlar çeşitli örneklerle uygulanacak, metotların kullanışlılığı ve sayısal çözümlerde tam çözüme yakınlığı değerlendirilecektir.

3.7.1 İntegral Denklemlerin Analitik Çözümleri

HPM ve açıklanan diğer metotlar, analitik çözüm elde etmek için çeşitli yapılardaki integral denklemlere uygulansın.

Örnek 3.4 Aşağıdaki birinci tür lineer Fredholm integral denkleminin HPM ile çözümü ele alınsın.

$$\frac{1}{4}x = \int_0^1 xt u(t)dt$$

Ele alınan integral denklemin çekirdek fonksiyonu $k(x,t) = g(x)h(t)$ şeklinde ayrılabilir yapıdadır.

İlk olarak integral denklemin çekirdek fonksiyonunun (3.16) eşitsizliğine uygun yapıda olup olmadığı incelensin.

$$\left| 1 - \int_0^1 k(t,t)dt \right| = \left| 1 - \int_0^1 t^2 dt \right| = \frac{2}{3} < 1$$

İncelenen integral denklem (3.16) eşitsizliğine uygun bir yapıdadır. HPM ile integral denklemin çözümü için $L(u)$ operatörü;

$$L(u) = \int_0^1 xt u(t)dt - \frac{1}{4}x$$

olarak tanımlansın. Buna göre (3.11) homotopi denklemi kullanılarak;

$$H(u, p) = (1-p)u(x) + p \left(\int_0^1 xt u(t) dt - \frac{1}{4}x \right) = 0$$

eşitliği elde edilir.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots$$

serisi oluşturulan homotopi denkleminde yerine yazıldığında ve p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlendiğinde;

$$p^0 : u_0(x) = 0$$

$$p^1 : u_1(x) = \frac{1}{4}x$$

$$p^2 : u_2(x) = u_1(x) - \int_0^1 xt u_1(t) dt = \frac{1}{4}x - \int_0^1 xt \left(\frac{1}{4}t \right) dt \Rightarrow u_2(x) = \frac{1}{6}x$$

.

.

.

$$p^{n+1} : u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^1 xt u_n(t) dt \Rightarrow u_n(x) = \frac{1}{4}x \left(\frac{2}{3} \right)^n, \quad n \geq 1$$

ifadeleri bulunur. Bu ifadeler bir araya getirilerek $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu;

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = \frac{1}{4}x \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots \right)$$

olarak bulunur. Eşitliğin sağ tarafındaki geometrik seri için; $a_1 = 1$, $r = \frac{2}{3}$ olmak üzere;

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3, \quad |r| < 1$$

yakınsaklık şartı gerçekleşir. Bulunan geometrik serinin $S = 3$ değeri $u(x)$ ifadesinde yerine yazılırsa integral denkleminin HPM ile çözümü aşağıdaki şekilde bulunur.

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = \frac{3}{4}x$$

Örnek 3.5 Aşağıdaki ikinci tür lineer Fredholm integral denkleminin farklı yollarla çözümü ele alınsın.

$$u(x) = e^x - x + x \int_0^1 t u(t) dt$$

İlk olarak integral denklemin VİM ile çözümü incelenir[17].

Bunun için eşitliğin her iki tarafının x 'e bağlı türevi alınsın.

$$u'(x) = e^x - 1 + \int_0^1 t u(t) dt$$

Ele alınan integral denklem için (3.78) düzeltme fonksiyoneli düzenlenirse;

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left\{ u'_n(s) - e^s + 1 - \int_0^1 y u_n(y) dy \right\} ds$$

ifadesi elde edilir. İncelenen Fredholm integral denkleminde $x=0$ değeri yerine yazılırsa başlangıç yaklaşımı olarak $u(0)=1$ bulunur.

$u(0) = u_0(x) = 1$ olmak üzere oluşturulan düzeltme fonksiyoneli kullanılarak;

$$u_0(x) = 1$$

$$u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x \left\{ u'_0(s) - e^s + 1 - \int_0^1 y u_0(y) dy \right\} ds = e^x - \frac{1}{2} x$$

$$u_2(x) = u_1(x) - \int_0^x \left\{ u'_1(s) - e^s + 1 - \int_0^1 y u_1(y) dy \right\} ds = e^x - \frac{1}{2 \cdot 3} x$$

$$u_3(x) = u_2(x) - \int_0^x \left\{ u'_2(s) - e^s + 1 - \int_0^1 y u_2(y) dy \right\} ds = e^x - \frac{1}{2 \cdot 3^2} x$$

.

.

.

$$u_n(x) = e^x - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} x, \quad n \geq 1$$

eşitlikleri elde edilir ve sonuç olarak ele alınan integral denklemin VİM ile çözümü;

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = e^x$$

olarak bulunur.

Şimdi de aynı örneğin DHM ile çözümü ele alınsın.

$$a = \int_0^1 t u(t) dt \quad \text{olmak üzere verilen integral denklem;}$$

$$u(x) = e^x - x + xa$$

eşitliği ile ifade edilsin. Bu eşitlik $a = \int_0^1 t u(t) dt$ integralinde yerine yazılırsa;

$$a = \int_0^1 t (e^t - t + ta) dt$$

ifadesi elde edilir. Elde edilen bu integral çözüldüğünde $a=1$ olarak bulunur. $a=1$ değeri $u(x) = e^x - x + xa$ ifadesinde yerine yazılırsa integral denklemin çözümü

$$u(x) = e^x - x + x = e^x$$

olarak bulunur.

Son olarak aynı integral denkleme HPM uygulansın.

Oluşturulacak homotopi denklemi için $F(u)$ ve $L(u)$ operatörleri;

$$F(u) = u(x) - e^x + x, \quad L(u) = u(x) - e^x + x - x \int_0^1 t u(t) dt$$

olarak belirlensin. Belirlenen bu ifadeler (3.20);

$$H(u, p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0$$

homotopi denkleminde yerine yazılırsa ve düzenleme yapılırsa;

$$H(u, p) = u(x) - e^x + x - p \left(x \int_0^1 t u(t) dt \right)$$

eşitliği elde edilir.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots$$

serisi oluşturulan homotopi denkleminde yerine yazıldığında ve p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlendiğinde;

$$p^0 : u_0(x) = e^x - x$$

$$p^1 : u_1(x) = x \int_0^1 t u_0(t) dt = x \int_0^1 t (e^t - t) dt \Rightarrow u_1(x) = \frac{2}{3} x$$

$$p^2 : u_2(x) = x \int_0^1 t u_1(t) dt = x \int_0^1 \frac{2}{3} t^2 dt \Rightarrow u_2(x) = \frac{2}{9} x$$

.

.

.

$$p^{n+1} : u_{n+1}(x) = x \int_0^1 t u_n(t) dt \Rightarrow u_{n+1}(x) = \frac{2}{3^{n+1}} x, \quad n \geq 0$$

ifadeleri elde edilir. Dolayısıyla incelenen integral denklemin $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu;

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = e^x - x + \frac{2}{3}x \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots \right)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitliğin sağ tarafında yer alan geometrik seri için; $a_1 = 1$ ve $r = \frac{1}{3}$

olmak üzere;

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}, \quad |r| < 1$$

yakınsaklık şartı gerçekleşir. Elde edilen geometrik serinin $S = \frac{3}{2}$ değeri $u(x)$ eşitliğinde

yerine yazılırsa integral denklemin HPM ile çözümü;

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = e^x - x + x = e^x \Rightarrow u(x) = e^x$$

olarak bulunur.

Örnek 3.6 Aşağıdaki ikinci tür lineer Volterra integral denkleminin farklı metotlarla çözümü araştırılsın.

$$u(x) = 1 + \int_0^x (t-x)u(t)dt$$

İlk olarak integral denklemin DDM ile analitik çözümü ele alınsın.

Çizelge 3.1, Teorem 3.2 ve Teorem 3.4 kullanılarak ele alınan integral denklem için;

$$U(k) = \delta(k) + \sum_{k_1=0}^{k-1} \delta(k_1-1) \frac{U(k-k_1-1)}{k} - \sum_{k_1=0}^{k-1} \delta(k_1-1) \frac{U(k-k_1-1)}{k-k_1}, \quad k \geq 1, \quad U(0)=1$$

yineleme bağıntısı oluşturulur. Bu bağıntıdan yararlanılarak;

$$U(1) = 0, \quad U(2) = -\frac{1}{2!}$$

$$U(3) = 0, \quad U(4) = \frac{1}{4!}$$

$$U(5) = 0, \quad U(6) = -\frac{1}{6!}$$

$$U(7) = 0, \quad U(8) = \frac{1}{8!}$$

$$\begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

değerleri elde edilir. Oluşturulan yineleme bağıntısı ve (3.85) ters dönüşümü uygulanarak ele alınan integral denklemin DDM ile analitik çözümü;

$$u(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots = \cos x$$

olarak bulunur.

Şimdi de aynı integral denklemin VİM ile çözümü incelensin.

Bunun için ele alınan örneğe Volterra integral denklemlerin VİM ile çözümünde kullanılan (3.77) düzeltme fonksiyoneli uygulanırsa;

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left\{ u'_n(s) - 0 - \frac{d}{ds} \int_a^s (y-s)u_n(y)dy \right\} ds.$$

eşitliği elde edilir. Verilen integral denklemde $x=0$ değeri yerine yazılırsa başlangıç yaklaşımı olarak $u(0)=1$ bulunur.

$u(0) = u_0(x) = 1$ olmak üzere oluşturulan düzeltme fonksiyoneli kullanılarak;

$$u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x \left\{ u'_0(s) - 0 - \frac{d}{ds} \int_a^s (y-s)u_0(y)dy \right\} ds = 1 - \frac{1}{2!} x^2$$

$$u_2(x) = u_1(x) - \int_0^x \left\{ u'_1(s) - 0 - \frac{d}{ds} \int_a^s (y-s)u_1(y)dy \right\} ds = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4$$

$$u_3(x) = u_2(x) - \int_0^x \left\{ u'_2(s) - 0 - \frac{d}{ds} \int_a^s (y-s)u_2(y)dy \right\} ds = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6$$

.

.

.

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla ele alınan integral denklemin VİM ile analitik çözümü;

$$u(x) = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots = \cos x$$

olarak bulunur.

Şimdi aynı integral denklemin SÇM ile çözümü ele alınsın.

Bunun için (3.57) serisi integral denklemde eşitliğin her iki yanında yerine yazılarak;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \int_0^x (t-x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade düzenlenerek,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} \right) dt - \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x a_n t^n \right) dt$$

şeklinde çözüme uygun hale getirilsin. Eşitliğin sağ tarafındaki integral işlemleri yapılsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+2}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} a_n x^{n+2}$$

şeklinde düzenlensin. Eşitliğin her iki tarafındaki x 'in kuvvetleri eşitlenirse;

$$a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} a_{n-2} x^n$$

olarak bulunur. Bu ifadedeki seriler açılırsa;

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = 1 - \frac{1}{2} a_0 x^2 - \frac{1}{6} a_1 x^3 - \frac{1}{12} a_2 x^4 - \dots$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında yer alan x 'in aynı kuvvetleri eşitlenerek;

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2n+1} = 0, \quad n \geq 0$$

$$a_0 = 1, \quad a_2 = \left(-\frac{1}{2!}\right), \quad a_4 = \frac{1}{4!}, \quad a_6 = \left(-\frac{1}{6!}\right), \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2n!}, \quad n \geq 0$$

değerleri bulunur. Buna göre ele alınan lineer Volterra integral denkleminin SÇM ile çözümü;

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots = \cos x$$

olarak bulunur.

Son olarak aynı integral denklemin HPM ile çözümü ele alınsın.

Önce $F(u)$ ve $L(u)$ operatörleri;

$$F(u) = u(x) - 1$$

$$L(u) = u(x) - 1 - \int_0^x (t-x)u(t)dt$$

şeklinde oluşturulsun. Bu ifadeler (3.20);

$$H(u, p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0$$

homotopi denkleminde yerine yazılırsa ve düzenleme yapılırsa;

$$H(u, p) = u(x) - 1 - p \int_0^x (t-x)u(t) dt$$

eşitliği elde edilir.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots$$

serisi oluşturulan homotopi denkleminde yerine yazıldığında ve p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlendiğinde;

$$p^0 : u_0(x) = 1$$

$$p^1 : u_1(x) = \int_0^x (t-x)u_0(t) dt = \int_0^x (t-x) dt \Rightarrow u_1(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

$$p^2 : u_2(x) = \int_0^x (t-x)u_1(t) dt = \int_0^x (t-x)\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt \Rightarrow u_2(x) = \frac{1}{24}x^4$$

.

.

.

eşitlikleri bulunur. Sonuç olarak ele alınan integral denklemin HPM ile çözümü;

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots = \cos x.$$

olarak bulunur.

Örnek 3.7 Aşağıdaki lineer olmayan Volterra integral denkleminin DDM, VİM ve HPM ile çözümü ele alınsın.

$$u(x) = x - \int_0^x u^2(t) dt$$

İlk olarak integral denklemin DDM ile analitik çözümü incelensin.

Çizelge 3.1 ve Teorem 3.2 kullanılarak ele alınan lineer olmayan integral denklem için;

$$U(k) = \delta(k-1) - \sum_{k_1=0}^{k-1} U(k_1) \frac{U(k-k_1-1)}{k}, \quad k \geq 1, \quad U(0) = 0$$

yineleme bağıntısı oluşturulur. Bu bağıntıdan yararlanılarak;

$$U(1) = 1, \quad U(2) = 0$$

$$U(3) = -\frac{1}{3}, \quad U(4) = 0$$

$$U(5) = \frac{2}{15}, \quad U(6) = 0$$

$$U(7) = -\frac{17}{315}, \quad U(8) = 0$$

$$\begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}$$

değerleri elde edilir. Oluşturulan yineleme bağıntısı ve (3.85) ters dönüşümü kullanılarak ele alınan integral denklemin DDM ile analitik çözümü;

$$u(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \dots = \tanh x$$

olarak bulunur.

