

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KUANTUM VEKTÖRLERİN TOPLANMASI VE DİFERANSİYEL
GEOMETRİSİ**

ALİ OSMAN GÖKER

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. SALİH ÇELİK**

İSTANBUL, 2012

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KUANTUM VEKTÖRLERİN TOPLANMASI VE DİFERANSİYEL
GEOMETRİSİ**

Ali Osman GÖKER tarafından hazırlanan tez çalışması 03.01.2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Fügen TORUNBALCI AYDIN

Yıldız Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Değişmeli olmayan geometri, son yıllarda matematik ve fizikte ilgi çekici konulardan biri haline gelmiştir. Bu çalışmada kuantum düzlemden alınan kuantum vektörlerin toplamının da bir kuantum vektör olması için toplanan vektörlerin bileşenlerinin sağlaması gereken şartlar ortaya konmuş ve oluşan yapının diferansiyel geometrisi incelenmiştir.

Bu çalışmanın hazırlanmasında, tez konusunu bana veren, çalışmalar esnasında beni yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, yüksek lisans öğrenimim boyunca desteklerinden ötürü TÜBİTAK' a teşekkürlerimi sunarım.

Ocak, 2012

Ali Osman GÖKER

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT.....	viii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	1
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
TEMEL BİLGİLER	3
2.1 Ön Bilgiler	3
BÖLÜM 3	
KUANTUM VEKTÖRLERİN TOPLAMI	9
3.1 Kuantum Düzlem ve Hopf Cebiri Yapısına Kısa Bir Bakış.....	9
3.2 Toplama İşleminin Tanımlanması.....	11
3.3 Temsili Matrisler.....	12
3.4 Hopf Cebiri Yapısı	13
BÖLÜM 4	
KUANTUM VEKTÖRLERİN TOPLAMI ÜZERİNE DİFERANSİYEL HESAP	16
4.1 Diferansiyel Cebir	16
4.1.1 Kovaryantlık	18
4.1.2 Diferansiyel Hopf Cebiri	21
4.2 A Üzerine Cartan-Maurer 1-formları.....	22
4.2.1 1-formların Hopf Cebiri Yapısı	25
4.3 Kısmi Türevlerin Cebiri	27

BÖLÜM 5

$\mathcal{R}$ -MATRİS YAKLAŞIMI.....	31
--------------------------------------	----

5.1 Kuantum Düzlem İçin $\mathcal{R}$ -Matrisi.....	31
---	----

5.2 Toplam Vektörler İçin $\mathcal{R}$ -Matrisi	32
--	----

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER.....	34
------------------------	----

KAYNAKLAR	35
-----------------	----

ÖZGEÇMİŞ	36
----------------	----

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
d	Dış diferansiyel operatörü
$\deg(f)$	f fonksiyonunun derecesi
$R_q^{(2 0)}$	İki boyutlu kuantum düzlem üzerindeki polinomların cebiri
S_A	A cebiri üzerindeki eş-ters operatörü
ε_A	A cebiri üzerindeki eş-birim operatörü
Δ_A	A cebiri üzerindeki eş-çarpım operatörü
$\otimes$	Tensör çarpım
∂	Kısmi türev operatörü
$\wedge$	Dış çarpım

ÖZET

KUANTUM VEKTÖRLERİN TOPLANMASI VE DİFERANSİYEL GEOMETRİSİ

Ali Osman GÖKER

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK

Bu çalışmada, iki kuantum vektörün toplamı göz önüne alınmış ve toplam vektörün bir kuantum vektör olması için gerekli şartlar araştırılmıştır. Elde edilen yapının bir Hopf cebiri yapısına sahip olduğu gösterilmiştir. Daha sonra, bu yapının diferansiyel geometrisi kurulmuştur. Son olarak, elde edilen yapılar, uygun bir $\mathcal{R}$ -matrisi verilerek, tekrar ortaya konulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Kuantum düzlem, kuantum vektör, q-deformasyon, Hopf cebiri, diferansiyel hesap

ABSTRACT

ADDITION OF QUANTUM VECTORS AND IT'S DIFFERANTIAL GEOMETRY

Ali Osman GÖKER

Department of Mathematics
MSc. Thesis

Advisor: Asst. Prof. Dr. Salih ÇELİK

In this study, the addition of two quantum vectors was considered and the necessary conditions were investigated for the addition to be a quantum vector. It's shown that the obtained structure has a Hopf algebra structure. After then, differential geometry of this structure was set up. Finally, the obtained structures were introduced again with a convenient $\mathcal{R}$ -matrix.

Key Words: Quantum plane, quantum vector, q-deformation, Hopf algebra, differential calculus

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Kuantum grupları, grup kavramının bir genelleştirilmesidir. Daha tam olarak, bir kuantum grubu, bir grubun deformasyonu olup deformasyon parametresinin özel değer(ler)i için ele alınan grup ile özdeşleşir. Kuantum grubu terminolojisi, ilk kez 1986 da V. Drinfeld[1] tarafından kullanılmıştır. Kuantum düzlem fikrini ise 1988 yılında Manin[2] ortaya atmıştır.

Kuantum düzlemin ve kuantum grupların diferansiyel geometrisini inşa etmek için oldukça zahmetli çalışmalar yapılmıştır. Koordinat fonksiyonlarıyla onların diferansiyelleri arasındaki değişimleri bulmak, 1-formları ve kısmi türevlerin bağıntılarını elde etmek gibi amaçlarla Woronowicz[3], Wess ve Zumino[4] ve Çelik[5],[6] gibi isimler diferansiyel hesaba yön vermişlerdir.

Elbette çalışma alanları bu kadarla sınırlı değildir. Kuantum grupların süper uzaylarla birleştirilmesi, kuaternionların deformasyonları, $\mathbb{Z}_3$ -dereceden gruplar ve bunların diferansiyel hesapları ve daha nice konularda birçok çalışmalar yapılmıştır fakat bu çalışmada bu konuları incelemeyeceğimiz için bunların ayrıntılarına burada değinmeyeceğiz.

1.2 Tezin Amacı

Kuantum gruplar fikri ortaya atıldığından beri birçok çalışma yapılmış olmasına rağmen kuantum vektörlerin toplamı tanımlanmamıştır. Bu çalışmada, iki farklı kuantum vektörün toplamının yine bir kuantum vektör olmasını amaçlıyoruz. Bunun için

toplanan vektörlerin bileşenleri üzerine ne gibi şartlar yüklemek gerektiğini, nedenlerini ve sonuçlarını araştıracağız. Bu amaçla uygun bir toplama işlemini tanımlayarak elde edilen yapının diferansiyel geometrisini kurmaya çalışacağız. Son olarak da bulduğumuz komutasyon bağıntılarını koruyan yeni bir matris bulmak için uğraşacağız.

1.3 Hipotez

Düzlemde iki kopya alıp, oluşan vektörlerin bileşenleri dediğimiz, koordinat fonksiyonları arasında, deformasyon parametresine bağlı belli komutasyon bağıntıları yükleyeceğiz. Bu vektörlerin toplamının bir kuantum vektör olduğunu görmeyi amaçlayarak çalışmamıza başlayacağız. Bu anlatılanları, kullanacağımız temel bilgilerin kısa bir özetini inceledikten sonra, üçüncü bölümde uygulayacağız.

BÖLÜM 2

TEMEL BİLGİLER

2.1 Önbilgiler

Bu bölümde, ileride kullanılacak bazı kavramlar, bütünlük açısından burada tanıtılacaktır.

Tanım 2.1 Üzerinde toplama ve çarpma tanımlanmış bir R kümesine, aşağıdaki özellikler sağlanırsa bir birimli **halka** denir.

1. $(R, +)$ bir değişmeli grup.
2. Her $a, b, c \in R$ için $a.(b+c) = a.b + a.c$ ve $(a+b).c = a.c + b.c$.
3. Her $a \in R$ için $a.1 = 1.a$ olacak şekilde $1 \in R$ elamanı mevcut.
4. Her $a, b, c \in R$ için $a(b.c) = (a.b).c$.

Eğer her $a, b \in R$ için $a.b = b.a$ oluyorsa R 'ye değişmeli halka denir.

Tanım 2.2 $(M, +)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. Eğer

$$\varphi: R \times M \rightarrow M, (a, x) \mapsto a.x, \quad (\varphi: M \times R \rightarrow M, (x, a) \mapsto x.a)$$

şeklinde tanımlanan tasvir aşağıdaki şartları sağlarsa, M 'ye bir **sol (sağ) R -modül**, kısaca sol (sağ) modül, φ tasvirine de sol (sağ) R - modül M 'nin **yapı tasviri** adı verilir:

$$\forall a, b \in R \text{ ve } \forall x, y \in M \text{ için,}$$

$$i) a(x+y) = ax + ay, \quad ((x+y)a = xa + ya)$$

$$\text{ii) } (a+b)x = ax + bx, \quad (x(a+b) = xa + xb)$$

$$\text{iii) } (a.b)x = a(bx), \quad (x(a.b) = (xa)b)$$

$$\text{iv) } 1_R x = x, \quad (x 1_R = x)$$

Eğer M hem sağ hem sol R -modül ise M 'ye kısaca **modül** denir. Ek olarak R halkası bir cisim ise, M modülüne **vektör** uzayı veya bir **lineer uzay** denir.

Tanım 2.3 V ve W , K üzerinde birer vektör uzayı olmak üzere,

$$T: V \mapsto W$$

tasvirini, her $v_1, v_2 \in V$ ve $a, b \in K$ için

$$T(av_1 + bv_2) = aT(v_1) + bT(v_2)$$

şartını sağlarsa, bir **lineer** tasvir adını alır.

