

**T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN MATRİS YARDIMI İLE  
ÇÖZÜMLERİ**

**KEMAL GÖKHAN NALBANT**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI  
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN  
DOÇ. DR. FÜGEN TORUNBALCI AYDIN**

**İSTANBUL, 2012**

T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN MATRİS YARDIMI İLE  
ÇÖZÜMLERİ**

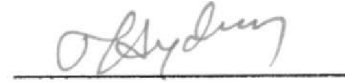
Kemal Gökhan NALBANT tarafından hazırlanan tez çalışması 22.06.2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Tez Danışmanı**

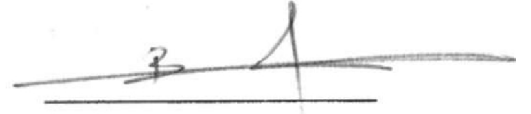
Doç. Dr. Fügen TORUNBALCI AYDIN  
Yıldız Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri**

Doç. Dr. Fügen TORUNBALCI AYDIN  
Yıldız Teknik Üniversitesi



Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY  
Yıldız Teknik Üniversitesi



Yrd. Doç. Dr. Coşkun GÜLER  
Yıldız Teknik Üniversitesi



## ÖNSÖZ

---

“Lineer Diferansiyel Denklemlerinin Matris Yardımı ile Çözümleri” adlı çalışmam Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Ana Bilim Dalına Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmış olup konusu, lineer diferansiyel denklem sistemleri ve bu sistemlerin çözümleri ile ilgilidir. Çalışmamın tamamı dört bölümden oluşup, ilk bölümde çalışmamın amacından ve bulgulardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde, lineer diferansiyel denklem sistemlerini matrisler yardımı ile çözen metodlar için gerekli olan temel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemi, sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemi, değişken katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemi ve değişken katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemi ele alınmıştır ve bu sistemlerin matrisler kullanılarak çözümlerinin ne şekilde yapılacağı araştırılmıştır. Konuyu tamamlayıcı mahiyette çözümlü örnekler konulmuştur. Dördüncü bölüm ise sonuç ve öneriler bölümüdür.

Herkes için yararlı olacağına inandığım bu tez çalışmasının planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, yönlendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Doç. Dr. Fügen TORUNBALCI AYDIN’a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Manevi yönden de desteğini esirgemeyen sevgili aileme şükranlarımı sunarım. Öğrenim hayatımda bu ana gelmemde emeği olan tüm hocalarıma canı gönülden teşekkür ederim.

Haziran, 2012

Kemal Gökhan NALBANT

## İÇİNDEKİLER

Sayfa

|                                                                                            |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| SİMGE LİSTESİ.....                                                                         | vii  |
| ÖZET .....                                                                                 | viii |
| ABSTRACT .....                                                                             | x    |
| BÖLÜM 1                                                                                    |      |
| GİRİŞ .....                                                                                | 1    |
| 1.1    Literatür Özeti .....                                                               | 1    |
| 1.2    Tezin Amacı .....                                                                   | 3    |
| 1.3    Hipotez .....                                                                       | 4    |
| BÖLÜM 2                                                                                    |      |
| TEMEL BİLGİLER.....                                                                        | 6    |
| 2.1    Matrisler .....                                                                     | 7    |
| 2.1.1    Bir Matrisin Rankı.....                                                           | 7    |
| 2.1.2    Matrisin Tekillik Durumu .....                                                    | 7    |
| 2.1.3    Determinant.....                                                                  | 7    |
| 2.1.4    Bir Determinantın Minörleri ve Kofaktörleri .....                                 | 8    |
| 2.1.5    Elemanter Dönüşümler.....                                                         | 9    |
| 2.1.6    Elemanter Matrisler .....                                                         | 9    |
| 2.1.7    Denk Matrisler .....                                                              | 10   |
| 2.1.8    Matrisin Kanonik Şekle Dönüştürülmesi.....                                        | 11   |
| 2.1.9    Kanonik Şekle Dönüştürme Yöntemi .....                                            | 12   |
| 2.1.10    Normal Şekil .....                                                               | 13   |
| 2.2    Polinom Matrisler.....                                                              | 13   |
| 2.2.1    Denk Polinom Matrisleri ve Denk Polinom Matrisleri için Elemanter Dönüşümler..... | 14   |
| 2.2.2    Denk Polinom Matrislerin Kanonik Şekli (Smith Normal Formu) .....                 | 14   |
| 2.2.3    Elemanter Bölenler .....                                                          | 19   |
| 2.3    Bir Matrisin Minimum Polinomu.....                                                  | 20   |
| 2.3.1    Değişmez Çarpanlar .....                                                          | 20   |
| 2.3.2    Eş Matris .....                                                                   | 20   |

|         |                                            |    |
|---------|--------------------------------------------|----|
| 2.3.3   | Direkt Toplam .....                        | 21 |
| 2.3.4   | Monik Polinom.....                         | 21 |
| 2.3.5   | Minimum Polinom .....                      | 21 |
| 2.3.6   | Non-Deragatory Matrisler .....             | 23 |
| 2.3.7   | Benzerlik.....                             | 24 |
| 2.3.7.1 | Benzer Kare Matrisler.....                 | 24 |
| 2.3.7.2 | Köşegen Matris.....                        | 24 |
| 2.3.7.3 | Bir Matrisin Diyagonalizasyonu.....        | 24 |
| 2.4     | Üstel Matris.....                          | 27 |
| 2.4.1   | $e^{At}$ nin Hesaplanması .....            | 28 |
| 2.5     | Özdeğer ve Özvektör .....                  | 29 |
| 2.5.1   | Bir Matrisin Özdeğer ve Özvektörleri ..... | 30 |
| 2.5.2   | Vektörlerin Lineer Bağımsız Oluşu .....    | 33 |
| 2.6     | Kanonik Formlar .....                      | 35 |
| 2.6.1   | Rasyonel Kanonik Biçim .....               | 35 |
| 2.6.2   | İkinci Kanonik Form.....                   | 37 |
| 2.6.3   | Jakobson Kanonik Formu .....               | 38 |
| 2.6.4   | Klasik Kanonik Form .....                  | 40 |
| 2.6.5   | Rasyonel Kanonik Forma İndirgeme .....     | 41 |
| 2.7     | Lineer Sistem Türleri .....                | 44 |
| 2.7.1   | Normal Form Lineer Sistemler.....          | 45 |
| 2.7.2   | Sistemler İçin Temel Varlık Teoremi .....  | 46 |

### BÖLÜM 3

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ .....                     | 48  |
| 3.1 Sabit Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklem Sistemi .....      | 48  |
| 3.1.1 Sabit Katsayılı Lineer Sistemlerde Operatör Metodu .....             | 49  |
| 3.1.1.1 Eleminasyon (Yok Etme) Metodu ile Çözüm .....                      | 50  |
| 3.1.1.2 Determinant (Cramer) Yöntemi ile Çözüm.....                        | 52  |
| 3.1.2 Özvektörler ile Çözüm.....                                           | 54  |
| 3.1.2.1 Özdeğerler Reel ve Birbirinden Farklı ise .....                    | 54  |
| 3.1.2.2 Özdeğerler Kompleks ise .....                                      | 57  |
| 3.1.2.3 Özdeğerler Katlı ise.....                                          | 58  |
| 3.1.3 Smith Normal Form ile Çözüm.....                                     | 72  |
| 3.1.4 Rasyonel Kanonik Form ile Çözüm.....                                 | 75  |
| 3.1.5 Üçgen Matris ile Çözüm .....                                         | 78  |
| 3.1.6 Üstel Matris ile Çözüm .....                                         | 82  |
| 3.2 Sabit Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemi .. | 88  |
| 3.2.1 Eleminasyon (Yok Etme) Metodu ile Çözüm.....                         | 89  |
| 3.2.2 Determinant (Cramer) Yöntemi ile Çözüm .....                         | 90  |
| 3.2.3 Köşegenleştirme Yöntemi ile Çözüm .....                              | 95  |
| 3.2.4 Parametrelerin Değişimi Yöntemi ile Çözüm .....                      | 99  |
| 3.2.5 Smith Normal Form ile Çözüm.....                                     | 101 |
| 3.2.6 Rasyonel Kanonik Form ile Çözüm.....                                 | 105 |
| 3.2.7 Üçgen Matris Yöntemi ile Çözüm .....                                 | 108 |
| 3.2.8 Üstel Matris Yöntemi ile Çözüm .....                                 | 111 |

|                        |                                                                                                                       |     |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.3                    | Değişken Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklem Sistemi.....                                                   | 113 |
| 3.3.1                  | Peano-Baker Yöntemi ile Çözüm .....                                                                                   | 114 |
| 3.3.2                  | Değişken Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklem Sisteminin Çözümü .....                                        | 119 |
| 3.3.3                  | Değişken Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklem Sisteminin Çözümünün Liouville Teoremi ile Gerçeklenmesi ..... | 127 |
| 3.4                    | Değişken Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemi .....                                          | 130 |
| 3.4.1                  | Değişken Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Diferansiyel Denklem Sisteminin Çözümü .....                                | 131 |
| BÖLÜM 4                |                                                                                                                       |     |
| SONUÇ VE ÖNERİLER..... |                                                                                                                       | 135 |
| KAYNAKLAR .....        |                                                                                                                       | 136 |
| ÖZGEÇMİŞ .....         |                                                                                                                       | 138 |

## SİMGE LİSTESİ

---

|           |                        |
|-----------|------------------------|
| $\lambda$ | Bir matrisin özdeğeri  |
| $U$       | Bir matrisin özvektörü |

## LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN MATRİS YARDIMI İLE ÇÖZÜMLERİ

Kemal Gökhan NALBANT

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Fügen TORUNBALCI AYDIN

Lineer diferansiyel denklem sistemlerinin çeşitli çözüm yolları bilinmektedir. Bu tez çalışmasında, bu metodlar dışında, lineer diferansiyel denklem sistemleri matrisler yardımı ile farklı yöntemlerle çözülmüştür.

Bu çalışmada matris ile ilgili kısım, bir program dahilinde lineer diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerinde kullanılmak üzere ele alınmıştır ve bu mertebede derinleştirilmiştir. Matris ile ilgili kısımda, elemanter dönüşümler, elemanter matrisler, denk matrisler, matrisi kanonik şekle dönüştürme yöntemi, polinom matrisler, denk polinom matrisler ve denk polinom matrisler için elemanter dönüşümler, denk polinom matrislerin kanonik şekli (smith normal form), üstel matris, bir matrisin özdeğer ve özvektörleri, kanonik formlar gibi konular üzerinde durulmuştur.

Sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemleri eliminasyon metodu, determinant (cramer) metodu, özvektörler yöntemi, smith normal form, rasyonel kanonik form, üçgen matris yöntemi ve üstel matris yöntemi ile çözülmüştür. Sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemleri eliminasyon metodu, determinant (cramer) metodu, köşegenleştirme yöntemi, parametrelerin değişimi yöntemi, smith normal form, rasyonel kanonik form, üçgen matris yöntemi ve üstel matris yöntemi ile çözülmüştür. Değişken katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemleri ve değişken katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemleri de matrisler yardımı ile çözülmüştür. Ayrıca değişken

katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemleri Peano-Baker metodu ile de çözülmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** Sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemleri, sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemleri, değişken katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemleri, değişken katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemleri, matrisler.

**SOLUTIONS OF SYSTEMS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH  
MATRIX**

Kemal Gökhan NALBANT

Department of Mathematics Engineering

MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Fügen TORUNBALCI AYDIN

A variety of solutions to systems of linear differential equations are known. In this study, except for these methods, systems of linear differential equations are solved in different ways with the help of matrices.

In this study, section of the matrix, according to a program is considered to be used in solutions of systems of linear differential equations and is deepened at this state. In the section of the matrix, issues such as elementary transformations, elementary matrices, equivalent matrices, the canonical way of transforming the matrix, polynomial matrices, equivalent polynomial matrices, elementary transformations for equivalent polynomial matrices, the canonical form of equivalent polynomial matrices (Smith Normal Form), exponential matrix, eigenvalues and eigenvectors of a matrix, canonical forms are focused.

Systems of homogeneous linear differential equations with constant coefficients are solved by elimination method, determinant (cramer) method, eigenvectors method, smith normal form, rational canonical form, triangular matrix method and matrix exponential method. Systems of non-homogeneous linear differential equations with constant coefficients are solved by elimination method, determinant (cramer) method, diagonalization method, variation of parameters method, smith normal form, rational canonical form, triangular matrix method, matrix exponential method. Systems of

homogeneous linear differential equations with variable coefficients and systems of non-homogeneous linear differential equations with variable coefficients are solved with the help of the matrices. In addition, systems of homogeneous linear differential equations with variable coefficients are solved by Peano-Baker method.

**Key words:** Systems of homogeneous linear differential equations with constant coefficients, systems of non-homogeneous linear differential equations with constant coefficients, systems of homogeneous linear differential equations with variable coefficients, systems of non-homogeneous linear differential equations with variable coefficients, matrices.

#### 1.1 Literatür Özeti

Bu tez çalışmasında sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemi, sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemi, değişken katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemi, değişken katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemi ve bu sistemlerin matrisler yardımı ile çözüm yöntemleri araştırılmıştır.

Ayres vd. [1]'de çok kapsamlı bir şekilde matrisler üzerinde durmuştur. Ayres vd. [1]'de kanonik formlar, smith normal formu, özdeğer ve özvektör konularını ayrıntılı bir şekilde ele alıp sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemini özvektörler yöntemi, smith normal form ve rasyonel kanonik form ile, sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemini smith normal form ve rasyonel kanonik form ile çözmüştür. Lineer diferansiyel denklem sistemlerini matrisler kullanılarak çözümlerini yapan Taşdizen [2]'de sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemini, sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemini, değişken katsayılı lineer homojen diferansiyel denklem sistemini, değişken katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemini incelemiştir. Taşdizen [2]'de sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemini özvektörler yöntemi, smith normal form, rasyonel kanonik form, üçgen matris yöntemi ve üstel matris yöntemi ile sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemini sabitlerin değişimi yöntemi, smith normal form, rasyonel kanonik form, üçgen matris yöntemi ve üstel matris yöntemi ile değişken katsayılı lineer homojen olan

diferansiyel denklem sistemini Peano-Baker metodu ile çözmüştür. Ayrıca Taşdizen [2]'de değişken katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sisteminin de çözümünü incelemiştir. Bronson [3]'de matrisler ve üstel matrisin nasıl hesaplanacağı hakkında bilgi vermiş ve sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem sistemlerini üstel matristen faydalanarak çözmüştür. Yıldız [4]'de sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemini, sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemini ve değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem sistemini incelemiştir ve matrislerden yararlanmıştır. Yıldız [4]'de sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemini özvektörler yöntemi ile, sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemini parametrelerin değişimi yöntemi ile çözmüştür.

Çağlıyan vd. [5]'de sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemini özvektörler yöntemi ile, sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemini parametrelerin değişimi yöntemi ile çözmüştür. Aydın vd. [6]'da sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemini ele alıp, özvektörler yöntemi ile çözmüştür. Gözükızıl [7]'de sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklem sistemini inceleyip, özvektörler yöntemi ile çözmüştür. Dernek vd. [8]'de sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem sistemlerini ve değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem sistemlerini çözmüştür. Dernek vd. [8]'de üçgen matris yönteminin kullanıldığı örnekler mevcuttur. Bayram [9]'da determinant yöntemini ve parametrelerin değişimi yöntemini kullanarak sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemini, özvektörler yöntemi ile sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemini çözmüştür. Bayram [9]'da üstel matris yöntemini ayrıntılı olarak inceleyip, üstel matrisin bulunması ile ilgili örnekler kullanmıştır.

Hamzaoglu [10]'da sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklem sistemini özvektörler yöntemi ile, sabit katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklem sistemini parametrelerin değişimi yöntemi ile çözmüştür. Faydalı olabilecek birçok örnek kullanmıştır. Edwards vd. [11]'de matrisler ve lineer sistemler konularını ele almıştır ve sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemini özvektörler yöntemi ile, sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemini parametrelerin değişimi yöntemi ile çözmüştür ve üstel matris yöntemi

üzerinde durmuştur. Cerit [12]'de sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem sistemlerinden bahsetmiştir. Cerit [12]'de sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklem sistemini özvektörler yöntemi ile, sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemini parametrelerin değişimi yöntemi ile çözen pekiştirici örnekler kullanmıştır.

Cesur [13]'de matrisin özdeğerleri ve özvektörlerinin nasıl bulunacağını anlatmış ve sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem sistemlerini ele almıştır. Cesur [13]'de sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemini özvektörler yöntemi ile çözmüş, sabit katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklem sistemini köşegenleştirme (diyagonalleştirme) metodu ve parametrelerin değişimi metodu ile çözmüştür. Rainville vd. [14]'de sabit katsayılı lineer homojen olan denklem sistemini ve sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemini incelemiştir. Rainville vd. [14]'de sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemini özvektörler yöntemi ile, sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemini cramer(determinant) yöntemi ile çözmüştür.

## **1.2 Tezin Amacı**

Diferansiyel denklem sistemlerinin çeşitli çözüm metodları bilinmektedir. Bu tez çalışmasının amacı, bu metodlar dışında, lineer diferansiyel denklem sistemlerinin matrisler kullanılarak çözümlerinin ne şekilde yapılabileceğini araştırmaktır. Bu suretle, lineer diferansiyel denklem sistemleri incelenmiş ve çözüm yolları ele alınmıştır.

Sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemi eliminasyon metodu, determinant (cramer) metodu, özvektörler yöntemi, smith normal form, rasyonel kanonik form, üçgen matris yöntemi ve üstel matris yöntemi ile çözülmüştür. Sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemi incelenmiştir. Sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemi eliminasyon metodu, determinant (cramer) metodu, köşegenleştirme yöntemi, parametrelerin değişimi yöntemi, smith normal form, rasyonel kanonik form, üçgen matris yöntemi ve üstel matris yöntemi ile çözülmüştür. Değişken katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemi incelenmiştir ve çözülmüştür. Değişken katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemi incelenmiştir ve çözülmüştür.

### 1.3 Hipotez

Bu tez çalışmasında, lineer homojen olan ve homojen olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin çeşitli çözüm metodlarının dışında başka metodlarla da çözümlerinin yapılabileceği görülmüştür.

Sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sisteminin çözümü için eliminasyon metodu ve determinant (cramer) metodu kullanılmıştır. Determinant metodu ile çözüm daha pratiktir. Sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sisteminin çözümünde kullanılan özvektörler yönteminde matrislerden faydalanılarak, matrislerin karakteristik denklemi elde edilir ve karakteristik denklemden o matrisin özdeğerleri bulunur. Özdeğerlerin durumuna göre inceleme yapıldığı görülmüştür. Üç tane farklı durum vardır. Birincisi özdeğerlerin reel ve birbirinden farklı olması durumu, ikincisi özdeğerlerin eşlenik kompleks sayı çifti şeklinde olması durumu, üçüncüsü de katlı özdeğer olması durumudur. Katlı özdeğer durumunda özdeğerler reel veya kompleks olabilir. Sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sisteminin çözümünde, matrisin özdeğerine karşılık lineer bağımsız özvektör mevcut olduğunda temel çözüm matrisi bulunur. İlk iki durumda her farklı özdeğer için birbirinden lineer bağımsız özvektör bulunur. Ama katlı özdeğer durumunda özdeğerler için lineer bağımsız özvektör bulunmayabilir. Özdeğerin katlılığına göre değişik çözüm yolları vardır. Özdeğerin katlılığı iki olduğunda, iki durum ortaya çıkar. Birinci durumda, iki katlı özdeğere karşı iki tane lineer bağımsız özvektör karşı gelir. İkinci durumda, iki katlı özdeğere karşı bir tane lineer bağımsız özvektör karşı gelir. Bu durumlara göre çözümler yapılır. Özdeğerin katlılığı üç olduğunda, üç durum ortaya çıkar. Birinci durumda, üç katlı özdeğere karşı üç tane lineer bağımsız özvektör karşı gelir. İkinci durumda, üç katlı özdeğere karşı iki tane lineer bağımsız özvektör karşı gelir. Üçüncü durumda ise üç katlı özdeğere karşı bir tane lineer bağımsız özvektör karşı gelir. Bu durumlara göre çözümler yapılır. Özdeğerin katlılığı dört olduğunda çözüm yolu daha karmaşık bir hal alacaktır.

Sabit katsayılı lineer homojen olan ve homojen olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan smith normal form yönteminde denk polinom matrislerden faydalanılır. Bir matrisin kanonik şekle dönüştürülmesinde elemanter

dönüşümlerden faydalanılır. Denk polinom matrislerin kanonik şekle dönüştürülmesinde de elemanter dönüşümlerden faydalanılmıştır. Sabit katsayılı lineer homojen olan ve homojen olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde faydaladığımız polinom matrisinin Smith Normal formu elde edilir ve kullanılır. Polinom matrisin Smith Normal biçiminin köşegeninde bulunan polinomlar, o polinom matrisinin değişmez çarpanıdır.

Sabit katsayılı lineer homojen olan ve homojen olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan rasyonel kanonik form yönteminde sistemin karakteristik matrisi bulunur. Bu matrisin de Smith normal formu elde edilir. Elde edilen polinom matrisin kanonik şeklindeki değişmez çarpanlara ait eş matrisler bulunur. Bu yöntemde de polinom matrislerden, polinom matrislerin kanonik şeklinden ve eş matrislerden faydalanılır.

Sabit katsayılı lineer homojen olan ve homojen olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan üçgen matris yönteminde, kullanılan matris üst üçgensel hale getirilerek çözüm yapılır. Sabit katsayılı lineer homojen olan ve homojen olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan üstel matris yönteminde üstel matristen yararlanılarak çözüm yapılır.

Sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sisteminin çözümünde kullanılan köşegenleştirme yönteminde özvektörleri içeren matris yardımı ile çözüm yapılır. Sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sisteminin çözümünde kullanılan parametrelerin değişimi yönteminde temel matristen faydalanılarak çözüm yapılır. Temel matris ise özvektörler yöntemi ile oluşturulur.

Değişken katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemi ve değişken katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sisteminin çözümünde matrislerden yararlanılmıştır. Değişken katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sistemi Peano-Baker metodu ile de çözülmüştür.

## BÖLÜM 2

---

### TEMEL BİLGİLER

Bir  $y = f(x)$  fonksiyonunun,  $x$  serbest değişkeni,  $y$  bağımlı değişkeni ve bunun sonlu herhangi bir mertebeye kadar olan türevleri arasında kurulmuş bir bağıntıya diferansiyel denklem denir.

Bu tanıma göre, bir diferansiyel denklemin genel ifadesi,

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde veya tamamen benzer şekilde,

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde dir. Bazı durumlarda, bir diferansiyel denklem, türev operatörü kullanılarak da ifade edilmektedir. Bu durumda,

$$F(x, y, Dy, D^2y, D^3y, \dots, D^n y) = 0 \quad (2.3)$$

şeklinde yazmak mümkündür. Burada  $D = \frac{d}{dx}$  olup, türev operatörüdür.

$n > 0$  ve tam sayıdır. Bu  $n$  doğal sayısı, denklemdeki en yüksek türev mertebesini belirttiğinden, bu aynı zamanda diferansiyel denklemin mertebesi olur. Bu en yüksek mertebeli türevin herhangi bir kuvveti sözkonusu ise, buna diferansiyel denklemin derecesi denilecektir. Her teriminin türevlere göre derecesi 1 olan bir diferansiyel denkleme lineer denir [15].

## 2.1 Matrisler

Bir matris, yatay satırlar ve dikey sütunlar biçiminde düzenlenmiş elemanların oluşturduğu dikdörtgensel bir dizeydir ve çoğunlukla köşeli parantez içinde gösterilir. Eğer bir matrisin tüm elemanları reel sayılar ise veya reel-değerli fonksiyonlar ise matris reel-değerlidir. Eğer en azından bir eleman kompleks bir sayı ise veya kompleks değerli bir fonksiyon ise, matris kompleks değerlidir. Eğer matrisin tüm elemanları sayılar ise, matrise sabit matris denir [16].

### 2.1.1 Bir Matrisin Rankı

Sıfırdan farklı bir  $A$  matrisinde, eğer bütün  $(r+1)$  kare minörler sıfırken, en az bir tane  $r$  kare minör sıfırdan farklı ise, bu matrisin rankı  $r$ 'dir denir. Bir sıfır matrisin rankı 0'dır.

**Örnek 2.1 :**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$  matrisinin rankını bulalım.

$|A| = 0$  fakat  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ 'dır.  $A$  matrisinin rankı 2'dir [1].

### 2.1.2 Matrisin Tekillik Durumu

Bir  $n$  kare  $A$  matrisinde  $r = n$  ise, yani  $|A| \neq 0$  ise bu matris tekil değildir denir. Aksi durumda  $A$  matrisine tekil denir.

**Örnek 2.2 :**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$  matrisinin tekilliğini araştıralım.

$|A| = 0$  olduğu için  $A$  matrisi tekildir [1].

### 2.1.3 Determinant

Determinant karesel bir matrisi reel sayıya dönüştüren bir fonksiyondur.

$n \times n$  boyutlu bir  $A$  kare matrisinin determinantı  $\det(A) = |A|$  ile gösterilir.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ dir [17].}$$

#### 2.1.4 Bir Determinantın Minörleri ve Kofaktörleri

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$  kare matrisinin  $i$ . satır ve  $j$ . sütunu silindikten sonra elde edilen yeni matrisin determinantına  $a_{ij}$  elemanının alt determinanı veya minörü denir ve  $|M_{ij}|$  ile gösterilir.

$|A_{ij}| = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$  ifadesine de  $a_{ij}$  elemanının kofaktörü denir.

**Örnek 2.3 :**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  matrisinin 1. satır elemanlarının minör ve kofaktörünü

bulalım.

$$a_{11} \text{ 'in minörü } |M_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

$$\text{kofaktörü ise } |A_{11}| = (-1)^{1+1} |M_{11}| = |M_{11}| = -11$$

$$a_{12} \text{ 'in minörü } |M_{12}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\text{kofaktörü ise } |A_{12}| = (-1)^{1+2} |M_{12}| = -|M_{12}| = 5$$

$$a_{13} \text{ 'in minörü } |M_{13}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$\text{kofaktörü ise } |A_{13}| = (-1)^{1+3} |M_{13}| = |M_{13}| = 7$$

olarak bulunur [17].