İntegral denklemin VİM ile çözümü için Volterra integral denklemlerde kullanılan (3.77) düzeltme fonksiyoneli örneğe göre düzenlenirse;

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left\{ u'_n(s) - 1 + \frac{d}{ds} \int_a^s u_n^2(y) dy \right\} ds$$

ifadesi elde edilir. Örnekte verilen integral denklem için $u_0(x) = f(x) = x$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere oluşturulan düzeltme fonksiyoneli kullanılarak;

$$u_0(x) = x$$

$$u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x \left\{ u'_0(s) - 1 + \frac{d}{ds} \int_a^s u_0^2(y) dy \right\} ds = x - \frac{1}{3}x^3$$

$$u_2(x) = u_1(x) - \int_0^x \left\{ u_1'(s) - 1 + \frac{d}{ds} \int_a^s u_1^2(y) dy \right\} ds = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{63}x^7$$

$$u_3(x) = u_2(x) - \int_0^x \left\{ u_2'(s) - 1 + \frac{d}{ds} \int_a^s u_2^2(y) dy \right\} ds$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{38}{2835}x^9 - \frac{134}{51975}x^{11} + \frac{4}{12285}x^{13} - \frac{1}{59535}x^{15}$$

.

.

.

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla ele alınan integral denklemin VİM ile çözümü;

$$u(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \dots = \tanh x$$

olarak bulunur.

Aynı integral denklemin HPM ile çözümü incelensin.

Öncelikle integral denklem için homotopi denklemi;

$$H(u, p) = u(x) - x + p \int_0^x u^2(t) dt = 0$$

olarak belirlenir.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots$$

serisi homotopi denkleminde yerine yazıldığında ve p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlendiğinde;

$$p^0 : u_0(x) = x$$

$$p^1 : u_1(x) = - \int_0^x u_0^2(t) dt = -\frac{1}{3}x^3$$

$$p^2 : u_2(x) = - \int_0^x 2u_0(t)u_1(t) dt = \frac{2}{5}x^5$$

$$p^3 : u_3(x) = -\int_0^x (2u_0(t)u_2(t) + u_1^2(t))dt = -\frac{17}{315}x^7$$

.

.

.

eşitlikleri elde edilir. Buna göre ele alınan lineer olmayan Volterra integral denklemin HPM ile çözümü;

$$u(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \dots = \tanh x$$

olarak bulunmuş olur.

Örnek 3.8 Aşağıdaki Fredholm integro-diferansiyel denklemin farklı metotlarla çözümü ele alınsın.

$$u'''(x) = e^x - 1 + \int_0^1 t u(t) dt \quad u(0) = u'(0) = u''(0) = 1$$

İlk olarak ele alınan integral denklemin DHM ile çözümü incelensin.

$$a = \int_0^1 t u(t) dt \quad \text{olmak üzere integro-diferansiyel denklem;}$$

$$u'''(x) = e^x - 1 + a$$

olarak ifade edilsin. Başlangıç şartları da göz önüne alınarak bu eşitliğin üç kez 0'dan x 'e integrali alınırsa;

$$u(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^3a$$

ifadesi elde edilir. Elde edilen ifade $a = \int_0^1 t u(t) dt$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$a = \int_0^1 t \left(e^t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^3a \right) dt$$

integrali oluşturulur. Bu integral çözüldüğünde $a = 1$ olarak bulunur. Bulunan bu değer $u(x)$ eşitliğinde yerine yazılırsa integro-diferansiyel denklemin DÇM ile çözümü;

$$u(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^3 \Rightarrow u(x) = e^x$$

olarak bulunmuş olur.

Şimdi aynı integro-diferansiyel denklemin VİM ile analitik çözümü incelensin[17].

Öncelikle integro-diferansiyel denklem için düzeltme fonksiyoneli (3.82)'den yararlanılarak $\lambda = -\frac{1}{2}(s-x)^2$ olmak üzere;

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \frac{1}{2} \int_0^x (s-x)^2 \left(u_n'''(s) - e^s + 1 - \int_0^1 y u_n(y) dy \right) ds \quad n \geq 0$$

şeklinde oluşturulur. Başlangıç yaklaşımı;

$$u_0(x) = u(0) + xu'(0) + \frac{1}{2!}x^2u''(0) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2$$

olarak bulunur. Oluşturulan düzeltme fonksiyoneli kullanılarak;

$$u_0(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2$$

$$u_1(x) = u_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^x (s-x)^2 \left(u_0'''(s) - e^s + 1 - \int_0^1 y u_0(y) dy \right) ds = e^x - \frac{1}{144}x^3$$

$$u_2(x) = u_1(x) - \frac{1}{2} \int_0^x (s-x)^2 \left(u_1'''(s) - e^s + 1 - \int_0^1 y u_1(y) dy \right) ds = \left(e^x - \frac{1}{144}x^3 \right) + \left(\frac{1}{144}x^3 - \frac{29}{4320}x^3 \right)$$

.

.

.

eşitlikleri elde edilir. Bu şekilde iterasyona devam edildiği takdirde integro-diferansiyel denklemin VİM ile çözümü;

$$u(x) = e^x$$

olarak bulunur.

Şimdi de ele alınan integro-diferansiyel denklemin AAM ile çözümü incelensin.

Bunun için verilen örneğin her iki tarafının üç kez 0'dan x 'e integrali alınırsa, başlangıç şartları da göz önüne alınarak;

$$u(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^3 \left(\int_0^1 t u(t) dt \right)$$

ifadesi elde edilir. Başlangıç yaklaşımı $u_0(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3$ olmak üzere;

$$u_{n+1}(x) = \frac{1}{6}x^3 \left(\int_0^1 t u_n(t) dt \right), \quad n \geq 0$$

yineleme bağıntısı kullanılarak;

$$u_0(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3$$

$$u_1(x) = \frac{1}{6}x^3 \left(\int_0^1 t u_0(t) dt \right) = \frac{29}{180}x^3$$

$$u_2(x) = \frac{1}{6}x^3 \left(\int_0^1 t u_1(t) dt \right) = \frac{29}{5400}x^3$$

$$u_3(x) = \frac{1}{6}x^3 \left(\int_0^1 t u_2(t) dt \right) = \frac{29}{162000}x^3$$

.

.

.

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler bir araya getirilerek integro-diferansiyel denklemin $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu;

$$u(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{29}{180}x^3 \left(1 + \frac{1}{30} + \frac{1}{900} + \dots \right).$$

olarak bulunur. Eşitliğin sağ tarafında yer alan geometrik seri için; $a_1 = 1$ ve $r = \frac{1}{30}$

olmak üzere;

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{30}} = \frac{30}{29}, \quad |r| < 1$$

yakınsaklık şartı gerçekleşir. Geometrik serinin $S = \frac{30}{29}$ değeri $u(x)$ ifadesinde yerine yazılırsa integral denklemin AAM ile çözümü;

$$u(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{29}{180}x^3 \frac{30}{29} \Rightarrow u(x) = e^x$$

olarak elde edilir.

Son olarak ele alınan integro-diferansiyel denklemin HPM ile çözümü incelensin.

Öncelikle integro-diferansiyel denklem için homotopi denklemi;

$$H(u, p) = u'''(x) - e^x + 1 - p \int_0^1 t u(t) dt = 0$$

olarak oluşturulsun.

$$u = u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + \dots$$

serisi homotopi denkleminde yerine yazıldığında ve p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlendiğinde;

$$p^0 : u_0'''(x) = e^x - 1 \Rightarrow u_0(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3$$

$$p^1 : u_1'''(x) = \int_0^1 t u_0(t) dt = \frac{29}{30} \Rightarrow u_1(x) = \frac{29}{180}x^3$$

$$p^2 : u_2'''(x) = \int_0^1 t u_1(t) dt = \frac{29}{900} \Rightarrow u_2(x) = \frac{29}{5400}x^3$$

$$p^3 : u_3'''(x) = \int_0^1 t u_2(t) dt = \frac{29}{27000} \Rightarrow u_3(x) = \frac{29}{162000}x^3$$

.

.

.

ifadeleri elde edilir. Bu eşitlikler ile integro-diferansiyel denklemin HPM ile çözümü AAM ile elde edilen çözümde olduğu gibi;

$$u(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{29}{180}x^3 \left(1 + \frac{1}{30} + \frac{1}{900} + \dots\right) = e^x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^3 = e^x$$

olarak bulunur.

Örnek 3.9 Aşağıdaki iki boyutlu lineer Volterra integral denkleminin DDM ve HPM ile çözümleri ele alınsın.

$$u(x, t) = xe^{-t} + t - \frac{1}{3}x^4 - xt + \frac{1}{3}x^4e^{-t} - \frac{1}{2}x^2t^2 - \frac{1}{4}x^3t^2 - xt^2e^t + xte^t + \int_0^t \int_0^x (xy + te^z)u(y, z)dydz$$

Öncelikle ele alınan integral denklemin DDM ile çözümü incelensin[21].

Bu integral denkleme terim terim Çizelge 3.2, Teorem 3.6 ve Teorem 3.8'den yararlanılarak diferansiyel dönüşüm uygulandığında;

$$U(0, 0) = 0$$

$$U(m, 0) = F(m, 0), \quad m = 1, 2, \dots, N$$

$$U(0, n) = F(0, n), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad m, n = 1, 2, \dots, N \text{ olmak üzere;}$$

$$\begin{aligned} U(m, n) = & \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{k,1} \delta_{l,0} \delta_{m,k} \frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)!} + \delta_{m,0} \delta_{n,1} - \frac{1}{3} \delta_{m,4} \delta_{n,0} - \delta_{m,1} \delta_{n,1} + \frac{1}{3} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{k,4} \delta_{l,0} \delta_{m,k} \frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)!} \\ & - \frac{1}{2} \delta_{m,2} \delta_{n,2} - \frac{1}{4} \delta_{m,3} \delta_{n,2} - \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{k,1} \delta_{l,2} \delta_{m,k} \frac{1}{(n-l)!} + \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{k,1} \delta_{l,1} \delta_{m,k} \frac{1}{(n-l)!} \\ & + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{k,1} \delta_{l,0} \frac{1}{(m-k)(n-l)} \left[\sum_{q=0}^{n-l-1} \sum_{p=0}^{m-k-1} \delta_{p,1} \delta_{q,0} U(m-k-p-1, n-l-q-1) \right] \\ & + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{k,0} \delta_{l,1} \frac{1}{(m-k)(n-l)} \left[\sum_{q=0}^{n-l-1} \sum_{p=0}^{m-k-1} \delta_{p,0} \frac{1}{q!} U(m-k-p-1, n-l-q-1) \right] \end{aligned}$$

yineleme bağıntısı elde edilir. Yineleme bağıntısı kullanılarak $m, n = 0, 1, 2, \dots, N$ için $U(m, n)$ değerleri bulunur. (3.95) ters dönüşüm uygulanarak integral denklem sisteminin DDM ile analitik çözümü aşağıdaki şekilde bulunmuş olur.

$$u(x, t) = t + x - xt + \frac{1}{2!}xt^2 - \frac{1}{3!}xt^3 + \frac{1}{4!}xt^4 \dots = xe^{-t} + t$$

Aynı iki boyutlu lineer Volterra integral denkleminin HPM ile çözümü incelensin.

Ele alınan integral denklem için homotopi denklemi;

$$H(u, p) = u(x, t) - \left(xe^{-t} + t - \frac{1}{3}x^4 - xt + \frac{1}{3}x^4e^{-t} - \frac{1}{2}x^2t^2 - \frac{1}{4}x^3t^2 - xt^2e^t + xte^t \right) \\ - p \int_0^t \int_0^x (xy + te^z)u(y, z)dydz$$

olarak belirlensin.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots$$

serisi oluşturulan homotopi denkleminde yerine yazıldığında ve p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlendiğinde;

$$p^0 : u_0(x, t) = xe^{-t} + t - \frac{1}{3}x^4 - xt + \frac{1}{3}x^4e^{-t} - \frac{1}{2}x^2t^2 - \frac{1}{4}x^3t^2 - xt^2e^t + xte^t$$

$$p^1 : u_1(x, t) = \int_0^t \int_0^x (xy + te^z)u_0(y, z)dydz = -\frac{1}{720}x \left[e^{-t}(40x^6 + 240x^3) + e^{2t}t^2 180x(1+t) \right.$$

$$+ e^t t(-48x^4 - 630x^3 + 240x^2 - 360x + 720) + e^t t^2(150x^3 - 240x^2 + 360x - 720)$$

$$+ e^t t^3(45x^3 + 120x^2) + t^3(12x^5 + 30x^4) + t^2(-48x^4 + 120x^3 - 180x^2 - 360x)$$

$$\left. + t(40x^6 - 90x^3 - 240x^2 + 180x - 720) + x^3(720e^t - 40x^3 - 960) \right]$$

.

.

.

$$p^{n+1} : u_{n+1}(x, t) = \int_0^t \int_0^x (xy + te^z)u_n(y, z)dydz, \quad n \geq 0$$

eşitlikleri elde edilir. Bu şekilde ele alınan iki boyutlu integral denklemin yaklaşık çözümü elde edilir.

