

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ARCHİMEDEAN HEMEN HEMEN F-CEBİRLERİNDE SIRALI SINIRLI
TÜRETMELER**

AHMET ELMA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. ÖMER GÖK**

İSTANBUL, 2011

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ARCHİMEDEAN HEMEN HEMEN F-CEBİRLERİNDE SIRALI SINIRLI
TÜRETMELER**

Ahmet ELMA tarafından hazırlanan tez çalışması 01.08.2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Ömer GÖK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Ömer GÖK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Bülent KÖKLÜCE
Fatih Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Yusuf ZEREN
Yıldız Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Çalışmalarımın her aşamasında benden desteğini esirgemeyen, öneri ve yönlendirmeleriyle bana her konuda yardımcı olan değerli hocam Prof. Dr. Ömer Gök' e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca bütün eğitim hayatım boyunca gösterdikleri sabır, hoşgörü, maddi ve manevi destekleri için değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Temmuz, 2011

Ahmet ELMA

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	v
ÖZET	vii
ABSTRACT.....	ix
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
ÖN BİLGİLER	3
BÖLÜM 3	
TANIMLAR VE NOTASYONLAR	8
BÖLÜM 4	
ARCHİMEDEAN HEMEN HEMEN F-CEBİRLERİNDE SIRALI SINIRLI TÜRETMELER	11
BÖLÜM 5	
ARCHİMEDEAN HEMEN HEMEN F-CEBİRLERİNDE SIRALI SINIRLI YEREL TÜRETMELER .	15
BÖLÜM 6	
SONUÇ VE ÖNERİLER	20
KAYNAKLAR	21
ÖZGEÇMİŞ	23

SİMGE LİSTESİ

A^d	A kümesinin ayrık tümleyeni
clA	A' 'nın kapanışı
A^*	A normlu Riesz uzayının dual uzayı
A^+	A normlu Riesz uzayının pozitif konisi
A/B	Bölüm uzayı
$A \times A$	A ile A' 'nin Kartezyen çarpımı
Id_A	A' 'da birim operatör
$N(A)$	A operatörünün mutlak çekirdeği
$ T $	T' 'nin modülüsü
x^+	x elemanının pozitif kısmı
x^-	x elemanının negatif kısmı
$ x $	x elemanının mutlak değeri
$\bar{x}$	x elemanının koseti
0_A	A' 'nin sıfırı
$\in$	Elemanı
$\notin$	Elemanı değil
$\wedge$	İnfimum
$\vee$	Supremum
$\perp$	Dik
$\supseteq$	Kapsar veya eşit
$\downarrow$	Aşağı yönlü
$\uparrow$	Yukarı yönlü
$\xrightarrow{0}$	Sıralı yakınsama
$\oplus$	Direkt toplam
$[,]$	Sıralı aralık
$<$	Küçük
$\leq$	Küçük veya eşit
$>$	Büyük
$\geq$	Büyük veya eşit
$=$	Eşit
$\neq$	Eşit değil
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim

$\Rightarrow$	İse
$\Leftrightarrow$	Ancak ve ancak
$\subset$	Özalt küme
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\forall$	Her
$\exists$	En az bir

**ARCHİMEDEAN HEMEN HEMEN f -CEBİRLERİNDE SIRALI SINIRLI
TÜRETMELER**

Ahmet ELMA

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer GÖK

A bir Archimedean f -cebiri ve $N(A)$ A 'nın tüm nilpotent elemanlarının kümesi olsun. Colville [8] ispatlamıştır ki $D:A \rightarrow A$ pozitif lineer operatörünün bir türetme olabilmesi için gerek ve yeter koşul $D(A) \subset N(A)$ ve A^2 A 'daki tüm ab çarpımlarının kümesi olmak üzere $D(A^2) = \{0\}$ olmasıdır. Bu çalışmada Boulabiar [5] 'in sonuçlarını genelleştiren Colville- Davis- Keimel [8] teoremi ile ilgili bir Archimedean hemen hemen f -cebiri üzerindeki sıralı sınırlı bir D türetmesi için [16]'da elde edilen bir sonuç vardır.

A bir Archimedean hemen hemen f -cebiri ve $d:A \rightarrow A$ sıralı sınırlı bir yerel türetme olsun. A üzerindeki herhangi bir sıralı sınırlı yerel türetme bir ortalama operatördür, yani her $x, y \in A$ için $d(xd(y)) = d(x)d(y)$ dir. Bunun için kaynağımız [17]'dir.

Anahtar Kelimeler: Hemen hemen f -cebiri, f -cebiri, sıralı sınırlı türetme, türetme, yerel türetme

ORDER BOUNDED DERIVATIONS ON ARCHIMEDEAN ALMOST
F-ALGEBRAS

Ahmet ELMA

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Ömer GÖK

Let A be an Archimedean f -algebra and let $N(A)$ be the set of all nilpotent elements of A . Colville et al. [8] proved that a positive linear map $D: A \rightarrow A$ is a derivation if and only if $D(A) \subset N(A)$ and $D(A^2) = \{0\}$, where A^2 is the set of all products ab in A . In this paper, there is a result by [16] corresponding to the Colville- Davis- Keimel [8] theorem for an order bounded derivation D on an Archimedean almost f -algebra, which generalizes the results of Boulabiar [5].

Let A be an Archimedean almost f -algebra and let $d: A \rightarrow A$ be an order bounded local derivation. Any order bounded local derivation on A is an averaging operator, i.e., $d(xd(y)) = d(x)d(y)$ for all $x, y \in A$. Our reference is [17].