Tanım 2.4 U, V ve W , K üzerinde birer vektör uzayı olmak üzere $\varphi: U \times V \rightarrow W$ tasvirini aşağıdaki iki şartı sağlıyorsa φ ye bir **bi-lineer** tasvir denir.

$u, u' \in U; v, v' \in V$ ve $\lambda, \mu \in K$ için,

$$\text{i) } \varphi(\lambda u + \mu u', v) = \lambda \varphi(u, v) + \mu \varphi(u', v),$$

$$\text{ii) } \varphi(u, \lambda v + \mu v') = \lambda \varphi(u, v) + \mu \varphi(u, v').$$

Kabul edelim ki U , m – boyutlu ve V , n – boyutlu birer vektör uzayı olmak üzere

$\{\vec{u}_i\}_{i=1}^m$, U nun ve $\{\vec{v}_j\}_{j=1}^n$, V nin taban elemanlarının kümesidir. Bu takdirde $1 \leq i \leq m$

ve $1 \leq j \leq n$ olmak üzere mn tane (i, j) indisi mevcut olduğundan bu indis çiftleri W

daki bir $\{\vec{w}_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m, n}$ tabanını indislemek için kullanılabilir. Böyle yapınca,

$\varphi: U \times V \rightarrow W$ tasvirini $\vec{x} = x^i \vec{u}_i$ ve $\vec{y} = y^j \vec{v}_j$ olmak üzere

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = x^i y^j \vec{w}_{ij}$$

şeklinde tanımlanır. Aşikâr olarak φ , bir bi-lineer tasvirdir ve $\varphi(U \times V) \subseteq W$ (görüntü)

kümesi, $\{\vec{w}_{ij}\}$ tabanını ihtiva eder. Dolayısıyla φ , W uzayını gerer.

Sonuç olarak, U ve V iki vektör uzayı olmak üzere bir W vektör uzayı için aşağıdaki iki şart sağlanıyorsa W uzayına, U ve V uzaylarının **tensör** çarpımı denir ve sembolik olarak $U \otimes V$ ile gösterilir.

i) $\varphi(U \times V), W$ yı gerer.

ii) $\Psi : U \times V \mapsto W'$ herhangi bir bi-lineer tasvir ise $\Psi = \Phi \circ \varphi$ olacak şekilde bir $\Phi : W \mapsto W'$ lineer tasvir mevcut.

Tanım 2.5 $T_1 : U_1 \mapsto V_1, T_2 : U_2 \mapsto V_2$, birer lineer tasvir olsun. Bu takdirde, $u_1 \in U_1$ ve $u_2 \in U_2$ için

$$\Phi : U_1 \otimes U_2 \mapsto V_1 \otimes V_2, \Phi(u_1 \otimes u_2) = T_1(u_1) \otimes T_2(u_2)$$

şeklinde tanımlanan bir lineer tasvir mevcuttur. Buradaki Φ 'ye T_1 ve T_2 'nin **tensör çarpımı** denir ve $\Phi = T_1 \otimes T_2$ ile gösterilir.

Tanım 2.6 G bir grup ve K bir cisim olsun. A ile G 'den K 'ya olan fonksiyonların kümesini gösterelim. Yani

$$A = \text{Map}(G, K) = \{ f \mid f : G \mapsto K \}$$

olsun. Eğer aşağıdaki üç aksiyom sağlanırsa, A 'ya bir K -**cebiri** denir:

$$(1) (\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

$$(2) (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(3) (fg)(x) = f(x)g(x), f, g \in A, \alpha \in K, x \in G.$$

Eğer bir lineer $T : A \rightarrow A$ tasviri

$$T(f.g) = T(f).T(g)$$

eşitliğini de sağlarsa, T 'ye bir **lineer homomorfizm** veya **cebir homomorfizmi** denir.

Bir K -cebirini (basitlik için sadece cebir diyeceğiz), genel olarak aşağıdaki şekilde tanımlayacağız. Bir cebir, iki adet lineer tasvir ile birlikte bir K -vektör uzayı olarak düşünülür:

$$\mu : A \otimes A \rightarrow A, \mu(a \otimes b) = a.b,$$

$$\eta : K \rightarrow A, \eta(k) = k.I.$$

Burada I, A 'nın birim elamanıdır. Bu tasvirler için

$$\begin{aligned}\mu \circ (\text{id} \otimes \mu) &= \mu \circ (\mu \otimes \text{id}) \quad (\text{Ass}) \\ \mu \circ (\text{id} \otimes \eta) &= \mu \circ (\eta \otimes \text{id}) \quad (\text{Uni})\end{aligned}\tag{2.1}$$

özellikleri geçerlidir. (Ass) aksiyomu, μ çarpma tasvirinin asosyatifliğini ifade ederken, (Uni) aksiyomu, $\eta(1)$ 'in A 'nın hem sağ hem de sol birim elamanı olduğunu ifade etmektedir.

Böylece ortaya çıkan (A, μ, η) üçlüsüne bir **cebir** diyeceğiz.

Eğer $A \otimes A = \text{Map}(G \times G, K)$ ve $A = \text{Map}(G, K)$ olduğunu kabul edersek, G deki işlemi kullanarak aşağıdaki lineer homomorfizmleri tanımlayabiliriz. Her $x, y \in G$ için

$$\begin{aligned}\Delta: A &\rightarrow A \otimes A, \Delta f(x \otimes y) = f(x, y), \\ \varepsilon: A &\rightarrow K, \varepsilon(f) = f(e).\end{aligned}$$

Burada e , G nin birim elamanıdır. Δ 'ya cebirin bir **eş-çarpması** ve ε tasvirine de cebirin **eş-birimi** denmektedir. Δ ve ε cebir homomorfizmleri, sırasıyla μ ve η tasvirleri için verilen (Ass) ve (Uni) özelliklerine (denklem (2.1)) dual olan özelliklere sahiptir. Yani

$$\begin{aligned}(\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta &= (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta \quad (\text{coass}) \\ \mu \circ (\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta &= \text{id} = \mu \circ (\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta \quad (\text{counit})\end{aligned}\tag{2.2}$$

dır. Genel olarak, K üzerindeki bir lineer A uzayına, yukarıda tanımlanan μ, η, Δ K -lineer tasvirleriyle birlikte bir **K-kocebiri** (kısaca **kocebiri**) ve A lineer uzayına $\mu, \eta, \Delta, \varepsilon$ K -lineer tasvirleriyle birlikte bir **K-bicebiri** (kısaca **bicebiri**) denir. Ek olarak, $f \in A, x \in G$ için

$$S: A \rightarrow A, Sf(x) = f(x^{-1})$$

şeklinde tanımlanan ve

$$\mu \circ (\text{id} \otimes S) \Delta = \eta \circ \varepsilon = \mu \circ (S \otimes \text{id}) \Delta\tag{2.3}$$

özellikliğini sağlayan bir S cebir antihomomorfizm (eş-ters) ile $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ altılısına bir **Hopf** cebiri denir. Abe [7] . Bundan sonra, kısalığı bakımından bir Hopf cebiri için, $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ altılısını değil sadece A 'yı kullanacağız.

Eğer A bir Hopf cebiri ise, $A \otimes A$ 'daki çarpma

$$(X \otimes Y)(Z \otimes W) = (-1)^{\deg(Y)\deg(Z)}(XZ \otimes YW) \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\deg(f) = \begin{cases} 0, & f \text{ çift dereceden} \\ 1, & f \text{ tek dereceden} \end{cases} \quad (2.5)$$

şeklindedir.

Tanım 2.7 C , bir kocebiri olsun. Eğer bir lineer M uzayı ve bir lineer

$$\Psi: M \rightarrow M \otimes C$$

tasviri için aşağıdaki diyagramlar komutatatif ise (M, Ψ) ikilisine bir sağ C -komodül denir. Bir sol C -komodül de benzer şekilde tanımlanabilir.

$$\begin{array}{ccc} M \otimes K & \xleftarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} & M \otimes C \\ & \nwarrow \cong & \uparrow \psi \\ & & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M \otimes C \otimes C & \xleftarrow{\psi \otimes \text{id}} & M \otimes C \\ \uparrow \text{id} \otimes \Delta & & \uparrow \psi \\ M \otimes C & \xleftarrow{\psi} & M \end{array}$$

Bir bimodülün tanımı için aşağıdaki açıklamalara ihtiyaç vardır:

B , bir bicebir ve M de

$$\varphi_M: M \otimes B \rightarrow M, \quad \varphi_M(m \otimes x) = mx$$

şeklinde tanımlanan yapı dönüşümüyle birlikte bir sağ B -modül olsun. Bu durumda,

$$\varphi_{M \otimes B}: (M \otimes B) \otimes B \rightarrow M \otimes B,$$

$$\varphi_{M \otimes B}(m \otimes x \otimes y) = \sum_{(y)} my_{(1)} \otimes xy_{(2)}, \quad m \otimes x \in M \otimes B$$

şeklinde tanımlanan yapı dönüşümüyle birlikte, $M \otimes B$ de bir sağ B -modül olur. Buna ek olarak,

$$\Psi_M : M \rightarrow M \otimes B$$

K - lineer yapı dönüşümü ile birlikte M bir B -komodül ise,

$$\Psi_{M \otimes B} : M \otimes B \rightarrow (M \otimes B) \otimes B,$$

$$\Psi_{M \otimes B}(m \otimes x) = \sum_{(m)(x)} m_{(0)} \otimes x_{(1)} \otimes m_{(1)} x_{(2)}, \quad m \otimes x \in M \otimes B$$

şeklinde tanımlanan K -lineer yapı dönüşümüyle birlikte $M \otimes B$ bir B -komodül olur.