Buna karşın, integral denklemin analitik çözümünü elde etmek için homotopi denklemi;

$$H(u, p) = u(x, t) - (xe^{-t} + t) - p \left(-\frac{1}{3}x^4 - xt + \frac{1}{3}x^4e^{-t} - \frac{1}{2}x^2t^2 - \frac{1}{4}x^3t^2 - xt^2e^t + xte^t \right) - p \int_0^t \int_0^x (xy + te^z)u(y, z)dydz$$

olarak belirlensin.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots$$

serisi oluşturulan homotopi denkleminde yerine yazıldığında ve p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlendiğinde $u_0(x, t) = xe^{-t} + t$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere;

$$p^0 : u_0(x, t) = xe^{-t} + t$$

$$p^1 : u_1(x, t) = -\frac{1}{3}x^4 - xt + \frac{1}{3}x^4e^{-t} - \frac{1}{2}x^2t^2 - \frac{1}{4}x^3t^2 - xt^2e^t + xte^t + \int_0^t \int_0^x (xy + te^z)u_0(y, z)dydz = 0$$

$$p^2 : u_2(x, t) = \int_0^t \int_0^x (xy + te^z)u_1(y, z)dydz = 0$$

.

.

.

$$p^{n+1} : u_{n+1}(x, t) = \int_0^t \int_0^x (xy + te^z)u_n(y, z)dydz = 0, \quad n \geq 0$$

eşitlikleri elde edilir. Buna göre iki boyutlu Volterra integral denkleminin HPM ile analitik çözümü;

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots = xe^{-t} + t$$

olarak bulunur.

Ele alınan Örnek 3.9'un HPM ile çözümü için farklı iki homotopi denklemi oluşturulmuştur. Oluşturulan ilk homotopi denklemi kullanılarak analitik çözüm elde edilememiştir. Buna karşın oluşturulan ikinci homotopi denklemi ile analitik çözüm kolayca bulunmuştur. Homotopi kavramından yararlanılarak pertürbasyon denklemini farklı şekillerde ifade etmek mümkündür. Bu durum integral denklemlerin HPM ile

çözümünde farklı alternatifler oluşturarak daha başarılı sonuçlar elde etmeyi sağlamaktadır.

Örnek 3.10 Aşağıdaki lineer olmayan iki boyutlu Volterra integral denklem sisteminin DDM ve HPM ile çözümü ele alınsın.

$$u_1(x,t) = x^2t - \frac{1}{15}x^5t^3 - \frac{1}{70}x^{10}t^7 + \int_0^t \int_0^x (u_1(y,z)^2 + u_2(y,z)^3) dydz$$

$$u_2(x,t) = x^3t^2 + \frac{1}{35}x^7t^5 - \frac{1}{28}x^7t^4 + \int_0^t \int_0^x (u_1(y,z)^3 - u_2(y,z)^2) dydz \quad (x,t) \in [0,1]$$

Öncelikle ele alınan iki boyutlu integral denklem sisteminin DDM ile çözümü incelensin[43].

İntegral denklem sistemine Çizelge 3.2, Teorem 3.6 ve Teorem 3.7'den yararlanılarak diferansiyel dönüşüm uygulandığında;

$$U_1(0,0) = U_2(0,0) = 0$$

$$U_1(m,0) = U_2(m,0) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N$$

$$U_1(0,n) = U_2(0,n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

olmak üzere $m, n = 0, 1, 2, \dots, N$ için;

$$U_1(m,n) = \delta_{m,2}\delta_{n,1} - \frac{1}{15}\delta_{m,5}\delta_{n,3} - \frac{1}{70}\delta_{m,10}\delta_{n,7} + \frac{1}{mn} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} U_1(k,l)U_1(m-k-1,n-l-1)$$

$$+ \frac{1}{mn} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{n-l-1} \sum_{p=0}^{m-k-1} U_2(k,l)U_2(p,q)U_2(m-k-p-1,n-l-q-1)$$

$$U_2(m,n) = \delta_{m,3}\delta_{n,2} + \frac{1}{35}\delta_{m,7}\delta_{n,5} - \frac{1}{28}\delta_{m,7}\delta_{n,4}$$

$$+ \frac{1}{mn} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{n-l-1} \sum_{p=0}^{m-k-1} U_1(k,l)U_1(p,q)U_1(m-k-p-1,n-l-q-1)$$

$$- \frac{1}{mn} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} U_2(k,l)U_2(m-k-1,n-l-1)$$

yineleme bağıntısı elde edilir. Elde edilen yineleme bağıntısı kullanılarak $m, n = 0, 1, 2, \dots, N$ için $U_1(m, n)$ ve $U_2(m, n)$ değerleri bulunur ve (3.95) ters dönüşüm uygulanarak integral denklem sisteminin DDM ile analitik çözümü;

$$u_1(x, t) = x^2 t, \quad u_2(x, t) = x^3 t^2$$

olarak bulunur.

Şimdi de analitik çözümü $u_1(x, t) = x^2 t$ ve $u_2(x, t) = x^3 t^2$ olarak bilinen aynı lineer olmayan integral denklem sisteminin HPM ile çözümü incelensin.

Örnek 3.9 integral denkleminde olduğu gibi homotopi denklemleri;

$$H_1(u_1, u_2, p) = u_1(x, t) - \left(x^2 t - \frac{1}{15} x^5 t^3 - \frac{1}{70} x^{10} t^7 \right) - p \int_0^t \int_0^x (u_1(y, z)^2 + u_2(y, z)^3) dy dz = 0$$

$$H_2(u_1, u_2, p) = u_2(x, t) - \left(x^3 t^2 + \frac{1}{35} x^7 t^5 - \frac{1}{28} x^7 t^4 \right) - p \int_0^t \int_0^x (u_1(y, z)^3 - u_2(y, z)^2) dy dz = 0$$

olarak belirlenirse integral denklem sisteminin yaklaşık çözümü elde edilir.

Buna karşın analitik çözümü elde etmek için homotopi denklemleri;

$$H_1(u_1, u_2, p) = u_1(x, t) - x^2 t - p \left(-\frac{1}{15} x^5 t^3 - \frac{1}{70} x^{10} t^7 + \int_0^t \int_0^x (u_1(y, z)^2 + u_2(y, z)^3) dy dz \right) = 0$$

$$H_2(u_1, u_2, p) = u_2(x, t) - x^3 t^2 - p \left(\frac{1}{35} x^7 t^5 - \frac{1}{28} x^7 t^4 + \int_0^t \int_0^x (u_1(y, z)^3 - u_2(y, z)^2) dy dz \right) = 0$$

olarak belirlensin.

$$u_i = \sum_{j=0}^{\infty} p^j u_{ij} = u_{i0} + p u_{i1} + p^2 u_{i2} + \dots, \quad i = 1, 2$$

(3.37) serileri homotopi denklemlerindeki yerlerine yazıldığında ve p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlendiğinde;

$$p^0 : u_{10}(x, t) = x^2 t, \quad u_{20}(x, t) = x^3 t^2$$

$$p^1 : \begin{cases} u_{11}(x, t) = -\frac{1}{15}x^5t^3 - \frac{1}{70}x^{10}t^7 + \int_0^t \int_0^x (u_{10}(y, z)^2 + u_{20}(y, z)^3) dy dz = 0 \\ u_{21}(x, t) = \frac{1}{35}x^7t^5 - \frac{1}{28}x^7t^4 + \int_0^t \int_0^x (u_{10}(y, z)^3 - u_{20}(y, z)^2) dy dz = 0 \end{cases}$$

.

.

.

$$u_{11}(x, t) = u_{12}(x, t) = \dots = 0, \quad u_{21}(x, t) = u_{22}(x, t) = \dots = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Sonuç olarak lineer olmayan Volterra integral denklem sisteminin HPM ile analitik çözümü;

$$u_1(x, t) = u_{10}(x, t) + u_{11}(x, t) + \dots = x^2t$$

$$u_2(x, t) = u_{20}(x, t) + u_{21}(x, t) + \dots = x^3t^2$$

olarak bulunur.

Örnek 3.11 Aşağıdaki lineer olmayan Fredholm integral denklem sisteminin DDM ve HPM ile çözümü ele alınsın.

$$u_1(x) = x^2 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{10}x^{10} + \int_0^1 [u_1(t)^2 + u_2(t)^3] dt$$

$$u_2(x) = x^3 + \int_0^1 [u_1(t)^3 - u_2(t)^2] dt$$

Öncelikle DDM ile integral denklem sisteminin çözümü incelensin[12].

Çizelge 3.1, Teorem 3.2 ve Teorem 3.3'ten yararlanılarak integral denklem sistemi için diferansiyel dönüşüm uygulandığında $U_1(0) = U_2(0) = 0$ olmak üzere $k \geq 1$ için;

$$U_1(k) = \delta(k-2) - \frac{1}{5}\delta(k-5) - \frac{1}{10}\delta(k-10) + \frac{1}{k} \sum_{k_1=0}^{k-1} U_1(k_1)U_1(k-k_1-1) \\ + \frac{1}{k} \sum_{k_2=0}^{k-1} \sum_{k_1=0}^{k_2} U_2(k_1)U_2(k_2-k_1)U_2(k-k_2-1)$$

$$U_2(k) = \delta(k-3) + \frac{1}{k} \sum_{k_2=0}^{k-1} \sum_{k_1=0}^{k_2} U_1(k_1) U_1(k_2 - k_1) U_1(k - k_2 - 1) - \frac{1}{k} \sum_{k_1=0}^{k-1} U_2(k_1) U_2(k - k_1 - 1).$$

yineleme bağıntısı elde edilir. Elde edilen yineleme bağıntısı kullanılarak $k = 0, 1, 2, \dots$ için $U_1(k)$ ve $U_2(k)$ değerleri bulunur. Daha sonra da (3.85) ters dönüşümü uygulanarak integral denklem sisteminin DDM ile analitik çözümü;

$$u_1(x) = x^2, \quad u_2(x) = x^3$$

olarak bulunur.

Şimdi de aynı integral denklem sisteminin HPM ile çözümü incelensin.

Örnek 3.9 ve Örnek 3.10'da olduğu gibi homotopi denklemleri;

$$H_1(u_1, u_2, p) = u_1(x) - \left(x^2 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{10}x^{10} \right) - p \int_0^1 [u_1(t)^2 + u_2(t)^3] dt$$

$$H_2(u_1, u_2, p) = u_2(x) - x^3 - p \left(\int_0^1 [u_1(t)^3 - u_2(t)^2] dt \right)$$

olarak belirlenirse ele alınan integral denklem sisteminin yaklaşık çözümü elde edilir.

Analitik çözümü elde etmek için homotopi denklemleri;

$$H_1(u_1, u_2, p) = u_1(x) - x^2 - p \left(-\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{10}x^{10} + \int_0^1 [u_1(t)^2 + u_2(t)^3] dt \right)$$

$$H_2(u_1, u_2, p) = u_2(x) - x^3 - p \left(\int_0^1 [u_1(t)^3 - u_2(t)^2] dt \right)$$

olarak belirlensin.

$$u_i = \sum_{j=0}^{\infty} p^j u_{ij} = u_{i0} + p u_{i1} + p^2 u_{i2} + \dots, \quad i = 1, 2$$

(3.37) serileri oluşturulan homotopi denklemlerindeki yerlerine yazıldığında ve p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlendiğinde;

$$p^0 : u_{10}(x) = x^2, u_{20}(x) = x^3$$

$$p^1 : \begin{cases} u_{11}(x) = -\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{10}x^{10} + \int_0^1 [u_{10}(t)^2 + u_{20}(t)^3] dt = 0 \\ u_{21}(x) = \int_0^1 [u_{10}(t)^3 - u_{20}(t)^2] dy = 0 \end{cases}$$

.

.

.

$$u_{11}(x) = u_{12}(x) = \dots = 0, \quad u_{21}(x) = u_{22}(x) = \dots = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Ele alınan lineer olmayan Fredholm integral denklem sisteminin HPM ile çözümü;

$$u_1(x) = u_{10}(x) + u_{11}(x) + \dots = x^2$$

$$u_2(x) = u_{20}(x) + u_{21}(x) + \dots = x^3$$

olarak bulunur.

Her integral denklemlerin analitik çözümünü elde etmek mümkün değildir. Analitik çözümün elde edilemediği durumlarda sayısal çözümlere başvurulur.

3.7.2 İntegral Denklemlerin Sayısal Çözümleri

İntegral denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için birçok metot geliştirilmiştir. Bu metotlardan bazıları VİM, AAM ve DDM'dir. Bu bölümde ele alınacak örneklerin HPM ve açıklanan diğer metotlar kullanılarak sayısal çözümleri bulunup elde edilen sonuçlar karşılaştırılacaktır.

Örnek 3.12 Aşağıdaki ikinci tür Volterra integral denkleminin HPM ve VİM ile sayısal çözümleri ele alınsın.

$$u(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x (3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2) u(t) dt$$

Analitik çözümü $u(x) = e^x$ olan integral denklem için ilk olarak ViM uygulansın.