Key words: Almost f -algebra, f -algebra, order bounded derivation, derivation, local derivation

1.1 Literatür Özeti

1977’ de Colville [8] ispatlamıştır ki eğer A bir Archimedean f – cebiri ise $D:A \rightarrow A$ pozitif lineer operatörünün bir türetme olabilmesi için gerek ve yeter koşul $N(A)$ A' nın tüm nilpotent elemanlarının kümesi ve A^2 A' daki tüm ab çarpımlarının kümesi olmak üzere $D(A) \subset N(A)$ ve $D(A^2) = \{0\}$ olmasıdır. Özellikle A' da hiç nilpotent eleman yoksa A' daki tek pozitif türetme sıfırdır. Daha sonralarda Henriksen ve Smith [11] yukarıdaki sonucun farklı bir ispatını gerçekleştirdi. Son zamanlarda Boulabiar [5] Archimedean hemen hemen f – cebirleri ($a^+a^- = 0$ özelliğini sağlayan ℓ – cebirleri) üzerindeki pozitif türetmeleri çalıştı. Gerçekten, eğer D bir Archimedean f – cebiri A üzerinde bir pozitif türetme ise A^3 A' daki tüm abc çarpımlarının kümesi olmak üzere $D(A) \subset N(A)$ ve $D(A^3) = \{0\}$ olduğu gösterildi. Hepimizin de çok iyi bildiği gibi Kusraev [13] in bir evrensel tam f – cebiri üzerindeki tek sıralı sınırlı türetmenin sıfır olduğunu kanıtladığı çalışması hariç literatürde sıralı sınırlı türetmeye yeteri kadar dikkat çekilmedi.

Yerel türetme kavramı Von Neumann cebirleri ve polinom cebirleri üzerindeki yerel türetmeleri çalışan Kadison [12] tarafından ele alındı. Üstelik Kadison [12] yerel operatörler için hazırladığı çalışma programında yerel türetmelerin özel niteliklerle türetmelerin inşasında yararlı olabileceğini önerir.

1.2 Tezin Amacı

Tezimiz Archimedean f -cebirleri üzerindeki sıralı sınırlı türetmeleri ele almaktadır. Daha doğrusu, asıl olarak Colville-Davis-Keimel teoremini Archimedean f -cebirlerindeki pozitif türetmelere göre genelleştirerek Archimedean f -cebirleri ve Archimedean hemen hemen f -cebirlerinde sıralı sınırlı türetmeleri genelleştirmekle ilgilenmiştir. Üstelik bir Archimedean hemen hemen f -cebiri $N(A)=\{a \in A : a^2 = 0\}$ olduğu yerde A üzerindeki bir sıralı sınırlı D türetmesinin karakterizasyonu verilmiştir. Bu çalışma Archimedean hemen hemen f -cebirlerinde sıralı sınırlı yerel türetmelerle çalışarak Kadison [12]'nin bahsi geçen programına katkı sağlamaktadır.

Tezimiz temel olarak [16] ve [17] numaralı makalelerden yararlanılarak hazırlanmıştır. Bütün ispatlarımız sadece sıralı teorik ve doğal cebirseldir, aynı zamanda herhangi bir analitik anlam içermez. Notasyon ve terminoloji için [1], [2], [9], [10], [11] kaynaklarını öneriyoruz.

1.3 Hipotez

A bir cebir olsun. $\forall a, b \in A$ için $d(ab) = ad(b) + d(a)b$ özelliğini sağlayan $d: A \rightarrow A$ lineer operatöre A' da bir türetme denir. $\delta: A \rightarrow A$ lineer operatörü, eğer A' nın her elemanı için $\delta(a) = d_a(a)$ olacak şekilde $d_a: A \rightarrow A$ (a' ya bağlı) türetmesi mevcutsa A üzerinde bir yerel türetme olarak isimlendirilir. Özellikle, eğer A bir Archimedean hemen hemen f -cebiri ise $d: A \rightarrow A$ bir sıralı sınırlı yerel türetmedir. O zaman d A' da genelleştirilmiş bir ortalama operatördür. Yani $\forall x, y, z \in A$ için $d(xd(y))z = d(x)d(y)z$ dir. Bu yüzden A' nın bir Archimedean f -cebiri olduğu sağlanır. Gerçekten A üzerinde herhangi bir sıralı sınırlı yerel türetme bir ortalama operatördür. Yani $\forall x, y \in A$ için $d(xd(y)) = d(x)d(y)$ dir.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

İlk olarak çalışmamızda çok sık kullanacağımız kavramların tanımlarını vereceğiz.

Tanım 2.1 Bir E reel vektör uzayı, cebirsel yapısıyla uyumlu olan bir $\geq$ sıralama bağıntısı ile donatılmış ($\geq$ yansılmalı, anti simetrik, geçişmeli) ise ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyorsa E' ye sıralı vektör uzayı denir.

(1) Her $z \in E$ için $x \leq y$ ise $x + z \leq y + z$ dir.

(2) Her $\alpha \geq 0$ için $x \leq y$ ise $\alpha x \leq \alpha y$ dir.

Tanım 2.2 E , sıralı vektör uzayı olmak üzere, E' nin bütün pozitif elemanlarının kümesi E^+ ile gösterilir. Yani, $E^+ := \{x \in E : x \geq 0\}$ dir ve E' nin konisi denir.

Tanım 2.3 E ve F sıralı vektör uzayları arasında bir $T : E \rightarrow F$ operatörü tanımlansın. Her $x \geq 0$ için $T(x) \geq 0$ oluyorsa T' ye pozitif opeatör denir. $T \geq 0$ ile gösterilir.

Tanım 2.4 E , bir sıralı vektör uzayı olsun. $x, y \in E$ elemanlarının her sıralı ikilisi için E' de $\{x, y\}$ kümesinin supremumu ve infimumu mevcut ise E' ye Riesz Uzayı (veya vektör latis) denir.

$$x \vee y = \sup\{x, y\}$$

$$x \wedge y = \inf\{x, y\}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.5 Bir Riesz uzayında $|x| \wedge |y| = 0$ şartını sağlayan x ve y elemanlarına ayrık denir ve $x \perp y$ ile gösterilir.

Tanım 2.6 Eğer A , bir E Riesz uzayının boş olmayan bir alt kümesi ise A' nın A^d ayrık tümleyeni $A^d := \{x \in E : \text{her } y \in A \text{ için } x \perp y\}$ ile tanımlanır.