### 2.1.5 Elemanter Dönüşümler

Aşağıdaki işlemlere elemanter dönüşümler adı verilir :

1.a) Bir matrisin  $i$  ve  $j$  numaralı satırlarının yerlerini değiştirmek; bu işlem  $H_{ij}$  ile gösterilecektir.

b) Bir matrisin  $i$  ve  $j$  numaralı sütunlarının yerlerini değiştirmek; bu işlem  $K_{ij}$  ile gösterilecektir.

2.a) Bir matrisin  $i$  numaralı satır elemanlarını, sıfırdan farklı, bir  $k$  sayısı ile çarpmak; bu işlem  $H_i(k)$  ile gösterilecektir.

b) Bir matrisin  $i$  numaralı sütun elemanlarını, sıfırdan farklı, bir  $k$  sayısı ile çarpmak; bu işlem  $K_i(k)$  ile gösterilecektir.

3.a) Bir matrisin  $j$  numaralı satır elemanlarını bir  $k$  sayısı ile çarpıp bu elemanlara karşılık gelen  $i$  numaralı satır elemanlarına eklemek; bu işlem  $H_{ij}(k)$  ile gösterilecektir.

b) Bir matrisin  $j$  numaralı sütun elemanlarını bir  $k$  sayısı ile çarpıp bu elemanlara karşılık gelen  $i$  numaralı sütun elemanlarına eklemek; bu işlem  $K_{ij}(k)$  ile gösterilecektir.

Yukarıda bahsedilen  $H$  dönüşümlerine elemanter satır dönüşümleri,  $K$  dönüşümlerine de elemanter sütun dönüşümleri denir [18].

### 2.1.6 Elemanter Matrisler

Bir  $I_n$  birim matrisine, elemanter satır(sütun) dönüşümlerinin uygulanmasıyla bulunan matrise, elemanter satır(sütun) matrisi denir. Burada bir elemanter matris, bu matrisi veren elemanter dönüşümün sembolü ile gösterilecektir.

**Örnek 2.4 :**  $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  matrisinden elde edilebilecek bazı elemanter matrisler

şunlardır:

$$H_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = K_{12} \quad H_3(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = K_3(k) \quad H_{23}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = K_{32}(k)$$

Bir  $m \times n$   $A$  matrisine, bir elemanter dönüşümün uygulanmasının sonucu,  $A$ 'nın bir elemanter matris ile çarpımından bulunabilir.

Bir  $m \times n$   $A$  matrisine verilen bir elemanter satır dönüşümünün uygulanmasının sonucu, dönüşümü  $I_m$  matrisine uygulayarak elde edilen  $H$  matrisini, soldan  $A$  ile çarparak elde edilen matristir.

$A$  matrisine bir elemanter sütun dönüşümünün uygulanmasının sonucu, dönüşümü  $I_n$  matrisine uygulayarak elde edilen  $K$  matrisini, sağdan  $A$  ile çarparak bulunan matristir.

**Örnek 2.5 :**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$  olsun.

$$H_{13} \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A \text{ matrisinin birinci ve üçüncü satırları yer}$$

değiştirmiştir.

$$AK_{13}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 16 & 5 & 6 \\ 25 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad A \text{ matrisinin üçüncü sütununun iki katı}$$

birinci sütuna eklenmiş oldu [1].

### 2.1.7 Denk Matrisler

Elemanter satır ve sütun dönüşümlerine karşı gelen ve  $A$  matrisini  $B$  matrisine dönüştüren elemanter satır ve sütun matrislerini alalım. Bunlar  $H_1, H_2, \dots, H_s$ ;  $K_1, K_2, \dots, K_t$  ile gösterilir ve  $H_1$  birinci satır dönüşümü,  $H_2$  ikinci satır dönüşümü,...;  $K_1$  birinci sütun dönüşümü,  $K_2$  ikinci sütun dönüşümü,... olur. Böylece,

$$H_s \dots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \dots K_t = PAQ = B \quad (2.4)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$P = H_s \dots H_2 \cdot H_1 \quad \text{ve} \quad Q = K_1 \cdot K_2 \dots K_t \quad (2.5)$$

şeklinde olur.

İki  $A$  ve  $B$  matrislerinin denk olması için gerek ve yeter koşul  $PAQ = B$  olacak şekilde, tekil olmayan  $P$  ve  $Q$  matrislerinin bulunmasıdır [1].

### 2.1.8 Matrisin Kanonik Şekle Dönüştürülmesi

Sıfır olmayan bir  $A$  matrisinin rangı  $r$  olsun. Elemanter satır işlemleri ile  $A$  matrisi aşağıdaki özellikleri olan bir  $B$  matrisine dönüştürülmüş ise  $A$  matrisine kanonik şekle dönüştürülmüştür denir:

- 1)  $B$  matrisinin ilk  $r$  satırının her birinde en az bir eleman sıfırdan farklı, diğer satırlardaki elemanların tümü sıfırdır.
- 2) Her satırda sıfır olmayan ilk eleman 1'dir.
- 3) 1'in bulunduğu sütundaki diğer elemanların tümü sıfırdır.
- 4) 1'in önünde bulunan sıfırların sayısı, satır numarası arttıkça çoğalıyor.

**Örnek 2.6 :**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$  matrisini kanonik şekle dönüştürelim.

$H_{21}(-2)$  elemanter dönüşümü ile

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

$H_{31}(1)$  elemanter dönüşümü ile

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$H_{32}(-1)$  elemanter dönüşümü ile

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$H_2(1/5)$  elemanter dönüşümü ile

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$H_{12}(1)$  elemanter dönüşümü ile

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 17/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A$  matrisinin kanonik şekli elde edilmiş olur [18].

### 2.1.9 Kanonik Şekle Dönüştürme Yöntemi

Bir  $A$  matrisinin kanonik şekle dönüştürülmesinde aşağıdaki yöntem uygulanabilir:

1) Bütün elemanları sıfır olmayan ilk sütunun birinci elemanı sıfırdan farklı olsun (eğer sıfırsa, birinci satırla, aynı sütunda sıfırdan farklı elemanı bulunan başka bir satırın yeri değiştirilmek sureti ile ilk eleman sıfırdan farklı yapılabilir).

Uygun elemanter satır işlemleri ile bu eleman 1 yapılır. Örneğin birinci satır elemanları bu sayının tersi ile çarpılabilir.

2) Böylece elde edilen 1'in bulunduğu sütundaki diğer elemanlar  $H_{i1}(k)$  dönüşümleri ile sıfır yapılır ( $i = 2, 3, \dots$ ).

3)Eğer (1) ve (2) işlemleri sonunda elde edilen matrisin birinci satır dışındaki elemanların tümü sıfır kanonik şekil elde edilmiş olur. Aksi takdirde, 1'in bulunduğu sütunu takip eden ve bütün elemanları sıfır olmayan ilk sütunun ikinci elemanı (1)'deki gibi 1 yapılır. Sonra (2)'deki işlem uygulanır. Kanonik şekil elde edilinceye kadar benzer işlemler uygulanır [18].

### 2.1.10 Normal Şekil

Elemanter satır ve sütun işlemleri ile rangı  $r > 0$  olan bir  $A$  matrisi, aşağıdaki şekillerden birine dönüştürülebilir :

$$I_r, \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [I_r \quad 0], \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

Böyle bir şekle  $A$ 'nın normal şekli denir [18].

## 2.2 Polinom Matrisler

Elemanları  $\lambda$ 'ya ait birer polinom olan,

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \dots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix},$$

matrisine bir polinom matris veya lambda matris denir.  $a_{ij}(\lambda)$  polinomlarının en büyük olanın derecesi  $p$  ise,  $A(\lambda)$  matrisi

$$A(\lambda) = A_0\lambda^p + A_1\lambda^{p-1} + \dots + A_{p-1}\lambda + A_p \quad (2.6)$$

şeklinde  $p$ . dereceden bir matris polinomu olarak yazılabilir. Burada polinomun  $A_i$  katsayıları  $\lambda$ 'ya bağlı birer  $m \times n$  matristir [2].

**Örnek 2.7 :**  $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 5 \\ \lambda^3 - 4 & \lambda^3 - 3\lambda^2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda^4 + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

bir  $\lambda$  matristir veya dördüncü dereceden bir matris polinomudur [1].

$A(\lambda)$  polinom matrisinin rangı şöyle tanımlanabilir;  $A(\lambda)$ 'nın  $r$ . mertebeden minörlerinin en az birisi özdeş olarak sıfır değilse ve  $r$ 'den daha büyük mertebeden minörlerin hepsi özdeş olarak sıfır ise, o zaman  $A(\lambda)$  'nın rangı  $r$ 'dir denir.

Eğer  $A(\lambda)$  bir kare matris ise,  $|A(\lambda)|$ 'nin özdeş olarak sıfır olup olmamasına göre, sırasıyla tekil veya tekil olmayan polinom matris denir.

**Örnek 2.8 :**  $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda - 2 & \lambda + 2 & -3 \\ 3\lambda - 1 & \lambda & -1 \\ -1 & 4\lambda - 3 & -\lambda + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$|A(\lambda)| \neq 0$  için,  $A(\lambda)$  üçüncü mertebeden birinci dereceden tekil olmayan bir polinom matristir. Rangı da 3'tür [2].

### 2.2.1 Denk Polinom Matrisler ve Denk Polinom Matrisleri için Elemanter Dönüşümler

Bir  $A(\lambda)$  polinom matrisine uygulanan elemanter dönüşümler şunlardır:

(1)  $i$ . ve  $j$ . satırların değiştirilmesi  $H_{ij}$  ile gösterilir;  $i$ . ve  $j$ . sütunun değiştirilmesi  $K_{ij}$  ile gösterilir.

(2)  $i$ . satırın, sıfırdan farklı bir  $k$  sabiti ile çarpılması,  $H_i(k)$  ile gösterilir.  $i$ . sütunun sıfırdan farklı bir  $k$  sabiti ile çarpılması  $K_i(k)$  ile gösterilir.

(3)  $f(\lambda)$  polinomunun,  $j$ . satırla çarpımının  $i$ . satıra eklenmesi,  $H_{ij}(f(\lambda))$  ile gösterilir.

$f(\lambda)$  polinomunun,  $j$ . sütunla çarpımının  $i$ . sütuna eklenmesi  $K_{ij}(f(\lambda))$  ile gösterilir [3].

Bir  $A(\lambda)$  polinom matrisine bir takım elemanter dönüşümler uygulayarak bir  $B(\lambda)$  matrisi elde edersek,  $A(\lambda)$  ile  $B(\lambda)$  matrislerine

$$B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) \text{ olacak şekilde,}$$

$P(\lambda) = H_s \dots H_2 H_1$  ve  $Q(\lambda) = K_1 K_2 \dots K_t$  varsa, birbirine denktir denir. Denk polinom matrisler aynı ranga sahiptirler [2].

### 2.2.2 Denk Polinom Matrislerin Kanonik Şekli (Smith Normal Formu)

Benzer tarzda denk polinom matrislerinin kanonik şeklini araştırabiliriz.

**Teorem 2.1** Rangi  $r$  olan her  $A(\lambda)$  polinom matrisi elemanter dönüşümler vasıtasıyla

$$N(\lambda) = \left[ \begin{array}{cccccc} f_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & f_r(\lambda) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array} \right]$$

matrisine indirgenebilir.  $A(\lambda)$ 'ya denk olan bu  $N(\lambda)$  matrisine  $A(\lambda)$ 'nın kanonik şekli veya Smith normal formu denir. Bu matristeki bütün  $f_i$  polinomlarının en yüksek dereceli terimlerinin katsayıları 1'dir ve  $f_i(\lambda)$  polinomu  $f_{i+1}(\lambda)$  ( $i = 1, 2, \dots, r-1$ ) polinomunu böler [2].

**Teorem**  $A(\lambda) = 0$  için doğrudur.  $A(\lambda) \neq 0$  olduğunu varsayalım. Minimum dereceli bir  $a_{ij}(\lambda) \neq 0$  elemanı vardır. Bu eleman 2. tip dönüşümlerle monik yapılabilir ve yeni  $a_{11}(\lambda)$ 'yi elde etmek için, satırlar ve sütunların uygun yer değiştirmeleri ile matrisin (1,1) konumuna getirilebilir.

$a_{11}(\lambda)$ 'nin  $A(\lambda)$ 'nin bütün diğer elemanlarını böldüğünü varsayalım. 3. tip dönüşümlerle,  $A(\lambda)$

$$\left[ \begin{array}{cc} f_1(\lambda) & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{array} \right] \quad (2.7)$$

şekline indirgenebilir, burada  $f_1(\lambda) = a_{11}(\lambda)$ 'dir.

$a_{11}(\lambda)$ 'nın,  $A(\lambda)$ 'nin bütün elemanlarını bölmediğini varsayalım.  $a_{1j}(\lambda)$ , birinci satırda,  $a_{11}(\lambda)$  tarafından bölünmeyen bir eleman olsun. Polinomların üzerine bölme kaidesi uygulanarak,  $a_{1j}(\lambda) = q(\lambda)a_{11}(\lambda) + r_{1j}(\lambda)$  yazabiliriz. Burada  $r_{1j}(\lambda)$ 'nin derecesi,  $a_{11}(\lambda)$ 'nin derecesinden daha küçüktür.  $j$ . sütundan  $q(\lambda)$  ve birinci sütunun çarpımının çıkartılmasıyla, ilk satır ve  $j$ . sütundaki eleman  $r_{1j}(\lambda)$  olur. 2. tip dönüşümlerle bu eleman monik olan birinin yerine konur ve sütunların değiştirilmesiyle (1,1) konumuna getirilerek yeni  $a_{11}(\lambda)$  elde edilir. Eğer şimdi  $a_{11}(\lambda)$ ,  $A(\lambda)$ 'nin her elemanını bölerse (2.7)'yi buluruz. Aksi halde yukarıdaki işlemin sonlu sayıda tekrarlanmasıyla, ilk satır ve ilk sütundaki her elemanı (1,1) konumlu elemana bölünebilen bir matris elde edilir.

Eğer bu eleman,  $A(\lambda)$ 'nin her elemanını bölerse (1)'i buluruz, aksi halde  $a_{ij}(\lambda)$ 'nin  $a_{11}(\lambda)$  tarafından bölünmediğini varsayalım.  $a_{i1}(\lambda) = q_{i1}(\lambda)a_{11}(\lambda)$  ve  $a_{1j}(\lambda) = q_{1j}(\lambda)a_{11}(\lambda)$  olsun.  $i$ . satırdan,  $q_{i1}(\lambda)$  ve birinci satırın çarpımı çıkarılırsa, bu  $a_{i1}(\lambda)$  yerine 0 ve  $a_{ij}(\lambda)$  yerine  $a_{ij}(\lambda) - q_{i1}(\lambda)a_{1j}(\lambda)$ 'yı getirir. Şimdi  $i$ . satırı, ilk satıra ekleyelim. Bu  $a_{11}(\lambda)$ 'yı değiştirmez fakat  $a_{1j}(\lambda)$  yerine,

$$a_{ij}(\lambda) - q_{i1}(\lambda)a_{1j}(\lambda) + a_{1j}(\lambda) = a_{ij}(\lambda) + q_{1j}(\lambda)\{1 - q_{i1}(\lambda)\}a_{11}(\lambda) \quad (2.8)$$

ifadesini getirir. Bu ifade  $a_{11}(\lambda)$ , ile bölünemediğinden,  $a_{11}(\lambda)$  ile bölünerek, bundan önce olduğu gibi,  $a_{11}(\lambda)$  için yeni bir kalan buluruz.  $a_{11}(\lambda)$  matrisin bütün elemanlarını bölmediğinden, son monik çok terimli elde edilinceye kadar bu işleme devam edilir. Sonlu sayıda adımdan sonra, her elemanı bölebilen  $a_{11}(\lambda)$ 'yı elde eder ve (2.7)'ye ulaşırız.

Bundan sonra,  $B(\lambda)$  için aynı yol izlenerek,

$$\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & C(\lambda) \end{bmatrix}$$

bulunur. Sonuç olarak Smith normal biçimini elde etmiş oluruz.

$f_1(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$  'nın her elemanı ve  $f_2(\lambda)$  'nın böleni olduğundan,  $B(\lambda)$  'nın elemanlarının ve  $f_1(\lambda)$  'nın en büyük ortak böleni,  $f_2(\lambda)$  'yı da böler. Benzer biçimde,  $f_i(\lambda)$  'nın,  $f_{i+1}(\lambda)$  'yı böldüğü bulunur.

$A(\lambda)$  ile  $N(\lambda)$  denk olduklarından öyle iki  $P(\lambda)$  ve  $Q(\lambda)$  matrisleri vardır ki  $PAQ = N$  olur [1].

**Örnek 2.9 :**  $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda-1 & \lambda+2 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda^2-2\lambda & \lambda^2-3\lambda+2 & \lambda^2+\lambda-3 \end{bmatrix}$

matrisinin Smith Normal Formunu bulalım.

$A(\lambda)$  matrisinin elemanlarının en büyük ortak böleni 1'dir. ( $f_1(\lambda) = 1$ )

$K_{12}(-1)$  elemanter dönüşümü ile,

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-2 & \lambda^2-3\lambda+2 & \lambda^2+\lambda-3 \end{bmatrix}$$

$H_{21}(-\lambda)$  elemanter dönüşümü ile,

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \lambda-2 & \lambda^2-3\lambda+2 & \lambda^2+\lambda-3 \end{bmatrix}$$

$H_{31}(-\lambda+2)$  elemanter dönüşümü ile,

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$K_{21}(-\lambda+1)$  elemanter dönüşümü ile,

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda+2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$K_{31}(-\lambda-2)$  elemanter dönüşümü ile,

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{bmatrix}$$

$B(\lambda)$ 'nin elemanlarının en büyük ortak böleni  $\lambda$ 'dır.

$H_{23}(-1)$  elemanter dönüşümü ile

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$K_{23}(1)$  elemanter dönüşümü ile

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda-1 \\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$H_{32}(\lambda+1)$  elemanter dönüşümü ile

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{bmatrix}$$

$H_2(-1)$  elemanter dönüşümü ile

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{bmatrix}$$

$K_{32}(-\lambda-1)$  elemanter dönüşümü ile

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{bmatrix}$$

$K_3(-1)$  elemanter dönüşümü ile

$$A(\lambda) \sim N(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + \lambda \end{bmatrix}$$

kanonik şekli yani Smith normal formu bulunur. Buna göre  $A(\lambda)$  matrisinin  $f_i$  polinomları  $f_1(\lambda) = 1$ ,  $f_2(\lambda) = 1$ ,  $f_3(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$

dir ve her biri bir sonrakini böler [1].

### 2.2.3 Elemanter Bölenler

$A(\lambda)$  bir  $n$  kare matris olsun ve bunun değişmez çarpanları,

$$f_i(\lambda) = \{p_1(\lambda)\}^{q_{i1}} \{p_2(\lambda)\}^{q_{i2}} \dots \{p_s(\lambda)\}^{q_{is}}, (i = 1, 2, \dots, r) \text{ şeklinde ifade edilsin.}$$

Burada  $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots, p_s(\lambda)$  indirgenemez(birden fazla polinomun çarpımı biçiminde yazılamayan) monik polinomlardır.

$q_{ij}$  lerin bazıları sıfır olabilir ve karşı gelen çarpanları yazılmayabilir; ama  $f_i(\lambda)$ ,  $f_{i+1}(\lambda)$  'yı böldüğünden,  $q_{i+1,j} \geq q_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, r-1; j = 1, 2, \dots, s$ ) olur.

$f_i(\lambda)$  'nın  $\{p_j(\lambda)\}^{q_{ij}} \neq 1$  çarpanlarına,  $A(\lambda)$  'nın elemanter bölenleri denir.

**Örnek 2.10 :** Bir 10 kare  $A(\lambda)$  matrisinin, Smith normal biçiminin

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+1)^2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)^2\lambda^2(\lambda^2-3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olduğunu varsayalım. Rank 5'dir.

Değişmez çarpanlar;

$$f_1(\lambda)=1, \quad f_2(\lambda)=1, \quad f_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda^2+1), \quad f_4(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda^2+1)^2\lambda, \\ f_5(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda^2+1)^2\lambda^2(\lambda^2-3) \text{ olur.}$$

Elemanter bölenler;

$$(\lambda-1)^2, \lambda-1, \lambda-1, (\lambda^2+1)^2, (\lambda^2+1)^2, (\lambda^2+1), \lambda^2, \lambda, \lambda^2-3 \text{ dür.}$$

Elemanter bölenlerin farklı olması gerekmez. Her elemanter bölen değişmez çarpanlarda kaç defa bulunuyorsa, elemanter bölenler listesinde de o kadar bulunur [1].

## 2.3 Bir Matrisin Minimum Polinomu

### 2.3.1 Değişmez Çarpanlar

$A(\lambda)$ 'nın Smith normal biçiminin köşegeninde bulunan  $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_r(\lambda)$  polinomlarına,  $A(\lambda)$ 'nın değişmez çarpanları denir. Eğer  $f_k(\lambda)=1, k \leq r$  ise  $f_1(\lambda)=f_2(\lambda)=\dots=f_k(\lambda)=1$  dir ve herbirine açık değişmez çarpan denir [1].

### 2.3.2 Eş Matris

$A$  bir non-derogatory matris ve bunun açık olmayan benzerlik değişmezi

$$g(\lambda) = f_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (2.9)$$

gibi olsun.  $g(\lambda)$  nın eş matrisini şöyle tanımlarız; eğer  $g(\lambda) = \lambda + a$  ise,  $C(g) = [-a]$

dir.  $n > 1$  için,

$$C(g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-3} & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

olur [1].

### 2.3.3 Direkt Toplam

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_s$  boyutları sırasıyla  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_s$  olan kare matrisler olsun

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{bmatrix} = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$$

köşegen matrisine  $A_i$ 'lerin direkt toplamı denir.

**Örnek 2.11 :**

$$A_1 = [2], \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

olsun.  $A_1, A_2, A_3$ 'ün direkt toplamı,

$$\text{diag}(A_1, A_2, A_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

olur [1].

### 2.3.4 Monik Polinom

$$f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (2.10)$$

$a_n = 1$  ise, polinoma monik denir [1].

### 2.3.5 Minimum Polinom

Cayley Hamilton teoreminden her  $n$  kare  $A$  matrisi,  $n$ . dereceden,  $\phi(\lambda) = 0$  karakteristik denklemini sağlar.  $m(A) = 0$  olacak şekilde minimum dereceli,  $m(\lambda)$

monik polinomuna,  $A$ 'nın minimum polinomu ve  $m(\lambda)=0$ 'a,  $A$ 'nın minimum denklemi denir.

$A \neq 0$ 'ın minimum polinomunu bulmak için elemanter işlem aşağıdaki yoldur.

i) Eğer  $A = a_0 I$  ise  $m(\lambda) = \lambda - a_0$ ,

ii) Eğer bütün  $a$ 'lar için  $A \neq a_0 I$  fakat  $A^2 = a_1 A + a_0 I$  ise  $m(\lambda) = \lambda^2 - a_1 \lambda - a_0$ ,

iii) Eğer bütün  $a$  ve  $b$ 'ler için  $A^2 \neq aA + bI$  fakat  $A^3 = a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I$  ise

$$m(\lambda) = \lambda^3 - a_2 \lambda^2 - a_1 \lambda - a_0 \quad (2.11)$$

olur. Böylece devam edilir.

**Örnek 2.12 :**  $A = [1]$  minimum polinomunu bulalım.

$$A = a_0 I \quad [1] = a_0 [1] \quad a_0 = 1$$

$$m(\lambda) = \lambda - 1$$

**Örnek 2.13 :**  $A = [-1]$  minimum polinomunu bulalım.

$$A = a_0 I \quad [-1] = a_0 [1] \quad a_0 = -1$$

$$m(\lambda) = \lambda + 1$$

**Örnek 2.14 :**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  minimum polinomunu bulalım.

$A - a_0 I = 0$  olanaksızdır.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + a_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diyelim. Her bir matrisin birinci satırının ilk iki elemanını kullanarak,  $9 = a_1 + a_0$   $8 = 2a_1$  denklemlerini elde ederiz; buradan  $a_1 = 4$  ve  $a_0 = 5$  dir.  $A^2$ 'nin her elemanını kontrol ettikten sonra,  $A^2 = 4A + 5I$  olduğunu anlarız.

$A$  matrisinin minimum polinomu  $\lambda^2 - 4\lambda - 5$ 'dir [1].

**Teorem 2.2**  $n$ . mertebeden bir  $A$  kare matrisinin  $m(\lambda)$  minimum polinomu,  $A$ 'nın en yüksek dereceli  $f_n(\lambda)$  benzerlik değişmezine eşittir [2].

### 2.3.6 Non-Deragatory Matrisler

Karakteristik polinomu ve minumum polinomu özdeş olan bir  $n$  kare  $A$  matrisine, non-derogatory denir. Aksi halde derogatory adını alır [1].

**Örnek 2.15:**  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  matrisi non-derogatory matris midir?

$A$  matrisinin karakteristik polinomu bulalım.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 1 \text{ dir.}$$

$A$  matrisinin minimum polinomunu bulalım.

1)  $A - a_0 I = 0$  olanaksızdır.

2)  $A^2 = a_1 A + a_0 I$  durumunu kontrol edelim.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bütün  $a$  lar için  $A^2 = a_1 A + a_0 I$  eşitliği sağlanmıyor.

3)  $A^3 = a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I$  durumunu kontrol edelim.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = a_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a_0 = -1$ ,  $a_1 = 0$  ve  $a_2 = 0$  olarak bulunur.

$$m(\lambda) = \lambda^3 - a_2\lambda^2 - a_1\lambda - a_0$$

$$m(\lambda) = \lambda^3 + 1$$

Karakteristik polinomu, minimum polinomuna özdeş olduğundan  $A$  non-derogatory matristir.

