

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GÖRÜNTÜ İŞLEMEDE
MORFOLOJİK TEKNİKLER**

Hakan Emrah OLGUN

**FBE Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. İbrahim Emiroğlu

İSTANBUL, 2008.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
ÇİZELGE LİSTESİ	vii
ÖNSÖZ	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
1. GİRİŞ	1
2. MATEMATİKSEL ALTYAPI.....	3
2.1 Kümeler Teorisi ve Temel Konseptleri	3
2.2 İkili İmajlar İçin Mantık Operasyonları.....	5
3. YAYMA VE AŞINDIRMA	8
3.1 Yayma İşlemi.....	8
3.2 Aşındırma İşlemi	10
4. AÇMA VE KAPAMA.....	14
5. VUR-YADA-ISKALA DÖNÜŞÜMÜ	18
6. TEMEL MORFOLOJİK ALGORİTMALAR.....	21
6.1 Sınır Belirleme.....	21
6.2 Alan Doldurma	22
6.3 Bağlı Parçaların Ayrıştırılması	23
6.4 Konveks Örtme	24
6.5 İnceltme	26
6.6 Kalınlaştırma.....	28
6.7 İskeletler	29
6.8 Budama	33
7. GRİ ÖLÇEKLİ İMGELERE GİRİŞ.....	35
7.1 Genişleme	Error! Bookmark not defined.
7.2 Aşınma.....	36
7.3 Açma ve Kapama.....	38

KAYNAKLAR.....	41
ÖZGEÇMİŞ.....	42

SİMGE LİSTESİ

Z Tamsayılar Kümesi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 a) A ve B kümesi b) A ve B kümesinin birleşimi c) A ve B kümesinin kesişimi d) A'nın tümleyeni. e) A'nın B'den farkı	4
Şekil 2.2 a) A'nın z noktasına göre dönüşümü b) B kümesinin yansıması. Şekildeki A ve B kümeleri şekil 2.1 deki A ve B kümeleridir.	5
Şekil 2.3 İkili imgelerde mantık operasyonları. Siyah 1'i beyaz ise 0'ı simgelemektedir.	7
Şekil 3.1 a) A kümesi, b) nokta merkezli kare yapı elemanı, c) A'nın B'ye göre yayma işlemi d) dikey fazla türden yayma işlemi.....	9
Şekil 3.2 Yayma işlemi uygulaması	10
Şekil 3.3 Aşındırma işlemi uygulaması.....	11
Şekil 3.4. Aşındırma uygulaması a) üzerinde çeşitli büyüklüklerde nesneler barındıran ikili imge b) bu imgenin 13 piksel büyüklüğünde bir kare yapı elemanı tarafından aşındırılmış hali c) elde edilen imgenin aynı yapı elemanı tarafından yayılmış hali.....	13
Şekil 4.1 a) B yapısal elemanının A içerisindeki yuvarlanması (nokta B'nin orijini göstermektedir.) c) Kalın çizgi açmanın iç sınırını göstermektedir. d) gölgeli alan tam açma işlemi sonunda ortaya çıkan imgedir.	15
Şekil 4.2 a) yapı elemanı A kümesinin dış sınırında yuvarlanmaktadır B) kalın çizgiler kapamanın dış sınırlarını oluşturmakta c) kapama işlemi sonrası son görünüm (gölgeli alan)	15
Şekil 4.3 Gürültülü parmak izinin temizlenmesi	17
Şekil 5.1 (a) A kümesi (b) W penceresi ve (W-X) farkı (c) A'nın tümleyeni (d) A'nın X ile aşındırılması (e) A'nın tümleyenin (W-X) ile aşındırılması (e) X'in aranan lokasyonu.	19
Şekil 6.1 Sınır belirleme işleyişi.....	21
Şekil 6.2 Alan doldurma işleyişi.....	23
Şekil 6.1 Yapıyı oluşturacak elemanlar	25
Şekil 6.2 Elemanların uygulanması ile A kümesinin konveks örtenini elde etme	26
Şekil 6.3 Her elemanın etkisi ile konveks örten	26
Şekil 6.4 Yapıya eklenecek elemanlar dizisi	27
Şekil 6.5 A kümesi sırası ile her 8 eleman ile ve tekrar 1. eleman ile inceltilmesi	27
Şekil 6.6 Yakınsamadan sonra elde edilen sonuç.....	28
Şekil 6.7 A kümesi ve tümleyeni.....	28
Şekil 6.8 A'nın tümleyenin inceltilmesi ve bu kümenin tümleyeni alınarak bulunan	

kalınlaştırılmış küme.....	28
Şekil 6.9 Bağımsız noktaya sahip olmayan elde edilen sonuç	29
Şekil 6.10 A kümesi ve merkezleri A'nın iskeletinde bulunan farklı maksimum diskler.....	29
Şekil 6.11 Farklı bir maksimum disk ve tüm iskelet	30
Şekil 6.12 İskelet yönteminin uygulanışı	32
Şekil 6.13 Orijinal imge ve bitiş noktalarını silmek için kullanılan yapısal elemanlar.....	33
Şekil 6.14 Üç kere inceltirme ve bitiş noktaları.....	34
Şekil 6.15 Bitiş noktalarının genişlemesi ve budanmış imge.....	34
Şekil 7.1 basit bir fonksiyon ve A yüksekliğinin yapısal elemanı	36
Şekil 7.2 Genişleme sonuçları	36
Şekil 7.3 Önceki şekildeki fonksiyonun aşınması	37
Şekil 7.4 Orijinal resim, genişleme sonucu ve aşınma sonucu.....	38
Şekil 7.5 Bir gri ölçekli doğru ile yuvarlanan top	40
Şekil 7.6 Açma ve Kapama	40

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 2.1 Temel matematik lojik operasyonları doğruluk tablosu.....	6
---	---

ÖNSÖZ

Günümüzde parmak izi analizi, yüz tanıma, cinsiyet tanıma gibi bir çok alanda uygulama sahası bulan morfolojik görüntü işleme, görüntüyü anlamlandırma ya da görüntünün matematik modellemesine dayanan bir anlamlandırma sağlamaktadır. Bu tez çerçevesinde morfolojik görüntü işlemenin matematiksel altyapısını oluşturan kümeler teorisi ve matematik lojik temelli bir modelleme üzerinden ikili ve gri ölçekli imgelerin analiz edilmesi incelenmiştir.

Bu tezin hazırlanmasında tecrübelerini paylaşarak, yol gösteren danışmanım Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği bölümü, sistem analizi anabilim dalından Yrd. Doç. Dr. İbrahim Emiroğlu'na, matematik modelleme ve cebir alanında yardımlarını benden esirgemeyen Yeditepe Üniversitesi'nden Arş. Gör. İlknur Kuşbeyzi'ne ve tez çalışmam sırasında bana maddi manevi her türlü desteğini sunan aileme teşekkür ederim.

ÖZET

Morfoloji kelimesi genel olarak canlıların, şekil ve yapıları ile uğraşan biyoloji dalına itafen kullanılmaktadır. Bu tez içerisinde aynı kelime matematiksel morfoloji bağlamı kapsamında imge bileşenlerinin ayrıştırılması sırasında kullanılan bir araç olarak karşımıza çıkacaktır. Bunun dışında bu çalışma kapsamı içerisinde, imge ön işleme ve işleme sonrasında kullanılan morfolojik filtreleme, inceltme ve budama gibi bir çok morfolojik teknik ilgi alanımıza girecektir.

Matematiksel morfolojinin dili kümeler teorisidir. Matematiksel morfoloji içerisindeki kümeler bir imge içerisindeki nesneler olarak düşünülebilir. İşte bu yüzden bu çalışma içerisinde matematiksel bir altyapı oluşturması açısından öncelikle kümeler teorisi ve mantık operasyonları ile ilgili bilgi verilmiştir. Daha sonra ise ikili ve gri-ölçümlü imgelerde ayrı ayrı, yayma, aşındırma, açma, kapama gibi imge işleme yöntemleri ele alınmıştır.

Bir çok imge işleme sonucunda girdi ve çıktı yine imge olarak karşımıza çıkmaktadır. Ancak bu çalışma içerisinde konu edilen morfolojik yöntemlerde girdi yine bir imge iken çıktı ise imgenin bileşenlerinin özelliklerinden oluşan matematiksel bir ifade veya küme olacaktır. Bu anlamda morfolojik imge işleme, imgenin anlamlandırılması ya da imge içerisinde anlamın ayrıştırılmasında bir dönüm noktasıdır.

Anahtar kelimeler: Morfolojik imge işleme, inceltme, budama, yayma, aşındırma, açma, kapama yöntemleri, Granülometri.

ABSTRACT

The word morphology commonly denotes a branch of biology that deals with the form and structure of animals and plants. We use the same word in this MS thesis, in the context of mathematical morphology as a tool for extracting image components.

The language of mathematical morphology is set theory. As such, morphology offers a unified and powerful approach to numerous image processing problems. Sets in mathematical morphology represent objects in an image. In this MS thesis we will develop and illustrate several important concepts in mathematical morphology. In order to achieve this, cover some preliminary concepts of set theory and logic operations will be covered, then image processing methods such as erosion, dilation, opening, closing will be covered for binary and gray-scale images.

The material in this MS thesis begins a transition from a focus on purely image processing methods, whose input and output are images, to processes in which the inputs are images, but the outputs are attributes extracted from those images. Tools like morphology and related concepts are a cornerstone of the mathematical foundation that is utilized for extracting "meaning" from an image.

Keywords: Morphological image processing, erosion, dilation, filterin, pruning, thinning, opening, closing methords, granulometry.

1. GİRİŞ

Morfoloji kelimesi genel olarak canlıların, şekil ve yapıları ile uğraşan biyoloji dalına itafen kullanılmaktadır. Bu çalışma içerisinde aynı kelime matematiksel morfoloji bağlamı kapsamında, imge bileşenlerinin ayrıştırılması sırasında kullanılan bir araç olarak karşımıza çıkacaktır. Bu kapsamı biraz daha açmamız gerekirse, bölgesel şekillerin tasvir ve tanımlamasında kullanılan, sınır belirleme, iskelet çıkarma ve dış bükey kabuk belirme gibi işlemlerin temelinde hep aynı bağlam bulunmaktadır. Bunun dışında tez çerçevesi içerisinde, imge ön işleme ve işleme sonrasında kullanılan morfolojik filtreleme, inceltme ve budama gibi bir çok morfolojik teknik ilgi alanımıza girecektir.

Matematiksel morfolojinin dili kümeler teorisidir. Kümeler teorisi modern matematiğin temel yapıtaşlarından biridir. Kümeler matematik ortaya atıldığından beri şu veya bu şekilde kullanılıyordu, ancak ayrı bir teori olarak ortaya atılması çok da eskilere dayanmamaktadır. Cantor'un sonsuz ile ilgili çalışmaları sonsuz kümeleri incelemesine, dolayısıyla da kümelerin ne olduğunu daha net ortaya atmasını gerektirdi. Konuya felsefi girişi sonsuzun türlerini ortaya atmasıyla gelişir: potansiyel sonsuz, büyüyebilir sonsuz ve mutlak sonsuz. Burada potansiyel sonsuz denilen, "n yeterince büyük bir sayı olsun" veya "epsilon yeterince küçük bir pozitif sayı olsun" dememizi sağlayan kavramdır, matematiksel olarak incelenen "sonsuz" denilen nesneler ise büyüyebilir sonsuzun türleridir, mutlak sonsuz ise bunun da ötesidir.

Bilimin doğuşu kadar eski zamanlardan beri temel alınan "Parça bütünden küçüktür" kuramı. bir ilke olarak algılanmakta, doğruluğu şüphe götürmez görülmekteydi, ta ki Galileo $f(n)=n^2$ dönüşümünün birebir, örten olmasının bu ilkenin sonsuz kümeler için uygulanamayacağını gösterinceye kadar. Bu bağlamda matematikçilerin önünde iyi adet yol bulunuyordu: matematiği sonlu olarak ele almak, sonsuz nesnelerin varlığı ile ilgilenmemek veya sonsuz nesnelerin nasıl incelenebileceğini araştırmak. Cantor ikinci yolu seçip 1873'de rasyonel sayıların ve cebirsel sayıların sayılabilir (yani doğal sayılar kümesi ile birebir eşlenebilir) olduğunu ispatladı. Daha sonra reel sayılar kümesinin sayılamaz olduğunu da kanıtlayarak eşkuvvetlilik kavramının sonsuz kümeleri sınıflandırmak için iyi bir kriter olduğu anlaşılmış oldu.

Matematiksel morfoloji içerisindeki kümeler bir imge içerisindeki nesneler olarak düşünülebilir. Bu anlamda bir imge içerisindeki siyah piksellerin oluşturduğu küme için bu imgenin tam olarak morfolojik açıklamasıdır diyebiliriz. Sadece iki renk değerini içeren (siyah ve beyaz) imgelerde, her bir elemanı iki boyutlu bir vektör tarafından temsil edilen ve

koordinatları (x,y) olarak betimlenebilen siyah piksellerden oluşan kümeler, iki boyutlu tam sayı uzayı olan Z^2 'nin bir elemanı olarak tanımlanabilir. Gri ölçekli imgeler ise aynı şekilde Z^3 'nün bir elemanı olacak kümeler tarafından betimlenebilmektedir. Burada farklı olan, her bir elemanın iki bileşeni koordinatlara refere ederken diğer bir bileşenin de gri-ölçüm seviyesini barındırmasıdır. Daha yüksek dereceden uzaylarda ise bu bileşenler renk ve zaman değişimi gibi özellikleri de barındırabilmektedir.

Tez içerisinde ele alınan birçok fikir ve yöntem n-boyutlu bir öklid uzayı içerisinde formüle edilebilir olmasına rağmen temel ilgi alanımız tam sayı uzayı (Z^2) bileşenleri olarak ifade edilebilen ikilik sistemdeki imgeler olacaktır.

Birçok imge işleme sonucunda girdi ve çıktı yine imge olarak karşımıza çıkmaktadır. Ancak bu tez içerisinde konu edilen morfolojik yöntemlerde girdimiz yine bir imge iken çıktımız ise imgenin bileşenlerinin özelliklerinden oluşan matematiksel bir ifade veya küme olacaktır. Bu anlamda morfolojik imge işleme imgenin anlamlandırılması ya da imge içerisinde anlamın ayrıştırılması da bir dönüm noktasıdır.

2. MATEMATİKSEL ALTYAPI

Bu bölümde çalışmanın ilerleyen safhalarındaki konuları daha iyi anlayabilmek adına kümeler teorisi ve belirli mantık operasyonları hakkında hazırlayıcı bilgi verilmiştir.

2.1 Kümeler Teorisi ve Temel Konseptleri

A, Z^2 içerisinde tanımlı bir küme olsun. Eğer $a = (a_1, a_2)$ A 'nın bir elemanı ise bunu

$$a \in A \quad (2.1)$$

şeklinde gösteririz. Aynı şekilde eğer a, A kümesinin bir elemanı değilse bunu da

$$a \notin A \quad (2.2)$$

şeklinde gösteririz.