Tanım 2.7 X bir küme ve $\wedge$ yönlendirilmiş küme olmak üzere $\wedge$ üzerinde tanımlı her $f : \wedge \rightarrow X$ fonksiyonuna X' de bir ağ veya net denir. $\lambda \in \wedge$ için $f(\lambda) = x_\lambda \in X$ şeklinde veya (x_λ) şeklinde gösterilir. $\alpha \geq \beta$ olduğunda $x_\alpha \geq x_\beta$ oluyorsa bir Riesz uzayındaki bir $\{x_\alpha\}$ ağına azalan denir ve $x_\alpha \downarrow$ ile gösterilir. $x_\alpha \downarrow x$ notasyonu $x_\alpha \downarrow$ ve $\inf\{x_\alpha\} = x$ anlamındadır.

Tanım 2.8 Archimede özelliği, her $x > 0$ reel sayısı için $\{nx\}$ dizisinin R' de yukarıdan sınırsızlığını ifade eder. Bu her $x > 0$ için R' de $n^{-1}x \downarrow 0$ olmasıyla eşdeğerdir. Her $x \in E^+$ için E' de $n^{-1}x \downarrow 0$ oluyorsa E Riesz uzayına Archimede denir.

Tanım 2.9 E ve F Riesz uzayları arasında tanımlı bir $T : E \rightarrow F$ operatörü için, $|T| := T \vee (-T)$ oluyorsa $|T|'$ ye T' nin modülü denir. $(|T| L(EF))'$ de $\{T, -T\}$ kümesinin supremumudur).

Tanım 2.10 x ve y elemanları $x \leq y$ olacak şekilde bir E Riesz uzayının elemanları ise, $[x, y]$ sıralı aralığı $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ alt kümesiyle tanımlanır.

Her $y \in A$ için $y \leq x$ eşitsizliğini sağlayan bir x varsa bir Riesz uzayının A alt kümesine yukarıdan sınırlıdır denir. Benzer şekilde, her $y \in A$ için $x \leq y$ eşitsizliğini sağlayan bir x varsa bir Riesz uzayının A alt kümesine aşağıdan sınırlıdır denir. Bir A kümesi aşağıdan ve yukarıdan sınırlı (veya denk olarak, A bir sıralı aralıkta kapsanır) ise sıralı sınırlı olarak adlandırılır.

Bir $T : E \rightarrow F$ operatörü, E' nin sıralı sınırlı alt kümelerini F' nin sıralı sınırlı alt kümeleri üzerine gönderiyorsa sıralı sınırlı olarak adlandırılır.

Tanım 2.11 Yukarıdan sınırlı her boş olmayan alt kümesi için bir supremumu olan (veya denk olarak, aşağıdan sınırlı her boş olmayan alt kümesi için bir infimumu olan) bir Riesz uzayı Dedekind Tam olarak adlandırılır.

E ve F , Dedekind tam Riesz uzayları olduğunda her $x \in E^+$ için her sıralı sınırlı $T : E \rightarrow F$ operatörü için aşağıdakiler sağlanır:

$$|T|(x) = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$$

$$T^+(x) = \sup\{Ty : 0 \leq y \leq x\}$$

$$T^-(x) = \sup\{-Ty : 0 \leq y \leq x\}$$

Tanım 2.12 G bir E Riesz uzayının vektör altuzayı olsun. Eğer G , E' nin latis işlemlerinin altında kapalı yani, E' de alınan $x, y \in G$ elemanlarının her ikilisi için $x \vee y$ G' ye ait olduğunda G' ye Riesz altuzayı denir.

Tanım 2.13 $|x| \leq |y|$ ve $y \in A$ olduğunda $x \in A$ oluyorsa bir Riesz uzayının bir A alt kümesine solid denir. Bir Riesz uzayının bir solid vektör altuzayı sıralı ideal olarak adlandırılır.

Tanım 2.14 $x \leq y$ olmakla birlikte her $x \in E$ için bir $y \in G$ var olduğunda bir E Riesz uzayının bir G vektör altuzayına majorize E denir.

Tanım 2.15 Bir Riesz uzayında bir $\{x_\alpha\}$ ağı olsun. Her α için $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ olacak biçimde bir $\{y_\alpha\}$ ağı var ki, $y_\alpha \downarrow 0$ ise $\{x_\alpha\}$ ağı x' e sıralı yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ ile gösterilir (Kısaca, $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$).

Tanım 2.16 $\{x_\alpha\} \subseteq A$ ve $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ olduğunda $x \in A$ ise bir Riesz uzayının bir A alt kümesine sıralı kapalıdır denir. Sıralı kapalı bir ideal, bir band olarak adlandırılır.

Tanım 2.17 İki Riesz uzayı arasında tanımlı $T : E \rightarrow F$ operatörüne, her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ veya $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$ oluyorsa, T bir latis homomorfizmasıdır denir.

Tanım 2.18 Bir A vektör uzayı, her $x, y, z \in A$ ve her α skaleri için,

$$(1) (xy)z = x(yz) \text{ ve } (\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$$

$$(2) x(y+z) = xy + xz \text{ ve } (x+y)z = xz + yz$$

Özelliklerini sağlayan bir ikili işlem $(x, y) \rightarrow xy$ (çarpım) ile donatılmış ise, A' ya bir cebir denir.

Tanım 2.19 A bir birleşme özelliğine sahip (değişme özelliğine sahip olması gerekli olmayan) bir vektör latis cebir öyle ki, her $0 \leq x, y \in A$ için $0 \leq xy$ ise A' ya latis sıralı cebir (veya l -cebiri) denir. Her $0 \leq x, y \in A$ için $0 \leq xy$ olması $|xy| \leq |x||y|$ olmasına denktir.

Tanım 2.20 Bir l -cebiri A' ya eğer $x \wedge y = 0$ ve $0 \leq z \in A$ iken $xz \wedge y = zx \wedge y = 0$ oluyorsa bir f -cebiri denir.

Tanım 2.21 Bir l -cebiri A' ya eğer $x \wedge y = 0$ iken $xy = 0$ oluyorsa hemen hemen f -cebiri denir. Herhangi bir f -cebiri hemen hemen f -cebiridir. Fakat tam tersi doğru değildir. Archimedean (hemen hemen) f -cebirleri değişmelidir (eğer f -cebiri durumundaysa birleşme özelliği de vardır.) Eğer A hemen hemen f -cebiri ise her $x \in A$ için $xx^+ \geq 0$ ve $x^2 \geq 0$ dir.