Bu durumda bir bimodülün tanımını şu şekilde verebiliriz:

Tanım 2.8 Eğer M , hem sağ B -modül ve hem de B -komodül olmak üzere aşağıdaki koşul sağlanırsa M 'ye bir B -**bimodül** denir:

- φ_M 'nin bir sağ B -komodül homomorfizmi olması için gerek ve yeter şart Ψ_M 'nin bir sağ B -modül homomorfizmi olmasıdır.

BÖLÜM 3

KUANTUM VEKTÖRLERİN TOPLAMI

Bu bölümde kuantum düzleme ait iki vektörün toplamı ele alınacak ve bu toplamın sonucunda elde edilen yapının da bir kuantum vektör olması için gerekli şartlar araştırılacaktır.

3.1 Kuantum Düzlem ve Hopf Cebiri Yapısına Kısa Bir Bakış

Tanım 3.1 $K\{x, y\}$ bir serbest cebir olsun. Manin[2] kuantum düzlemi, x, y koordinat fonksiyonları için, $q \neq 0$ bir kompleks sayı olmak üzere;

$$xy = qyx \quad (3.1)$$

bağıntısı ile tanımlanmıştır.

Aslında, kuantum düzlem;

I_q , $xy - qyx$ elamanıyla oluşturulmuş, $K\{x, y\}$ serbest cebirinin iki taraflı ideali olmak üzere;

$$K_q[x, y] = K\{x, y\}/I_q$$

bölüm cebiri olarak tanımlanır.

Kompleks sayılar üzerindeki bu cebir polinomların cebiridir. Bu cebiri $Fun(R_q^{2 \times 10})$ ile göstereceğiz. Burada x, y koordinat fonksiyonlarıdır. Bu cebir $q \rightarrow 1$ limitinde değişmeli olur ve $C[x, y]$ polinomlar cebiri olarak düşünülür. $Fun(R_q^{2 \times 10})$ cebirine birim elemanın eklenmesiyle elde edilen cebiri A ile göstereceğiz.

Aşağıda verilen kuantum düzlemin Hopf cebir yapısı ile ilgili bağıntılar Çelik[5] ‘den alınmıştır.

Kabul edelim ki x ‘in tersi mevcut olsun, yani

$$xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$$

olsun. Bu durumda A cebiri üzerindeki bir cebir homomorfizmi olan $\Delta_A: A \rightarrow A \otimes A$ eş-çarpımının koordinat fonksiyonları üzerine etkisini şu şekilde tanımlarız:

$$\begin{aligned}\Delta_A(x) &= x \otimes x \\ \Delta_A(y) &= x \otimes y + y \otimes 1\end{aligned}\tag{3.2}$$

Bu tasvir,

$$(id \otimes \Delta_A) \circ \Delta_A = (\Delta_A \otimes id) \circ \Delta_A\tag{3.3}$$

şeklindeki koasosyatiflik özelliğine sahiptir ve (3.1) bağıntılarını korur.

A cebiri üzerindeki eş-birim ve eş-ters tasvirleri ise şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\varepsilon_A: A \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varepsilon_A(x) = 1, \quad \varepsilon_A(y) = 0\tag{3.4}$$

$$S_A: A \rightarrow A, \quad S_A(x) = x^{-1}, \quad S_A(y) = -x^{-1}y\tag{3.5}$$

Bu tasvirler,

$$\mu \circ (\varepsilon_A \otimes id) \circ \Delta_A = id = \mu \circ (id \otimes \varepsilon_A) \circ \Delta_A,$$

$$\mu \circ (S_A \otimes id) \circ \Delta_A = \varepsilon_A = \mu \circ (id \otimes S_A) \circ \Delta_A$$

özelliklerini sağlar ve (3.1) kuadratik bağıntısını korur. Böylece A cebirinin bir Hopf cebiri yapısına sahip olduğu söylenir.

Tanım 3.2 Kuantum vektör;

Bileşenleri x ve y olan ve bileşenleri arasında (3.1) kuadratik bağıntıları korunan vektöre bir kuantum vektör denir.[2] Eğer X , bir kuantum vektör ise,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ yazacağız.}$$

Bu kısa ön bilgilerden sonra orijinal kısımlara geçebiliriz.

3.2 Toplama İşleminin Tanımlanması: Bu çalışmanın esas problemi olan, iki kuantum vektörün toplamının hangi şartlarda yeni bir kuantum vektör olacağı burada incelenecektir:

Kabul edelim ki x' ve y' , A cebirinin jeneratörleri olsun yani; x' ve y' (3.1) şeklindeki bağıntıyı sağlasın. A cebirinin başka bir kopyası da x'' ve y'' olsun. İşlemlerde kolaylık sağlaması için,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

yazalım ve

$$X''' = X' + X'' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + x'' \\ y' + y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad X = \frac{1}{2} X''' \quad (3.6)$$

işlemini tanımlayalım. Hedefimiz X ile gösterilen toplam vektörünün bileşenlerinin hangi durumlarda A cebirine ait olacağını araştırmaktır. Bu aşağıdaki önermeyle verilmiştir.

Önerme 3.3 Eğer x', y', x'', y'' koordinat fonksiyonları arasında

$$\begin{aligned} x' x'' &= x'' x' \\ x' y'' &= q y'' x' \\ y' x'' &= q^{-1} x'' y' \\ y' y'' &= y'' y' \end{aligned} \quad (3.7)$$

bağıntıları sağlanırsa $X = \frac{1}{2} X'''$ vektörü, bir kuantum vektördür.

İspat: Burada, $x = \frac{1}{2}(x' + x'')$, $y = \frac{1}{2}(y' + y'')$ olup,

$$\begin{aligned} xy &= \frac{1}{4}(x' + x'')(y' + y'') \\ &= \frac{1}{4}(x' y' + x' y'' + x'' y' + x'' y'') \\ &= \frac{1}{4}(q y' x' + q y'' x' + q y' x'' + q y'' x'') \\ &= q \frac{1}{4}(y' + y'')(x' + x'') \\ &= qyx \end{aligned}$$

Öyleyse, (3.1) bağıntısı sağlanmıştır ve dolayısıyla X vektörü bir kuantum vektörüdür.

Not 1: Hiç şüphe yoktur ki

$$x' y'' + x'' y' = q y'' x' + q y' x''$$

denklemini korunacak şekilde daha genel bağıntılar tanımlamak da mümkündür. Fakat Hopf cebiri yapısına ulaşmak ve geometriyi kurmak için (3.7) bağıntılarını kullanacağız. Diğer durumlarda, Hopf cebirini kurmak ve geometrik yapıya ulaşmak oldukça zor olmuştur ve başka bir çalışmaya bırakılmıştır.

3.3 Temsili matrisler:

x', y', x'', y'' koordinat fonksiyonlarına yüklediğimiz (3.7) bağıntı sistemini sağlayan bazı matris temsilleri şu şekildedir:

$$x' = \begin{pmatrix} \lambda q & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x'' = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y'' = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu temsiller (3.1) ve (3.7) ile verilen bağıntıları sağlar, gerçekten, örneğin;

$$x' y' = \begin{pmatrix} \lambda q & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y' x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda q & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan,

$$x' y' = q y' x'$$

kuadratik bağıntısı sağlanır.

Benzer şekilde

$$x' x'' = \begin{pmatrix} \lambda q & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda q^2 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$x'' x' = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda q & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda q^2 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

olduğundan,

$$x' x'' = x'' x'$$

eşitliği de doğrulanır. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Ayrıca;

$$x = \frac{1}{2}(x' + x'') = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\lambda + 1)q & 0 \\ 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \text{ ve } y = \frac{1}{2}(y' + y'') = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 - \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan;

$$xy = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & (1 - \lambda^2)q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = qyx$$

eşitliği de görülmektedir.

3.4 Hopf cebiri yapısı:

Bu kısımda, kurduğumuz yapının Hopf cebiri yapısını inceleyeceğiz;

1) $\Delta_A: A \rightarrow A \otimes A$ eş-çarpım tasvirinin x ve y koordinat fonksiyonlarına etkisi

$$\begin{aligned} \Delta_A(x) &= \Delta_A\left(\frac{1}{2}(x' + x'')\right) = \frac{1}{2}(x' \otimes x' + x'' \otimes x'') \\ \Delta_A(y) &= \Delta_A\left(\frac{1}{2}(y' + y'')\right) = \frac{1}{2}(x' \otimes y' + y' \otimes 1 + x'' \otimes y'' + y'' \otimes 1) \end{aligned} \quad (3.8)$$

dir. Bunlar (3.1) de verilen komutasyon bağıntısını korur. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \Delta_A(xy) &= \Delta_A\left(\frac{1}{2}(x' + x'')\right) \Delta\left(\frac{1}{2}(y' + y'')\right) \\ &= \frac{1}{2}(x' \otimes x' + x'' \otimes x'') \frac{1}{2}(x' \otimes y' + y' \otimes 1 + x'' \otimes y'' + y'' \otimes 1) \\ &= \frac{1}{4}(x'^2 \otimes x' y' + x' y' \otimes x' + x' x'' \otimes x' y'' + x' y'' \otimes x' + x'' x' \otimes x'' y' + \\ &\quad x'' y' \otimes x'' + x''^2 \otimes x'' y'' + x'' y'' \otimes x'') \\ &= \frac{1}{4}(x'^2 \otimes qy' x' + qy' x' \otimes x' + x'' x' \otimes qy'' x' + qy'' x' \otimes x' + x' x'' \otimes qy' x'' + \\ &\quad qy' x'' \otimes x'' + x''^2 \otimes qy'' x'' + qy'' x'' \otimes x'') \\ &= q \frac{1}{2}(x' \otimes y' + y' \otimes 1 + x'' \otimes y'' + y'' \otimes 1) \frac{1}{2}(x' \otimes x' + x'' \otimes x'') \\ &= q \Delta_A(yx) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu işlemlerde sırasıyla eş-çarpım tasvirinin lineerliği ve (3.7) ile verilen komutasyon bağıntıları kullanılmıştır. Şimdi de (3.3) koasosyatiflik özelliğinin sağlandığını x için gösterelim:

$$\begin{aligned}
(\Delta_A \otimes id) \circ \Delta_A (x) &= (\Delta_A \otimes id) \left(\frac{1}{2} (x' \otimes x' + x'' \otimes x'') \right) \\
&= \frac{1}{2} \Delta_A (x') \otimes id(x') + \Delta_A (x'') \otimes id(x'') \\
&= \frac{1}{2} (x' \otimes x' \otimes x' + x'' \otimes x'' \otimes x'') \\
&= \frac{1}{2} id(x') \otimes \Delta_A (x') + id(x'') \otimes \Delta_A (x'') \\
&= (id \otimes \Delta_A) \circ \Delta_A (x)
\end{aligned}$$

y için de benzer işlemler yapılabilir.

2) $\varepsilon_A: A \rightarrow \mathbb{C}$ eş-birim tasvirinin x ve y 'ye etkisi şu şekildedir;

$$\varepsilon_A(x) = \varepsilon_A \left(\frac{1}{2} (x' + x'') \right) = 1, \quad \varepsilon_A(y) = \varepsilon_A \left(\frac{1}{2} (y' + y'') \right) = 0 \quad (3.9)$$

Eş-birim tasvirinin bir cebir homomorfizmi olmasından yararlanılarak (3.1) komutasyon bağıntısının korunduğu ve $\mu \circ (\varepsilon_A \otimes id) \circ \Delta = id = \mu \circ (id \otimes \varepsilon_A) \circ \Delta$ eşitliğinin sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir.

3) $S_A: A \rightarrow A$ eş-ters anti-lineer tasvirinin x ve y 'ye etkisi

$$\begin{aligned}
S_A(x) &= S \left(\frac{1}{2} (x' + x'') \right) = \frac{1}{2} (x'^{-1} + x''^{-1}) \\
S_A(y) &= S_A \left(\frac{1}{2} (y' + y'') \right) = \frac{1}{2} (-x'^{-1} y' - x''^{-1} y'') \quad (3.10)
\end{aligned}$$

şeklinde. Bu tasvirin de $\mu \circ (S_A \otimes id) \circ \Delta = \varepsilon_A = \mu \circ (id \otimes S_A) \circ \Delta$ eşitliğini sağladığı x ve y koordinat fonksiyonları için ayrı ayrı gösterilebilir.

Tanımlanmış olan eş-çarpım, eş-birim ve eş-ters tasvirleriyle A cebiri bir Hopf Cebiri yapısına sahip olur.

Not 2: Bundan sonraki bölümlerde, işlemlerde kolaylık sağlaması amacıyla (3.6) eşitliğindeki “ $\frac{1}{2}$ ” yi göz ardı ederek;

$$x = x' + x'' \text{ ve } y = y' + y'' \quad (3.11)$$

alacağız.

BÖLÜM 4

KUANTUM VEKTÖRLERİN TOPLAMI ÜZERİNE DİFERANSİYEL HESAP

Bu bölümde amacımız, bir önceki bölümde verdiğimiz toplama işlemi ile A Hopf cebirinin bir diferansiyel cebirini elde etmektir. Bunu koordinat fonksiyonlarının diferansiyellerini alıp, üzerlerine yeni yapılar kurarak yapacağız. Önce diferansiyel d operatörünün özelliklerini verelim. d operatörü, A 'nın jeneratörlerini diferansiyellerine dönüştüren bir operatördür ve şu şekilde tanımlıdır;

$$d: A \rightarrow dA, \quad a \mapsto da, \quad a \in \{x', y', x'', y''\}$$

Bu d operatörü;

$$d \wedge d = d^2 = 0 \text{ (nilpotentlik)} \tag{4.1}$$

ve

$$d(fg) = d(f)g + (-1)^{\deg(f)}fd(g) \text{ (Leibniz)} \tag{4.2}$$

özelliklerine sahiptir.

4.1 Diferansiyel Cebir

Bilindiği üzere klasik diferansiyel hesapta fonksiyonlar, diferansiyellerle değişme özelliğine sahiptir. Cebirsel açıdan, 1-formların uzayı 1.mertebeden diferansiyellerle oluşturulmuş düzgün fonksiyonların cebiri üzerinde bir serbest bi-modüldür ve komutatiflik, sağ ve sol yapıların birbirine nasıl bağlandığını gösterir.

A cebiri değişmeli olmadığından, koordinat fonksiyonları ile onların diferansiyellerinin de değişmeli olmayacağı beklenir. O halde diferansiyel hesabını oluşturmak amacıyla, önce koordinatlarla onların diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntılarını bulmak gerekir. Daha sonra oluşan yapının Hopf cebir yapısını kurmak önemli bir problemdir, bu problemi aşmak için Çelik [6] kovaryantlığı tanımlamış ve düzlemin elemanları için

$$\begin{aligned} xdx &= q^{-1}dxx \\ xdy &= dyx \\ ydx &= q^{-1}dxy + (q^{-1} - 1)dyx \\ ydy &= q^{-1}dyy \\ dxdy &= -dydx \end{aligned} \tag{4.3}$$

komutasyon bağıntılarını elde etmiştir.

Önerme 4.1 Toplanan vektörlerin bileşenleri olan koordinat fonksiyonları ile koordinat fonksiyonlarının diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntıları:

$$\begin{aligned} x' dx'' &= q^{-1} dx'' x' \\ x'' dx' &= q^{-1} dx' x'' \\ x' dy'' &= dy'' x' \\ x'' dy' &= dy' x'' \\ y' dx'' &= q^{-1} dx'' y' + (q^{-1} - 1) dy' x'' \\ y'' dx' &= q^{-1} dx' y'' + (q^{-1} - 1) dy'' x' \\ y' dy'' &= q^{-1} dy'' y' \\ y'' dy' &= q^{-1} dy' y'' \end{aligned} \tag{4.4}$$

şeklindedir.

İspat: Sağlanması gereken, muhtemel komutasyon bağıntıları;

$$\begin{aligned} x' dx'' &= A_1 dx'' x' \\ x'' dx' &= A_2 dx' x'' \\ x' dy'' &= F_{11} dy'' x' + F_{12} dx' y'' \\ x'' dy' &= F_{21} dy' x'' + F_{22} dx'' y' \\ y' dx'' &= G_{11} dx'' y' + G_{12} dy' x'' \\ y'' dx' &= G_{21} dx' y'' + G_{22} dy'' x' \\ y' dy'' &= B_1 dy'' y' \end{aligned}$$

$$y'' dy' = B_2 dy' y'' \quad (4.5)$$

şeklinde. Zira birinci (veya bir diğeri) bağıntıya bir ekleme yapılsa bile katsayısı sıfır çıkacaktır.

Buradaki A_i, B_i, F_{ij}, G_{ij} katsayıları, q deformasyon parametresine bağlıdır ve onları belirleme işi komutatif olmayan diferansiyel hesabın kovaryantlık metodu kullanarak yapılabilir. Çelik[6]

4.1.1 Kovaryantlık

Sol ve sağ-kovaryant bimodül tanımlarıyla başlayalım.

Ω, A Hopf cebiri üzerinde bir bimodül olsun. Bir Δ^R tasvirini;

$$\Delta^R: \Omega \rightarrow \Omega \otimes A, \quad \Delta^R(da) = (d \otimes id) \Delta_A(a), \quad \forall a \in A$$

şeklinde tanımlayalım. Kolayca gösterilebilir ki, her $a_1, b_1 \in A$ ve $\rho_1, \rho_2 \in \Omega$ için,

$$\Delta^R(a_1 \rho_1 + a_2 \rho_2) = \Delta_A(a_1) \Delta^R(\rho_1) + \Delta_A(a_2) \Delta^R(\rho_2) \quad (4.6)$$

olmak üzere Δ^R tasviri bir lineer homomorfizmdir. Eğer,

$$\begin{aligned} (\Delta_A \otimes id) \circ \Delta^R &= (id \otimes \Delta_A) \circ \Delta^R, \\ (id \otimes \varepsilon_A) \circ \Delta^R &= id \end{aligned} \quad (4.7)$$

özellikleri mevcut ise (Ω, Δ^R) ikilisine bir sağ-kovaryant bimodül denir. O halde Δ^R nin birinci dereceden diferansiyellere etkisi;

$$\begin{aligned} \Delta^R(dx) &= (d \otimes id) \Delta_A(x' + x'') \\ &= (d \otimes id)(x' \otimes x' + x'' \otimes x'') \\ &= dx' \otimes x' + dx'' \otimes x'' \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \Delta^R(dy) &= (d \otimes id) \Delta_A(y' + y'') \\ &= (d \otimes id)(x' \otimes y' + y' \otimes 1 + x'' \otimes y'' + y'' \otimes 1) \\ &= dx' \otimes y' + dy' \otimes 1 + dx'' \otimes y'' + dy'' \otimes 1 \end{aligned} \quad (4.9)$$

olarak bulunur.