### 2.3.7 Benzerlik

#### 2.3.7.1 Benzer Kare Matrisler

$n$ . mertebeden  $A$  ve  $B$  gibi iki kare matris olsun. Eğer  $B = R^{-1}AR$  olacak şekilde tekil olmayan bir  $R$  matrisi mevcut ise,  $A$  ve  $B$  matrislerine birbirine benzerdir denir.

**Teorem 2.3** Benzer matrisler aynı özdeğerlere sahiptir [2].

#### 2.3.7.2 Köşegen Matris

Eğer bir matrisin sadece köşegeni üzerinde değer varsa ve diğer elemanları sıfır ise böyle matrislere köşegen matris denir [19].

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

#### 2.3.7.3 Bir Matrisin Diyagonalizasyonu

Diyagonal bir matrise benzer olan bir  $A$  matrisine diyagonalize edilebilir bir matris denir.

Diyagonal bir  $D = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  matrisinin özdeğerleri aşikar olarak diyagonaldeki elemanlardır. Diyagonal bir matris daima  $n$  tane lineer bağımsız vektöre sahip olur.

**Teorem 2.4**  $n$  tane lineer bağımsız özvektöre sahip olan  $n$ . mertebeden herhangi bir  $A$  kare matrisi, diyagonal bir matrise benzerdir.

**İspat :**

$A$  matrisinin  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  özdeğerlerine karşılık olan  $n$  tane lineer bağımsız özvektör  $U_1, U_2, \dots, U_n$  olsun.  $R = [U_1, U_2, \dots, U_n]$  matrisini göz önüne alalım.  $AU_i = \lambda_i U_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) olduğundan

$$AR = [AU_1, AU_2, \dots, AU_n] = [\lambda_1 U_1, \lambda_2 U_2, \dots, \lambda_n U_n] \quad (2.12)$$

veya

$$AR = [U_1, U_2, \dots, U_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = R \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

olur. Buradan da

$$R^{-1}AR = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (2.13)$$

elde edilir. Yani  $A$  matrisi diyagonalinde  $A$ 'nın özdeğerleri bulunan bir diyagonal matrise benzerdir.

Buna  $A$  matrisinin diyagonalizasyonu denir. Yani  $A$ 'yı diyagonalize eden tekil olmayan  $R$  matrisi,  $A$ 'nın modlar matrisidir.

**Örnek 2.16 :**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  matrisini diyagonalize edelim. Bu matrisin özdeğerleri

$|\lambda I - A| = 0$  kullanılarak,

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \text{ 'dan}$$

$\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$  ve  $\lambda_3 = 2$  elde edilir,

ve bunlara karşılık gelen özvektörler ise

$$(\lambda I - A)U = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.14)$$

özvektör denkleminde elde edilerek her bir özdeğer için özvektör bulunur.

$\lambda_1 = -1$  için,

$$2u_1 + u_2 - 2u_3 = 0$$

$$-u_1 + 3u_2 + u_3 = 0 \quad (2.15)$$

$$u_2 = 0$$

homojen sistemi elde edilir. (2.15) sisteminin rangı 2 olacağından bir bilinmeyen keyfi seçilerek lineer bağımsız bir tek çözüm bulunabilir;  $u_3$  keyfi seçilirse,  $u_1 = u_3$ ,  $u_2 = 0$  olacağından mesela  $u_3 = 1$  için

$U_1 = \{1, 0, 1\}$  özvektörü elde edilir.  $\lambda_2 = 1$  ve  $\lambda_3 = 2$  özdeğerleri için özvektörler sırasıyla  $U_2 = \{3, 2, 1\}$  ve  $U_3 = \{1, 3, 1\}$  olarak bulunur. Buna göre

$$R = [U_1, U_2, U_3] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak alırsak

$$R^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 7 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

olur. Burdan da

$$R^{-1}AR = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 7 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olur [2].

## 2.4 Üstel Matris

**Teorem 2.4 (Cayley - Hamilton teoremi)** Herhangi bir kare matris kendi öz denklemini sağlar. Yani eğer

$$\det(A - \lambda I) = b_n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 \quad (2.16)$$

şeklinde ise, bu durumda

$$b_n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \dots + b_2 A^2 + b_1 A + b_0 I = 0 \quad (2.17)$$

şeklindedir.

**Örnek 2.17 :**  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  nin karakteristik denklemi  $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$  dir.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} + 11 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

olur [2].

### 2.4.1 $e^{At}$ nin Hesaplanması

Bir  $A$  kare matrisi için

$$e^{At} \equiv I + \frac{1}{1!} At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n \quad (2.18)$$

sonsuz serisi her  $A$  ve  $t$  için yakınsak olup, böylece  $e^{At}$ , tüm kare matrisler için tanımlıdır [3].

$e^{At}$  elemanlarını hesaplamada (2.18) genellikle kullanışsızdır. Bununla beraber, Teorem 2.4'ün  $At$  matrisine uygulaması ile sonsuz seri  $t$ 'ye göre bir polinoma indirgenebilir. Bunu bir teoremle ifade edelim :

**Teorem 2.5** Eğer  $A$ ,  $n$  satır ve  $n$  sütunlu bir matris ise, bu durumda

$$e^{At} = \alpha_{n-1} A^{n-1} t^{n-1} + \alpha_{n-2} A^{n-2} t^{n-2} + \dots + \alpha_2 A^2 t^2 + \alpha_1 A t + \alpha_0 I \quad (2.19)$$

şeklindedir. Burada  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ , her bir  $A$  için belirlenecek olan,  $t$ 'ye bağlı fonksiyonlardır.

Eğer  $A$  iki satır ve iki sütuna sahipse, bu durumda  $n = 2$  ve

$$e^{At} = \alpha_1 A t + \alpha_0 I \quad (2.20)$$

olur. Eğer üç satır ve sütuna sahipse, bu durumda  $n = 3$  ve

$$e^{At} = \alpha_2 A^2 t^2 + \alpha_1 A t + \alpha_0 I \quad (2.21)$$

dir.

**Teorem 2.6**  $A$ , Teorem 2.5'deki gibi ve

$$r(\lambda) \equiv \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \alpha_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 \quad (2.22)$$

olsun. Bu durumda eğer  $\lambda_i$ ,  $At$  'nin bir özdeğeri ise

$$e^{\lambda_i} = r(\lambda_i) \quad (2.23)$$

dir. Ayrıca, eğer  $\lambda_i$ ,  $k$  ( $k > 1$ ) katlı bir özdeğer ise, aşağıdaki eşitlikler de sağlanır.



gelen karakteristik(öz) vektör denir. Bu sistemin hepsi birden sıfır olmayan yani  $U \neq 0$  olan bir çözümünün mevcut olabilmesi için  $\lambda I - A$  katsayılar matrisi için

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.27)$$

olması gerekli ve yeterlidir. Bu determinantdan elde edilen ve  $\lambda$ 'ya göre  $n$ . dereceden olan

$$P(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_{n-2}\lambda^2 + b_{n-1}\lambda + b_n = 0 \quad (2.28)$$

eşitliğine karakteristik denklem denir [9].

Özvektörleri birer sütun olarak kabul eden

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisine modlar matrisi denir [2].

### 2.5.1 Bir Matrisin Özdeğer ve Özvektörleri

**Örnek 2.18 :**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  matrisinin özdeğerlerini ve bu özdeğerlere karşılık gelen

özvektörlerini bulalım.

Önce  $A$  matrisinin karakteristik polinomunu bulalım.

$$K_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

şeklinde karakteristik polinomu buluruz. Böylece  $A$  nın karakteristik denklemi

$$K_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \quad (2.29)$$

şeklinde olup, buradan  $A$  matrisinin özdeğerleri  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  ve  $\lambda_3 = 3$  olarak bulunur. Şimdi ise, bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri bulalım. Bunun için  $(A - \lambda I)U = 0$  homojen denklem sistemini açık olarak aşağıdaki gibi yazarız.

$$(1 - \lambda)u_1 + 0u_2 - u_3 = 0$$

$$u_1 + (2 - \lambda)u_2 + u_3 = 0 \quad (2.30)$$

$$2u_1 + 2u_2 + (3 - \lambda)u_3 = 0$$

Daha sonra  $\lambda_1 = 1$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulmak için (2.30) denkleminde  $\lambda_1 = 1$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulmak için (2.30) denkleminde  $\lambda = 1$  koyarak

$$-u_3 = 0$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0 \quad (2.31)$$

$$2u_1 + 2u_2 + 2u_3 = 0$$

homojen lineer denklem sistemini elde ederiz. Bu homojen lineer denklem sisteminin çözümü bize  $\lambda_1 = 1$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü verecektir.

(2.31) lineer denklem sisteminin rangı 2 olup ( $n - r = 3 - 2 = 1$ ) bir keyfi bilinmeyen  $u_1 = a$  olarak alınır. O zaman

$$-u_3 = 0$$

$$u_2 + u_3 = -a \quad (2.32)$$

olup (2.32) denklemlerinden  $u_2 = -a$  ve  $u_3 = 0$  bulunur. Böylece  $\lambda_1 = 1$  özdeğerine karşılık gelen özvektöre  $U_1$  dersek, o zaman

$$U_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (0 \neq a \in R)$$

olarak bulunur. Şimdi  $\lambda_2 = 2$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulalım.

Bunun için (2.30) denklem sisteminde  $\lambda = 2$  yazarak

$$-u_1 - u_3 = 0$$

$$u_1 + u_3 = 0 \quad (2.33)$$

homojen lineer denklem sistemini elde ederiz. Bu homojen lineer denklem sisteminin rangı da 2 olup bir keyfi bilinmeyen  $u_3 = b$  seçeriz. Buna göre

$$u_1 = -b$$

$$2u_1 + 2u_2 = -b \quad (2.34)$$

olup (2.34) lineer denklem sisteminin çözümünden  $u_1 = -b$ ,  $u_2 = \frac{b}{2}$  değerlerini elde ederiz. Böylece  $\lambda_2 = 2$  özdeğerine karşılık gelen özvektöre  $U_2$  dersek, o zaman

$$U_2 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ \frac{b}{2} \\ b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (0 \neq b \in R)$$

buluruz. Son olarak  $\lambda_3 = 3$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulmak için yine (2.30)'da homojen lineer denklem sisteminde  $\lambda = 3$  koyarak

$$-2u_1 - u_3 = 0$$

$$u_1 - u_2 + u_3 = 0 \quad (2.35)$$

$$2u_1 + 2u_2 = 0$$

homojen lineer denklem sistemini elde ederiz. Bu denklem sisteminin de rangı 2 olduğundan yine bir tane keyfi bilinmeyen seçeriz. Buna da  $x_3 = c$  diyelim. O takdirde

$u_1 = -\frac{c}{2}$  ve  $u_2 = \frac{c}{2}$  olarak buluruz. Eğer  $\lambda_3 = 3$  özdeğerine karşılık gelen özvektöre  $U_3$  dersek, o zaman

$$U_3 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (0 \neq c \in R)$$

bulunur [20].

### 2.5.2 Vektörlerin Lineer Bağımsız Oluşu

Vektörlerin lineer bağımsızlığı kavramı, fonksiyonların lineer bağımsızlığı kavramına benzerdir. Eğer bir vektör başka vektörü bir sabit ile çarparak elde edilemiyorsa, bu iki vektöre lineer bağımsız denir. Geometrik olarak lineer bağımsızlık bu iki vektörün paralel olmadığını ifade eder. Daha genel bir ifadeyle eğer  $U_1, U_2, \dots, U_n$  olarak verilen  $n$  tane vektör için

$$C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3 + \dots + C_n U_n = 0 \quad (2.36)$$

eşitliği yalnızca  $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$  için sağlanıyorsa, bu vektörler lineer bağımsızdır. Aksi halde ise lineer bağımlıdır ( $C$ 'ler birer sabittir)

$n$  tane lineer diferansiyel denklemden oluşan bir sistemde her birinin eleman sayısı  $n$  olan  $n$  tane vektör söz konusudur ve bu vektörlerin lineer bağımlı olup olmadıkları önemlidir. Şu sistemi ele alalım:

$$a_1 C_1 + b_1 C_2 + c_1 C_3 = 0$$

$$a_2 C_1 + b_2 C_2 + c_2 C_3 = 0$$

$$a_3 C_1 + b_3 C_2 + c_3 C_3 = 0 \quad (2.37)$$

Burada 3 bilinmeyen ( $C_1, C_2, C_3$ ) ve 3 denklem vardır ve bu sistem matris biçiminde yani  $AX = 0$  olarak yazılabilir:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \quad \text{ve } 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bu sistem ancak katsayılar matrisinin determinanti sıfır değilse  $X = 0$  veya  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$  adi çözümüne sahiptir:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Buna göre her biri  $n$  elemandan oluşan  $n$  tane vektör, sütunları bu vektörlerden oluşan  $n \times n$  boyutundaki matrisin determinanti sıfırdan farklıysa lineer bağımsızdır.

**Örnek 2.19 :**  $U_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  ve  $U_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$  verilmiş olsun.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \quad \text{olduğundan bu vektörler lineer bağımsızdır.}$$

Lineer bağımlılık veya bağımsızlık kavramları vektör fonksiyonlarına da uygulanabilir. Örneğin;

$$v_1(t) = \begin{bmatrix} v_{11}(t) \\ v_{21}(t) \\ v_{31}(t) \end{bmatrix}, \quad v_2(t) = \begin{bmatrix} v_{12}(t) \\ v_{22}(t) \\ v_{32}(t) \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad v_3(t) = \begin{bmatrix} v_{13}(t) \\ v_{23}(t) \\ v_{33}(t) \end{bmatrix} \quad \text{verilmiş olsun. Eğer}$$

$$W(t) = \begin{vmatrix} v_{11}(t) & v_{12}(t) & v_{13}(t) \\ v_{21}(t) & v_{22}(t) & v_{23}(t) \\ v_{31}(t) & v_{32}(t) & v_{33}(t) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ise } t_1 < t < t_2 \text{ aralığındaki tüm } t \text{'ler için bu vektör}$$

fonksiyonları lineer bağımlıdır. Bu determinanta wronskian determinanti denir. Eğer  $n$  tane vektör fonksiyonu söz konusu ise, bu durumda  $W$  determinanti şu şekilde ifade edilecektir:

$$v_1(t) = \begin{bmatrix} v_{11}(t) \\ v_{21}(t) \\ \vdots \\ v_{n1}(t) \end{bmatrix}, v_2(t) = \begin{bmatrix} v_{12}(t) \\ v_{22}(t) \\ \vdots \\ v_{n2}(t) \end{bmatrix}, \dots, v_n(t) = \begin{bmatrix} v_{1n}(t) \\ v_{2n}(t) \\ \vdots \\ v_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$W(t) = \begin{vmatrix} v_{11}(t) & v_{12}(t) & \dots & v_{1n}(t) \\ v_{21}(t) & v_{22}(t) & \dots & v_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1}(t) & v_{n2}(t) & \dots & v_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

dir [21].

**Örnek 2.20 :** Verilen vektörlerin  $0 < t < \infty$  aralığında lineer bağımlı olup olmadıklarını bulalım.

$$v_1(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}, v_2(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix} \text{ ve } v_3(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wronskian determinanı şöyledir:

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} & t \\ 0 & 0 & 1 \\ e^t & e^{3t} & 0 \end{vmatrix} = e^{3t} - e^{4t} \neq 0$$

O halde verilen aralıkta tüm  $t$  değerleri için bu vektörler lineer bağımsızdır [5].

## 2.6 Kanonik Formlar

### 2.6.1 Rasyonel Kanonik Biçim

$A$  bir  $n$  kare matris olsun. Önce bunun karakteristik matrisinin tam bir tane açık olmayan  $f_n(\lambda)$  değişmez çarpanı olduğunu varsayalım.  $f_n(\lambda)$ 'e ait  $C(f_n)$  eş matrisi,  $A$ 'ya benzerdir. Bunu  $A$ 'ya benzer tüm matrislerin,  $S$  rasyonel kanonik biçimi olarak tanımlıyoruz.

Bundan sonra,  $\lambda I - A$ 'nın Smith normal biçiminin,

$$diag(1,1,...,1,f_j(\lambda),f_{j+1}(\lambda),...,f_n(\lambda)) \quad (2.38)$$

olduğunu varsayalım.  $f_i(\lambda)$ ,  $s_i$ ,  $(i = j, j+1, ..., n)$  dereceli, açık olmayan, değişmez çarpandır.  $A$ 'ya benzer tüm matrislerin Rasyonel kanonik biçimi,

$$S = diag(C(f_j), C(f_{j+1}), ..., C(f_n)) = \begin{bmatrix} C(f_j) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C(f_{j+1}) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C(f_n) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

şeklinde tanımlanır [1].

**Teorem 2.6** Her  $A$  kare matrisi,  $\lambda I - A$ 'nın, açık olmayan değişmez çarpanlarının eş matrislerinin, direkt toplamına benzerdir.

**Örnek 2.21 :**  $A$ 'nın açık olmayan benzerlik değişmezleri

$$f_8(\lambda) = \lambda + 1, f_9(\lambda) = \lambda^3 + 1 \text{ ve } f_{10}(\lambda) = \lambda^6 + 2\lambda^3 + 1 \text{ olsun.}$$

Buradan,

$$C(f_8) = [-1]$$

$$C(f_9) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C(f_{10}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \text{diag}(C(f_8), C(f_9), C(f_{10})) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Not: Köşegen boyunca sıralanan eş matrislerde boyut önemli değildir. Değişik bir biçim olarak her bir eş matrisin transpozu alınarak kullanılabilir [1].

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.6.2 İkinci Kanonik Form

$A'$ 'nın karakteristik matrisi, açık olmayan değişmez çarpanlar olarak, (2.6.1) bölümündeki polinomlarına sahip olsun. Dereceleri farklı  $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots, p_t(\lambda)$  indirgenemez polinomların elemanter bölenler olduğu kabul edilsin.

$$f_i(\lambda) = \{p_1(\lambda)\}^{q_{1i}} \{p_2(\lambda)\}^{q_{2i}} \dots \{p_t(\lambda)\}^{q_{ti}} \quad (i = j, j+1, \dots, n) \quad (2.40)$$

(2.40)'da bazı  $q$ 'lar sıfır olabileceğinden, her çarpan görünmeyebilir. Mevcut her çarpanın  $C(p_k^{ki})$  eş matrisi sadece açık olmayan benzerlik değişmezi olarak  $\{p_k(\lambda)\}^{q_{ki}}$ 'dir. Yani  $C(f_i) = \text{diag}(C(p_1^{q_{1i}}), C(p_2^{q_{2i}}), \dots, C(p_t^{q_{ti}}))$ 'ye benzerdir.

**Teorem 2.7** Her  $A$  kare matris  $\lambda I - A$ 'nın elemanter bölenlerinin direkt toplamına benzerdir.

**Örnek 2.22 :** Örnek 2.21'deki  $A$  matrisi için verilen benzerlik dönüşümlerinden elde edilen elemanter bölenler,

$\lambda + 1, \lambda + 1, (\lambda + 1)^2, \lambda^2 - \lambda + 1, (\lambda^2 - \lambda + 1)^2$ 'dir. Her birinin eş matrisleri

$$[-1], [-1], \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

olur. Teorem 2.7'den kanonik formu

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

olur [1].

### 2.6.3 Jakobson Kanonik Formu

$A$  indirgenemez polinomların kuvvetleri olarak ifade edilen karakteristik matrisinin elemanter bölenleriyle yukarıda bahsedilen matris olsun.  $\{p(\lambda)\}^q$  elemanter böleni göz önüne alınsın. Eğer  $q = 1$  ise  $C(p)$  eş matris olarak kullanılır; eğer  $q > 1$  ise,

$$C_q(p) = \begin{bmatrix} C(p) & M & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C(p) & M & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C(p) & M \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C(p) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

oluşturulur. Burada  $M$ ,  $C(p)$  ile aynı boyutlu bir matristir.  $M$  matrisinin sol alt köşedeki elemanı 1, diğer elemanları sıfırdır. (2.41)'deki  $C_q(p)$  matrisi  $C_1(p) = C(p)$  olduğu anlaşılarak  $\{p(\lambda)\}^q$ 'nin üst eş matrisi olarak adlandırılır. (2.41)'de köşegenin hemen üstündeki 1'ler sürekli bir doğru oluşturur.

$C'(p)$  alterne eş matrisi kullanıldığı zaman  $\{p(\lambda)\}^q$ 'nin üst eş matrisi

$$C_q(p) = \begin{bmatrix} C'(p) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ N & C'(p) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & N & C'(p) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C'(p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N & C'(p) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

şeklinde olur. (2.42)'deki  $N$ ,  $C'(p)$  ile aynı boyutlu bir matristir.  $N$  matrisinin sağ üst köşedeki elemanı 1, diğer elemanları sıfırdır. Bu biçimde, köşegenin hemen altındaki 1'ler sürekli bir doğru oluşturur.

**Örnek 2.23 :**  $\{p(\lambda)\}^q = (\lambda^2 + 2\lambda - 1)^4$  olsun. O zaman  $C(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$   $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$C_q(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

**Teorem 2.8** Her  $A$  kare matrisi,  $\lambda I - A$ 'nın elemanter bölenlerinin üst-eş matrislerinin, direkt toplamına benzerdir.

**Örnek 2.24 :** Örnek 2.22'deki  $A$  matrisinin  $q=1$  haline karşılık gelen  $\lambda+1$ ,  $\lambda+1$  ve  $\lambda^2 - \lambda + 1$  elemanter bölenlerinin üst eş matrisleri, bunların eş matrisleridir.  $q > 1$  haline karşılık gelen  $(\lambda+1)^2$  elemanter böleninin üst eş matrisi

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ ve } (\lambda^2 - \lambda + 1)^2 \text{ elemanter böleninin üst eş matrisi } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir [3].}$$

Böylece Teorem 2.8'deki kanonik biçim;

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 2.6.4 Klasik Kanonik Formu

$A$ 'nın karakteristik matrisinin elemanter bölenleri lineer polinomların kuvvetleri olsun.

Teorem 2.8'in kanonik formu  $\{p(\lambda)\}^q = (\lambda - a_i)^q$  elemanter bölenlerine karşı gelen üst eş matrislerinin

$$C_q(p) = \begin{bmatrix} a_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_i \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

biçimindeki direkt toplamıdır [1].

Teorem 2.8'in kanonik formunun bu özel hali Jordan yada Klasik Kanonik Form olarak adlandırılır.

**Teorem 2.9**  $\delta$  çarpanları lineer polinomlar halinde olan bir  $A$  matrisinin karakteristik polinomlarının alanı olsun. O zaman  $A$ ,  $\delta$  üzerinde (2.43) formundaki üst eş matrislerin direkt toplamına benzerdir. Her matris bir  $(\lambda - a_i)^q$  elemanter bölüne karşılık gelir.

**Örnek 2.25** :  $\lambda I - A$ 'nın kompleks alanda elemanter bölenleri  $\lambda - i$ ,  $\lambda + i$ ,  $(\lambda - i)^2$ ,  $(\lambda + i)^2$  olsun [1].  $A$  matrisinin klasik kanonik formu şu şekildedir:

$$\begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

### 2.6.5 Rasyonel Kanonik Forma İndirgeme

Bir  $A$  kare matrisi ile onun  $S$  rasyonel kanonik formunu göz önüne alalım.  $S = R^{-1}AR$  olacak şekilde tekil olmayan bir  $R$  matrisi vardır.  $R$  matrisinin nasıl bulunabileceğini araştıralım.

Eğer  $A$   $n$ . mertebeden bir kare matris ve  $X$   $n$  boyutlu bir vektör ve eğer  $g(\lambda)$ ,  $g(A)X = 0$  olacak şekilde, en yüksek dereceli teriminin katsayısı 1 olan minimum dereceli bir polinom ise,  $X$ 'e,  $A$  matrisine göre  $g(\lambda)$  polinomuna ait bir vektör denir.

**Tanım 2.1** Eğer  $X$ ,  $A$  matrisine göre  $p$ . dereceden  $g(\lambda)$  polinomuna ait bir vektör ise;  $X, AX, \dots, A^{p-1}X$  lineer bağımsız vektörleri  $X$ 'e sahip bir zincir olarak adlandırılır.

$m(\lambda)$ ,  $n$ . mertebeden bir  $A$  kare matrisinin minimum polinomu ise,  $m(A) = 0$  olacağından  $n$  boyutlu her  $X$  vektörü için  $m(A)X = 0$  olacaktır.

$n$ . mertebeden bir  $A$  kare matrisinin açık(aşık) olmayan benzerlik değişmezleri  $f_i(\lambda)$  ( $i = k, k+1, \dots, n$ ) olsun.

$$f_i(\lambda) = \lambda^{r_i} + a_{i1}\lambda^{r_i-1} + a_{i2}\lambda^{r_i-2} + \dots + a_{ir_i-1}\lambda + a_{ir_i} \quad (2.44)$$

ise bunlara ait eş matrisler

$$C[f_i(\lambda)] = C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{ir_i} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{ir_i-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{ir_i-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{i1} \end{bmatrix}$$

ve  $A$  matrisinin rasyonel kanonik formu da

$$R^{-1}AR = S = \text{diag}(C_k, C_{k+1}, \dots, C_n)$$

dir. Buradan

$$AR = RS = R\text{diag}(C_k, C_{k+1}, \dots, C_n) \quad (2.45)$$

şeklinde yazabiliriz.  $R$  matrisini  $R_k, R_{k+1}, \dots, R_n$  şeklinde sütun bloklara ayırmış olalım.

