

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İZDÜŞEL DOĞRUSAL GRUPLARIN SONLU
ALTGRUPLARI ÜZERİNE**

Matematikçi Duygu IRMAK

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında

Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Meral TOSUN

İkinci Tez Danışmanı : Doç. Dr. A. Muhammed ULUDAĞ

İSTANBUL, 2008

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ.....	v
ÇİZELGE LİSTESİ	vi
ÖNSÖZ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER	2
2.1 İç Çarpım ve İç Çarpım Uzayı	2
2.2 Doğrusal Dönüşümler ve Doğrusal Gruplar	5
2.3 Gruplar	10
2.3.1 Permütasyon Grupları	10
2.3.2 Alterne Grup.....	11
2.3.3 Devirli Grup	11
2.3.4 Simetri Grupları.....	11
2.3.5 Grup Etkileri.....	13
2.3.6 İç Otomorfizma Grubu.....	15
2.4 Düzgün Çokgenler ve Düzgün Çokyüzlüler	15
2.4.1 Düzgün Çokyüzlü	15
2.4.2 Düzgün Çokyüzlülerin Sınıflanması.....	15
2.5 Rasyonel Formlar	20
2.6 Kuaterniyonlar	22
3. DOĞRUSAL KESİRLİ DÖNÜŞÜMLER	24
3.1 Doğrusal Kesirli Dönüşümler.....	24
3.2 Bileşke İşlemi Altında Doğrusal Kesirli Dönüşümlerin Grubu	24
3.3 Sonlu Dereceden Doğrusal Kesirli Dönüşüm Oluşturma	29
4. DOĞRUSAL KESİRLİ DÖNÜŞÜMLERİN SINIFLANDIRILMASI	33
4.1 Parabolik Dönüşümler	35
4.2 Eliptik Dönüşümler.....	36
4.3 Hiperbolik Dönüşümler	36
4.4 Loksodromik Dönüşümler	36
4.5 Normal Biçim	37
4.6 Parabolik Durum	38
4.7 Stereografik İzdüşüm	39
4.8 Karakteristik Sabitin Geometrik Yorumu	40

4.8.1	Eliptik Dönüşümler İçin.....	40
4.8.2	Hiperbolik Dönüşümler İçin.....	41
4.8.3	Loksodromik Dönüşümler İçin.....	41
5.	PLATONİK CİSİMLER ve SONLU DÖNME GRUPLARI	42
5.1	Platonik Cisimler	42
5.2	Dönme Hareketleri ve Doğrusal Kesirli Dönüşümler	47
5.3	Değişmez Biçimler	57
6.	SONUÇ ve ÖNERİLER	63
KAYNAKLAR.....		64
İNTERNET KAYNAKLARI.....		65
ÖZGEÇMİŞ.....		66

SİMGE LİSTESİ

A_n	n . dereceden alterne grup
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\hat{\mathbb{C}}$	Genişletilmiş karmaşık düzlem
C_n	n öğeli devirli grup
$\mathbb{CP}^1$	$\mathbb{C}$ üzerinde 1-boyutlu izdüşel doğru (Riemann küresi)
$\ker f$	Bir f homomorfizmasının çekirdeği
D_n	Düzgün bir n -genin simetri grubu (Dihedral grup)
F	Cisim
$GL(n, F)$	Bir F cismi üzerinde $n \times n$ boyutlu tersinir matrislerin grubu
$GL(V)$	Bir V vektör uzayının genel doğrusal grubu
$\text{Inn}G$	Bir G grubunun tüm iç otomorfizmalarının grubu
$M(\hat{\mathbb{C}})$	Möbiüs grubu
$O(n, F)$	Bir F cismi üzerinde n . dereceden ortogonal grup
$\{p, q\}$	Schläfli sembolü
$PGL(n, F)$	Bir F cismi üzerindeki n -boyutlu izdüşel doğrusal grup
$\mathbb{R}$	Gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n -boyutlu gerçek uzay
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$s(A)$	Bir A kümesi üzerindeki tüm permütasyonların kümesi
S_n	n . dereceden simetrik grup
$SL(n, F)$	F cismi üzerinde $n \times n$ boyutlu ve determinanı 1 olan tersinir matrislerin grubu
$SO(n, F)$	Bir F cismi üzerinde n . dereceden özel ortogonal grup
$SU(n)$	n . dereceden özel üniter grup
$\text{tr}(A)$	Bir A matrisinin izi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$Z(G)$	Bir G grubunun merkezi
$Z(V)$	$GL(V)$ 'nin merkezi
$\langle, \rangle$	İç çarpım sembolü
$\sum$	Toplam sembolü

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.2.1: e_1 ve e_2 vektörlerinin T dönüşümü altında orijin etrafında θ açıcı kadar dönmesi. (Koç, 1996).....	6
Şekil 2.2.2: γ' vektörü boyunca bir simetri. (Koç, 1996).....	7
Şekil 2.3.1: Eşkenar üçgenin simetri grubu.	11
Şekil 2.4.1: Herhangi bir düzgün çokyüzlünün çiziminin anlatımı.....	16
Şekil 2.4.2: Küp üzerindeki bir noktaya yukarıdan bakıldığında o noktada birleşen kenarları görürüz.....	16
Şekil 2.4.3: Platonik cisimler. (Kane, 2000).....	18
Şekil 2.5.1: Açık koruyan (konformal) tasvir. (bkz. [1]).....	21
Şekil 3.2.1: Bir $m(x)$ fonksiyonunun bileşke altında oluşturduğu sonlu grup.....	28
Şekil 3.2.2: Bir $m(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sonlu grup. (Dresden, 2004) ...	28
Şekil 4.7.1: Stereografik izdüşüm. (bkz. [2]).....	39
Şekil 4.8.1: Küreden düzleme stereografik dönüşüm yapıldıktan sonra parabolik olmayan bir durumda doğrusal kesirli bir dönüşümünün iki sabit noktası. (bkz. [3])	40
Şekil 4.8.2: Eliptik dönüşümler. (bkz. [3])	40
Şekil 4.8.3: Hiperbolik dönüşümler. (bkz. [3]).....	41
Şekil 5.1.1: q_0 ve $S(q_0)$ noktalarından geçen bir jeodezik.....	42
Şekil 5.1.2: Düzgün dörtyüzlünün simetri düzlemi. (Toth, 2000)	44
Şekil 5.1.3: İki düzgün dörtyüzlünün kesişimi düzgün sekizyüzlüdür. (Toth, 2000)	44
Şekil 5.2.1: Düzgün yirmiyüzlünün dönme eksenleri. (Toth, 2000).....	55

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 2.4.1: Platonik cisimlerin özellikleri.....	19

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı öneren ve hazırlık aşamasında destek olan değerli hocam Sayın Doç. Dr. A. Muhammed Uludağ'a ve aynı şekilde bana destek olup yardımlarını esirgemeyen tez danışmanlarımdan değerli hocam Sayın Doç. Dr. Meral Tosun'a teşekkür ederim.

Ayrıca 2006-2007 eğitim-öğretim yılında Erasmus değişim programı ile bulunduğum İtalya'nın Trieste Üniversitesi'nde birlikte tez çalışması yaptığım değerli hocam Sayın Doç. Dr. Michela Brundu'ya teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak bu çalışma süresinde manevi olarak beni yalnız bırakmayıp her zaman destekleyen sevgili aileme ve başta Elif Demir, Esen Çatalbaş, Celal Cem Sarioğlu, Pınar Oymak ve eşi olmak üzere tüm değerli dostlarıma şükranlarımı sunarım.

ÖZET

İZDÜŞEL DOĞRUSAL GRUPLARIN SONLU ALTGRUPLARI ÜZERİNE

Bir $[x:y] \in \mathbb{CP}^1$ olmak üzere genişletilmiş karmaşık düzlem $\hat{\mathbb{C}}$ ile bir boyutlu izdüşel doğru $\mathbb{CP}^1$, $[x:y] \mapsto x/y$ tasviri ile eşleşir, yani $\mathbb{CP}^1 \cong \hat{\mathbb{C}}$ 'dir. Determinantı sıfırdan farklı 2×2 boyutlu karmaşık katsayılı matrislerin oluşturduğu grup genel doğrusal $GL(2, \mathbb{C})$ grubu $\mathbb{C}^2$ düzlemi üzerine matris çarpımı ile etkir. $\mathbb{CP}^1$ ile $\hat{\mathbb{C}}$ arasında yukarıdaki tasviri kullanarak $\mathbb{CP}^1$ üzerindeki bu etkinin $\hat{\mathbb{C}}$ üzerindeki doğrusal kesirli dönüşümlerin etkisi ile aynı olduğunu görürüz.

Doğrusal kesirli dönüşümler bileşke altında bir grup oluşturur. Bu grup $GL(2, \mathbb{C})/Z(GL(2, \mathbb{C}))$ bölüm grubudur. Burada $Z(GL(2, \mathbb{C})) = \{mI : m \in \mathbb{C}\}$ şeklinde olup $GL(2, \mathbb{C})$ 'nin merkezidir ve $GL(2, \mathbb{C})/Z(GL(2, \mathbb{C})) := PGL(2, \mathbb{C})$ 'dir. Başka bir deyişle, $\hat{\mathbb{C}}$ üzerindeki doğrusal kesirli dönüşümlerin grubu, ki bu gruba Möbiüs grubu denir, $PGL(2, \mathbb{C})$ 'ye izomorftur. $PGL(2, \mathbb{C})$ aynı zamanda Riemann küresinin otomorfizmalar grubudur.

Öte yandan $\mathbb{R}^3$ Öklit uzayındaki $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ küresi içine köşeleri küre üzerinde olacak şekilde düzgün konveks çokyüzlüler çizilebilir; bu çokyüzlüler Platonik cisimlerdir. Öklit uzayında Platonik bir P cismini koruyan izometrilere, $SO(3)$ 'ün sonlu bir altgrubunu verir ve bu gruplar küre üzerine de etkir. Stereografik izdüşüm altında küreyi $\hat{\mathbb{C}}$ 'ye gönderirsek aynı grubun $\mathbb{CP}^1$ üzerine de etkidğini, yani Platonik cisimlerin simetri gruplarının sonlu birer Möbiüs grubu olduğu sonucuna varırız. Bu amaçla karmaşık katsayılı doğrusal kesirli dönüşümlerin Möbiüs grubunun, yani $PGL(2, \mathbb{C})$ 'nin herhangi bir altgrubunun, kürenin simetrilerinin sonlu bir grubuna, yani C_n devirli grubuna, D_n dihedral grubuna ya da sırasıyla düzgün dörtyüzlünün, kübün ya da düzgün yirmiyüzlünün A_4 , S_4 ve A_5 simetri gruplarına izomorf olduğu anlatıldı.

Daha sonra doğrusal kesirli dönüşümler aynı zamanda sabit noktaları cinsinden yazılabileceği için bir $m(x)$ doğrusal kesirli dönüşümünün $m(x) = x$ eşitliği ile sabit noktaları bulundu ve bu noktalar geometrik olarak yorumlandı. Son olarak $\mathbb{R}^3$ 'te Platonik bir cisminin bir simetrisinin bu cismi değişmez bırakan $\mathbb{R}^3$ 'ün direkt bir izometrisi olduğu ve bu cismin tüm simetrilerinin bir grup oluşturduğu anlatıldı ve tüm Platonik cisimlerin Möbiüs grupları verildi.

Anahtar kelimeler: İzdüşel doğrusal grup, Doğrusal kesirli dönüşüm, Platonik cisimler, Riemann küresi.

ABSTRACT

ON THE FINITE SUBGROUPS of PROJECTIVE LINEAR GROUPS

The extended complex plane $\hat{\mathbb{C}}$ corresponds with 1-dimensional complex projective line $\mathbb{CP}^1$ by the map $[x:y] \mapsto x/y$ for any $[x:y] \in \mathbb{CP}^1$ and we have $\mathbb{CP}^1 \cong \hat{\mathbb{C}}$. The general linear group of 2×2 complex matrices $GL(2, \mathbb{C})$ acts on the plane $\mathbb{C}^2$ by matrix multiplication and we see that this act on $\mathbb{CP}^1$ is the same act on $\hat{\mathbb{C}}$ by linear fractional transformation using the map above between $\mathbb{CP}^1$ and $\hat{\mathbb{C}}$.

Linear fractional transformations form a group under composition. This group is the quotient group $GL(2, \mathbb{C})/Z(GL(2, \mathbb{C}))$ where $Z(GL(2, \mathbb{C})) = \{mI : m \in \mathbb{C}\}$ is the center of $GL(2, \mathbb{C})$ and we have $GL(2, \mathbb{C})/Z(GL(2, \mathbb{C})) := PGL(2, \mathbb{C})$. In other words, the group of linear fractional transformations on $\hat{\mathbb{C}}$ which is called *Möbius group* is isomorphic to $PGL(2, \mathbb{C})$. On the other hand, $PGL(2, \mathbb{C})$ is the automorphism group of the Riemann sphere.

Regular convex polyhedras can be inscribed in the sphere $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ in $\mathbb{R}^3$ such that their vertices are on the sphere. These regular convex polyhedras are Platonic solids. In Euclidean space, the isometries preserving a Platonic solid P is a finite subgroup of $SO(3)$ and these groups act on the sphere. If we send sphere to $\hat{\mathbb{C}}$ under stereographic projection, we see that the same group acts on $\mathbb{CP}^1$. In other words, a group of symmetries of Platonic solids are finite Möbius groups. By this aim, in this work it is explained that the Möbius group of linear fractional transformations with complex coefficients, any subgroup of $PGL(2, \mathbb{C})$, is isomorphic to a finite group of the symmetries of the sphere.

Moreover, since the linear fractional transformations can also be expressed by their fixed points, the fixed points of any linear fractional transformation $m(x)$ are found with the help of the equation $m(x) = x$, then these points are interpreted geometrically.

Finally, we consider that any symmetry of a Platonic solid in $\mathbb{R}^3$ is a direct isometry of $\mathbb{R}^3$ that leaves it invariant. It is said that all symmetries of this Platonic solid form a group and the Möbius groups of all Platonic solids are given.

Keywords: Projective linear group, Linear fractional transformation, Platonic solids, Riemann sphere.

1. GİRİŞ

Bir V vektör uzayının bir F cismi üzerindeki izdüşel doğrusal grubu $PGL(V)$, $GL(V)/Z(V)$ bölüm grubu olarak tanımlanır. Burada $GL(V)$ ile V vektör uzayı üzerindeki genel doğrusal grup; $Z(V)$ ile $GL(V)$ 'nin merkezi gösterilmektedir. Eğer V uzayı n -boyutlu bir F -vektör uzayı ise ve ortonormal bir tabana sahipse $PGL(V)$ yerine $PGL(n, F)$ gösterimi de kullanılabilir.

$PGL(2, \mathbb{C})$ grubu 1-boyutlu izdüşel doğru $\mathbb{CP}^1$ üzerine etkir. Bu etki sayesinde $PGL(2, \mathbb{C})$ grubunun sonlu altgrupları sınıflandırabilir. Biz bu çalışmada $PGL(2, \mathbb{C})$ 'nin sonlu altgrupları üzerine çalıştık. Söz konusu sonlu altgruplar Platonik cisimlerin simetri gruplarıdır ve bu simetri grupları C_n , D_n , A_4 , S_4 ve A_5 'tir.

Bizim amacımız bu altgruplar ve simetri grupları arasındaki eşlemeyi, bir K sayı cismi üzerinde $PGL(2, K)$ 'nin sonlu altgruplarının tam olarak tanımlanması düşüncesiyle açıklamaktır.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızda kullanacağımız kavramların tanımları ile bazı teorem ve önermeleri vereceğiz.

İlk olarak çalışmamızda bahsedeceğimiz Öklit uzayında vektörlerin dönme, yansıma, öteleme ve ölçeklemeyi tanımlayabilmemiz için iç çarpım ve iç çarpım uzayı ile başlamamız yararlı olacaktır.

2.1 İç Çarpım ve İç Çarpım Uzayı

Tanım 2.1.1: Bir F cismi verilsin ve bu cisim üzerindeki bir vektör uzayı V olsun. Eğer bu vektör uzayı üzerinde $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow F$

- i) Her $\alpha, \beta \in V$ için $\langle \alpha, \beta \rangle = \overline{\langle \beta, \alpha \rangle}$
- ii) Her $\alpha, \beta, \gamma \in V$ için $\langle \alpha + \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$
- iii) Her $\alpha, \beta \in V$ ve $c \in F$ için $\langle c\alpha, \beta \rangle = c \langle \alpha, \beta \rangle$
- iv) Sıfırdan farklı her $\alpha \in V$ için $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$

koşullarını sağlayan bir tasvir ise bu tasvire V vektör uzayı üzerinde bir *iç çarpım* ya da *skaler çarpım* denir. Üzerinde iç çarpım tanımlanmış bir vektör uzayına *iç çarpım uzayı* ya da *ön-Hilbert uzayı* denir. Sonlu boyutlu gerçel bir iç çarpım uzayına *Öklit uzayı*, karmaşık bir iç çarpım uzayına ise *üniter uzay* denir.

Eğer $F = \mathbb{R}$ ise ilk koşul $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$ 'dır.

Örnek 2.1.2: n -boyutlu gerçel vektör uzayı $\mathbb{R}^n$ 'de iki vektör, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ ve $\beta = (y_1, \dots, y_n)$ olsun ($1 \leq i \leq n$). Bu vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım

$\langle \alpha, \beta \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ şeklinde tanımlanır. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^n$ üzerinde *standart*

iç çarpım (nokta çarpımı ya da skaler çarpım) denir. Aksini söylemediğimiz sürece $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir iç çarpım, standart iç çarpım anlamına gelecektir. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tüm iç çarpımlar denktir.

Örnek 2.1.3: Şimdi $F = \mathbb{C}$ olsun. n -boyutlu karmaşık vektör uzayı $\mathbb{C}^n$ 'de iki vektör, $x_i, y_i \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ ve $\beta = (y_1, \dots, y_n)$ olsun ($1 \leq i \leq n$). Bu vektör uzayı

üzerinde bir iç çarpım $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.1.4: 2×2 boyutlu matrisler karmaşık sayılar üzerinde bir vektör uzayı oluşturur. Bir

A matrisi verildiğinde bu matrisin eşlenik devriği A^* ile gösterilir. İki matris $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ve

$B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ olsun. Bu matrisler iz tasvirine göre $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$ olacak şekilde 2×2

boyutlu matrislerin vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım oluşturur.

Önerme 2.1.5: Bir F cismi ve bu cisim üzerinde bir V vektör uzayı verilsin. Bu vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım $\langle, \rangle$ olsun.

- a) Herhangi iki vektör $\alpha, \beta \in V$ için $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\langle \beta, \alpha \rangle = 0$ olmasıdır.
- b) Herhangi bir $\alpha \in V$ için $\langle \alpha, \alpha \rangle$ 'nın negatif olmayan gerçel sayı olması ve $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\alpha = 0$ olmasıdır.

İç çarpım aksiyomları ve yukarıdaki önermeyi verdikten sonra “uzunluk” ve “ortogonallik” kavramlarından bahsedebiliriz:

Tanım 2.1.6: Uzunluk ve Ortogonallik

Bir V, F -vektör uzayı ve bu vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım $\langle, \rangle$ olsun. Bir $\alpha \in V$ verilsin.

Bu vektörün uzunluğu $\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ şeklinde tanımlanır. Eğer $\|\alpha\| = 1$ ise α 'ya *birim vektör* ya da *normalize edilmiş vektör* denir.

Örnekler 2.1.7:

- 1) Eğer $\alpha = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ise bu vektörün uzunluğu $\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ olarak tanımlanır.
- 2) Eğer $\alpha = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ ise $\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \sqrt{x_1 \cdot \overline{x_1} + \dots + x_n \cdot \overline{x_n}} = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$ olarak tanımlanır.

İki vektör $\alpha, \beta \in V$ olsun. Eğer $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ ise α ve β 'ya V vektör uzayında birbirlerine *diktirler* ya da *ortogonaldirler* denir.

Önerme 2.1.8: Bir V , F -vektör uzayı verilsin ve bu vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım $\langle, \rangle$ olsun.

- 1) Herhangi bir $\alpha \in V$ için $\|\alpha\| \geq 0$ ve $\|\alpha\| = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\alpha = 0$ olmasıdır.
- 2) Herhangi bir $\alpha \in V$ ve $c \in F$ için $\|c\alpha\| = |c|\|\alpha\|$ 'dir.
- 3) (Üçgen eşitsizliği) Herhangi $\alpha, \beta \in V$ için $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ 'dir.

Tanım 2.1.9: Uzaklık

Bir V iç çarpım uzayı verilsin ve $\alpha, \beta \in V$ olsun. İki vektör arasındaki uzaklık $d(\alpha, \beta) = \|\beta - \alpha\|$ şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki aksiyomları sağlar:

- 1) Herhangi iki vektör $\alpha, \beta \in V$ için $d(\alpha, \beta) \geq 0$ ve $d(\alpha, \beta) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\alpha = \beta$ olmasıdır.
- 2) Her $\alpha, \beta \in V$ için $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$ 'dır.
- 3) Her $\alpha, \beta, \gamma \in V$ için $d(\alpha, \gamma) \leq d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma)$ 'dır.

Bu aksiyomlar yukarıdaki önerme kullanılarak ispatlanabilir.

Tanım 2.1.10: Gerçel bir iç çarpım uzayında iki vektör α ve β olsun. Bu iki vektör arasındaki açı $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere $\cos \theta = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}$ şeklinde tanımlanır.