Tanım 2.22 π L' den L' ye bir operatör olsun. L' nin her B bandı için, eğer $\pi(B) \subset B$ ise π' ye bandı koruyan bir operatör denir.

Tanım 2.23 L' nin bandlarını koruyan sıralı sınırlı bir operatöre L üzerinde bir ortomorfizma denir. Ortomorfizmaların kümesi $Orth(L)$ ile gösterilir.

Tanım 2.24 A bir f -cebiri ve $a \in A$ olsun. Eğer bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $a^k = 0$ olduğunda $a = 0$ sağlanıyorsa A' ya yarı asal denir.

Tanım 2.25 A bir latis cebiri ve $a \in A$ olsun. $a \perp e$ olduğunda $a = 0$ veya $a \wedge e = 0$ olduğunda $a = 0$ oluyorsa bu e elemanına A' nın sıralı zayıf birim elemanı, veya kısaca zayıf birim elemanı denir. $\{e\}^d = \{a \in A : a \perp e\} \neq \emptyset$ ile gösterilir.

Tanım 2.26 Bir A Riesz uzayının bir alt vektör uzayı X olsun. $x \in X$, $y \in A$ için $|y| \leq |x|$ olduğunda $x \in A$ oluyorsa X 'e bir sıralı ideal, veya kısaca , ideal denir. (X bir idealdir $\Leftrightarrow \forall x, y \in X$ için $x \wedge y \in X$)

BÖLÜM 3

TANIMLAR VE NOTASYONLAR

Gereksiz tekrarlamalara karşı çalışmamız süresince tüm vektör latilerinin ve ℓ -cebirlerinin Archimedean olduğu varsayılmıştır, (Yani, $\forall a, b \in A^+$ için $na \leq b$ ve $n = 1, 2, \dots$ iken $a = 0_A$).

Konuyla ilgili olarak bazı kavramları hatırlayalım. A ve B vektör latileri üzerinde tanımlı, $T: A \rightarrow B$ lineer operatörü eğer $T(A^+) \subset B^+$ ise T' ye pozitif denir,

($T \in L^+(A, B)$ veya $T \in L^+(A)$ eğer $A=B$ ise). Eğer $T \in L(A, B)$ lineer operatörü A' nın sıralı sınırlı altkümelerini B' nin sıralı sınırlı altkümelerine örterek eşliyorsa T' ye sıralı sınırlıdır denir.

f -cebirleri ve hemen hemen f -cebirleri hakkındaki bazı temel bilgileri ve tanımları hatırlayalım. Bu konuyla alakalı daha fazla bilgi için referanslardan [1,2,11,7,12] öneriyoruz. Bir A , kısmi sıralılığı ve A' da çarpımsallığı sağlayan (yani, $a, b \in A^+$ için $ab \in A^+$) vektör latis cebirine latis sıralı cebir denir, (ve ℓ -cebiri şeklinde ifade edilir). Bir ℓ -cebiri A' da A' nın tüm nilpotent elemanlarının koleksiyonunu $N(A)$ ile belirteceğiz. Eğer $N(A)=0$ ise ℓ -cebiri A' ya yarı asal denir. Bir ℓ -cebiri A , $a \wedge b = 0$ ve $c \geq 0$ için $ac \wedge b = ca \wedge b = 0$ özelliğini sağlıyorsa bu A latis cebirine f -cebiri denir. Herhangi bir f -cebiri değişmelidir ve pozitif karelere sahiptir. Eğer $a \wedge b = 0$ iken $ab=0$ ise ℓ -cebiri A' ya bir hemen hemen f -cebiri denir. Hemen hemen f -cebirleri ve f -cebirleri değişmelidir ve pozitif karelere sahiptir.

Bu bölüm vektör latileri üzerinde lineer operatörlerle alakalı bazı tanımlara ayrılmıştır.

A ve B vektör latileri olsun. $A \times A$ dan B' ye ψ lineer operatörü $(a, b) \in A^+ \times A^+$ için

$\psi(a,b) \in B^+$ ise pozitif olarak isimlendirilir. Eğer her $(a,b) \in A \times A$ için $a \wedge b = 0$ iken $\psi(a,b) = 0$ olacak şekilde bir $\psi: A \times A \rightarrow B'$ lineer operatörüne ortosimetrik denir, [6].

Eğer bir A vektör latisinin (veya Riesz uzayı) pozitif konisi $A^+ = \{a \in A; a \geq 0_A\}$ çarpma işlemi altında kapalıysa yani, $a, b \in A^+$ iken $ab \in A^+$ oluyorsa A' ya latis sıralı cebir denir. (veya ℓ -cebiri şeklinde ifade edilir.)

Bir ℓ -cebiri A' da A' nın tüm nilpotent elemanlarının koleksiyonunu $N(A)$ ile belirteceğiz. Eğer $N(A) = 0$ ise ℓ -cebiri A ya yarıasal denir. Eğer A , $a \wedge b = 0_A$ ve $c \geq 0_A$ iken $ac \wedge b = ca \wedge b = 0_A$ özelliğini sağlıyorsa A ya f -cebiri denir.

f -cebiri kavramının ilk olarak 1956' da Birkhoff ve Pierce [4] tarafından ortaya çıkarılışından on yıl sonra Birkhoff [3] tarafından hemen hemen f -cebirleri sınıfları tanııştırıldı. Genellikle bu cebir sınıfları ayrıktır fakat aralarında ilişkiler vardır. Örneğin her f -cebirinin bir hemen hemen f -cebiri olduğu açıktır. Her Archimedean f -cebiri değişmelidir.

Böylece [2, Teorem 2.15]' ten her Archimedean f -cebiri değişmelidir ve pozitif karelere sahiptir.

A ve B vektör latisleri olmak üzere $T: A \rightarrow B$ lineer operatörü eğer $T(A^+) \subset B^+$ ise pozitif olarak isimlendirilir. Bir $T \in L(A, B)$ lineer operatörü eğer A nın sıralı sınırlı alt kümelerini B nin sıralı sınırlı alt kümelerine örterek eşliyorsa T ye sıralı sınırlı denir.