Bunun için Volterra integral denklemlerinde kullanılan (3.77) düzeltme fonksiyoneli incelenen örneğe göre düzenlenirse $N \geq 0$ için;

$$u_{N+1}(x) = u_N(x) - \int_0^x \left\{ u'_N(s) - (-2 - 8s) - \frac{d}{ds} \int_a^s (3 + 6(s-y) - 4(s-y)^2) u_N(y) dy \right\} ds$$

yineleme bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı kullanılarak $u_0(x) = 1 - 2x - 4x^2$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere;

$$u_0(x) = 1 - 2x - 4x^2$$

$$u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x \left\{ u'_0(s) - (-2 - 8s) - \frac{d}{ds} \int_a^s (3 + 6(s-y) - 4(s-y)^2) u_0(y) dy \right\} ds$$

$$= 1 + x - 4x^2 - \frac{22}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{8}{15}x^5$$

$$u_2(x) = u_1(x) - \int_0^x \left\{ u'_1(s) - (-2 - 8s) - \frac{d}{ds} \int_a^s (3 + 6(s-y) - 4(s-y)^2) u_1(y) dy \right\} ds$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{13}{3}x^3 - \frac{47}{6}x^4 - \frac{37}{15}x^5 + \frac{22}{45}x^6 + \frac{8}{63}x^7 - \frac{4}{315}x^8$$

.

.

.

$$u_{N+1}(x) = u_N(x) - \int_0^x \left\{ u'_N(s) - (-2 - 8s) - \frac{d}{ds} \int_a^s (3 + 6(s-y) - 4(s-y)^2) u_N(y) dy \right\} ds$$

eşitlikleri bulunur. Ele alınan integral denklemin ViM ile yaklaşık çözümü;

$$u(x) \approx u_{ViM}(x) = u_N(x), \quad N \geq 0$$

eşitliği ile ifade edilir.

Aynı lineer Volterra integral denkleminin HPM ile sayısal çözümü incelensin.

Öncelikle homotopi eşitliğini oluşturmak için;

$$F(u) = u(x) - (1 - 2x - 4x^2)$$

$$L(u) = u(x) - \left(1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x (3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2) u(t) dt \right) = 0$$

operatörleri tanımlansın. Bu ifadeler,

$$H(u, p) = (1 - p)F(u) + pL(u) = 0$$

(3.20) homotopi denkleminde yerine yazılırsa ve düzenleme yapılırsa;

$$H(u, p) = u(x) - (1 - 2x - 4x^2) - p \int_0^x (3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2) u(t) dt = 0$$

ifadesi elde edilir.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots$$

serisi oluşturulan homotopi denkleminde yerine yazıldığında ve p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlendiğinde;

$$p^0 : u_0(x) = 1 - 2x - 4x^2,$$

$$p^1 : u_1(x) = \int_0^x (3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2) u_0(t) dt = 3x - \frac{22}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{8}{15}x^5$$

$$p^2 : u_2(x) = \int_0^x (3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2) u_1(t) dt$$

$$= -\frac{4}{315}x^8 + \frac{8}{63}x^7 + \frac{22}{45}x^6 - 3x^5 - \frac{13}{2}x^4 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^2$$

.

.

.

$$p^{N+1} : u_{N+1}(x) = \int_0^x (3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2) u_N(t) dt, \quad N \geq 0$$

eşitlikleri bulunur. Sonuç olarak ele alınan integral denklemin HPM ile yaklaşık çözümü;

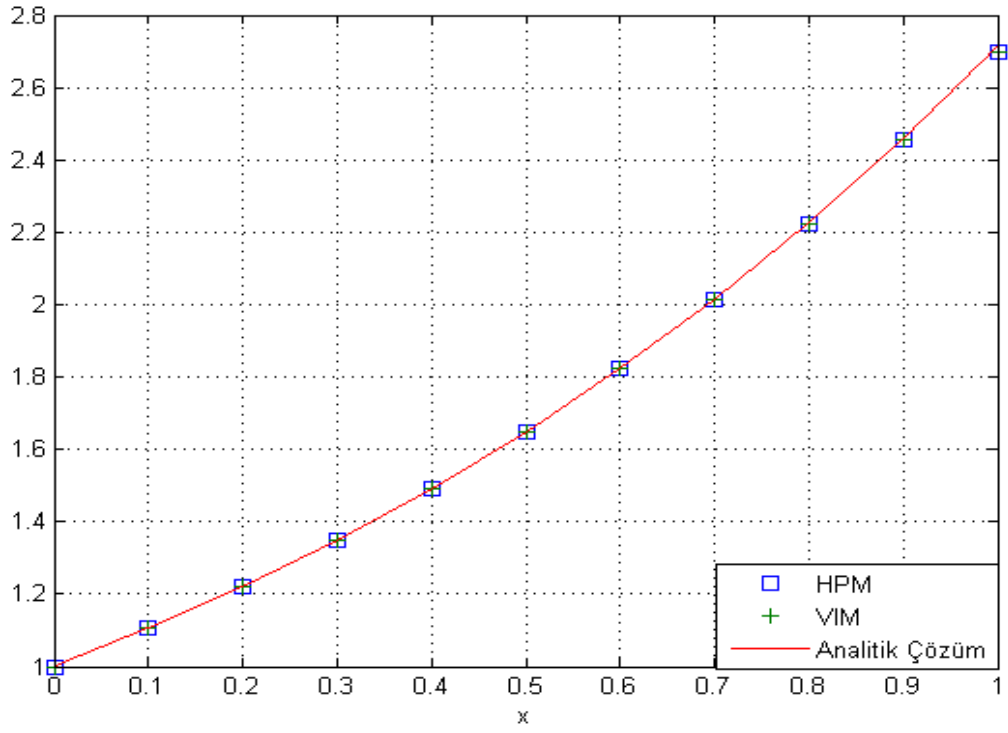
$$u(x) \approx u_{HPM}(x) = \sum_{i=0}^N u_i(x), \quad N \geq 0$$

şeklinde ifade edilir.

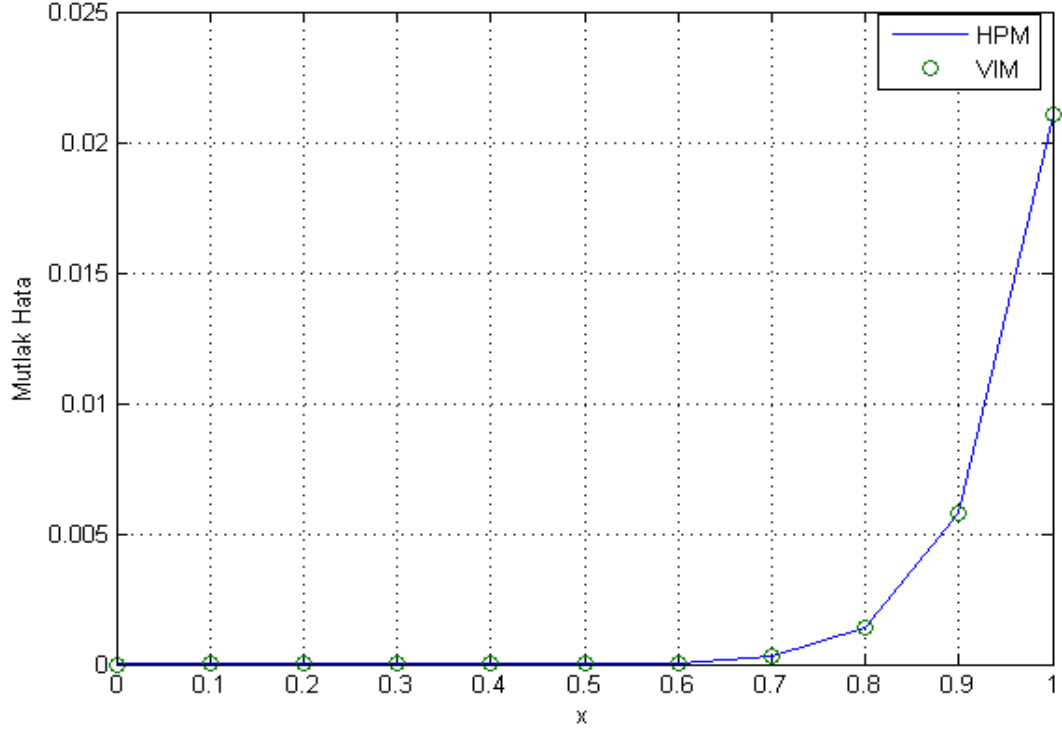
Çizelge 3.3'te incelenen örneğe sayısal çözüm için HPM ve ViM'in uygulanması sonucu oluşan hatalar verilmiştir

Çizelge 3.3 Örnek 3.12 için HPM ve ViM'in uygulanması sonucu oluşan hatalar

x	HPM (N = 10)	ViM (N = 10)
	Hata $ u(x) - u_{HPM}(x) $	Hata $ u(x) - u_{ViM}(x) $
0.0	0	0
0.1	5.351274978693255e-014	5.395683899678261e-014
0.2	1.310291875000758e-010	1.310294095446807e-010
0.3	1.344558753224590e-008	1.344558753224590e-008
0.4	3.749777930384113e-007	3.749777925943221e-007
0.5	5.107854785135757e-006	5.107854786245980e-006
0.6	4.413461529639839e-005	4.413461529728657e-005
0.7	2.781259052158092e-004	2.781259052127005e-004
0.8	1.389491133195975e-003	1.389491133194643e-003
0.9	5.808039555255995e-003	5.808039555256883e-003
1.0	2.107530018730719e-002	2.107530018730541e-002



Şekil 3.1 Örnek 3.12 için HPM ve ViM'in uygulanması sonucu elde edilen sayısal değerler ile tam sonuçlar



Şekil 3.2 Örnek 3.12 için HPM ve ViM'in uygulanması sonucu oluşan hatalar

Şekil 3.1'den ele alınan Volterra integral denklemi için HPM ve ViM'in uygulanması sonucu elde edilen sayısal verilerin analitik çözümden elde edilen verilere oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 3.3 ve Şekil 3.2'den ele alınan Volterra integral denklemi için HPM ve ViM'in uygulanması sonucu oluşan sayısal hataların birbirine oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Örnek 3.13 Aşağıdaki lineer olmayan Fredholm integral denkleminin HPM ve ViM ile sayısal çözümleri ele alınsın.

$$u(x) = x e^x - \frac{1}{288}(3 + e^2)x + \frac{1}{36} \int_0^1 x t u^2(t) dt$$

Analitik çözümü $u(x) = x e^x$ olan integral denklem için öncelikle ViM uygulansın.

İterasyon için (3.78) düzeltme fonksiyoneli incelenen örneğe göre düzenlendiğinde;

$$u_{N+1}(x) = u_N(x) - \int_0^x \left\{ u'_N(s) - (e^s + s e^s - \frac{1}{96} - \frac{1}{288} e^2) - \frac{1}{36} \int_0^1 y u_N^2(y) dy \right\} ds, \quad N \geq 0$$

denklemini elde edilir. Buradan $u_0(x) = x e^x - \frac{1}{288}(3 + e^2)x$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere;

$$u_0(x) = x e^x - \frac{1}{288}(3 + e^2)x$$

$$u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x \left\{ u'_0(s) - (e^s + s e^s - \frac{1}{96} - \frac{1}{288} e^2) - \frac{1}{36} \int_0^1 y u_0^2(y) dy \right\} ds$$

$$= \frac{1}{11943936} x (-41463 + 13824 e^1 - 13818 e^2 + 4608 e^3 + e^4) + x e^x$$

$$u_2(x) = u_1(x) - \int_0^x \left\{ u'_1(s) - (e^s + s e^s - \frac{1}{96} - \frac{1}{288} e^2) - \frac{1}{36} \int_0^1 y u_1^2(y) dy \right\} ds$$

.

.

.

$$u_{N+1}(x) = u_N(x) - \int_0^x \left\{ u'_N(s) - (e^s + s e^s - \frac{1}{96} - \frac{1}{288} e^2) - \frac{1}{36} \int_0^1 y u_N^2(y) dy \right\} ds$$

eşitlikleri bulunur. Buna göre; ele alınan integral denklemin VİM ile yaklaşık çözümü,

$$u(x) \approx u_{VİM}(x) = u_N(x), \quad N \geq 0$$

eşitliği ile gösterilir.

Şimdi de aynı lineer olmayan integral denklemin HPM ile sayısal çözümü incelensin.

Ele alınan integral denklem için homotopi denklemi;

$$H(u, p) = u(x) - \left(x e^x - \frac{1}{288} (3 + e^2) x \right) - p \frac{1}{36} \int_0^1 x t u^2(t) dt = 0$$

şeklinde oluşturulur.

$$u = u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + \dots$$

serisi oluşturulan homotopi denkleminde yerine yazılırsa ve p 'nin aynı kuvvete sahip

terimleri eşitlenirse $u_0(x) = x e^x - \frac{1}{288} (3 + e^2) x$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere;

$$p^0 : u_0(x) = x e^x - \frac{1}{288} (3 + e^2) x$$

$$p^1 : u_1(x) = \frac{1}{36} \int_0^1 x t u_0^2(t) dt = \frac{1}{11943936} x (82953 + 13824 e^1 + 27654 e^2 + 4608 e^3 + e^4)$$

$$p^2 : u_2(x) = \frac{1}{36} \int_0^1 x t 2 u_0(t) u_1(t) dt = \frac{1}{247669456896} x (573122277 - 95613696 e^1$$

$$+ 159128037 e^2 - 31891968 e^3 - 10637577 e^4 - 6912 e^5 - e^6)$$

.

.