Şimdi, iki ve üç boyutlu gerçel uzayda çalışacağımız için iç çarpım uzayını, ortogonal birim vektörleri içeren tabanlar cinsinden ifade etmek yararlı olacaktır:

Tanım 2.1.11: Ortogonal ve Ortonormal Tabanlar

Bir iç çarpım uzayı V ve bu uzayın bir altkümesi S olsun.

- 1) Eğer S 'nin sıfırdan ve birbirinden farklı (α, β) vektör çiftleri için $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ ise S 'ye *ortogonal küme* denir. Eğer S bir tabansa S 'ye V için *ortogonal bir taban* denir.
- 2) Eğer S kümesi sadece birim vektörlerden oluşan ortogonal bir küme ise S 'ye *ortonormal küme* denir. Ortonormal küme olan bir tabana V için *ortonormal taban* denir.

Örnek 2.1.12: 3-boyutlu gerçel vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ 'te standart iç çarpımla verilen

$$S_1 = \{(1,1,1), (-2,1,1), (0,-1,1)\} \text{ ve } S_2 = \left\{ \left(3, \frac{1}{2}, -1\right), (-1,2,-2), (0,-1,1) \right\} \text{ kümeleri ortogonal;}$$

$$S_3 = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\} \text{ ve } S_4 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

kümeleri ise ortonormaldir.

Şimdi doğrusal dönüşümleri ve doğrusal grupları verelim:

2.2 Doğrusal Dönüşümler ve Doğrusal Gruplar

Tanım 2.2.1: Bir F cismi verilsin ve bu cisim üzerindeki iki vektör uzayı V, W olsun. Her $\alpha, \beta \in V$ ve her $c \in F$ için $T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$ olacak şekilde $T: V \rightarrow W$ tasviri varsa T 'ye, V 'den W 'ye bir *doğrusal dönüşüm* denir. Bir başka deyişle toplama ve skaler çarpımı koruyan dönüşümlere *doğrusal dönüşüm* denir.

Örnekler 2.2.2:

- i. Birim fonksiyon ve sıfır fonksiyon birer doğrusal dönüşümdür.
- ii. $m \times n$ boyutlu bir matris A olsun. Bu matris $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ şeklinde bir doğrusal dönüşüm tanımlar ve $x \in \mathbb{R}^n$ sütun vektörünü $Ax \in \mathbb{R}^m$ sütun vektörüne götürür.
- iii. 1-boyutlu gerçel vektör uzayı $\mathbb{R}$ 'de verilen $f(x) = x^2$ ve $g(x) = x + 1$ fonksiyonları doğrusal dönüşüm değildir.

Tanım 2.2.3: Normal Dönüşümler

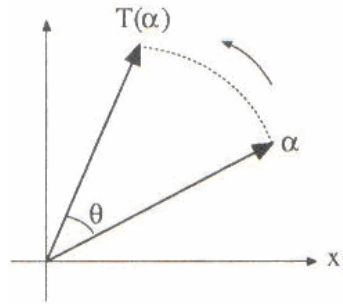
Bir iç çarpım uzayı V ve bu uzay üzerindeki doğrusal bir dönüşüm T olsun. Eğer $TT^* = T^*T$ olacak şekilde T dönüşümünün bir T^* eşleniği varsa T 'ye *normal dönüşüm* denir. Eğer T terslenebilir bir dönüşüm ve $T^* = T^{-1}$ ise T 'ye *üniter dönüşüm* denir. Eğer $V = \mathbb{R}$ ise üniter dönüşüme *ortogonal dönüşüm* denir.

Teorem 2.2.4: Sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayı V ve bu iç çarpım uzayı üzerinde doğrusal bir dönüşüm T olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:

- 1) T üniterdir.
- 2) Her $\alpha, \beta \in V$ için $\langle T(\alpha), T(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ 'dir.
- 3) Her $\alpha \in V$ için $\|T(\alpha)\| = \|\alpha\|$ 'dir.
- 4) T , her ortonormal tabanı bir ortonormal tabana taşır.

Bu teorem dik dönüşümlerin açı ve uzaklık koruyan dönüşümler olarak tanımlanabileceğini söyler.

Örnek 2.2.5: Şekil 2.2.1'de görüldüğü gibi $\mathbb{R}^2$ 'de $\det(T)=1$ olacak şekilde dik bir T dönüşüm alalım. T 'nin ortonormal bir taban göre matrisi A olsun. Bu durumda A ortogonal olur ve $\det(A)=1$ 'dir. Dolayısıyla $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ şeklindedir. Ayrıca $T(1,0) = (\cos \theta, \sin \theta)$ ve $T(0,1) = (-\sin \theta, \cos \theta)$ 'dir. Bu, $e_1 = (1,0)$ ve $e_2 = (0,1)$ vektörlerinin T dönüşümü altında orijin etrafında θ açıcı kadar dönmesi anlamına gelir.

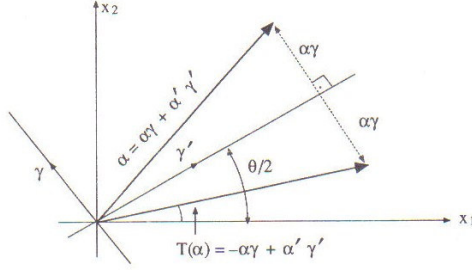


Şekil 2.2.1: e_1 ve e_2 vektörlerinin T dönüşümü altında orijin etrafında θ açıcı kadar dönmesi. (Koç, 1996)

Örnek 2.2.6: Şekil 2.2.2'de görüldüğü gibi $\mathbb{R}^2$ 'de $\det(T)=-1$ olacak şekilde dik bir dönüşüm T olsun. Biliyoruz ki determinantı -1 olan dik bir dönüşüm ilgili ortonormal taban

kullanılarak $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ matrisi ile temsil edilebilir. Şimdi $\gamma = \left(\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \right)$ ve

$\gamma' = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right)$ birim ortogonal vektörleri düşünelim.



Şekil 2.2.2: γ' vektörü boyunca bir simetri. (Koç, 1996)

Bu vektörlerin T altındaki görüntüsü

$$T(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} - \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} + \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = -\gamma' \quad (2.1)$$

$$T(\gamma') = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} + \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} - \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \gamma \quad (2.2)$$

olur. Her α vektörünü $T(\alpha) = a\gamma + a'\gamma'$ şeklinde yazarsak

$$T(\alpha) = aT(\gamma) + a'T(\gamma') = -a\gamma' + a'\gamma \quad (2.3)$$

olur. Yani T , γ' vektörü boyunca bir simetridir.

Bu iki örnek, $\mathbb{R}^2$ üzerinde dik bir dönüşümün ya orijin etrafında bir dönme ya da orijinden geçen bir doğru boyunca yansıma olduğunu söyler. Eğer dik bir T dönüşümü için $\det(T) = 1$ ise T bir dönme; $\det(T) = -1$ ise T bir yansımadır. Yansıma ve dönmeyi daha sonra da göreceğiz.

Bir F cismi üzerinde bir V vektör uzayı verilsin. Bu vektör uzayının tüm doğrusal otomorfizmaları bileşke altında bir grup oluşturur. Bu gruba V 'nin genel doğrusal grubu denir ve $GL(V)$ ile gösterilir. Eğer V vektör uzayı n -boyutlu bir F -vektör uzayı ise ve bu vektör uzayının bir ortonormal tabanı verilmiş ise F 'nin tüm otomorfizmaları $\det(A) \neq 0$ koşulunu sağlayan $n \times n$ boyutlu A matrisleri tarafından temsil edilebilir ve bu otomorfizmaların bileşkesi matris çarpımına karşılık gelir. Dolayısıyla bu matrisler bir grup oluşturur. Bu gruba genel doğrusal grup denir ve $GL(n, F)$ ile gösterilir. Başka bir deyişle, girdileri F 'den alınan $n \times n$ boyutlu tersinir matrislerin matris çarpımı altında oluşturduğu gruptur. Yani $GL(n, F) = \{A \in M(n, F) : \det A \neq 0\}$ 'dir ve bu grup, $GL(V)$ ile eş yapılıdır. Bu grubun

$SL(n, F) = \{A \in M(n, F) : \det A = 1\}$ şeklinde tanımlanan altgrubuna ise *özel doğrusal grup* denir.

$GL(n, F)$ 'nin bazı öğeleri:

Şimdi daha sonra anlatacağımız devirli grupları ve dihedral grupları anlamada bize yardımcı olacak bazı hareketlerin tanımlarını verelim:

- 1) **Dönme:** n -boyutlu gerçel uzay $\mathbb{R}^n$ 'de iç çarpım ve uzaklık tanımlı olduğundan dönme tanımlanabilir. Dönme ile vektörlerin uzunluğu ve uzayın oryantasyonu korunur. Öklit düzleminde, yani $\mathbb{R}^2$ 'de bir dönme, bir merkez (orijin) etrafında olur ve $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z \rightarrow e^{i\theta} z$ şeklinde gösterilir. İki dönmenin birleşimi başka bir dönmedir. Her dönmenin tek bir tane tersi vardır. Birim tasvir bir dönmedir, kısacası dönmeler grup oluşturur. Dönme doğrusal bir dönüşümdür.
- 2) **Öteleme:** Bir vektör uzayı V verilsin ve bu vektör uzayı üzerinde bir dönüşüm $T_v : V \rightarrow V$ olsun. Öklit uzayında bir v vektörünün belli bir yönde, uzunluğu p olan belli bir uzaklık kadar ötelenmesidir ve $T_v(p) = v + p$ ile gösterilir. Burada p , öteleme uzunluğudur.
- 3) **Yansıma:** Yansıma orijinden gelen bir eksene göre olur. Vektör yön değiştirir ve $z \rightarrow -z$ ile gösterilir.
- 4) **Ölçekleme:** Bir z vektörünü, yönünü ve büyüklüğünü değiştirmeden $a \neq 0$ sayısı ile çarpmaktır ve $z \rightarrow az$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.7: Ortogonal Matris ve Ortogonal Grup

Ortogonal grubu tanımlamadan önce ortogonal matris tanımına yer vermemiz gerekir:

$n \times n$ boyutlu gerçel bir matris Q ve bu matrisin devriği Q^T olsun. Eğer $Q^T Q = Q Q^T = I$ ise

Q 'ya *ortogonal matris* denir. Görüleceği gibi $\det(Q) = \det(Q^T)$ 'dir. Örnek olarak $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$ matrisleri birer ortogonal matristirler.

Eğer $\det Q = 1$ ise Q ortogonal matrisine *özel ortogonal matris* denir.

Şimdi ortogonal grubu tanımlayalım:

Bir F cismi verilsin ve $n \times n$ boyutlu bir matris Q ve bu matrisin devriği Q^T olsun. $O(n, F) = \{Q \in GL(n, F) : Q^T Q = Q Q^T = I\}$ kümesine F cismi üzerinde *n.dereceden ortogonal grup* denir ve $O(n, F) < GL(n, F)$ 'dir. Bu grup n -boyutlu gerçel uzayda dönme ile, daha sonra öğreneceğimiz, grup etkisi yapar.

$$\theta \in [0, 2\pi) \text{ olmak üzere } O(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \right\} \text{ olarak ifade edilir.}$$

Eğer Q matrisi $O(n, F)$ grubunun ögesi ise $\det Q = 1$ ya da $\det Q = -1$ olur. Dolayısıyla ortogonal grubun iki bileşeni vardır. $\det Q = 1$ olan ortogonal matrisler $O(n, F)$ 'nin normal altgrubudur. Bu gruba *özel ortogonal grup* denir ve $SO(n, F)$ ile gösterilir. Bu grup aynı zamanda $\mathbb{R}^n$ 'de orijin etrafındaki tüm dönmelerin grubudur.

Tanım 2.2.8: Üniter Matris ve Özel Üniter Grup

$n \times n$ boyutlu karmaşık bir matris U , bu matrisin eşlenik devriği U^* ve $n \times n$ boyutlu birim matris I_n olsun. Eğer $U^* U = U U^* = I_n$ ise U 'ya *n × n boyutlu üniter matris* denir. Eğer $\det U = 1$ ise U matrisine *özel üniter matris* denir. Bu matrislerin oluşturduğu gruba *özel üniter grup* denir ve $SU(n)$ ile gösterilir.

Biz bu çalışmada gerçel vektör uzayları üzerinde çalışacağız.

Tanım 2.2.9: Bir G grubu verilsin ve $\alpha, \beta \in G$ olsun. Eğer $\beta = t\alpha t^{-1}$ olacak şekilde bir $t \in G$ varsa β 'ya α 'nın *eşlenik ögesi* denir.

Tanım 2.2.10: Bir G grubu verilsin. $Z(G) = \{z \in G : zx = xz, \forall x \in G\}$ kümesine G grubunun *merkezi* denir.

Tanım 2.2.11: İki grup G ve H verilsin ve $f : G \rightarrow H$ bir homomorfizma olsun. $\text{çek}(f) = \{a \in G : f(a) = e\}$ kümesine f 'nin *çekirdeği* denir ve bu, G 'nin normal altgrubudur.

Teorem 2.2.12: (Birinci İzomorfizma Teoremi – Genel İzomorfizma Teoremi)

Eğer $f : G \rightarrow H$ bir grup homomorfizması ise $G / \ker(f) \cong \text{Im } f$ 'dir. Ayrıca f örten ise $G / \ker(f) \cong H$ 'dir.

Şimdi çalışmamızda bize gerekli olacak bazı grupları tanıyalım:

2.3 Gruplar

2.3.1 Permütasyon Grupları

Bir A kümesinde kendi üzerine olan eşlemeye *permütasyon* denir ve A 'nın tüm permütasyonlarının kümesi S_A ve ya $s(A)$ ile gösterilir. Eleman sayısı n olan $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ kümesi yerine $A = \{1, 2, \dots, n\}$ alınabilir ve $s(A)$ kümesi permütasyonların bileşke işlemine göre bir grup ifade eder. Bu gruba n . dereceden *simetri grubu* denir ve S_n ile gösterilir. $|S_n| = n!$ 'dir.

Bir A kümesinin birbirinden farklı $a_1, a_2, \dots, a_n$ öğelerini göz önüne alalım. Bu kümeyi $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ şeklinde yazmak yerine indisleri kullanarak $\{1, 2, \dots, n\}$ olarak da ele alabiliriz. $(a_1 a_2 \dots a_n)$ sembolü ile

a_1 öğesini a_2 'ye

a_2 öğesini a_3 'e

...

a_{n-1} öğesini a_n 'ye

a_n öğesini a_1 'e

götüren ve diğer öğeleri sabit tutan, yani kendisine götüren, permütasyonu gösterelim. Bu şekilde tanımlanan permütasyona n . *mertebeden* ya da n *uzunluğundaki bir devre* denir.

Örneğin, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ permütasyonu (1234) şeklinde uzunluğu 4 olan

devre olarak yazılabilir. Burada 5, 6, 7 ve 8 öğeleri α permütasyonu altında sabittir, yani kendileriyle eşleşmişlerdir.

Uzunluğu iki olan devreye *transpozisyon* denir ve her permütasyon transpozisyonların çarpımı şeklinde yazılabilir.

2.3.2 Alterne Grup

Bir permütasyon tek sayıda transpozisyonların çarpımı şeklinde ise *tek permütasyon*, çift sayıda transpozisyonların çarpımı şeklinde ise *çift permütasyon* denir. İki çift permütasyonun çarpımı çifttir, dolayısıyla bunlar S_n 'nin bir alt grubunu oluşturur. Bu gruba *n. dereceden alterne grup* denir ve A_n ile gösterilir. Alterne grubunun öge sayısı $|A_n| = \frac{n!}{2}$, dir.

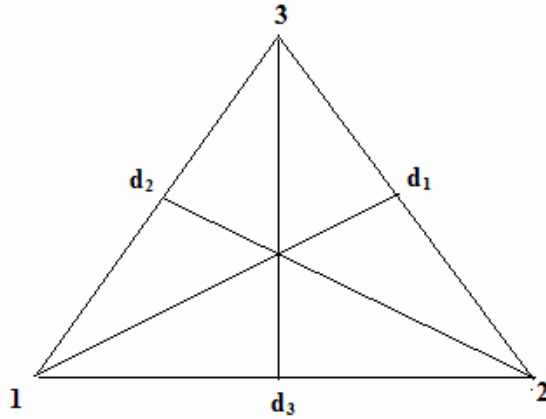
2.3.3 Devirli Grup

Bir G grubu verilsin. Eğer $G = \langle g \rangle = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$ ise G 'ye *devirli grup* denir ve n ögeli devirli grup $C_n = \{e, g, g^2, g^3, \dots, g^{n-1}\}$ şeklinde gösterilir. Burada g ögesine G grubunun *üreteci* denir. Bir C_n devirli grubu düzgün bir n -genin merkezi etrafındaki dönmelerinden oluşan simetri grubu olarak düşünülebilir.

2.3.4 Simetri Grupları

Dihedral gruplar Öklit düzlemindeki n kenarlı düzgün bir çokgenin simetri grubudur ve hem dönmeleri hem de yansımaları içerir. Dihedral gruplar, sonlu grupların en basit örneklerinden biridir. Dihedral gruplar, geometride D_n şeklinde gösterilirken cebirde, öge sayısını vurgulamak amacıyla D_{2n} ile gösterilir. Başka bir deyişle D_{2n} grubu, n kenarlı düzgün çokgenin farklı simetrilerinden oluşur ve bu simetrilerden n tanesi dönme simetrileri, n tanesi de yansıma simetrileridir ve $D_n = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}, f, rf, r^2f, r^{n-1}f\}$ şeklinde de gösterilir.

Örnek olarak eşkenar üçgenin simetri grubunu görelim:



Şekil 2.3.1: Eşkenar üçgenin simetri grubu.

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi eşkenar üçgenin köşelerini 1, 2, 3 ile; kenarortaylarını da sırasıyla d_1, d_2, d_3 ile gösterelim. Bu eşkenar üçgenin merkezi etrafında $0^\circ, \frac{2\pi^\circ}{3}, \frac{4\pi^\circ}{3}$ 'lik dönmeler ile kenarortaylarına göre simetrilerini düşünelim:

$$0^\circ \text{ 'lik dönme } \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ve bu simetri ile eşleşen matris } R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{2\pi^\circ}{3} \text{ 'lik dönme } \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve bu simetri ile eşleşen matris } R_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\frac{4\pi^\circ}{3} \text{ 'lik dönme } \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve bu simetri ile eşleşen matris } R_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$d_1 \text{ 'e göre simetri } f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve bu simetri ile eşleşen matris } S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$d_2 \text{ 'ye göre simetri } f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve bu simetri ile eşleşen matris } S_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$d_3 \text{ 'e göre simetri } f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ ve bu simetri ile eşleşen matris } S_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ olur}$$

ve $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, f_1, f_2, f_3\}$ bir grup oluşturur. Bu gruba eşkenar üçgenin simetri grubu ya da 3.dereceden dihedral grup denir ve D_3 ile gösterilir.

Karenin simetri grubunun, yani D_4 dihedral grubunun öğeleri aşağıdaki şekilde sekiz matris ile ifade edilir:

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, S_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Genel olarak D_n 'nin öğelerini matris formu aşağıdaki gibidir:

$$R_k = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi k}{n} & -\sin \frac{2\pi k}{n} \\ \sin \frac{2\pi k}{n} & \cos \frac{2\pi k}{n} \end{bmatrix}, S_k = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi k}{n} & \sin \frac{2\pi k}{n} \\ \sin \frac{2\pi k}{n} & -\cos \frac{2\pi k}{n} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Burada R_k matrisi dönmeleri ifade eder ve $\frac{2\pi k}{n}$ açısı ile saat yönünün tersine hareket eder.

S_k matrisi ise x eksenini ile $\frac{\pi k}{n}$ açısı yapan bir doğru boyunca yansımayı ifade eder.

Bir D_n dihedral grubu $frf^{-1} = r^{-1}$ olacak şekilde n . dereceden bir r dönmesi ve 2. dereceden bir f yansıması tarafından üretilir. Saat yönünün tersine dönme ve x eksenine göre yansıma,

$$r = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \frac{2\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

matrisleriyle gösterilir.

Bir D_2 grubu, 180° nin r dönmeleriyle ve x eksenine göre f yansımasından üretilir ve değişmeli bir gruptur. Aynı zamanda $D_2 = \{e, r, f, rf\}$ şeklinde gösterilir.

Eğer $|D_n| > 4$ ise genel olarak dönme ve yansıma simetrisi değişmeli değildir. Örneğin, D_4 değişmeli değildir.

2.3.5 Grup Etkileri

Bir G bir grubu ile bir X kümesi verilsin ve G 'nin birim öğesi e olsun. Eğer $*$: $G \times X \rightarrow X$

- i. Her $x \in X$ için $e * x = x$
- ii. Her $g_1, g_2 \in G$ ve her $x \in X$ için $(g_1 * g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$

koşullarını sağlayan bir tasvir ise X kümesine bir G -küme adı verilir ve G grubu X kümesine *etkiliyor* denir.

Örnekler:

- i. Her G grubu kendi üzerine etkir. Bu etki iki farklı şekilde gösterilir. Her $x \in G$ için $g * x := xg$ ya da $g * x := xg^{-1}$ şeklindedir.
- ii. Herhangi bir G grubu için aşık grup etkisi, her $x \in X$ ve her $g \in G$ için $g * x := x$ şeklinde tanımlanır.
- iii. Bir S_n simetri grubu ve altgrupları, öğelerin permütasyonunu alma ile $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesi üzerine etkir.
- iv. $GL(n, \mathbb{R})$ ve $SL(n, \mathbb{R})$ matris grupları $\mathbb{R}^n$ üzerine etkir.