Yani $\forall a \in A^+$ için $|T(x)| \leq b$ olacak şekilde her $|x| \leq a$ için $b \in B^+$ varsa

$|T(x)| = T(x) \vee -(T(x))$ dir.

A vektör latisi üzerinde bir π pozitif operatörü $x \wedge y = 0_A$ iken $\pi(x) \wedge y = 0_A$ sağlıyorsa pozitif ortomorfizma olarak isimlendirilir. İki pozitif ortomorfizmanın farkına ortomorfizma denir.

Bu bölümü vektör latisleri üzerindeki lineer operatörler hakkındaki bazı tanımlarla bitiriyoruz.

A ve B vektör latileri olsun. AxA dan B ye bir ψ lineer operatörü eğer,

$\forall (a,b) \in A^+xA^+$ için $0_B \leq \psi(a,b)$ sağlıyorsa pozitifdir denir.

ψ nin sıralı sınırlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul ψ nin AxA nın sıralı sınırlı alt kümelerini B nin sıralı sınırlı alt kümelerine örterek eşlemesidir, yani $\forall a,b \in A^+$ için , $\forall (|x|,|y|) \leq (a,b)$ için $|T(x,y)| \leq c$ olacak şekilde $c \in B^+$ vardır.

AxA dan B ye bir ψ lineer operatörü $\forall (a,b) \in AxA$ için $a \wedge b = 0_A$ iken $\psi(a,b) = 0_B$ varsa ortosimetrik olarak isimlendirilir, [7].

ARCHİMEDEAN HEMEN HEMEN f -CEBİRLERİNDE SIRALI SINIRLI TÜRETMELER

Asıl amacımız Colville- Davis- Keimel [8] teoremindeki gibi bir sonucu f -cebirleri ve hemen hemen f -cebirleri üzerindeki sıralı sınırlı türetmeler için gerçekleştirmektir. Sıradaki önerme temel sonuçlarımız için gereklidir.

Önerme 4.1 A bir hemen hemen f -cebiri ve $D:A \rightarrow A$ bir sıralı sınırlı türetme olsun. $x \wedge y=0$ iken $(D(x)y)^2 = (xD(y))^2 = 0$ dır.

İspat: $x \wedge y=0$ olacak şekilde $x, y \in A$ olsun. O zaman $xy=0$ dır. Böylece

$$\begin{aligned} (D(x)y + xD(y))^2 &= (D(x)y)^2 + (xD(y))^2 + 2xyD(x)D(y) \\ &= (D(x)y)^2 + (xD(y))^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Bu da $(D(x)y)^2 + (xD(y))^2 = 0$ verir ki bu da nihai sonuçtur.

Sıradaki sonuç önceki önermeden hemen çıkarılabilir bir sonuçtur.

Sonuç 4.1 A bir hemen hemen f -cebiri ve $D:A \rightarrow A$ bir sıralı sınırlı türetme olsun.

$x \wedge y=0$ sağlayacak şekilde $\forall x, y, z \in A$ için $D(x)yz = xD(y)z = 0$ dır.

İspat: İspat Diem [10, Teorem 3.9 (i)] den hemen görülür.

Sıradaki önerme yukarıdaki sonuçların ilginç ve sürpriz bir sonucudur.

Önerme 4.2 A bir hemen hemen f -cebiri ve $D:A \rightarrow A$ bir sıralı sınırlı türetme olsun.

$\forall x, y, z \in A$ için $D(xyz) = 3D(x)yz = 3xD(y)z = 3xyD(z)$ dir.

İspat: $z \in A$ olsun ve $\psi_z : AxA \rightarrow A \quad \forall x,y \in A$ için $\psi_z(x,y) = D(x)yz$ şeklinde tanımlansın. Yukarıdaki sonuçtan açıktır ki ψ_z bir sıralı sınırlı ortosimetrik lineer operatördür. [7, Teorem 3.4] ten ψ_z simetriktir. Sonuç olarak $\forall x,y \in A$ için $D(x)yz = D(y)xz = D(z)xy$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} D(xyz) &= D(x)yz + xD(y)z + xyD(z) \\ &= 3D(x)yz \end{aligned}$$

sağlanır.

Sıradaki sonuç yukarıdaki iddiaların bir sonucudur.

Sonuç 4.2 A bir hemen hemen f -cebiri ve $D:A \rightarrow A$ bir sıralı sınırlı türetme olsun. $\forall x,y,z \in A$ için

$$D(xy)z = 2D(x)yz = 2xD(y)z = 2xyD(z) \text{ dir.}$$

İspat: $\forall x,y,z \in A$ için $D(xy)z = D(x)yz + xD(y)z$ dir. nceki nermeden

$$D(xy)z = 2D(x)yz = 2xD(y)z = 2xyD(z)$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmıř olur.

Sıradaki nerme Teorem 1' i ispatlamak için gereklidir.

Önerme 4.3 A bir hemen hemen f -cebiri ve $D:A \rightarrow A$ bir sıralı sınırlı türetme olsun. $\forall x,y \in A$ için $D(xy)xy = 0$ dir.

İspat: $x,y,z \in A$ olsun. Yukarıdaki sonuçtan $D(xy)z = 2D(x)yz = 2xyD(z)$ olduğunu biliyoruz. Özellikle $z = xy$ olursa $D(xy)xy = 2xyD(xy) = 2D(xy)xy$ elde ederiz.

Sonuç olarak $D(xy)xy = 0$ buluruz.

İlk ana teoremimizin ispatı için tüm n gerektirmeleri topladık.