$R$  matrisinin bu ayırmasını,  $R_i$  ve  $C_i$  ( $i = k, k+1, \dots, n$ )'ler aynı sayıda sütunlar ihtiva edecek şekilde yapalım. (2.46)'dan

$$\begin{aligned} AR_i &= A[R_k, R_{k+1}, \dots, R_n] = [R_k, R_{k+1}, \dots, R_n] \text{diag}(C_k, C_{k+1}, \dots, C_n) \\ &= [R_k C_k, R_{k+1} C_{k+1}, \dots, R_n C_n] \end{aligned}$$

ve burdan

$$AR_i = R_i C_i \quad (i = k, k+1, \dots, n) \quad (2.46)$$

elde edilir. Her bir  $R_i$  sütun bloklarının  $r_i$  sütun vektörlerini  $R_{i1}, R_{i2}, \dots, R_{ir_i}$  ile gösterelim. Bu taktirde  $C_i$  matrisi göz önüne alınıp çarpım yapılırsa,

$$R_i C_i = [R_{i1}, R_{i2}, \dots, R_{ir_i}] C_i = \begin{bmatrix} R_{i2}, R_{i3}, \dots, R_{ir_i}, -\sum_{j=1}^{r_i} R_{ij} a_{ir_i-(j-1)} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$AR_i = A[R_{i1}, R_{i2}, \dots, R_{ir_i}] = [AR_{i1}, AR_{i2}, \dots, AR_{ir_i}]$$

olduğundan (2.46)'dan

$$R_{i2} = AR_{i1}$$

$$R_{i3} = AR_{i2} = A^2 R_{i1}$$

$$R_{i4} = AR_{i3} = A^3 R_{i1}$$

.....

$$R_{ir_i} = AR_{ir_i-1} = A^{r_i-1} R_{i1}$$

$$-\sum_{j=1}^{r_i} R_{ij} a_{ir_i-(j-1)} = AR_{ir_i}$$

olur. Bu toplam açılıp üstteki değerler yerine konursa,

$$-(R_{i1}a_{ir_i} + R_{i2}a_{ir_i-1} + R_{i3}a_{ir_i-2} + \dots + R_{ir_i-1}a_{i2} + R_{ir_i}a_{i1}) = AR_{ir_i}$$

$$-(R_{i1}a_{ir_i} + AR_{i1}a_{ir_i-1} + A^2 R_{i1}a_{ir_i-2} + \dots + A^{r_i-2} R_{i1}a_{i2} + A^{r_i-1} R_{i1}a_{i1}) = A^{r_i} R_{i1}$$

$$-(A^{r_i} + a_{i1}A^{r_i-1} + a_{i2}A^{r_i-2} + \dots + a_{ir_i-1}A + a_{ir_i})R_{i1} = 0 \quad (2.47)$$

bulunur.

(2.44) göz önüne alınırsa,

$$f_i(A)R_{i1} = 0 \quad (2.48)$$

yazılabilir.

$R_{i1}$  'i  $X_i$  ile gösterelim.

$$f_i(A)X_i = 0$$

$X_i$   $A$  matrisine göre  $f_i(\lambda)$  değişmez çarpanına ait olan bir vektör olur.

$$X_i, AX_i, A^2 X_i, \dots, A^{r_i-1} X_i \quad (i = k, k+1, \dots, n) \quad (2.49)$$

vektörleri lineer bağımsızdır. Böylece her bir  $R_i$ 'nin sütun vektörleri,  $f_i(\lambda)$  değişmez çarpanına ait olan bir  $X_i$  vektörüne ait bir zincirdir. (2.49) şeklindeki bu zincirin elemanları lineer bağımsızdır ve sayıları  $f_i(\lambda)$  değişmez çarpanının derecesi kadardır.

Sonuç olarak  $A$  matrisini  $R^{-1}AR = S$  rasyonel kanonik forma indirgeyecek  $R$  matrisinin lineer bağımsız  $n$  tane sütunu,  $f_i(\lambda)$  ( $i = k, k+1, \dots, n$ ) değişmez çarpanlarına karşılık olan (2.49) zincirleridir. Yani

$$R = [X_k, AX_k, A^2X_k, \dots, A^{r_k-1}X_k; X_{k+1}, AX_{k+1}, A^2X_{k+1}, \dots, A^{r_{k+1}-1}X_{k+1}; \dots; X_n, AX_n, A^2X_n, \dots, A^{r_n-1}X_n] \quad (2.50)$$

olur [2].

## 2.7 Lineer Sistem Türleri

Değişik türlerde lineer diferansiyel denklem sistemi vardır. İlk akla gelen diferansiyel denklem sistemi, bağımsız değişken  $t$ , bağımlı değişkenler  $x$  ve  $y$  olmak üzere birinci mertebeden değişken katsayılı ve iki bilinmeyenli bir lineer diferansiyel denklem sistemidir. Bu şekil bir denklem sistemi, genel olarak,

$$\begin{aligned} a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2(t) \frac{dy}{dt} + a_3(t)x + a_4(t)y &= F_1(t) \\ b_1(t) \frac{dx}{dt} + b_2(t) \frac{dy}{dt} + b_3(t)x + b_4(t)y &= F_2(t) \end{aligned} \quad (2.51)$$

şeklinde yazılır. Bu şekilde tanımlanan bir denklem sisteminin  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  gibi bir çözüm takımı vardır. Bir  $a \leq t \leq b$  aralığında, bu fonksiyonlar birlikte (2.51) denklemlerinin herbirinde ayrı ayrı yerlerine konulduğunda denklemler sağlanır. Yukarıda verilen (2.51) numaralı denklem sistemi birinci mertebeden iki denklemden oluşmaktadır. Bağımlı değişken ve denklem sayısı iki veya daha fazla olabildiği gibi, ayrıca denklemler ikinci veya daha yüksek mertebelerden türevler içerebilir.

(2.51) nolu diferansiyel denklem sistemi, yukarıda görüldüğü şekilde verildiği gibi, genel olarak,

$$\frac{dx}{dt} = a_1(t)x + a_2(t)y + F_1(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = b_1(t)x + b_2(t)y + F_2(t) \quad (2.52)$$

şeklinde verilir. Bu şekil, "Normal Form" başlığı altında tanımlanır ve çok yaygın olarak kullanılır. Yukarıda değindiğimiz gibi böyle bir sistem, bağımlı değişkenlerin sayısına bağlı olarak iki veya daha fazla sayıda bilinmeyenli olabilir. Örneğin, üç bilinmeyenli bir sistem için  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  ve  $z = \phi(t)$  gibi üçlü bir çözüm takımı, birlikte diferansiyel denklem sisteminin çözümünü verir.

Bağımlı değişken sayısı  $n$  ve  $n$  sayıda diferansiyel denklemden oluşan normal form'da verilmiş bir lineer denklem sistemi göz önüne alalım. Burada bağımsız değişken  $t$  ve bağımlı değişkenler  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  olsun. Bu şekilde tarif edilmiş bir denklem sistemi aşağıdaki şekilde yazılabilir [13].

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + F_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + F_2(t) \quad (2.53)$$

⋮

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + F_n(t)$$

### 2.7.1 Normal Form Lineer Sistemler

İki bilinmeyenli ve iki denklemlili "Normal Form" bir lineer diferansiyel sistemi, daha önce de belirtildiği gibi, genel olarak aşağıdaki şekilde verilir.

$$\frac{dx}{dt} = a_1(t)x + a_2(t)y + F_1(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = b_1(t)x + b_2(t)y + F_2(t) \quad (2.54)$$

Burada  $a_1, a_2, b_1, b_2, F_1$  ve  $F_2$  fonksiyonlarının hepsi de,  $t$ 'nin bir  $a \leq t \leq b$  aralığında sürekli fonksiyonlardır. Eğer,  $t$ 'nin bütün değerleri için  $F_1(t)$  ve  $F_2(t)$  fonksiyonlarının ikisi de "sıfır" ise, (2.54) lineer denklem sistemi homojen bir sistem ve bu fonksiyonlardan ikisi veya yalnız birisi sıfırdan farklı ise, adı geçen sistem, homojen olmayan bir sistem olur.

Normal form bir lineer denklem sistemi, burada olduğu şekilde iki bilinmeyenli olduğu gibi üç bilinmeyenli veya daha fazla sayıda bilinmeyenli,  $(x, y, z, \dots)$  olabilir. Ayrıca, bilinmeyenlerin katsayıları  $a_1, a_2, b_1, b_2, \dots$  serbest değişken  $t$ 'nin fonksiyonları olduğu gibi, genel olarak sabit sayılarda olabilirler.

İki bilinmeyenli ve iki denklemden oluşan normal form bir lineer denklem sisteminin çözümü de  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  iki fonksiyonlu bir sistemdir ve fonksiyonların türevleri de  $a \leq t \leq b$  aralığında sürekli fonksiyonlardır. Yukarıdaki tanıma göre, (23) denklem sisteminin bir çözümü,  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$

gibi bir çift fonksiyondan oluşmaktadır. Bu fonksiyonların herbiri, sistemin denklemlerinde yerlerine konulduğunda denklemlerin ikisi de sağlanır.

Diferansiyel denklemlerin temel teoremi olan "Tek Çözüm" teoremini tekrar hatırlarsak,  $a \leq t \leq b$  aralığında öyle bir  $t_0$  değeri vardır ki,  $f(t_0) = c_1$  ve  $g(t_0) = c_2$  değerleri tekdir [6].

### 2.7.2 Sistemler İçin Temel Varlık Teoremi

$$\left. \begin{array}{l} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{array} \right\} y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0 \quad (2.55)$$

diferansiyel denklem sistemindeki  $f$  ve  $g$  fonksiyonları

$$D = \{(x, y, z) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |z - z_0| \leq c\} \quad (2.56)$$

bölgesinde sürekli ve sınırlı olsunlar.

$$|f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)| \leq A|y_1 - y_2| + B|z_1 - z_2|$$

$$|g(x, y_1, z_1) - g(x, y_2, z_2)| \leq A|y_1 - y_2| + B|z_1 - z_2| \quad (2.57)$$

olacak şekilde  $A, B$  sabitlerinin mevcut olduğunu kabul edelim :

$\left. \begin{matrix} P_1(x, y_1, z_1) \\ P_2(x, y_2, z_2) \end{matrix} \right\}$   $D$  bölgesinde iki nokta olup  $A, B$  sabitleri  $P_1, P_2$  noktalarından

bağımsızdır.

Yukarıda bahsedilen şartlara Lipschitz şartları denir.

$M = \max(f, g) : (x, y, z \in D)$  olsun.

$h \leq \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{c}{M}\right)$  olmak üzere sistemin  $|x - x_0| \leq h$  aralığında  $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$

şartına uyan bir tek çözümü vardır.

Burada  $(x, y_1, z_1)$  ve  $(x, y_2, z_2)$  aynı apsisli iki noktadır [7].

### 3.1 Sabit Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklem Sistemi

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n$$

Bu sistemi kısa olarak

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.2)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

48

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad (3.3)$$

dir [2].

### 3.1.1 Sabit Katsayılı Lineer Sistemlerde Operatör Metodu

İki bilinmeyenli ve sabit katsayılı bir lineer diferansiyel denklem sistemi aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\begin{aligned} L_1 x + L_2 y &= F_1(t) \\ L_3 x + L_4 y &= F_2(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Burada  $L_1, L_2, L_3$  ve  $L_4$  sabit katsayılı ve herbiri

$$L = a_0 D^m + a_1 D^{m-1} + \dots + a_{m-1} D + a_m \quad (3.5)$$

şeklinde polinom operatörleridir.  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$  katsayıları da herhangi sabit sayılardır.

Amacımız (3.4) denklem sisteminin genel çözümünü bulmaktır. Bunun için, sistemin birinci denklemine  $L_4$  operatörünü ve ikinci denklemine de  $L_2$  operatörünü uygularsak,

$$L_4 L_1 x + L_4 L_2 y = L_4 F_1(t)$$

$$L_2 L_3 x + L_2 L_4 y = L_2 F_2(t)$$

elde edilir. Burada ikinci denklem birinciden çıkartılırsa,

$$(L_1 L_4 - L_2 L_3)x = L_4 F_1 - L_2 F_2 \quad (3.6)$$

olur. (3.6)'da  $L_1 L_4 - L_2 L_3$  operatörü  $L_5$  ile gösterilirse,

$$L_5 x = F(x) \quad (3.7)$$

bulunur.  $L_5$  operatörü, sabit katsayılı bir polinom operatörüdür ve mertebesi de  $n$  ile gösterilirse, (3.7) denklemini sabit katsayılı ve  $n$ 'inci mertebeden bir lineer diferansiyel denklem olur. Bu denklemin genel çözümü,

$$x(t) = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n + x_p(t) \quad (3.8)$$

olur. Burada  $f_1, f_2, \dots, f_n$  fonksiyonları, (3.7) denkleminin homojen kısmının lineer bağımsız özel çözümleri ve  $x_p(t)$  fonksiyonu da, homojen olmayan (3.7) denkleminin sabit sayı içermeyen bir özel çözümüdür.

(3.4) denklem sistemine geri dönelim. Aynı prosedür tekrarlanarak,

$$L_6 y = G(x) \quad (3.9)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin genel çözümü ise

$$y(t) = k_1 f_1 + k_2 f_2 + \dots + k_n f_n + y_p(t) \quad (3.10)$$

olur. (3.8) ve (3.10) denklemini (3.4) numaralı denklem sisteminin genel çözümünü verir.

Görülüyor ki  $x$  ve  $y$  çözüm takımı,  $c_1, c_2, \dots, c_n, k_1, k_2, \dots, k_n$  olmak üzere  $2n$  tane keyfi sabit sayı içermektedir. Bu sabit sayıların hepsi de birbirinden bağımsız değildir ve şüphesiz bazılarının diğerleri cinsinden ifade edilebilmesi gerekmektedir.

(3.4) denklem sisteminin bağımsız katsayılar sayısı sistemin Wronskian'ı olarak bilinen

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} = L_1 L_4 - L_2 L_3$$

operatörünün mertebesine eşittir ve bu sayıda  $n$ 'dir. Öyle ise denklem sistemi  $n$  sayıda keyfi sabit içerir [6].

Operatör Metodunu iki şekilde uygulayabiliriz. Bunlardan birincisi Eleminasyon yöntemi, ikincisi ise Cramer yöntemidir.

### 3.1.1.1 Eleminasyon (Yok Etme) Metodu ile Çözüm

Eleminasyon yöntemi ile sistemi çözmek, bu sistemi bir tek diferansiyel denkleme indirgeyerek çözümü elde etmek demektir. Bu yöntem, cebirsel denklemlerin çözümlerinde uygulanan eleminasyon yöntemini hatırlatır. Aynı çözümlere sahip olan iki diferansiyel denklem denk olduğundan, verilen bir sistem yerine, çözümü daha kolay olan denk bir sistem çözülür. Verilen bir sistemi basit bir sisteme indirgemek için bir

dizi işlem yapılır. Bu işlemlerin her bir adımında bir denk sistem elde edilir. Eleminasyon, üç tür işlemle yapılabilir. Birinci tür işlemler, sistemdeki denklemlerin yerlerini değiştirmektir. İkinci tür işlemler, sistemdeki bir denklemi sıfır olmayan bir sabitle çarpmaktır. Üçüncü tür işlemler, sistemin bir denklemindeki bir terim yerine diğer bir denklemden bulunan değeri yazmaktır [8].

**Örnek 3.1 :**

$$Dx = -y \quad (3.11)$$

$$Dy = x \quad (3.12)$$

sabit katsayılı lineer homojen denklem sisteminin genel çözümünü eleminasyon (yok etme) metodu ile bulalım.

(3.11) denkleminin her iki yanının türevi alınırsa,

$$D^2x = -Dy = -x$$

$$D^2x + x = 0$$

sabit katsayılı denklemi elde edilir. Bu homojen denklemin genel çözümü, keyfi  $c_1$  ve  $c_2$  sabitleri için

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

dir. Bu değer (3.12)'de yerine yazılırsa

$$Dy = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

ve bu denklemin integrasyonundan

$$y(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t$$

elde edilir.

Denklem sisteminin Wronskian'ını bulalım.

$$W = \begin{vmatrix} D & 1 \\ -1 & D \end{vmatrix} = D^2 + 1$$

Wronskian'ın değerine baktığımızda, mertebesi "2" olduğuna göre, sistemin bağımsız sabit sayısı iki tane olmak zorundadır [8].

### 3.1.1.2 Determinant (Cramer) Yöntemi İle Çözüm

$L_1, L_2, L_3, L_4$  sabit katsayılı lineer diferansiyel operatörler olmak üzere,  $x$  ve  $y$  değişkenlerine bağlı bir lineer diferansiyel denklem sistemi;

$$L_1x + L_2y = 0$$

$$L_3x + L_4y = 0 \quad (3.13)$$

şeklinde yazılır. Yok etme yöntemi kullanılarak, bu iki denklemden önce  $y$  ve sonrada  $x$  değişkeni yok edilirse:

$$(L_1L_4 - L_2L_3)x = 0 \quad \text{ve} \quad (L_1L_4 - L_2L_3)y = 0 \quad (3.14)$$

bulunur. Burada (3.13) ifadesi determinant yöntemi kullanılarak,

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} x = 0 \quad \text{ve} \quad \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} y = 0$$

olur. Eğer,  $\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} \neq 0$  ve  $n$ . mertebeden bir diferansiyel operatör ise,

(3.13) sistemi  $x$  ve  $y$ 'ye bağlı  $2n$ . mertebeden diferansiyel denklem sistemi olarak yeniden yazılabilir.

(3.13) sisteminde bulunan her bir diferansiyel denklemin karakteristik denklemleri ve tamamlayıcı fonksiyonları aynıdır.

$x$  ve  $y$ 'nin her ikisi de görünüşte toplam  $2n$  sayıda sabit içerirler. Fakat lineer bağımsız sabitlerin sayısı  $n$  kadardır.

Eğer

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} = 0$$

ise (3.13) sisteminin, birden fazla sayıda lineer bağımsız sabit ihtiva eden çözümü vardır veya çözümü yoktur. (3.13) sistemi daha fazla değişkenler için de geçerlidir.

Homojen doğrusal denklem sistemleri, cebirsel denklem sistemlerin çözümünde uygulanan Determinant yöntemiyle çözülebilir [9].

**Örnek 3.2 :**

$$Dx + y = 0$$

$$Dy - x = 0 \quad (3.15)$$

sabit katsayılı lineer homojen denklem sisteminin genel çözümünü determinant metodu ile bulalım.

Homojen denklem sisteminin çözümünü bulalım.

$$\begin{vmatrix} D & 1 \\ -1 & D \end{vmatrix} x = 0$$

$$\begin{vmatrix} D & 1 \\ -1 & D \end{vmatrix} y = 0 \quad (3.16)$$

determinantların hesaplanmasıyla sabit katsayılı,  $x$  ve  $y$  bilinmeyen fonksiyonlarına göre,

$$(D^2 + 1)x = 0$$

$$(D^2 + 1)y = 0 \quad (3.17)$$

sabit katsayılı denklemleri elde edilir.

Bu homojen denklemin genel çözümü, keyfi  $c_1$  ve  $c_2$  sabitleri için

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

$$y(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t \quad (3.18)$$

elde edilir.

### 3.1.2 Özvektörler ile Çözüm

$\lambda$  reel veya kompleks bir sayı olmak üzere  $U \neq 0$  sütun matrisi için

$X = Ue^{\lambda t}$  fonksiyonunun, ikinci tarafsız

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad (3.19)$$

sisteminin bir çözümü olması için

$AU = \lambda U$  olması, yani  $\lambda$  özdeğer ve  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  vektörünün bu vektörlere karşılık gelen özvektörler olmasıdır.

Eğer  $\lambda$  bir özdeğer ise o zaman karakteristik denkleme göre sıfırdan farklı bir çözümü mevcut olup  $A$  matrisinin  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  özdeğerine karşılık  $U_1, U_2, \dots, U_n$  lineer bağımsız vektörleri mevcut ise o zaman  $X(t) = \{U_1 e^{\lambda_1 t}, U_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, U_n e^{\lambda_n t}\}$  matrisi, bir temel çözüm matrisi olur [4].

Diferansiyel denklemlerin çözümünde özdeğerlerin durumuna göre inceleme yapılır.

#### 3.1.2.1 Özdeğerler Reel ve Birbirinden Farklı ise :

Bu durumda her farklı özdeğer için birbirinden lineer bağımsız özvektör bulunabilecektir [7].

#### Örnek 3.3 :

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + x_2 \quad (3.20)$$

lineer diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü bulalım.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

karakteristik matrisi için

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 3$$

özdeğerleri bulunur. Bu özdeğerlere göre

$$(\lambda + 1)u_1 - 2u_2 = 0$$

$$-4u_1 + (\lambda - 1)u_2 = 0 \quad (3.21)$$

sistemi dikkate alındığında

$$\lambda = \lambda_1 = -3 \text{ için sistem,}$$

$$-2u_1 - 2u_2 = 0$$

$$-4u_1 - 4u_2 = 0$$

$$u_1 + u_2 = 0$$

$$u_1 + u_2 = 0$$

şeklinde olup eğer keyfi olarak  $u_1 = u_{11} = k$  seçilirse o zaman  $u_2 = u_{21} = -k$  olup  $k = 1$  almakla

$$U_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

$$\lambda = \lambda_2 = 3 \text{ için sistem,}$$

$$4u_1 - 2u_2 = 0$$

$$-4u_1 + 2u_2 = 0$$

$$2u_1 - u_2 = 0$$

$$2u_1 - u_2 = 0$$

şeklinde olduğundan keyfi olarak  $u_2 = u_{22} = 2r$  alınırsa  $u_1 = u_{12} = r$  olup  $r = 1$  almakla

$$U_2 = \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 2r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$U_1$  ve  $U_2$  özvektörleri için denklem sisteminin çözümleri bulunur.

$$X_1 = U_1 e^{\lambda_1 t} = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = U_2 e^{\lambda_2 t} = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**Genel Çözüm**

$$x_1 = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{3t}$$

$$x_2 = -c_1 e^{-3t} + 2c_2 e^{3t}$$

olup, Temel Çözüm Matrisi

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{3t} \\ -e^{-3t} & 2e^{3t} \end{bmatrix} \text{ dir [4].}$$

### 3.1.2.2 Özdeğerler Kompleks ise :

Bazı özdeğerler, eşlenikleri ile birlikte eşlenik kompleks sayı çiftleri şeklinde olabilir. Bunlara karşı gelen özvektörlerde kompleks eşleniklidir.

#### Örnek 3.4 :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 - \frac{1}{2}x_2\end{aligned}\quad (3.22)$$

denklem sistemi matris formda yazılırsa

$$X' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} X$$

olur. Karakteristik matrisinden özdeğerler

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \lambda + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda + \frac{5}{4} = 0 \quad (3.23)$$

den elde edilir.

(3.23) denkleminin kökleri  $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i$  ve  $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i$  gibi iki eşlenik kompleks sayıdır.

Bunlar katsayılar matrisinin özdeğerleridir.

$$\begin{aligned}\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)u_1 - u_2 &= 0 \\ u_1 + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)u_2 &= 0\end{aligned}\quad (3.24)$$

sistemi dikkate alındığında,

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i \text{ özdeğeri için}$$

$$iu_1 - u_2 = 0$$

$$u_1 + iu_2 = 0 \quad (3.25)$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden  $u_1 = 1$  ve  $u_2 = i$  elde edilir. Buradan  $U_1$  özvektörü

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i \text{ özdeğeri için}$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Denklem sisteminin  $U_1$  ve  $U_2$  özvektörlerine karşılık gelen çözümleri

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{\left(-\frac{1}{2}+i\right)t}$$

$$X_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{\left(-\frac{1}{2}-i\right)t}$$

şeklinde olur.

Genel Çözüm

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{\left(-\frac{1}{2}+i\right)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{\left(-\frac{1}{2}-i\right)t}$$

olarak bulunur [10].

### 3.1.2.3 Özdeğer Katlı ise :

Eğer  $n \times n$  tipindeki  $A$  matrisi  $n$  tane farklı (reel veya kompleks)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  özdeğerlerine karşılık gelen  $U_1, U_2, \dots, U_n$  özvektörlerine sahip ise,

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

sisteminin genel çözümü  $c_1, c_2, \dots, c_n$  'ler keyfi sabitler olmak üzere

$$X(t) = c_1 U_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 U_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n U_n e^{\lambda_n t} \quad (3.26)$$

şeklindedir.

$|A - \lambda I| = 0$  karakteristik denkleminin  $n$  tane farklı köke sahip olmaması, yani en az bir tekrarlanan köke sahip olması durumu incelenecektir. Bir özdeğer eğer karakteristik denklemin bir  $k$  katlı kökü ise,  $k$  katlıdır. Herbir  $\lambda$  özdeğeri için  $(A - \lambda I)U = 0$  özvektör denklemini sıfırdan farklı en az bir  $U$  çözümüne sahiptir. Dolayısıyla  $\lambda$ 'ya ilişkin en az bir özvektör vardır. Ancak  $k > 1$  katlılığına sahip bir özdeğer, ona karşılık gelen,  $k$ 'dan daha az sayıda lineer bağımsız özvektöre sahip olabilir. Genel çözüm için ihtiyacımız olan  $n$  tane lineer bağımsız çözümden oluşan bir "tamamlanmış küme" elde edemeyebiliriz.

Bir  $k$  katlı  $\lambda$  özdeğerine,  $k$  tane lineer bağımsız özvektör karşılık geliyor ise bu özdeğere tam diyelim.

Eğer,  $A$  matrisinin her özdeğeri tam ise bu durumda, farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörler lineer bağımsız olduğundan,  $A$  matrisi  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  özdeğerlerine karşılık gelen  $n$  tane lineer bağımsız  $U_1, U_2, \dots, U_n$  vektörlerinden oluşan bir tam kümeye sahiptir. (Özdeğerlerin her biri katlılıkları kadar tekrarlanır). [11].

**$r = \lambda$  özdeğerinin katlılığının iki olması durumu :**

### **1. durum :**

$r = \lambda$  iki katlı özdeğerine  $U_1, U_2$  lineer bağımsız özvektörleri karşı gelsin. Bu durumda lineer bağımsız çözümler

$$X_1(t) = U_1 e^{\lambda t}$$

$$X_2(t) = U_2 e^{\lambda t}$$

şeklindedir.