Teorem 2.3.5.1: Bir G grubu ve boş olmayan bir S kümesi verilsin ve bu küme bir G -küme olsun. Her $a, b \in S$ için S üzerinde bir $\sim$ bağıntısı tanımlansın. Bu durumda $a \sim b$ olması için $ga = b$ olacak şekilde bir $g \in G$ olması gerekir. Bu taktirde $\sim$ bağıntısına S kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı denir.

Tanım 2.3.5.2: Bir G grubu verilsin ve bir S kümesi G -küme olsun. Teorem 2.3.5.1'de tanımlanan denklik bağıntısı ile belirlenen denklik sınıflarına G grubunun S üzerindeki yörüngeleri denir.

Yardımcı Teorem 2.3.5.3: Bir G grubu verilsin ve bir S kümesi G -küme olsun. Her $a \in S$ için $G_a = \{g \in G : ga = a\}$ altkümesi G 'nin bir altgrubudur. Bu G_a grubuna a 'nın stabilizeri ya da a 'nın izotropi grubu denir.

Tanım 2.3.5.4: Bir G grubu verilsin ve bir S kümesi G -küme olsun. Bir $a \in S$ ve $g \in G$ verilsin. Eğer $ga = a$ ise a 'ya g tarafından sabitlenmiştir denir. Eğer her $g \in G$ için $ga = a$ ise o zaman a 'ya G grubu tarafından sabitlenmiştir denir.

Teorem 2.3.5.5: (Burnside Teoremi)

Bir G grubu ve boş olmayan bir S kümesi verilsin. Eğer S bir G -küme ise o zaman $F(g)$, g tarafından sabitlenmiş S 'nin öğe sayısı olmak üzere G 'nin yörüngelerinin sayısı

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} F(g) \text{ 'dir.}$$

2.3.6 İç Otomorfizma Grubu

Bir G grubu verilsin. Her $x \in G$ ve sabit bir $a \in G$ için $f(x) = axa^{-1}$ şeklinde tanımlanmış $f: G \rightarrow G$ tasvirine G 'nin bir iç otomorfizması denir. Her iç otomorfizma aslında G 'nin bir otomorfizmasıdır. Bir G grubunun tüm iç otomorfizmalarının oluşturduğu küme de bir grup oluşturur ve bu grup $\text{Inn}G$ olarak gösterilir. Bir G grubunun merkezi $Z(G)$ ise $G/Z(G) \cong \text{Inn}G$ 'dir.

2.4 Düzgün Çokgenler ve Düzgün Çokyüzlüler

Öklit düzleminde bir çokgen alalım ve bu çokgenin kenar sayısını p ile gösterelim. Bir çokgenden bahsedebilmemiz için $p \geq 3$ olmalıdır. Eğer bu çokgenin tüm kenarlar uzunlukları ve tüm iç açılarının ölçüleri eşit ise bu çokgene *düzgün çokgen* denir. Eşkenar üçgen, kare, düzgün beşgen, düzgün altıgen gibi düzgün n -genler düzgün çokgenlere örnektir. Şimdi bu tanımdan yararlanarak düzgün çokyüzlünün tanımını yapalım:

2.4.1 Düzgün Çokyüzlü

3-boyutlu gerçel uzay $\mathbb{R}^3$ 'te bir çokyüzlü P olsun. Eğer P 'nin çokgensel yüzleri birbirine eşit, bu yüzlerin tüm kenar uzunlukları eşit ve yüzlerdeki köşe açılarının herhangi çifti birbirine eş ise bu çokyüzlüye *düzgün çokyüzlü* denir. Yani düzgün bir çokyüzlünün yüzleri düzgün çokgenlerdir. Örneğin, küp düzgün bir çokyüzlüdür.

Şimdi düzgün çokyüzlüleri sınıflandıralım:

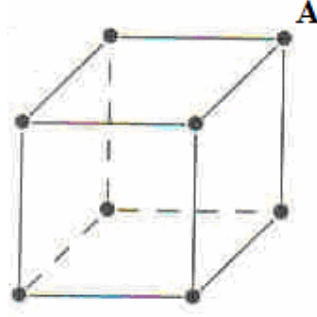
2.4.2 Düzgün Çokyüzlülerin Sınıflanması

Düzgün bir çokyüzlünün her bir yüzünün kenar sayısını p ile; her köşede birleşen kenar sayısını q ile simgeleyelim. Sınıflanma yapmadan önce herhangi bir çokyüzlünün var olup olmadığını gösterelim. Örneğin, 11 yüzü olan düzgün bir çokyüzlü var mıdır?

Öncelikle $\mathbb{R}^3$ 'te düzgün bir çokyüzlünün bir yüzünden bahsedebilmemiz için $p \geq 3$ ve düzgün bir çokyüzlüde bir köşede birleşebilecek kenar sayısının için de $q \geq 3$ olmalıdır.

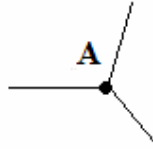
Bilindiği gibi p kenarlı düzgün bir çokgenin bir iç açısı $\pi - \frac{2\pi}{p}$ 'dir. Şimdi aşağıdaki küb

alalım ve bu kübe A noktasından bakalım:



Şekil 2.4.1: Herhangi bir düzgün çokyüzlünün çiziminin anlatımı.

Bu kübe A noktasından baktığımızda yukarıdan göreceğimiz durum aşağıdaki gibi olacaktır:



Şekil 2.4.2: Küp üzerindeki bir noktaya yukarıdan bakıldığında o noktada birleşen kenarları görürüz.

Yani kübün A köşesinde birleşen üç kenarını görürüz. Eğer düzlemde olsaydık, yani bu açılar A noktasında düzleme yapıştırsaydık A 'da birleşen açılar toplamı, yani $q\left(\pi - \frac{2\pi}{p}\right)$, 2π 'ye eşit olurdu.

$$q\left(\pi - \frac{2\pi}{p}\right) = 2\pi \quad (2.7)$$

Ancak 3-boyutlu gerçel uzay $\mathbb{R}^3$ 'te olduğumuz için A noktasında birleşen açılar toplamı

$$q\left(\pi - \frac{2\pi}{p}\right) < 2\pi \quad (2.8)$$

olmalıdır. Her iki tarafı π ile bölersek

$$q\left(1 - \frac{2}{p}\right) < 2 \quad (2.9)$$

olup buradan

$$1 < 2 \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} \right) \quad (2.10)$$

elde edilir ve son olarak da her iki tarafı 2'ye bölersek

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \quad (2.11)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Yukarıda söylediğimiz $p \geq 3$ ve $q \geq 3$ eşitsizlikleri kullanalım. $p \geq 3$ için

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{3} \text{ olup}$$

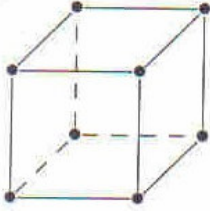
$$\frac{1}{2} < \frac{1}{q} + \frac{1}{3} \quad (2.12)$$

elde edilir. Buradan $q < 6$ olduğu görülür. Benzer hesap $q \geq 3$ için yapıldığında $p < 6$ elde edilir. Sonuç olarak $3 \leq q < 6$ ve $3 \leq p < 6$ 'dır. Dolayısıyla bu eşitsizlikleri sağlayan sadece dokuz olası durum vardır:

$$\begin{aligned} &(3, 3), (3, 4), (3, 5) \\ &(4, 3), (4, 4), (4, 5) \\ &(5, 3), (5, 4), (5, 5) \end{aligned}$$

Ancak bu dokuz olası durumdan sadece beş tanesi (2.11) eşitsizliğini sağlar ve bunlar $(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$ 'tür. Bu yüzden çizilebilecek düzgün konveks çokyüzlü sayısı sadece beş tanedir.

Düzgün konveks çokyüzlü cisimlere *Platonik cisim* de denir. Bundan sonra düzgün konveks çokyüzlülere Platonik cisim diyeceğiz. Bu cisimler küp, düzgün dörtyüzlü, düzgün sekizyüzlü, düzgün onikiyüzlü ve düzgün yirmiyüzlüdür. Bu cisimler şekil 2.4.3'te verilmiştir:



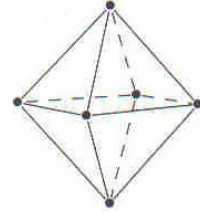
Küp

(hexahedron)



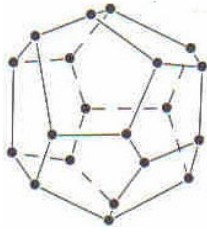
Düzgün dörtyüzlü

(tetrahedron)



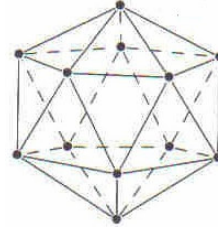
Düzgün sekizyüzlü

(octahedron)



Düzgün onikiyüzlü

(dodecahedron)



Düzgün yirmiyüzlü

(icosahedron)

Şekil 2.4.3: Platonik cisimler. (Kane, 2000)

3-boyutlu gerçel uzay $\mathbb{R}^3$ 'te düzgün konveks bir çokyüzlü P olsun ve bu çokyüzlünün toplam köşe sayısını V ile, toplam kenar sayısını E ile, toplam yüz sayısını da F ile gösterelim. Bu değerler arasında $V - E + F = 2$ Euler bağıntısı sağlanır.

Her cisme ilişik bir simetri grubu vardır ve bu simetri grubu çokyüzlüyü değişmez olarak bırakan tüm dönüşümlerin kümesidir. Simetri grubunun öge sayısı çokyüzlünün simetri sayısına eşittir.

Her Platonik cisim yukarıda kullandığımız p ve q cinsinden ifade edilebilir ve $\{p, q\}$ sembolü ile gösterilebilir. Bu sembole *Schläfli sembolü* denir. Schläfli sembolü ile köşe sayısı, kenar sayısı ve yüz sayısı arasındaki bağıntılar şöyledir:

$$V = \frac{4p}{2p+2q-pq}, E = \frac{2pq}{2p+2q-pq}, F = \frac{4q}{2p+2q-pq}, qV = 2E = pF \quad (2.13)$$

Beş Platonik cismin Schläfli sembolü ile birlikte diğer özellikleri aşağıdaki çizelgede verilmiştir:

Düzgün çokyüzlü	Köşe sayısı	Kenar sayısı	Yüz sayısı	Schläfli sembolü	Köşe konfigürasyonu
Düzgün dörtyüzlü	4	6	4	$\{3,3\}$	3.3.3
Küp	8	12	6	$\{4,3\}$	4.4.4
Düzgün sekizyüzlü	6	12	8	$\{3,4\}$	3.3.3.3
Düzgün onikiyüzlü	20	30	12	$\{5,3\}$	5.5.5
Düzgün yirmiyüzlü	12	30	20	$\{3,5\}$	3.3.3.3.3

Çizelge 2.4.1: Platonik cisimlerin özellikleri.

Her Platonik cismin bir duali (aksi) vardır ve dual, yüzler ile kenarların değiştirilmesi yoluyla yapılır. Her Platonik cismin duali yine bir Platonik cisimdir. Platonik cismin Schläfli sembolü $\{p, q\}$ ise dualinin Schläfli sembolü de $\{q, p\}$ 'dir.

- Düzgün dörtyüzlünün duali yine bir düzgün dörtyüzlüdür.
- Küp ve düzgün sekizyüzlü birbirlerinin dualidir.
- Düzgün onikiyüzlü ve düzgün yirmiyüzlü birbirlerinin dualidir.

Devirli gruplar ve dihedral gruplar, geometrik nesnelerin simetri gruplarıdır. Bu gruplar $\mathbb{R}^3$ 'te, tabanları düzgün n -gen olan sırasıyla düzgün piramitlerin ve düzgün prizmaların simetri gruplarına izomorftur. Bu düzgün piramitler ve prizmalar küre içine girebildiğinden C_n ve D_n kürenin de simetri gruplarıdır. Kürenin sonlu simetri grupları sadece C_n, D_n, A_4, S_4 ve A_5 'tir ve A_4, S_4, A_5 bu beş Platonik cismin simetri gruplarıdır.

Bu cisimlerle ilgili daha ayrıntılı bilgi daha sonra verilecektir.

2.5 Rasyonel Formlar

Tanım 2.5.1: İki polinom $P(x)$ ve $Q(x)$ verilsin ve $Q(x) \neq 0$ olsun. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki ifadeye *rasyonel form* denir. Her rasyonel form $Q(x)$ 'in sıfırlanmadığı bölgede bir fonksiyon tanımlar.

Örneğin, $\frac{x^3 - 2x}{2(x^2 - 5)}$ rasyonel formu $x = \mp\sqrt{5}$ noktalarında tanımlı değildir. Öte yandan, her $x \in \mathbb{R}$ için $\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$ rasyonel fonksiyonu tanımlıdır ancak karmaşık sayılarda $x = \mp i$ noktalarında tanımlı değildir. Karmaşık analizde ise rasyonel form $Q(z) \neq 0$ olmak üzere $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 'dir ve $P(z)$ ve $Q(z)$ polinomları ortak bir çarpana sahip olmamalıdır.

Tanım 2.5.2: Bir rasyonel form, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ biçiminde sadeleştirilmiş olarak verilsin ve $Q(x)$ polinomunun sıfırlandığı (sonlu) küme S olsun. O takdirde $\frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel formu $\mathbb{R} - S$ (ve ya $\mathbb{C} - S$) üzerinde $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ olacak şekilde $f : (\mathbb{C} - S) \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyonu tanımlar.

Genel olarak bu rasyonel formla ona tekabül eden fonksiyonu ayırd etmeyip “*rasyonel fonksiyon*” olarak adlandıracaktır.

Tanım 2.5.3: Rasyonel bir fonksiyonun derecesi, $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarından derecesi en büyük olanına eşittir. Örneğin, $P(x) = x^3 - 2x$ ve $Q(x) = 2(x^2 - 5)$ olmak üzere $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{2(x^2 - 5)}$ rasyonel fonksiyonunun derecesi $derP(x) > derQ(x)$ olduğundan $derf(x) = 3$ tür.

Tanım 2.5.4: $U \subset \mathbb{C}$ açık bir küme, $z_0 \in U$ ve $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, U üzerinde karmaşık bir fonksiyon olsun. Eğer

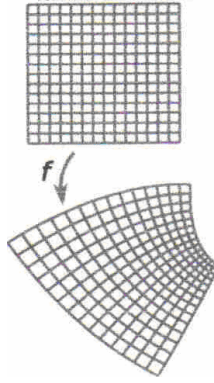
$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (2.14)$$

limiti varsa f 'ye, z_0 noktasında *karmaşık türevlenir* denir. Eğer f , U 'nun her noktasında

karmaşık türevleniyorsa f 'ye U üzerinde *holomorftir* denir.

Örneğin, karmaşık katsayılı tüm polinom fonksiyonları $\mathbb{C}$ (ya da karmaşık düzlem) üzerinde holomorftir. Ayrıca üstel fonksiyon ile sinüs ve kosinüs fonksiyonları da holomorftir. Karmaşık eşlenik ve gerçel kısım alma holomorftik değildir.

Tanım 2.5.5: Bir $w = f(z)$ tasviri herhangi bir z_0 noktasında z_0 'dan geçen eğriler arasındaki yönlü açıları ve bunların yönlerini koruyorsa, yani değiştirmiyorsa, bu tasvire z_0 noktasında *konformal* (açı koruyan) *tasvir* denir. Daha sonra göreceğimiz stereografik izdüşüm açı koruyan tasvire örnektir.



Şekil 2.5.1: Açı koruyan (konformal) tasvir. (bkz. [1])

Tanım 2.5.6: İzometri Grubu

İki metrik uzay X, Y ve bunların metrikleri d_X, d_Y olsun. Eğer bir $f : X \rightarrow Y$ tasviri herhangi $x, y \in X$ için $d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$ ise bu tasvire *uzaklık koruyan tasvir* denir ve bu tasvir bire birdir. Uzaklık koruyan bir eşlemeye (bire bir ve örten tasvire) *izometri* denir. X ve Y metrik uzayları arasında bir izometri varsa bu uzaylara *izometrik uzaylar* adı verilir. Bir metrik uzayın kendi üzerine olan izometrilere birleşme altında bir grup oluşturur ve bu gruba o metrik uzayın *izometri grubu* denir. Örneğin, herhangi bir yansıma, öteleme ve dönme Öklit uzayında birer izometridir. Dönme ve öteleme yaparken uzaklık ve oryantasyon korunduğu için bunlar birer direkt izometridir. Yansıma oryantasyon korumadığı için zıt bir izometridir.

Daha sonra öğreneceğimiz Möbiüs gruplarını tanımlamanın başka bir yolu da kuaterniyonları kullanmaktır. Şimdi kuaterniyonlar tanıyalım:

2.6 Kuaterniyonlar

Kuaterniyonlar karmaşık sayıların değişmeli olmayan bir grubudur ve $H = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ şeklinde gösterilirler. Toplama ve çarpma özelliği aşağıdaki gibidir:

Toplama özelliği:

$$(a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

Çarpma özelliği:

Çarpma, dağılma özelliği ve $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ bağıntısı kullanarak yapılır. Her kuaterniyon, $\{1, i, j, k\}$ kuaterniyon tabanının gerçel ve tek bir doğrusal kombinasyonudur.

i, j , ve k sanal sayılar olsun.

- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
- $ij = -ji = k$
- $jk = -kj = i$
- $ki = -ik = j$ 'dir.

Gerçel ve karmaşık sayıların çarpımından farklı olarak yukarıdaki bağıntılardan da görüldüğü gibi, kuaterniyon çarpımı değişmeli değildir.

Matris Gösterimi:

Kuaterniyonları matris olarak göstermenin iki yolu vardır. Bunlarda ilki 2×2 boyutundaki karmaşık matrislerden, ikincisi ise 4×4 boyutundaki gerçel matrislerden yararlanmaktır. Kuaterniyon toplama ve çarpımı, matris toplama ve çarpımı ile eşleşir. Bir $a + bi + cj + dk$ kuaterniyonunu 2×2 boyutundaki karmaşık matris ile gösterelim:

$$\begin{bmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{bmatrix}$$

Bunun özellikleri,

- Eğer $c = d = 0$ ise matris, köşegen matrise karşılık gelir.
- Bir kuaterniyonun normu, matrisin determinantının kare köküdür.
- Kuaterniyonun eşleniği, matrisin devriğinin eşleniğidir.
- Eğer kendimizi birim kuaterniyonlara kısıtlarsak bu gösterim, S^3 ile $SU(2)$ arasında bir

izomorfizmadır.

4×4 boyutlu gerçel matrisleri kullanırsak

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

olur. Kuaterniyonun eşleniği matrisin devriğidir. Sıfırdan farklı kuaterniyonların çarpım grubu $\mathbb{R}$ 'nin kopyası üzerinde eşlenik ile etkir.

3. DOĞRUSAL KESİRLİ DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde doğrusal kesirli dönüşümleri ve özelliklerini tanıyacağız.

3.1 Doğrusal Kesirli Dönüşümler

Karmaşık düzlemde bir tasvir $m: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ve $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ olsun. $ad - bc \neq 0$ koşulunu sağlayan $m(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ şeklindeki fonksiyona *doğrusal kesirli dönüşüm* denir. Doğrusal kesirli dönüşümlere *Möbiüs dönüşümü* de denir ve görüldüğü gibi dört parametre ile belirlenir. Doğrusal kesirli dönüşümler özel bir çeşit rasyonel fonksiyondur.

Doğrusal kesirli dönüşümler, karmaşık düzleme $\{\infty\}$ eklenmesiye oluşan genişletilmiş karmaşık düzlemde de incelenir ve bu düzlem $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ile gösterilir. Bu durumda $\frac{1}{0} = \infty$ ve $\frac{1}{\infty} = 0$ biçiminde tanımlanır. Özel olarak $m(\infty) = \frac{a}{c}$ ve $m\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty$ olduğu görülür.

Eğer $c = 0$ ise $m(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ şeklinde olacağından dönüşüm, artık doğrusal bir dönüşümdür.

Her doğrusal kesirli dönüşüm sayfa 8’de verilen dönme, yansıma, öteleme ve ölçeklemenin birleşimi şeklinde ifade edilebilir.

3.2 Bileşke İşlemi Altında Doğrusal Kesirli Dönüşümlerin Grubu

Bileşke işlemi altında doğrusal kesirli dönüşümlerin bileşke işlemi altında bir grup oluşturduğunu gösterelim:

Kapalılık Özelliği:

Her $m(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ve $p(x) = \frac{ex+f}{gx+h}$ doğrusal kesirli dönüşümleri için $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{C}$,

$ad - bc \neq 0, eh - gf \neq 0$ olmak üzere $m \circ p$ işlemine bakalım:

$$m \circ p(x) = \frac{(ae + gb)x + (af + hb)}{(ce + gd)x + (cf + hd)} \quad (3.1)$$

olur. Burada $(ae + gb)(cf + hd) - (af + hb)(ce + gd) \neq 0$ şartını kontrol etmeliyiz:

$$(ae + gb)(cf + hd) - (af + hb)(ce + gd) = gf(bc - ad) + eh(ad - bc) = (ad - bc)(eh - gf) \quad (3.2)$$

ve $ad - bc \neq 0$, $eh - gf \neq 0$ olduğundan bu eşitlik sıfırdan farklıdır ve $m \circ p$ doğrusal kesirli bir dönüşümdür. Kapalılık özelliği sağlanır.