Teorem 4.1 A bir hemen hemen f -cebiri ve $D:A \rightarrow A$ bir sıralı sınırlı türetme olsun. $\forall x,y \in A$ için

$$(D(xy))^2 = 0 \text{ ve } D(x) \in N(A) \text{ dır.}$$

İspat: $x,y \in A$ olsun.

$$\begin{aligned} (D(xy))^2 &= D(xy) (D(x)y + xD(y)) \\ &= D(xy) D(x)y + D(xy) xD(y) \end{aligned}$$

olduğundan

$$D(xy) D(x)y = xyD(x) D(y) \text{ ve } D(xy) xD(y) = xyD(x) D(y)$$

$$(D(xy))^2 = 2xyD(x) D(y) \quad (1)$$

Dahası $D(xy)xy = 0$ olduğundan $D(xy)xy = xyxD(y) = 0$ eşitliğine sahibiz. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} D(xyxD(y)) &= D(x)yxD(y) + xD(yxD(y)) \\ &= D(x) D(y)xy + xD(xy) D(y) + xxyD^2(y) \\ &= D(x) D(y)xy + D(x) D(xy)y + D(x) xyD(y) \\ &= 3xyD(x) D(y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$xyD(x) D(y) = 0 \quad (2)$$

elde ederiz.

(1) ve (2) numaralı eşitliklerinin basit bir kombinasyonuyla $(D(xy))^2 = 0$ elde ederiz.

Geriye $\forall x \in A$ için $D(x) \in N(A)$ olduğunu ispatlamak kalıyor. Sonuç için $(D(xy))^2 = 0$ olduğundan Diem [10, Teorem 3.9 (i)] ile $\forall x,y,z \in A$ için $D(xy)z = 0$ dır. Önerme 2' den $D(xyz) = 3D(x)yz$ elimizde mevcut ve Sonuç 2' den

$$D(xy)z = 2D(x)yz = 2xD(y)z = 2xyD(z) \text{ çıkartılır.}$$

Bu sebepten $\forall x,y,z \in A$ için $D(xyz) = 0$ dır. Özellikle eğer $y=z = D(x)$ ise $(D(x))^3 = 0$ yani $D(x) \in N(A)$ dır.

Şimdi hemen hemen f -cebiri üzerindeki sıralı sınırlı türetmeler için Coulville-Davis- Keimel [8] teroeminin genelleştirilmiş versiyonu verilebilir. İspat Teorem 1' in ispatına benzer olduğu için yapılmamıştır.

Teorem 4.2 A bir hemen hemen f -cebiri ve $D:A \rightarrow A$ bir sıralı sınırlı türetme olsun.

$\forall x,y,z \in A$ için $D(xyz) = 0$ ve $D(x) \in N(A)$ dır.

Sonuç 4.3 ([5], Teorem 3) A bir hemen hemen f -cebiri ve $D:A \rightarrow A$ bir pozitif türetme olsun. O zaman $\forall x,y,z \in A$ için $D(xyz)=0$ ve $D(x) \in N(A)$ dir.

Sıradaki örnek önceki teoremlerin terslerinin yanlış olduğunu göstermektedir.

Örnek 4.1 $A=C([0,1])$ noktasal toplam ve sıralama ile döşenmiş $[0,1]$ aralığındaki tüm reel değerli sürekli fonksiyonların koleksiyonu olarak alınsın. A üzerinde $*$ çarpımı

$$(f * g)(t) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (t - \frac{1}{2})f(t - \frac{1}{2})g(t - \frac{1}{2}); & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \text{ ile tanımlansın.}$$

$\forall f, g, h \in A$ için $f * g * h = 0$ olacak şekilde A' nin $*$ çarpımsallığına göre bir hemen hemen f -cebiri dir. $D:A \rightarrow A$ $\forall t \in [0,1]$ için $D(f)(t) = (\frac{1}{2} - t)f(t)$ ile tanımlı sıralı sınırlı lineer operatör olsun. $\forall f, g, h \in A$ için $D(x) \in N(A)$, $(D(f * g))^2 = 0$ ve $D(f * g * h) = 0$ olmasına rağmen D bir türetme değildir.

Şimdi bir sıralı sınırlı lineer operatörünün türetme olabilmesi için gerekli ve yeterli bir koşulu sağlanacaktır.

Teorem 4.3 A $N(A) = \{a \in A : a^2 = 0\}$ gibi bir hemen hemen f -cebiri ve $D:A \rightarrow A$ sıralı sınırlı bir lineer operatör olsun. D' nin A üzerinde bir türetme olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall x,y \in A$ için $D(xy)=0$ ve $D(x) \in N(A)$ olmasıdır.

İspat: [10, Teorem 3.9 (i)] ile gerek koşul aşıkardığından yeter koşul ispatlanacaktır.

$D(x) \in N(A) = \{a \in A : a^2 = 0\}$ olduğundan [10, Teorem 3.9 (i)] ile

$\forall x,y \in A$ için $D(x)y = x D(y) = 0$ dir. Buradan da

$$\forall x,y \in A \text{ için } D(xy) = D(x)y + x D(y) = 0$$

Bundan dolayı D bir türetmedir. Bu bize istenen sonucu verir.

Sonuç 4.4 A bir f -cebiri ve $D:A \rightarrow A$ bir sıralı sınırlı lineer operatör olsun. D' nin türetme olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall x,y \in A$ için $D(xy)=0$ ve $D(x) \in N(A)$ olmasıdır.

Sonuç 4.5 A bir yarı asal f -cebiri ise A' daki tek sıralı sınırlı türetme sıfırdır.

ARCHİMEDEAN HEMEN HEMEN f -CEBİRLERİNDE SIRALI SINIRLI YEREL TÜRETMELER

Bu bölümde, Archimedean hemen hemen f -cebirlерinde sıralı sınırlı yerel türetmeleri düşüneceğiz. Genel olarak hemen hemen f -cebirlерinde bir sıralı sınırlı yerel türetmenin bir türetme olmadığını söyleriz. Bu sıradaki örnek ile gösterilmiştir.

Örnek 5.1 Olağan işlemlerle ve sırayla $A = \mathbb{R}^2$ alalım. Her $(a, b), (a', b') \in A$ için $(a, b) * (a', b') = (0, aa')$ çarpma işlemini tanımlayalım. Basit bir doğrulama gösterir ki A * çarpması altında bir hemen hemen f -cebiriştir. $d: A \rightarrow A$ lineer operatörü $\forall (a, b) \in A$ için $d((a, b)) = (a, 2b)$ ile tanımlansın. d nin türetme olduğunu göstermek kolaydır. Dahası Id_A ile gösterilen A 'nın birim operatörü bir sıralı sınırlı yerel türetmedir. Gerçekten $\forall (a, b) \in A$ için $Id_A((a, b)) = d((a, b/2))$ dir. Fakat Id_A A da bir türetme değildir.