Hiç bir elemanı olmayan küme boş küme olarak isimlendirilir ve $\emptyset$ sembolü ile gösterilir.

Bir küme süslü parantezlerin arasındaki içerik ile tanımlanır: $\{.\}$. Bu çalışma kapsamındaki küme elemanları, imge içerisindeki nesneleri betimleyen piksellerin koordinatlarından veya diğer özelliklerinden oluşacaktır. Bu anlamda $C = \{ \omega \mid \omega = -d, \text{ için } d \in D \}$ şeklinde tanımlanan C kümesinin D kümesi içerisindeki tüm piksellerin -1 ile çarpılmasından oluşan kümeyi tanımladığını söyleyebiliriz.

Eğer A kümesinin bütün elemanları aynı zamanda B kümesinin de elemanı ise bu anlamda A, B 'nin bir alt kümesidir deriz ve:

$$A \subseteq B \quad (2.3)$$

şeklinde gösteririz. İki kümenin birleşimi ise:

$$C = A \cup B \quad (2.4)$$

şekinde gösterilir. Burada C kümesi A ve B kümesinde ve her ikisinde birden bulunan elemanları barındırmaktadır. Benzer şekilde iki kümenin kesişiminin gösterimi ise

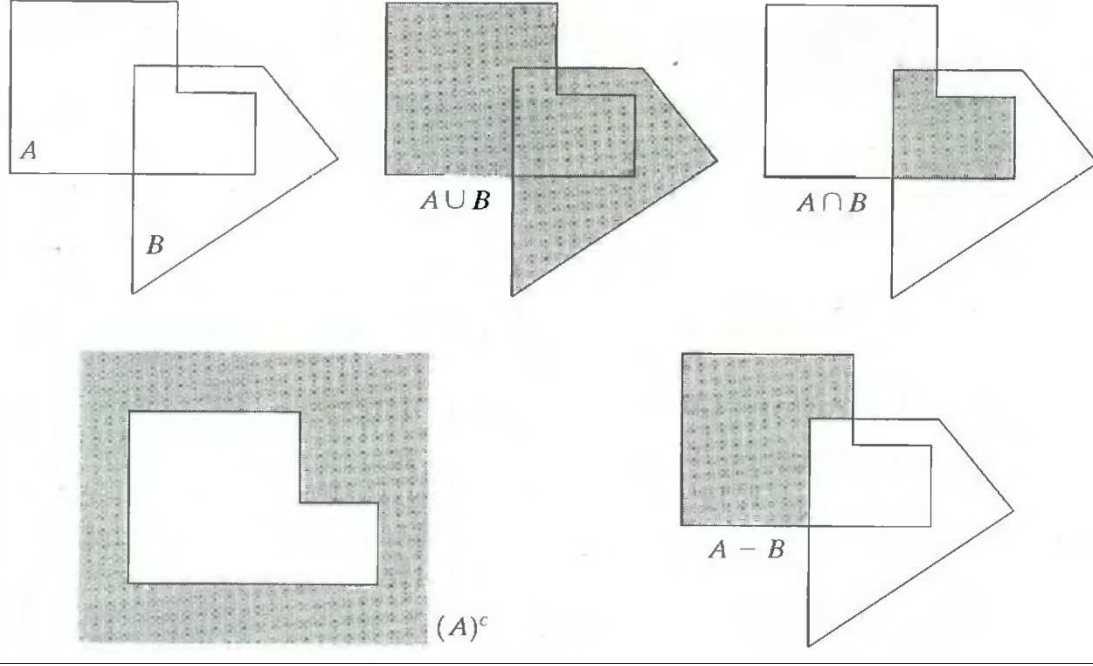
$$D = A \cap B \quad (2.5)$$

şeklindedir. Burada D kümesi hem A kümesinde hem de B kümesinde aynı anda bulunan bütün elemanlardan oluşan kümedir.

Eğer A ve B ayrık kümeler ise, bu iki kümenin ortak hiç bir elemanı olmadığı anlamına gelir ve

$$A \cap B = \emptyset \quad (2.6)$$

şeklinde gösterilir.



Şekil 2.1 a) A ve B kümesi b) A ve B kümesinin birleşimi c) A ve B kümesinin kesişimi d) A'nın tümleyeni. e) A'nın B'den farkı

A kümesinin elemanı olduğu uzay içerisinde A'nın elemanı olmayan tüm elemanlardan oluşan kümeye A'nın tümleyeni denir;

$$A^C = \{\omega \mid \omega \notin A\}. \quad (2.7)$$

A ve B iki küme olsun, A'nın B'den farkı $A - B$ şeklinde gösterilir ve;

$$A - B = \{\omega \mid \omega \in A, \omega \notin B\} = A \cap B^C, \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır. Bu bağlamda bu kümenin A'nın elemanı olan ancak B'nin elemanı olmayan, elemanların kesişiminden oluşan kümenin A'nın B'den farkı olarak isimlendirilmektedir. Bu kısma kadar anlatılan konseptleri Şekil 2.1 üzerinde görebilirsiniz. Her bir işlem sonrası oluşan sonuç kümesi gri olarak ortaya çıkmaktadır.

Bu noktadan sonra morfolojide çokça kullanılan ancak temel kümeler teorisinde sıkça rastlamadığımız iki tanımdan daha bahsedelim.

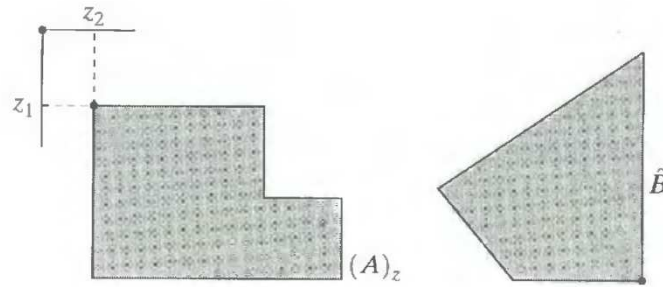
A kümesinin yansıması $\hat{A}$ şeklinde gösterilir ve,

$$\hat{A} = \{\omega \mid \omega = -a, \text{ için } a \in A\}, \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanır. A kümesinin $z = (z_1, z_2)$ noktasına göre *dönüşümü* ise $(A)_z$ olarak gösterilir ve,

$$(A)_z = \{c \mid c = a + z, \text{ için } a \in A\}, \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır. Şekil 2.2’de bu iki operasyonu görebilirsiniz. Şekil üzerindeki siyah noktalar şekildeki kümelerin orijinlerini göstermektedir.



Şekil 2.2 a) A’nın z noktasına göre dönüşümü b) B kümesinin yansıması. Şekildeki A ve B kümeleri şekil 2.1 deki A ve B kümeleridir.

2.2 İkili İmajlar İçin Mantık Operasyonları

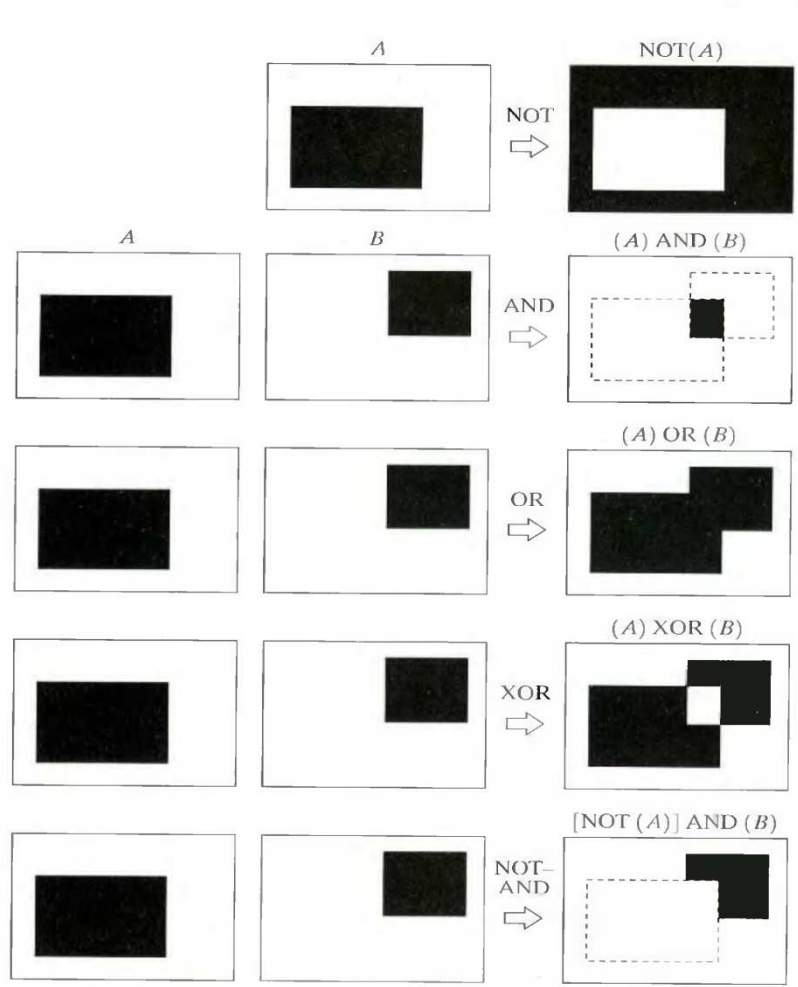
İkili yani sadece siyah ve beyaz piksellerden oluşan imgelerde, matematik mantık, morfolojik imge işleme için, güçlü bir araç olarak karşımıza çıkmaktadır.

Temel anlamda imge işlemede kullanılan işlemler VE, VEYA ve DEĞİL (TÜMLEYEN) işlemleridir. Bu işlemlerin özelliklerini Tablo 2.1 de görebilirsiniz.

Çizelge 2.1 Temel matematik lojik operasyonları doğruluk tablosu

p	q	p VE q	p VEYA q	DEĞİL (p) p'
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

Mantık operasyonları iki veya daha fazla imgenin ilgili pikselleri arasında her bir pikselin karşılığı olacak piksel ile birer birer uygulanırlar. (Tümlemede tek imge kullanılabilir) VE operasyonunda ancak ve ancak her iki piksel değerinin de 1 olması durumunda sonuçta ortaya çıkan pikselin değeri 1 olacaktır, diğer durumlarda ise 0 değerli bir piksel oluşacaktır. Şekil 2.3'te de görülebileceği gibi siyah ve beyaz pikselleri temsil amaçlı kullanılan 1 ve 0 ikili değerleri çeşitli operasyonlar sonucunda farklı final imgelerine ulaşmaktadır.



Şekil 2.3 İkili imgelerde mantık operasyonları. Siyah 1'i beyaz ise 0'ı simgelemektedir.

Diğer işlemler de Tablo 2.1'den kolayca görülebilmektedir. Örneğin XOR kapısı, sadece imge üzerindeki piksel veya diğer imgedeki ilgili piksel değeri 1 olduğu zaman 1 sonucunu vermektedir. Yani iki piksel değerinin birbirinden farklı olduğu durumları ölçmektedir. VEYA operasyonunda ise hem piksellerin birbirinden farklı olduğu durum hem de ikisinin de siyah olduğu durum siyah bir piksel olarak sonuç vermektedir. Bu noktada VEYA operasyonu, XOR operasyonundan farklı amaçlarla kullanılabilir.

Burada değinmemiz gerek önemli bir nokta da, bahsedilen matematik lojik işlemlerinin tamamının bir önceki bölümde anlatılan küme işlemleri ile birebir ilişki içerisinde olduğudur. Mantık işlemleri genel olarak ikili sistemde kullanım alanına sahip olurken, küme işlemleri daha genelleştirilmiştir. Mesela küme işlemlerindeki kesişim operatörü, uzayımız sadece ikilik sayı sisteminden oluşuyorsa mantık işlemleri içerisindeki VE operatörüne indirgenmiş olmaktadır.

3. YAYMA VE AŞINDIRMA

Birçok morfolojik algoritma temel olarak yayma ve aşındırma işlemlerine dayanmaktadır. Bu anlamda yayma ve aşındırma işlemleri morfolojik imge işlemenin yapıtaşlarıdır.

3.1 Yayma İşlemi

Yayma ikili imgedeki nesneyi büyötmeye ya da kalınlaştırmaya yarayan morfolojik işlemdir. Yayma işleminin neye göre yapılacağını ise yapı elemanı belirler.

Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse; A ve B Z^2 de tanımlı iki küme olsun. Bu durumda A'nın B'ye yayılması $A \oplus B$ olarak gösterilir ve

$$A \oplus B = \{z \mid (B')_z \cap A \neq \emptyset\} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitlik B'nin yansımasını elde edip, bunu z noktasına göre dönüştürme işlemine dayanmaktadır. Bu anlamda A'nın B'ye göre yayılması z noktasına göre bütün yerdeğıştirmelerinin bir kümesi, yani B'nin A üzerindeki yansıması ile A'nın kesişimi olduğundan

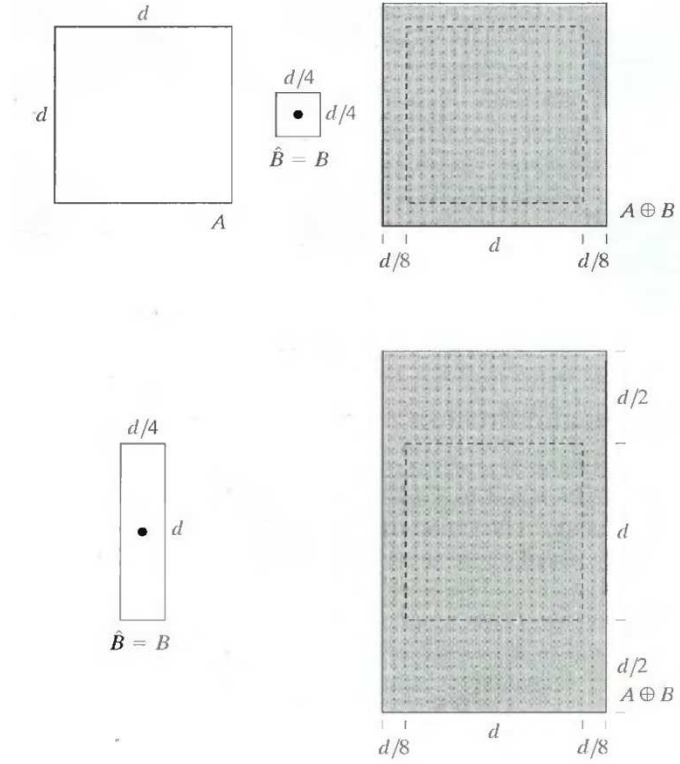
3.1 eşitliği,

$$A \oplus B = \{z \mid [(B')_z \cap A] \subseteq A\} \quad (3.2)$$

şeklinde de ifade edilebilecektir.

Diğer birçok morfolojik işlemde olduğu gibi, yayma işleminde de B kümesi genel olarak yapı elemanı olarak adlandırılır.