(4.5) denklem sisteminin çözümüne ulaşmak için, Δ^R tasvirini (4.3) bağıntılarına uyguluyoruz, örneğin (4.3) deki ilk bağıntıya uygularsak,

$$\Delta^R (x dx) = \Delta^R (q^{-1} dx x)$$

eşitliği, (4.8) ile

$$(x' \otimes x' + x'' \otimes x'')(dx' \otimes x' + dx'' \otimes x'') = q^{-1}(dx' \otimes x' + dx'' \otimes x'')(x' \otimes x' + x'' \otimes x'') \quad (4.10)$$

şeklinde yazılır. Burada, parantezler dağıtıldıktan sonra (4.5)'deki 1. ve 2. eşitlikler yerine yazılıp, gerekli sadeleştirmeler yapılsa,

$$A_1 dx'' x' + A_2 dx' x'' = q^{-1}(dx'' x' + dx' x'') \quad (4.11)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten, bir çözüm olarak;

$$A_1 = A_2 = q^{-1}$$

buluruz. Benzer işlemler (4.3)'deki diğer bağıntılara uygulanarak, (4.5) sisteminin bir özel çözümü,

$$\begin{aligned} F_{11} &= 1, & F_{12} &= 0, & F_{21} &= 1, & F_{22} &= 0, \\ G_{11} &= q^{-1}, & G_{12} &= (q^{-1} - 1), & G_{21} &= q^{-1}, & G_{22} &= (q^{-1} - 1) \\ B_1 &= B_2 = q^{-1} \end{aligned} \quad (4.12)$$

olarak elde edilir.

Ω, A Hopf cebiri üzerinde bir bimodül olsun. Bir Δ^L tasvirini;

$$\Delta^L : \Omega \rightarrow A \otimes \Omega, \quad \Delta^L (da) = (id \otimes d) \Delta_A (a), \forall a \in A \quad (4.13)$$

şeklinde tanımlayalım. her $a_1, b_1 \in A$ ve $\rho_1, \rho_2 \in \Omega$ için,

$$\Delta^L (a_1 \rho_1 + a_2 \rho_2) = \Delta_A (a_1) \Delta^L (\rho_1) + \Delta_A (a_2) \Delta^L (\rho_2)$$

olduğundan, Δ^L 'nin bir lineer homomorfizmdir. Eğer,

$$\begin{aligned} (\Delta_A \otimes id) \circ \Delta^L &= (id \otimes \Delta_A) \circ \Delta^L \\ (\varepsilon_A \otimes id) \circ \Delta^L &= id \end{aligned} \quad (4.14)$$

özellikleri mevcut ise (Ω, Δ^L) ikilisine bir sol-kovaryant bimodül denir. Δ^L 'nin birinci dereceden diferansiyellere etkisi;

$$\Delta^L (dx) = (id \otimes d) \Delta_A (x' + x'')$$

$$\begin{aligned}
&= (\text{id} \otimes d)(x' \otimes x' + x'' \otimes x'') \\
&= x' \otimes dx' + x'' \otimes dx''
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^L(dy) &= (\text{id} \otimes d) \Delta_A(y' + y'') \\
&= (\text{id} \otimes d)(x' \otimes y' + y' \otimes 1 + x'' \otimes y'' + y'' \otimes 1) \\
&= x' \otimes dy' + x'' \otimes dy''
\end{aligned} \tag{4.17}$$

şeklindedir.

Şimdi de Δ^L tasvirini, (4.3) bağıntılarından ikincisine uygulayalım:

$$\Delta^L(xdy) = \Delta^L(dyx)$$

(4.11) ve $x = x' + x''$ eşitlikleri kullanılarak,

$$(x' \otimes x' + x'' \otimes x'')(x' \otimes dy' + x'' \otimes dy'') = (x' \otimes dy' + x'' \otimes dy'')(x' \otimes x' + x'' \otimes x'')$$

yazılır. Burada da uygun yerlerde (4.4) bağıntıları kullanılarak, gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
F_{11}dy''x' + F_{12}dx'y'' &= dy''x' \\
F_{21}dy'x'' + F_{22}dx''y' &= dy'x''
\end{aligned} \tag{4.18}$$

elde eldir. Burada ise;

$$F_{11} = 1 = F_{21}, \quad F_{12} = 0 = F_{22}$$

çözümü tutarlılık göstermektedir. Benzer işlemler (4.3) deki diğer bağıntılara da uygulanarak,

$$\begin{aligned}
A_1 &= A_2 = q^{-1} \\
G_{11} &= q^{-1}, \quad G_{12} = (q^{-1} - 1), \quad G_{21} = q^{-1}, \quad G_{22} = (q^{-1} - 1) \\
B_1 &= B_2 = q^{-1}
\end{aligned}$$

çözümü elde edilir ki bu önceki çözümle tamamen aynıdır.

dx', dx'', dy', dy'' diferansiyellerinin birbirleriyle komutasyonlarını elde etmek üzere yukarıda bulduğumuz bağıntılara d diferansiyel operatörünü uyguluyoruz;

örneğin, $x' dy'' - dy'' x' = 0$ bağıntısına d operatörü uygulanırsa,

$$dx' dy'' + x' d^2 y'' - d^2 y'' x' - (-1)^{\deg(dy'')} dy'' dx' = 0, \quad \deg(dy'') = 1,$$

olup d operatörünün nilpotentlik ve Leibniz (4.2) özellikleri göz önünde bulundurulduğunda

$$dx' dy'' = -dy'' dx' \quad (4.19)$$

elde edilir. Benzer işlemlerle,

$$\begin{aligned} dx' dx'' &= -dx'' dx' \\ dy' dx'' &= -dx'' dy' \\ dy' dy'' &= -dy'' dy' \end{aligned} \quad (4.20)$$

bağıntıları elde edilir.

Bulduğumuz tüm bağıntıları toplarsak,

$$\begin{aligned} x' dx'' &= q^{-1} dx'' x' \\ x'' dx' &= q^{-1} dx' x'' \\ x' dy'' &= dy'' x' \\ x'' dy' &= dy' x'' \\ y' dx'' &= q^{-1} dx'' y' + (q^{-1} - 1) dy' x'' \\ y'' dx' &= q^{-1} dx' y'' + (q^{-1} - 1) dy'' x' \\ y' dy'' &= q^{-1} dy'' y' \\ y'' dy' &= q^{-1} dy' y'' \\ dx' dx'' &= -dx'' dx' \\ dx' dy'' &= -dy'' dx' \\ dy' dx'' &= -dx'' dy' \\ dy' dy'' &= -dy'' dy' \end{aligned} \quad (4.21)$$

komutasyon bağıntılarını elde etmiş oluruz.

4.1.2 Diferansiyel Hopf Cebiri: (4.21) bağıntılarına sahip diferansiyel cebir, aşağıda tanımlanan yapılarla birlikte bir Hopf cebiri yapısına sahip olur;

$$\begin{aligned} 1) \Delta_\Omega: \Omega &\rightarrow \Omega \otimes \Omega, \quad \Delta_\Omega = \Delta^L + \Delta^R, \quad \Delta_\Omega|_A = \Delta_A \\ \Delta_\Omega(dx) &= x' \otimes dx' + x'' \otimes dx'' + dx' \otimes x' + dx'' \otimes x'' \end{aligned}$$

$$\Delta_{\Omega} (dy) = x' \otimes dy' + x'' \otimes dy'' + dx' \otimes y' + dy' \otimes 1 + dx'' \otimes y'' + dy'' \otimes 1 \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} 2) \varepsilon_{\Omega} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varepsilon_{\Omega} \circ d = d \circ \varepsilon_A, \quad \varepsilon_{\Omega} \big|_A = \varepsilon_A \\ \varepsilon_{\Omega} (dx) = 0, \quad \varepsilon_{\Omega} (dy) = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} 3) S_{\Omega} : \Omega \rightarrow \Omega, \quad S_{\Omega} \circ d = d \circ S_A, \quad S_{\Omega} \big|_A = S_A \\ S_{\Omega}(dx) = -x'^{-1} dx' x'^{-1} - x''^{-1} dx'' x''^{-1} \\ S_{\Omega}(dy) = x'^{-1} dx' x'^{-1} y' - x'^{-1} dy' + x''^{-1} dx'' x''^{-1} y'' - x''^{-1} dy'' \end{aligned} \quad (4.24)$$

Bu tasvirlerin (4.3) bağıntısını koruduğu ve ko-asosyatiflik, ko-unit, ko-inverse özelliklerini sağladığı gösterilebilir.

Elde ettiğimiz $(\Omega, \Delta_{\Omega}, \varepsilon_{\Omega}, S_{\Omega})$ yapısına *Diferansiyel Hopf Cebiri* denir.

4.2 A Üzerine Cartan-Maurer 1-formları

Bu kısımda, Cartan-Maurer 1-formlarını tanımlayacağız ve gerekli komutasyon bağıntılarını elde edeceğiz.