Sıradaki önermeler temel sonuçlarımız için gereklidir.

Önerme 5.1 A bir Archimedean hemen hemen f -cebiri ve $d: A \rightarrow A$ bir sıralı sınırlı yerel türetme olsun. O zaman $\forall x, y, z \in A$ için $x \wedge y = 0_A$ ile $d(x)yz = xd(y)z = 0_A$ dır.

İspat: $d: A \rightarrow A$ bir sıralı sınırlı yerel türetme ve $x \wedge y = 0_A$ olacak şekilde $x, y \in A$ olsun. Bundan dolayı $xy = 0_A$ dır. Buradan $d(x)y = \delta_x(x)y$ olacak şekilde bir δ_x türetmesi vardır. $0_A = \delta_x(xy) = \delta_x(x)y + x\delta_x(y)$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0_A &= (\delta_x(x)y + x\delta_x(y))^2 \\ &= (\delta_x(x)y)^2 + (x\delta_x(y))^2 + 2xy\delta_x(x)\delta_x(y) \end{aligned}$$

olur. $xy = 0_A$ olduğundan $(\delta_x(x)y)^2 + (x\delta_x(y))^2 = 0_A$ olur. Sonuç olarak

$a = (\delta_x(x)y)^+ = (\delta_x x(y)) \vee 0$ ve $b = (\delta_x(x)y)^- = (-\delta_x x(y)) \vee 0$ alırsak $a \wedge b = 0_A$ olduğundan $ab = 0_A$ dır. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} 0_A &= (\delta_x(x)y)^2 \\ &= (a-b)^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Bundan dolayı $a^2 = b^2 = 0_A$.

$a^2, b^2 \in A$ olduğundan ([10] Teorem 3.9 (i)) kullanılarak $\forall z \in A$ için $az = bz = 0_A$ elde edilir.

$\forall z \in A$ için $\delta_x(x)yz = 0_A$ buradan

$\forall x, y, z \in A$ için $x \wedge y = 0_A$ özelliği ile $d_x(x)yz = 0_A$ dır. Aynı argümanı kullanarak $\forall x, y, z \in A$ için $x \wedge y = 0_A$ özelliği ile $xd(y)z = 0_A$ olduğu ispatlanır.

Önerme 5.2 A bir Archimedean hemen hemen f -cebiri ve $d: A \rightarrow A$ bir sıralı sınırlı yerel türetme olsun. O zaman $\forall x, y, z \in A$ için $d(x)yz = xd(y)z = xyd(z)$ dir.

İspat: $z \in A$ olsun, o zaman önceki önermeye göre $\forall x, y \in A$ için $\psi_z(x, y) = d(x)yz$ ile tanımlanan $\psi_z: AxA \rightarrow A$ lineer operatörü ortosimetriktir. ψ_z in sıralı sınırlı olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten $(|x|, |y|) \leq (a, b) \in AxA$ olsun. d sıralı sınırlı olduğundan $\forall (|x|, |y|) \leq (a, b) \in AxA$ için $|d(x)| \leq c$ olacak şekilde $c \in A^+$ vardır. Sonuç olarak $\forall (|x|, |y|) \leq (a, b) \in AxA$ için

$$\begin{aligned} |\psi_z(x, y)| &= |d(x)yz| \\ &= |d(x)||y||z| \\ &\leq cb|z| \end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı ψ_z sıralı sınırlıdır. Bu yüzden ortosimetrik sıralı sınırlı bir lineer operatör simetriktir. Bu nedenle ψ_z simetriktir. Sonuç olarak $\forall x, y, z \in A$ için

$$\begin{aligned}
d(x)yz &= d(y)x \\
&= \psi_x(y, z) \\
&= \psi_x(z, y) \\
&= d(z)xy
\end{aligned}$$

Önerme 5.3 A bir Archimedean hemen hemen f – cebiri ve $d:A \rightarrow A$ bir sıralı sınırlı yerel türetme olsun. O zaman $\forall x, y, z \in A$ için $d(xy)z = xd(yz) = yd(xz)$ dir.

İspat: $x \in A$ olsun. $\forall y, z \in A$ için $\psi_x(y, z) = d(xy)z$ ile tanımlanan $\psi_x : Ax A \rightarrow A$ çoklu lineer operatörünün sıralı sınırlı ortosimetrik olduğunu iddia ediyoruz. Önerme 2' nin ispatındaki argümanı kullanarak ψ_x in sıralı sınırlı olduğu sonucunu çıkartıyoruz. $y \wedge z = 0$ olacak şekilde $y, z \in A$ seçelim, o halde $yz = 0$ dir. $d:A \rightarrow A$ bir sıralı sınırlı yerel türetme olduğundan

$$\begin{aligned}
d(x y)z &= \delta_{xy}(xy)z \\
&= \delta_{xy}(x)y z + \delta_{xy}(y)xz
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir δ_{xy} türetmesi mevcuttur. $y \wedge z = 0$ olduğundan $yz = 0_A$ dir ve böylece $d(xy)z = \delta_{xy}(y)xz$ olur. Üstelik $0_A = \delta_{xy}(yz) = \delta_{xy}(y)z + \delta_{xy}(z)y$ dir. Sonuç olarak

$$0_A = (\delta_{xy}(y)z + \delta_{xy}(z)y)^2 = (\delta_{xy}(y)z)^2 + (\delta_{xy}(z)y)^2 \text{ dir. O zaman}$$

$$(\delta_{xy}(y)z)^2 = (\delta_{xy}(z)y)^2 = 0_A \text{ dir. Önerme 2' nin ispatındaki mantık ve ([10], Teorem 3.9}$$

(i)) ile $\forall t \in A$ için $\delta_{xy}(y)zt = 0_A$ elde edilir. Bu sebepten $d(xy)z = \delta_{xy}(y)xz = 0_A$ dir.