Yayma işlemini tanımlamak için (3.1) anlaşılabilceğı üzere tek eşitlik değildir. Ancak bu eşitlik, yapı elemanı B'nin katlanma maskesi olarak kullanıldığı durumlarda, diğer tanımlara göre üstünlük sağladığını söyleyebiliriz. İşlem olarak birbirlerine benzeseler de katlanma işlemi daha çok aritmetik bir işlemdir, yayma işlemi ise küme işlemi olsa bile, B'yi orijin noktasına göre anın üzerine yayma işlemi ile katlama işlemi analogdur diyebiliriz.

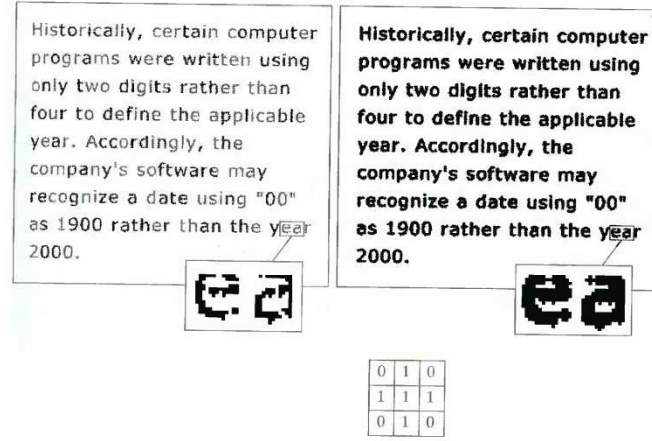


Şekil 3.1 a) A kümesi, b) nokta merkezli kare yapı elemanı, c) A'nın B'ye göre yayma işlemi d) dikey fazla türden yayma işlemi

Şekil 3.1 üzerinde en üst sağda basit bir küme görülmektedir. Hemen yanında nokta orijinli yansıması kendisine eşit olan yapı elemanını görülmekte. Bu durumda yapı elemanının orijinine göre simetrik bir eleman olduğunu söyleyebiliriz. Sol üstte kesikli çizgilerle belirtilen alan referans alınan esas kümeyi, hemen dışındaki düz çizgilerle gösterilen alan ise A'nın B'nin z'ye göre yansımasında meydana gelen yer değişimlerin boş küme ile sonuçlanmaya başladığı sınırı gösteriyor. Bu yüzden bu alan içerisinde kalan bölüm A'nın B'ye göre yayması olarak isimlendirilmektedir. Altta yer alan uygulamada ise daha fazla dikey yayma yapmak amaçlı olarak y eksenine göre simetrik bir yapı elemanının kullanıldığını görülebilir. Bu anlamda yayma işleminin temel belirleyicisinin yapı elemanı olduğu da söylenebilir.

Yayma işleminin genel olarak en basit kullanım alanı boşluk doldurma operasyonlarıdır. Bu anlamda Şekil 3.2'de solda görebileceğiniz boşluklu(kırık) karakterlere sahip metinde maksimum kırıklığın iki piksel olduğu bilinmektedir. Bu anlamda altta görülen kolayca oluşturulmuş yapı elemanı sayesinde karakterler içerisindeki boşluklar doldurularak, soldaki sonuç imgesine ulaşmak mümkün olacaktır. Bu noktada bir başka imge işleme algoritması

olan düşük geçiş algoritması da kullanılabilir. Ancak morfolojik bir operasyon kullanmanın en büyük avantajı olan sonuç imgesinin de ikili bir imge olması nedeniyle yayma işlemi ön plana çıkmaktadır. Eğer düşük geçiş yöntemi kullanılsaydı sonuç gri ölçekli olacak daha sonra bu imgeyi bir eşik fonksiyonu yardımı ile tekrar ikili imgeye çevirmemiz gerekecekti.



Şekil 3.2 Yayma işlemi uygulaması

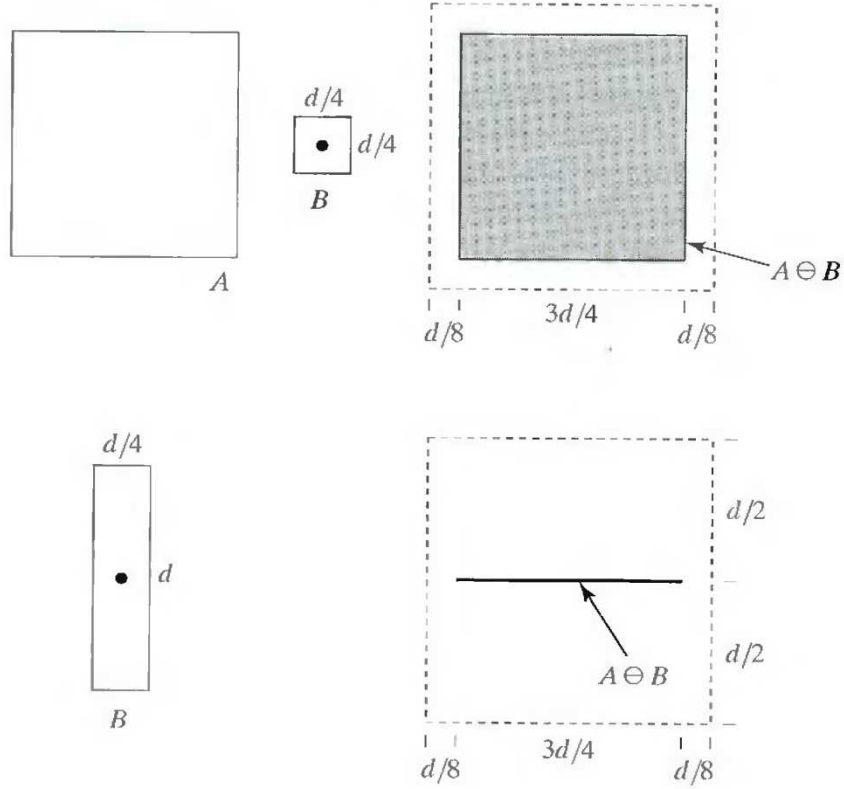
3.2 Aşındırma İşlemi

A ve B Z^2 de tanımlı kümeler ise, A'nın B ile aşındırılması işlemi $A \ominus B$ ile gösterilir ve

$$A \ominus B = \{z \mid (B)_z \subseteq A\}, \quad (3.3)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Yani A'nın B ile aşınması B'nin z'ye göre dönüşümü kümesinin A tarafından kapsanan tüm z noktalarından oluşan kümedir. Aynen yayma işlemindeki gibi (3.3) eşitliği bu durumu anlatmak için kullanılan tek eşitlik olmamasına rağmen (3.1) eşitliğinde bahsedilen nedenden dolayı, pratik morfoloji uygulamalarında, daha fazla tercih edilen bir tanımlama şeklidir.



Şekil 3.3 Aşındırma işlemi uygulaması

Şekil 3.3 de gösterilen işlem Şekil 3.1 de gösterilen işlemle paralellik göstermektedir. Aynen orda olduğu gibi A kümesi sol tarafta gösterilirken sağ taraftaki sonuç içerisinde de referans olması açısından kesikli çizgiler ile gösterilmiştir. Gölgeleştirilmiş alan, B orijinli yer değiştirmeler sonucunda oluşan alanı bağlayarak, tamamının A kümesi tarafından kapsanmasını sağlamıştır. Böylece bu alan içerisindeki noktaların mevkileri A'nın B ile aşındırılması sonucunda ortaya çıkan kümeyi oluşturmuştur. Bu noktada daha önceki benzer uygulamada olduğu gibi yapı elemanının seçimi sonucu da etkileyecektir. Şekil 3.3'te altta görebileceğiniz gibi dikey uzunluğu daha fazla olan bir yapı elemanı aşındırma sonucunda final imgeyi tek bir çizgiye kadar indirebilmektedir.

Yayma ve aşındırma işlemleri kümesel tümleme ve yansıma açısından birbirinin dualidir. Bunu

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus B' \quad (3.4)$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Morfolojik işlemlerin geçerliliğini kanıtlamak adına bu eşitliğin doğruluğu gösterilirse;

aşındırma işleminin tanımından başlarsak:

$$(A \ominus B)^c = \{z \mid (B)_z \subseteq A\}^c, \quad (3.5)$$

Eşitliğine ulaşabiliriz. Burada $(B)_z$ kümesi A kümesi tarafından kapsandığından $(B)_z \cap A^c = \emptyset$ olacaktır. Bu eşitliğimizi

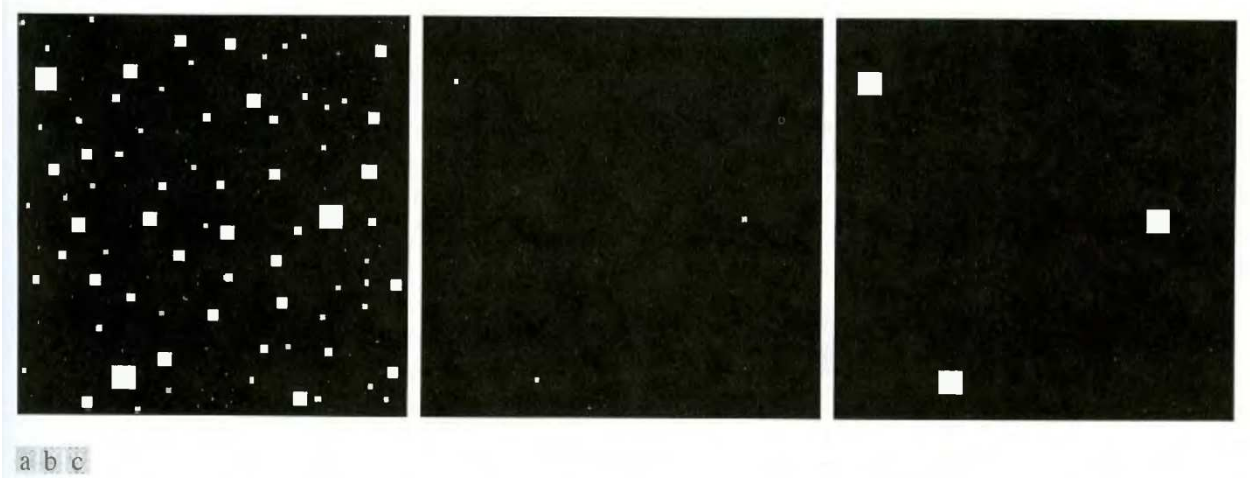
$$(A \ominus B)^c = \{z \mid (B)_z \cap A^c = \emptyset\}^c, \quad (3.6)$$

formuna getirecektir. Fakat $(B)_z \cap A^c = \emptyset$ içerisindeki z 'lerden oluşan kümenin tümleyeni, $(B)_z \cap A^c \neq \emptyset$ şartını sağlayacaktır. Bu durumda:

$$\begin{aligned} (A \ominus B)^c &= \{z \mid (B)_z \cap A^c \neq \emptyset\}^c, \\ &= A^c \oplus B' \end{aligned} \quad (3.7)$$

Şeklinde (3.4)'de belirtilen eşitlik sağlanarak, ispat tamamlanmış olacaktır.

Aşındırmanın en kolay kullanım alanlarından bir tanesi de ikili bir imge üzerindeki gereksiz detayların yok edilmesi işlemidir. Şekil 3.4'de gösterilen üzerinde 1,3,5,6,9 ve 15 piksel büyüklüğünde kareler barındıran bir ikili imge bulunmaktadır. Diyelim ki bu imge üzerindeki en büyük kareler haricinde kalan diğer bütün kareleri yok etmek istiyoruz. Bu noktada 13 x 13 piksel büyüklüğünde bir yapı elemanı kullanarak Şekil 3.4 içerisinde ortada görülebilecek en büyük karelerin sadece bir kısmını barındıran imgeye ulaşmamız mümkündür. Bu noktadan sonra yine aynı yapı elemanını kullanarak, yayma işlemi ile kalan kareleri yeniden eski boyutları olan 15 x 15 piksel boyutuna getirebiliriz. Bu noktada imgeler üzerinde objelerin tamamının beyaz olduğunu göz önünde bulunduruyoruz. Daha önceki örneklerde siyah nesneler kullanılırken burada beyaz nesneler kullanmamızın nedeniz nesnelerin hangi ikilik değere sahip olduğunun işlemimizde sadece yapı elemanının seçimini değiştirdiğini göstermek. Bu durumda aksi belirtilmedikçe, yapı elemanları imge içerisindeki nesneler ile aynı ikili değere sahip olarak seçilmektedir. Bu uygulama kullanılan konseptler morfolojik filtrelemenin temelini oluşturmaktadır.



Şekil 3.4. Aşındırma uygulaması a) üzerinde çeşitli büyüklüklerde nesneler barındıran ikili imge b) bu imgenin 13 piksel büyüklüğünde bir kare yapı elemanı tarafından aşındırılmış hali c) elde edilen imgenin aynı yapı elemanı tarafından yayılmış hali.

4. AÇMA VE KAPAMA

Görüldüğü üzere yayma bir imgeyi genişletirken aşındırma ise daraltmaktadır. Bu bölümde ise diğer iki önemli morfolojik işlem olan açma ve kapamadan bahsedilecektir. Açma işlemi bir imgenin sınırlarını yumuşatırken, dar geçişleri kırarak, ince çıkıntıları yok eder. Kapama işlemi de sınırları yumuşatma amacındadır. Ancak bu işlem sırasında, açmanın tam tersi olarak, dar geçitlerin erimesine neden olurken, küçük delikleri yok eder ve boşlukları doldurur. Bu noktada açma işleminin daha çok konveks nesnelerin yumuşatılmasında, kapama işleminin ise buna zıt olarak konkav nesnelerin yumuşatılmasında kullanılabileceğini söyleyebiliriz.

A kümesinin B yapı elemanı tarafından açılması $A \circ B$ ile gösterilirken,

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu anlamda A'nın B ile açılması A'nın B ile aşındırılmasını takiben, yine B ile yayılması işlemidir.

Benzer şekilde A kümesinin B yapı elemanı tarafından kapanması $A \cdot B$ ile gösterilirken,

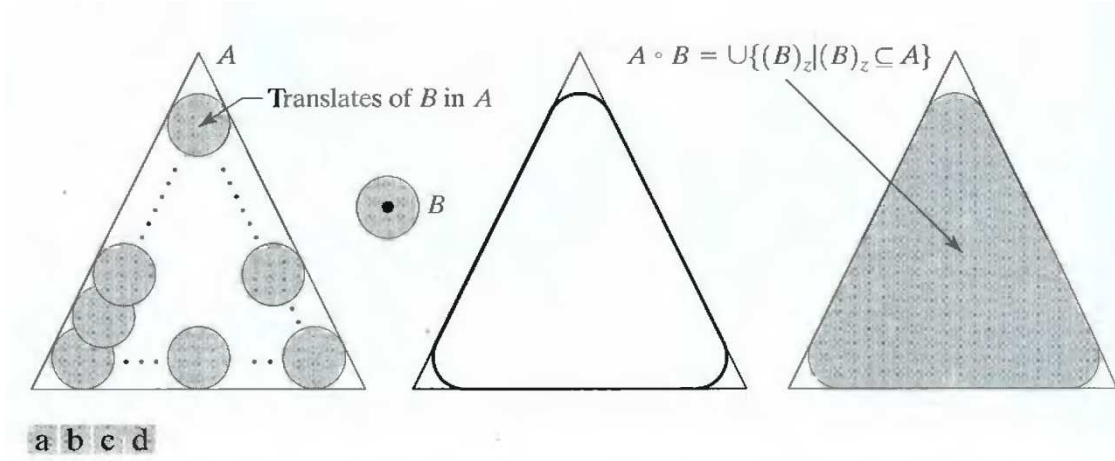
$$A \cdot B = (A \oplus B) \ominus B \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanır. Kelimelere dökmemiz gerekirse yine benzer şekilde A'nın B ile kapanması A'nın B ile yayılması arkasından yine aynı yapı elemanı ile aşındırılması işlemidir.