.

$$p^{N+1} : u_{N+1}(x) = \frac{1}{36} \int_0^1 x t \sum_{r=0}^N u_r(t) u_{N-r}(t) dt, \quad N \geq 0$$

eşitlikleri elde edilir. Buna göre integral denklemin HPM ile sayısal çözümü;

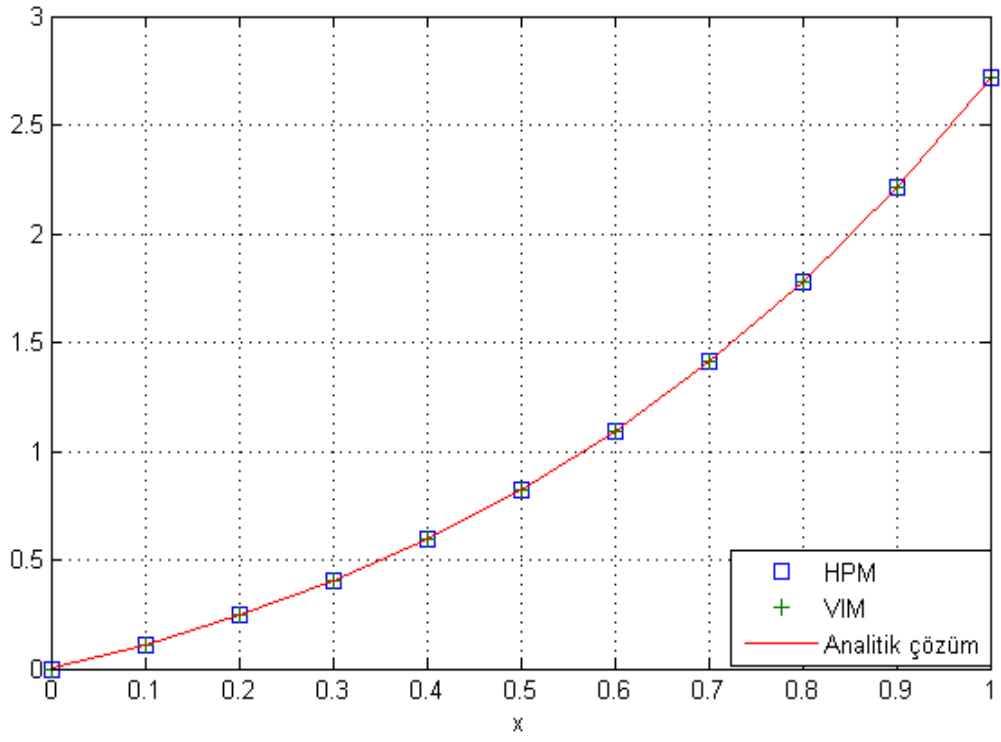
$$u(x) \approx u_{HPM}(x) = \sum_{i=0}^N u_i(x), \quad N \geq 0$$

şeklinde ifade edilir.

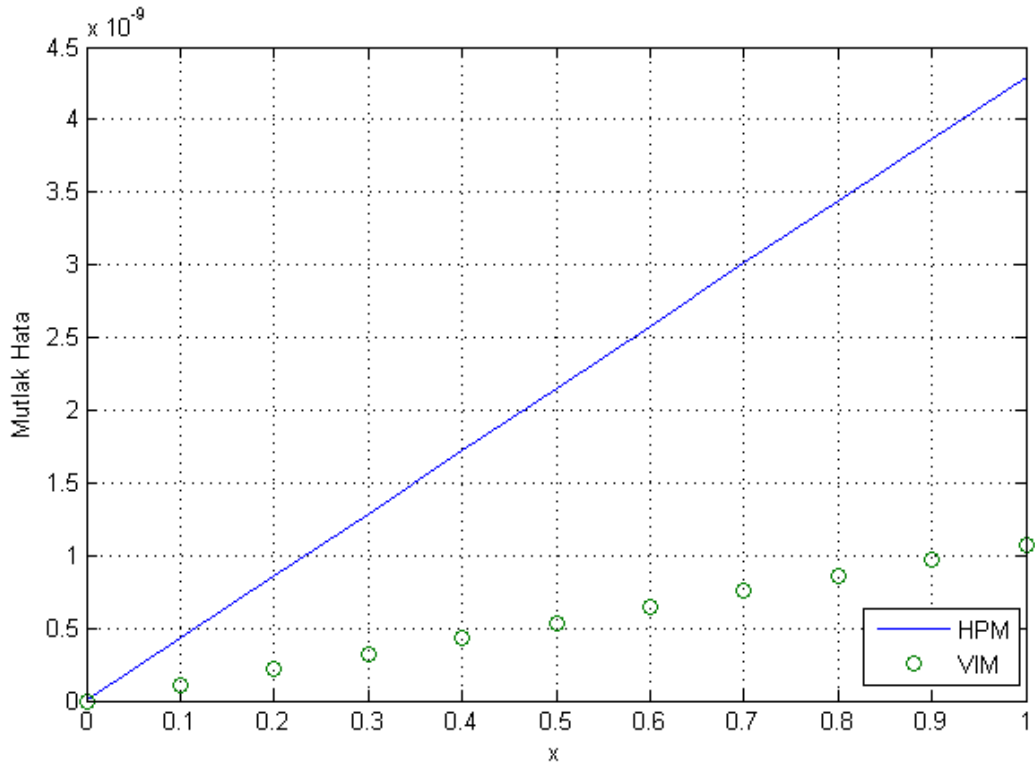
Çizelge 3.4’te incelenen örneğe sayısal çözüm için HPM ve ViM’in uygulanması sonucu oluşan hatalar verilmiştir

Çizelge 3.4 Örnek 3.13 için HPM ve ViM’in uygulanması sonucu oluşan hatalar

x	HPM (N = 5)	ViM (N = 5)
	Hata $ u(x) - u_{HPM}(x) $	Hata $ u(x) - u_{ViM}(x) $
0.0	0	0
0.1	4.299096495463672e-010	1.075088768009991e-010
0.2	8.598192990927345e-010	2.150177536019982e-010
0.3	1.289728934761314e-009	3.225265610140582e-010
0.4	1.719638653696620e-009	4.300354516928451e-010
0.5	2.149548206098473e-009	5.375443423716320e-010
0.6	2.579457980544930e-009	6.450533440727213e-010
0.7	3.009367643969085e-009	7.525622347515082e-010
0.8	3.439277307393240e-009	8.600709033856901e-010
0.9	3.869186748772791e-009	9.675802381536869e-010
1.0	4.299096634241550e-009	1.075088906787869e-009



Şekil 3.3 Örnek 3.13 için HPM ve ViM'in uygulanması sonucu elde edilen sayısal değerler ile tam sonuçlar



Şekil 3.4 Örnek 3.13 için HPM ve ViM'in uygulanması sonucu oluşan hatalar

Şekil 3.3'ten ele alınan Fredholm integral denklemi için HPM ve ViM'in uygulanması sonucu elde edilen sayısal verilerin analitik çözümden elde edilen verilere oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 3.4 ve Şekil 3.4'ten, ele alınan lineer olmayan Fredholm integral denklemi için HPM ve ViM'in uygulanması sonucu oluşan sayısal hataların doğrusal olduğu ve ViM'in daha başarılı sonuçlar verdiği görülmektedir.

Örnek 3.14 Aşağıdaki Fredholm integro-diferansiyel denkleminin farklı metotlarla sayısal çözümleri ele alınsın.

$$u'(x) = xe^x + e^x - x + \int_0^1 xu(t)dt, \quad u(0) = 0$$

Analitik çözümü $u(x) = xe^x$ olan integro-diferansiyel denkleminin daha önce DDM ile yaklaşık çözümü incelenmiştir[45].

İlk olarak integro-diferansiyel denklemin AAM ile sayısal çözümü incelensin.

Bunun için verilen integro-diferansiyel denklemin bir kez 0'dan x 'e integrali alınırsa başlangıç şartları da göz önüne alınarak;

$$u(x) = xe^x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \left(\int_0^1 u(t)dt \right)$$

integral denklemi oluşur. Bu eşitliğe göre yineleme bağıntısı;

$$u_{N+1}(x) = \frac{1}{2}x^2 \left(\int_0^1 u_N(t)dt \right), \quad N \geq 0$$

olarak belirlenir. Elde edilen bu bağıntı kullanılarak $u_0(x) = xe^x - \frac{1}{2}x^2$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere;

$$u_0(x) = xe^x - \frac{1}{2}x^2$$

$$u_1(x) = \frac{1}{2}x^2 \left(\int_0^1 u_0(t)dt \right) = \frac{5}{12}x^2$$

$$u_2(x) = \frac{1}{2}x^2 \left(\int_0^1 u_1(t) dt \right) = \frac{5}{72}x^2$$

.

.

.

$$u_{N+1}(x) = \frac{1}{2}x^2 \left(\int_0^1 u_N(t) dt \right), \quad N \geq 0$$

eşitlikleri bulunur. Buna göre integro-diferansiyel denklemin AAM ile yaklaşık çözümü;

$$u(x) \approx u_{AAM}(x) = \sum_{i=0}^N u_i(x), \quad N \geq 0$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 3.14 integro-diferansiyel denkleminin VİM ile sayısal çözümü ele alınsın.

Bunun için ilk olarak (3.82) düzeltme fonksiyonelinden yararlanılarak;

$$u_{N+1}(x) = u_N(x) - \int_0^x \left(u'_N(s) - (se^s + e^s - s) - \int_0^1 su_N(y) dy \right) ds, \quad N \geq 0$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeden $u(0) = u_0(x) = 0$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere;

$$u_0(x) = 0$$

$$u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x \left(u'_0(s) - (se^s + e^s - s) - \int_0^1 su_0(y) dy \right) ds = xe^x - \frac{1}{2}x^2$$

$$u_2(x) = u_1(x) - \int_0^x \left(u'_1(s) - (se^s + e^s - s) - \int_0^1 su_1(y) dy \right) ds = xe^x - \frac{1}{12}x^2$$

$$u_3(x) = u_2(x) - \int_0^x \left(u'_2(s) - (se^s + e^s - s) - \int_0^1 su_2(y) dy \right) ds = xe^x - \frac{1}{72}x^2$$

.

.

.

eşitlikleri bulunur. Buna göre ele alınan integro-diferansiyel denklemin VİM ile sayısal çözümü;

$$u(x) \approx u_{VİM}(x) = u_N(x), \quad N \geq 0$$

olarak bulunur.

Şimdi de aynı integro-diferansiyel denklemin HPM ile sayısal çözümü incelensin.

Öncelikle ele alınan integro-diferansiyel denklemi için homotopi denklemi;

$$H(u, p) = u'(x) - (xe^x + e^x - x) - p \int_0^1 x u(t) dt = 0$$

şeklinde oluşturulur.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots$$

serisi oluşturulan homotopi denkleminde yerine yazılırsa ve p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlenirse $u_0'(x) = xe^x + e^x - x$ olmak üzere;

$$p^0 : u_0'(x) = xe^x + e^x - x \Rightarrow u_0(x) = xe^x - \frac{1}{2}x^2$$

$$p^1 : u_1'(x) = \int_0^1 x u_0(t) dt = \frac{5}{6}x \Rightarrow u_1(x) = \frac{5}{12}x^2$$

$$p^2 : u_2'(x) = \int_0^1 x u_1(t) dt = \frac{5}{36}x \Rightarrow u_2(x) = \frac{5}{72}x^2$$

.

.

.

eşitlikleri elde edilir. Buna göre integro-diferansiyel denkleminin HPM ile yaklaşık çözümü;

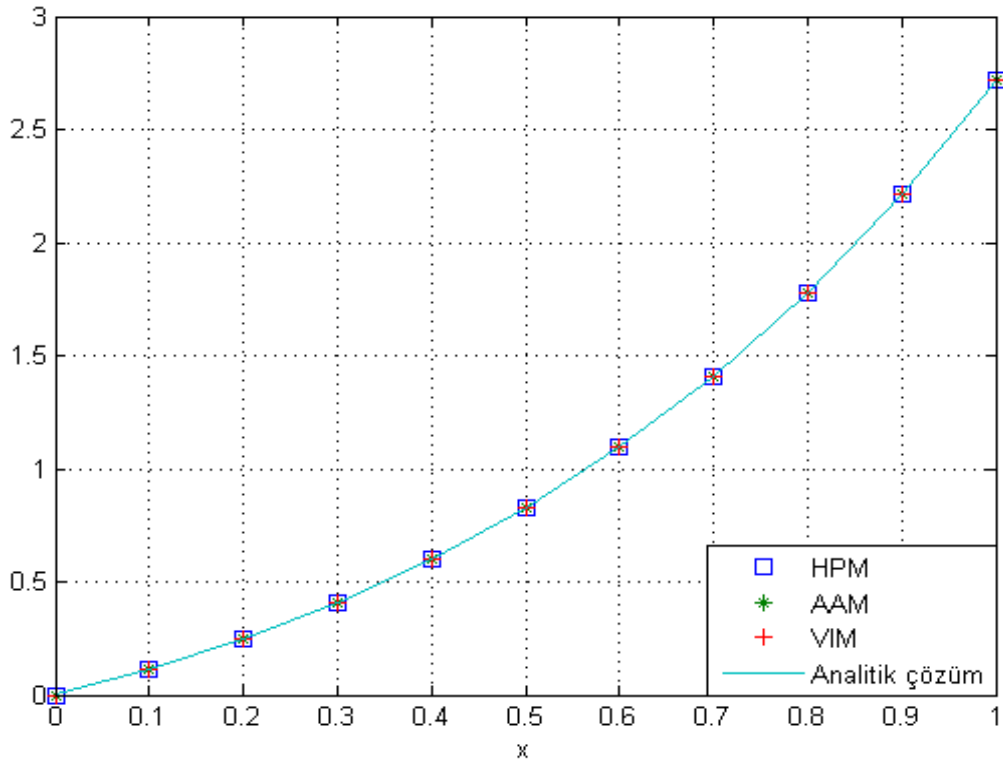
$$u(x) \approx u_{HPM}(x) = \sum_{i=0}^N u_i(x), \quad N \geq 0$$

şeklinde ifade edilir.