Woronowicz[3]; Cartan-Maurer 1-formlarını, eş-çarpım tasvirinin A 'nın jeneratörlerine etkisini kullanarak şu şekilde tanımlamıştır:

$$w_{x_k} = \mu \circ (d \otimes S) \circ \Delta (x_k), \quad x_k \in \{x, y\} \quad (4.24)$$

Bu formül yardımıyla bize gerekli olan 1-formları bulalım:

$$\begin{aligned} w_{x'} &= \mu \circ (d \otimes S) \circ \Delta (x') \\ &= \mu \circ (d \otimes S)(x' \otimes x') \\ &= \mu(dx' \otimes S(x')) \\ &= \mu(dx' \otimes x'^{-1}) \\ &= dx' x'^{-1} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Benzer şekilde,

$$w_{x''} = dx'' x''^{-1} \quad (4.26)$$

Buradan (3.8) bağıntısını kullanarak,

$$\begin{aligned}
w_x &= \mu \circ (d \otimes S) \circ \Delta(x) \\
&= \mu \circ (d \otimes S)(x' \otimes x' + x'' \otimes x'') \\
&= \mu(dx' \otimes x'^{-1} + dx'' \otimes x''^{-1}) \\
&= dx' x'^{-1} + dx'' x''^{-1} \\
&= w_{x'} + w_{x''}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

buluruz. Benzer işlemlerle,

$$w_{y'} = -dx' x'^{-1} y' + dy' \tag{4.28}$$

$$w_{y''} = -dx'' x''^{-1} y'' + dy'' \tag{4.29}$$

$$w_y = w_{y'} + w_{y''} \tag{4.30}$$

elde edilir.

Önerme 4.2 Cartan-Maurer 1-formlarının, cebirin jeneratörleriyle komutasyonları aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned}
x' w_{x''} &= q^{-1} w_{x''} x' \\
x'' w_{x'} &= q^{-1} w_{x'} x'' \\
x' w_{y''} &= w_{y''} x' \\
x'' w_{y'} &= w_{y'} x'' \\
y' w_{x''} &= w_{x''} y' + (q^{-1} - 1)(w_{y'} + w_{x'} y') \\
y'' w_{x'} &= w_{x'} y'' + (q^{-1} - 1)(w_{y''} + w_{x''} y'') \\
y' w_{y''} &= w_{y''} y' + (q^{-1} - 1)(w_{y''} y' + w_{x''} y'' y' - w_{y'} y'' - w_{x'} y' y'') \\
y'' w_{y'} &= w_{y'} y'' + (q^{-1} - 1)(w_{y'} y'' + w_{x'} y' y'' - w_{y''} y' - w_{x''} y'' y')
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Görüldüğü gibi bu bağıntılar $q \rightarrow 1$ limitinde klasiktir. Ayrıca 1. ve 2. vektörlerin elemanları için simetriktir.

İspat: Bu bağıntılar; (4.21) bağıntıları kullanılarak elde edilir. Gerçekten, örneğin

$$\begin{aligned}
x' w_{x''} &= x' dx'' x''^{-1} \\
&= q^{-1} dx'' x' x''^{-1} \\
&= q^{-1} dx'' x''^{-1} x' \\
&= q^{-1} w_{x''} x'
\end{aligned}$$

dir. Burada sırasıyla (4.26), (4.21), (3.7) ve tekrar (4.26) bağıntıları kullanılmıştır. Diğer eşitlikler de benzer yollarla gösterilebilir.

(4.31) bağıntıları, d operatörü uygulanarak kontrol edilebilir, yalnız bu esnada $w_{x_k}, (x_k \in \{x', x'', y', y''\})$ 1-formları tek olduğundan, Leibniz özelliği göz ardı edilmemelidir. Örnek olarak, (4.31) bağıntılarından ilkinin gösterelim,

$$d(x' w_{x''} - q^{-1} w_{x''} x') = dx' w_{x''} + x' dw_{x''} - q^{-1} [dw_{x''} x' + (-1)^{\deg w_{x''}} w_{x''} dx']$$

Burada $\deg w_{x''} = 1$ ve $dw_{x''} = 0$ değerleri yerine yazılırsa,

$$d(x' w_{x''} - q^{-1} w_{x''} x') = dx' w_{x''} + q^{-1} w_{x''} dx'$$

$w_{x''} = dx'' x''^{-1}$ ve $dx' dx'' = 0$ (4.21) olduğundan

$$d(x' w_{x''} - q^{-1} w_{x''} x') = 0 + q^{-1} 0$$

$$d(x' w_{x''} - q^{-1} w_{x''} x') = 0$$

olduğu görülür.

Önerme 4.3 Diferansiyellerin, Cartan-Maurer 1-formlarıyla komutasyonları;

$$dx' w_{x''} = -q^{-1} w_{x''} dx'$$

$$dx'' w_{x'} = -q^{-1} w_{x'} dx''$$

$$dy'' w_{x'} = -w_{x'} dy''$$

$$dy' w_{x''} = -w_{x''} dy'$$

$$dy' w_{y''} = -q w_{y''} dy'$$

$$dy'' w_{y'} = -q w_{y'} dy''$$

$$dx' w_{y''} = -w_{y''} dx' - (q^{-1} - 1) w_{x''} x' w_{y''}$$

$$dx'' w_{y'} = -w_{y'} dx'' - (q^{-1} - 1) w_{x'} x'' w_{y'} \quad (4.32)$$

şeklindedir.

İspat: Bu önermeyi ispatlamak zor değildir. Örneğin, dördüncü bağıntı; (4.26),(4.21) eşitlikleri yardımıyla,

$$dy' w_{x''} = dy' (dx'' x''^{-1})$$

$$= -dx'' dy' x''^{-1}$$

$$= -dx'' x''^{-1} dy'$$

$$= -w_x'' dy'$$

şeklinde elde edilmiştir. Diğerleri de benzer yollarla gösterilebilir.

(4.32) bağıntılarını da d operatörü uygulayarak kontrol etmek mümkündür.

Önerme 4.4 Cartan-Maurer 1-formlarının birbiriyle komutasyonları;

$$\begin{aligned} w_x' w_x'' &= -q^{-1} w_x'' w_x' \\ w_y' w_y'' &= -q^{-1} w_y'' w_y' \\ w_x' w_y'' &= -w_y'' w_x' - (q^{-1} - 1) w_x'' w_y' \\ w_x'' w_y' &= -w_y' w_x'' - (q^{-1} - 1) w_x' w_y'' \end{aligned} \quad (4.33)$$

şeklindedir.

(4.31), (4.32) ve (4.33) bağıntıları $w_x = w_x' + w_x''$ ve $w_y = w_y' + w_y''$ eşitlikleri ile birlikte kullanılarak,

$$\begin{aligned} xw_x &= (x' + x'')(w_x' + w_x'') \\ &= x' w_x' + x'' w_x' + x' w_x'' + x'' w_x'' \\ &= q^{-1} (w_x' + w_x'')(x' + x'') \\ &= q^{-1} w_x x \end{aligned}$$

elde edilir. Bunu yaparken 3. Satırda (4.31) bağıntıları uygun yerlerde kullanılmıştır.

Tamamen benzer yollarla,

$$\begin{aligned} xw_x &= q^{-1} w_x x \\ xw_y &= w_y x \\ yw_y &= w_y y \\ yw_x &= q^{-1} w_x y + (q^{-1} - 1) w_y \\ dxw_x &= -q^{-1} w_x dx \\ dyw_x &= -w_x dy \\ dyw_y &= -qw_y dy \\ dxw_y &= -qw_y dx \\ (w_x)^2 &= 0 \\ (w_y)^2 &= 0 \\ w_x w_y &= -q^{-1} w_y w_x \end{aligned} \quad (4.34)$$

elde edilir. Bu bağıntılar ise Çelik 'in bulduğu bağıntıların aynısıdır[5]. Uyumluluk yine d operatörü uygulanarak kontrol edilebilir.

w_x, w_y elemanlarıyla oluşan cebiri W ile göstereceğiz.

4.2.1 1-formların Hopf Cebiri Yapısı

A ve Ω üzerindeki Hopf cebiri yapıları, W 'ya bir Hopf cebiri yapısı kazandırır. Bu aşağıdaki şekilde belirlenmiştir:

1) $\Delta_W: W \rightarrow W \otimes W$, n ın W 'nın elemanlarına etkisi, eğer

$\Delta_W \big|_A = \Delta_A$ ve $\Delta_W \big|_\Omega = \Delta_\Omega$ olarak tanımlanırsa,

$$\begin{aligned}
 \Delta_W(w_x) &= \Delta_W(w_{x'} + w_{x''}) \\
 &= \Delta_W(dx' x'^{-1} + dx'' x''^{-1}) \\
 &= \Delta_W(dx') \Delta_W(x'^{-1}) + \Delta_W(dx'') \Delta_W(x''^{-1}) \\
 &= (x' \otimes dx' + dx' \otimes x')(x'^{-1} \otimes x'^{-1}) + (x'' \otimes dx'' + dx'' \otimes x'')(x''^{-1} \otimes x''^{-1}) \\
 &= 1 \otimes dx' x'^{-1} + dx' x'^{-1} \otimes 1 + 1 \otimes dx'' x''^{-1} + dx'' x''^{-1} \otimes 1 \\
 &= w_{x'} \otimes 1 + 1 \otimes w_{x'} + w_{x''} \otimes 1 + 1 \otimes w_{x''}, \tag{4.35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_W(w_y) &= \Delta_W(w_{y'} + w_{y''}) \\
 &= \Delta_W(-dx' x'^{-1} y' + dy' - dx'' x''^{-1} y'' + dy'') \\
 &= -\Delta_W(dx') \Delta_W(x'^{-1}) \Delta_W(y') + \Delta_W(dy') \\
 &\quad - \Delta_W(dx'') \Delta_W(x''^{-1}) \Delta_W(y'') + \Delta_W(dy'') \\
 &= w_{y'} \otimes 1 + x' \otimes w_{y'} - y' \otimes w_{x'} + w_{y''} \otimes 1 + x'' \otimes w_{y''} - y'' \otimes w_{x''} \tag{4.36}
 \end{aligned}$$

dir.