### **2. durum :**

$r = \lambda$  iki katlı özdeğerine karşı gelen bir tane lineer bağımsız  $U_1$  özvektörü olsun. Bu durumda sistemin çözümü,

$$X_1(t) = U_1 e^{\lambda t}$$

şeklindedir.  $U_1$  vektörü

$$(A - \lambda I)U_1 = 0 \quad (3.27)$$

denklemini sağlar. Sistemin ikinci çözümü

$$X_2(t) = U_1 t e^{\lambda t} + U_2 e^{\lambda t} \quad (3.28)$$

şeklinde aranır. (3.28) denklemindeki  $U_1$  (3.27) denklemini sağlar,  $U_2$  ise

$$(A - \lambda I)U_2 = U_1 \quad (3.29)$$

denklemini bulunur. Kısaca iki katlı kök durumunda bulunan ilk çözüm, eşitliğin sağ tarafına yazılarak ikinci kök değeri için çözüm elde edilir. Genel çözüm

$$X_{genel} = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) = c_1 U_1 e^{\lambda t} + c_2 (U_1 t + U_2) e^{\lambda t} \quad (3.30)$$

şeklindedir [22].

### Örnek 3.5 :

$$\frac{dx_1}{dt} = 9x_1 + 4x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -6x_1 - x_2 \quad (3.31)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$A$  katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 9 - \lambda & 4 & 0 \\ -6 & -1 - \lambda & 0 \\ 6 & 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3 - \lambda)[(9 - \lambda)(-1 - \lambda) + 24]$$

$$= (3 - \lambda)(15 - 8\lambda + \lambda^2)$$

$$= (5 - \lambda)(3 - \lambda)^2 = 0$$

dir. O halde  $A$ ,  $\lambda_1 = 5$  ve  $\lambda_2 = 3$  olmak üzere farklı iki özdeğere sahiptir ve  $\lambda_2 = 3$  özdeğerinin katlılığı 2 'dir.

Durum 1:  $\lambda_1 = 5$  için  $(A - \lambda I)U = 0$  özvektör denklemi

$$(A - 5I)U = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dir. İlk iki  $4u_1 + 4u_2 = 0$  ve  $-6u_1 - 6u_2 = 0$  denklemlerinden  $u_2 = -u_1$  bulunur.

O halde, üçüncü denklem  $2u_1 - 2u_3 = 0$  dolayısıyla  $u_3 = u_1$  bulunur. Bu denklem sisteminin de rangı 2 olduğundan yine bir tane keyfi bilinmeyen ( $n - r = 3 - 2$ ) seçeriz.

$u_1 = 1$  seçimiyle  $\lambda_1 = 5$  özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 3$  için

$$(A - 3I)U = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olur.

Bu denklem sisteminin de rangı 1 olduğundan iki tane keyfi bilinmeyen ( $n - r = 3 - 1$ ) seçeriz.

$6u_1 + 4u_2 = 0$  denklemi için  $u_2 = 0$  ve  $u_3 = 1$  seçersek,

$$U_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ özvektörünü elde ederiz.}$$

Eğer  $u_3 = 0$  ve  $u_1 = 2$  seçersek  $u_2 = -3$  olur.

$$U_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

iki katlı  $\lambda_2 = 3$  özdeğerine karşılık gelen ikinci lineer bağımsız özvektördür.

Denklem sisteminin  $U_1, U_2$  ve  $U_3$  özvektörlerine karşılık gelen çözümleri

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}$$

$$X_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

$$X_3(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}$$

şeklinde olur.

**Genel Çözüm**

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}$$

olarak bulunur [11].

**Örnek 3.6 :**

$X' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X$  diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü bulalım.

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} (1-\lambda) & -1 \\ 1 & (3-\lambda) \end{bmatrix}$$

karakteristik matrisi için

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 \\ 1 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

iki katlı özdeğeri bulunur.  $\lambda_1 = 2$  özdeğeri için özvektör denklemi

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dir. Bu denklem sisteminin de rangı 1 olduğundan bir tane keyfi bilinmeyen  $(n-r=2-1)$  seçeriz.

$$u_1 = -u_2$$

dir. Bu durumda  $\lambda_1 = 2$ 'e karşılık gelen her özvektör  $U = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  vektörünün sıfırdan farklı bir katıdır. Dolayısıyla iki katlı  $\lambda_1 = 2$  özdeğerine karşılık gelen bir tek bağımsız özvektör bulunur.

Eğer  $u_2 = 1$  seçersek  $u_2 = -1$  olur.  $U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  bulunur.

iki katlı kök durumunda bulunan  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  çözümü eşitliğin sağ tarafına yazılarak ikinci kök değeri için çözüm elde edilir.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Bu denklem sisteminin de rangı 1 olduğundan bir tane keyfi bilinmeyen seçeriz.

$$-u_1 - u_2 = 1$$

Eğer  $u_1 = 1$  seçersek  $u_2 = -2$  olur.  $U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  bulunur.

Genel çözüm

$$X_{genel} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) e^{2t}$$

olur [22].

$r = \lambda$  özdeğerinin katlılığının üç olması durumu :

**1. durum :**

$r = \lambda$  üç katlı özdeğerine  $U_1, U_2$  ve  $U_3$  lineer bağımsız özvektörleri karşı gelsin. Bu durumda lineer bağımsız çözümler

$$X_1(t) = U_1 e^{\lambda t}$$

$$X_2(t) = U_2 e^{\lambda t}$$

$$X_3(t) = U_3 e^{\lambda t} \quad (3.32)$$

şeklindedir.

**2. durum :**

$r = \lambda$  üç katlı özdeğerine bir tane lineer bağımsız  $U_1$  özvektörü karşı gelsin. Bu durumda sistemin ilk çözümü,

$$X_1(t) = U_1 e^{\lambda t} \quad (3.33)$$

şeklindedir.

Sistemin ikinci çözümü

$$X_2(t) = U_1 t e^{\lambda t} + U_2 e^{\lambda t} \quad (3.34)$$

şeklinde aranır.

Üçüncü çözüm ise

$$X_3(t) = U_1 \frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} + U_2 t e^{\lambda t} + U_3 e^{\lambda t} \quad (3.35)$$

ile bulunur.

$U_1$  vektörü

$(A - \lambda I)U_1 = 0$  denklemini sağlar.  $U_2$  ise

$$(A - \lambda I)U_2 = U_1 \quad (3.36)$$

denkleminde bulunur.  $U_3$  ise

$$(A - \lambda I)U_3 = U_2 \quad (3.37)$$

denkleminde belirlenir.

$U_2$  ve  $U_3$  vektörüne genelleştirilmiş özvektörler denir.

### **3. durum :**

$r = \lambda$  üç katlı özdeğerine karşı iki tane lineer bağımsız  $U_1$  ve  $U_2$  özvektörleri karşı geliyorsa, denklem sisteminin iki çözümü

$$X_1(t) = U_1 e^{\lambda t}$$

$$X_2(t) = U_2 e^{\lambda t} \quad (3.38)$$

şeklindedir. Üçüncü çözüm ise

$$X_3(t) = \xi t e^{\lambda t} + U_3 e^{\lambda t} \quad (3.39)$$

Burada  $\xi = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)$  seçilirse

$$(A - \lambda I)U_3 = \xi \quad (3.40)$$

denklemini çözülebilir.  $c_1$  ve  $c_2$  öyle seçilebilir ki (3.40) denkleminde  $U_3$  çözülebilir.

Burada  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$  ve  $X_3(t)$  çözümleri  $r = \lambda$  özdeğerine karşı gelen lineer bağımsız çözümler olurlar [22].

**Örnek 3.7 :**

$$x_1' = 3x_1 + x_2$$

$$x_2' = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \quad (3.41)$$

$$x_3' = 2x_2 + 3x_3$$

sisteminin genel çözümünü bulalım.

Denklem sistemi  $X' = AX$  biçiminde ifade edilebilir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Katsayılar matrisinin özdeğerleri  $\det(A - \lambda I) = 0$  denkleminde belirlenir :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^3 + 2(3-\lambda) - 2(3-\lambda) = (3-\lambda)^3 = 0$$

Sonuç olarak  $\lambda = 3$ 'tür ve üç katlı köktür. Bu özdeğere karşılık gelen özvektör  $(A - \lambda I)v = 0$  denkleminde bulunur:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

denklem sisteminin çözümünden

$$v_2 = 0$$

$$v_3 = 2v_1 \quad (3.43)$$

elde edilir. Keyfi olarak  $v_1 = 1$  alınırsa,  $v_3 = 2$  bulunur. Dolayısıyla  $\lambda = 3$  karşılık gelen tek özvektör,

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

olur. Bu  $\lambda = 3$  için tek bir lineer bağımsız özvektördür, çünkü  $v_1$  için başka bir değer seçmiş olsaydık, bu özvektörün sabit sayısı ile çarpılmış halini elde ederdik. Buna göre verilen sistem Durum 2'ye uymaktadır. Öncelikle sabit  $u$  ve  $w$  vektörlerini belirleyelim.  $v$  vektörünü  $(A - \lambda I)u = v$  denkleminde yazarsak,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

elde edilir. Bu sistemi çözersek,

$$u_2 = 1$$

$$u_3 = 2u_1 \quad (3.45)$$

elde edilir. Keyfi olarak  $u_1 = 1$  alınırsa,  $u_3 = 2$  bulunur. Buna göre  $u$  vektörü

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ olarak elde edilir.}$$

Şimdi de bunu  $(A - \lambda I)w = u$  denkleminde yazalım:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

denklem sistemini çözersek,

$$w_2 = 1$$

$$w_3 = 2w_1 - 1 \quad (3.47)$$

sistemi elde edilir. Keyfi olarak  $w_1 = 1$  alınırsa,  $w_3 = 1$  olarak bulunur.  $w$  vektörü şöyle olur:

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Böylece verilen sistemin lineer bağımsız üç çözümü şu şekilde yazılır:

$$X_1 = ve^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t}$$

$$X_2 = vte^{\lambda t} + ue^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} te^{3t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} = \begin{bmatrix} t+1 \\ 1 \\ 2t+2 \end{bmatrix} e^{3t}$$

$$X_3 = \frac{1}{2}vt^2e^{\lambda t} + ute^{\lambda t} + we^{\lambda t} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} t^2e^{3t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} te^{3t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 + t + 1 \\ t+1 \\ t^2 + t + 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

Sistemin genel çözümü ise

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$$

$$= C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{bmatrix} t+1 \\ 1 \\ 2t+2 \end{bmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 + t + 1 \\ t+1 \\ t^2 + t + 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

veya skaler biçimde

$$X_1 = \left[ C_1 + C_2(t+1) + C_3 \left( \frac{1}{2}t^2 + t + 1 \right) \right] e^{3t}$$

$$X_2 = [C_2 + C_3(t+1)]e^{3t}$$

$$X_3 = [C_1 + 2C_2(t+1) + C_3(t^2 + t + 1)]e^{3t} \quad (3.48)$$

şeklinde elde edilir [21].

**Örnek 3.8 :**

$$X' = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{bmatrix} X \quad \text{sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem sisteminin genel}$$

çözümünü bulalım.

$$\text{Burada } A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & -2 \\ 8 & -5-\lambda & -4 \\ -4 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0$$

$\lambda = 1$  kökü üç katlı özdeğerdir.

Özvektörleri bulalım.

$$(A - I)\xi = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 & -2 \\ 8 & -5-\lambda & -4 \\ -4 & 3 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

denkleminde  $\lambda = 1$  koyarak

$$(A - I)\xi = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 8 & -6 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve buradan

$$4\xi_1 - 3\xi_2 - 2\xi_3 = 0$$

Bu denklemde matrisin rangı bir olduğu için iki bilinmeyen keyfi seçilir.

$\xi_1 = 1, \xi_2 = 0$  seçelim.  $\xi_3 = 2$  bulunur.

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad X_1(t) = \xi_1 e^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} e^t$$

bulunur.

$\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 2$  seçelim.  $\xi_3 = -3$  bulunur.

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad X_2(t) = \xi_1 e^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} e^t$$

bulunur.

$X_1(t)$  ve  $X_2(t)$  lineer bağımsızdır. Lineer bağımsız üçüncü çözümü bulamayız. Lineer bağımsız üçüncü çözümü bulmak için;

$k_1$  ve  $k_2$  sabit büyüklükler

$$\xi = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ 2k_2 \\ 2k_1 - 3k_2 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

olmak üzere lineer bağımsız üçüncü çözüm

$$X_3(t) = \xi t e^{\eta t} + \eta e^{\eta t} = \xi t e^t + \eta e^t$$

ilişkisi ile belirlenecektir.  $\eta$  ise

$$(A - \lambda I)\eta = (A - I)\eta = \xi$$

den bulunacaktır.

$$(A - I)\eta = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 8 & -6 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ 2k_2 \\ 2k_1 - 3k_2 \end{bmatrix}$$

(birinci satırın iki katını ikinci satıra, birinci satırı üçüncü satıra ekleyerek)

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ 2k_2 - 2k_1 \\ 3k_1 - 3k_2 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

ve (3.51) sisteminden

$$4\eta_1 - 3\eta_2 - 2\eta_3 = k_1$$

$$2k_2 - 2k_1 = 0$$

$$3k_1 - 3k_2 = 0 \quad (3.52)$$

denklemleri elde edilir.

$$k_1 = k_2 \text{ bulunur. } k_1 = 2 \text{ atamasını yapalım. } \xi = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$k_1 = 2$  olduğu da değerlendirilerek,

$$\eta_3 = \frac{1}{2}(4\eta_1 - 3\eta_2) - 1$$

ve

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \frac{4\eta_1 - 3\eta_2}{2} - 1 \end{bmatrix} = \eta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \eta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X_3(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} te^t + \left( \eta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \eta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) e^t$$

olur. Genel çözüm

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) + C_3 X_3(t)$$

$$\begin{aligned}
&= C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} e^t + C_3 \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} t e^t + \left( \eta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \eta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) e^t \right\} \\
&= (C_1 + \eta_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} e^t + (C_2 + 2\eta_2) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} e^t + C_3 \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) e^t \\
&= C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} e^t + C_3 \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) e^t \tag{3.53}
\end{aligned}$$

olarak bulunur [12].

Özdeğerin katlılığı dört olduğunda çözüm yolu daha karmaşık bir hal alacaktır.

### 3.1.3 Smith Normal Form ile Çözüm

$$\frac{dX}{dt} = AX \tag{3.54}$$

sabit katsayılı homojen diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım.  $D$  türev operatörü olmak üzere (3.54)'ü

$$(D - A)X = 0 \tag{3.55}$$

şeklinde yazalım.  $D - A = B$  dersek  $B$  matrisi bir polinom matris olmak üzere (3.54) sistemi

$$BX = 0 \tag{3.56}$$

şeklini alır.  $B$  polinom matrisinin  $PBQ = N$  smith normal formunun bulunduğunu farzedelim. Buna göre (3.56)'da

$$X = QY \text{ dönüşümü yapılırsa}$$

$$BQY = 0 \text{ ve her iki tarafı soldan } P \text{ matrisi ile çarparsak}$$

$$PBQY = 0 \text{ ve}$$

$NY = 0$  olur.

$N$  bilindiğine göre  $Y$  sütun matrisi hesaplanır. Bulunan  $Y$  yerine konarak  $Q$  belli olduğu için  $X$  yani (3.54)'nin çözümü bulunur.

**Örnek 3.10 :**

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -2x_2\end{aligned}\tag{3.57}$$

diferansiyel denklem sistemini smith normal form ile çözelim.

$D$  türev operatörünü kullanarak sistemi

$$\begin{aligned}(D-1)x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + (D-3)x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_2 + Dx_3 &= 0\end{aligned}\tag{3.58}$$

şeklinde yazabiliriz veya

$$B = \begin{bmatrix} D-1 & -2 & -1 \\ -1 & D-3 & -2 \\ 0 & 2 & D \end{bmatrix}$$

dersek

$BX = 0$  olur.

$B$  matrisinin Smith normal formu,  $H_{12}$ ,  $H_1(-1)$ ,  $K_{21}(D-3)$ ,  $K_{31}(-2)$ ,  $H_{21}(-D+1)$ ,

$H_{23}$ ,  $H_2\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $K_{32}\left(-\frac{1}{2}D\right)$ ,  $H_{32}(-D^2+4D-1)$ ,  $K_3(-2)$  elemanter dönüşümleri

uygulanarak

$$N = PBQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & D^3 - 4D^2 + 5D - 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.  $P$  ve  $Q$  matrisleri

$$P = H_{32}(-D^2 + 4D - 1).H_2\left(\frac{1}{2}\right).H_{23}.H_{21}(-D + 1).H_1(-1).H_{12}$$

$$Q = K_{21}(D - 3).K_{31}(-2).K_{32}\left(-\frac{1}{2}D\right).K_3(-2)$$

olacağından her bir elemanter dönüşüme ait elemanter matris yazılır ve bunlar çarpılarak  $P$  ve  $Q$  matrisleri bulunur.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & D-1 & -\frac{1}{2}D^2 + 2D - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{ve } Q = \begin{bmatrix} 1 & D-3 & D^2 - 3D + 4 \\ 0 & 1 & D \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

olur.

$$BX = 0 \text{ idi.}$$

$$X = QY \text{ dönüşümü yapılırsa,}$$

$$BQY = 0$$

$$PBQY = 0$$

$$NY = 0 \text{ olur.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & D^3 - 4D^2 + 5D - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

den

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0 \quad \text{ve} \quad y_3 = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{2t}$$

olacağından

$$X = QY \text{ den de}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & D-3 & D^2-3D+4 \\ 0 & 1 & D \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = (2c_1 - c_2 + 2c_2 t) e^t + 2c_3 e^{2t}$$

$$x_2 = (c_1 + c_2 + c_2 t) e^t + 2c_3 e^{2t} \quad (3.59)$$

$$x_3 = (-2c_1 - 2c_2 t) e^t - 2c_3 e^{2t}$$

olarak bulunur [2].

### 3.1.4 Rasyonel Kanonik Form ile Çözüm

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad (3.60)$$

sabit katsayılı homojen diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım.  $A$  kare matrisinin  $S = R^{-1}AR$  rasyonel kanonik formunun bulunmuş olduğunu kabul edelim. (3.60)'da  $R$  tekil olmayan bir kare matris olmak üzere

$$X = RY \quad (3.61)$$

dönüşümü yaparsak,

$$R \frac{dY}{dt} = ARY \quad \text{ve bunun her iki tarafını soldan } R^{-1} \text{ ile çarparsak}$$

$$\frac{dY}{dt} = R^{-1}ARY = SY \quad (3.62)$$

şeklinde olur.  $S$  matrisi bilindiğine göre (3.62)'den  $Y$  ve bu (3.61)'de yerine konarak (3.60)'ın  $X$  çözümü bulunur.

**Örnek 3.9 :**

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \quad (3.63)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -2x_2$$

diferansiyel denklem sistemini Rasyonel Kanonik Form ile çözelim.

$\lambda I - A$  matrisinin Smith normal formu

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 \end{bmatrix}$$

dir. O halde  $\lambda I - A$ 'nın değişmez çarpanları sadece  $f_3(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$ 'dir. Bu değişmez çarpana ait eş matris ise

$$C(f_3(\lambda)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$$

$$f_3(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

$$C(f_3(\lambda)) = C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

dir.

$$S = \text{diag}(C_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Eş matrisin transpozu alınarak kullanılabilir.  $A$  matrisinin rasyonel kanonik formu

$$S = \text{diag}(C_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

olur. Eğer  $X$ ,  $A$  matrisine göre  $p$ . dereceden  $g(\lambda)$  polinomuna ait bir vektör ise;  $X, AX, \dots, A^{p-1}X$  lineer bağımsız vektörleri  $X$  'e sahip bir zincir olarak adlandırılır.

Şimdi  $S = R^{-1}AR$  yapan  $R$  matrisini bulalım.  $A$  matrisinin minimum polinomu  $f_3(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$  'dur.  $f_3(\lambda)$  minimum polinom olduğundan  $f_3(A) = 0$  'dır. O halde  $X$  vektörü keyfi olarak seçilebilir.  $X = \{1, 0, 0\}$  seçilirse,  $AX = \{1, 1, 0\}$  ve  $A^2X = \{3, 4, -2\}$  olarak bulunur. Dolayısıyla

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.  $\frac{dY}{dt} = SY$  ifadesi kullanılarak

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$y_1' = 2y_3$$

$$y_2' = y_1 - 5y_3 \quad (3.64)$$

$$y_3' = y_2 + 4y_3$$

denklemleri elde edilir. (3.64) sisteminden kolayca

$$y_3''' - 4y_3'' + 5y_3' - 2y_3 = 0 \quad (3.65)$$

sabit katsayılı denklemi bulunur. Bu çözülürse,

$$y_3 = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{2t}$$

bulunur.

(3.64)'deki denklemlere göre integral alarak

$$y_1 = (2c_1 - 2c_2 + 2c_2t)e^t + c_3e^{2t} + c_4$$

$$y_2 = (-3c_1 + c_2 - 3c_2t)e^t - 2c_3e^{2t} + c_4t + c_5$$

olduğu görülür. Fakat (3.64)'e göre  $y_3' = y_2 + 4y_3$  olması için  $c_4 = c_5 = 0$  olmalıdır.

(3.64) sisteminin çözümü

$$y_1 = (2c_1 - 2c_2 + 2c_2t)e^t + c_3e^{2t}$$

$$y_2 = (-3c_1 + c_2 - 3c_2t)e^t - 2c_3e^{2t} \quad (3.66)$$

$$y_3 = (c_1 + c_2t)e^t + c_3e^{2t}$$

olur.  $X = RY$  dönüşümünden faydalanarak,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = (2c_1 - c_2 + 2c_2t)e^t + 2c_3e^{2t}$$

$$x_2 = (c_1 + c_2 + c_2t)e^t + 2c_3e^{2t} \quad (3.67)$$

$$x_3 = (-2c_1 - 2c_2t)e^t - 2c_3e^{2t}$$

çözümleri bulunur [2].

### 3.1.5 Üçgen Matris ile Çözüm

Diyagonalinin altındaki veya üstündeki elemanları sıfır olan herhangi bir kare matrise üçgen matris denir.

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad (3.68)$$

sisteminin  $D$  türev operatörünü kullanarak

$$(D - A)X = 0 \text{ ve } D - A = B \text{ diyerek}$$

$$BX = 0 \quad (3.69)$$

şeklinde yazalım.

Şimdi  $B$  matrisini, sadece elemanter satır işlemlerini kullanarak ona denk olan üçgen matris haline getirelim. Bu üçgen matrise  $M$  dersek (3.69) sistemi

$$MX = 0 \quad (3.70)$$

sistemine denk olur. Çünkü elemanter satır dönüşümlerine göre:

- a. İki satırın yer değiştirilmesi, iki denklemin yer değiştirilmesine karşılık gelir. Bu durum sistemin çözümünü değiştirmez.
- b. Bir satırın sıfırdan farklı bir sabitle çarpılması, bir denklemin sabitle çarpılması demektir. Bu durumda sistemin çözümü aynı kalır.
- c. Herhangi bir satırın bir  $f(D)$  polinomu ile çarpılıp diğer bir satır ile toplanması, bir denkleme  $f(D)$  diferansiyel operatörünün uygulanması ve sistemin diğer bir denklemi ile toplanması demektir. Herbir dönüşüm tersine çevrilebilir olduğundan elde edilecek sistem önceki sisteme eşdeğerdir.

Sonuç olarak (3.69) sistemine denk olan (3.70) sistemi açık olarak

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2n} \\ 0 & 0 & m_{33} & \dots & m_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

veya

$$m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + m_{13}x_3 + \dots m_{1n}x_n = 0$$

$$m_{22}x_2 + m_{23}x_3 + \dots m_{2n}x_n = 0$$

$$\dots\dots\dots (3.71)$$

$$m_{n-1,n-1}x_{n-1} + m_{n-1,n}x_n = 0$$

$$m_{nn}x_n = 0$$

şeklinde olur [2].

katsayılar matrisi üst üçgensel hale getirilen denklem sisteminin çözümü en son bilinmeyenden başlanarak geriye doğru gerçekleştirilir [23].

Sonra bu bir üstteki denklemde yerine konarak  $x_{n-1}$  ve böylece devam ederek bütün  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) bilinmeyenleri bulunmuş olur [2].

**Örnek 3.11 :**

$$x_1 + (D+1)x_2 + 2x_3 = 0$$

$$(D-2)x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \quad (3.72)$$

$$-x_1 + x_2 + Dx_3 = 0$$

homojen denklem sistemini çözelim.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & D+1 & 2 \\ D-2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & D \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$B$  katsayılar matrisidir.  $B$  matrisine  $H_{23}$ ,  $H_{21}(1)$ ,  $H_{31}(2-D)$ ,  $H_{32}(D-3)$ ,  $H_{23}$ ,  $H_{32}(D+2)$  elemanter dönüşümleri uygulanırsa,  $B$  matrisine denk olan  $M$  üçgen matrisi elde edilir.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & D+1 & 2 \\ 0 & -1 & D^2-3D+1 \\ 0 & 0 & (D+2)(D^2-3D+2) \end{bmatrix}$$

Böylece verilen sisteme denk olan

$$x_1 + (D+1)x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-x_2 + (D^2-3D+1)x_3 = 0 \quad (3.73)$$

$$(D+2)(D^2-3D+2)x_3 = 0$$

sistemi bulunur. Üçüncü denklemden  $x_3$  çözülür ve ikinci denklemde yerine konursa  $x_2$ , birinci denklemden de  $x_2$  ve  $x_3$  yerine konarak sistemin genel çözümü bulunur [8].