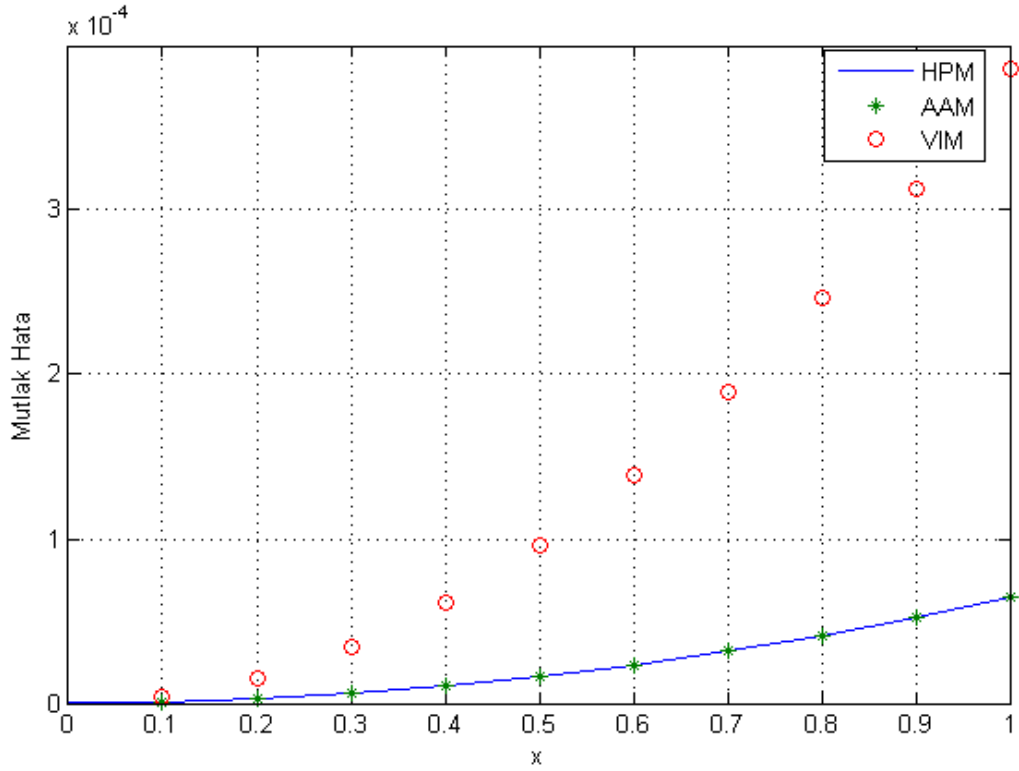
Çizelge 3.5'te incelenen örneğe sayısal çözüm için HPM, AAM, ViM ve DDM'nin uygulanması sonucu oluşan hatalar verilmiştir

Çizelge 3.5 Örnek 3.14 için HPM, AAM, ViM ve DDM'nin uygulanması sonucu oluşan hatalar

x	HPM ($N = 5$)	AAM ($N = 5$)	ViM ($N = 5$)	DDM ($N = 10$)
	Hata	Hata	Hata	Hata
	$ u(x) - u_{HPM}(x) $	$ u(x) - u_{AAM}(x) $	$ u(x) - u_{ViM}(x) $	$ u(x) - u_{DDM}(x) $
0.0	0	0	0	0
0.1	6.4300e-007	6.4300e-007	3.8580e-006	1.00118319e-02
0.2	2.5720e-006	2.5720e-006	1.5432e-005	2.78651355e-02
0.3	5.7870e-006	5.7870e-006	3.4722e-005	5.08730892e-02
0.4	1.0288e-005	1.0288e-005	6.1728e-005	7.55356316e-02
0.5	1.6075e-005	1.6075e-005	9.6451e-005	9.71888592e-02
0.6	2.3148e-005	2.3148e-005	1.3889e-004	1.09551714e-01
0.7	3.1507e-005	3.1507e-005	1.8904e-004	1.04133232e-01
0.8	4.1152e-005	4.1152e-005	2.4691e-004	6.94512700e-02
0.9	5.2083e-005	5.2083e-005	3.1250e-004	1.00034260e-02
1.0	6.4300e-005	6.4300e-005	3.8580e-004	1.55147712e-01



Şekil 3.5 Örnek 3.14 için HPM, AAM ve VİM'in uygulanması sonucu elde edilen sayısal değerler ile tam sonuçlar



Şekil 3.6 Örnek 3.14 için HPM, AAM ve VİM'in uygulanması sonucu oluşan hatalar

Şekil 3.5'ten, ele alınan Fredholm integro-diferansiyel denklemi için HPM, AAM ve VİM'in uygulanması sonucu elde edilen sayısal verilerin analitik çözümden elde edilen verilere oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Şekil 3.6'dan, ele alınan Fredholm integro-diferansiyel denklemi için HPM ve AAM'nin diğer metotlara göre daha başarılı sayısal sonuçlar verdiği görülmektedir.

Çizelge 3.5'ten HPM ile AAM'nin ele alınan örnek için aynı sayısal değerleri verdiği buna karşın DDM'nin ele alınan integro-diferansiyel denklem için diğer metotlardan daha büyük hatalar verdiği görülmektedir.

Örnek 3.15 Aşağıdaki iki boyutlu Volterra integral denkleminin DDM ve HPM ile yaklaşık çözümü incelensin.

$$u(x, t) = \sin(x + t)(e^{x-t} + 1) - \sin(t)e^{-t} - e^x \sin x + \int_0^t \int_0^x \frac{2}{e^{(z-y)}} u(y, z) dy dz$$

Analitik çözümü; $u(x, t) = \sin(x + t)$ şeklinde olan iki boyutlu integral denklemin daha önce Teorem 3.8 ve Çizelge 3.2'deki uygun dönüşüm formları kullanılarak DDM ile yaklaşık çözümü incelenmiştir[44].

Aynı iki boyutlu integral denkleme HPM uygulansın.

$$f(x, t) = \sin(x + t)(e^{x-t} + 1) - \sin(t)e^{-t} - e^x \sin x, \quad k(x, t, y, z) = \frac{2}{e^{(z-y)}}$$

olmak üzere homotopi denklemi;

$$H(u, p) = u(x, t) - f(x, t) - p \int_0^t \int_0^x k(x, t, y, z) u(y, z) dy dz$$

olarak belirlensin.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots$$

serisi oluşturulan homotopi denkleminde yerine yazıldığında ve p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlendiğinde $u_0(x, t) = f(x, t)$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere;

$$p^0 : u_0(x, t) = \sin(x + t)(e^{x-t} + 1) - \sin(t)e^{-t} - e^x \sin x$$

$$\begin{aligned}
p^1 : u_1(x, t) = & \int_0^t \int_0^x \left(\frac{2}{e^{(z-y)}} \right) u_0(y, z) dy dz = -\frac{1}{5} e^{-t} \left(-2 - 5(\sin(t) + e^{(x+t)} \sin x) + 2e^{-t} (\sin t + \cos t) \right. \\
& + 2e^{(2x+t)} \sin x - 2e^{(2x+t)} \cos x - 4e^{(x-t)} \sin t - 2e^{(x-t)} \cos t - 4e^{2x} \sin x + 2e^{(x+t)} + 2e^{2x} \cos x \\
& \left. + 5e^x (\sin x \cos t + \cos x \sin t) + 2e^{(2x-t)} (\sin x \cos t - \cos x \sin t) \right)
\end{aligned}$$

$$p^2 : u_2(x, t) = \int_0^t \int_0^x \left(\frac{2}{e^{(z-y)}} \right) u_1(y, z) dy dz$$

.

.

.

$$p^{N+1} : u_{N+1}(x, t) = \int_0^t \int_0^x \left(\frac{2}{e^{(z-y)}} \right) u_N(y, z) dy dz, \quad N \geq 0$$

eşitlikleri elde edilir. Ele alınan iki boyutlu Volterra integral denklemin HPM ile sayısal çözümü;

$$u(x, t) \approx u_{HPM}(x, t) = \sum_{i=0}^N u_i(x, t), \quad N \geq 0$$

olarak ifade edilir.

Örnek 3.15 için HPM ve DDM'nin uygulanması sonucu elde edilen sayısal değerler Çizelge 3.6'da verilmiştir.

Çizelge 3.6 Örnek 3.15 için HPM ve DDM'nin uygulanması sonucu elde edilen sayısal sonuçlar

(x, t)	$u(x, t)$	$u_{HPM}(x, t) (N = 5)$	$u_{DDM}(x, t) (N = 5)$
(0.2, 0.1)	0.295520206661340	0.295520206661339	0.2955202184
(0.2, 0.4)	0.564642473395035	0.564642473393546	0.5646439552
(0.2, 0.7)	0.783326909627483	0.783326909602103	0.7833750551
(0.5, 0.1)	0.564642473395035	0.564642473394355	0.5646461680
(0.5, 0.4)	0.783326909627483	0.783326908040716	0.7833397500
(0.5, 0.7)	0.932039085967226	0.932039061789614	0.9321460859
(0.8, 0.1)	0.783326909627483	0.783326909576185	0.7834038828
(0.8, 0.4)	0.932039085967226	0.932038978813659	0.9322215424
(0.8, 0.7)	0.997494986604054	0.997493447444225	0.9978859380
(1.0, 0.9)	0.946300087687414	0.946260040038733	0.9481536354

Çizelge 3.6'dan, ele alınan iki boyutlu Volterra integral denklemi için DDM ile HPM'nin tam çözüme oldukça yakın sonuçlar verdiği görülmektedir.

Örnek 3.16 Aşağıdaki iki boyutlu Volterra integral denklem sisteminin DDM ve HPM ile sayısal çözümü ele alınsın.

$$u_1(x, t) = x \sin t - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^2 \cos t - \frac{1}{2} x^2 \sin t + \int_0^t \int_0^x (u_1(y, z) + u_2(y, z)) dy dz$$

$$u_2(x, t) = x \cos t - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^2 \sin t + \frac{1}{2} x^2 \cos t + \int_0^t \int_0^x (u_1(y, z) - u_2(y, z)) dy dz$$

İncelenen iki boyutlu integral denklem sistemi için öncelikle DDM uygulansın[43].

Bunun için Çizelge 3.2'deki dönüşüm fonksiyonlarından yararlanılarak;

$$U_1(0,0) = U_2(0,0) = 0$$

$$U_1(m,0) = U_2(m,0) = 0 \quad m = 1, 2, \dots, N$$

$$U_1(0,n) = U_2(0,n) = 0 \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$m, n = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere;

$$U_1(m,n) = \frac{1}{n!} \delta_{m,1} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \delta_{m,2} \delta_{n,0} + \frac{1}{2n!} \delta_{m,2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{2n!} \delta_{m,2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ + \frac{1}{mn} U_1(m-1, n-1) + \frac{1}{mn} U_2(m-1, n-1)$$

$$U_2(m,n) = \frac{1}{n!} \delta_{m,1} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \delta_{m,2} \delta_{n,0} + \frac{1}{2n!} \delta_{m,2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{2n!} \delta_{m,2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ + \frac{1}{mn} U_1(m-1, n-1) - \frac{1}{mn} U_2(m-1, n-1)$$

yineleme bağıntıları elde edilir. (3.95) ters dönüşümü uygulanarak analitik çözümü $u_1(x,t) = x \sin t$ ve $u_2(x,t) = x \cos t$ olan iki boyutlu integral denklem sisteminin DDM ile yaklaşık çözümü;

$$u_1(x,t) \approx u_{1DDM}(x) = u_{1N}(x,t), \quad u_2(x,t) \approx u_{2DDM}(x) = u_{2N}(x,t)$$

olarak ifade edilir.

Şimdi de aynı integral denklem sisteminin HPM ile sayısal çözümünü elde etmek için;

$$H_1(u_1, u_2, p) = u_1(x,t) - \left(x \sin t - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^2 \cos t - \frac{1}{2} x^2 \sin t \right) - p \int_0^t \int_0^x (u_1(y,z) + u_2(y,z)) dy dz = 0$$

$$H_2(u_1, u_2, p) = u_2(x,t) - \left(x \cos t - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^2 \sin t + \frac{1}{2} x^2 \cos t \right) - p \int_0^t \int_0^x (u_1(y,z) - u_2(y,z)) dy dz = 0$$

homotopi denklemleri oluşturulsun.

$$u_i = \sum_{j=0}^{\infty} p^j u_{ij} = u_{i0} + p u_{i1} + p^2 u_{i2} + \dots, \quad i = 1, 2$$

(3.37) serileri homotopi denklemlerindeki yerlerine yazıldığında ve p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlendiğinde;

$$p^0 : \begin{cases} u_{10}(x, t) = x \sin t - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^2 \cos t - \frac{1}{2} x^2 \sin t \\ u_{20}(x, t) = x \cos t - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^2 \sin t + \frac{1}{2} x^2 \cos t \end{cases}$$

$$p^1 : \begin{cases} u_{11}(x, t) = \int_0^t \int_0^x (u_{10}(y, z) + u_{20}(y, z)) dy dz = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 t + \frac{1}{3} x^3 \sin t - \frac{1}{2} x^2 \cos t + \frac{1}{2} x^2 \sin t \\ u_{21}(x, t) = \int_0^t \int_0^x (u_{10}(y, z) - u_{20}(y, z)) dy dz = -\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 \cos t - \frac{1}{2} x^2 \sin t - \frac{1}{2} x^2 \cos t \end{cases}$$

$$p^2 : \begin{cases} u_{12}(x, t) = \int_0^t \int_0^x (u_{11}(y, z) + u_{21}(y, z)) dy dz \\ \quad = \frac{1}{24} x^3 (2x - xt^2 - 2x \cos t - 2xt + 2x \sin t + 8t - 8 \sin t) \\ u_{22}(x, t) = \int_0^t \int_0^x (u_{11}(y, z) - u_{21}(y, z)) dy dz \\ \quad = \frac{1}{24} x^3 (2x + 8 - xt^2 - 2x \cos t + 2xt - 2x \sin t - 8 \cos t) \end{cases}$$

.