Açma işleminin geometik olarak kolayca ifade edebiliriz. (Şekil 4.1) Diyelim ki elimizde “yuvarlanan bir top” şeklinde B olarak isimlendirdiğimiz bir yapı elemanı var. $A \circ B$ niteleyen alan, B'nin A'nın sınırları kapsamındaki yuvarlanması sırasında A içerisinde kalan noktaların tümüdür. Bu noktada kümeler teorisi açısından, A'nın B ile açılmasını, B'nin A içerisindeki tüm izdüşümlerinin birleşim kümesi olarak ifade etmek mümkün olacaktır.

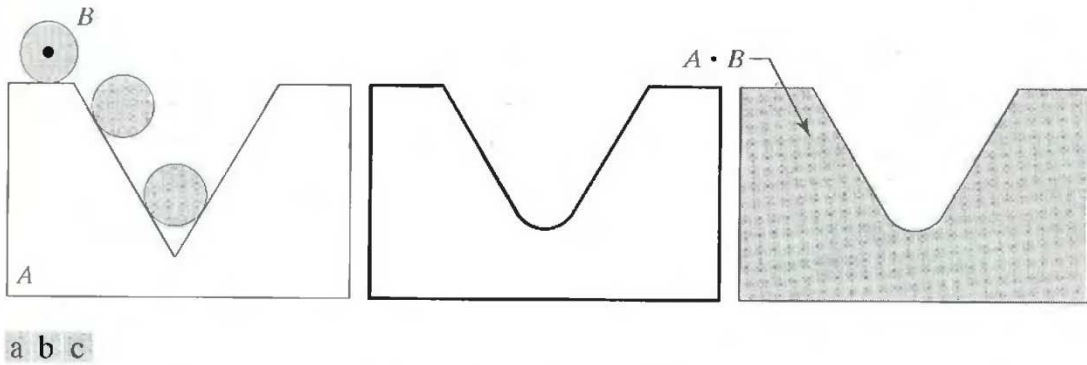
$$A \circ B = \bigcup \{ (B)_z \mid (B)_z \subseteq A \} \quad (4.3)$$

Bu anlamda açma işlemini, $\bigcup \{.\}$ şeklinde ifade edilen süslü parantezler içerisindeki bütün kümelerin birleşiminden oluşan bir donatma işlemi olarak tanımlamak mümkün olacaktır.



Şekil 4.1 a) B yapısal elemanın A içerisindeki yuvarlanması (nokta B'nin orijini göstermektedir.) c) Kalın çizgi açmanın iç sınırını göstermektedir. d) gölgeli alan tam açma işlemi sonunda ortaya çıkan imgedir.

Benzer şekilde kapama işlemini de geometrik olarak ifade etmek mümkündür. Açma işleminden farklı olarak yapı elemanını nesnenin dış yüzeyi üzerinde yuvarlayarak sonuca ulaşmıştır. (Şekil 4.2) Bu noktada birazdan görüleceği üzere açma ve kapama işlemleri birbirinin duali olduğundan, topu dış yüzey üzerinde yuvarlamak beklenmeyen bir davranış olmayacaktır. Geometrik olarak ω noktası, ancak ve ancak $(B)_z \cap A \neq \emptyset$ eşitliğinin sağlandığı, ω kapsayan bütün $(B)_z$ izdüşümlerinin elemanı olduğunda, $A \cdot B$ 'nin de bir elemanı olacaktır. Şekil 4.2'de kapama işlemini geometrik özellikleri gösterilmektedir.



Şekil 4.2 a) yapı elemanı A kümesinin dış sınırında yuvarlanmaktadır B) kalın çizgiler kapamanın dış sınırlarını oluşturmakta c) kapama işlemi sonrası son görünüm (gölgeli alan)

Aynen yayma ve aşındırma işlemlerinde olduğu gibi, açma ve kapama işlemleri tütleme ve yansıma açısından birbirinin dualidir. Buradan da

$$(A \cdot B)^C = (A^C \circ B') \quad (4.4)$$

eşitliği ortaya çıkmaktadır.

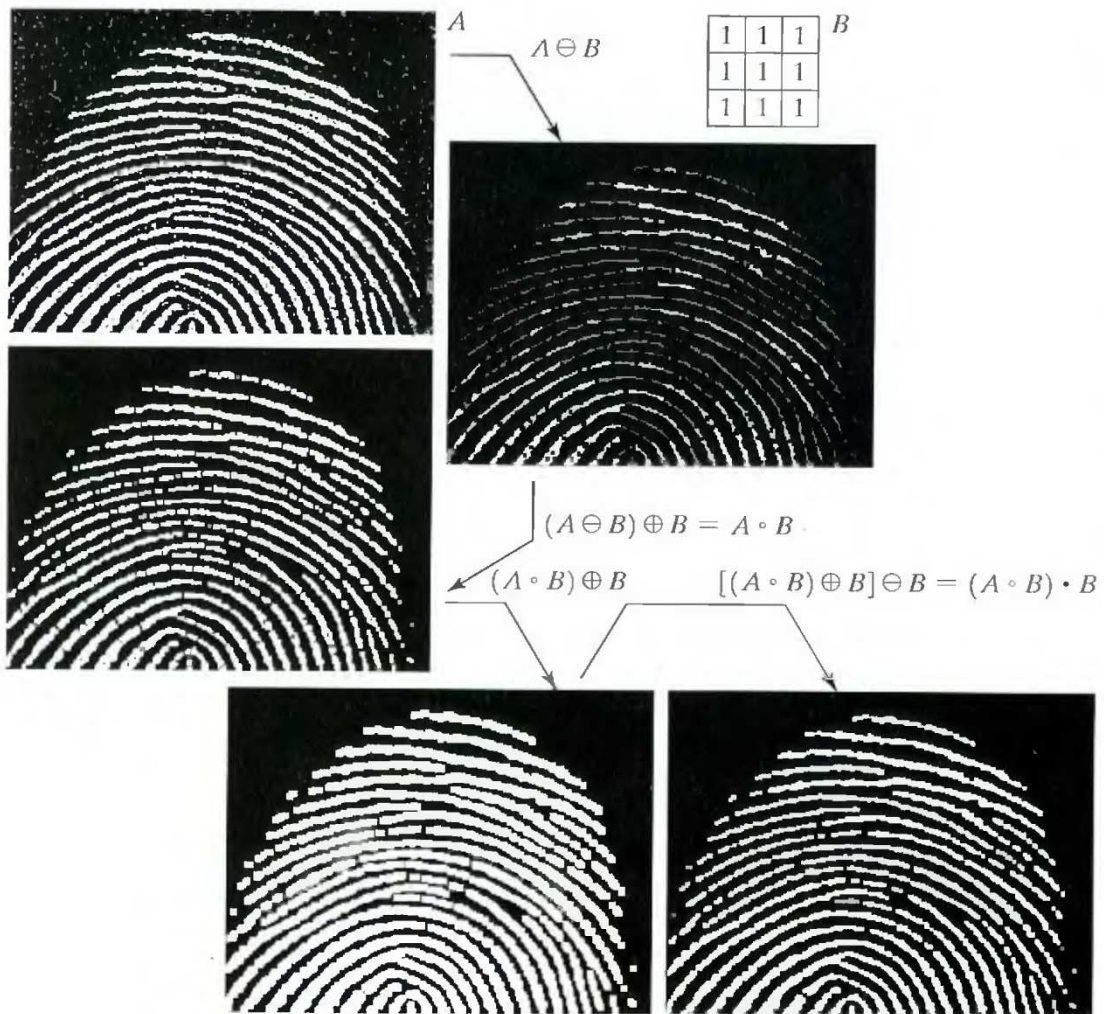
Açma işlemi aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır

- $A \circ B$, A 'nın bir alt kümesidir (alt imge).
- Eğer C , D 'nin bir alt kümesi ise $C \circ B$ de $D \circ B$ 'nin bir alt kümesidir.
- $(A \circ B) \circ B = A \circ B$

Benzer şekilde kapama işlemi de aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır.

- A , $A \cdot B$ 'nin bir alt kümesidir (alt imge).
- Eğer C , D 'nin bir alt kümesi ise $C \cdot B$ de $D \cdot B$ 'nin bir alt kümesidir.
- $(A \cdot B) \cdot B = A \cdot B$

Dikkat edilirse çoklu açma ve kapama işlemlerinde, sonucun, bir kere işlemin uygulanmasından sonra değişmediği görülecektir.



Şekil 4.3 Gürültülü parmak izinin temizlenmesi

Morfolojik işlemler, uzamsal filtrelelere benzeyen, filtreler oluşturmak için kullanılabilir. Bu anlamda Şekil 4.3 a)'da gösterilen parmak izi gürültü ile bozulmuştur. Bu noktada gürültü ile yapılan kirlenme siyah arka plan üzerindeki açık renkteki elemanlar ve beyaz arka plan üzerindeki koyu renkli elemanlar olarak karşımıza çıkmaktadır. Amaç gürültüyü ve onun imge üzerinde yarattığı etkiyi azaltırken, parmak izinin yapısının da bozulmamasını sağlamak olacaktır. Bu amacı sağlamak için açma işlemini takiben kapama işlemi başarıya ulaşılmasını sağlayacaktır.

Yapı elemanı olarak tamamı koyu(1) piksellerinden oluşan B kümesi kullanılmaktadır. Şeklin geri kalanında adım adım filtreleme işlemi görülmektedir. Bu noktada ilk adımda A'nın B tarafından aşındırılması ($A \ominus B$) daha sonra sonuç imgesinin B ile yayılması ($(A \ominus B) \oplus B = A \circ B$) Bunun hemen ardından ise sonuç imgesinin tekrar B ile yayıldığını ($(A \circ B) \oplus B$) ve sonucun B ile aşındırılarak ($[(A \circ B) \oplus B] \ominus B = (A \circ B) \cdot B$) net finalde gürültüsü azaltılmış fakat yapısı korunmuş net parmak izi imgesine ulaşıldığını görebilirsiniz. Bu işlem sırasında kapsanan alanın önce küçüldüğü daha sonra genişlediği ve finale ulaştığını aynı büyüklüğe geri döndüğü görülebilmektedir.

Uygulamada görülebileceği gibi açma işlemi hem arka planda hem de parmak izi üzerindeki gürültüyü yok ederken aynı zamanda parmak izinin üzerinde delikler oluşmasına yol açarak yapısını bozmaktadır. Bu noktada yapılan yayma işlemi ile bu delikler kapatılırken sınırların kalınlaştığı görülmekte. Bunu takiben yapılan aşındırma işlemi ile de sınırları incelterek net parmak izine ulaşılmıştır. Bu noktada açma işlemi arkasından yapılan kapama işleminin gürültüyü yok ederken, parmak izi üzerinde küçük kırılmalara yol açtığı sonucuna varabiliriz. Ancak bu beklenmeyen bir yan etki değildir. Zira bağlantılılığı sürdürmek adına yapılan herhangi bir işlem de bulunmamaktadır.

5. VUR-YADA-ISKALA DÖNÜŞÜMÜ

Morfolojik vur-veya-ıskala dönüşümü şekil belirlemede kullanılan temel bir araçtır. Bu konunun anlatılmasında içinde X,Y ve Z ile belirtilen, üç farklı şekli barındırmakta olan Şekil 5.1’deki A kümesinin yardımı kullanılacaktır. Şekil 5.1 içerisindeki gölgeli alanlar (a) ve (c) şıklarındaki imgeler için asıl kümeleri belirtirken (d) ve (e) bölümlerinde ise morfolojik operasyonların sonucunda oluşan sonuç kümelerini belirtmektedir. Amaç bu üç şekil içerisinde bir tanesinin, mesela X, yerini belirleyebilmek olacaktır.

Her bir şeklin orijinini ağırlık merkezleri olarak kabul edersek, X’in küçük bir W penceresi içerisine alınmış olsun. Bu noktada X’in W’ya göre lokal arkaplanı Şekil 5.1 (b) de gösterilen ve $W - X$ ile belirtilen kümesel farkları olacaktır. Bu noktada Şekil 5.1 (c) gösterilen A’nın tümleyeni konumundaki kümeyi daha sonra kullanmak üzere belirtelim. Şekil 5.1 (d) ile gösterilen A’nın X’e göre aşındırılmasıdır. Bu anlamda A’nın X ile aşındırılması sonucunda ortaya çıkan bölge X’in orijininin muhtemel bulunabileceği noktaların bir kümesidir ve bu küme tamamen A tarafından kapsanmaktadır. Başka bir deyişle, $A \ominus X$, geometrik olarak X’in merkezi olabilecek bütün noktaların X ile eşleştiği (vur) kümedir. Bu noktada A kümesinin üç *ayrık* küme olan X, Y ve Z’den oluştuğunu unutmayalım.