Birleşme Özelliği:

Her $m(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $p(x) = \frac{ex+f}{gx+h}$, $k(x) = \frac{nx+t}{sx+r}$ doğrusal kesirli dönüşümleri için

$(m \circ p) \circ k = m \circ (p \circ k)$ olmalıdır.

$$(m \circ p) \circ k = \left(\frac{(ae + gb)x + (af + hb)}{(ce + gd)x + (cf + hd)} \right) \circ \left(\frac{nx + t}{sx + r} \right) \quad (3.3)$$

$$m \circ (p \circ k) = \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right) \circ \left(\frac{(en + sf)x + (te + rf)}{(gn + sh)x + (gt + rh)} \right) \quad (3.4)$$

olup işlemler yapıldığında $(m \circ p) \circ k = m \circ (p \circ k)$ olduğu görülür. Birleşme özelliği sağlanır.

Birim Öğe:

Her $m(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ doğrusal kesirli dönüşümü için $m \circ e(x) = e \circ m(x) = m(x)$ olacak şekilde

tek bir $e(x)$ ögesi olmalıdır.

$$m \circ e(x) = \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right) \circ e(x) = \frac{ae(x)+b}{ce(x)+d} = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (3.5)$$

olur. Sonuç olarak

$$e(x) = \frac{x+0}{0.x+1} \quad (3.6)$$

elde edilir.

Ters Öğe:

Her $m(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ doğrusal kesirli dönüşüm için $m \circ m(x)^{-1} = m(x)^{-1} \circ m(x) = e(x)$ olacak

şekilde tek bir $m(x)^{-1}$ ögesi olmalıdır.

$$m \circ m(x)^{-1} = \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right) \circ m(x)^{-1} = x \quad (3.7)$$

olur. Buradan $\frac{am(x)^{-1}+b}{cm(x)^{-1}+d} = x$ elde edilir. Sonuç olarak $ad-bc \neq 0$ olacak şekilde

$$m(x)^{-1} = \frac{dx-b}{-cx+a} \quad (3.8)$$

olarak bulunur.

Grup özellikleri sağlandığından doğrusal kesirli dönüşümler bir grup oluşturur. Doğrusal kesirli dönüşümlerin oluşturduğu bu gruba *Möbiüs grubu* denir ve $M(\hat{\mathbb{C}})$ ile gösterilir.

Şimdi izdüşel doğrusal grubu tanımlayalım:

Tanım 3.2.1: Bir F cismi verilsin ve bu cisim üzerindeki bir vektör uzayı V olsun. Bu vektör uzayı üzerindeki genel doğrusal grup $G(V)$, $G(V)$ 'nin merkezi de $Z(V)$ ise $GL(V)/Z(V)$ bölüm grubuna V vektör uzayının F cismi üzerindeki *izdüşel doğrusal grubu* denir ve $PGL(V)$ ile gösterilir.

Doğrusal kesirli dönüşümlerin bileşke altında bir grup oluşturduğunu gördük. Bu grup, $GL(2, \mathbb{C})/Z(GL(2, \mathbb{C}))$ bölüm grubudur. Burada $Z(GL(2, \mathbb{C}))$, $GL(2, \mathbb{C})$ 'nin merkezidir. Bu bölüm grubuna *izdüşel doğrusal grup* ve $PGL(2, \mathbb{C})$ ile gösterilir ve

$$GL(2, \mathbb{C})/Z(GL(2, \mathbb{C})) := PGL(2, \mathbb{C}) \quad (3.9)$$

dir.

İki doğrusal kesirli dönüşümün bileşkesini hesaplamak çok uzun olduğundan bunu kısaca aşağıdaki tasvir ile de gösterebiliriz:

$$\phi: \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Bileşke işlemini hesaplarken karşımıza matris çarpımı çıktığından bileşke işlemi ile matris çarpımı eşleşmektedir.

Bu ϕ tasviri, tamsayı katsayılı doğrusal kesirli dönüşümlerin grubu ile katsayıları rasyonel sayılar olan 2×2 boyutlu matrislerin oluşturduğu izdüşel doğrusal grup, yani $PGL(2, \mathbb{Q})$, arasında bir izomorfizmadır. $PGL(2, \mathbb{Q})$ 'nin öğeleri de matrislerle gösterilebilir. Burada

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} ar & br \\ cr & dr \end{bmatrix}$ matrisleri $PGL(2, \mathbb{Q})$ 'da aynı ögeyi ifade etmektedir.

Şimdi bileşke işlemi altında doğrusal kesirli dönüşümlerin bir grup oluşturmalarına ilişkin örnekler verelim:

Herhangi bir $p(x)$ fonksiyon için n . dereceden bileşkeyi $p^{(n)}(x)$ ile gösterelim. O halde

$$p(x) = \frac{1}{1+x} \text{ için } p^{(2)}(x) = \frac{x+1}{x+2}, \quad p^{(3)}(x) = \frac{x+2}{2x+3}, \quad p^{(4)}(x) = \frac{2x+3}{3x+5}, \quad p^{(5)}(x) = \frac{3x+5}{5x+8}, \text{ vb.}$$

olduğu görülür. Dikkat edilirse katsayılar olarak Fibonacci sayılarının elde edildiği görülür.

Başka bir deyişle $p(x) = \frac{1}{1+x}$ fonksiyonu $PGL(2, \mathbb{Q})$ 'da $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{bmatrix}$ matrisine

tekabül eder (f_i , i .nci Fibonacci sayısı). Bu matris Fibonacci dizisini üretir ve n . kuvveti

$$\begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix} \text{ şeklindedir.}$$

$p^{(0)}(x) = x$ fonksiyonunu birim fonksiyon olarak alalım. Yukarıdaki $p(x) = \frac{1}{1+x}$

fonksiyonunun tersi $p(x)^{-1} = \frac{-x+1}{x}$ 'dir. Bu yüzden $\{p^{(i)}(x) : i \in \mathbb{Z}\}$ kümesi bileşke işlemi

altında sonsuz öğeli bir grup oluşturur ve bu grup $\mathbb{Z}$ 'ye izomorftur. Bu grubu daha iyi görmek için yörüngeye 1 yazıp bileşkeleri aşağıdaki şekilde görebiliriz:

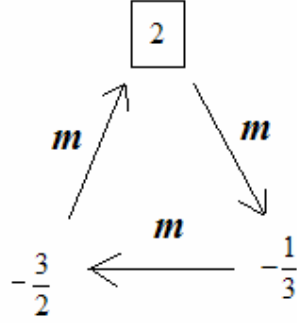
$$\dots \xleftarrow{p^{-1}} -2 \xleftarrow{p^{-1}} -1 \xleftarrow{p^{-1}} \infty \xleftarrow{p^{-1}} 0 \xleftarrow{p^{-1}} 1 \xrightarrow{p} \frac{1}{2} \xrightarrow{p} \frac{2}{3} \xrightarrow{p} \frac{3}{5} \xrightarrow{p} \frac{5}{8} \xrightarrow{p} \dots$$

Görüldüğü gibi pozitif tarafta kesirlerin pay ve paydalarında Fibonacci sayıları elde edilmektedir.

Şimdi de $m(x) = \frac{-1}{x+1}$ fonksiyonunu ele alalım:

$$m^{(2)}(x) = \frac{-x-1}{x} \text{ ve } m^{(3)}(x) = x \text{ olur ve dikkat ederseniz üçüncü adımda doğrusal kesirli}$$

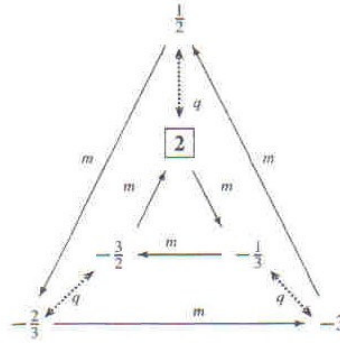
dönüşümlerin oluşturduğu grubun birim ögesini elde ettik. Bu sebeple $m(x)$ fonksiyonu bileşke altında üçüncü derecedendir, başka bir deyişle $m(x)$ 'in oluşturduğu grup üç öğeli sonlu bir gruptur ve C_3 'e izomorf olan sonlu bir grup üretir ve bu noktada $PGL(2, \mathbb{Q})$ 'nın ilk sonlu altgrubunu elde etmiş oluruz. Bu grubu aşağıdaki şekilde görebiliriz:



Şekil 3.2.1: Bir $m(x)$ fonksiyonunun bileşke altında oluşturduğu sonlu grup.

Son olarak $q(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonuna bakalım:

$q^{(2)}(x) = x$, yani birim fonksiyon olduğundan, bileşke altında 2. dereceden bir fonksiyondur ve iki ögeli sonlu bir grup oluşturur. Daha ilgi çekici olan durum ise q ve m fonksiyonlarının birlikte $q \circ m = m^2 \circ q$ bağıntısı ile öge sayısı altı olan bir grup üretmesidir. Bu grup da altı elemanlı D_3 grubuna izomorftur. Bunu aşağıdaki şekil ile özetleyebiliriz:



Şekil 3.2.2: Bir $m(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sonlu grup. (Dresden, 2004)

Bütün bu örneklerden sonra diyebiliriz ki, tamsayı katsayılı doğrusal kesirli dönüşümlerin bir kümesi bileşke altında bir grup oluşturur.

$PGL(2, \mathbb{Q})$ 'nin tamsayı katsayılı doğrusal kesirli dönüşümlerin grubunu temsil ettiğini söylemiştik. Aşağıdaki iki teorem asıl amacımızı ifade etmektedir ve daha sonra ispatlanacaktır:

Teorem 3.2.2: $PGL(2, \mathbb{Q})$ 'nin tüm sonlu altgrupları, $n = 1, 2, 3, 4$ ya da 6 için C_n 'ye ya da D_n 'ye izomorftur.

Eğer doğrusal kesirli dönüşümlerde gerçel sayıları kullanırsak bulacağımız olası sonlu grupların listesini genişletebiliriz:

Teorem 3.2.3: $PGL(2, \mathbb{R})$ 'nin tüm sonlu altgrupları ya devirli ya da dihedraldir ve böyle altgruplar keyfi derece için bulunabilir.

Rasyonel sayılardan gerçel sayılara genelleme yaptık. Şimdi doğrusal kesirli dönüşümlerde karmaşık sayıları kullandığımız durumu görelim:

Karmaşık katsayılı doğrusal kesirli dönüşümlerin herhangi bir grubu (yani $PGL(2, \mathbb{C})$ 'nin sonlu bir altgrubu) kürenin simetrilerinin sonlu bir grubuna izomorftur ve böylece, daha önce de bahsedildiği gibi, C_n devirli grubuna, D_n diedral grubuna ve ya düzgün dörtyüzlünün, kübün ve düzgün yirmiyüzlünün sırasıyla A_4 , S_4 ve A_5 simetri gruplarına izomorftur. Ancak teorem 3.2.3 bize gerçel katsayılı izdüşel matrisleri kullanarak A_4 , S_4 ve A_5 'i temsil etmenin mümkün olmadığını söyler çünkü bu gruplar ne devirlidir ne de dihedraldir.

3.3 Sonlu Dereceden Doğrusal Kesirli Dönüşüm Oluşturma

Şimdi genel olarak doğrusal kesirli bir dönüşümü karmaşık katsayıları kullanarak nasıl oluşturabileceğimizi göreceğiz. Öncesinde aşağıdaki tanımı vermek daha yararlı olacaktır.

Tanım 3.3.1: Her $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $0 < k < n$ için $\delta^n = 1$ ve $\delta^k \neq 1$ ise δ 'ya birimin n . dereceden ilkel kökü denir.

Örnek olarak 1, birinci dereceden bir ilkel köktür. Aynı şekilde -1 için bakacak olursak $(-1)^1 \neq 1$ ve $(-1)^2 = 1$ olduğundan -1, ikinci dereceden ilkel köktür. Benzer şekilde i sayısı birimin dördüncü dereceden ilkel bir köküdür. Dolayısıyla δ , $x^n - 1$ polinomunun bir köküdür ve $n > 1$ için $(x^n - 1)/(x - 1) = x^{n-1} + \dots + x^2 + x + 1$ polinomunun da köküdür. Birimin rasyonel kökleri sadece ∓ 1 dir. Kuadratik kökleri de sadece 3. , 4. ve 6. dereceden kökler olan sırasıyla $\mp i$ ve $\mp \frac{1}{2} \mp i \frac{\sqrt{3}}{2}$ 'dir. Birimin diğer bütün kökleri ise rasyonel sayılar üzerinde kübik, kuartik ve daha yüksek derecedendir.

Katsayıları karmaşık sayılar olacak şekilde $m(x) = \zeta x + b$ doğrusal dönüşümünün birleşme altında n . dereceden olması için ζ 'nin birimin ilkel bir kökü olması gerekir. Gerçekten de $m^{(n)} = \zeta^n x + b(\zeta^{n-1} + \dots + \zeta^2 + \zeta + 1)$ ifadesinde bu görülür. Dolayısıyla eğer ζ birimin n .

dereceden ilkel bir kökü ise o zaman $derm(x) = n$ olup bu ifadenin tersi de doğrudur.

Şimdi “Sonlu dereceden doğrusal kesirli bir dönüşüm nasıl buluruz?” sorusuna cevap verelim. Gösterebiliriz ki herhangi bir doğrusal kesirli dönüşümün $Ax + B$ şeklindeki bir doğrusal dönüşüme eşleniktir. Aşağıdaki yardımcı teoremde bu ifade edilmektedir:

Yardımcı Teorem 3.3.2: Doğrusal kesirli bir dönüşüm $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $m(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ olsun ve $m(x)$ ’in bileşke altında sonlu dereceye sahip olduğunu kabul edelim.

O takdirde $m(x)$ ’in derecesi 1, 2, 3, 4 ya da 6 olur ve son üç durum için $m(x)$, sırasıyla $\frac{-1}{x+1}$, $\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{2x-1}{x+1}$ dönüşümlerine eşleniktir.

Not 3.3.3: Kuadratik fonksiyonların tümü $PGL(2, \mathbb{Q})$ ’da tersinir değildir. Örneğin, $p(x) = \frac{-4}{x}$ ve $q(x) = \frac{1}{x}$ için $p(x)$ ’in, sadece rasyonel sayıları kullanarak $q(x)$ ’e eşlenik olmadığı görülür. $q = s^{-1} \circ p \circ s$ ve $s(x) = \mp 2ix$ olarak alınırsa bu iki fonksiyon birbirine eşlenik olur.

İspat: $n = 1, 2, 3, 4$ ya da 6’nın mümkün olan tek çözümler olduğunu gösterelim.

$derm(x) = n$ ve $n < \infty$ olsun. Eğer $c = 0$ ise $m(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ olup doğrusal bir dönüşüm olur.

Birimin rasyonel kökleri sadece ± 1 olduğundan $\frac{a}{d} = \pm 1$ ’dir, dolayısıyla $n = 1$ ya da $n = 2$ olarak elde edilir. Eğer $c \neq 0$ ise $\frac{ax+b}{cx+d} = x$ eşitliğini $\mathbb{Q}$ üzerinde derecesi ≤ 2 olan sabit bir α

noktası bulmak için çözebiliriz. Bir $\hat{m}(x) = s^{-1} \circ m \circ s(x)$ ’i bulmak için $m(x)$ ’in $s(x) = \alpha + \frac{1}{x}$

ile eşleniğini alalım. Doğrusal kesirli $\hat{m}(x)$ dönüşümünün katsayıları $\mathbb{Q}(\alpha)$ ’dan olur. Burada $s(\infty) = \alpha$ ve m, α ’yı sabit bıraktığından $\hat{m}(\infty) = \infty$ elde edilir ve $Ax + B$ şeklinde doğrusal

bir tasvirdir. $\hat{m}(x)$ ve $m(x)$, aynı sonlu dereceye sahip olduklarından A, n . dereceden ilkel kök olarak elde edilir. $A \in \mathbb{Q}(\alpha)$ ve $\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q}$ üzerinde kuadratik olduğundan $A = \pm 1, \pm i$ ya

da $\pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ’dir. Bu kökler, sırayla 1., 2., 3., 4., ve 6. dereceden ilkel kök olduklarından

$n = 1, 2, 3, 4$ ya da 6'dır.

Şimdi $n = 3, 4$ ya da 6 olduğunda $m(x)$ 'in teoremin ifadesindeki dönüşümlerden birine eşlenik olduğunu gösterelim. $n \geq 3$ olsun ve $m(x) = A \mapsto B \mapsto C$ olacak şekilde $A, B, C \in \mathbb{Q}$ 'yi bulalım. Doğrusal kesirli bir dönüşüm, $0 \mapsto A, -1 \mapsto B$ ve $\infty \mapsto C$ olacak şekilde $s(x)$ olsun. Burada $\hat{m}(x) = s^{-1} \circ m \circ s(x)$ ise $\hat{m}(x): 0 \mapsto -1 \mapsto \infty$ olduğu görülür. Bu da bir $\hat{a} = \hat{m}(\infty)$ için $\hat{m}(x) = \frac{\hat{a}x - 1}{x - 1}$ olması demektir. 3., 4. ya da 6. dereceden $\hat{m}(x)$ için sırasıyla

$\hat{a} = 0, 1$ ya da 2 olur. İspat tamamlanmıştır.

Aşağıdaki yardımcı teorem, sadece gerçel katsayıları kullanırsak A_4, S_4 ya da A_5 'i doğrusal kesirli dönüşümleri kullanarak temsil edemeyeceğimizi ifade eder:

Yardımcı Teorem 3.3.4: $\mathbb{R}$ 'nin bir altcismi K olsun. O takdirde, katsayıları K 'dan olan doğrusal kesirli dönüşümlerin kümesinin tüm sonlu altgrupları ya devirli ya da dihedraldir.

İspat: A_4, S_4 ve A_5 'in $PGL(2, K)$ içinde olmadığını göstermemiz gerekir. $A_4 \subset S_4$ ve $A_4 \subset A_5$ olduğundan sadece $A_4 \not\subset PGL(2, K)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$A_4 \cong G$ olacak şekilde bir G grubunun var olduğunu düşünelim. Dördüncü dereceden alterne grup A_4 , 3. dereceden öğeler içerdiğinden Yardımcı Teorem 3.3.2'yi kullanarak $\frac{-1}{x+1} \in G$ olduğunu düşünebiliriz. Bu grubun içinde 3. dereceden öğeler ile 2. dereceden öğelerin çarpımının sonucunun 3. derece olduğunu biliyoruz. Bu durumda $PGL(2, K)$ 'da 2. derece her öğe, $\{\infty\}$ 'u sabit tutuyorsa ya $-x+b$ şeklinde ya da a sonlu olmak üzere $\infty \rightarrow a$ ise $\frac{ax+b}{x-a}$

şeklindedir. Şimdi $\frac{-1}{x+1}$ ile $-x+b$ 'nin bileşkesini alalım. $b = \mp i - 1$ için 3.dereceden

$\frac{1}{x-b-1}$ elde edilir. $\frac{-1}{x+1}$ ile $\frac{ax+b}{x-a}$ 'nın bileşkesini alırsak $\frac{-x+a}{(a+1)x+(b-a)}$ elde edilir ve

$$b = \frac{1}{2}(1 + 2a \mp \sqrt{-4a^2 - 4a - 3}) \quad (3.10)$$

için derecesi 3 olarak bulunur. b, a 'nın tüm değerleri için karmaşık sayı olarak bulunur; dolayısıyla A_4 , sadece gerçel sayılar kullanılarak elde edilemez. İspat tamamlanmıştır.

Teorem 3.2.2 ve Teorem 3.2.3'nin ispatı:

Yardımcı Teorem 3.3.4'ten dolayı sadece devirli ve dihedral grupları araştırıyoruz. $G = PGL(2, \mathbb{R})$ 'nin tüm devirli ve dihedral grupları içerdiğini göstermek için her $n > 0$ için

$q(x) = \frac{1}{x}$ ile C_n devirli grubu ile birlikte D_n dihedral grubunu oluşturacak şekilde n .

dereceden bir $m(x)$ ögesi olduğunu gösterelim:

$n=1$ için $m(x) = x$ ve $n=2$ için $m(x) = -x$ olsun. Açıkça görülüyor ki bu, bize C_1 , C_2 'yi

ve $q(x) = \frac{1}{x}$ ile D_1 ve D_2 'yi verir. $n \geq 3$ olduğunu kabul edelim ve ζ_n , birimin n . dereceden

ilkel kökü olsun. Özel olarak $e^{2\pi i/n}$ için, $a_n = 1 + 2\cos(2\pi/n) = 1 + \zeta_n + 1/\zeta_n \in \mathbb{R}$ olsun ve

$m(x) = \frac{a_n x - 1}{x + 1}$ şeklinde tanımlansın. $m(x)$ 'in tersi $m^{-1}(x) = \frac{x + 1}{-x + a_n}$ ve $m^{-1} = q^{-1} \circ m \circ q$ 'dir.

Şimdi D_n dihedral grubunu göstermek için $m(x)$ 'in n . dereceden olduğunu göstermemiz

gerekir. Bunun için $\hat{m} = s^{-1} \circ m \circ s$ olacak şekilde bir $s(x) = \zeta_n + \frac{1}{x}$ tanımlayalım. $s(\infty) = \zeta_n$

ve $m(\zeta_n) = \zeta_n$ olduğundan $\hat{m}(\infty) = \infty$ 'dır. Dolayısıyla $\hat{m}(x) = Ax + B$ olacak şekilde bazı

$A, B \in \mathbb{C}$ vardır. $x=0$ ve $x = \frac{-1}{\zeta_n}$ için $\hat{m}(x)$ ve $s^{-1} \circ m \circ s(x)$ tasvirlerini ele alırsak $A = \zeta_n$ ve

$B = \frac{\zeta_n}{1 + \zeta_n}$ olarak bulunur. $\hat{m}(x)$, dolayısıyla da $m(x)$, n . derecedendir. Teorem 3.2.3'in ispatı

bitmiştir. Eğer sadece rasyonel sayıları ele alırsak, yukarıdaki durum yardımcı teorem 3.3.2 ile birlikte düşünüldüğünde Teorem 3.2.2 de ispatlanmış olur.