.

.

$$p^{N+1} : \begin{cases} u_{1N+1}(x, t) = \int_0^t \int_0^x (u_{1N}(y, z) + u_{2N}(y, z)) dy dz \\ u_{2N+1}(x, t) = \int_0^t \int_0^x (u_{1N}(y, z) - u_{2N}(y, z)) dy dz \end{cases}$$

ifadeleri elde edilir. Sonuç olarak iki boyutlu Vollterra integral denklem sisteminin HPM ile sayısal çözümü $N \geq 0$ olmak üzere;

$$u_1(x, t) \approx u_{1HPM}(x, t) = \sum_{i=0}^N u_{1i}(x, t), \quad u_2(x, t) \approx u_{2HPM}(x, t) = \sum_{i=0}^N u_{2i}(x, t)$$

olarak ifade edilir.

Örnek 3.16 için HPM ve DDM'nin uygulanması sonucu oluşan hatalar Çizelge 3.7'de verilmiştir.

Çizelge 3.7 Örnek 3.16 için HPM ve DDM'nin uygulanması sonucu oluşan hatalar

(x, t)	HPM ($N = 5$)	DDM ($N = 10$)	HPM ($N = 5$)	DDM ($N = 10$)
	Hata $ u_1 - u_{1HPM} $	Hata $ u_1 - u_{1DDM} $	Hata $ u_2 - u_{2HPM} $	Hata $ u_2 - u_{2DDM} $
(0.1,0.7)	2.5674e-015	0	2.5702e-014	1e-009
(0.5,0.8)	5.1144e-010	1e-009	4.4638e-009	1.6e-009
(0.5,1.0)	2.4266e-009	1e-009	1.6919e-008	1.5e-009
(0.6,0.4)	1.4413e-011	1e-009	2.5206e-010	0
(0.6,0.6)	2.4557e-010	1e-009	2.8609e-009	1e-009
(0.7,0.6)	7.2244e-010	5e-009	8.4165e-009	1e-009
(0.8,0.5)	5.1421e-010	1.6e-008	7.1918e-009	1e-009
(1.0,0.5)	2.4520e-009	1.5e-007	3.4293e-008	1e-009
(1.0,1.0)	3.1061e-007	3.0e-007	2.1657e-006	3e-007

Çizelge 3.7'den, $u_1(x, t)$ için genel olarak HPM'nin daha başarılı sayısal sonuçlar verdiği görülmektedir. Buna karşın; $u_2(x, t)$ için HPM ve DDM'nin uygulanması sonucu oluşan hataların birbirine yakın olduğu görülmektedir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

HPM, integral denklemlerde geniş bir kullanım alanına sahiptir. Yapılan çalışmada HPM çeşitli türdeki integral denklemlerde, integro-diferansiyel denklemlerde, iki boyutlu integral denklemlerde ayrı ayrı ele alınmıştır. HPM'nin farklı türdeki integral denklemlerde kullanımının benzerlik gösterdiği görülmüştür. Homotopi kavramından yararlanılarak pertürbasyon denklemi farklı şekillerde ifade edilebilmektedir. Bu durumun integral denklemleri çözmede farklı alternatifler oluşturduğu ve çözüm için kolaylık sağladığı görülmüştür.

İntegral denklemlerin sayısal çözümlerinde herhangi bir metodun her zaman daha etkili olduğunu söylemek mümkün değildir. Tez çalışmasında ele alınan örnekler değerlendirildiğinde; bazı integral denklemlerde HPM ile daha başarılı sayısal sonuçlar elde edilmiş olmasına rağmen, bazılarında kullanılan diğer yöntemler daha başarılı sonuçlar vermiştir. HPM'de, elde edilen sayısal sonuçların gerçek değerlere yakınlığı, ele alınan integral denklemin yapısına ve çözüm için oluşturulan homotopi denklemine bağlı olarak değişmektedir.

Sayısal çözümleri elde etmek için MATLAB(R2008a) bilgisayar programı kullanılmıştır. MATLAB programı kullanılarak, HPM ile integral denklemlerin sayısal çözümlerine kolay ve hızlı ulaşıldığı görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] Biazar, J. ve Ghazvini, H., (2007).“Exact Solutions for Nonlinear Schrödinger Equations by He’s Homotopy Perturbation Method”, Physics Letters A, 366:79-84.
- [2] He, J.H., (2006).“Homotopy Perturbation Method for Solving Boundary Problems”, Physics Letters A, 350(1-2):87-88.
- [3] Abbasbandy, S., (2006).“Iterated He’s Homotopy Perturbation Method for Quadratic Riccati Differential Equation”, Applied Mathematics and Computation, 175(1):581-589.
- [4] Biazar J. ve Azimi F., (2008). “He’s Homotopy Perturbation Method for Solving Helmholtz Equation”, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 3(15):739-744.
- [5] Liu Y., Li Z. ve Zhang Y., (2011).“Homotopy Perturbation Method to Fractional Biological Population Equation”, Fractional Differential Calculus, 1(1):117-124.
- [6] Ganji, D. D. ve Sadighi, A., (2007).“Application of Homotopy Perturbation and Variational Iteration Methods to Nonlinear Heat Transfer and Porous Media Equations”, Journal of Computational and Applied Mathematics, 207:24-34.
- [7] Ganji, D. D. ve Sadighi, A., (2006).“Application of He’s Homotopy Perturbation Method to Nonlinear Coupled Systems of Reaction-Diffusion Equations”, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 7(4):414-418.
- [8] He, J.H., (2005).“Application of Homotopy Perturbation Method to Nonlinear Wave Equations ”, Chaos, Solitons and Fractals, 26:695-700.
- [9] Nadjafi J.S., Samadi O.R.N. ve Tohidi E., (2011).“Numerical Solution of Two-Dimensional Volterra Integral Equations by Spectral Galerkin Method”, Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics, 1(2):159-174.
- [10] Abramyan, M. E., (2005).“Justifying the Convergence of the Rectangular Method for Complete Singular Integral Equations with Continuous Coefficients on the Circle”, Mathematical Notes, 77:149-160.
- [11] Al-Khaled, K. ve Allan, F., (2005). “Decomposition Method for Solving Nonlinear Integro-Differential Equations”, Journal of Applied Mathematics and Computing, 19:415-425.

- [12] Arikoglu, A. ve Ozkol, I., (2008). "Solutions of Integral and Integro-Differential Equation Systems by Using Differential Transform Method", Computers and Mathematics with Applications, 56:2411-2417.
- [13] Linz, P., (1985). Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia.
- [14] Mirzaee, F., (2012). "Numerical Solution for Volterra Integral Equations of the First Kind via Quadrature Rule", Applied Mathematical Sciences, 6:969-974.
- [15] De Hoog, F. ve Weiss, R., (1975). "Implicit Runge-Kutta Methods for Second Kind Volterra Integral Equations", Numerische Mathematik, 23:199-213.
- [16] Ağırseven, D., (2009). Bazı Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Pertürbasyon ve Homotopi Analiz Metotları ile Çözümlerinin Analizi Üzerine, Doktora Tezi, Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Edirne.
- [17] Wazwaz, A.M., (2011). Linear and Non-Linear Equations, Springer, Chicago.
- [18] Porshokouhi, M. G. ve Ghanbari, B., (2011). "Variational Iteration Method for Solving Volterra and Fredholm Integral Equations of the Second Kind", General Mathematics Notes, 2(1):143-148.
- [19] Shakeri, S., Saadati, R. Vaezpour S.M ve Vahidi, J., (2009). "Variational Iteration Method for Solving Integral Equations", Journal of Applied Sciences, 9(4):799-800.
- [20] Babolian, E. ve Dastani, N., (2011). "Numerical Solution of Two-Dimensional Linear and Nonlinear Volterra Integral Equation: Homotopy Perturbation Method and Differential Transform Method", International Journal of Industrial Mathematics, 3:157-167.
- [21] Tari, A., Rahimi, M.Y., Shahmorad, S. ve Talati, F., (2009). "Solving a Class of Two-Dimensional Linear and Nonlinear Volterra Integral Equations by the Differential Transform Method", Journal of Computational and Applied Mathematics, 228:70-76.
- [22] Biazar, J. ve Ghazvini, H., (2008). "Numerical Solution for Special Non-Linear Fredholm Integral Equation by HPM", Applied Mathematics and Computation, 195:681-687.
- [23] Mirzaei, S.M., (2011). "Homotopy Perturbation Method and Variational Iteration Method for Voltra Integral Equations", Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics, 1(1):105-113.
- [24] Nadjafi, J.S. ve Ghorbani, A., (2009). "He's Homotopy Perturbation Method: An Effective Tool for Solving Nonlinear Integral and Integro-Differential Equations", Computers and Mathematics with Applications, 58:2379-2390.
- [25] Babolian, E. ve Dastani, N., (2012). "He's Homotopy Perturbation Method: An Effective Tool for Solving a Nonlinear System of Two-Dimensional Volterra-Fredholm Integral Equations", Mathematical and Computer Modelling, 55:1233-1244.

- [26] Golbabai, A. ve Javidi, M., (2007). "Application of Homotopy Perturbation Method for nth-Order Integro-Differential Equations ", Applied Mathematics and Computation, 190:1409-1416.
- [27] Aksoy, Y., (1998). İntegral Denklemler, Cilt 1, 2.Baskı, Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayım Merkezi, İstanbul.
- [28] Yusufoglu, E., (2008). "A Homotopy Perturbation Algorithm to Solve a System of Fredholm-Volterra Type Integral Equations", Mathematical and Computer Modelling, 47:1099-1107.
- [29] Tulga, İ., (2006). İntegral Denklem Sistemlerinin Yaklaşık Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta.
- [30] Nayfeh, A.H., (2000). Perturbation Methods, Wiley-VCH, Weinheim.
- [31] Abbasbandy, S., (2006). "Numerical Solutions of the Integral Equations: Homotopy Perturbation Method and Adomian's Decomposition Method", Applied Mathematics and Computation, 173:493-500.
- [32] Mirzaei, S.M., (2011). "Fredholm Integral Equations of the First Kind Solved by Using the Homotopy Perturbation Method", International Journal of Mathematics Analysis, 19: 935-940.
- [33] Biazar, J. ve Eslami, M., (2011). "Homotopy Perturbation and Taylor Series for Volterra Integral Equations of the Second Kind", Middle-East Journal of Scientific Research, 7(4):604-609.
- [34] Raftari, B., (2010). " Numerical Solution of the Linear Volterra Integro-Differential Equations: Homotopy Perturbation Method and Finite Difference Method", World Applied Sciences Journal, 9:07-12.
- [35] Vahidi, A.R., (2011). "On the Homotopy Perturbation Method and the Adomian Decomposition Method for Solving Abel Integral Equations of the Second Kind", Journal Applied Mathematical Sciences, 5:799-804.
- [36] Odabaşı, M., (2008). İntegral ve İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Yarı-Analitik Çözümleri Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- [37] Ayaz, F., (2004). "Solution of the System of Differential Equations by Differential Transform Method", Applied Mathematics and Computation, 147:547-567.
- [38] Chen, C.K., (1999). "Solving Partial Differential Equations by Two-Dimensional Differential Transform Method", Applied Mathematics and Computation, 106:171-179.
- [39] Jang, M.J., Chen, C.K. ve Liu, Y.C., (2001). "Two-Dimensional Differential Transform for Partial Differential Equations", Applied Mathematics and Computation, 121:261-270.
- [40] Arikoglu, A. ve Ozkol, I., (2005). "Solution of Boundary Value Problems for Integro-Differential Equations by Using Differential Transform Method", Applied Mathematics and Computation, 168:1145-1158.

- [41] Odibat, Z.M., (2008). "Differential Transform Method for Solving Volterra Integral Equation with Seperable Kernels", Mathematical and Computer Modelling, 48:1144-1149.
- [42] Toker, M.M., (2008). Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Diferansiyel Transform Metodu ile Çözümü ve Diğer Yöntemlerle Karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- [43] Kajani, M.T. ve Shehni, N.A., (2011). "Solution of Two-Dimensional Integral Equation Systems by Using Differential Transform Method", Applications of Mathematics and Computer Engineering, 29-31 January 2011, Puerto Morelos, 74-77.
- [44] Jang B., (2009). "Comments on Solving a Class of Two-Dimensional Linear and Nonlinear Volterra Integral Equations by the Differential Transform Method", Journal of Computational and Applied Mathematics, 233:224-230.
- [45] Darania, P. ve Ebadian, A., (2007). " A Method for the Numerical Solution of the Integro-Differential Equations", Applied Mathematics and Computation, 188:657-668.

MATLAB PROGRAMI KODLARI

Aşağıda ele alınan örnekler için hazırlanan matlab programı kodları verilmiştir.