Şekil 5.1 (e)’de A kümesinin X’in lokal arkaplan kümesi ($W - X$) ile aşındırıldığını görüyoruz. Bu noktada Şekil 5.1 (e)’de gösterilen dış gölgeli alanın aşındırmanın bir parçası olduğu söylenebilir. Şekil 5.1 (d) ve (e) den görülebileceği gibi X’in bulunabileceği A içerisinde bulunabileceği lokasyonların kümesi A’nın X ile aşındırılması ve A’nın tümleyeninin ($W - X$) ile aşındırılmasının, kesişimi olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu kesişim aslında tam olarak aranan lokasyondur. Başka bir deyişle, eğer B, X ve X’in arkaplanından oluşan bir küme ise B’nin A içerisindeki eşleşmesi veya eşleştiği noktaların kümesi $A \odot B$ ile gösterilir ve

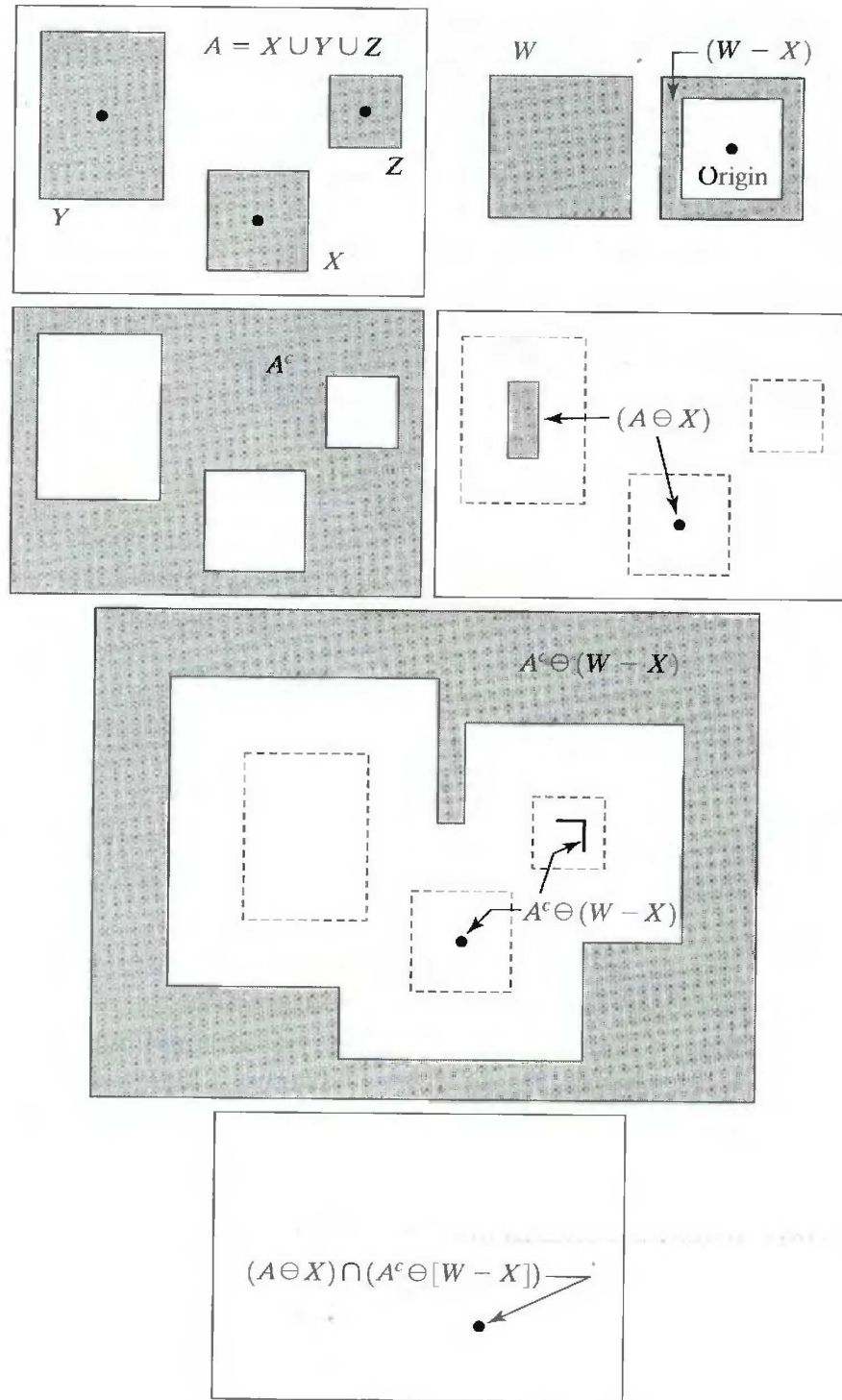
$$A \odot B = (A \ominus X) \cap [A^c \ominus (W - X)], \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu notasyonu genelleştirmek istersek, öyle bir $B = (B_1, B_2)$ düşünelim ki B_1 herhangi bir nesne ile ilişkilendirilmiş, B_2 ise bu nesnenin arka planı ile ilişkilendirilmiş olsun. Yukarıda da belirtildiği gibi, $B_1 = X$ ve $B_2 = (W - X)$ olacaktır. Bu notasyonla 5.1 eşitliği,

$$A \odot B = (A \ominus B_1) \cap (A^c \ominus B_2), \quad (5.2)$$

halini alacaktır.



Şekil 5.1 (a) A kümesi (b) W penceresi ve $(W-X)$ farkı (c) A 'nın tümleyeni (d) A 'nın X ile aşındırılması (e) A 'nın tümleyenin $(W-X)$ ile aşındırılması (f) X 'in aranan lokasyonu.

Bu noktada $A \odot B$ B_1 'in a içerisinde eşleştiği ve B_2 'nin A^c içerisinde eşleştiği orijin

noktalarının tamamını birebir olarak içermektedir. Bu anlamda küme farkları tanımından (2.8) ve yayma ve aşındırmanın dualitesi kuramından (3.4) eşitliğimizi

$$A \circledast B = (A \ominus B_1) - (A \oplus B'_2), \quad (5.3)$$

şeklinde yazmamız mümkün olacaktır. Ancak bu noktada genelde tercih edilecek eşitliğin (5.2) olacağını belirtmek faydalı olacaktır. Bu üç eşitliğe birden vur-veya-ıskala dönüşümü denilmektedir.

Bu noktada B1 gibi nesnenin kendisini temsil eden ve B2 gibi bunun arkaplanını temsil bir yapı objesi eden kullanmasının temel amacı iki farklı nesnenin ancak ve ancak ayrık küme formunda olması kabulüdür. Bunu garantilemek için her bir nesnenin etrafında bir piksel kalınlığında bir arkaplanı olduğu ön kabulü mevcuttur.

6. TEMEL MORFOLOJİK ALGORİTMALAR

Bundan önceki bölümlerde oluşturulan alt yapı ile bu bölümde morfolojik algoritmaların pratik kullanımları anlatılabilir duruma gelmiştir. İkili imajlar ile çalışırken, morfolojinin uygulanması, bir şekli tasvir edecek ve tanımlayacak imaj parçalarının ayrıştırılması şeklinde olacaktır. Bu anlamda, morfolojik algoritmaları sınır belirlemek, bağlantılı parçaları bulmak, konveks bükümleri belirlemek ve iskelet çıkarmak gibi işlemlerde kullanıyoruz. Bununla beraber alan doldurma, inceltme, kalınlaştırma, yontma gibi işlemleri de bu algoritmalarla yardımcı olma amaçlı ön ve son işlem adımları içerisinde kullanmaktayız. Bu bölümde kullanılacak olan mini-imgeler genel olarak ikili sistemde ve 1 karanlık 0 ise aydınlık olarak gösterilen ve sözü geçen algoritmaların işleyiş mantığını daha iyi kavramamıza yardımcı olacak araçlar olacaktır.

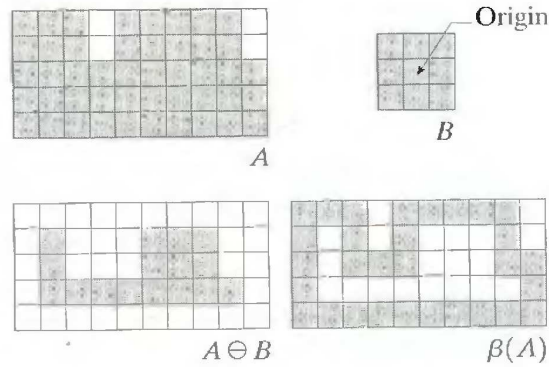
6.1 Sınır Belirleme

A kümesinin sınırı $\beta(A)$ olsun. $\beta(A)$ sınırının belirlenebilmesi için yapılacak olan işlem, önce A'yı B yapı elemanı ile aşındırmak daha sonra ise bu aşındırmanın A'dan kümesel farkının alınması yolu ile gerçekleşir. Bu,

$$\beta(A) = A - (A \ominus B) \quad (6.1)$$

şeklinde gösterilmektedir.

Şekil 6.1 sınır belirlemenin işleyiş mantığını göstermektedir. Şekil 6.1 içerisinde bir adet ikili nesne, yapı elemanı olan B ve (6.1) eşitliğinin uygulanması sonucunda oluşan sonuç bulunmaktadır.



Şekil 6.1 Sınır belirleme işleyişi

Şekil 6.1 içerisinde kullanılan yapı elemanı sıklıkla karşılaştığımız bir yapı elemanı türüdür ve tekil değildir. Mesela 5 x 5 piksel ve 1'lerden oluşan bir yapı elemanı 2 ve 3 piksel kalınlığında bir sınır oluşturacaktır. Eğer aynı durumda B yapı elemanının orijini kümenin sınırlarında olduğunda yapı elemanının bir kısmı imgenin dışında kalacaktır. Bu durumlarda imge sınırı dışında kalan alanlar için piksel değerinin 0 olduğunu varsayıyor olacağız.

6.2 Alan Doldurma

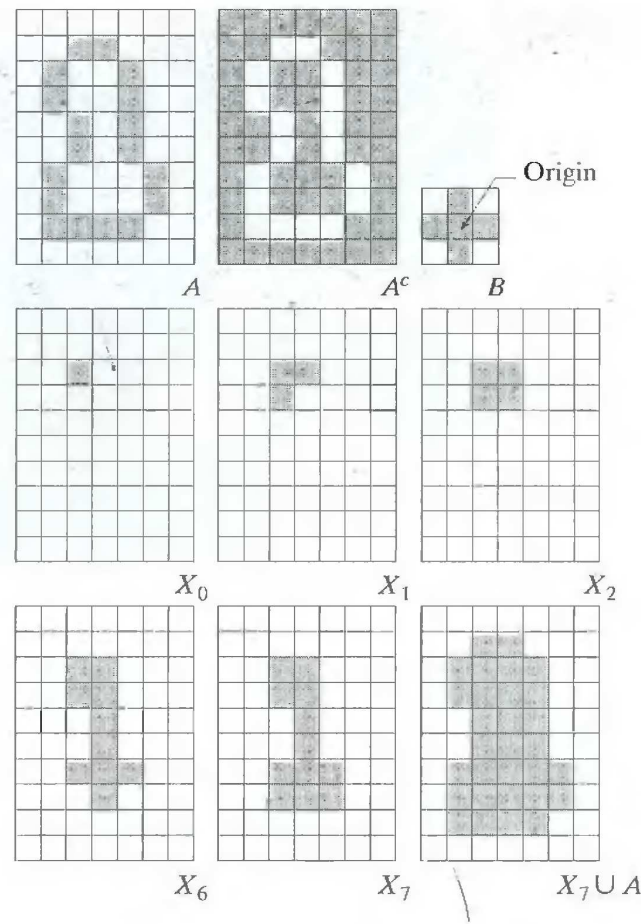
Alan doldurma algoritması, küme yayma, tümlleme ve kesişim işlemlerine dayanmaktadır. Şekil 6.2 içerisinde A kümesi ve bu kümenin bir alt kümesi olan 8-noktadan birleşmiş bir sınır şekli bulunmaktadır. Amaç, bu sınır içerisinde kalan bir p noktasından başlayarak sınır içerisinde kalan alanın 1'ler ile doldurulmasıdır.

Eğer bütün sınır olmayan noktaların 0 ile etiketlendiği kabulü üzerinden yola çıkarsak, p noktasına 1 değerini atamak için izlenecek prosedür

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.2)$$

Şeklinde olacaktır. Burada $X_0 = p$ ve B de simetrik özellikli bir yapı elemanıdır. Bu algoritma k'nın $X_k = X_{k-1}$ durumunu sağladığı noktada iterasyonu durduracaktır ve X_k ve A'nın birleşimi olan küme ise doldurulmuş küme ve sınırı barındırıyor olacaktır.

Bu noktada (6.2) eşitliğindeki yayma işlemi bütün alanları doldururken bunun A'nın tümlleyeni ile kesişimi sonucunda istenilen alana ulaşmamızı sağlayacaktır. Bu anlamda morfolojik bir işlemin istenilen özelliklerle nasıl buluşturulacağı konusunda karşımıza çıkan ilk örnek de yine alan doldurma algoritması olmaktadır. Bu uygulama içerisinde tam olarak *şartlı yayma* olarak isimlendirilmektedir. Daha sonraki işleyişi ile ilgili bilgi Şekil 6.2 üzerinde görülebilir.



Şekil 6.2 Alan doldurma işleyişi

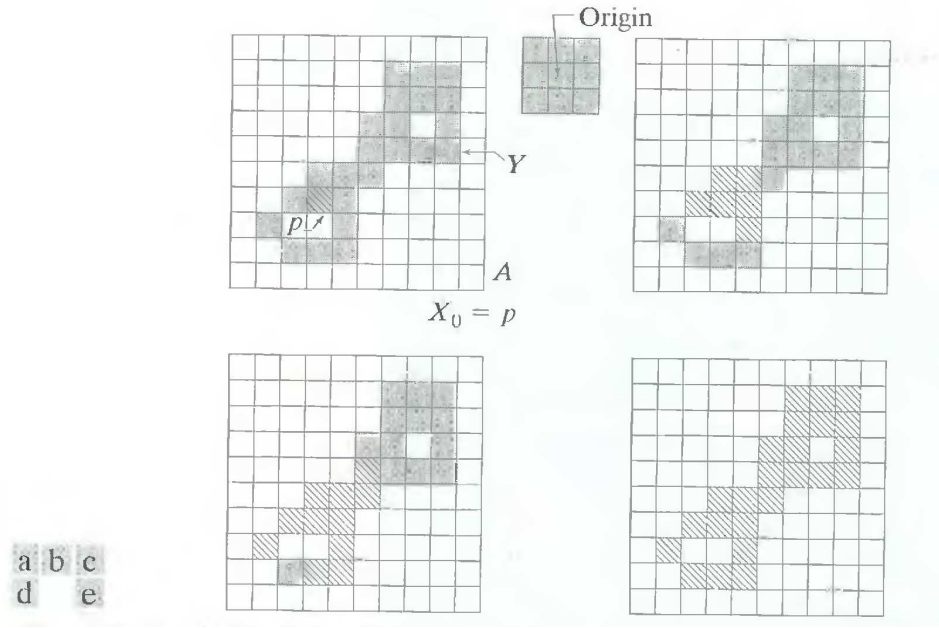
6.3 Bağlı Parçaların Ayrıştırılması

Pratikte, ikili bir imgedeki bağlı parçaların ayrıştırılması, bir çok imge analiz uygulamasının merkezinde yer almaktadır. Y , A kümesi içerisinde bağlı bir parça ve Y 'nin bir p noktası biliniyor olsun. Aşağıdaki ifade bu anlamda Y 'nin bütün elemanlarını gösteriyor olacaktır.

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.3)$$

Burada $X_0 = p$ ve B yine yapı elemanı olmak üzere $X_k = X_{k-1}$ durumu sağlandığında algoritma duracak ve $Y = X_k$ durumuna ulaşılmış olacaktır.

Bu eşitlik (6.1) eşitliğinin formu kesişim kümesinin A 'nın tümleyeni değil de A ile olması farkı dışında aynıdır. Bu farklılık bağlı parçaların tamamının 1 ile etiketlenmiş olmasından kaynaklanmaktadır.



Şekil 6.3 Bağlı parçaların ayrıştırılması

A ile kesişimleri doğrultusunda her bir yayma iterasyonu 0 ile etiketlenmiş elemanların elenmesini sağlayacaktır. Şekil 6.3 içerisinde bağlı parçaların ayrıştırılması ile ilgili işleyiş makenizması bulunmaktadır. Aynen alan doldurmada olduğu gibi bu algoritmada da ancak A kümesi içerisinde, sınırlı sayıda parçadan oluşan ve bir p noktası bilinen kümeler uygulanabilir olacaktır.