Bu ispatta gösterildiği gibi herhangi dereceden bir doğrusal kesirli dönüşümün varlığından aşağıdaki sonucu yazabiliriz:

Sonuç 3.3.5: $n \geq 3$ için ve $a_n = 1 + 2\cos(2\pi/n)$ olduğunda $\frac{a_n x - 1}{x + 1}$ birleşme altında n . derecedendir.

4. DOĞRUSAL KESİRLİ DÖNÜŞÜMLERİN SINIFLANDIRILMASI

Doğrusal kesirli dönüşümlerinin sınıflandırılmasına geçmeden önce $\phi: \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

şeklindeki bir doğrusal kesirli dönüşümün $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ şeklindeki bir A matrisi ile ifade edilebileceğini hatırlatmak istiyoruz.

Bir doğrusal kesirli dönüşümün sabit noktaları $m(\gamma) = \gamma$ denklemi çözülerek bulunur. Birim dönüşümden farklı her doğrusal kesirli dönüşümün genişletilmiş karmaşık düzlemde γ_1, γ_2 gibi iki sabit noktası vardır ve bu sabit noktalar katıyla hesaplanır. Doğrusal kesirli dönüşümler aynı zamanda sabit noktaları cinsinden yazılabilir.

Eğer $c \neq 0$ ise

$$\gamma_{1,2} = \frac{(a-d) \mp \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c} = \frac{(a-d) \mp \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2c} \quad (4.1)$$

olur.

Bir $A \in GL(2, \mathbb{C})$ verildiğinde $\lambda \neq 0$ olmak üzere $A \mapsto \lambda A$ dönüşümü altında $\frac{tr^2(A)}{\det(A)}$ değişmezdir ve kısa olarak

$$trace^2(g) = \frac{tr^2(A)}{\det(A)} \quad (4.2)$$

yazılabilir. Bir doğrusal kesirli $m(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ dönüşümü ya bir ve ya iki sabit noktaya sahiptir ya da $m(x)$ birim dönüşümdür. Bu durum bize ilkel bir sınıflandırma verir ve genişletilmiş karmaşık düzlemde sabit noktalara bağlı “ince” bir sınıflandırma elde ederiz. Bu sınıflandırma eşlenik altında değişmez olduğundan yine eşlenik altında “ince” bir sınıflandırma elde ederiz. Başka bir deyişle bu sınıflama kalan sınıflarına bir sınıflamadır. Daha önce verilen (4.2) tasviri kalan sınıflarını parametrize eder. Şimdi bazı özel dönüşümleri tanıyalım:

Sıfırdan farklı her $k \in \mathbb{C}$ için $k \neq 1$ olmak üzere standart biçimler

$$m_k(x) = kx = \frac{kx+0}{0.x+1}, m_1(x) = x+1 \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır ve

$$tr^2(m_k) = k + \frac{1}{k} + 2 \quad (4.4)$$

dır.

Eğer bir g doğrusal kesirli dönüşümü birim dönüşümden farklı ise o zaman genişletilmiş karmaşık düzlemde g 'nin ya α ve β gibi iki sabit noktası vardır ya da tek bir α sabit noktasına sahiptir. Şimdi herhangi bir h doğrusal kesirli dönüşümünü alalım ve $h(\alpha) = \infty$, $h(\beta) = 0$ ve $g(\beta) \neq \beta$ için $h(g(\beta)) = 1$ olsun. O halde

$$h(x) = \frac{x-\beta}{x-\alpha}, h^{-1}(x) = \frac{x\alpha-\beta}{x-1} \quad (4.5)$$

şeklindedir.

Eğer $g(\alpha) = \alpha$ ve $g(\beta) = \beta$ ise $hgh^{-1}(0) = 0$ ve $hgh^{-1}(\infty) = \infty$ 'dir. Yani hgh^{-1} , 0 ve ∞ 'u sabit tutar. Dolayısıyla $hgh^{-1} = m_k$ ve $k \neq 1$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Eğer sadece $g(\alpha) = \alpha$ ise bu durumda $hgh^{-1}(\infty) = \infty$ olup $hgh^{-1}(0) = 1$ elde edilir, dolayısıyla $hgh^{-1} = m_1$ 'dir. Yani birim dönüşümden farklı herhangi bir doğrusal kesirli dönüşümü standart biçimlerden birine eşleniktir.

Teorem 4.1: Birim dönüşümden farklı iki doğrusal kesirli dönüşüm f ve g olsun. Bu iki doğrusal kesirli dönüşümün birbirine eşlenik olması için gerek ve yeter koşul $tr^2(f) = tr^2(g)$ olmasıdır.

İspat: Teoremin ilk kısmı (4.2) bağıntısından görülür. Eğer $f \sim g$ ise o takdirde $tr^2(f) = tr^2(g)$ 'dir. İkinci kısım için ise $tr^2(f) = tr^2(g)$ olduğunu kabul edelim. Bu iki Möbiüs dönüşümünün (4.3)'teki standart biçimlere eşlenik olduğunu biliyoruz, yani $f \sim m_p$ ve $g \sim m_q$ olacak şekilde iki m_p ve m_q standart biçimi vardır. Dolayısıyla

$$tr^2(m_p) = tr^2(f) = tr^2(g) = tr^2(m_q) \quad (4.6)$$

dir. (4.3) bağıntısından ya $p = q$ ya da $p = \frac{1}{q}$ 'dir. Biliyoruz ki $m_p \sim m_{1/p}$ 'dir ve $p = 1$ için bu, aşıkardır. Eğer $p \neq 1$ ise $m_p \sim m_{1/p}$ olduğundan $hm_p h^{-1} = m_{1/p}$ olacak şekilde bir h doğrusal kesirli dönüşümü vardır ve $h(x) = -\frac{1}{x}$ 'dir. Şimdi $f \sim m_p$, $g \sim m_q$ ve $p = q$ ya da $p = \frac{1}{q}$ olduğundan $m_p \sim m_q$ 'dır ve eşlenik olma bir denklik bağıntısı olduğundan $f \sim g$ 'dir.

İspat tamamlanmıştır.

Doğrusal kesirli dönüşümler genel olarak,

1. Parabolik dönüşümler
2. Eliptik dönüşümler
3. Hiperbolik dönüşümler
4. Loksodromik dönüşümler

olmak üzere dört sınıfa ayrılır. Hiperbolik dönüşümler, loksodromik dönüşümlerin özel bir halidir. Her bir sınıfın cebirsel ve geometrik anlamı vardır. Geometrik olarak, her farklı sınıf karmaşık düzlemde farklı dönüşümler olarak ortaya çıkar. Bu sınıfları belirlemek için A matrisinin $\text{tr}A = a + d$ izini hesaplamak gerekir. Bu matrisin izi eşlenik altında değişmezdir, başka bir deyişle $\text{tr}ABA^{-1} = \text{tr}B$ 'dir. Her doğrusal kesirli dönüşüm, A matrisini uygun bir skaler ile çarpılmasıyla $\det A = 1$ olacak şekilde yazılabilir.

4.1 Parabolik Dönüşümler

Bir dönüşümün parabolik olması için genişletilmiş karmaşık düzlemde tek bir sabit noktası olması gerekir ve $\text{tr}^2 A = (a + d)^2 = 4$ 'tür. Eğer $(a + d)^2 = 4(ad - bc)$ şartı sağlanıyorsa parabolik dönüşümlerde sabit noktalar çakışır ve noktalardan biri ya da ikisi birden $\{\infty\}$ olabilir. Eğer $c = 0$ ise sabit noktalardan biri sonsuzda olur ve bu durumda parabolik bir dönüşümün sabit noktaları

$$\{\gamma_1, \gamma_2\} = \left\{ \infty, \frac{b}{d-a} \right\} \quad (4.7)$$

şeklinde ifade edilir. Eğer $c = 0$ ve $a = d$ ise noktaların ikisi de sonsuzdadır ve bu doğrusal

kesirli dönüşüm $x \mapsto \alpha x + \beta$ ile aynı şeyi ifade eder. Ayrıca parabolik bir dönüşüm $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

matrisine eşlenik olmalıdır ve bu matrisin sabit noktaları

$$\{\gamma_1, \gamma_2\} = \left\{ \infty, \frac{1}{d-a} \right\} \quad (4.8)$$

şeklindedir. Tüm parabolik dönüşümleri içeren altgrup ise $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ formundadır.

Parabolik dönüşümler dışındaki tüm dönüşümler $\lambda \neq 0, 1, -1$ olmak üzere $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$ matrisine eşleniktir ve bu dönüşümlerin iki sabit noktası vardır. Burada $k = \lambda^2$ 'ye *dönüşümün karakteristik sabiti* ya da *çarpanı* denir.

4.2 Eliptik Dönüşümler

Eğer A dönüşüm matrisinin izi $0 \leq \text{tr}^2 A \leq 4$ şeklinde ise dönüşüme *eliptik dönüşüm* denir. Bir dönüşümün eliptik olması için $|\lambda| = 1$ olmalıdır. Bir $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere A matrisinde $\lambda = e^{i\alpha}$ yazarsak eliptik bir dönüşüm $\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ matrisine eşleniktir. Herhangi bir A matrisi için A^n 'nin karakteristik sabiti k^n 'dir. Bu yüzden derecesi sonlu olan Möbiüs dönüşümleri sadece eliptik dönüşümlerdir ve bu, sadece λ birimin bir kökü olduğunda geçerlidir.

4.3 Hiperbolik Dönüşümler

Bir A dönüşüm matrisinin izi $\text{tr}^2 A > 4$ ise bu doğrusal kesirli dönüşüme *hiperbolik dönüşüm* denir. Parabolik olmayan doğrusal kesirli bir dönüşümün hiperbolik olması için $\lambda \in \mathbb{R}^+$ olmalıdır.

4.4 Loksodromik Dönüşümler

Eğer bir A dönüşüm matrisi için $\text{tr}^2 A \notin [0, 4]$ ise bu dönüşüme *loksodromik dönüşüm* denir. Daha önce de bahsettiğimiz gibi hiperbolik dönüşümler bu sınıfın özel bir durumudur. Bir doğrusal kesirli dönüşümün loksodromik olması için $|\lambda| \neq 1$ olmalıdır.

4.5 Normal Biçim

Doğrusal kesirli dönüşümler aynı zamanda sabit noktaları cinsinden yazılabildiğini söylemiştik. Bu yazılışa *normal biçim* denir. Önce sabit noktaları farklı olan yani parabolik olmayan durumu inceleyelim:

Parabolik olmayan her doğrusal kesirli dönüşüm bir ölçekleme hareketine eşleniktir, yani sabit noktaları 0 ve $\{\infty\}$ 'da olan $x \mapsto kx$ formunda olan bir dönüşüme eşleniktir. Bir başka

deyişle $m = g^{-1}mg$ şeklinde yazılabilir. Burada $g(x) = \frac{x - \gamma_1}{x - \gamma_2}$ biçiminde olmalıdır ve

$(\gamma_1, \gamma_2) \mapsto (0, \infty)$ olur. Burada γ_1 ve γ_2 sonludur. Eğer bunlardan biri sonsuzda olursa g tasviri sonsuzu sabit tutma ve diğer noktayı sıfıra gönderme yoluyla değiştirilebilir. Eğer doğrusal kesirli bir dönüşüm γ_1, γ_2 şeklinde iki farklı sabit noktaya sahipse o zaman $g^{-1}mg$ dönüşümü, 0 ve $\{\infty\}$ 'da sabit noktalara sahiptir ve dolayısıyla, $g^{-1}mg(x) = kx$ şeklinde bir ölçekleme elde ederiz. Bu dönüşümün sabit nokta denklemi

$$\frac{m(x) - \gamma_1}{m(x) - \gamma_2} = k \cdot \frac{x - \gamma_1}{x - \gamma_2} \quad (4.9)$$

şeklinde ifade edilir. $m(x)$ 'i matris formunda çözmek

$$A(k; \gamma_1, \gamma_2) = \begin{bmatrix} \gamma_1 - k\gamma_2 & (k-1)\gamma_1\gamma_2 \\ 1-k & k\gamma_1 - \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

matrisini çözmek demektir. Eğer sabit noktalardan biri sonsuzda ise

$$A(k; \gamma, \infty) = \begin{bmatrix} k & (1-k)\gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

matrisini elde ederiz.

Yukarıdaki ifadelerden $m(x)$ dönüşümünün sabit noktadaki türevlerini hesaplanabilir ve

$$m'(\gamma_1) = k, \quad m'(\gamma_2) = \frac{1}{k} \quad (4.12)$$

olarak bulunur.

Sabit noktaların sıralamasını vererek m 'nin her bir çarpanını, m 'nin karakteristik sabiti olarak yazabiliriz. Sabit noktaların sırasını değiştirmek, karakteristik sabit için çarpanın tersini almak

demektir ve

$$A(k; \gamma_1, \gamma_2) = A\left(\frac{1}{k}; \gamma_2, \gamma_1\right) \quad (4.13)$$

şeklinde yazılır.

Loksodromik dönüşümler için $|k| > 1$ ise γ_1 'e *itici sabit nokta* ve γ_2 'ye *çekici sabit nokta* denir. $|k| < 1$ ise γ_1, γ_2 için roller değişir.

4.6 Parabolik Durum

Parabolik durumda bir tek sabit nokta vardır. Bu noktaya γ diyelim. Eğer $\gamma \neq 0$ ise $\gamma \rightarrow \infty$

dönüşüm $g(x) = \frac{1}{x - \gamma}$ şeklinde olmalıdır ya da γ sonsuzda ise birim dönüşümdür. $g^{-1}mg$

dönüşümü $\{\infty\}$ 'u sabit tutar. Dolayısıyla $g^{-1}mg(x) = x + \beta$ öteleme hareketi elde edilir.

Dolayısıyla, bir parabolik dönüşüm için sabit nokta formülü

$$\frac{1}{m(x) - \gamma} = \frac{1}{x - \gamma} + \beta \quad (4.14)$$

şeklinde olacaktır. M 'yi matris formunda çözersek

$$A(\beta; \gamma) = \begin{bmatrix} 1 + \gamma\beta & -\beta\gamma^2 \\ \beta & 1 - \gamma\beta \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

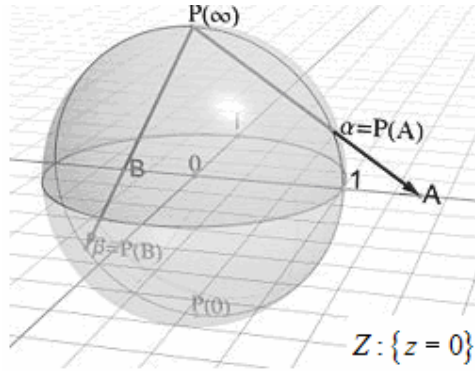
matrisini elde ederiz. Eğer $\gamma = \infty$ ise

$$A(\beta; \gamma) = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

matrisi elde edilir.

Bu dönüşümlerin geometrik yorumlarını vermeden önce bir sonraki bölümde stereografik izdüşümü görelim:

4.7 Stereografik İzdüşüm



Şekil 4.7.1: Stereografik izdüşüm. (bkz. [2])

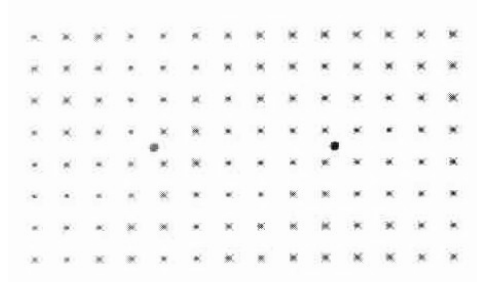
Stereografik izdüşüm bir küreyi bir düzlem üzerine izdüşüren hem önemli bir tasvir hem de bir yöntemdir. Başka bir deyişle üç boyutlu uzaydaki kürenin iki boyutlu gerçel düzlem $\mathbb{R}^2$ üzerine resmedilmesidir. Stereografik izdüşüm bir nokta dışında tüm küre üzerinde tanımlıdır ve bu noktaya *izdüşüm noktası* denir. Tasvir, tanımlandığı yer boyunca birebirdir ve düzgündür. Ayrıca açı koruyan bir tasvirdir. Fakat bu tasvir alanı; özellikle de izdüşüm noktasına yakın olan alanı korumaz.

$S^2 \subset \mathbb{R}^3$ birim küresi, $S^2 = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ şeklinde tanımlanır. Kürenin kuzey kutbunu $P = (0, 0, 1)$ ile ve kürenin, izdüşüm noktası dışında kalan kısmını ise M ile gösterelim. Burada izdüşüm noktası P 'dir. $Z : \{z = 0\}$ düzlemi kürenin merkezi boyunca hareket eder ve ekvator, kürenin bu düzlem ile kesişimidir. M üzerindeki herhangi bir α noktası için α ve P 'den geçen tek bir doğru vardır ve bu doğru $z = 0$ düzlemini A noktasında keser. İzdüşüm ve bu izdüşümün tersi, Kartezyen koordinatlarda küre üzerinde (x, y, z) ile; düzlem üzerinde (X, Y) ile aşağıdaki formüllerle verilir:

$$(X, Y) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right), (x, y, z) = \left(\frac{2X}{X^2 + Y^2 + 1}, \frac{2Y}{X^2 + Y^2 + 1}, \frac{X^2 + Y^2 - 1}{X^2 + Y^2 + 1} \right) \quad (4.17)$$

Küreden düzleme açı koruyan başka bir tasvir yoktur. Eğer öyle olsaydı bu lokal bir izometri olurdu ve Gauss eğriliğini korurdu. Düzlem ve küre farklı Gauss eğriliklerine sahip olduğundan bu olanaksızdır.

4.8 Karakteristik Sabitin Geometrik Yorumu



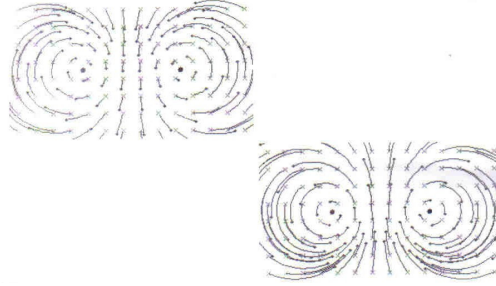
Şekil 4.8.1: Küreden düzleme stereografik dönüşüm yapıldıktan sonra parabolik olmayan bir durumda doğrusal kesirli bir dönüşümünün iki sabit noktası. (bkz. [3])

Karakteristik sabit logaritma kullanılarak da ifade edilebilir:

$$e^{\rho + \alpha i} = k \quad (4.18)$$

Bu şekilde ifade edildiği zaman $\rho \in \mathbb{R}$ sayısı genişleme katsayısı olur ve γ_1 noktasının nasıl sabit itici bir nokta olduğuna, γ_2 noktasının da nasıl çekici olduğuna işaret eder. Burada $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı dönme katsayısıdır.

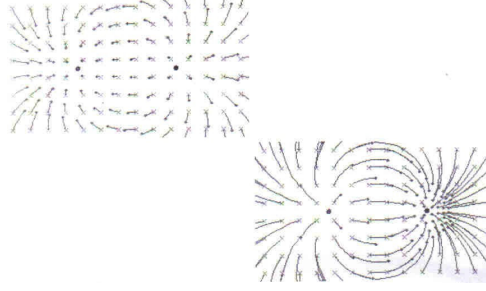
4.8.1 Eliptik Dönüşümler İçin



Şekil 4.8.2: Eliptik dönüşümler. (bkz. [3])

Eğer $\rho = 0$ ise sabit noktalar ne çekici ne de iticidir. Bu dönüşümler iki sabit nokta etrafında hareket eder. Eğer sabit noktalardan biri sonsuzda ise bu, bir nokta etrafında afin bir dönmeye denktir.

4.8.2 Hiperbolik Dönüşümler İçin



Şekil 4.8.3: Hiperbolik dönüşümler. (bkz. [3])

Eğer $\alpha = 0$ ya da $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\alpha = 2k\pi$ ise dönüşüm, hiperboliktir. Bu tür dönüşümler dairesel yollar boyunca noktaları bir noktadan diğerine doğru hareket ettirir. Eğer herhangi bir hiperbolik doğrusal kesirli dönüşümü ile üretilen tek parametrelili bir altgrup alırsak bu altgruptaki her dönüşüm aynı iki noktayı sabit bırakacak şekilde sürekli bir dönüşüm elde ederiz.

4.8.3 Loksodromik Dönüşümler İçin

Eğer $\alpha \neq 0$ ve $\rho \neq 0$ ise dönüşüm, loksodromiktir. Bu dönüşümler S-şeklindeki yollar üzerindeki tüm noktaları bir sabit noktadan diğerine götürür.

5. PLATONİK CİSİMLER ve SONLU DÖNME GRUPLARI

Bu bölümde kendimizi $\mathbb{R}^3$ 'te tüm sonlu direkt izometrilere kısıtlarsak Burnside teoremini kullanarak göstereceğiz ki $\mathbb{R}^3$ 'ün direkt izometrilерinin sonlu bir G grubu ya devirlidir ya dihedral ya da Platonik bir cismin simetri grubudur.