2) $\varepsilon_W: W \rightarrow \mathbb{C}$, $\varepsilon_W \big|_A = \varepsilon_A$, $\varepsilon_W \big|_\Omega = \varepsilon_\Omega$ şeklinde tanımlanan eş-birimin etkisi,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_W(w_x) &= \varepsilon_W(w_{x'} + w_{x''}) \\
 &= \varepsilon_W(dx' x'^{-1} + dx'' x''^{-1}) \\
 &= \varepsilon_W(dx') \varepsilon_W(x'^{-1}) + \varepsilon_W(dx'') \varepsilon_W(x''^{-1}) \\
 &= 0.1 + 0.1
 \end{aligned}$$

$$= 0 \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_W(w_y) &= \varepsilon_W(w_{y'} + w_{y''}) \\ &= \varepsilon_W(-dx' x'^{-1} y' + dy' - dx'' x''^{-1} y'' + dy'') \\ &= -\varepsilon_W(dx') \varepsilon_W(x'^{-1}) \varepsilon_W(y') + \varepsilon_W(dy') - \varepsilon_W(dx'') \varepsilon_W(x''^{-1}) \varepsilon_W(y'') + 0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

3) $S_W : W \rightarrow W$, $S_W|_A = S_A$, $S_W|_\Omega = S_\Omega$, eş-tersin etkisi,

$$S_W(w_x) = -w_{x'} - w_{x''} \quad (4.39)$$

$$S_W(w_y) = -x'^{-1} w_{y'} - x'^{-1} y' w_{x'} - x''^{-1} w_{y''} - x''^{-1} y'' w_{x''} \quad (4.40)$$

olarak belirlenir.

Bu tasvirler, $(id \otimes \Delta_W) \circ \Delta_W = (\Delta_W \otimes id) \circ \Delta_W$, $\mu \circ (\varepsilon_A \otimes id) \circ \Delta_A = id = \mu \circ (id \otimes \varepsilon_A) \circ \Delta_A$ ve $\mu \circ (S_A \otimes id) \circ \Delta_A = \varepsilon_A = \mu \circ (id \otimes S_A) \circ \Delta_A$ özdeşliklerini korur. Ayrıca, bu tasvirler, (4.34) bağıntılarını korur. Dolayısıyla, $(W, \Delta_W, \varepsilon_W, S_W)$ yapısı bir Hopf cebiri yapısına sahiptir.

4.3 Kısmi Türevlerin Cebiri

Bu kısımda, cebirin koordinat fonksiyonlarının kısmi türevlerinin; koordinat fonksiyonları, bunların diferansiyelleri ve kısmi türevlerin kendi aralarında sağlanan q-komutasyon bağıntıları ortaya konacaktır.

İlk olarak, koordinat fonksiyonları ile onların kısmi türevleri arasındaki bağıntıları elde edeceğiz. Ancak, önce bazı bilinen yapıları vermemiz gerekiyor. Çelik[5]

f , A cebiri üzerinde tanımlanmış keyfi bir fonksiyon olsun. d dış türev operatörü,

$$df = (dx \partial_x + dy \partial_y) f \quad (4.41)$$

şeklinde tanımlanır. Kısmi türevlerin koordinat fonksiyonlarıyla bağıntılarını bulabilmek için f yerine sırasıyla xf ve yf yazarak Leibniz kuralını uyguluyoruz. Açık olarak bir tanesini verelim:

$$\begin{aligned} d(xf) &= (dx)f + x(df) \\ &= (dx)f + x(dx \partial_x + dy \partial_y) f \\ &= (dx)f + (q^{-1} dx x \partial_x + dy x \partial_y) f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(dx(1 + q^{-1}x\partial_x) + dy(x\partial_y) \right) f \\
&= (dx\partial_x + dy\partial_y)(xf)
\end{aligned}$$

eşitliğinde diferansiyellerin katsayılarını eşitleyerek,

$$\partial_x x = 1 + q^{-1}x\partial_x, \quad \partial_y x = x\partial_y$$

buluruz. Bu işlemlerde (4.3) bağıntıları kullanılmıştır.

Benzer işlemler yf için de tekrarlanarak, kısmi türevlerin koordinat fonksiyonları ile değişimleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
\partial_x x &= 1 + q^{-1}x\partial_x \\
\partial_y x &= x\partial_y \\
\partial_x y &= q^{-1}y\partial_x \\
\partial_y y &= 1 + q^{-1}y\partial_y + (q^{-1} - 1)x\partial_x
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Kısmi türevlerin diferansiyellerle bağıntıları ise,

$$\begin{aligned}
\partial_x dx &= B_1 dx\partial_x + B_2 dy\partial_y \\
\partial_x dy &= B_3 dy\partial_x + B_4 dx\partial_y \\
\partial_y dx &= B_5 dx\partial_y + B_6 dy\partial_x \\
\partial_y dy &= B_7 dy\partial_y + B_8 dx\partial_x
\end{aligned} \tag{4.43}$$

denklem sisteminde $B_i, 1 \leq i \leq 8$ katsayılarının belirlenmesiyle bulunur. Bu katsayıları belirlemek için ∂_x ve ∂_y kısmi türev operatörlerini (4.3) bağıntılarına uyguluyoruz. Örneğin,

$$\begin{aligned}
xdx &= q^{-1}dxx \Rightarrow \partial_x(xdx - q^{-1}dxx) = 0 \\
&dx - q^{-1}(\partial_x dx)x = 0 \\
&dx - q^{-1}(B_1 dx\partial_x + B_2 dy\partial_y)x = 0 \\
&dx(1 - q^{-1}B_1) = 0 \\
&\Rightarrow B_1 = q, \\
xdx &= q^{-1}dxx \Rightarrow \partial_y(xdx - q^{-1}dxx) = 0 \\
&q^{-1}(\partial_y dx)x = 0 \\
&q^{-1}(B_5 dx\partial_y + B_6 dy\partial_x)x = 0
\end{aligned}$$

$$q^{-1}B_6dy = 0$$

$$\Rightarrow B_6 = 0$$

dır. Benzer işlemlerle diğer katsayılar da tespit edilerek kısmi türev operatörlerinin, diferansiyellerle değişimlerinin:

$$\begin{aligned}\partial_x dx &= qdx\partial_x + (q-1)dy\partial_y \\ \partial_x dy &= dy\partial_x \\ \partial_y dx &= qdx\partial_y \\ \partial_y dy &= qdy\partial_y\end{aligned}\tag{4.44}$$

şeklinde olduğu görülür.

Kısmi türevlerin kendi aralarındaki bağıntılar ise d operatörünün nilpotentlik şartından,

$$\partial_x \partial_y = \partial_y \partial_x\tag{4.45}$$

olarak bulunur. Kısmi türevlerin d operatörü ile bağıntıları ise,

$$\partial_x d = d\partial_x, \quad \partial_y d = d\partial_y\tag{4.46}$$

şeklindedir.

Şimdi, $x = x' + x''$ ve $y = y' + y''$ için bağıntıları verebiliriz:

$$\lambda = e^{2\pi i/3} \text{ ve } \partial_x = \partial_{x'} + \partial_{x''}, \partial_y = \partial_{y'} + \partial_{y''}\tag{4.47}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\partial_{x'} x'' &= \lambda^{-1} + q^{-1}x'' \partial_{x'} \\ \partial_{x''} x' &= \lambda + q^{-1}x' \partial_{x''} \\ \partial_{x'} y'' &= q^{-1}y'' \partial_{x'} \\ \partial_{x''} y' &= q^{-1}y' \partial_{x''} \\ \partial_{y'} x'' &= x'' \partial_{y'} \\ \partial_{y''} x' &= x' \partial_{y''} \\ \partial_{y'} y'' &= \lambda + q^{-1}y'' \partial_{y'} + (q^{-1} - 1)x'' \partial_{x'} \\ \partial_{y''} y' &= \lambda^{-1} + q^{-1}y' \partial_{y''} + (q^{-1} - 1)x' \partial_{x''} \\ \partial_{x'} dx'' &= qdx'' \partial_{x'} - \lambda(q-1)dy'' \partial_{y'} \\ \partial_{x''} dx' &= qdx' \partial_{x''} - \lambda^{-1}(q-1)dy' \partial_{y''}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{x'} dy'' &= dy'' \partial_{x'} \\
\partial_{x''} dy' &= dy' \partial_{x''} \\
\partial_{y'} dx'' &= q dx'' \partial_{y'} \\
\partial_{y''} dx' &= q dx' \partial_{y''} \\
\partial_{y'} dy'' &= q dy'' \partial_{y'} \\
\partial_{y''} dy' &= q dy' \partial_{y''} \\
\partial_{x'} \partial_{x''} &= \partial_{x''} \partial_{x'} \\
\partial_{x'} \partial_{y''} &= \partial_{y''} \partial_{x'} \\
\partial_{x''} \partial_{y'} &= \partial_{y'} \partial_{x''} \\
\partial_{y'} \partial_{y''} &= \partial_{y''} \partial_{y'}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

şeklinde. Gerçekten, bu bağıntılar, (4.43), (4.45) ve (4.46) bağıntılarıyla tam uyumludur. Birkaç tanesini gösterelim:

$$\begin{aligned}
\partial_x x &= (\partial_{x'} + \partial_{x''})(x' + x'') \\
&= \partial_{x'} x' + \partial_{x'} x'' + \partial_{x''} x' + \partial_{x''} x'' \\
&= 1 + q^{-1} x' \partial_{x'} + \lambda^{-1} + q^{-1} x'' \partial_{x'} + \lambda + q^{-1} x' \partial_{x''} + 1 + q^{-1} x'' \partial_{x''} \\
&= 2 + \lambda^{-1} + \lambda + q^{-1} (x' \partial_{x'} + x'' \partial_{x'} + x' \partial_{x''} + x'' \partial_{x''}) \\
&= 1 + q^{-1} (x' + x'') (\partial_{x'} + \partial_{x''}) \\
&= 1 + q^{-1} x \partial_x
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada, $\lambda^{-1} + \lambda = -1$ eşitliğine dikkat edilmelidir.