6.4 Konveks Örtün

Bir A kümesi eğer bu küme içindeki herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası kümesinin içinde kalıyorsa *konvektir* denir. Yani kümede herhangi iki noktayı birleştiren doğru üzerindeki tüm noktalar yine kümenin elemanı ise küme konvektir. İki konveks kümenin kesişimi, toplamı ve bir konveks kümenin sabit bir x ile çarpımı yine konvektir.

Konveks örtün A kümesini kapsayan en küçük konveks kümedir. Aslında konveks örtün A kümesini kapsayan tüm konveks kümelerin kesişimidir. Tüm konveks kümelerin kesişimi de konveks bir kümedir ve bu küme A'yı içeren en küçük konveks kümedir.

$H - A$ kümeler farkına ise A kümesinin *konveks eksiği* denir. Konveks örtün ve konveks eksik nesne tanımlanmasında faydalıdır. Örneğin bir A kümesinin konveks örtününü elde etmek için basit bir morfolojik algoritma şu şekilde olabilir:

$B^i, i=1,2,3,4$ Şekil 6.4 'de görülen yapıyı oluşturacak olan dört eleman olsun. $X_0^i = A$

olmak üzere

$$X_k^i = (X_{k-1} \otimes B^i) \cup A, i = 1, 2, 3, 4, k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.4)$$

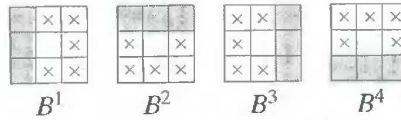
denklemleri uyarlanarak yöntem uygulanır. Conv alt ifadesi $X_k^i = X_{k-1}^i$ deki gibi bir yakınsamayı işaret edecek şekilde $D^i = X_{conv}^i$ kabul edilir. O halde A kümesinin konveks örteni

$$C(A) = \bigcup_{i=1}^4 D^i \quad (6.5)$$

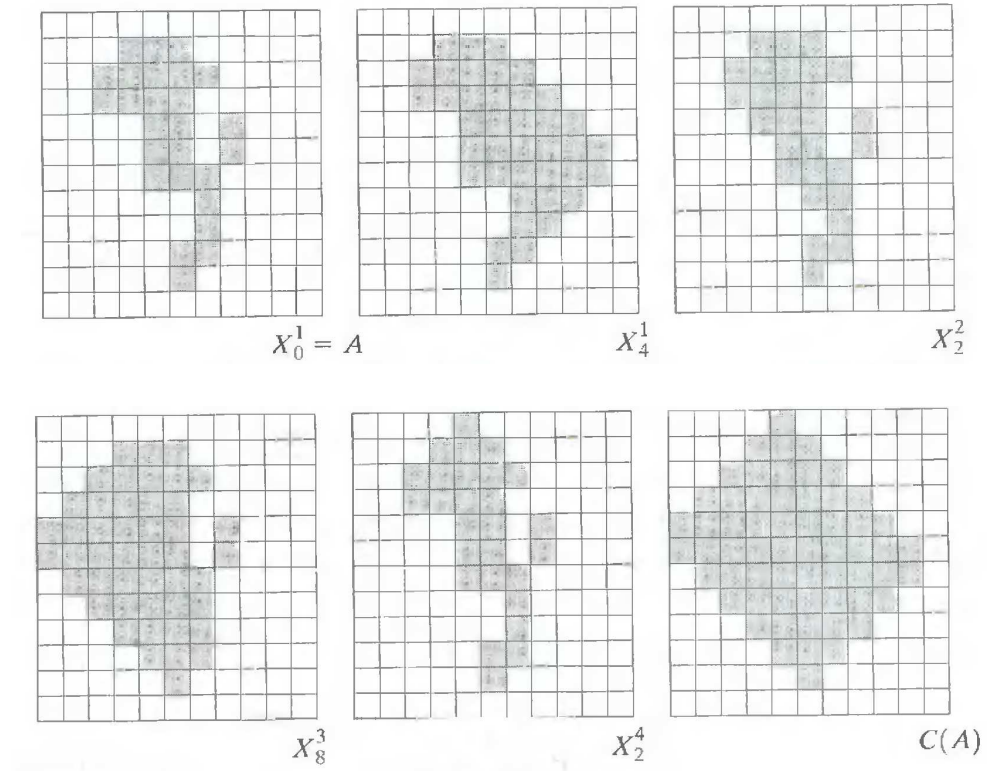
şeklindedir.

Diğer bir deyişle A kümesine iteratif bir şekilde B^1 ile vur-veya-ıskala dönüşümü uygulanır. Daha fazla değişiklik elde edilmediğinde A ile birleşimi alınarak buna D^1 denir. Daha sonra yöntem B^2 ile tekrarlanarak yine herhangi bir değişiklik olmayıncaya kadar tekrar A'ya uygulanır ve bu şekilde devam edilir. Elde edilen dört D'nin birleşimi A kümesinin konveks örtenini oluşturur.

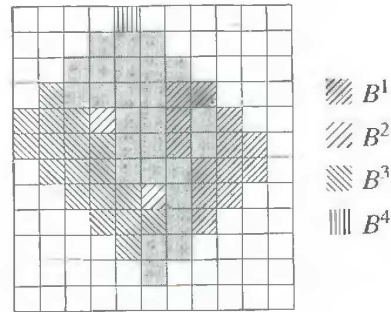
Şekil 6.5 Denklem (6.4) ve (6.5)'de verilmiş olan yöntemleri ifade etmektedir. Şekil 6.4 konveks örteni elde etmek için kullanılan yapısal elemanları göstermektedir. Her elemanın orijini merkezidir. x ler göz ardı edilecek durumlar için kullanılmıştır. Yani eğer A kümesinin elemanın yerleştirildiği yerdeki 3'e 3'lük bölgesi elemanın deseni ile eşleşiyorsa eleman bir eşleşme bulmuş kabul edilir. Belirli bir yapı için bir desen eşleşmesinin olması için A kümesi içindeki 3'e 3'lük bölgenin merkezi 0 ve gölgeli yapı elemanlarının altındaki üç piksel 1 olmalıdır. 3'e 3'lük bölgedeki diğer piksellerin değerleri önem teşkil etmez. Dikkat edilmesi gereken diğer bir nokta ise B^i 'nin B^{i-1} 'in saat yönünde 90° döndürülmüşü olduğudur.



Şekil 6.4 Yapıyı oluşturacak elemanlar



Şekil 6.5 Elemanların uygulanması ile A kümesinin konveks örtenini elde etme



Şekil 6.6 Her elemanın etkisi ile konveks örten

6.5 İnceltme

Bir A kümesinin bir B yapısal elemanı ile inceltilmesi $A \otimes B$ şeklinde gösterilir ve vur-veya-ıskala dönüşümü cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} A \otimes B &= A - (A \ominus B) \\ &= A \cap (A \ominus B)^c \end{aligned} \quad (6.6)$$

Yine sadece yapısal elemanlar ile desen eşleşmesini aradığımızdan vur-veya-ıskala

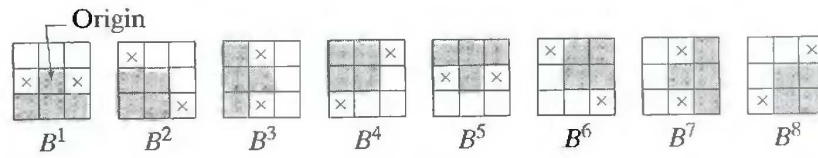
dönüşümünde herhangi bir arkaplan işlemine gerek duymuyoruz. A kümesini simetrik bir şekilde inceltmek için gerekli tanımlardan biri yapısal elemanların bir dizisidir ve B^i , B^{i-1} 'in döndürülmüş hali olmak üzere şu şekilde gösterilir:

$$\{B\} = \{B^1, B^2, B^3, \dots, B^n\} \quad (6.7)$$

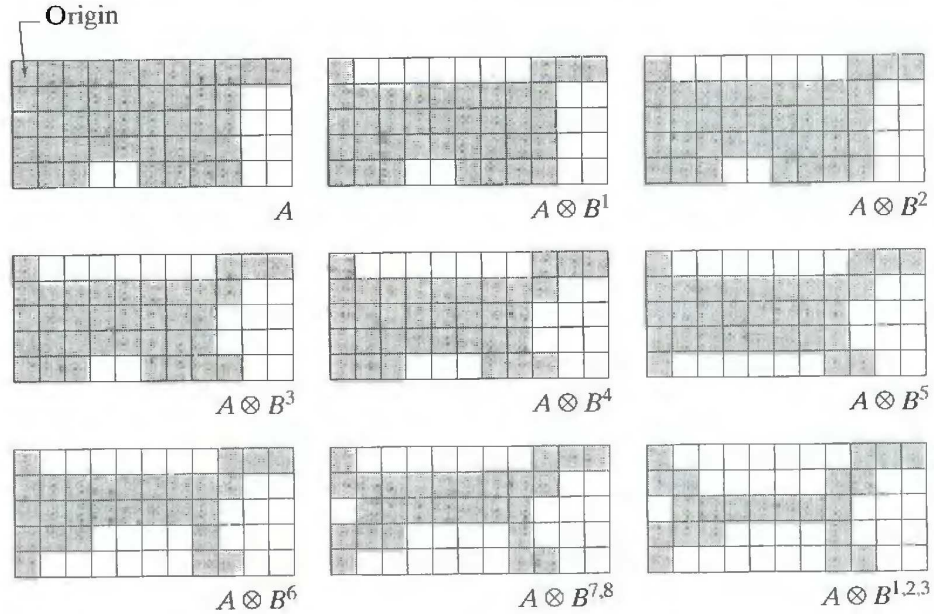
Bu tanımları kullanarak yapısal elemanların bir dizisi ile inceltme aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$A \otimes \{B\} = (((...(A \otimes B^1) \otimes B^2)...) \otimes B^n) \quad (6.8)$$

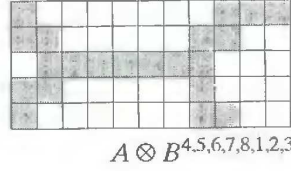
Yöntem uygulanırken önce A B^1 ile bir kere inceltilir ve sonuç B^2 ile bir kere inceltilir ve A B^n ile bir kere inceltilinceye kadar bu şekilde devam edilir. Yöntem daha fazla değişiklik elde edilmeyinceye kadar devam edilir. Her bir inceltme Denklem (6.6) kullanılarak uygulanır.



Şekil 6.7 Yapıya eklenecek elemanlar dizisi



Şekil 6.8 A kümesi sırası ile her 8 eleman ile ve tekrar 1. eleman ile inceltilmesi



Şekil 6.9 Yakınsamadan sonra elde edilen sonuç

6.6 Kalınlaştırma

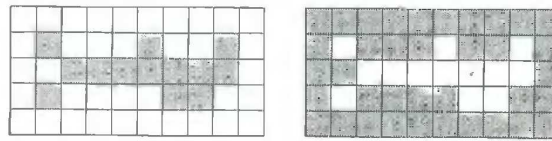
Kalınlaştırma inceltmenin morfolojik dualidir ve B kalınlaştırma için uygun bir yapısal eleman olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$A \otimes B = A \cap (A \circledast B). \quad (6.9)$$

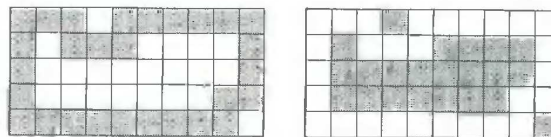
İnceltmede olduğu gibi kalınlaştırma da bir dizi işlemi olarak tanımlanabilir:

$$A \otimes \{B\} = ((\dots ((A \otimes B^1) \otimes B^2) \dots) \otimes B^n). \quad (6.10)$$

Kalınlaştırmada kullanılan yapıyı oluşturan elemanlar inceltme için kullanılan Şekil 6.7’de gösterilen elemanlar ile aynıdır fakat 1 ve 0’lar yer değiştirmiştir. Buna rağmen kalınlaştırma için ayrı bir algoritma uygulamada çok nadiren kullanılır. Bunun yerine kümenin arkaplanı inceltilir ve tümleyeni alınarak sonuç elde edilir. Diğer bir deyişle bir A kümesini kalınlaştırmak için $C = A^c$ oluşturularak inceltilir ve daha sonra C^c hesaplanır. Şekil 6.10 ve 6.11 bu yöntemi göstermektedir.



Şekil 6.10 A kümesi ve tümleyeni



Şekil 6.11 A’nın tümleyeninin inceltilmesi ve bu kümenin tümleyeni alınarak bulunan kalınlaştırılmış küme



Şekil 6.12 Bağımsız noktaya sahip olmayan elde edilen sonuç

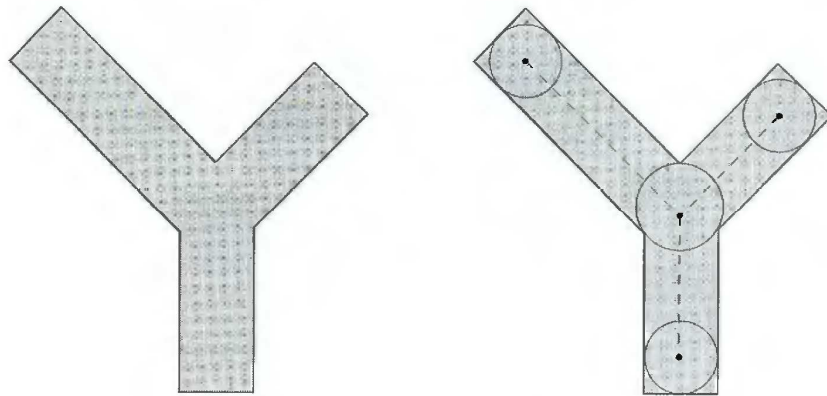
A kümesinin doğasından dolayı kalınlaştırma yöntemi bağımsız noktalara yol açabilir. Bu nedenle kalınlaştırma yöntemini takiben bağımsız noktaları ortadan kaldıracak bir adım uygulanır. Şekilden de görüldüğü gibi inceltilmiş arka plan kalınlaştırma yöntemi için sınırları belirler. Bu yararlı özellik kalınlaştırmanın direkt uyarlanması mevcut değildir ve kalınlaştırmanın elde edilmesinde arka plan inceltilmesinin kullanılmasının en önemli nedenlerinden biridir.