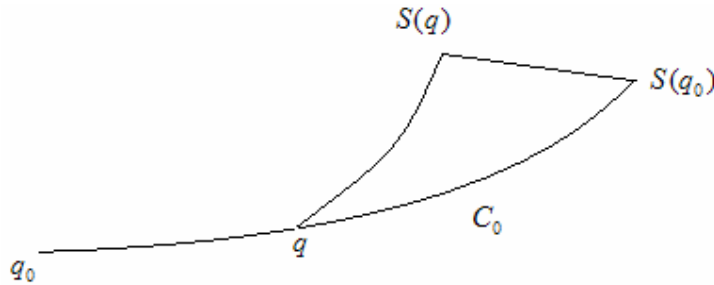
5.1 Platonik Cisimler

Teorem 5.1.1: 3-boyutlu gerçel uzay $\mathbb{R}^3$ 'ün bir noktayı sabit tutan ve aşıkır olmayan direkt bir S izometrisi, eksenini bu sabit noktadan geçen bir dönmedir.

İspat: Orijin noktası S 'nin sabit noktası olsun. (Aksi halde T_v , S 'nin sabit bir noktası ile orijini birleştiren V vektörü ile bir öteleme olmak üzere S 'nin $T_v^{-1} \circ S \circ T_v$ eşleniğini düşünmeliyiz.) S , orijini sabit bıraktığı için doğrusal olmalıdır. S , aynı zamanda doğrusal izometri olduğundan S^2 birim küresini değışmez bırakır.

Şimdi iddia ediyoruz ki S , büyük bir çemberi S^2 üzerinde değışmez olarak bırakır. Bunu göstermek için S^2 üzerinde küresel uzaklık fonksiyonu d ; $p \in S^2$ ve $f(p) = d(p, S(p))$ olmak üzere $f: S^2 \rightarrow [0, \pi]$ öteleme uzaklık fonksiyonunu düşünelim. Burada $f(p_0) = 0 \Leftrightarrow S(p_0) = p_0$ ve $f(p_0) = \pi \Leftrightarrow S(p_0) = -p_0$ 'dir.

S doğrusal olduğundan $\mathbb{R}^3$ 'te $\mp p_0$ vektörlerine dik olan $C \subset S^2$ jeodeziği S altında değışmezdir. Bir $q_0 \in S^2$ noktası alalım ve f , bu noktada minimum olsun. Önceki durumdan $0 < f(q_0) < \pi$ olduğunu varsayabiliriz. $C \subset S^2$, q_0 ve $S(q_0)$ 'dan geçen bir jeodezik olsun. S 'nin C 'yi değışmez olarak bıraktığını görelim:



Şekil 5.1.1: q_0 ve $S(q_0)$ noktalarından geçen bir jeodezik.

$C_0 \subset C$, q_0 ve $S(q_0)$ 'ı birleştiren (açık) daha kısa büyük dairesel bir yay olsun ve $q \in C_0$, q_0 'ya yakın olsun. O halde $S(q) \in C$ 'dir. Eğer gerçekten $S(q) \notin C$ ise köşeleri q , $S(q)$, $S(q_0)$ olan küresel üçgene üçgen eşitsizliği uygulanarak,

$$\begin{aligned} f(q_0) &= d(q_0, S(q_0)) = d(q_0, q) + d(q, S(q_0)) \\ &= d(S(q_0), S(q)) + d(q, S(q_0)) > d(q, S(q)) = f(q) \end{aligned} \quad (5.1)$$

elde edilir. Bu sonuç, f 'nin q_0 'da minimum olması ile çelişir. Bu yüzden q_0 'a yakın herhangi bir $q \in C_0$ için $S(q) \in C$ 'dir. Küresel uzaklıklar C boyunca toplandığından S 'nin C 'yi değişmez bıraktığını görürüz.

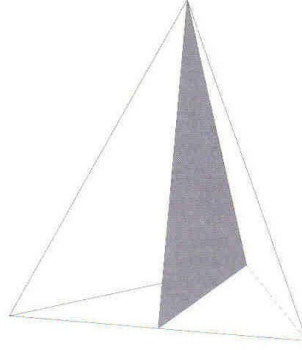
Bir $V \subset \mathbb{R}^3$, C 'nin doğrusal gerilişi ve $\mp p_0 \in S^2$, V 'ye dik olsun. S , doğrusal olduğundan iki boyutlu V düzlemini değişmez bırakır ve $S(p_0) = \mp p$ olur. $\mathbb{R}^2$ 'deki doğrusal izometrilere sınıflandırılmasından $S|_V$, ya dönme ya da yansımadır. S , $\mathbb{R}^3$ 'te direkt olduğundan birinci durumda $S(p_0) = p_0$ 'dır ve dolayısıyla S , $R.p_0$ eksenine göre dönmedir. İkinci durumda ise $S(p_0) = -p_0$ (S , yine direkt olduğundan) ve S 'nin bir yarı dönme olduğunu görürüz. Eksenine göre $S|_V$ yansımasının eksenine göre yansımasıdır. İspat tamamlanmıştır.

Not 5.1.2: Bu teorem Platonik bir cismin her simetrisinin bir dönme olduğunu söyler.

Şimdi Platonik cisimlere ve simetri gruplarına bakalım:

3-boyutlu gerçel uzay $\mathbb{R}^3$ 'te bir P çokyüzlüsünü değişmez olarak bırakan bir izometri, köşeleri köşelere, kenarları kenarlara, yüzleri de yüzlere taşır. Tanımdan P 'nin bir simetrisi, P 'yi değişmez bırakan $\mathbb{R}^3$ 'ün direkt bir izometrisidir. Teorem 5.1.1'den P Platonik cisminin herhangi bir simetrisi bir dönme olmalıdır. Eğer R , P 'nin bir simetri dönmesi ise R 'nin dönme eksenine göre bir köşeden, bir kenarın orta noktasından ve ya bir yüzün ağırlık merkezinden geçer. P 'nin tüm simetrilerinin kümesi bir grup oluşturur ve bu gruba P 'nin *simetri grubu* denir. Bu yüzden simetri grubu dönmelerin sonlu bir grubudur. Aslında bu grup köşeler üzerinde hareket eden bir permütasyon grubudur. $\mathbb{R}^3$ 'ün P 'yi değişmez olarak bırakan tüm izometrilere kümesine P 'nin genişletilmiş (simetri) grubu denir ve genişletilmiş grup sonludur. İki zıt izometrinin çarpımı direkt bir izometri olduğundan genişletilmiş grup indeksi en fazla iki olan bir altgrup olacak şekilde P 'nin simetri grubunu içerir.

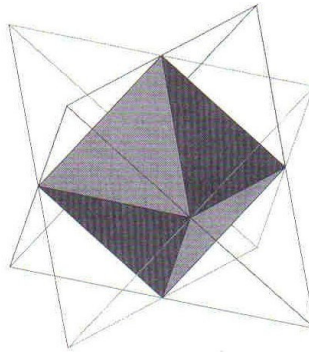
Platonik bir cismin simetri grupları ve bu cismin dualleri düzgün dörtyüzlü, düzgün sekizyüzlü ve düzgün yirmiyüzlüdür. Düzgün dörtyüzlüyü inceleyerek başlayalım:



Şekil 5.1.2: Düzgün dörtyüzlünün simetri düzlemi. (Toth, 2000)

Düzgün dörtyüzlünün simetri düzlemi şekil 5.1.2’de görüldüğü gibi, bir kenar ve karşı kenarın orta noktasını içerir. Simetri düzlemine yansıma, iki köşeyi yer değiştirir ve diğer iki köşeyi sabit tutar. Yansıma, dört köşe üzerindeki bu permütasyon ile tek türlü tanımlanır. Bu permütasyon, transpozisyonlardır. Yani iki harfi değiştirirken diğer ikisini sabit tutmaktır. Temel bilgiler bölümünde her permütasyonun transpozisyonların çarpımı şeklinde yazıldığını söylemiştik. Dolayısıyla düzgün dörtyüzlünün genişletilmiş grubu köşelerdeki tüm permütasyonları içerir ve bu grup S_4 simetri grubuna izomorftur. Yansımaların çift sayıda birleşimi düzgün dörtyüzlünün simetri dönmelerini verirken transpozisyonların çift sayıda birleşimi $A_4 \subset S_4$ alterne altgrubunu verir. Düzgün dörtyüzlünün simetri grubu, yani tetrahedral grup, $A_4 \subset S_4$ alterne altgrubuna izomorftur.

Düzgün sekizyüzlü, köşeleri boyunca traslanmış düzgün bir dörtyüzlüdür. Başka bir deyişle şekil 5.1.3’te görüldüğü gibi düzgün sekizyüzlü, düzgün dörtyüzlünün ve aksinin kesişimidir.



Şekil 5.1.3: İki düzgün dörtyüzlünün kesişimi düzgün sekizyüzlüdür. (Toth, 2000)

Böylece düzgün dörtyüzlünün simetrisi düzgün sekizyüzlünün simetrisi olur. Aslında tetrahedral grubun octahedral grup içindeki indeksi iki olmalıdır çünkü düzgün sekizyüzlünün bir simetrisi ya düzgün dörtyüzlüyü değişmez bırakır ya da düzgün dörtyüzlü ile dualini yer değiştirir. Eğer iki düzgün dörtyüzlüyü iki farklı renkte boyarsak ortaya ilginç bir durum çıkar. Octahedral yüzlerin renkleri inherit etsin, renk koruyan ve renk çeviren simetriler olduğunu düşünelim. Tetrahedral gruptan biliyoruz ki renk koruyan simetriler A_4 'e izomorfik bir grup oluşturur. 12 tane renk çeviren simetri vardır. Bunlar, eksenleri düzgün sekizyüzlünün zıt kenarlarının altı çiftinin orta noktasından geçen 6 yarı dönme ve eksenleri, zıt köşelerin üç çiftinden geçen üç çeyrek dönüş ve bunların tersleridir. Yani octahedral grup S_4 'e izomorftur.

(Altı yarı dönme S_4 'te altı transpozisyona karşılık gelir ve üç çeyrek dönme ve bunların tersleri S_4 'te altı tane 4-devire karşılık gelir.)

Şimdi düzgün onikiyüzlüyü anlatalım. Düzgün onikiyüzlünün simetri grubunun A_5 alterne grubuna izomorf olduğunu söyleyelim:

Küp, düzgün onikiyüzlü içine çizilebilir ve kübün on iki kenarı düzgün onikiyüzlünün beşgensel on iki yüzünün köşegenleridir. Kübün kenarlarının ve düzgün onikiyüzlü oranı altın oran olduğundan bu kübe *altın* deriz. Kepler'in de gözlemlediği gibi, düzgün onikiyüzlü içine tam olarak beş tane küp çizilebilir. Düzgün onikiyüzlünün her bir yüzü üzerinde beş altın kübün beş kenarı pentagram yıldızını oluşturur.

Düzgün onikiyüzlünün herhangi bir simetrisi, altın bir kübü yine altın bir kübe taşımalıdır. Dolayısıyla simetriler beş altın küp üzerinde permütasyonlar olarak hareket eder. Düzgün onikiyüzlünün simetri grubunun bu temsili, beş altın kübün kümesi üzerinde bir permütasyon grubu olarak sadıktır. Yani düzgün onikiyüzlünün aşıkır olmayan dönme simetrisi küpler üzerinde birim permütasyon olarak hareket etmez. Gerçekten simetrinin dönme eksenini düzgün onikiyüzlünün bir köşesinden, bir kenarın orta noktasından ya da bir yüzünün ağırlık merkezinden geçer. Düzgün onikiyüzlü 30 kenarlı olduğundan simetri grubu 60 ögelidir, yani A_5 'in öge sayısı kadardır. Düzgün onikiyüzlünün simetrilerini temsil eden permütasyon grubu ve A_5 alterne grubu, S_5 simetri grubunda indeksi iki olan normal altgruplardır. Diğer yandan A_5 , S_5 'te indeksi iki olan tek altgruptur.

Düzgün onikiyüzlü ve düzgün yirmiyüzlü dualdir. Ayrıca düzgün yirmiyüzlünün simetri

grubu da, yani icosahedral grup da, A_5 'e izomorftur. İcosahedronun beşgensel bir antiprizma ile ayrılmış iki beşgensel piramitten yapıldığını düşünelim. Bu beşgensel antiprizma 10 tane eşkenar yüzün birleşimidir. Antiprizma üzerinde üst ve alt beşgensel yüzleri bağlayan herhangi bir çapraz kenarı zıt ve paralel çapraz bir kenara sahiptir.

3-boyutlu gerçel uzay $\mathbb{R}^3$ 'ün izometrilere sonlu bir grubu G olsun. Bu grubun bir $O \in \mathbb{R}^3$ noktasını sabitlediğini görelim: Bir $p \in \mathbb{R}^3$ noktası verilsin. Bu noktadan geçen $G(p) = \{R(p) : R \in G\}$ yörüngesini düşünelim. Bu G grubu sonlu olduğundan $p = p_1 \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $G(p) = \{p_1, \dots, p_n\}$ şeklinde yazabiliriz. Tanımdan G grubu $G(p)$ üzerine yörüngedeki her elemanın permütasyonu ile etkir. Bu yüzden $G(p)$ 'nin kütle merkezi $O = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$ 'dir ve G 'nin tüm elemanları sol sabitlidir.

Bu G grubu ilk olarak sadece direkt izometrilere içersin ve O noktasında merkezlenmiş birim küreyi S^2 ile gösterelim. Teorem 5.1.1 'den G 'deki aşikar olmayan her R ögesinin bir dönme olduğunu biliyoruz. Dönme eksenini O noktasından geçer ve bu eksen S^2 ile antipodal noktalarda kesişir. Bu noktalara kutup noktası denir. Şimdi de G 'deki tüm dönmelerin kutup noktalarının kümesini Π ile gösterelim. Bu G grubu sonlu olduğundan $x \in \Pi$ noktasındaki $G_x = \{R \in G : R(x) = x\}$ izotropi grubu devirlidir. Bu grup içindeki en küçük pozitif dönme açısı olarak R_0 'ı alalım. Herhangi bir $R \in G_x$ ögesi R_0 ile aynı eksene sahip olsun. Bu yüzden R , en küçük açının bir katı olan bir dönme açısına sahip olmalıdır. Dolayısıyla R , R_0 'ın bir iterasyonudur ve R_0 , G_x 'in üreticidir. Bu R_0 'ın bir d derecesine x 'in derecesi denir ve aynı zamanda G_x 'in de derecesidir.

Eğer G 'de bir dönme R ve herhangi bir izometri S ise o taktirde $S \circ R \circ S^{-1}$ dönmesinin eksenini R dönmesinin S -görüntüsüdür ve Π grubu G -değişmezdir. Özel olarak $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(S \circ R \circ S^{-1})^m = S \circ R^m \circ S^{-1}$ olduğundan Π 'nin bir G yörüngesindeki kutuplar aynı dereceye sahiptir. Eğer $C \subset \Pi$ bir G -yörüngesi ise bu ortak dereceyi $d = d_C$ ile gösteririz. Bu, aynı zamanda G_x izotropi grubunun derecesi olduğundan herhangi bir $x \in C$ için

$$|C| = |G_x| = \frac{|G|}{|G_x|} = \frac{|G|}{d_C} \text{ olur.}$$

Şimdi de C içinde aşıkâr olmayan kaç dönmenin kutup noktası olduğu hesaplayalım:

C' 'de iki kutba sahip olan her eksen $d_C - 1$ sayıda aşıkâr olmayan dönmelerin eksenidir. Bu yüzden C' 'de kutup noktası olan aşıkâr olmayan dönme sayısı

$\frac{1}{2}(d_C - 1)|C| = \frac{1}{2}(d_C - 1)\frac{|G|}{d_C}$, dir. Burada $\frac{1}{2}$ olmasının nedeni dönmenin her ekseninin iki

kutup vermesidir. Yani G' 'de aşıkâr olmayan toplam dönme sayısı $|G| - 1 = \frac{1}{2}|G| \sum_{C \in \Pi/G} \left(\frac{d_C - 1}{d_C} \right)$

dir. Bu toplam, kutupların yörüngeleri boyunca hareket eder. Bunu diyofan denklem olarak

$$2 - \frac{2}{|G|} = \sum_{C \in \Pi/G} \left(1 - \frac{1}{d_C} \right) \quad (5.2)$$

şeklinde yazarız.

Teorem 5.1.3: $\mathbb{R}^3$ 'ün direkt izometrilere sonlu grupları sadece C_d devirli grubu, D_d dihedral grubu, A_4 tetrahedral grubu, S_4 octahedral grubu ve A_5 icosahedral grubudur.

Teorem 5.1.1'de söylendiği gibi $\mathbb{R}^3$ 'ün izometrilere sonlu bir G grubunun sabit bir noktasını orijine taşıdığımızda G 'nin bir eşleniği doğrusal olur. 3-boyutlu gerçel uzay $\mathbb{R}^3$ 'ün tüm doğrusal izometrilere grubu $O(3)$ ortogonal grubudur. Determinantın 1 ya da -1 olmasına bağlı olarak da $\mathbb{R}^3$ 'ün doğrusal bir izometrisi ya direkt ya da zıt bir izometridir. 3-boyutlu gerçel uzay $\mathbb{R}^3$ 'ün tüm direkt izometrilere grubu da $SO(3)$ özel ortogonal grubudur. Teorem 5.1.1 $SO(3)$ 'ün bir öğesinin eksenini orijinden geçen bir dönme olarak ifade edilebileceğini söyler. Teorem 5.1.3 $SO(3)$ 'ün tüm sonlu altgruplarını sınıflandırır.

5.2 Dönme Hareketleri ve Doğrusal Kesirli Dönüşümler

Bu bölümde amacımız doğrusal kesirli dönüşümleri sınıflandırmaktır ve bir $\zeta \mapsto \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$ doğrusal kesirli dönüşümü için $ad - bc = 1$ kabul edilmiştir. (5.3)

Bu grubun bir altgrubu $M_0(\hat{\mathbb{C}})$ olsun ve $|z|^2 + |w|^2 = 1$ olmak üzere $\zeta \in \hat{\mathbb{C}}$, $z, w \in \mathbb{C}$ verilsin.

Bu altgrup $\zeta \mapsto \frac{z\zeta - \bar{w}}{w\zeta + \bar{z}}$ şeklindeki doğrusal kesirli dönüşümleri içerir. (5.4)

Daha önce öğrendiğimiz gibi $SL(2, \mathbb{C})$ özel bir gruptur ve (5.3) ifadesi ile $SL(2, \mathbb{C})$ şartlarını karşılaştırsak bu grubun öğeleri doğrusal kesirli bir dönüşüm ifade eder. Bu tanımlardaki matrisleri birleştirirsek bu denklem bize $\pi: SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow M(\hat{\mathbb{C}})$ örten homomorfizmasını verir. (5.3) ifadesinde verilen a, b, c, d katsayıları ve bunların negatifleri de aynı doğrusal kesirli dönüşümü verir. Ters olarak (5.3) doğrusal kesirli dönüşümü a, b, c, d 'yi ortak işarete göre belirler. Bu yüzden $\pi, \{\mp I\}$ çekirdeği ile 2:1'dir ve özel olarak,

$$M(\hat{\mathbb{C}}) \cong SL(2, \mathbb{C}) / \{\mp I\}$$

izomorfizması vardır. π altında $M_0(\hat{\mathbb{C}})$, $SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$ altgrubu tarafından örtülen bir 2-katlısıdır. π 'nin $SU(2)$ 'ye kısıtlanmasından $M_0(\hat{\mathbb{C}}) \cong SU(2) / \{\mp I\}$ izomorfizması elde edilir.

Bir $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 'nin $\hat{\mathbb{C}}$ üzerinde stereografik bir izdüşümü h ve $N = (0, 0, 1) \in S^2$ olsun. Bu durumda $h(N) = \infty \in \hat{\mathbb{C}}$ olur. Verilen bir $x \neq N$ noktası için $x \in S^2$ ve $h(x) \in \mathbb{C}$ olsun. Bu üç nokta kolinear olur, yani bu üç nokta bir doğru üzerindedir ve analitik olarak da $x = (x_0, x_1, x_2) \in S^2$ olmak üzere ve $x_2 \neq 1$ olacak şekilde

$$h(x) = \frac{x_0 + ix_1}{1 - x_2} \quad (5.5)$$

denklemini ile ifade edilir.

h 'nin tersini de $\zeta \in \mathbb{C}$ olmak üzere aşağıdaki denklem ile ifade edebiliriz:

$$h^{-1}(\zeta) = \left(\frac{2\zeta}{|\zeta|^2 + 1}, \frac{|\zeta|^2 - 1}{|\zeta|^2 + 1} \right) \in S^2 \quad (5.6)$$

Burada $\mathbb{C}$, ilk iki koordinat eksenini tarafından üretilmiş koordinat düzlemi olarak $\mathbb{R}^3$ içine gömülmüştür ve h, S^2 ve $\hat{\mathbb{C}}$ arasında konformal bir denklik kurar.

Şimdi doğrusal dönmeler için önemli olan bazı notasyonları verelim:

Bir $x \in S^2$ noktası ve $\theta \in \mathbb{R}$ açısı verilsin ve $R_{\theta, x}$, θ açısı ile doğrusal bir dönmeyi ve $R.x$ eksenini gösterebilir. Burada $R_{\theta, x}$ 'in kutupları $\mp x$ dir. Teorem 5.1.1'den $R_{\theta, x} \in SO(3)$ 'dir ve $R_{-\theta, -x} = R_{\theta, x}$ 'dir. Bununla birlikte, $x, y \in S^2$ ve $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$R_{\phi,y} \circ R_{\theta,x} \circ R_{\phi,y}^{-1} = R_{\theta,R_{\phi,y}(x)} \quad (5.7)$$

Gerçekten sol taraf teorem 5.1.1'den $R_{\phi,y(x)}$ eksenini etrafında bir dönmedir ve eşlenik, dönme açısını değiştirmez.