A-1 Örnek 3.12 İçin Matlab Programı Kodları

%HPM Metodu ile Örnek 3.12 Volterra İntegral Denkleminin Çözümü

%A: HPM Sayısal Sonuçlar

%B: Tam Sonuçlar

%H: Mutlak Hatalar

```
function [HPM_u H A B]=hpm_volt(f,g,k,n)
```

```
syms x t
```

```
u(1)=f;
```

```
u_t(1)=subs(u(1),x,t);
```

```
for i=2:n+1
```

```
    u(i)=int(k*u_t(i-1),t,0,x);
```

```
    u_t(i)=subs(u(i),x,t);
```

```
end
```

```
U(:,1)=u(1:n+1);
```

```
HPM_u=sum(U);
```

```
x=0:0.1:1;
```

```
for j=1:length(x)
```

```
    a(j)=subs(HPM_u,x(j));
```

```
    b(j)=subs(g,x(j));
```

```
end
```

```
A(:,1)=a(1:length(x));
```

```
B(:,1)=b(1:length(x));
```

```
H(:,1)=abs(B(:,1)-A(:,1));
```

%VIM Metodu ile Örnek 3.12 Volterra İntegral Denkleminin Çözümü

%A: VIM Sayısal Sonuçlar

%B: Tam Sonuçlar

%H: Mutlak Hatalar

```
function [VIM_u H A B]=VIM_volt(f,g,k,u0,n)
syms x y s t
k_s=subs(k,[x,t],[s,y]);
f_s=subs(f,x,s);
u=u0;

for i=2:n+1
    u_s=subs(u,x,s);
    u_y=subs(u,x,y);
    u=u-int(diff(u_s,s)-diff(f_s,s)-diff(int(k_s*u_y,y,0,s),s),s,0,x);

end
VIM_u=u;
x=0:0.1:1;

for j=1:length(x)
    a(j)=subs(VIM_u,x(j));
    b(j)=subs(g,x(j));

end
A(:,1)=a(1:length(x));
B(:,1)=b(1:length(x));
H(:,1)=abs(B(:,1)-A(:,1));

clear
format long e
syms x y s t
k=3+6*(x-t)-4*(x-t)^2; % Çekirdek Fonksiyon
f=1-2*x-4*x^2; % Bilinen Fonksiyonu
g=exp(x); % Analitik Çözüm
n=10; % İterasyon Adımı Sayısı
[HPM_u H A B]=hpm_volt(f,g,k,n)
u0=f;
[VIM_u H1 A1 B1]=VIM_volt(f,g,k,u0,n)

% ..... Grafikler .....
x=0:0.1:1;
figure(1);
plot(x,A,'s',x,A1,'+',x,B);
legend('HPM','VIM','Analitik çözüm')
grid on
```

```
figure(2);
plot(x,H,x,H1,'o');
legend('HPM','VIM')
grid on
```

A-2 Örnek 3.13 İçin Matlab Programı Kodları

%HPM Metodu ile Örnek 3.13 Fredholm İntegral Denkleminin Çözümü

%A: HPM Sayısal Sonuçlar

%B: Tam Sonuçlar

%H: Mutlak Hatalar

```
function [HPM_u H A B]=hpm_fred(f,g,k,n)
```

```
syms x t
```

```
u(1)=f;
```

```
u_t(1)=subs(u(1),x,t);
```

```
for i=2:n+1
```

```
    for j=1:(i-1)
```

```
        z(j)=u_t(j)*u_t(i-j);
```

```
    end
```

```
    Z=z(1:(i-1));
```

```
    Z=sum(Z);
```

```
    u(i)=int(k*Z,t,0,1);
```

```
    u_t(i)=subs(u(i),x,t);
```

```
end
```

```
U(:,1)=u(1:n+1)
```

```
HPM_u=vpa(sum(U));
```

```
x=0:0.1:1;
```

```
for j=1:length(x)
```

```
    a(j)=subs(HPM_u,x(j));
```

```
    b(j)=subs(g,x(j));
```

```
end
```

```
A(:,1)=a(1:length(x));
```

```
B(:,1)=b(1:length(x));
```

```
H(:,1)=abs(B(:,1)-A(:,1));
```

%VIM Metodu ile Örnek 3.13 Fredholm İntegral Denkleminin Çözümü

%A: VIM Sayısal Sonuçlar

%B: Tam Sonuçlar

%H: Mutlak Hatalar

```

function [VIM_u H A B]=VIM_fred(f,g,k,u0,n)
syms x y s t
k_tur=diff(k,x);
k_s=subs(k_tur,[x,t],[s,y]);
f_s=subs(f,x,s);
u=u0;

for i=1:n
    u_s=subs(u,x,s);
    u_y=subs(u,x,y);
    u=u-int(diff(u_s,s)-diff(f_s,s)-int(k_s*u_y^2,y,0,1),s,0,x);

end
VIM_u=u;
x=0:0.1:1;

for j=1:length(x)
    a(j)=subs(VIM_u,x(j));
    b(j)=subs(g,x(j));
end

A(:,1)=a(1:length(x));
B(:,1)=b(1:length(x));
H(:,1)=abs(B(:,1)-A(:,1));

clear
format long e
syms x y s t
k=(1/36)*x*t; % Çekirdek Fonksiyon
f=x*exp(x)-(1/288)*(3+exp(2))*x; % Bilinen Fonksiyon
g=x*exp(x); % Analitik Çözüm
n=5;% İterasyon Adım Sayısı
[HPM_u H A B]=hpm_fred(f,g,k,n)
u0=f;
[VIM_u H1 A1 B1]=VIM_fred(f,g,k,u0,n)

% ..... Grafikler .....
x=0:0.1:1;
figure(1);
plot(x,A,'s',x,A1,'+',x,B);
legend('HPM','VIM','Analitik çözüm')
grid on
figure(2);
plot(x,H,x,H1,'o');
legend('HPM','VIM')
grid on

```

A-3 Örnek 3.14 İçin Matlab Programı Kodları

%HPM Metodu ile Örnek 3.14 Fredholm İntegro-Diferansiyel Denkleminin Çözümü

%A: HPM Sayısal Sonuçlar

%B: Tam Sonuçlar

%H: Mutlak hata

```
function [HPM_u H A B]=hpm(f,g,k,n)
```

```
syms x t
```

```
u(1)=int(f,x);
```

```
u_t(1)=subs(u(1),x,t);
```

```
for i=2:n+1
```

```
    u_tur(i)=int(k*u_t(i-1),t,0,1);
```

```
    u(i)=int(u_tur(i),x);
```

```
    u_t(i)=subs(u(i),x,t);
```

```
end
```

```
U(:,1)=u(1:n+1);
```

```
HPM_u=sum(U);
```

```
x=0:0.1:1;
```

```
for j=1:length(x)
```

```
    a(j)=subs(HPM_u,x(j));
```

```
    b(j)=subs(g,x(j));
```

```
end
```

```
A(:,1)=a(1:length(x));
```

```
B(:,1)=b(1:length(x));
```

```
H(:,1)=abs(B(:,1)-A(:,1));
```

%AAM Metodu ile Fredholm İntegro-Diferansiyel Denkleminin Çözümü

%A: AAM Sayısal Sonuçlar

%B: Tam Sonuçlar

%H: Mutlak Hata

```
function [AAM_u H A B]=aam(f,g,k,n)
```

```
syms x t
```

```
u(1)=int(f,x);
```

```
u_t(1)=subs(u(1),x,t);
```

```
k1=int(k,x);
```

```
for i=2:n+1
```

```
    u(i)=int(k1*u_t(i-1),t,0,1);
```

```
    u_t(i)=subs(u(i),x,t);
```

```
end
```



```

U(:,1)=u(1:n+1);
AAM_u=sum(U);
x=0:0.1:1;

```

```

for j=1:length(x)
    a(j)=subs(AAM_u,x(j));
    b(j)=subs(g,x(j));

```

```

end
A(:,1)=a(1:length(x));
B(:,1)=b(1:length(x));
H(:,1)=abs(B(:,1)-A(:,1));

```

%VIM Metodu ile Fredholm İntegro-Diferansiyel Denkleminin Çözümü

%A: VIM Sayısal Sonuçlar

%B: Tam Sonuçlar

%H: Mutlak Hata

```

function [VIM_u H A B]=VIM(f,g,k,u0,n)

```

```

syms x y s t

```

```

k_s=subs(k,x,s);

```

```

f_s=subs(f,x,s);

```

```

u=u0;

```

```

for i=2:n+1
    u_s=subs(u,x,s);
    u_y=subs(u,x,y);
    u=u-int(diff(u_s,s)-f_s-int(k_s*u_y,y,0,1),s,0,x);

```

```

end
VIM_u=u;
x=0:0.1:1;

```

```

for j=1:length(x)
    a(j)=subs(VIM_u,x(j));
    b(j)=subs(g,x(j));

```

```

end
A(:,1)=a(1:length(x));
B(:,1)=b(1:length(x));
H(:,1)=abs(B(:,1)-A(:,1));

```

```

clear
format short e
syms x y s t

```

```

k=x;%Çekirdek Fonksiyon
f=x*exp(x)+exp(x)-x;%Bilinen Fonksiyon
g=x*exp(x);%Analitik Çözüm
n=5;%İterasyon Adım Sayısı
[HPM_u H A B]=hpm(f,g,k,n)
[AAM_u H1 A1]=aam(f,g,k,n)
u0=0;
[VIM_u H2 A2 B2]=VIM(f,g,k,u0,n)

%.....Grafikler.....
x=0:0.1:1;
figure(1);
plot(x,A,'s',x,A1,'*',x,A2,'+',x,B)
legend('HPM','AAM','VIM','Analitik çözüm')
grid on
figure(2);
plot(x,H,x,H1,'*',x,H2,'o')
legend('HPM','AAM','VIM')
grid on

```

A-4 Örnek 3.15 İçin Matlab Programı Kodları

%HPM metoduyla Örnek 3.15 iki boyutlu integral denkleminin çözümü

```

function [HPM_u]=hpm_two_dim(f,g,k,n)

syms x y t z

u(1)=f;
u_yz(1)=subs(u(1),[x,t],[y,z]);

for i=2:n+1

    u(i)=int(int(k*u_yz(i-1),y,0,x),z,0,t);
    u_yz(i)=subs(u(i),[x,t],[y,z]);

end

U(:,1)=u(1:n+1);
HPM_u=sum(U);

x=[0.2 0.5 0.8 1];
t=[0.1 0.4 0.7 0.9];

for m=1:length(x)
    m

```

```

a=subs(HPM_u,x(m));
b=subs(g,x(m));
HPM=[subs(a)]'
TAM=[subs(b)]'
end

clear
format long
syms x y t z

k=1/(exp(z-y)/2); % Çekirdek fonksiyon
f=sin(x+t)*(exp(x-t)+1)-sin(t)*exp(-t)-exp(x)*sin(x); % HPM başlangıç fonksiyonu
g=sin(x+t); % Tam çözüm
n=5; % İterasyon adımı sayısı

[HPM_u]=hpm_two_dim(f,g,k,n

```

A-5 Örnek 3.16 İçin Matlab Programı Kodları

%HPM metoduyla iki boyutlu integral denklemlerin çözümü

```
function [HPM_u]=hpm_twodim_sys(f1,f2,g1,g2,n)
```

```
syms x y t z
```

```

u(1)=f1;
u_yz(1)=subs(u(1),[x,t],[y,z]);
v(1)=f2;
v_yz(1)=subs(v(1),[x,t],[y,z]);

```

```

for i=2:n+1
    u(i)=int(int(u_yz(i-1)+v_yz(i-1),y,0,x),z,0,t);
    v(i)=int(int(u_yz(i-1)-v_yz(i-1),y,0,x),z,0,t);
    u_yz(i)=subs(u(i),[x,t],[y,z]);
    v_yz(i)=subs(v(i),[x,t],[y,z]);

```

```
end
```

```

U(:,1)=u(1:n+1);
V(:,1)=v(1:n+1);
HPM_u=sum(U);
HPM_v=sum(V);

```

```

x=[0.1 0.5 0.6 0.8 1];
t=[0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 1];

```

```

for m=1:length(x)
    m
    format short
    x(m)
    t
    a=subs(HPM_u,x(m));
    b=subs(g1,x(m));
    c=[subs(a)]';
    TAM_u=[subs(b)]';
    hata_u=abs(c(:)-TAM_u(:));
    format long
    hata_u

    d=subs(HPM_v,x(m));
    e=subs(g2,x(m));
    f=[subs(d)]';
    TAM_v=[subs(e)]';
    hata_v=abs(f(:)-TAM_v(:));
    hata_v
end

clear
syms x y t z

f1=x*sin(t)-1/2*x^2+1/2*x^2*cos(t)-1/2*x^2*sin(t); % HPM_u1(x,t) başlangıç
fonksiyonu
f2=x*cos(t)-1/2*x^2+1/2*x^2*sin(t)+1/2*x^2*cos(t); % HPM_u2(x,t) başlangıç
fonksiyonu
g1=x*sin(t); % Tam çözüm
g2=x*cos(t); % Tam çözüm
n=5; % İterasyon adımı sayısı

[HPM_u]=hpm_twodim_sys(f1,f2,g1,g2,n)

```

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Selim FINDIK
Doğum Tarihi ve Yeri : 07.12.1984 Eyüp
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : selimfindik@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	İlköğretim Matematik Öğretmenliği	Atatürk Üniversitesi (ERZURUM)	2006
Lise		Akyazı Şht. Yzb. Halil İbrahim Sert Lisesi (SAKARYA)	2002

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2010-2012	Çayırova Tahsin Tarhan İ. O. (KOCAELİ)	Matematik Öğretmeni
2009-2010	Sungu Hürriyet İ.O. (MUŞ)	Matematik Öğretmeni
2006 -2009	Gebze Tavşanlı İ.O. (KOCAELİ)	Matematik Öğretmeni