6.7 İskeletler

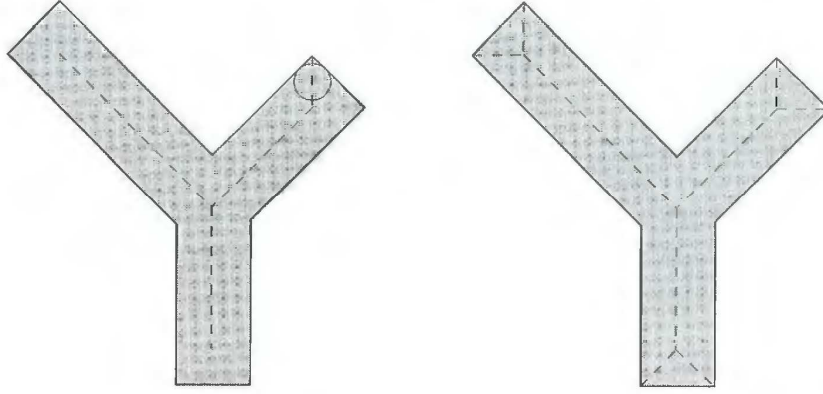
Şekilden yola çıkarak bir A kümesinin $S(A)$ iskeleti kavramını aşağıdaki şekilde betimlemek mümkündür:

$z \in S(A)$ 'nın bir noktası ve $(D)_z$ z noktasında merkezi olan A'daki en büyük disk ise $(D)_z$ 'yi içeren ve A'da olan daha büyük bir disk bulmak mümkün değildir. (z merkezli olmasına gerek yoktur)

$(D)_z$ diski A 'nın sınırına iki veya daha fazla yerden dokunur.



Şekil 6.13 A kümesi ve merkezleri A'nın iskeletinde bulunan farklı maksimum diskler



Şekil 6.14 Farklı bir maksimum disk ve tüm iskelet

A 'nın iskeleti kavramı aşınma ve açılma terimleri ile açıklanabilir. B yapı elemanı olmak üzere ve $(A \ominus kB)$ k kere

$$(A \ominus kB) = (\dots (A \ominus B) \ominus B) \ominus \dots) \ominus B \quad (6.11)$$

olmak üzere ve K

$$K = \max \{ k \mid (A \ominus kB) \neq \emptyset \} \quad (6.12)$$

A boş kümeye ulaşmadan önceki son iteratif adım kabul edilerek A'nın k başarılı aşınmasını göstermek üzere

$$S_k(A) = (A \ominus kB) - (A \ominus kB) \circ B \quad (6.13)$$

ile

$$S(A) = \bigcup_{k=0}^K S_k(A) \quad (6.14)$$

şeklinde gösterilebilir.

A'nın iskeleti tanımındaki denklemlerden görüldüğü gibi $S(A)$ *iskelet altkümeleri* olan $S_k(A)$ 'ların birleşimi olarak da elde edilebilir. Ayrıca gösterilebilir ki A bu altkümelerden

$$A = \bigcup_{k=0}^K (S_k(A) \oplus kB) \quad (6.15)$$

denklemini kullanılarak yeniden oluşturulabilir. Burada $(S_k(A) \oplus kB)$

$$(S_k(A) \oplus kB) = ((...(S_k(A) \oplus B) \oplus B) \oplus ...) \oplus B \quad (6.16)$$

olacak şekilde $S_k(A)$ 'nın k başarılı genişlemesidir.

Şekil 6.15'de ilk sütun orijinal kümeyi ve B yapısal elemanı ile iki aşınmayı göstermektedir. Dikkat edilmesi gerekir ki A 'nın bir veya daha fazla aşınması ile boş küme oluşacaktır. Bu nedenler $K=2$ alınmıştır. İkinci sütun ilk sütundaki kümelerin B ile açılmasını ifade eder. Üçüncü sütun ilk ve ikinci sütunlar arasındaki küme farklarını işaret eder. Dördüncü sütun iki kısmi iskelet ve sonucu içermektedir. Sonuç iskeleti gereğinden daha kalın olması ile birlikte aynı zamanda daha da önemlisi bağımlı değildir. Bu sonuç beklenmeyen bir şey değildir çünkü morfolojik iskelet yönteminin önceki kısımları bağımlılığı garantilemez. Morfoloji verilen kümenin aşınma ve açılmaları cinsinden bir formülasyonunu ortaya koyar. Buna rağmen iskelet maksimal olarak ince, bağımlı ve minimal olarak aşınmış olması gerektiğinden sezgisel algoritmalara ihtiyaç duyulur.

k	$A \ominus kB$	$(A \ominus kB) \circ B$	$S_k(A)$	$\bigcup_{k=0}^K S_k(A)$	$S_k(A) \oplus kB$	$\bigcup_{k=0}^K S_k(A) \oplus kB$
0						
1						
2						

Şekil 6.15 İskelet yönteminin uygulansı

6.8 Budama

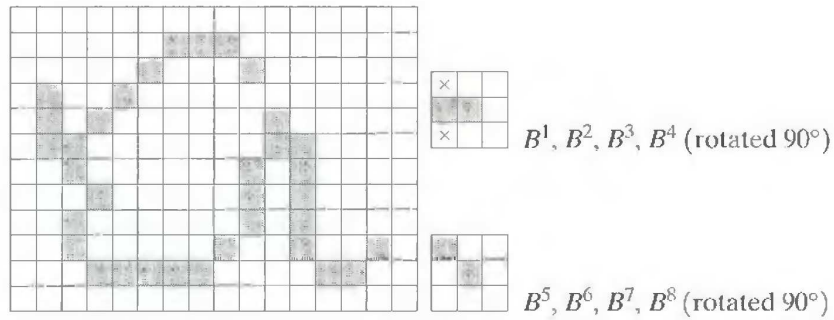
Budama yöntemleri inceltme ve iskeletleştirme algoritmalarının gerekli tümleyenleridir çünkü bu yöntemler yöntem sonrası temizlenme gerektiren parazitsel bileşenler içerirler.

Birçok yöntem içeren bir örneği inceleyelim.

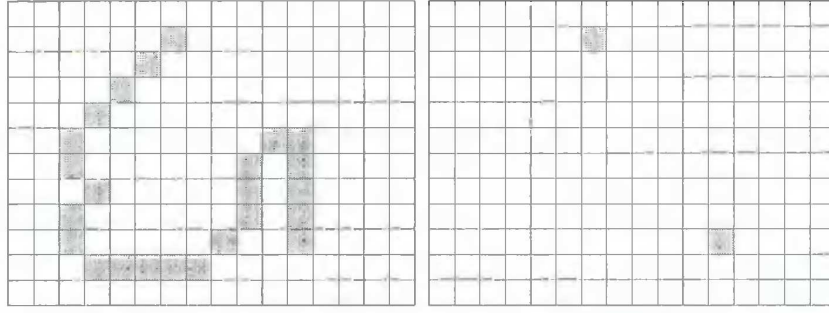
El yazısı karakterlerin otomatik tanınmasında bilinen bir yaklaşım her bir karakterin iskeletinin şeklini incelemektir. Bu iskeletler çoğu zaman “mahmuzlar” (parazitsel bileşenler) ile karakterize olurlar. Mahmuzlar aşınma esnasında karakterleri oluşturan vuruşlarda tek düzelik olmamasından dolayı ortaya çıkarlar. Varsayalım ki parazitsel bileşenin uzunluğu belirli bir sayıdaki pikseli geçmiyor olsun.

Şekil 6.16 el yazısı bir “a”nın iskeletini gösterir. Karakterin sol üstündeki kısımda yer alan parazitsel bileşeni çıkarabiliriz. Parazitsel bir kolu bastırmak için bitiş noktası başarılı bir şekilde ortadan kaldırılır. Bu, tabii ki, diğer kolları da karakterel olarak kısaltır (veya elimine eder) fakat diğer yapısal bilgilerin ışığında bu örnekteki varsayıma göre üç veya daha az piksele sahip tüm kolların elimine edilmesi gerekmektedir. Sadece bitiş noktalarını bulmaya yönelik bir dizi yapısal elemana sahip bir A veri kümesinin inceltilmesi ile istenilen sonuç elde edilir. Bu ise, $\{B\}$ Şekil 6.13 de gösterilen yapısal elamanlar dizisini göstermek üzere

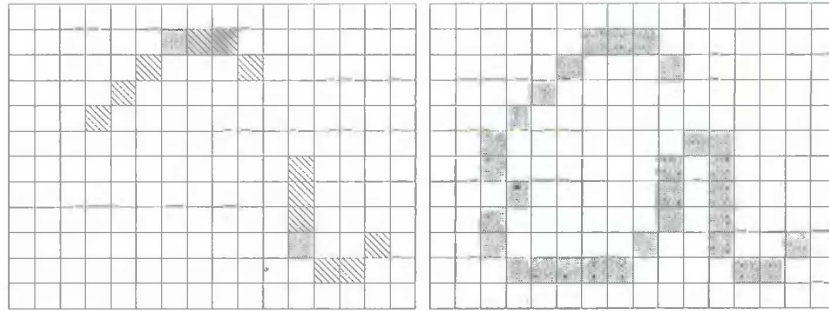
$$X_1 = A \otimes \{B\} \text{ 'dır.} \quad (6.17)$$



Şekil 6.16 Orijinal imge ve bitiş noktalarını silmek için kullanılan yapısal elemanlar



Şekil 6.17 Üç kere inceltirme ve bitiş noktaları



Şekil 6.18 Bitiş noktalarının genişlemesi ve budanmış imge

Yapıyı oluşturacak elemanların dizisi her biri 90° döndürülen toplam sekiz elemanlı iki farklı yapıdan oluşur. Şekildeki x o noktadaki pikselin 0 veya 1 değerlerine sahip olmasının göz ardı edilebileceği durumu gösterir. Morfolojideki sayısız sonuç Şekil 6.17 deki gibi fakat tüm ilk sütun boyunca göz ardı edilebilecek durumlara sahip tek yapısal elemana dayanır. Bu doğru değildir. Örneğin bu eleman sekizinci satır dördüncü sütundaki noktayı bir bitiş noktası olarak algılayabilir ve elimine edip vuruştaki bağımlılığı koparabilir.

Bu noktada bu problemi çözmek için daha basit yollar olduğu düşünülebilir. Örneğin silinen tüm noktaların listesi tutularak denklemler uygulandıktan sonra kalan tüm bitiş noktalarına uygun noktalar bağlanabilir. Bu formüllerin avantajı basit morfolojik yapılar kullanılarak tüm problemin çözülmesidir. Uygulamada ise yeni bir algoritma yazılmasına gerek kalmadan gerekli morfolojik fonksiyonlar bir dizi operasyon halinde birleştirilebilir.

7. GRİ ÖLÇEKLİ İMGELERE GİRİŞ

Yayma, aşındırma, açma ve kapama gibi temel işlemleri gri ölçekli imgelere genişletmeye çalışalım. Daha sonra bu işlemleri birçok basit gri ölçekli morfolojik algoritma geliştirmek için kullanılabilir. Özel olarak morfolojik gradyen işlemi vasıtası ile kenar genişletme ve doku içeriğine dayanan bölge bölümlleme algoritmaları geliştirilebilir. Hatta ön ve son işleme adımlarında sıkça kullanılan yumuşatma ve keskinleştirme algoritmalarından bahsedilecektir.

Takip eden incelemelerde $f(x,y)$ nin giriş elemanı, $b(x,y)$ nin yapı elemanı ve aynı zamanda alt imge fonksiyonu olduğu $f(x,y)$ ve $b(x,y)$ formunda dijital imge fonksiyonları ile ilgilenilecektir. Kabul bu fonksiyonların ayrık olduğudur. Eğer Z reel sayılar kümesini belirtirse; kabul (x,y) nin $Z \times Z$ den tam sayılar olduğu ve f ve b nin her bir (x,y) koordinat çiftine bir gri ölçek değeri (reel sayılar kümesinden bir reel sayı, R) atadığıdır. Eğer gri ölçekleri de tam sayı ise Z , R 'nin yerine geçer.

7.1 Yayma

F 'in b 'ye göre gri ölçek yayması $f \oplus b$ şeklinde gösterilip aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(f \oplus b)(s, t) = \max \{ f(s - x, t - y) + b(x, y) \mid (s - x), (t - y) \in D_f ; (x, y) \in D_b \} \quad (7.1)$$

Burada D_f ve D_b , sırasıyla f ve b 'nin tanım bölgeleridir. f ve b 'nin ikili morfolojide olduğu gibi kümeler olmayıp, fonksiyonlar olduğunu unutmamak gerekir.

$(s-x)$ ve $(t-y)$ koşullarının f tanım bölgesinde, x ve y 'nin b tanım bölgesinde olmaları koşulu, yaymanın ikili tanımlamasında iki kümenin en az bir eleman ile örtüşmesi koşuluna paraleldir.

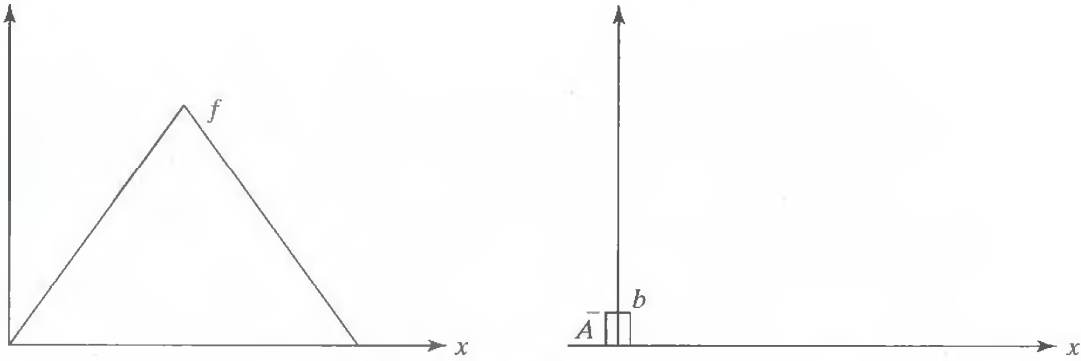
Eşitlik (7.1) in gösterim ve mekanizması 1 boyutlu fonksiyonlar vasıtası ile örneklenebilir. Tek değişkenli fonksiyonlar için eşitlik (7.1) ifadeyi şuna indirger;

$$(f \oplus b)(s) = \max \{ f(s - x) + b(x) \mid (s - x) \in D_f \text{ ve } x \in D_b \}. \quad (7.2)$$

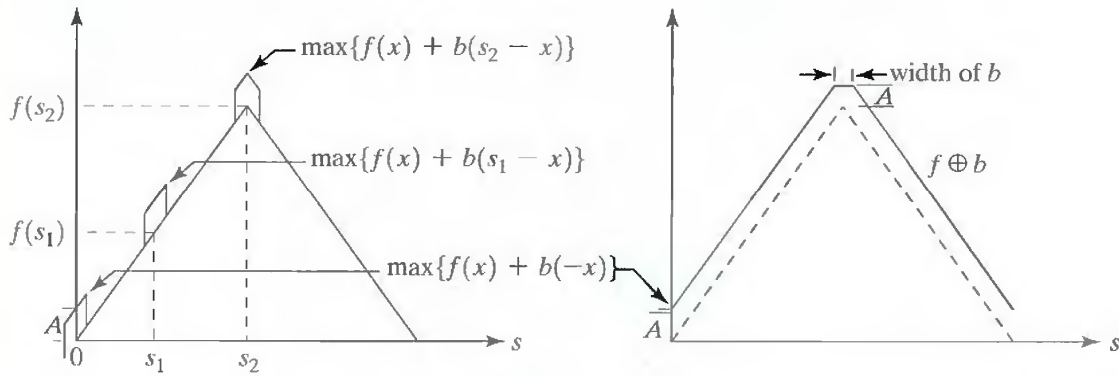
Daha önce katlanma konusunda değinildiği gibi $f(-x)$ basitçe $f(x)$ 'in x ekseninin orijinine bağlı yansımasıdır. Katlanmada olduğu gibi $f(s-x)$ fonksiyonu pozitif s değerleri için sağa, negatif s değerleri için sola kayar. $(s-x)$ değerlerinin f tanım bölgesinde, x değerinin b tanım bölgesinde olması gereksinimi f ve b nin örtüşmesi anlamına gelir. Bir önceki paragrafta belirtildiği gibi bu koşullar yaymanın ikili gereksinim tanımına yani iki kümenin en az bir eleman ile örtüşmesine paraleldirler. Sonuç olarak ikili durumdaki b yapı elemanı yerine f

kaydırılır. b 'nin f yerine dönüşüme uğratılabilmesi için (7.1) eşitliği yazılabilir. Ancak, D_b etki alanı D_f etki alanından küçükse (ki pratikte bu durumla çok karşılaşılmaktadır) (7.1) eşitliğinde kullanılan form hem endeksleme açısından daha kolay olup hem de aynı sonucu arşivlemektedir. Kavramsal olarak f 'in b tarafından kaydırılması, b 'nin f tarafından kaydırılmasından farklı değildir. Gerçekte her ne kadar bu eşitliğin uygulanması daha kolay olsa da eğer f 'i b kaydırır ise gri ölçekli yaymanın asıl işleyişinin görselleştirilmesi daha kolaydır.