Teorem 5.2.1: Bir $x = (x_0, x_1, x_2) \in S^2$ verilsin ve $\theta \in \mathbb{R}$ verilsin ve R, S^2 'ye kısıtlanmış $R_{\theta,x}$ dönmesi olsun. O takdirde $\zeta \in \hat{\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$z = \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} x_2 \text{ ve } w = \sin \frac{\theta}{2} (x_1 + ix_0) \quad (5.8)$$

olacak şekilde h stereografik izdüşümü ile eşleniği alınmış R , doğrusal kesirli bir dönüşümdür ve

$$(h \circ R \circ h^{-1})(\zeta) = \frac{z\zeta - \bar{w}}{w\zeta + \bar{z}} \quad (5.9)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: Eğer $x = N$ ise (5.8)-(5.9) denklemlerinden $(h \circ R \circ h^{-1})(\zeta) = e^{i\theta} \zeta$ olur ve bu durumda teorem açıktır. Şimdi $x \neq N$ kabul edelim. Genel olarak (5.9) denkleminin sol tarafındaki $h \circ R \circ h^{-1}$, bir izometri ve iki konformal denkliğin bileşkesidir. Bu yüzden $h \circ R \circ h^{-1}, \hat{\mathbb{C}}$ 'nin bir konformal dönüşümüdür ve doğrusal kesirli bir dönüşüm olmalıdır.

Şimdi bu doğrusal kesirli dönüşümün (5.8) ifadesindeki katsayılarla ve (5.9)'daki denklemi ile sağ tarafındaki özel biçimde olduğunu gösterelim:

Bunu göstermek için doğrusal kesirli dönüşümlerin üç nokta üzerinde grup etkisi ile tek türlü olarak belirlendiğini kullanacağız. İlk iki nokta için (5.9)'ın sağ tarafındaki gibi tanımlanan dönüşümün sabit noktalarını seçelim. Bu noktaları elde etmek için $\frac{z\zeta - \bar{w}}{w\zeta + \bar{z}} = \zeta$ yazalım.

Buradan $w\zeta^2 - 2i\Im(z)\zeta + \bar{w} = 0$ kuadratik denklemini elde ederiz. Eğer ζ 'yi çözersek ve

(5.8)'deki katsayıları kullanırsak sabit noktaları $\frac{x_2 \pm 1}{x_0 - ix_1}$ şeklinde buluruz. (5.5) denkleminde

ve $|x|^2 = 1$ 'den bu iki sabit noktanın $h(\mp x)$ 'e yani $h \circ R \circ h^{-1}$ 'in sabit noktalarına karşılık geldiği görülür. Üçüncü nokta içinse $\zeta = \infty = h(N)$ olarak seçelim. Bu noktayı (5.9)'de

yerine koyduğumuzda z ve w (5.8) ifadesindeki gibi olduğunda $h(R(N)) = \frac{z}{w}$ olduğunu

görmeliyiz. Gerçekten de, $|z|^2 + |w|^2 = 1$ ’den ve (5.6)’ten

$$h^{-1}\left(\frac{z}{w}\right) = \left(2z\bar{w}, |z|^2 - |w|^2\right) \in S^2 \quad (5.10)$$

ifadesi elde edilir. Başka bir deyişle $R(N) = R_{\theta,x}(N)$ ’dir. İspat tamamlanmıştır.

Terminolojiyi basitleştirmek için (5.8) ve (5.9) ifadelerindeki doğrusal kesirli dönüşümler ve $R_{\theta,x}$ dönmesinin birbiri ile eşleştiğini söyleyebiliriz.

Sonuç 5.2.2: $SO(3) \cong M_0(\hat{\mathbb{C}}) = SU(2)/\{\mp I\}$ bir izomorfizmadır.

Bizim bu çalışmadaki amacımız tüm sonlu Möbiüs gruplarını sınıflandırmaktır. Bu noktada basit bir nokta nasıl ilerleyebileceğimiz konusunda bize yol gösterebilir. Öncesinde aşağıdaki tanımı vermek yararlı olacaktır:

Tanım 5.2.3: Bir G grubu verilsin ve $g \in M(\hat{\mathbb{C}})$ ve $q = q_G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olsun. $q \circ g = q$ olması için gerek ve yeter koşul $g \in G$ olmasıdır. O taktirde G grubuna *değişmez grup* denir.

Değişmez grubu G olan $q = q_G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olacak şekilde bir rasyonel fonksiyon bulabileceğimizi farz edelim. Bir q rasyonel fonksiyon olduğu için $\hat{\mathbb{C}}$ ’nin holomorfik öz tasvirine genişletilebilir. G , q ’nun değişmez grubu olduğu için genişleme, $q : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ olacak şekilde holomorfik bir $|G|$ dereceli bir dallanmış örtüdür.

İki kompakt Riemann yüzeyi M ve N ve bu iki yüzey arasında sabit olmayan holomorfik bir tasvir $f : M \rightarrow N$ olsun. Genel olarak bu şekildeki bir tasvir M ’de sonlu dal noktaları ile n -katlı dallanmış bir örtüdür. M üzerinde bir dal noktası ve onun bir f görüntüsü (dal değeri denir.) civarında ε ve δ lokal koordinatları dal noktası ($\varepsilon = 0$) ve dal değeri ($\delta = 0$) olarak görülebilir. Bu koordinatlarda $f, \delta = \varepsilon^m$ şeklindedir. Dal noktasında f ’nin dal sayısı $m-1$ ’dir. Bu iki kompakt Riemann yüzeyi arasındaki n -katlı dallanmış holomorfik örtü $\varphi : M \rightarrow N$ olsun ve M ’nin genüsü p , N ’nin genüsü q olarak verilsin. Toplam dal sayısı B olmak üzere bu iki genus değeri arasında $p = n(q-1) + 1 + B/2$ bağıntısı vardır ve bu bağıntıya *Riemann-Hurwitz bağıntısı* denir.

Bizim konumuzda genişletilmiş q tasvirinin dal noktaları, G ’deki doğrusal kesirli dönüşümlerin sabit noktalarıdır ve eğer dönmelerin derecesini d ile gösterirsek, dal sayıları

da $d-1$ 'e eşit olur. Riemann-Hurwitz bağıntısından toplam dal sayısı (tüm dal sayılarının toplamı) $2|G|-2$ 'dir. Dolayısıyla istediğimiz sınıflandırmayı yapmak için sonlu Möbiüs grup altında rasyonel tasvirleri yazmaya çalışacağız. Bunun için de önce $M_0(\hat{\mathbb{C}})$ 'nin sonlu altgruplarının bir listesini sunalım ve bu listedeki bir grup G olsun. G , $SU(2)$ grubuna taşınarak 2:1 izdüşümü boyunca doğrusallaştırılabilir ve G ile ilişkili ikili grup şeklinde adlandırılabiliriz, G^* şeklinde gösterebiliriz.

Daha sonra G^* için iki değişkenli homojen polinomlar için değişmezlik problemini çözelim. Değişmez grubu G^* olan ve $\xi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, tüm homojen polinomları bulalım. Homojenlikten, bu değişmez polinomların bazılarının bölümleri $\mathbb{CP}^1$ 'nin holomorfik yarı-tasvirlerini tanımlar. Diğer yandan, $\hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{CP}^1$ olduğundan bu bölümler $\mathbb{C}$ 'de rasyonel fonksiyonlara da kısıtlanabilir ve G değişmez grubu elde edilir.

Son olarak herhangi bir G Möbiüs grubunun listede bulunan $M_0(\hat{\mathbb{C}})$ 'nin herhangi bir altgrubuna eşlenik olduğunu ispatlamak için değişmez grubu G olan rasyonel bir tasvir bulmalıyız.

Not 5.2.4: Tüm Möbiüs gruplarını bulmanın cebirsel ve pratik bir yolu var. $SL(2, \mathbb{C})$ 'nin herhangi sonlu altgrubu (G 'nin G^* ikili örtüsü gibi) $SU(2)$ 'nin bir altgrubuna eşleniktir ve $SU(2)$ 'nin sonlu altgrupları sınıflandırılabilir. Eşlenik alma $SL(2, \mathbb{C})$ 'nin sonlu altgruplarının $\mathbb{C}^2$ üzerindeki standart iç çarpımın ortalamasını alma ile gösterilebilir.

Listemizi yapmaya d . dereceden devirli grup C_d ile başlayalım. Bu grup $\hat{\mathbb{C}}$ 'nin dönmelerinin grubu olarak yazılır ve $0 \leq l \leq d-1$ olmak üzere $\zeta \mapsto e^{i\frac{2\pi l}{d}} \zeta$ şeklinde gösterilir. Bu dönmeler, $z = e^{i\frac{\pi l}{d}}$, $w=0$ ve $0 \leq l \leq d-1$ olacak şekilde (5.8) ve (5.9) yardımıyla doğrusal kesirli dönüşüm olarak görülebilirler. Geometrik olarak C_d , $0 \leq l \leq d-1$ olmak üzere $R_{2\pi l/d, N}$ dönme grubuna karşılık gelir ve bu dönmenin düşey eksenini kuzey ve güney kutbundan geçer. Devirli bir grup tek öge tarafından üretildiğinden Teorem 5.2.1'den ve (5.7) ifadesinden görülür ki $M_0(\hat{\mathbb{C}})$ 'de d . dereceden herhangi bir sonlu devirli altgrup C_d 'ye eşleniktir.

(5.8)-(5.9) denklemlerinde $z=0$, $w=i$ olursa ve C_d 'nin $\zeta \rightarrow \frac{1}{\zeta}$ doğrusal kesirli dönüşüm ile eşleniğini alırsak, R_{π, e_0} yarı dönmesiyle ilişkili olarak, $e_0 = (1, 0, 0)$ olmak üzere $2d$ ögeli

D_d dihedral Möbiüs grubunu elde ederiz:

$$\zeta \mapsto e^{i\frac{2\pi l}{d}} \zeta, \frac{e^{-i\frac{2\pi l}{d}}}{\zeta}, \quad 0 \leq l \leq d-1. \quad (5.11)$$

Önceki kısımda D_d , bir d -prizmanın simetri grubu idi. Teorem 5.2.1'den D_d 'yı Klein dihedronun simetri grubu olarak düşünmek daha uygun olacaktır. Klein dihedron, iki yarım küresel yüzden oluşan düzgün küresel çokyüzlüdür ve d tane küresel kenardan ve S^2 'nin ekvator çevresine eşit uzaklıkta bulunan d tane kenardan oluşur. Eğer bir kenarı e_0 'da sabitlersek, (yukarıdaki) R_{π, e_0} yarı dönmesi dihedronun simetrisi olur ve bu simetri iki yüzü değiştirebilir. Ayrıca (5.11)'den de görüyoruz ki doğrusal kesirli dönüşümlerin ilk grubu $0 \leq l \leq d-1$ olmak üzere $w=0$, $z=e^{i\frac{\pi l}{d}}$ 'ye; ikincisi ise $z=0$, $w=ie^{i\frac{\pi l}{d}}$ 'ye karşılık gelir.

Bir P Platonik cismini S^2 içine çizip Teorem 5.2.1'i uygularsak P 'nin simetri grubuna izomorfik sonlu bir G Möbiüs grubu elde ederiz. Platonik cisimlerin dual çiftleri aynı simetri grubuna sahip olduğundan kendimizi düzgün dörtyüzlü, düzgün sekizyüzlü ve düzgün yirmiyüzlüye kısıtlayabiliriz ve bunların Möbiüs gruplarına sırasıyla tetrahedral, octahedral ve icosahedral Möbiüs grubu adını veririz. Eğer P ile P 'nin orijinden S^2 'ye ışınal olarak izdüşürülmesiyle elde edilen küresel döşemesini yer değiştirirsek, yukarıdaki Möbiüs dihedral gruplar bu ailenin içinde düşünülebilir. Bu konfigürasyonlara *küresel Platonik döşeme* denir. Teorem 5.2.1'den ve (5.7) ifadesinden aynı Platonik cismin S^2 içine iki farklı şekilde çizilmesiyle elde edilen Möbiüs grupları, $M_0(\hat{\mathbb{C}})$ 'deki altgruplara eşleniktir. Dolayısıyla küresel platonik döşeme S^2 'deki uygun durumlardan biri şeklinde seçilebilir.

Şimdi düzgün dörtyüzlüyü inceleyelim:

Düzgün dörtyüzlünün kenarları, kübün köşelerinin alternesidir ve küp S^2 içine, yüzlerini koordinat düzlemlerine paralel olacak şekilde çizilir. Ayrıca, ilk octant düzgün dörtyüzlünün bir kenarını içerir ve bu köşe

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \text{ dir.} \quad (5.12)$$

Düzgün dörtyüzlünün kenarları, kübün yüzlerinin köşegenleridir ve her yüz için bir köşegen vardır. Dolayısıyla, üç koordinat eksenini düzgün dörtyüzlünün kenarlarının üç zıt çiftinin orta

noktasından geçer, bu eksenler etrafındaki üç yarı dönme düzgün dörtyüzlünün simetrileridir. Bu yarı dönmeleri (5.12)'ye uygularsak geri kalan üç köşe aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (5.13)$$

$e_0 = (1, 0, 0)$ olmak üzere R_{π, e_0} yarı dönmesi $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$, e karşılık gelir. Aynı şekilde

$e_1 = (0, 1, 0)$ olmak üzere R_{π, e_1} yarı dönmesi $\zeta \mapsto -\frac{1}{\zeta}$ e ve son olarak da $R_{\pi, N}$ dönmesi (5.8)

ve (5.9) ifadelerindeki gibi $z = i$ ve $w = 0$ iken $\zeta \mapsto -\zeta$ e karşılık gelir. Birim ile eşleniğini

alırsak $\zeta \mapsto \mp \zeta, \mp \frac{1}{\zeta}$ elde ederiz ve bu bize 4. dereceden D_2 dihedral Möbiüs grubunu verir.

Başka bir deyişle D_2, T tetrahedral Möbiüs grubunun alt grubudur.

Orijinden geçen dört doğru ile (5.12) ve (5.13) ifadeleri ile bir köşeyi birleştiren düzgün

dörtyüzlünün bir zıt yüzünün ağırlık merkezi, $\frac{2\pi^\circ}{3}$ ve $\frac{4\pi^\circ}{3}$ ile simetri dönmelerinin

eksenleridir. (5.12) ve (5.13)'teki vektörleri, (x_0, x_1, x_2) olarak (5.8)'de yerine koyarsak ve

$\theta = \frac{2\pi^\circ}{3}, \frac{4\pi^\circ}{3}$ olarak alırsak

$$z = \frac{(\pm 1 + i)}{2}, w = \frac{\pm(1 + i)}{2}, z = \frac{(\pm 1 - i)}{2}, w = \frac{\pm(1 - i)}{2} \quad (5.14)$$

olarak bulunur. Bu z ve w değerlerini (5.9)'de yerine koyarsak aşağıdaki sekiz doğrusal kesirli dönüşüm bulmuş oluruz:

$$\zeta \mapsto \mp i \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}, \mp i \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}, \mp \frac{\zeta + i}{\zeta - i}, \mp \frac{\zeta - i}{\zeta + i} \quad (5.15)$$

Sonuç olarak hepsini beraber ele alırsak T tetrahedral Möbiüs grubunun on iki ögesini aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\zeta \mapsto \mp \zeta, \mp \frac{1}{\zeta}, \mp i \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}, \mp i \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}, \mp \frac{\zeta + i}{\zeta - i}, \mp \frac{\zeta - i}{\zeta + i} \quad (5.16)$$

Şimdi düzgün sekizyüzlüyü ele alalım:

Düzgün sekizyüzlüyü S^2 içine, köşeleri; koordinat eksenlerinin S^2 ile altı tane kesişimi

olacak şekilde yerleştirelim. Bu düzgün sekizyüzlü, düzgün dörtyüzlü ve dualinin kesişimine homotetiktir. Daha önce söylediğimiz gibi, octahedral grup tetrahedral grup tarafından üretilir ve düzgün dörtyüzlüyü aksi ile yer değiştiren düzgün sekizyüzlünün bir simetrisidir. Örneğin, düşey eksen etrafında bir çeyrek dönme $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ve $w=0$ tarafından karakterize edilmiş $\zeta \mapsto i\zeta$ doğrusal kesirli dönüşüme karşılık gelir. Böylece O octahedral Möbiüs grubunun 24 ögesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\zeta \mapsto i^l \zeta, \frac{i^l}{\zeta}, i^l \frac{\zeta+1}{\zeta-1}, i^l \frac{\zeta-1}{\zeta+1}, i^l \frac{\zeta+i}{\zeta-i}, i^l \frac{\zeta-i}{\zeta+i}, \quad 0 \leq l \leq 3. \quad (5.17)$$

Son olarak düzgün yirmiyüzlüyü ele alalım:

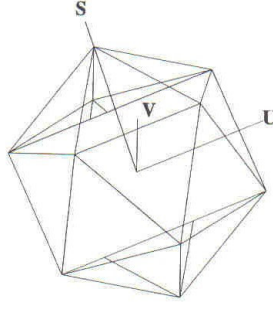
Düzgün yirmiyüzlüyü S^2 içine, kuzey ve güney kutupları köşe olacak şekilde yerleştirelim. Önceden de bahsettiğimiz gibi, düzgün yirmiyüzlü, beşgensel bir antiprizma tarafından ayrılan birer kuzey ve güney beşgensel piramitten oluşur. $0 \leq j \leq 4$ ve $S = R_{2\pi/5, N}$ olmak üzere S^j dönme düzgün yirmiyüzlünün simetrileridir ve bu simetriler $w = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, birimin 5. dereceden kökü olmak üzere

$$S^j : \zeta \mapsto w^j \zeta \quad (5.18)$$

doğrusal kesirli dönüşümlere karşılık gelir. Düzgün yirmiyüzlüyü düşey eksen etrafında çevirebiliriz ve düzgün yirmiyüzlünün yeri konusunda ikinci bir koordinat eksenini, beşgensel antiprizmanın karşılıklı kenarlarından birinin orta noktasından geçmelidir. Böylece bu eksen etrafındaki U yarı dönmesi düzgün yirmiyüzlünün simetrisi olur ve bu dönüş $U : \zeta \mapsto -\frac{1}{\zeta}$

doğrusal kesirli dönüşüme karşılık gelir.

Düzgün yirmiyüzlünün tüm simetri grubunu S ve U dönmeleri üretmez çünkü ikisi de ekvator değişmezini almaz. Başka bir üreteç için V yarı dönmesini ele alalım. V 'nin dönme eksenini, U 'nun dönme eksenine diktir ve üst beşgensel piramidin tabanındaki bir kenarın orta noktasından geçer.



Şekil 5.2.1: Düzgün yirmiyüzlünün dönme eksenleri. (Toth, 2000)

U ve V , dönme eksenleri dik olduğu için yarı dönüşleri değiştirebilirler. Bir $W = UV$ birleşimi de bir yarı dönüştür ($W^2 = (UV)^2 = UVUV = U^2V^2 = I$) ve dönme eksen, U 'nun ve V 'ninkilere diktir. Birim öge I , U , V ve W ; I icosahedral grubunun D_2 dihedral grubunu oluşturur.

Yardımcı Teorem 5.2.5: İcosahedronun $\hat{\mathbb{C}}$ 'ye stereografik izdüşürülen köşeleri, $w = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ve $0 \leq j \leq 4$ olmak üzere $0, \infty, w^j(w + w^4), w^j(w^2 + w^3)$ 'dir.

Öge sayısı 60 olan I icosahedral Möbiüs grubu $0 \leq j, l \leq 4$ olmak üzere,

$$\zeta \mapsto w^j \zeta, -\frac{1}{w^j \zeta}, w^j \frac{-(w - w^4)w^l \zeta + (w^2 - w^3)}{(w^2 - w^3)w^l \zeta + (w - w^4)}, w^j \frac{(w^2 - w^3)w^l \zeta + (w - w^4)}{(w - w^4)w^l \zeta - (w^2 - w^3)} \quad (5.19)$$

dır.

Böylece sonlu Möbiüs gruplarının listesini tamamladık.

Verilen sonlu bir $G \subset M_0(\hat{\mathbb{C}})$ Möbiüs grubunda, $SU(2) \rightarrow M_0(\hat{\mathbb{C}})$ homomorfizması altında G 'nin G^* ters görüntüsüne G ile ilişkili ikili grup denir. Ters görüntüleri alarak, oluşturulan sonlu Möbiüs gruplarından,

- D_d^* , ikili dihedral
- T^* , ikili tetrahedral
- O^* , ikili octahedral
- I^* , ikili icosahedral

grupları elde edilir. Devirli grup için, $C_d^* \cong C_{2d}$ 'dir. Şimdi eşleniğe göre bu grupların $SU(2)$ 'nin tüm sonlu altgrupları olduğunu gösterelim. Bu grupları tanımlamanın başka bir

yolunun da kuaterniyonları kullanmak olduğunu temel bilgiler bölümünde söylemiştik. H , $\{1, i, j, k\}$ kanonik tabanı ile kuaterniyonların bir skew-cismi olsun.