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4c_1e^t + 5c_2e^{2t} + 11c_3e^{-2t} \\ -c_1e^t - c_2e^{2t} + 11c_3e^{-2t} \\ c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

**Örnek 3.12:**

$$D^2x_1 + (14D)x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 - (D^2 + 3)x_2 + 2x_3 = 0 \quad (3.74)$$

$$(D^2 + 2D)x_2 - 2x_3 = 0$$

homojen denklem sistemini çözelim.

$$B = \begin{bmatrix} D^2 & 14D & -1 \\ 1 & -(D^2 + 3) & 2 \\ 0 & (D^2 + 2D) & -2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$B$  katsayılar matrisidir.  $B$  matrisine  $H_{12}$ ,  $H_{21}(-D^2)$ ,  $H_{23}$ ,  $H_{32}(-D^2 + 2D - 7)$  elemanter dönüşümleri uygulanırsa,  $B$  matrisine denk olan  $M$  üçgen matrisi elde edilir.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -D^2 - 3 & 2 \\ 0 & D^2 + 2D & -2 \\ 0 & 0 & -4D + 13 \end{bmatrix}$$

Böylece verilen sisteme denk olan

$$x_1 - (D^2 + 3)x_2 + 2x_3 = 0$$

$$(D^2 + 2D)x_2 - 2x_3 = 0 \quad (3.75)$$

$$(-14D + 13)x_3 = 0$$

sistemi bulunur. Üçüncü denklemden  $x_3$  çözülür ve ikinci denklemde yerine konursa  $x_2$ , birinci denklemden de  $x_2$  ve  $x_3$  yerine konarak sistemin genel çözümü bulunur [8].

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{112}{273}c_1e^{\frac{13t}{4}} + 3c_2 + 7c_3e^{-2t} \\ \frac{32}{273}c_1e^{\frac{13t}{4}} + c_2 + c_3e^{-2t} \\ c_1e^{\frac{13t}{4}} \end{bmatrix}$$

### 3.1.6 Üstel Matris ile Çözüm

$\dot{x}(t) = Ax(t)$  'nin çözümü

$x(t) = e^{At}k$  şeklindedir. Burada  $k$  gelişigüzel bir sabit vektördür.

**Örnek 3.13 :**

$$\dot{x} = x + y$$

$$\dot{y} = 9x + y \quad (3.76)$$

diferansiyel denklem sistemini çözelim.

$$\text{Bu denklem sistemi } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  matris sistemine denktir.

$A$  iki satır ve iki sütuna sahip,  $n = 2$  olduğundan,

$$e^{At} = \alpha_1 At + \alpha_0 I = \begin{bmatrix} \alpha_1 t + \alpha_0 & \alpha_1 t \\ 9\alpha_1 t & \alpha_1 t + \alpha_0 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$\lambda I - At = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t & t \\ 9t & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - t & -t \\ -9t & \lambda - t \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - At) = \begin{vmatrix} \lambda - t & -t \\ -9t & \lambda - t \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda t - 8t^2$$

$At$ 'nin öz denklemi  $\lambda^2 - 2\lambda t - 8t^2 = 0$  olur.  $At$  nin özdeğerleri  $\lambda_1 = 4t$  ve  $\lambda_2 = -2t$ 'dir ve her ikisi de tek katlıdır.

$\lambda_i$ ,  $At$ 'nin bir özdeğeri olduğu için,  $e^{\lambda_i} = r(\lambda_i)$ 'dir.

$$r(\lambda_i) = \alpha_1 \lambda_i + \alpha_0$$

$$r(\lambda_1) = e^{4t} = 4t\alpha_1 + \alpha_0$$

$$r(\lambda_2) = e^{-2t} = -2t\alpha_1 + \alpha_0$$

denklemlerini elde ederiz. Bu denklemlerden  $\alpha_0$  ve  $\alpha_1$  çözülürse;

$$\alpha_1 = \frac{1}{6t}(e^{4t} - e^{-2t}) \quad \text{ve} \quad \alpha_0 = \frac{1}{3}(e^{4t} + 2e^{-2t}) \quad \text{buluruz. Bu değerleri (3.77)'de kullanıp}$$

sadeleştirirsek

$$e^{At} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3e^{4t} + 3e^{-2t} & e^{4t} - e^{-2t} \\ 9e^{4t} - 9e^{-2t} & 3e^{4t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

ve böylece çözümü

$$\begin{aligned} x(t) = e^{At} k &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3e^{4t} + 3e^{-2t} & e^{4t} - e^{-2t} \\ 9e^{4t} - 9e^{-2t} & 3e^{4t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(3k_1 + k_2)e^{4t} + \frac{1}{6}(3k_1 - k_2)e^{-2t} \\ \frac{3}{6}(3k_1 + k_2)e^{4t} - \frac{3}{6}(3k_1 - k_2)e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir. O halde

$$x(t) = x_1(t) = \frac{1}{6}(3k_1 + k_2)e^{4t} + \frac{1}{6}(3k_1 - k_2)e^{-2t}$$

$$y(t) = y_1(t) = \frac{3}{6}(3k_1 + k_2)e^{4t} - \frac{3}{6}(3k_1 - k_2)e^{-2t}$$

dir. Eğer iki yeni gelişigüzel sabiti  $k_3 = \frac{3(k_1 + k_2)}{6}$  ve  $k_4 = \frac{3(k_1 - k_2)}{6}$  olarak

tanımlarsak,

$$x(t) = k_3 e^{4t} + k_4 e^{-2t} \quad \text{ve}$$

$$y(t) = 3k_3 e^{4t} - 3k_4 e^{-2t} \quad \text{olur [3].}$$

**Örnek 3.14 :**

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_2 + x_3 \quad (3.78)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 3x_3$$

diferansiyel denklem sistemini çözelim.

$$\text{Bu denklem sistemi } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  matris sistemine denktir.

$A$  üç satır ve üç sütuna sahip,  $n = 3$  olduğundan,

$$e^{At} = \alpha_2 A^2 t^2 + \alpha_1 A t + \alpha_0 I \quad (3.79)$$

$$= \alpha_2 \begin{bmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} t^2 + \alpha_1 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} t + \alpha_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9\alpha_2 t^2 + 3\alpha_1 t + \alpha_0 & 6\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t & \alpha_2 t^2 \\ 0 & 9\alpha_2 t^2 + 3\alpha_1 t + \alpha_0 & 6\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t \\ 0 & 0 & 9\alpha_2 t^2 + 3\alpha_1 t + \alpha_0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda I - At = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} \lambda - 3t & -t & 0 \\ 0 & \lambda - 3t & -t \\ 0 & 0 & \lambda - 3t \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - At) = \begin{vmatrix} \lambda - 3t & -t & 0 \\ 0 & \lambda - 3t & -t \\ 0 & 0 & \lambda - 3t \end{vmatrix} = (\lambda - 3t)^3$$

$At$ 'nin karakteristik (öz) denklemi  $(\lambda - 3t)^3 = 0$  olur.  $At$ 'nin özdeğerleri  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3t$  olup, üç katlı tek özdeğer olduğundan, Teorem 2.6'dan

$\lambda_i$ ,  $At$ 'nin bir özdeğeri olduğu için,  $e^{\lambda_i} = r(\lambda_i)$ 'dir.

$$e^{\lambda_i} = \frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_i} \quad \text{ve} \quad e^{\lambda_i} = \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_i} \quad \text{eşitlikleri de sağlanır.}$$

$r(\lambda) = \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$  olur. O halde

$$\frac{dr(\lambda)}{d\lambda} = 2\alpha_2 \lambda + \alpha_1$$

$$\frac{d^2 r(\lambda)}{d\lambda^2} = 2\alpha_2$$

dir.

$$e^{3t} = \alpha_2 9t^2 + \alpha_1 3t + \alpha_0$$

$$e^{3t} = \alpha_2 6t + \alpha_1$$

$$e^{3t} = 2\alpha_2$$

denklemlerini elde ederiz. Bu denklemlerden  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  çözümlürse;

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} e^{3t} \quad \alpha_1 = (1 - 3t) e^{3t} \quad \text{ve} \quad \alpha_0 = (1 - 3t + \frac{9}{2} t^2) e^{3t} \quad \text{bulunur. Bu değerleri (3.79)'da}$$

yerine yazarsak

$$e^{At} = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 / 2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve böylece çözümü

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{At}k = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} \\
&= e^{3t} \begin{bmatrix} k_1 + k_2 t + (t^2/2)k_3 \\ k_2 + k_3 t \\ k_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dir. O halde

$$x_1(t) = \left( k_1 + k_2 t + \frac{t^2}{2} k_3 \right) e^{3t}$$

$$x_2(t) = (k_2 + k_3 t) e^{3t}$$

$$x_3(t) = k_3 e^{3t}$$

dir.

**Örnek 3.15 :**

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 \quad (3.80)$$

diferansiyel denklem sistemini çözelim.

$$\text{Bu denklem sistemi } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  matris sistemine denktir.

$A$  iki satır ve iki sütuna sahip,  $n = 2$  olduğundan,

$$e^{At} = \alpha_1 A t + \alpha_0 I = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 t \\ -\alpha_1 t & \alpha_0 \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

$$\lambda I - At = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -t \\ t & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - At) = \begin{vmatrix} \lambda & -t \\ t & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + t^2$$

$At$ 'nin öz denklemi  $\lambda^2 + t^2 = 0$  olur.  $At$ 'nin özdeğerleri  $\lambda_1 = it$  ve  $\lambda_2 = -it$ 'dir ve her ikisi de tek katlıdır. Teorem 2.6'dan

$\lambda_i$ ,  $At$ 'nin bir özdeğeri olduğu için,  $e^{\lambda_i} = r(\lambda_i)$ 'dir.

$$r(\lambda_i) = \alpha_1 \lambda_i + \alpha_0$$

$$r(\lambda_1) = e^{it} = (it)\alpha_1 + \alpha_0$$

$$r(\lambda_2) = e^{-it} = (-it)\alpha_1 + \alpha_0$$

denklemlerini elde ederiz. Bu denklemlerden  $\alpha_0$  ve  $\alpha_1$  çözüp, Euler bağıntısını kullanırsak,

$$\alpha_1 = \frac{1}{2it}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{\sin t}{t} \quad \text{ve} \quad \alpha_0 = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \cos t \quad \text{buluruz. Bu değerleri (3.81)'de}$$

kullanırsak,

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

ve böylece çözümü

$$\begin{aligned} x(t) = e^{At}k &= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k_1 \cos t + k_2 \sin t \\ -k_1 \sin t + k_2 \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir. O halde

$$x(t) = x_1(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t$$

$$y(t) = y_1(t) = -k_1 \sin t + k_2 \cos t$$

dir [3].

### 3.2 Sabit Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemi

$a_{ij}$ 'ler sabit sayılar olmak üzere,  $h_i(t)$ 'ler de  $\alpha < t < \beta$  aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + h_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + h_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + h_n(t)\end{aligned}\tag{3.82}$$

denklem sistemine sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemi denir. Bu sistemi kısa olarak,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + h_i(t) \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3.83)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Matrisyel gösterilimi ise

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\frac{dX}{dt} = AX + H \quad (3.84)$$

dir [2].

### 3.2.1 Eleminasyon(Yok Etme) ile Çözüm

**Örnek 3.16 :**

$$Dx + (D+1)y = e^t$$

$$(D+2)x - Dz = t \quad (3.85)$$

$$(D+1)y + (D+2)z = 0$$

sabit katsayılı lineer homojen olmayan denklem sisteminin genel çözümünü eleminasyon (yok etme) metodu ile bulalım.

Üçüncü denklem birinciden çıkarıldığında,

$$Dx - (D+2)z = e^t \quad (3.86)$$

elde edilir. Bu denklem ile ikinci denklem birlikte çözülebilir. İkinci denkleme  $D$  operatörü ve (3.86) denklemini de  $D+2$  operatörü uygulanarak taraf tarafa çıkarılırsa,

$$4(D+1)z = 1 - 3e^t$$

Bu denklemden

$$z = c_1 e^{-t} - \frac{3}{8} e^t + \frac{1}{4}$$

elde edilir.  $z$  değişkeninin bu değeri (3.86)'da yerine yazılırsa,

$$Dx = c_1 e^{-t} - \frac{1}{8} e^t + \frac{1}{2}$$

olur. Bu denklemden

$$x = -c_1 e^{-t} - \frac{1}{8} e^t + \frac{t}{2} + c_2$$

bulunur.  $x$  değişkeninin bu değeri denklem sistemindeki birinci denklemde yerine yazılırsa,

$$(D+1)y = -c_1 e^{-t} + \frac{9}{8} e^t - \frac{1}{2}$$

olur. Buradan

$$y = -c_1 t e^{-t} + \frac{9}{16} e^t - \frac{1}{2} + c_3 e^{-t}$$

bulunur.

$x, y, z'$ 'nin değerleri verilen denklem sisteminin her bir denkleminde yerine yazılırsa,

$$c_2 = -\frac{1}{4}$$

bulunur.

O halde iki bağımsız sabit içeren genel çözüm

$$x = -c_1 e^{-t} - \frac{1}{8} e^t + \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$$

$$y = -c_1 t e^{-t} + \frac{9}{16} e^t - \frac{1}{2} + c_3 e^{-t}$$

$$z = c_1 e^{-t} - \frac{3}{8} e^t + \frac{1}{4}$$

Denklem sisteminin Wronskian'ını bulalım.

$$W = \begin{vmatrix} D & D+1 & 0 \\ D+2 & 0 & -D \\ 0 & D+1 & D+2 \end{vmatrix} = -4D^2 - 8D - 4$$

Wronskian'ın değerine baktığımızda, mertebesi "2" olduğuna göre, sistemin bağımsız sabit sayısı iki tane olmak zorundadır [9].

### 3.2.2 Determinant (Cramer) Yöntemi ile Çözüm

$L_1, L_2, L_3, L_4$  sabit katsayılı lineer diferansiyel operatörler olmak üzere,  $x$  ve  $y$  değişkenlerine bağlı bir lineer diferansiyel denklem sistemi;

$$L_1 x + L_2 y = g_1(t)$$

$$L_3 x + L_4 y = g_2(t) \quad (3.87)$$

şeklinde yazılır. Yok etme yöntemi kullanılarak, bu iki denklemden önce  $y$  ve sonrada  $x$  değişkeni yok edilirse:

$$(L_1L_4 - L_2L_3)x = f_1(t) \quad \text{ve} \quad (L_1L_4 - L_2L_3)y = f_2(t) \quad (3.88)$$

bulunur. Burada

$$f_1(t) = L_4g_1(t) - L_2g_2(t) \quad \text{ve} \quad f_2(t) = L_1g_2(t) - L_3g_1(t)$$

şeklindedir. (3.88) ifadesi determinant yöntemi kullanılarak,

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} g_1 & L_2 \\ g_2 & L_4 \end{vmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} L_1 & g_1 \\ L_3 & g_2 \end{vmatrix} \quad (3.89)$$

olur. Eğer,

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

ve  $n$ . mertebeden bir diferansiyel operatör ise,

(3.87) sistemi  $x$  ve  $y$ 'ye bağlı  $2n$ . mertebeden diferansiyel denklem sistemi olarak yeniden yazılabilir.

(3.87) sisteminde bulunan her bir diferansiyel denklemin karakteristik denklemleri ve tamamlayıcı fonksiyonları aynıdır.

$x$  ve  $y$ 'nin her ikisi de görünüşte toplam  $2n$  sayıda sabit içerirler. Fakat lineer bağımsız sabitlerin sayısı  $n$  kadardır.

Eğer

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} = 0$$

ise (3.87) sisteminin, birden fazla sayıda lineer bağımsız sabit ihtiva eden çözümü vardır veya çözümü yoktur. (3.87) sistemi daha fazla değişkenler için de geçerlidir [16].

Homojen olmayan doğrusal denklem sistemleri, cebirsel denklem sistemlerin çözümünde uygulanan determinant yöntemiyle çözülebilir.

**Örnek 3.17 :**

$$(2D+1)x + (3D+1)y = e^{-t}$$

$$(D+5)x + (D+7)y = t \quad (3.90)$$

homojen olmayan denklem sisteminin çözümünü bulalım.

$$\begin{vmatrix} 2D+1 & 3D+1 \\ D+5 & D+7 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^{-t} & 3D+1 \\ t & D+7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2D+1 & 3D+1 \\ D+5 & D+7 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} 2D+1 & e^{-t} \\ D+5 & t \end{vmatrix}$$

Determinantların hesaplanmasıyla sabit katsayılı  $x$  ve  $y$  bilinmeyen fonksiyonlarına göre,

$$(-D^2 - D + 2)x = 6e^{-t} - t - 3$$

$$(-D^2 - D + 2)y = -4e^{-t} + t + 2$$

doğrusal denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin integrasyonundan  $c_1, c_2, c_3, c_4$  keyfi sabitleri göstermek üzere

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t + 3e^{-t} - \frac{t}{2} - \frac{7}{4}$$

$$y = c_3 e^{-2t} + c_4 e^t - 2e^{-t} + \frac{t}{2} + \frac{5}{4}$$

şeklinde bulunan değerler (3.90) sisteminde yerine yazıldığında,

$$c_3 = -\frac{3}{5}c_1, \quad c_4 = -\frac{3}{4}c_2$$

elde edilir. Böylece (3.90) sisteminin çözümü şu şekildedir:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 e^{-2t} + c_2 e^t + 3e^{-t} - \frac{t}{2} - \frac{7}{4} \\ -\frac{3}{5}c_1 e^{-2t} - \frac{3}{4}c_2 e^t - 2e^{-t} + \frac{t}{2} + \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

sistemin genel çözümü, katsayılar matrisinin determinantın mertebesi kadar bağımsız sabit içerir [8].

**Örnek 3.18 :**

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x - 4y = e^t$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - y = e^{4t} \quad (3.91)$$

lineer diferansiyel denklem sistemini operatör metodunu kullanarak çözelim.

Önce operatör kullanarak denklem sistemini yeniden yazalım.

$$(D-2)x + (D-4)y = e^t$$

$$Dx + (D-1)y = e^{4t}$$

$x$  ve  $y$  'nin değerlerini Cramer metodunu kullanarak şu şekilde bulabiliriz.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e^t & D-4 \\ e^{4t} & D-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-2 & D-4 \\ D & D-1 \end{vmatrix}} = \frac{(D-1)e^t - (D-4)e^{4t}}{(D-1)(D-2) - D(D-4)} = \frac{0}{D+2}$$

ve

$$(D+2)x = 0$$

bulunur. Bu denklem çözülürse,

$$x = ce^{-2t}$$

elde edilir.  $y$  'nin bulunmasına gelince,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} D-2 & e^t \\ D & e^{4t} \end{vmatrix}}{D+2} = \frac{4e^{4t} - 2e^{4t} - e^t}{D+2}$$

elde edilir. Denklem düzenlenirse,

$$(D+2)y = 2e^{4t} - e^t \quad (3.92)$$

olur. Bu denklemin homojen kısmının çözümü,

$$y_c = ke^{-2t}$$

ve homojen olmayan kısmının bir özel çözümü,

$y_p = Ae^{4t} + Be^t$  bulunur. Özel çözümü (3.92) denkleminde yerine koyulursa,

$$4Ae^{4t} + Be^t + 2Ae^{4t} + 2Be^t = 2e^{4t} - e^t$$

$$A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3} \text{ olarak bulunur.}$$

Bu durumda verilen lineer diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü,

$$x = ce^{-2t}$$

$$y = ke^{-2t} + \frac{1}{3}(e^{4t} - e^t)$$

bulunur.

(3.91) denklem sisteminin Wronskian'ını bulalım.

$$W = \begin{vmatrix} D-2 & D-4 \\ D & D-1 \end{vmatrix} = (D-2)(D-1) - (D^2 - 4D) = D+2$$

Wronskian'ın değeri  $(D+2)$  olduğuna, yani mertebesi "1" olduğuna göre, sistemin bağımsız sabit sayısı bir tane olmak zorundadır. Buna göre  $k_1$  ile  $c_1$  arasındaki bağıntıyı bulmak için,  $x$  ve  $y$ 'nin bulunan değerleri (3.91) denklem sisteminin denklemlerinden birine yerine konursa,

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - y = e^{4t}$$

$$-2ce^{-2t} - 2ke^{-2t} + \frac{4}{3}e^{4t} - \frac{1}{3}e^t - ke^{-2t} - \frac{1}{3}e^{4t} + \frac{1}{3}e^t = e^{4t}$$

$$(-2c - 3k)e^{-2t} = 0$$

$$k = -\frac{2}{3}c$$

Buna göre, denklem sisteminin genel çözümü,

$$x = ce^{-2t}$$

$$y = -\frac{2}{3}ce^{-2t} + \frac{1}{3}(e^{4t} - e^t)$$

bulunur [6].

### 3.2.3 Köşegenleştirme Yöntemi ile Çözüm

Bu metodla,  $A$   $n \times n$  'lik köşegenleştirilebilen sabit bir matris olmak üzere

$$x' = Ax + g(t) \quad (3.93)$$

formundaki sistemin çözümü aranır. Eğer  $A$  katsayılar matrisi köşegenleştirilebilirse denklem sistemi çözülebilir. Denklem sisteminin köşegenleştirme metoduyla çözülmesi, şu şekilde olur:

$A$  matrisinin özdeğerlerine karşı gelen  $U^{(1)}, \dots, U^{(n)}$  özvektörleri bulunur. Sütunları bu özvektörlerden oluşan  $T$  matrisi

$$T = \begin{bmatrix} U_1^{(1)} & \dots & U_1^{(n)} \\ . & \dots & . \\ . & \dots & . \\ . & \dots & . \\ U_n^{(1)} & \dots & U_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

şeklinde oluşturulur. Bu  $T$  matrisi ile  $x = Ty$  olacak şekilde yeni bir  $y$  bağımlı değişkeni tanımlanır. Bu dönüşüm (3.93)'de dikkate alınırsa

$$Ty' = ATy + g(t) \quad (3.94)$$

olur. (3.94) denkleminin her iki tarafı soldan  $T^{-1}$  ile çarpılırsa,

$$y' = (T^{-1}AT)y + T^{-1}g(t) = Dy + h(t) \quad (3.95)$$

denklem sistemi elde edilir. Buradaki  $D$  matrisi,  $A$ 'nın özdeğerlerini köşegeninde bulunduran bir matristir.  $D$  matrisi

$$D = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \gamma_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & \gamma_n \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matristir. Ayrıca  $h(t)$  ise  $h(t) = T^{-1}g(t)$ 'dir [13].

### Örnek 3.19 :

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -2e^t \end{bmatrix}$$

diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü köşegenleştirme metodu kullanarak bulalım.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

ile  $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$  özdeğerleri bulunur.

$\lambda_1 = -3$  için

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

özvektör denklemi elde edilir.

$$4u_{11} = -u_{21} \text{ 'den}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

özvektörü elde edilir.

$\lambda_1 = 2$  için

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

özvektör denklemi elde edilir.

$u_{12} = u_{22}$  'den

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

özvektörü bulunur.

Özvektörleri içeren matrisi  $T$  ile gösterirsek,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$x = Ty$   $x' = Ax + f(t)$  'de yerine konursa  $Ty' = ATy + f(t)$  olur.

Bu denklemin her iki tarafı  $T^{-1}$  ile çarpılarak

$$y' = (T^{-1}AT)y + T^{-1}f(t)$$

elde edilir.

$T^{-1}$ 'i hesaplayalım.

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 4/5 & 1/5 \end{array} \right]$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

dir.

$y' = (T^{-1}AT)y + T^{-1}f(t)$  oluşturulursa,

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -2e^t \end{bmatrix}$$

$$y_1' + 3y_1 = \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{2}{5}e^t$$

$$y_2' - 2y_2 = \frac{4}{5}e^{-2t} - \frac{2}{5}e^t$$

denklemleri çözülür.

$$y_1 = \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^t + c_1e^{-3t}$$

$$y_2 = -\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{2}{5}e^t + c_2e^{2t}$$

denklemleri elde edilir.

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^t + c_1e^{-3t} \\ -\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{2}{5}e^t + c_2e^{2t} \end{bmatrix}$$

Sistemin her iki tarafı  $T$  dönüşüm matrisi ile çarpılırsa, genel çözüm ( $x = Ty$ )

$$x = Ty = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^t + c_1e^{-3t} \\ -\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{2}{5}e^t + c_2e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^t + c_1e^{-3t} + c_2e^{2t} \\ -e^{-2t} - 4c_1e^t + c_2e^{2t} \end{bmatrix}$$

olur [24].

### 3.2.4 Parametrelerin Değişimi Yöntemi ile Çözüm

$X' = AX$  homojen denkleminin genel çözümü

$$X_h = \phi(t)C \quad (3.96)$$

biçiminde yazılabilir. Burada  $\phi(t)$ , denklemin temel matrisi ve  $C$  sabit sütun vektördür.

$$X_p(t) = \phi(t)V(t) \quad (3.97)$$

vektörel fonksiyonu, homojen olmayan

$$X' = AX + F(t) \quad (3.98)$$

denkleminin bir özel çözümü olacak şekilde  $V(t)$  sütun vektörü bulunup bulunamayacağını araştıralım.

Özel çözümü (3.98) denkleminde yerine koyalım.

$$\phi(t)V'(t) + \phi'(t)V(t) = A\phi(t)V(t) + F(t)$$

$$\phi'(t) = A\phi(t) \text{ olduğundan,}$$

$$\phi(t)V'(t) = F(t) \quad (3.99)$$

olur.

(3.99) denkleminin her iki tarafı  $\phi^{-1}(t)$  ile çarpılırsa

$$V'(t) = \phi^{-1}(t)F(t)$$

veya

$$V(t) = \int \phi^{-1}(t)F(t)dt \quad (3.100)$$

elde edilir.

(3.98) denkleminin

$$X_p(t) = \phi(t) \int \phi^{-1}(t)F(t)dt$$

ile verilen bir özel çözüme sahip olduğu anlaşılır.

Böylece homojen olmayan denklemin genel çözümü

$$X = X_h + X_p = \phi(t)C + \phi(t) \int \phi^{-1}(t)F(t)dt \quad (3.101)$$

dir.