Şekil 7.1 de bir örnek gösterilmiştir. Dikkat edilir ise yapısal elemanın her pozisyonu bu noktadaki yaymanın değeri f 'in maksimum toplamıdır.



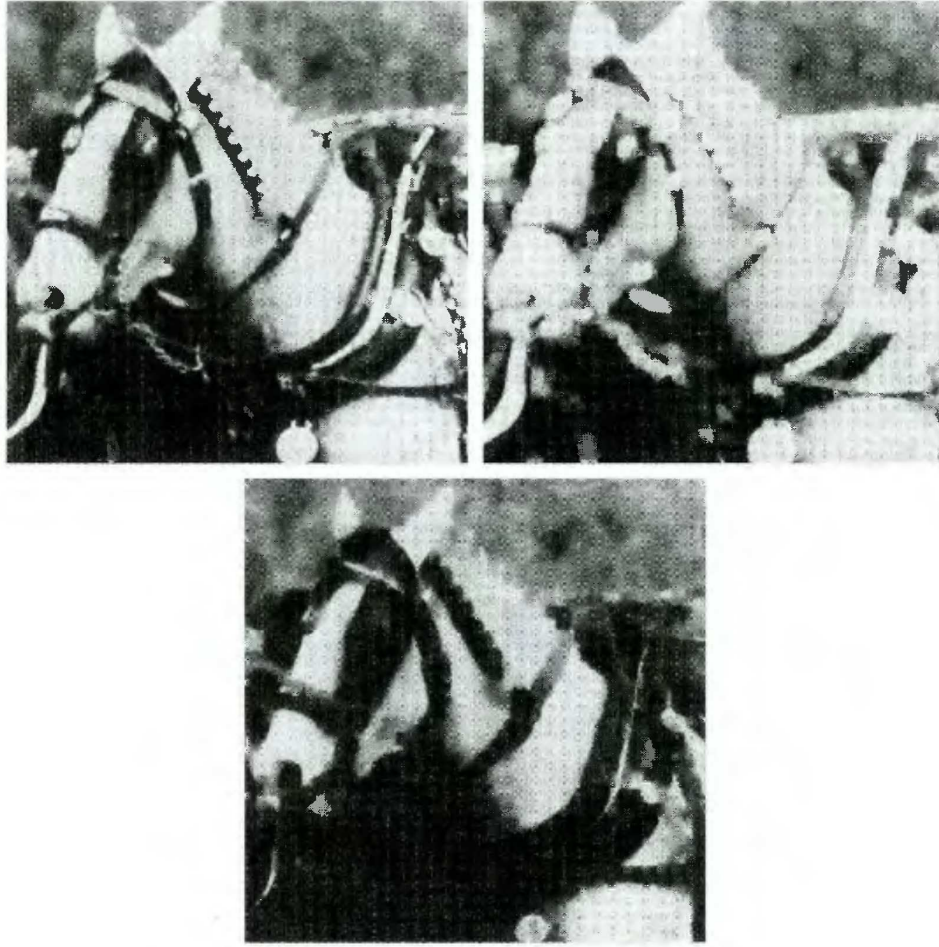
Şekil 7.1 basit bir fonksiyon ve A yüksekliğinin yapısal elemanı



Şekil 7.2 Genişleme sonuçları

7.2 Aşınma

Gri-ölçekli aşınma $f \ominus b$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır



Şekil 7.4 Orijinal resim, genişleme sonucu ve aşınma sonucu

Bu efektler Şekil 7.4'te de görülmektedir. İmge orijinalinden hem daha parlaktır hem de burun delikleri ve yular gibi karanlık kısımlar azaltılmıştır. Alttaki şekil orijinal imgenin aşınmış halini gösterir. Aşınmış imge daha karanlıktır ve küçük, parlak kısımlar azaltılmıştır.

7.3 Açma ve Kapama

Gri ölçekli imgelerin açma ve kapama tanımı ikilideki ile aynı şekildedir. F imgesinin bir altimge b ile (yapısal eleman) açılması $f \circ b$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$f \circ b = (f \ominus b) \oplus b. \quad (7.5)$$

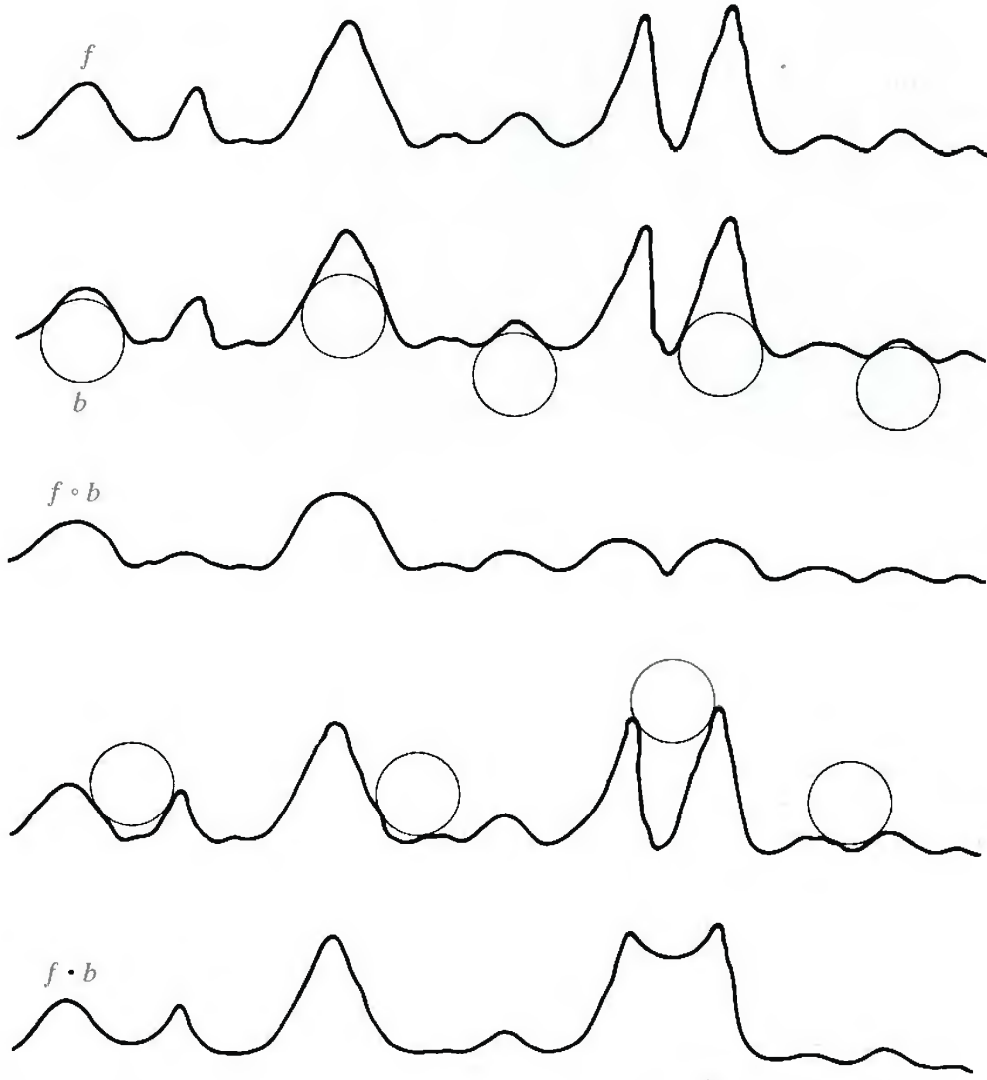
İkili durumda olduğu gibi açma f 'in b ile aşınmasından sonra sonucun b ile genişlemesidir. Benzer şekilde kapama $f \bullet b$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$f \bullet b = (f \oplus b) \ominus b. \quad (7.6)$$

Gri ölçekli imgelerin açma ve kapamaları birleşme ve yansımaya göre birbirinin dualidir. Yani

$$(f \bullet b)^c = f^c \circ b' \quad (7.7)$$

İmgelerin açma ve kapamaları basit bir geometrik yoruma sahiptir. Bir $f(x,y)$ imge fonksiyonunu 3-D perspektifinden baktığımızı varsayalım. Burada x ve y ordinatları alışıldık şekilde ve üçüncü eksen de gri derece değerleri olsun. Bu durumda imge herhangi (x,y) noktasındaki değeri o koordinatlardaki f 'in değeri olacak şekilde bir ayırık yüzey şeklindedir. Varsayalım ki f 'i bir b küresel elemanı ile açıyor olalım. O halde açılan f ve b 'nin hareketleri topu yüzeyin alt yüzüne doğru bastırıp aynı anda da yuvarlamak ve tüm alt yüzü gezmek şeklinde geometrik olarak yorumlanabilir. Açma ise top gezmekte iken kürenin herhangi bir yerinde ulaşılan en yüksek noktalar yüzeyi olur.



Şekil 7.5 Bir gri ölçekli doğru ile yuvarlanan top

Gri ölçekli açma işleme aşağıdaki özellikleri sağlar:

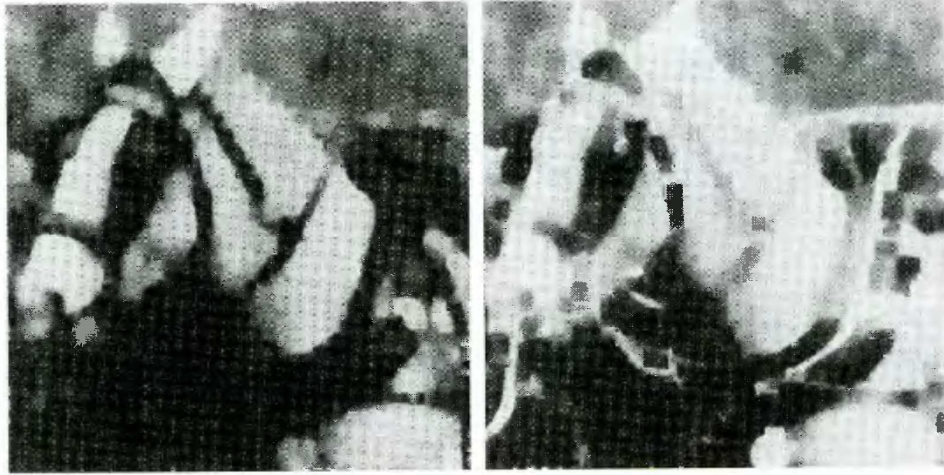
- $(f \circ b) \downarrow f$
- Eğer $f_1 \downarrow f_2$ ise o halde $(f_1 \circ b) \downarrow (f_2 \circ b)$
- $(f \circ b) \circ b = f \circ b$

Benzer şekilde gri ölçekli kapama işleme aşağıdaki özellikleri sağlar:

- $f \downarrow (f \bullet b)$
- Eğer $f_1 \downarrow f_2$ ise o halde $(f_1 \bullet b) \downarrow (f_2 \bullet b)$
- $(f \bullet b) \bullet b = f \bullet b$

Bu özelliklerin kullanımları ikili durumdakine benzer şekildedir.

Şekil 7.6 Şekil 7.4'teki imgenin aynı yapısal eleman kullanılarak açılmasının sonucunu gösterir. Dikkat edilmesi gerekir ki azaltılmış küçük, parlak ayrıntıların yanında daha karanlık gri derecelerinde bir etki gözlenmemektedir. Şekilde aynı zamanda imgenin kapanmasının sonucu da görülebilir. Bu durumda da küçük, karanlık ayrıntılar azaltılmış ve parlak özellikler kısmen az etki görmüştür.



Şekil 7.6 Açma ve Kapama

KAYNAKLAR

Ballard and Brown (1982) Computer Vision, Prentice-Hall, Chap. 8.

Baxes, G. A. (1994). Digital Image Processing: Principles and Applications, John Wiley & Sons, New York.

Davies, E. (1990) Machine Vision: Theory, Algorithms and Practicalities, Academic Press, pp 149 - 161.

Dougherty E. R. (1992) An Introduction to Morphological Image Processing, SPIE Press,

Giardina and Dougherty (1988) Morphological methods in image and signal processing, Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, USA

Gonzalez and Woods (1992) Digital Image Processing, Addison-Wesley Publishing Company

Haralick and Shapiro (1992) Computer and Robot Vision, Vol. 1, Chap. 5, Addison-Wesley Publishing Company.

Jain, A. (1986) Fundamentals of Digital Image Processing, Prentice-Hall, p 384.

Serra J. (1982) Image analysis and Mathematical Morphology

Serra J. (1988) Image analysis and Mathematical Morphology, Volume 2

Vernon, D. (1991) Machine Vision, Prentice-Hall, pp 63 - 66, 76 – 78

.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 07.07.1981

Doğum yeri Amasya

Ortaöğrenim 1992-1996 Bursa Nilüfer Koleji

Lise 1996-1999 Bursa AOS Fen Lisesi

Lisans 1999-2003 Yıldız Teknik Üniversitesi Mühendislik Fak.
Matematik Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 2005- Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Müh. Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum(lar)

2001-2002 Mozaik Bilgi Sistemleri A.Ş.

2003-Devam ediyor Tekinoks Bilişim Sistemleri ve Dan. Hiz. Ltd. Şti.

2005-Devam ediyor Kalitest Bilişim Sistemleri ve Dan. Hiz. Ltd. Şti.

2006-Devam ediyor Pazarmetre İnternet Teknolojileri A.Ş.