$H = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ şeklinde ifade edilir ve kuaterniyon çarpımı,

- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
- $j = -ji = k$
- $jk = -kj = i$
- $ki = -ik = j$

bağıntılarını gerektirir ve doğrusal olarak $H = \mathbb{R}^4$ 'e genişletilir. Birim kuaterniyonların grubu $S^3 \subset H$, $SU(2)$ 'ye izomorftur ve bu izomorfizma, $z, w \in \mathbb{C}$ ve $|z|^2 + |w|^2 = 1$ olmak üzere $z + jw \in H$ kuaterniyonu ile (5.4) dönüşümünün matrisini eşleştirir. Yani $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olacak şekilde $z = a + ib$ ve $w = c + id$ ise $z + jw = a + ib + cj - dk$ olur. Başka bir deyişle, bu izomorfizma ile $SU(2)$ ve S^3 'ü eşleştirmiş oluruz. Listedeki her sonlu $G \subset M_0(\hat{\mathbb{C}})$ Möbiüs grubunun her durumunda, G ile ilişkili ikili G^* grubunun öğeleri ile birlikte koyabiliriz. G^* , z ve w , (5.8) ve (5.9) ifadeleri ile G 'nin öğelerine karşılık gelecek şekilde $\mp(z + jw)$ kuaterniyonlarını içerir.

S^3 'ün sonlu altgrupları ,

1. d .dereceden devirli grup

$$C_d = \left\{ e^{i \frac{2\pi l}{d}} : l = 0, \dots, d-1 \right\}$$

2. $4d$. dereceden ikili dihedral grup

$$D_d^* = \left\{ e^{i \frac{2\pi l}{d}} : l = 0, \dots, 2d-1 \right\} \cup j \cdot \left\{ e^{i \frac{2\pi l}{d}} : l = 0, \dots, 2d-1 \right\}$$

3. İkili tetrahedral grup

$$T^* = D_2^* \cup \left\{ \frac{\pm 1 \pm i \pm j \pm k}{2} \right\}$$

4. İkili octahedral grup

$$O^* = T^* \cup e^{i \frac{\pi}{4}} \cdot T^*$$

5. İkili icosahedral grup

$$I^* = \left\{ \pm w^l, \pm jw^l, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(-w^{3l}(w-w^4) + jw^{2l}(w^2-w^3))w^{3k}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(w^{3l}(w^2-w^3) + jw^{2l}(w-w^4))w^{3k}, k, l = 0, \dots, 4 \right\}$$

şeklindedir. Bir w^l kuaterniyonu, $SU(2)$ ’de öğeleri $w^{\frac{l}{2}}$ ve $w^{-\frac{l}{2}}$ olan köşegen matrise karşılık gelir.

Teorem 5.2.6: $S^3 = SU(2)$ ’nin herhangi sonlu altgrubu ya devirlidir ya da D_d^*, T^*, O^* ve ya I^* ikili altgruplarından birine eşleniktir.

İspat: Sonlu bir altgrup $G \subset S^3 = SU(2)$ olsun ve $G_0 \subset SU(2)/\{\mp I\} = M_0(\hat{\mathbb{C}})$ altgrubuna karşılık gelsin. G_0 ’ın $SU(2) \rightarrow SU(2)/\{\mp I\}$ kanonik izdüşümü altındaki ters görüntüsü $G^* \subset S^3$ olsun. Dolayısıyla $G \subset G^*$ ’dır. Teorem 5.2.1’den G_0 , $SO(3)$ ’ün sonlu bir altgrubuna izomorftur. Eğer $G = G^*$ ise o taktirde G^* , G_0 ’ın çifte örtüsüdür. Teorem 5.1.3’yı izlersek $G \neq G_0$ durumunu incelemiş oluruz. Bu durumda G ’nin G^* ’de indeksi ikidir ve $G \cong G_0$ ’dir. Şimdi G ’nin öğe sayısı tek sayıda olsun. Tersini kabul ederek G ’nin çift sayıda öğesi olduğunu düşünelim. O halde G , derecesi 2 olan bir öğe içermelidir. $SU(2)$ ’de derecesi iki olan tek eleman $-I$ olduğundan $-I \in G$ olmalıdır. Fakat kanonik izdüşümün çekirdeği $\{\mp I\}$ ’dir ve bu, $G \neq G_0$ olması ile çelişir. Bu yüzden G ’nin öğe sayısı tek sayıda olup $G \cong G_0$ ’dır ve son olarak, $SO(3)$ içinde izomorfik bir kopyaya sahiptir. $SO(3)$ ’te tek sayıda öğesi olan altgruplar teorem 5.1.3’da belirtildiği gibi devirli gruplardır. İspat tamamlanmıştır.

5.3 Değişmez Biçimler

Bu bölümde eşlenik almaya göre sonlu Möbiüs grupların sadece devirli, dihedral ve üç çokyüzlü Möbiüs grupları olduğunu göstereceğiz.

Hatırlayacağımız gibi $SL(2, \mathbb{C})$, $\mathbb{C}^2$ üzerine matris çarpımı ile etkir. Bir $g \in SL(2, \mathbb{C})$ için $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ sütun vektör olmak üzere g ’nin etkisi $(z, w) \mapsto g.(z, w) = (az + bw, cz + dw)$ ’dir. $SL(2, \mathbb{C})$ ’deki matrisler tekil olmadığından bu etki

$$[z : w] \mapsto g.[z : w] = [(az + bw) : (cz + dw)] \quad (5.20)$$

olacak şekilde $\mathbb{CP}^1$ 'ye geçer. Öte yandan $[z:w] \in \mathbb{CP}^1$ olmak üzere $[z:w] \mapsto \zeta = \frac{z}{w}$ ile $\mathbb{CP}^1$ ve $\hat{\mathbb{C}}$ eşleştirilebilir, yani $\mathbb{CP}^1 \cong \hat{\mathbb{C}}$ 'dir. Aslında bir $g \in SL(2, \mathbb{C})$, $\hat{\mathbb{C}}$ 'de doğrusal kesirli bir dönüşüm ile etkir. Çünkü

$$\frac{az+bw}{cz+dw} = \frac{a(z/w)+b}{c(z/w)+d} = \frac{a\zeta+b}{c\zeta+d} \quad (5.21)$$

dır.

Kendimizi sonlu gruplara kısıtlarsak sonlu bir G Möbiüs grubunun doğrusal kesirli dönüşümler ile $\hat{\mathbb{C}}$ üzerindeki etkisi, $\mathbb{C}^2$ 'de matris çarpımı ile ikili $G^* \subset SL(2, \mathbb{C})$ grubunun ordinary etkisine karşılık gelir.

Bir $\xi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ homojen polinomu bir *form*dur. Eğer ξ 'nin derecesi p ise $z, w, \lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere homojenlik $\xi(\lambda z, \lambda w) = \lambda^p \xi(z, w)$ 'dir. Bir $G^* \subset SL(2, \mathbb{C})$ altgrubu verilsin. Bir $g \in G^*$ olmak üzere $\xi \circ g = \chi_\xi(g) \cdot \xi$ olacak şekilde G^* 'nin $\mathbb{C} - \{0\}$ çarpımsal grubu içine bir $\chi_\xi: G^* \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ karakteri varsa ξ 'ye G^* -değişmezi denir. Bu karakter aynı zamanda homomorfizmadır. Burada $g \in SL(2, \mathbb{C})$, $\mathbb{C}^2$ 'ye matris çarpımı ile etkir ve χ_ξ , ξ ile tek türlü belirlenmiştir. Eğer $\chi_\xi = 1$ ise o zaman ξ , G^* 'nin mutlak değişmezidir denir. Genellikle ξ , $\ker \chi_\xi \subset G^*$ altgrubunun mutlak bir değişmezidir. Eğer G^* sonlu ise (ikili çokyüzlü gruplardaki gibi) χ_ξ , $S^1 \subset \mathbb{C} - \{0\}$ birim küresinin içine bir tasvirdir ve $G^* / \ker \chi_\xi \cong \text{Im } \chi_\xi \subset S^1$ devirlidir. Çünkü $\mathbb{C} - \{0\}$ 'ın herhangi sonlu altgrubu $S^1 \subset \mathbb{C} - \{0\}$ 'in devrili alt grubudur.

Listemizdeki her sonlu $G \subset M_0(\hat{\mathbb{C}})$ Möbiüs grubuna $G^* \subset SU(2)$ ikili Möbiüs grubu karşılık olarak ξ ve η , G^* -değişmezi ve aynı karaktere sahip olmak üzere $|G|$ dereceden ve ortak sıfırı olmayan ξ ve η formlarını göstereceğiz. Bu ξ ve η için $z, w \in \mathbb{C}$ olmak üzere $q([z:w]) = [\xi(z, w): \eta(z, w)]$ olacak şekilde $q = q_G: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ tasvirini tanımlayalım. Bu tasvir iyi tanımlıdır ve G^* -değişmezidir. $\hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{CP}^1$ olduğundan $\mathbb{C}$ 'ye rasyonel kısıtlama yaptığımızda $q: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ holomorfik tasviri olur. Burada $\zeta = \frac{z}{w}$ ve $z, w \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$q(\xi) = \frac{\xi(z, w)}{\eta(z, w)} = \frac{\xi(\zeta, 1)}{\eta(\zeta, 1)}$ şeklindedir. Grup etkisinden ξ ve η 'nin G^* -değişmezi q 'nın da G^* -değişmezi olmasını gerektirir. (q , G^* -değişmezi rasyonel fonksiyonudur.)

Bir $G = C_d = \left\{ \zeta \mapsto e^{i\frac{2\pi l}{d}} : 0 \leq l \leq d-1 \right\}$ devirli grubu küresel bir Platonik döşemesinin simetri

grubu olmadığı için genel olarak bu yapıya uymaz. C_d^* -değişmezi, d . dereceden ξ oluşturur.

$C_d^* = C_{2d}$ devirlidir ve bu yüzden χ_ξ karakteri $\omega = e^{i\frac{\pi l}{d}}$ üreticindeki değeri ile tek türlü belirlenmiştir. $\omega^{2d} = 1$ olduğunda $\chi_\xi(\omega)$, birimin $2d$. dereceden kökü olmalıdır. Yani $0 \leq m \leq 2d-1$ olmak üzere $\chi_\xi(\omega) = \omega^m$ 'dir. Bir ξ için C_d^* -değişmezi şartından $z, w \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\xi(\omega z, \omega^{-1} w) = \omega^m \xi(z, w)$ elde edilir.

d . dereceden homojen olduğundan ξ 'deki tipik monomial katılımı $z^j w^{d-j}$ ($j = 0, \dots, d$)'dır.

Bunu yukarıdaki eşitlikte yerine koyarak $\omega^{2j} = \omega^{m+d}$ elde ederiz ve ω , birimin $2d$. dereceden kökü olduğundan $2d/(m+d-2j)$ olur. Burada ya $d/m-2j$ 'dir ya da buna denk olarak $l \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $m-2j = dl$ 'dir. Böylece $2d/d(l+1)$ olup l , tek olmalıdır. j ve m 'nin aralığını inceleyerek, $|m-2j| \leq 2d$ ve dolayısıyla $l = \mp 1$ olduğunu görürüz. $2j = m \mp d$ olup m ve d aynı pariteye sahiptir. Burada $j = (m \mp d)/2$ 'dir. $l = 1$ için $m \geq d$ ve $l = -1$ için $m \leq d$ 'dir. İlgili monomialler ise $z^{\frac{m \mp d}{2}} w^{d - \frac{m \mp d}{2}}$ 'dir. İki doğrusal bağımsız C_d^* -değişmezin d .

dereceden aynı karaktere sahip olmaları için $m = d$ olması gerekir ve bu durumda genel biçim

z^d ve w^d 'nin doğrusal bir kombinasyonudur. Burada $\zeta = \frac{z}{w}$ olduğundan genel C_d -değişmez

rasyonel q fonksiyonu, iki doğrusal bağımsız biçimin bölümüdür. En genel C_d -değişmezi rasyonel fonksiyonun ζ^d 'ye uygulanmış doğrusal kesirli bir dönüşüm olduğunu görürüz.

Biliyoruz ki ζ^d , C_d 'nin yaptığı dönmelerde 0 ve ∞ sabit noktalarında sıfırlanır. Analitik olarak sabit noktalar $\zeta \in \hat{\mathbb{C}}$ olmak üzere $q(\zeta) = \zeta^d$ olacak şekilde $q: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ d -katlı holomorfik bir dal örtüsünün dal noktalarıdır. Bu, küresel Platonik döşemelerden değişmez biçimleri nasıl elde edeceğimiz hakkında ipucu verir. Bir çokyüzlünün köşeleri, $e_0 = (1, 0, 0)$

köşe olacak şekilde S^2 'de ekvator boyunca düzgün olarak yerleştirilmiş d noktalarıdır. Bu noktalar $\hat{\mathbb{C}}$ üzerinde $\zeta^d = 1$ eşitliğinin köklerini oluşturur. Bu köşelerde sıfır olan d . dereceden

en genel biçim, $z^d - w^d$, 'nin sabit bir katıdır ve

$$\alpha(z, w) = \frac{z^d - w^d}{2} \quad (5.22)$$

olarak ifade edilir. Düzgün çokyüzlünün kenarlarının orta noktalarından sıfırlanan d . dereceden genel biçim ise $z^d + w^d$, 'nin sabit bir katıdır ve

$$\beta(z, w) = \frac{z^d + w^d}{2} \quad (5.23)$$

şeklinde tanımlanır. Son olarak, yarı küresel yüzlerin iki ağırlık merkezi 0 ve ∞ 'a karşılık gelir ve

$$\gamma(z, w) = zw \quad (5.24)$$

biçimindedir. α, β ve γ biçimleri düzgün çokyüzlüye aittir. Bu üç formun her biri $\chi_\alpha = \chi_\beta$ ve $\chi_\gamma = \mp 1$ ile D_d^* -değişmezlerini oluşturur ve ∓ 1 , $\ker \chi_\gamma = C_d^* \subset D_d^*$ devirli çekirdeğe karşılık gelir. α, β ve γ formları cebirsel olarak bağımlıdır:

$$\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^d = \left(\frac{z^d - w^d}{2} \right)^2 - \left(\frac{z^d + w^d}{2} \right)^2 + (zw)^d = 0 \quad (5.25)$$

α, β ve γ 'nın dereceleri sırasıyla $|D_d|/v_0, |D_d|/v_1$ ve $|D_d|/v_2$ 'dir ve (5.25)'teki üstel sayılar v_0, v_1 ve v_2 'dir.

Platonik döşemelerin geri kalan durumlarının her birinde ξ_0, ξ_1 ve ξ_2 gibi üç biçim olur ve ξ_0 , izdüşürülen köşelerde sıfırlanır; ξ_1 , kenarların izdüşürülen orta noktalarında ve ξ_2 , yüzlerin izdüşürülen ağırlık merkezlerinde sıfırlanır. Bir G^* ikili Möbiüs grubunun değişmezleri ξ_0, ξ_1 ve ξ_2 'dir ve dereceleri $|G|/v_0, |G|/v_1, |G|/v_2$ 'dir.

Teorem 5.3.1: Herhangi bir $G \subset M(\hat{\mathbb{C}})$ Möbiüs grubu devirseldir ya da D_d, T, O ve ya I 'ya eşleniktir.

İspat: Sonlu bir altgrup $G \subset M(\hat{\mathbb{C}})$ olsun ve $a, b \in \mathbb{C}$ aynı G -yörüngede olmasın. Bir $\zeta \in \mathbb{C}$ ve

$$r(\zeta) = \prod_{g \in G} \frac{g(\zeta) - a}{g(\zeta) - b} \quad (5.26)$$

olacak şekilde $r: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ rasyonel fonksiyonunu düşünelim. Burada a ve b 'nin aynı G -yörüngesinde olmaması r 'nin sabit olmadığını gösterir. Verilen bir $Z \in \mathbb{C}$ için $r(\zeta) = Z$ olacak şekilde bir $\zeta \in \mathbb{C}$ bulmak için

$$\prod_{g \in G} (g(\zeta) - a) = Z \prod_{g \in G} (g(\zeta) - b) \quad (5.27)$$

eşitliğini çözelim:

Bir $g \in G$ verilsin ve doğrusal $g(\zeta)$ kesrindeki paydayı $g(\zeta)$ ile çarpalım. Bu eşitlik, parametre olarak Z ile $|G|$. dereceden bir polinom eşitliği olur. $\hat{\mathbb{C}}$ 'ye genişletildiği için r , $|G|$ dereceli holomorfik bir dal örtüsü olur. Öte yandan r , aynı zamanda G -değişmezdir. Sabit bir $Z \in \hat{\mathbb{C}}$ için $r(\zeta) = Z$ 'nin çözüm kümesi tek bir G -yörüngesidir ve $r: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}/G = \hat{\mathbb{C}}$ yörünge tasviridir. $\zeta \in \hat{\mathbb{C}}$ dal noktası olması için $G(\zeta)$, G -yörüngesinin temel olmaması gerekir. Bu durumda $|G(\zeta)| = |G|/v$ 'dir ve ζ 'ye ilişik dal sayısı $v-1$ 'dir. r 'nin dal noktalarının kümesi $\prod$ olsun. O halde toplam dal sayısı

$$B = \sum_{\prod/G} \frac{|G|}{v} (v-1) \quad (5.28)$$

dir. Riemann-Hurwitz bağıntısından, tanım ve değer kümeleri sıfır genera ya sahip olduğu için toplam dal sayısı $2|G|-2$ 'dir. Buradan

$$2 - \frac{2}{|G|} = \sum_{\prod/G} \left(1 - \frac{1}{v}\right) \quad (5.29)$$

eşitliği elde edilir. Bu, sayfa (5.2)'nin kısıtlamasıdır. Önceki gibi, sağ taraftaki toplam ya $v_0 = v_1 = |G|$ ile iki terim içerir ya da v_0, v_1, v_2 gibi üç terimi içerir. İlk durumda, Z_0 ve Z_1 , v_0 ve v_1 'e karşılık gelen dal değerleri olsun. Aralık üzerinde doğrusal kesirli dönüşüm uygulayarak $Z_0 = 0$ ve $Z_1 = \infty$ olduğunu varsayabiliriz. Kalan durumlar için Z_0, Z_1 ve Z_2 üç dal değeri olsun. Aralık üzerinde yine bir doğrusal kesirli dönüşüm uygulayarak $Z_0 = 0, Z_1 = 1$ ve $Z_2 = \infty$ olduğunu düşünebiliriz ve bunlar v_2, v_1 ve v_0 'a karşılık gelir.

Holomorfik q ve r dal örtüleri aynı dal noktalarına ve aynı dal değerlerine sahip olsun. Uniformization teoremine göre basit bağlantılı her Riemann yüzeyi konformal olarak açık birim diske, karmaşık düzleme ya da Riemann küresine denktir. Bu teoremden, G grubu q 'yu tanımlayan Möbiüs grubuna eşleniktir ve eşlenik alma, q ve r dal örtülerinin konformal denliğini kuran doğrusal kesirli bir dönüşümdür.

6. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada karmaşık katsayılı doğrusal kesirli dönüşümlerin grubu olan $PGL(2, \mathbb{C})$ 'nin sonlu altgruplarını çalıştık ve bu sonlu altgrupların küre içine çizilebilen Platonik cisimlerin simetri grupları olduğunu belirttik. Daha sonra doğrusal kesirli dönüşümleri sabit noktaları cinsinden ifade ettik ve bu noktaları geometrik olarak yorumladık.

Böyle bir çalışmayı daha ileri götürmek isteyen matematikçilere $K = \mathbb{Q}$ durumunu incelemeyi öneririz. Bu durumdan Dresden'in makalesinde bahsedilmiştir. Bunun önemi şudur: $PGL(2, \mathbb{Q})$ 'nin sonlu bir altgrubu, $PGL(2, \mathbb{C})$ 'nin de bir altgrubu olacaktır. Fakat $PGL(2, \mathbb{C})$ 'de eşlenik olan iki altgrup $PGL(2, \mathbb{Q})$ 'da eşlenik olmayabilir. Bu yüzden $PGL(2, \mathbb{Q})$ 'nin sonlu altgruplarını sınıflandırmak önemlidir. $PGL(2, \mathbb{Q})$ 'nin sonlu altgruplarını sınıflandırırken grup kanunları bulmanın bir yöntem olabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Balkanay, E., Ağargün, G. ve Aygör, N., (2000), Soyut Cebir I, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, İstanbul.

Beardon, A.F., (1983), The Geometry of Discrete Groups, Springer-Verlag, New York.

Dresden, G.R., (2004), “There Are Only Nine Finite Groups of Fractional Linear Transformations with Integer Coefficients”, Math. Mag. Vol. 77, No.3, USA.

Gay, D., (1998), Geometry by Discovery, John Wiley&Sons, Inc., New York.

Kane, R., (2000), Reflection Group and Invariant Theory, Canadian Mathematical Society, Canada.

Koç, C., (1996), Topics in Linear Algebra (Revised Edition), Orta Doğu Teknik Üniversitesi Yayınları, Ankara.

Malik, D.S., Mordeson, J. ve Sen, M.G., (1997), Fundamentals of Abstract Algebra, The McGraw-Hill Companies, Inc., Singapore.

Toth, G., (2000), Finite Möbius Groups, Minimal Immersions of Spheres and Moduli, Springer-Verlag, New York.

İNTERNET KAYNAKLARI

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Conformal_map

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_sphere

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6bius_transformation

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi 09.01.1982

Doğum Yeri İstanbul

Lise 1993-2000

Fahreddin Kerim Gökay Anadolu Lisesi

Lisans 2000-2005

Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Çalıştığı Kurumlar

2005 Şubat-Haziran Final Dergisi Dersanesi Gaziosmanpaşa Şubesi

2007 Ağustos-Aralık Vakıfemeklilik A.Ş. Aktüerya-Reasürans