Bir diğer bağıntı için,

$$\begin{aligned}
\partial_x y &= (\partial_{x'} + \partial_{x''})(y' + y'') \\
&= \partial_{x'} y' + \partial_{x'} y'' + \partial_{x''} y' + \partial_{x''} y'' \\
&= q^{-1} y' \partial_{x'} + q^{-1} y'' \partial_{x'} + q^{-1} y' \partial_{x''} + q^{-1} y'' \partial_{x''} \\
&= q^{-1} (y' + y'') (\partial_{x'} + \partial_{x''})
\end{aligned}$$

dir. Başka bir tanesi ise,

$$\begin{aligned}
\partial_x dx &= (\partial_{x'} + \partial_{x''})(dx' + dx'') \\
&= \partial_{x'} dx' + \partial_{x'} dx'' + \partial_{x''} dx' + \partial_{x''} dx'' \\
&= q dx' \partial_{x'} + (q - 1) dy' \partial_{y'} + q dx'' \partial_{x'} - \lambda (q - 1) dy'' \partial_{y'} + q dx' \partial_{x''} - \\
&\quad \lambda^{-1} (q - 1) dy' \partial_{y''} + q dx'' \partial_{x''} + (q - 1) dy'' \partial_{y''}
\end{aligned}$$

BÖLÜM 5

$\mathcal{R}$ -MATRİS YAKLAŞIMI

Kuantum düzlemi oluşturan (3.1) komutasyon bağıntısı uygun bir $\mathcal{R}$ matrisi kullanılarak da elde edilebilir. Bu bölümde öncelikle kuantum düzlem için kullanılan $\mathcal{R}$ -matrisi ele alınacak, daha sonra kurmuş olduğumuz toplam vektörleri için de uygun bir $\mathcal{R}$ -matrisi verilecektir.

5.1 Kuantum Düzlem İçin $\mathcal{R}$ -Matrisi

Kuantum düzlemin q -komutatıflık bağıntısını koruyan $\mathcal{R}$ matrisi;

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Jimbo[8]. Bu matris ile

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ve } \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

düzlemin bileşenleri olan x ve y arasındaki komutasyon bağıntısı;

$$X \otimes X = q^{-1} \hat{\mathcal{R}}(X \otimes X) \tag{5.1}$$

ile verilir. Burada, $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R}\mathcal{P}$ dir.

5.2 Toplam Vektörleri İçin $\mathcal{R}$ -Matrisi

Burada, toplam vektörünün de bir kuantum vektör olması için (3.7) 'de verilen bağıntıları koruyacak uygun bir $\mathcal{R}$ -matrisi vereceğiz. Bunu yaparken toplam vektörünün (5.1) bağıntısını korumasına da dikkat edeceğiz. Aşağıdaki önermeyle uygun bir $\mathcal{R}$ -matrisi verilmiştir.

Önerme 5.1 3. Bölümde tanımlanmış olan $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ kuantum vektörlerinin toplamının da bir kuantum vektör olması için

$$\mathcal{R}'(X'' \otimes X') = \mathcal{R}^{-1}(X' \otimes X'') \quad (5.2)$$

bağıntısının sağlanması gereklidir. Burada,

$$\mathcal{R}' = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-2} - 1 & q & 0 \\ 0 & q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

dir.

$$\text{İspat: } X'' \otimes X' = \begin{pmatrix} x'' x' \\ x'' y' \\ y'' x' \\ y'' y' \end{pmatrix}, X' \otimes X'' = \begin{pmatrix} x' x'' \\ x' y'' \\ y' x'' \\ y' y'' \end{pmatrix} \text{ ve } \mathcal{R}^{-1} = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q^{-1} - q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

matrisleri (5.2) denkleminde yerine yazılıp, matrisler çarpılırsa;

$$\begin{pmatrix} q^{-1} x'' x' \\ (q^{-2} - 1) x'' y' + q y'' x' \\ q^{-1} x'' y' \\ q^{-1} y'' y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{-1} x' x'' \\ x' y'' + (q^{-1} - q) y' x'' \\ y' x'' \\ q^{-1} y' y'' \end{pmatrix}$$

elde edilir. Matris eşitliğinden, karşılıklı elemanlar eşitlenerek:

$$x' x'' = x'' x'$$

$$x' y'' = q y'' x'$$

$$y' x'' = q^{-1} x'' y'$$

$$y' y'' = y'' y'$$

bağıntıları elde edilir. Bu bağıntılar 3.bölümde ortaya konan (3.7) bağıntıları ile aynıdır. Daha önce de gösterdiğimiz gibi toplam vektörü bir kuantum vektör olur.

Ayrıca 1. ve 2. vektörlerin bileşenleri arasında yukarıdaki bağıntılar olduğunda $X = X' + X''$ toplam vektörünün bir kuantum vektör olduğu (5.1) denkleminde şu şekilde kontrol edilebilir:

$$\begin{aligned} X \otimes X &= q^{-1} \hat{\mathcal{R}}(X \otimes X) \\ &\Rightarrow (X' + X'') \otimes (X' + X'') = q^{-1} \hat{\mathcal{R}}(X' + X'') \otimes (X' + X'') \\ &\Rightarrow X' \otimes X' + X' \otimes X'' + X'' \otimes X' + X'' \otimes X'' \\ &= q^{-1} \hat{\mathcal{R}}(X' \otimes X' + X' \otimes X'' + X'' \otimes X' + X'' \otimes X'') \end{aligned}$$

Burada X' ve X'' birer kuantum vektör olduğundan $X' \otimes X' = q^{-1} \hat{\mathcal{R}} X' \otimes X'$ ve $X'' \otimes X'' = q^{-1} \hat{\mathcal{R}} X'' \otimes X''$ eşitlikleri birbirini götüreceğinden, bağıntı

$$\Rightarrow X' \otimes X'' + X'' \otimes X' = q^{-1} \hat{\mathcal{R}}(X' \otimes X'' + X'' \otimes X')$$

şekline dönüşür. Matrisler yerlerine yazılıp sağ taraftaki çarpma işlemi de yapılırsa;

$$\begin{pmatrix} x' x'' + x'' x' \\ x' y'' + x'' y' \\ y' x'' + y'' x' \\ y' y'' + y'' y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' x' + x' x'' \\ (1 - q^{-2})(x'' y' + x' y'') + q^{-1}(y'' x' + y' x'') \\ q^{-1}(x'' y' + x' y'') \\ y'' y' + y' y'' \end{pmatrix}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında istenilene ulaşılır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, kuantum vektörlerin toplamının da bir kuantum vektör olması için toplanan vektörlerin bileşenleri arasında sağlanması gereken şartlar üzerinde çalışıldı. Ortaya konan şartları sağlayan temsili matrisler ortaya konularak elde edilen yapı örneklendirildi. Elde edilen yapının bir Hopf cebiri yapısına sahip olduğu gösterildi. Daha sonra, koordinat fonksiyonlarının diferansiyelleri, 1-formlar ve kısmi türevleri tanımlanarak bunlar arasındaki komutasyon bağıntıları bulundu. Dolayısıyla elde edilen yapı için uygun bir diferansiyel geometri kuruldu. Son olarak, bu yapının oluşması için gereken şartları gösteren bir $\mathcal{R}$ -matrisi verildi.

Hiç şüphesiz, kuantum düzlemdeki vektörler için geçerli olan bu toplama işleminin kuantum süper düzlemin süper vektörlerine uygulanması ve belki de kuantum gruplara genelleştirilmeye çalışılması ilginç sonuçlar getirebilir. Bunlar, ileriki çalışmalarda ele alınacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Drinfeld, V.G., (1986). “Quantum Groups”, Proc. ICM, Berkeley, 798-820.
- [2] Manin, Yu.I., (1988). Quantum Groups and Noncommutative Geometry, Montreal University, Montreal.
- [3] Woronowicz, S.L., (1989). “Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups (Quantum Groups)”, Communications in Mathematical Physics, 122:125-170.
- [4] Wess, J. ve Zumino, B.,(1990). “Covariant Differential Calculus on the Quantum Hyperplane”, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl., 18:302-312.
- [5] Celik, S. ve Celik, S.A., (2000). “Differential Geometry of the q -Plane”, Int. J. Modern Phys., A,15:9695-9701.
- [6] Celik, S. ve Celik, S.A., (2002). “Differential Geometry of the Z_3 -Graded Quantum Superplane”, Journal of Physics, A,35:4257-4268.
- [7] Abe, E., (1977). Hopf Algebras, Cambridge University Press, Cambridge.
- [8] Jimbo, M.,(1986). “Quantum $\mathcal{R}$ Matrix for the Generalized Toda System”, Commun. Math. Phys., 102: 537-547.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Ali Osman GÖKER

Doğum Tarihi ve Yeri: 09.09.1986 Karaman

Yabancı Dili: İngilizce

E-posta: aliosmangoker@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2010
Lise	Fen bilimleri	Karaman Anadolu Lisesi	2004