**Örnek 3.20 :**

$$X'(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

denkleminin genel çözümünü bulalım. Bunun için önce

$$X'(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} X \quad (3.103)$$

homojen denkleminin genel çözümünü bulalım. Karakteristik polinom

$$P(r) = |A - rI| = \begin{vmatrix} -3-r & 1 \\ 2 & -4-r \end{vmatrix} = (r+2)(r+5)$$

ve özdeğerler  $r_1 = -2$  ve  $r_2 = -5$  dir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Böylece (3.103) denkleminin çözüm vektörleri

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} \text{ ve } X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-5t}$$

dir. Bu vektörler lineer bağımsızdır. (3.103) denkleminin temel matrisi

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix}$$

olup

$$\phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{-5t} \end{bmatrix}$$

dir. Böylece (3.101)'den

$$\begin{aligned} X_p &= \phi(t) \int \phi^{-1}(t) F(t) dt = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 2e^{2t}/3 & e^{2t}/3 \\ e^{5t}/3 & -e^{-5t}/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Özel çözümü bulmuş olduk. Genel çözüm ise,

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix} \\ X &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-5t} + \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} t - \begin{bmatrix} \frac{27}{50} \\ \frac{21}{50} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-t} \end{aligned}$$

dir [5].

### 3.2.5 Smith Normal Form ile Çözüm

$$\frac{dX}{dt} = AX + H \quad (3.104)$$

sabit katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklem sistemini gözönüne alalım.  $D$  türev operatörü olmak üzere (3.104)'ü

$$(D - A)X = H$$

şeklinde yazalım.  $D - A = B$  dersek  $B$  matrisi bir polinom matris olmak üzere (3.104) sistemi

$$BX = H \quad (3.105)$$

şeklini alır.  $B$  polinom matrisinin  $PBQ = N$  smith normal formunun (2.2.2)'de gösterildiği şekilde bulunduğunu farzedelim. Buna göre (3.105)'de

$$X = QY \quad (3.106)$$

dönüşümü yapılırsa

$$BQY = H \text{ ve her iki tarafı soldan } P \text{ matrisi ile çarparsak}$$

$$PBQY = PH \text{ ve}$$

$$NY = PH \quad (3.107)$$

olur.

$N$  ve  $P$  matrisleri bilindiğine göre (3.107)'den  $Y$  matrisi hesaplanır. Bulunan  $Y$  (3.106)'da yerine konarak  $Q$  belli olduğu için  $X$  yani (3.104) sisteminin çözümü bulunur [2].

### Örnek 3.22 :

$$Dx_1 + (D+1)x_2 = 0$$

$$(D+2)x_1 - (D-1)x_3 = t \quad (3.108)$$

$$(D+1)x_2 + (D+2)x_3 = e^t$$

diferansiyel denklem sistemini smith normal form ile çözelim.

$D = \frac{d}{dt}$  türev operatörünü kullanılmıştır. Burada  $x_1, x_2, x_3$  bir  $t$  gerçel değişkeninin bilinmeyen gerçel fonksiyonlarıdır.

Sistem matris notasyonuyla,

$$BX = \begin{bmatrix} D & D+1 & 0 \\ D+2 & 0 & -D+1 \\ 0 & D+1 & D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ e^t \end{bmatrix} = H$$

olur.

$B$  matrisinin Smith normal formu,  $K_{12}(-1)$ ,  $H_1(-1)$ ,  $K_{21}(D+1)$ ,  $H_{21}(-D-2)$ ,  $H_{31}(D+1)$ ,  $K_{23}(D)$ ,  $H_{23}(-4)$ ,  $K_2\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $K_{32}(5D+7)$ ,  $H_{32}\left(-\frac{1}{2}D\right)$ ,  $H_3(2)$ ,  $K_3\left(\frac{1}{5}\right)$

elemanter dönüşümleri uygulanarak

$$N = PBQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 + \frac{9}{5}D + \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.  $P$  ve  $Q$  matrisleri

$$P = H_3(2).H_{32}\left(-\frac{1}{2}D\right).H_{23}(-4).H_{31}(D+1).H_{21}(-D-2).H_1(-1)$$

$$Q = K_{12}(-1).K_{21}(D+1).K_{23}(D).K_2\left(\frac{1}{2}\right).K_{32}(5D+7).K_3\left(\frac{1}{5}\right)$$

olacağından her bir elemanter dönüşüme ait elemanter matris yazılır ve bunlar çarpılarak  $P$  ve  $Q$  matrisleri bulunur.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5D+6 & 1 & -4 \\ -5D^2-8D-2 & -D & 4D+2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ve } Q = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(D+1) & \frac{1}{10}(5D^2+12D+7) \\ -1 & -\frac{1}{2}D & -\frac{1}{10}(5D^2+7D) \\ 0 & \frac{1}{2}D & \frac{1}{10}(5D^2+7D+2) \end{bmatrix}$$

olur.

$$BX = H \text{ idi.}$$

$$X = QY \text{ dönüşümü yapılırsa,}$$

$$BQY = H$$

$$PBQY = PH$$

$$NY = PH \text{ olur.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 + \frac{9}{5}D + \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5D+6 & 1 & -4 \\ -5D^2-8D-2 & -D & 4D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ e^t \end{bmatrix}$$

dan

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = t - 4e^t$$

$$\left(D^2 + \frac{9}{5}D + \frac{4}{5}\right)y_3 = 6e^t - 1$$

$$y_3 = K_1 e^{-\frac{4t}{5}} + K_2 e^{-t} + \frac{5}{3}e^t - \frac{5}{4}$$

elde edilir.

Son olarak istenilen çözümü bulmak için  $X = QY$  kullanılır ve

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(D+1) & \frac{1}{10}(5D^2+12D+7) \\ -1 & -\frac{1}{2}D & -\frac{1}{10}(5D^2+7D) \\ 0 & \frac{1}{2}D & \frac{1}{10}(5D^2+7D+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t - 4e^t \\ K_1 e^{-\frac{4t}{5}} + K_2 e^{-t} + \frac{5}{3}e^t - \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 3C_1 e^{-\frac{4t}{5}} + \frac{1}{2}t - \frac{3}{8}$$

$$x_2 = 12C_1 e^{-\frac{4t}{5}} + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}$$

$$x_3 = -2C_1 e^{-\frac{4t}{5}} + \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{4}$$

olur [2].

### 3.2.6 Rasyonel Kanonik Form ile Çözüm

$$\frac{dX}{dt} = AX + H \quad (3.109)$$

sabit katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım.  $A$  kare matrisinin  $S = R^{-1}AR$  rasyonel kanonik formunun bulunmuş olduğunu kabul edelim.

(3.109)'da  $R$  tekil olmayan bir kare matris olmak üzere

$$X = RY \quad (3.110)$$

dönüşümü yaparsak,

$$R \frac{dY}{dt} = ARY + H \quad \text{ve bunun her iki tarafını soldan } R^{-1} \text{ ile çarparsak}$$

$$\frac{dY}{dt} = R^{-1}ARY + R^{-1}H$$

$$\frac{dY}{dt} = SY + R^{-1}H \quad (3.111)$$

olur.  $S$  ve  $R$  matrisleri bilindiğine göre (3.111)'den  $Y$  bulunur ve bu (3.110)'da yerine konarak (3.109)'un  $X$  çözümü bulunur.  $R$  matrisi (2.6.5)'de izah edildiği şekilde hesaplanacaktır.

**Örnek 3.21 :**

$$\frac{dx_1}{dt} = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2 \sin t \quad (3.112)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 2x_1 - 2x_2 + 2x_3$$

diferansiyel denklem sistemini Rasyonel Kanonik Form ile çözelim.

$\lambda I - A$  matrisinin Smith normal formu  $H_{12}, K_{13}, K_{21}(3-\lambda), K_{21}(-2), H_{21}(-2), H_{31}(2-\lambda), H_2\left(-\frac{1}{2}\right), K_{32}\left(\frac{1}{2}\right), H_{32}(\lambda-4)$  elemanter dönüşümleri uygulanarak

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - \lambda \end{bmatrix}$$

dir. O halde  $\lambda I - A$ 'nın değişmez çarpanları sadece  $f_2(\lambda) = \lambda - 1$  ve  $f_3(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$ 'dir.

Bu değişmez çarpanlara ait eş matrisler ise

$$C(f_2(\lambda)) = [1] \text{ ve } C(f_3(\lambda)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

$A$  matrisinin rasyonel kanonik formu

$$S = \text{diag}(C_2, C_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olur.

Şimdi  $S = R^{-1}AR$  yapan  $R$  matrisini bulalım. Bunun için  $f_2(\lambda)$  ve  $f_3(\lambda)$ 'ya karşılık gelen vektör zincirlerini bulalım.

$$f_2(A)X = (A + I)X = 0 \quad (3.113)$$

ve  $X$  vektörünü gösteren zincir  $f_2(\lambda)$ 'nın derecesi kadar yani 1 tanedir. Bu vektörü bulmak için (3.112) matrisyel denklemi bileşenler cinsinden yazılırsa

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve burdan bir tek  $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$  denklemi elde edilir. Çünkü katsayılar matrisinin rangı 1'dir. O halde 2 bilinmeyen keyfi seçilerek aranan  $X$  vektörü sonsuz türlü seçilebilir. Mesela  $x_1 = 1$  ve  $x_2 = 1$  alınırsa  $x_3 = 0$  olacağından  $X = \{1, 1, 0\}$  olur.

$A$  matrisinin minimum polinomu  $f_3(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$ 'dur.  $f_3(\lambda)$  minimum polinom olduğundan  $f_3(A) = 0$ 'dır. O halde  $Y$  vektörü keyfi olarak seçilebilir.  $Y = \{1, 0, 0\}$  seçilirse,  $AY = \{-3, -2, 2\}$  olarak bulunur.

Dolayısıyla

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

O halde  $\frac{dY}{dt} = SY + R^{-1}H$  denkleminde faydalanarak,

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

olacağından,

$$y_1' = y_1 + 2 \sin t$$

$$y_2' = -2 \sin t$$

$$y_3' = y_2 + y_3$$

ve bunların çözümünden de

$$y_1 = c_1 e^t - \sin t - \cos t$$

$$y_2 = c_2 + 2 \cos t$$

$$y_3 = -c_2 + c_3 e^t + \sin t - \cos t$$

elde edilir.

$X = RY$  dönüşümünden faydalananarak,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 4c_2 + (c_1 - 3c_3)e^t + 4(\cos t - \sin t)$$

$$x_2 = 2c_2 + (c_1 - 2c_3)e^t + \cos t - 3 \sin t$$

$$x_3 = -2c_2 + 2c_3 e^t + 2(\sin t - \cos t)$$

bulunur [2].

### 3.2.7 Üçgen Matris Yöntemi ile Çözüm

$$\frac{dX}{dt} = AX + H \quad (3.114)$$

sabit katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklem sistemini  $D$  türev operatörü kullanarak  $(D - A)X = H$

şeklinde yazalım.  $D - A = B$  dersek

$$BX = H \quad (3.115)$$

olur. Bu sistemin

$$C = [B : H]$$

arttırılmış matrisini düşünelim. Yalnız elemanter satır dönüşümlerini kullanarak  $C$  matrisine denk öyle bir

$$C_1 = [M:K]$$

matrisi bulabiliriz ki,  $M$  matrisi üçgen matris olur . Bu durum da (3.115) sistemi

$$MX = K \quad (3.116)$$

sistemine denk olur.

Çünkü elemanter satır dönüşümlerine göre:

- İki satırın yer değiştirilmesi, iki denklemin yer değiştirilmesine karşılık gelir. Bu durum sistemin çözümünü değiştirmez.
- Bir satırın sıfırdan farklı bir sabitle çarpılması, bir denklemin sabitle çarpılması demektir. Bu durumda sistemin çözümü aynı kalır.
- Herhangi bir satırın bir  $f(D)$  polinomu ile çarpılıp diğer bir satır ile toplanması, bir denkleme  $f(D)$  diferansiyel operatörünün uygulanması ve sistemin diğer bir denklemi ile toplanması demektir. Herbir dönüşüm tersine çevrilebilir olduğundan elde edilecek sistem önceki sisteme eşdeğerdir.

Sonuç olarak (3.115) sistemine denk olan (3.116) sistemi açık olarak

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2n} \\ 0 & 0 & m_{33} & \dots & m_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

veya

$$m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + m_{13}x_3 + \dots + m_{1n}x_n = k_1$$

$$m_{22}x_2 + m_{23}x_3 + \dots + m_{2n}x_n = k_2$$

$$\dots\dots\dots$$

(3.117)

$$m_{n-1,n-1}x_{n-1} + m_{n-1,n}x_n = k_{n-1}$$

$$m_{nn}x_n = k_n$$

olur [2].

katsayılar matrisi üst üçgensel hale getirilen denklem sisteminin çözümü en son bilinmeyenden başlanarak geriye doğru gerçekleştirilir [23].

**Örnek 3.23 :**

$$(D-4)x_1 - x_2 - 2x_3 = e^{-t}$$

$$x_1 + (D-1)x_2 + x_3 = -2e^{-t} \quad (3.118)$$

$$3x_1 + x_2 + (D+1)x_3 = -e^{-t}$$

sisteminin arttırılmış matrisi

$$C = \begin{bmatrix} D-4 & -1 & -2 & :e^{-t} \\ 1 & D-1 & 1 & :-2e^{-t} \\ 3 & 1 & D+1 & :-e^{-t} \end{bmatrix}$$

dir. Bu matrise  $H_{12}$ ,  $H_{21}(4-D)$ ,  $H_{31}(-3)$ ,  $H_{23}\left(\frac{11}{9}-\frac{D}{3}\right)$ ,  $H_{23}(-27D+36)$  elemanter

dönüşümleri uygulanırsa,  $C'$ 'ye denk olan

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & D-1 & 1 & :-2e^{-t} \\ 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3}D^2 + \frac{8}{9}D - \frac{4}{9} & :-\frac{11}{9}e^{-t} \\ 0 & 0 & 9D^3 - 36D^2 + 45D - 18 & :-72e^{-t} \end{bmatrix}$$

bulunur.

Böylece verilen sisteme denk olan

$$x_1 + (D-1)x_2 + x_3 = -2e^{-t}$$

$$-\frac{1}{9}x_2 + \left(-\frac{1}{3}D^2 + \frac{8}{9}D - \frac{4}{9}\right)x_3 = -\frac{11}{9}e^{-t} \quad (3.119)$$

$$(9D^3 - 36D^2 + 45D - 18)x_3 = -72e^{-t}$$

sistemi bulunur. Üçüncü denklemden  $x_3$  çözülür ve ikinci denklemde yerine konursa  $x_2$ , birinci denklemden de  $x_2$  ve  $x_3$  yerine konarak sistemin genel çözümü bulunur.

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 e^{2t} - (c_2 + c_3 + c_3 t) e^t - \frac{2}{3} e^{-t} \\ (c_2 + 2c_3 + c_3 t) e^t + e^{-t} \\ c_1 e^{2t} + (c_2 + c_3 t) e^t + \frac{2}{3} e^{-t} \end{pmatrix}$$

olur [2].

### 3.2.8 Üstel Matris Yöntemi ile Çözüm

$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$  'nin çözümü

$$x(t) = e^{At} k + e^{At} \int e^{-At} f(t) dt \quad (3.120)$$

şeklindedir. Burada  $k$  gelişigüzel bir sabit vektördür.

**Örnek 3.24 :**

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = 9x + 6y \quad (3.121)$$

diferansiyel denklem sistemini çözünüz.

Bu denklem sistemi  $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix}$   $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$

olmak üzere  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  matris sistemine denktir.

$A$  iki satır ve iki sütuna sahip,  $n = 2$  olduğundan,

$$e^{At} = \alpha_1 At + \alpha_0 I = \begin{bmatrix} \alpha_1 t + \alpha_0 & \alpha_1 t \\ 9\alpha_1 t & \alpha_1 t + \alpha_0 \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

$$\lambda I - At = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & t \\ 9t & 6t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -t \\ 9t & \lambda - 6t \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - At) = \begin{vmatrix} \lambda & -t \\ 9t & \lambda - 6t \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda t + 9t^2$$

$\lambda_i$ ,  $At$ 'nin bir özdeğeri olduğu için,  $e^{\lambda_i} = r(\lambda_i)$ 'dir.

$$e^{\lambda_i} = \frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_i} \quad \text{eşitliği de sağlanır.}$$

$r(\lambda) = \alpha_1 \lambda + \alpha_0$  olur. O halde

$$\frac{dr(\lambda)}{d\lambda} = \alpha_1$$

dir.

$$e^{3t} = \alpha_1 3t + \alpha_0$$

$$e^{3t} = \alpha_1$$

denklemlerini elde ederiz. Bu denklemlerden  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  çözülürse;

$\alpha_1 = (1 - 3t)e^{3t}$  ve  $\alpha_0 = e^{3t}$  bulunur. Bu değerleri (3.122)'de yerine yazarsak

$$e^{At} = \begin{bmatrix} (1 - 3t)e^{3t} & te^{3t} \\ -9te^{3t} & (1 + 3t)e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$e^{-At} = \begin{bmatrix} (1 + 3t)e^{-3t} & -te^{-3t} \\ 9te^{-3t} & (1 - 3t)e^{-3t} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Homojen kısmın çözümü :

$$\begin{aligned} x(t) = e^{At} k &= \begin{bmatrix} (1 - 3t)e^{3t} & te^{3t} \\ -9te^{3t} & (1 + 3t)e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [(-3k_1 + k_2)t + k_1]e^{3t} \\ [(-9k_1 + 3k_2)t + k_2]e^{3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir.

$$e^{-At} f(t) = \begin{bmatrix} (1 + 3t)e^{-3t} & -te^{-3t} \\ 9te^{-3t} & (1 - 3t)e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t^2 e^{-3t} \\ (t - 3t^2)e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\int e^{-At} f(t) dt = \begin{bmatrix} -\int t^2 e^{-3t} dt \\ \int (t - 3t^2) e^{-3t} dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{1}{3} t^2 + \frac{2}{9} t + \frac{2}{27} \right) e^{-3t} \\ \left( t^2 + \frac{1}{3} t + \frac{1}{9} \right) e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} \int e^{-At} f(t) dt = \begin{bmatrix} [(-3k_1 + k_2)t + k_1] e^{3t} \\ [(-9k_1 + 3k_2)t + k_2] e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left( \frac{1}{3} t^2 + \frac{2}{9} t + \frac{2}{27} \right) e^{-3t} \\ \left( t^2 + \frac{1}{3} t + \frac{1}{9} \right) e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} t + \frac{2}{27} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At} k + e^{At} \int e^{-At} f(t) dt$$

$$= \begin{bmatrix} [(-3k_1 + k_2)t + k_1] e^{3t} + \frac{1}{9} t + \frac{2}{27} \\ [(-9k_1 + 3k_2)t + k_2] e^{3t} + \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

olur [3].

### 3.3 Değişken Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklem Sistemi

$a_{ij}(t)$ 'ler bir  $a < t < b$  aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n \quad (3.123)$$

.....

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n$$

denklem sistemine değişken katsayılı lineer homojen diferansiyel denklem sistemi denir. Bu sistemi kısa olarak,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3.124)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Matrisyel gösterilimi ise

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X \quad (3.125)$$

dir [2].

### 3.3.1 Peano-Baker Yöntemi ile Çözüm

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X \quad (3.126)$$

diferansiyel denklem sistemini dikkate alalım. Sistemin başlangıç şartı  $t=0$  için  $X(0) = X_0$  olsun.

(3.126)'nın integralini alırsak aşağıdaki denklemi

$$X(t) = X_0 + \int_0^t A(s)X(s)ds \quad (3.127)$$

elde ederiz.

Eğer

$$Q = \int_0^t (\ ) ds$$

operatörünü kullanırsak (3.127)'yi

$$X = X_0 + QAX \quad (3.128)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu  $X$  değerini (3.128)'ün sağ tarafında yerine koyarsak

$$X = X_0 + QAX_0 + QAQAX$$

olur. Bu işleme sonsuz defa devam edersek

$$X = (I + QA + QAQA + QAQAQA + \dots)X_0 \quad (3.129)$$

ve

$$G(A) = I + QA + QAQA + QAQAQA + \dots \quad (3.130)$$

dersek

$$X = G(A)X_0 \quad (3.131)$$

elde edilir.  $G(A)$  serisine  $A$  matrisinin matrizantı denir. Bu seride  $I$   $n$ . mertebeden birim matris ve ikinci terim  $QA$  da,  $A$  matrisinin  $0$  ile  $t$  limitleri arasında alınmış integralidir.  $QAQA$ 'yı elde etmek için,  $A$  ve  $QA$  matrisleri çarpılır ve bu çarpım  $Q$  ile  $t$  arasında integre edilir. Diğer terimler de benzer tarzda teşkil edilir. Eğer  $A(t)$  matrisinin elemanları  $0$  ile  $t$  arasında sınırlı ise,  $G(A)$  serisinin yakınsak bir seri olduğu gösterilebilir. Böylece bu seri tek bir şekilde  $G(A)$  matrisini belirtir. (3.131), (3.126)'nın çözümüdür. Türevini alıp (3.126)'da yerine koyarsak

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dG(A)}{dt} X_0 = A(t)G(A)X_0$$

$$\frac{d[G(A)X_0]}{dt} = A(t)[G(A)X_0]$$

olur ki bu da (3.131)'in, (3.126)'nın çözümü olduğunu ifade eder.

Şimdi  $G(A)$  serisinin yakınsaklığını gösterelim ;

$A(t)$  matrisinin  $a_{ij}(t)$  elemanları  $0$  ile  $t$  arasında sınırlı olsun.  $a_{ij}(t)$  elemanlarının bu aralık içerisindeki üst sınırları  $k_{ij}$  olsun. Yani  $|a_{ij}(t)| \leq k_{ij}$  'dir.  $K$  sayısı,  $k_{ij} \leq K$  olacak şekilde pozitif bir sayı olsun. Buna göre,  $[1]$  bütün elemanları  $1$  olan  $n$ . mertebeden bir matris olmak üzere

$$QA = \int_0^t A(s)ds \leq K[1] \int_0^t ds = K[1]t$$

$$QA \leq Kt[1]$$

olur. Benzer şekilde

$$QAQA = \int_0^t AQA ds \leq \int_0^t K[1]K[1]ds = K^2[1]^2 \int_0^t s ds$$

ve  $[1]^2 = n[1]$  olacağından

$$QAQA \leq \frac{nK^2t^2}{2!}[1]$$

olur. Bir terim daha hesaplarsak

$$QAQAQA = \int_0^t AQA ds \leq \int_0^t K[1] \frac{nK^2s^2}{2!}[1]ds = \frac{nK^3[1]^2}{2!} \int_0^t s^2 ds$$

$$QAQAQA \leq \frac{n^2K^3t^3}{3!}[1]$$

bulunur. Dolayısı ile

$$G(A) \leq I + Kt[1] + \frac{nK^2t^2}{2!}[1] + \frac{n^2K^3t^3}{3!}[1] + \dots$$

elde edilir.  $nK = \alpha$  dersek

$$G(A) \leq I + \frac{\alpha}{n}t[1] + \frac{\alpha^2}{n} \frac{t^2}{2!}[1] + \frac{\alpha^3}{n} \frac{t^3}{3!}[1] + \dots$$

$$G(A) \leq I + \frac{[1]}{n} \left( \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t^3}{3!} + \dots \right)$$

$$G(A) \leq I + \frac{[1]}{n} (e^{\alpha t} - 1)$$

$$G(A) \leq \frac{nI - [1] + [1]e^{nKt}}{n}$$

olur. Şu halde  $G(A)$  matrisinin her elemanı, sağ taraftaki matrisin en büyük elemanı olan

$$\frac{n-1+e^{nKt}}{n}$$

den daha küçük kalır. O halde  $G(A)$  serisinin limiti sonlu bir sayıdan daha küçük kaldığından seri yakınsaktır.

Eğer  $A$  matrisinin elemanları sabit ise, o takdirde  $A$ 'nın  $G(A)$  matrisantı,

$$QA = A \int_0^t ds = At$$

$$QAQA = \int_0^t AQA ds = A^2 \int_0^t s ds = \frac{A^2 t^2}{2}$$

$$QAQAQA = \int_0^t AQAQA ds = \frac{A^3}{2} \int_0^t s^2 ds = \frac{A^3 t^3}{3!}$$

$$G(A) = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots$$

$$G(A) = e^{At}$$

olur. Dolayısı ile, eğer (3.126) sabit katsayılı bir sistem ise çözüm

$$X = e^{At} X_0$$

olur.

**Örnek 3.25 :**

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + ty = 0 \tag{3.132}$$

diferansiyel denklemini çözelim.

$$y = x_1 \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = x_2$$

dersek

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt} = -ty = -tx_1$$

olacağından, verilen diferansiyel denkleme denk olan

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -tx_1$$

sistemi elde edilir. Bu da

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

olarak

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X$$

matrisyel şekilde yazılır. Başlangıç şartı olarak  $t = 0$  için

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{t=0}$$

alınırsa bu sistemin çözümü Peano Baker metoduna göre

$$X = G(A)X_0$$

dir.  $A$  matrisinin  $G(A)$  matrizantını hesaplayalım;

$$QA = Q \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & t \\ \frac{t^2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$QAQA = Q \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & t \\ \frac{t^2}{2} & 0 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & -t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{t^3}{2.3} & 0 \\ 0 & -\frac{t^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$QAQA = Q \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{t^3}{2.3} & 0 \\ 0 & -\frac{t^3}{3} \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} 0 & -\frac{t^3}{3} \\ -\frac{t^4}{2.3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{t^4}{3.4} \\ -\frac{t^5}{2.3.5} & 0 \end{bmatrix}$$

benzer tarzda devam edilirse,

$$G(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & -t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{t^3}{2.3} & 0 \\ 0 & -\frac{t^3}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{t^4}{3.4} \\ -\frac{t^5}{2.3.5} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{t^6}{2.3.5.6} & 0 \\ 0 & -\frac{t^6}{3.4.6} \end{bmatrix}$$

$$G(A) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^3}{2.3} + \frac{t^6}{2.3.5.6} - \dots & t - \frac{t^4}{3.4} + \dots \\ -\frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{2.3.5} - \dots & 1 - \frac{t^3}{3} + \frac{t^6}{3.4.6} - \dots \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buna göre

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = G(A) \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

dan

$$x_1 = y = \left( 1 - \frac{t^3}{2.3} + \frac{t^6}{2.3.5.6} - \dots \right) x_1(0) + \left( t - \frac{t^4}{3.4} + \dots \right) x_2(0)$$

elde edilir [2].

### 3.3.2 Değişken Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklem Sisteminin Çözümü

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X \quad (3.133)$$

diferansiyel denklem sistemini gözönüne alalım. Homojen denklemin  $n$  tane lineer bağımsız çözümünün yani  $X(t)$  temel matrisinin bilinmesi gerekir.

Homojen denklemin  $(a,b)$  aralığında lineer bağımsız  $m$  tane ( $m < n$ ) çözümü bilinsin.

Dolayısı ile

$$\{X_1, X_2, \dots, X_m\} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1m}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nm}(t) \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

$n \times m$  boyutundaki matrisinin rangı  $(a, b)$  aralığındaki her  $t$  değeri için  $m$ 'dir. Çünkü  $X_j (j = 1, 2, \dots, m)$  vektörleri lineer bağımsız olduğundan  $(a, b)$  aralığındaki her  $t$  için bu matrisin sıfır olmayan bir  $m \times m$  determinanı vardır.

Herhangi bir  $a < t_0 < b$  seçelim ve bir an için elemanları  $x_{ij}(t) (i, j = 1, 2, \dots, m)$  olan  $X_1(t)$  matrisinin rangının bu  $t_0$  değeri için  $m$  olduğunu yani  $\det X_1(t_0) \neq 0$  olduğunu kabul edelim. Bu taktirde  $x_{ij}(t)$  fonksiyonlarının  $t_0$  civarında sürekliliğinden,  $(a, b)$  aralığının  $t_0$  değerini ihtiva eden bir  $(\alpha, \beta)$  alt aralığındaki her  $t$  değeri için  $\det X_1(t) \neq 0$ 'dır.

Şimdi ilk  $m$  sütunu  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t)$  lineer bağımsız vektörleri ve son  $n - m$  sütunu da  $e_{m+1}, e_{m+2}, \dots, e_n$  birim vektörleri olan

$$U(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1m}(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2m}(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1}(t) & x_{m2}(t) & \dots & x_{mm}(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{m+1,1}(t) & x_{m+1,2}(t) & \dots & x_{m+1,m}(t) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{m+2,1}(t) & x_{m+2,2}(t) & \dots & x_{m+2,m}(t) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nm}(t) & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$n \times n$  boyutundaki matrisini gözönüne alalım.  $X_1(t)$  üstte izah edildiği şekilde  $(a, b)$ 'nin bir  $(\alpha, \beta)$  alt aralığında  $\det X_1(t) \neq 0$  olan bir  $m \times m$  matris,  $X_2(t)$  bir  $(n - m) \times m$  boyutlu matris,  $0$   $m \times (n - m)$  boyutlu sıfır matris ve  $I$ 'de  $(n - m)$ . mertebeden bir birim matrisi göstermek üzere  $U(t)$  matrisini kısa olarak

$$U(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) & 0 \\ X_2(t) & I \end{bmatrix} \quad (3.135)$$

şeklinde ifade edelim. Bu taktirde

$$X(t) = U(t)Y(t) \quad (3.136)$$

dönüşümü (3.133)'ün homojen kısmını  $(\alpha, \beta)$  üzerinde daha aşağı bir sisteme indirgenir. (3.136)'nın türevini alıp (3.133)'de yerine koyarsak,

$$\frac{dU}{dt}Y + U \frac{dY}{dt} = AUY$$

$$U \frac{dY}{dt} = \left( AU - \frac{dU}{dt} \right) Y$$

ve  $U^{-1}(t)$  ile soldan çarpılırsa

$$\frac{dY}{dt} = U^{-1} \left( AU - \frac{dU}{dt} \right) Y \quad (3.137)$$

olur.  $X_1(t)$ 'nin seçiminden  $(\alpha, \beta)$  aralığında  $\det U(t) \neq 0$ 'dır. Dolayısıyla  $U(t)$ 'nin tersi

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 \\ -X_2 X_1^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (3.138)$$

olur. Diğer taraftan  $X_1$  ve  $X_2$  (3.133)'ün homojen kısmının çözümleri olduğundan

$$\frac{dU}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dX_1}{dt} & 0 \\ \frac{dX_2}{dt} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX_1 & 0 \\ AX_2 & 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

dur.  $A_{11}(t)$  ve  $A_{22}(t)$  sırasıyla  $m$  ve  $(n-m)$  mertebeden kare matrisler olmak üzere

$A(t)$  matrisini

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (3.140)$$

şeklinde;  $Y_1$   $m$  satırlı,  $Y_2$  de  $(n-m)$  satırlı birer sütun matris olmak üzere  $Y$  sütun matrisini

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

şeklinde düşünelim.

(3.138),(3.139),(3.140) ve (3.141)'u kullanarak (3.137) denklemini

$$AU - \frac{dU}{dt} = A \left( \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$U^{-1} \left( AU - \frac{dU}{dt} \right) = \begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 \\ -X_2 X_1^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & X_1^{-1} A_{12} \\ 0 & -X_2 X_1^{-1} A_{12} + A_{22} \end{bmatrix}$$

$$U^{-1} \left( AU - \frac{dU}{dt} \right) Y = \begin{bmatrix} 0 & X_1^{-1} A_{12} \\ 0 & -X_2 X_1^{-1} A_{12} + A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{-1} A_{12} Y_2 \\ (-X_2 X_1^{-1} A_{12} + A_{22}) Y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dY_1}{dt} \\ \frac{dY_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{-1} A_{12} Y_2 \\ (-X_2 X_1^{-1} A_{12} + A_{22}) Y_2 \end{bmatrix}$$

olarak bulabiliriz. Buradan da

$$\frac{dY_1}{dt} = X_1^{-1} A_{12} Y_2$$

$$\frac{dY_2}{dt} = (-X_2 X_1^{-1} A_{12} + A_{22}) Y_2 \quad (3.143)$$

elde edilir. Buradan  $Y_2$  bilinince  $Y_1$  birinci denklemden integral alınarak bulunabilir [2].

**Örnek 3.26 :**

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{t} x_1 + t x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{t} x_1 \quad (3.144)$$

değişken katsayılı homojen diferansiyel denklem sisteminin bir özel çözümü

$$x_1 = t \sin t$$

$$x_2 = \cos t$$

olarak bilindiğine göre genel çözümünü bulalım.

$$U(t) = \begin{bmatrix} t \sin t & 0 \\ \cos t & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & t \\ -\frac{1}{t} & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$AU = \begin{bmatrix} \sin t + t \cos t & t \\ -\sin t & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dU}{dt} = \begin{bmatrix} \sin t + t \cos t & 0 \\ -\sin t & 0 \end{bmatrix}$$

$$AU - \frac{dU}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t \sin t} & 0 \\ -\frac{\cos t}{t \sin t} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U^{-1} \left( AU - \frac{dU}{dt} \right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sin t} \\ 0 & -\cot t \end{bmatrix}$$

olur. Diferansiyel denklem sisteminde

$$X(t) = U(t)Y(t)$$

dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{dY}{dt} = U^{-1} \left( AU - \frac{dU}{dt} \right) Y$$

den

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sin t} \\ 0 & -\cot t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

olacağından

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{y_2}{\sin t}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -\cot t y_2$$

elde edilir. Buradan da ikinci denklemden  $y_2$  bulunup, birinci denklemde yerine konarak  $y_1$  çözülürse

$$y_1 = -c_1 \cot t + c_2$$

$$y_2 = \frac{c_1}{\sin t}$$

olarak bulunur.

Sonunda  $X = UY$  'den

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \sin t & 0 \\ \cos t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_1 \cot t + c_2 \\ \frac{c_1}{\sin t} \end{bmatrix}$$

olup sonuç olarak

$$x_1 = t \sin t (c_2 - c_1 \cot t)$$

$$x_2 = c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

olur [2].

**Örnek 3.27 :**

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{2}{t} x_1 + \left(1 - \frac{2}{t}\right) x_2 - x_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{t} x_1 + \left(1 - \frac{1}{t}\right) x_2 - x_3 \quad (3.145)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{t} x_1 - \frac{1}{t} x_2$$

değişken katsayılı homojen diferansiyel denklem sisteminin  $X_1 = \{1, 1, 1\}$   $X_2 = \{2t, t, t\}$  gibi iki özel çözümü bilindiğine göre genel çözümünü bulalım.

$$U(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 1 & t & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{t} & 1 - \frac{2}{t} & -1 \\ \frac{1}{t} & 1 - \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t} & -\frac{1}{t} & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$AU = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dU}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AU - \frac{dU}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{t} & -\frac{1}{t} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U^{-1} \left( AU - \frac{dU}{dt} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur.

Diferansiyel denklem sisteminde

$$X(t) = U(t)Y(t)$$

dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{dY}{dt} = U^{-1} \left( AU - \frac{dU}{dt} \right) Y \text{ 'den}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_3$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 0$$

$$\frac{dy_3}{dt} = y_3$$

elde edilir. Burdan

$$y_1 = -c_1 e^t + c_3$$

$$y_2 = c_2$$

$$y_3 = c_1 e^t$$

olarak bulunur.  $X = UY$  'den

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 1 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_1 e^t + c_3 \\ c_2 \\ c_1 e^t \end{bmatrix}$$

olup sonuç olarak

$$x_1 = -c_1 e^t + 2c_2 t + c_3$$

$$x_2 = -c_1 e^t + c_2 t + c_3$$

$$x_3 = c_2 t + c_3$$

elde edilir [2].

### 3.3.3 Değişken Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklem Sisteminin Çözümünün Liouville Teoremi ile Gerçeklenmesi

**Tanım 3.1**  $nxn$  boyutunda bir  $A$  matrisinin izi, köşegeni üzerindeki elemanların toplamıdır :

$$\text{Iz}A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

**Teorem 3.1 ( Liouville Teoremi)**  $t \in I$  için  $X'(t) = A(t)X(t)$  ise  $t \in I$  ve  $t_0 \in I$  için

$$|X(t)|' = |X(t)| \cdot \text{Iz}A(t)$$

ve

$$|X(t)| = |X(t_0)| \cdot e^{\int_{t_0}^t \text{Iz}A(s) ds}$$

dir.

Değişken katsayılı diferansiyel denklem sistemi, parametrelerin değişimi ile çözülebilir:

**Örnek 3.28 :**

$$2t^3 x_1' = t^2 x_1 + 3x_2$$

$$2tx_2' = -t^2 x_1 + 9x_2 \quad (3.146)$$

sistemin temel çözümünü bulmak için birinci denklemde  $x_1 = \psi$  yazılırsa,

$$3x_2 = 2t^3 \psi' - t^2 \psi \quad (3.147)$$

bulunur. Bu değer ikinci denklemde yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa, bilinmeyen fonksiyonuna göre, değişken katsayılı

$$t^2 \psi'' - 2t \psi' + 2\psi = 0 \quad (3.148)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin  $\psi(t) = t^m$  biçimindeki doğrusal bağımsız çözümleri,

$$\psi_1(t) = c_1 t$$

ve  $\psi_2(t) = c_2 t^2$  'dir.

$$x_1 = \psi_1 = c_1 t \quad \text{için} \quad x_2 = c_1 \frac{t^3}{3}$$

$$x_1 = \psi_2 = c_2 t^2 \quad \text{için} \quad x_2 = c_2 t^4$$

olur. Buna göre sistemin doğrusal bağımsız  $u$  ve  $v$  çözümleri ve  $U(t)$  temel matrisi,

$c_1 = 3$  ve  $c_2 = 1$  için

$$u = \begin{bmatrix} 3t \\ t^3 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} t^2 \\ t^4 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3t & t^2 \\ t^3 & t^4 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

Böylece,  $k_1$  ve  $k_2$  keyfi sabitler olmak üzere, denklem sisteminin genel çözümü

$$x_1 = 3k_1 t + k_2 t^2$$

$$x_2 = k_1 t^3 + k_2 t^4$$

dir.

Bu sistem için,  $\dot{I}zA = \frac{5}{t}$  ve  $|U(t)| = 2t^5$ 'dir.

$$|U(t)|' = 10t^4 = 2t^5 \frac{5}{t} = |U(t)| \dot{I}zA$$

Liouville teoremi gerçekleşir. Bu ise çözümün doğruluğunu ifade eder.

**Örnek 3.29 :**

$$x_1' = x_1 + e^{3t} x_2$$

$$x_2' = -2e^{-3t} x_1 + x_2 \quad (3.149)$$

denklem sistemini çözelim.

$x_1 = \psi$  için sistemin birinci denkleminde,

$$e^{3t} x_2 = \psi' - \psi \quad (3.150)$$

sistemi bulunur.  $e^{3t}x_2$  ve  $x_2'$ ,  $\psi$  cinsinden hesaplanıp ikinci denklemde yerine yazılırsa,

$$\psi'' - 5\psi' + 6\psi = 0 \quad (3.151)$$

sabit katsayılı denklemi elde edilir. Bu denklemin doğrusal bağımsız çözümleri

$\psi_1(t) = c_1 e^{2t}$ ,  $\psi_2(t) = c_2 e^{3t}$ 'dir. Bu değerler sistemde yerine yazıldığında

$$x_1 = \psi_1(t) = c_1 e^{2t} \text{ için } x_2 = c_1 e^{-t}$$

$$x_1 = \psi_2(t) = c_2 e^{3t} \text{ için } x_2 = 2c_2$$

bulunur. O halde sistemin doğrusal bağımsız  $u$  ve  $v$  çözümleri ve  $U(t)$  temel matrisi,

$c_1 = 1$  ve  $c_2 = 1$  için

$$u = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ e^{-t} & 2 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Böylece,  $k_1$  ve  $k_2$  keyfi sabitler olmak üzere, denklem sisteminin genel çözümü

$$x_1 = k_1 e^{2t} + k_2 e^{3t}$$

$$x_2 = k_1 e^{-t} + 2k_2$$

dir.  $|U(t)| = e^{2t}$  ve  $\dot{I}zA = 2$  'dir.

$$|U(t)|' = 2e^{2t} = |U(t)| \dot{I}zA$$

Liouville teoremi gerçekleşir. Bu ise çözümün doğruluğunu ifade eder. [8]



### 3.4.1 Değişken Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Diferansiyel Denklem Sisteminin Çözümü

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + H \quad (3.155)$$

diferansiyel denklem sistemini gözönüne alalım. Bunun genel çözümünü bulabilmek için, bu sistemin homojen kısmının genel çözümünü bulmamız gerekir. Bunun için de homojen denklemin  $n$  tane lineer bağımsız çözümünün yani  $X(t)$  temel matrisinin bilinmesi gerekir.

Homojen denklemin  $(a, b)$  aralığında lineer bağımsız  $m$  tane ( $m < n$ ) çözümü bilinsin. Dolayısı ile

$$\{X_1, X_2, \dots, X_m\} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1m}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nm}(t) \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

matrisinin rangı  $(a, b)$  aralığındaki her  $t$  değeri için  $m$ 'dir. Çünkü  $X_j$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) vektörleri lineer bağımsız olduğundan  $(a, b)$  aralığındaki her  $t$  için bu matrisin sıfır olmayan bir  $m \times m$  determinantı vardır.

Herhangi bir  $a < t_0 < b$  seçelim ve bir an için elemanları  $x_{ij}(t)$  ( $i, j=1, 2, \dots, m$ ) olan  $X_1(t)$  matrisinin rangının bu  $t_0$  değeri için  $m$  olduğunu yani  $\det X_1(t_0) \neq 0$  olduğunu kabul edelim. Bu taktirde  $x_{ij}(t)$  fonksiyonlarının  $t_0$  civarında sürekliliğinden,  $(a, b)$  aralığının  $t_0$  değerini ihtiva eden bir  $(\alpha, \beta)$  alt aralığındaki her  $t$  değeri için  $\det X_1(t) \neq 0$  dır.

Şimdi ilk  $m$  sütunu  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t)$  lineer bağımsız vektörleri ve son  $n-m$  sütunu da  $e_{m+1}, e_{m+2}, \dots, e_n$  birim vektörleri olan

$$U(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1m}(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2m}(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1}(t) & x_{m2}(t) & \dots & x_{mm}(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{m+1,1}(t) & x_{m+1,2}(t) & \dots & x_{m+1,m}(t) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{m+2,1}(t) & x_{m+2,2}(t) & \dots & x_{m+2,m}(t) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nm}(t) & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$n \times n$  boyutunda olan matrisini gözönüne alalım.  $X_1(t)$  üstte izah edildiği şekilde  $(a, b)$  nin bir  $(\alpha, \beta)$  alt aralığında  $\det X_1(t) \neq 0$  olan bir  $m \times m$  boyutundaki matris,  $X_2(t)$  bir  $(n-m) \times m$  boyutunda olan bir matris,  $0$   $m \times (n-m)$  boyutundaki sıfır matris ve  $I$  'de  $(n-m)$ . mertebeden bir birim matrisi göstermek üzere  $U(t)$  matrisini kısa olarak

$$U(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) & 0 \\ X_2(t) & I \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

şeklinde ifade edelim. Bu taktirde

$$X(t) = U(t)Y(t) \quad (3.158)$$

dönüşümü (3.155)'in homojen kısmını  $(\alpha, \beta)$  üzerinde daha aşağı bir sisteme indirgenir. (3.158)'in türevini alıp (3.155)'de yerine koyarsak,

$$\frac{dU}{dt}Y + U \frac{dY}{dt} = AU Y + H$$

$$U \frac{dY}{dt} = \left( AU - \frac{dU}{dt} \right) Y + H$$

ve  $U^{-1}(t)$  ile soldan çarpılırsa

$$\frac{dY}{dt} = U^{-1} \left( AU - \frac{dU}{dt} \right) Y + U^{-1}H \quad (3.159)$$

olur.  $X_1(t)$  nin seçiminden  $(\alpha, \beta)$  aralığında  $\det U(t) \neq 0$  'dır. Dolayısıyla  $U(t)$  'nin tersi

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 \\ -X_2 X_1^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (3.160)$$

olur. Diğer taraftan  $X_1$  ve  $X_2$  (3.155)'un homojen kısmının çözümleri olduğundan

$$\frac{dU}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dX_1}{dt} & 0 \\ \frac{dX_2}{dt} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX_1 & 0 \\ AX_2 & 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

dir.  $A_{11}(t)$  ve  $A_{22}(t)$  sırasıyla  $m$ . ve  $(n-m)$ . mertebeden kare matrisler olmak üzere  $A(t)$  matrisini

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

şeklinde;  $Y_1$  ve  $H_1$   $m$  satırlı,  $Y_2$  ve  $H_2$  de  $(n-m)$  satırlı birer sütun matris olmak üzere  $Y$  ve  $H$  sütun matrislerini

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \quad (3.163)$$

şeklinde düşünelim.

(3.160),(3.161),(3.162) ve (3.163)'ü kullanarak (3.159) denklemini

$$AU - \frac{dU}{dt} = A \left( \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$U^{-1} \left( AU - \frac{dU}{dt} \right) = \begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 \\ -X_2 X_1^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & X_1^{-1} A_{12} \\ 0 & -X_2 X_1^{-1} A_{12} + A_{22} \end{bmatrix}$$

$$U^{-1} \left( AU - \frac{dU}{dt} \right) Y = \begin{bmatrix} 0 & X_1^{-1} A_{12} \\ 0 & -X_2 X_1^{-1} A_{12} + A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{-1} A_{12} Y_2 \\ (-X_2 X_1^{-1} A_{12} + A_{22}) Y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dY_1}{dt} \\ \frac{dY_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{-1} A_{12} Y_2 \\ (-X_2 X_1^{-1} A_{12} + A_{22}) Y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 \\ -X_2 X_1^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

olarak bulabiliriz. Buradan da

$$\frac{dY_1}{dt} = X_1^{-1} A_{12} Y_2 + X_1^{-1} H_1$$

$$\frac{dY_2}{dt} = (-X_2 X_1^{-1} A_{12} + A_{22}) Y_2 - X_2 X_1^{-1} H_1 + H_2 \quad (3.164)$$

elde edilir. İkinci denklem  $Y_2$  için  $n-m$  boyutlu homojen olmayan bir sistemdir.

Buradan  $Y_2$  bilinince  $Y_1$  birinci denklemden integral alınarak bulunabilir [2].

### SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, lineer homojen olan ve homojen olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin çeşitli çözüm metodlarının dışında başka metodlarla da çözümlerinin yapılabileceği görülmüştür. Sabit katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sisteminin, sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sisteminin, değişken katsayılı lineer homojen olan diferansiyel denklem sisteminin ve değişken katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sisteminin çözümleri matrislerden faydalanılarak yapılmıştır.

Lineer diferansiyel denklem sistemlerinin matrislerden faydalanılarak yapılan çözümlerinde yeni metodlar geliştirilebilir. Sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem sistemlerinin çözüm metodlarından biri rasyonel kanonik form yöntemi idi. Tez çalışmamın ikinci bölümünde kanonik formlar konusunu incelemiştim. Kanonik formlar üzerinde daha detaylı çalışarak, sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem sistemlerini çözebilecek yeni bir yöntem bulunabilir. Bunun için ikinci kanonik form, jakobson kanonik form ve klasik kanonik form üzerinde araştırma yapılmalıdır.

## KAYNAKLAR

---

- [1] Ayres, F., (1980). Teori ve Problemlerle Matrisler, Çev. Oral, G., Güven Kitabevi Yayınları, Ankara.
- [2] Taşdizen, A., (1974). Matris Analizi ve Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Matris Metodları ile Çözümü, Yeterlik Çalışması, İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi Temel Bilimler Bölümü, İstanbul.
- [3] Bronson, R., (1993). Diferensiyel Denklemler, 2. Baskıdan Çev. Hacısalihoğlu, H. H., Köksal A., Özalp N., Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- [4] Yıldız, İ., (1998). Adi Diferansiyel Denklemler, Aktif Yayınevi, Erzurum.
- [5] Çağlıyan, M., Çelik N. ve Doğan, S., (2008). Adi Diferansiyel Denklemler, 2. Baskı, Dora Yayıncılık, Bursa.
- [6] Aydın, M., Kuryel, B., Gündüz, G. ve Oturanç, G., (2011). Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, 10. Baskı, Fakülteler Kitabevi Barış Yayınları, İzmir.
- [7] Gözükl, Ö., F. ve Şiap, İ., (2002). Diferansiyel Denklemler, Sakarya Kitabevi, Sakarya.
- [8] Dernek, N. ve Dernek, A., (2011). Diferansiyel Denklemler, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- [9] Bayram, M., (2010). Diferansiyel Denklemler, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- [10] Hamzaoğlu, M., (2006). Çözümlü Diferansiyel Denklemler, Tunca Yayınevi, İstanbul.
- [11] Edwards, C., H. ve Penney, D., E., (2011). Diferansiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri, Palme Yayıncılık, Ankara.
- [12] Cerit, C., (2009). Çözümlü Diferansiyel Denklem Problemleri, 4. Baskı, İstanbul.
- [13] Cesur, Y., (2011). Diferansiyel Denklemler ve Mathematica, 4. Baskı, İstanbul.
- [14] Rainville E. D., Bedient P. E. ve Bedient R. E., (1997). Bilgisayar Uygulamalı Elemanter Diferansiyel Denklemler, Çev. Cerit C., 8. Baskı, Beta Basım Yayım Dağıtım.
- [15] Aksoy, Y., (2006). Diferansiyel Denklemler, Cilt 1, 4. Baskı, Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi, İstanbul.

- [16] Bronson, R., (1989). Matris İşlemleri, Çev. Hacısalıhoğlu, H. H., Köksal A., Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- [17] Matris ve Determinantlar , <http://www1.gantep.edu.tr/~tamer/mat2/matrisler.pdf> , 9 Nisan 2012.
- [18] Karaali, S., (1998). Lineer Cebir, 4. Baskı, İstanbul.
- [19] Bayram, M., (2009). Nümerik Analiz, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- [20] Taşçı, D., (1999). Lineer Cebir, SÜ Yaşatma ve Geliştirme Vakfı, Konya.
- [21] Engin, T. ve Çengel, Y. A., (2008). Mühendisler için Diferansiyel Denklemler, <http://www.engint.sakarya.edu.tr/BOLUM4.pdf> , 9 Nisan 2012.
- [22] Özerman, U., (2006). Birinci Mertebeden Lineer Denklem Sistemleri, <http://www.karto.itu.edu.tr/derslerimiz/diferansiyel/MATRİS LiN DNK 1212 06.pdf> , 9 Nisan 2012.
- [23] Lineer Denklem Takımlarının Çözüm Yöntemleri, <http://web.itu.edu.tr/~yukseken/HM504/01-%20Lineer%20Denklem%20Ta k%FDmlar%FD n%FDn%20%E7%F6z%FCm%FC.pdf> , 10 Nisan 2012.
- [24] 2006-2007 Güz Yarıllı Diferansiyel Denklemler Dersi Çalışma Soruları 4, [http://www.karto.itu.edu.tr/derslerimiz/diferansiyel/calisma\\_soru\\_4cevap.pdf](http://www.karto.itu.edu.tr/derslerimiz/diferansiyel/calisma_soru_4cevap.pdf) , 10 Nisan 2012.

## ÖZGEÇMİŞ

---

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Kemal Gökhan NALBANT  
**Doğum Tarihi ve Yeri** : 12.12.1988 / FATİH  
**Yabancı Dili** : İngilizce  
**E-posta** : mateng\_kemal@hotmail.com

### ÖĞRENİM DURUMU

| Derece | Alan                      | Okul/Üniversite  | Mezuniyet Yılı |
|--------|---------------------------|------------------|----------------|
| Lisans | Matematik<br>Mühendisliği | YTÜ              | 2010           |
| Lise   | Fen-Matematik             | Şehremini Lisesi | 2006           |

### ÖDÜLLERİ

1. YTÜ Matematik Mühendisliği Bölümü, Bölüm Birinciliği (2010)
2. YTÜ KimyaMetalurji Fakültesi, Fakülte İkinciliği (2010)