Böylece ψ_x sıralı sınırlı ortosimetriktir. [6] ve [7] ye göre ψ_x simetriktir. Burdan

$$\forall x, y, z \in A \text{ için}$$

$$\begin{aligned}
\psi_x(y, z) &= d(xy)z \\
&= \psi_x(z, y) \\
&= d(xz)y \\
&= \psi_z(x, y) \\
&= \psi_z(y, x) \\
&= xd(yz) \\
&= yd(xz)
\end{aligned}$$

olur.

Ana teoremimizin ispatı için tüm ön gerektirmeler toplandı.

Teorem 5.1 A bir Archimedean hemen hemen f -cebiri ve $d:A \rightarrow A$ bir sıralı sınırlı yerel türetme olsun. O zaman d A üzerinde bir genelleştirilmiş ortalama operatördür, yani $\forall x, y, z \in A$ için $d(xd(y))z = d(x)d(y)z$ dir.

İspat: $x, y, z, t \in A$ olsun. Önceki önermeden

$$\begin{aligned} d(xy)zt &= d(z)xyt \\ &= d(x)yzt \end{aligned}$$

Sonuç olarak $\forall x, y, z, t \in A$ için $(d(xy)z - d(x)yz)t = 0_A$ dir. Burdan da

$(d(xy)z - d(x)yz)^2 = 0_A$ olur. $N_2(A) = \{a \in A; a^2 = 0\}$ olsun. $A/N_2(A)$ nın bir Archimedean f -cebiri olduğunu göstermek kolaydır. (burada, $\bar{x} = x + N_2(A)$ kosetini belirtmektedir.) Bu yüzden $\overline{d(xy)z - d(x)yz} = \bar{0}_A$ dir. Böylece $\forall x, y, z \in A$ için $\overline{(d(xy) - d(x)y)z} = \bar{0}_A$ olur.

Özellikle $\bar{z} = \overline{d(xy)} - \overline{d(x)y}$ olursa $\overline{d(xy)} - \overline{d(x)y} \in N(A/N_2(A))$ elde ederiz. İyi bilindiği gibi eğer B bir Archimedean f -cebiri ise $N(B)^d = \{x \in B, \forall y \in N(B), |x| \wedge |y| = 0_B\}$ iken $\forall a, b \in B$ için $ab \in N(B)^d$ dir. ([9], Önerme 10.2) $\overline{d(x)y} = \overline{d(x)}\bar{y}$ olduğundan $\overline{d(x)y} \in (N(A/N_2(A)))^d$ dir.

Üstelik d bir yerel türetme olduğundan $d(xy) = \delta_{xy}(xy) = \delta_{xy}(x)y + x\delta_{xy}(y)$ olacak şekilde A üzerinde bir δ_{xy} türetmesi mevcuttur.

Bundan dolayı $\overline{d(xy)} = \overline{\delta_{xy}(x)y + x\delta_{xy}(y)} \in (N(A/N_2(A)))^d$ dir.

Sonuç olarak $\overline{d(xy)} - \overline{d(x)y} \in N(A/N_2(A)) \cap (N(A/N_2(A)))^d$,

buradan $\overline{d(xy)} - \overline{d(x)y} = \bar{0}_A$ dir. Buradan da $(d(xy) - d(x)y)^2 = 0_A$ olur.

([10], Teorem 3.9 (i)) ile $d(xy)z - d(x)yz = 0_A$ elde edilir. Bu yüzden $\forall x, y, z \in A$ için $d(xd(y))z = d(x)d(y)z$ olur.

Sonuç 5.1 A bir Archimedean f -cebiri ve $d:A \rightarrow A$ bir sıralı sınırlı yerel türetme olsun. O zaman d A üzerinde bir ortalama operatördür, yani $\forall x, y \in A$ için $d(xd(y)) = d(x)d(y)$ dir.

İspat: $x, y, z \in A$ olsun. Bir önceki teoremin ispatından $(d(xy)z - d(x)yz)^2 = 0_A$ olduğu görülür. Özellikle $z = d(xy) - d(x)y$ olursa $d(xy) - d(x)y \in N(A)$ elde ederiz. $d(xy) - d(x)y \in (N(A))^d$ olduğundan ([9], Önerme 10.2) $\forall x, y \in A$ için $d(xy) = d(x)y$ olur. Bu yüzden $\forall x, y \in A$ için $d(xd(y)) = d(x)d(y)$ dir.

Sonuç 5.2 A bir Archimedean yarı asal f -cebiri ve $d:A \rightarrow A$ bir sıralı sınırlı yerel türetme olsun. O zaman d bir ortomorfizmadır.

İspat: $x \wedge y = 0_A$ olacak şekilde $x, y \in A$ olsun. O zaman $xy = 0_A$ ve $d(xy) = d(x)y = 0_A$ dir. Bu yüzden $0_A \leq (|d(x)| \wedge y)^2 \leq |d(x)|y = |d(x)y| = 0_A$ dir. Sonuç olarak $|d(x)| \wedge y \in N(A)$ dir.

A bir yarı asal f -cebiri olduğundan $|d(x)| \wedge y = 0_A$ dir. Bu yüzden d bir ortomorfizmadır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada cebirin temel konularından türetme konusu latif sıralı cebirlerde incelenmiştir. Bazı ilginç neticeler ortaya çıkmıştır.

Teorem 4.1' de bir hemen hemen f -cebi A ' da tanımlı $D:A \rightarrow A$ bir sıralı sınırlı türetmede her $x,y \in A$ için $(D(xy))^2 = 0$ ve $D(x) \in N(A)$ olduğu ispatlanırken, Teorem 4.2' de ise her $x,y,z \in A$ için $D(xyz)=0$ ve $D(x) \in N(A)$ olduğu ispatlanmıştır. Teorem 4.3' te D sıralı sınırlı lineer operatörünün A üzerinde bir türetme olabilmesi için gerek ve yeter koşulun her $x,y \in A$ için $D(xy)=0$ ve $D(x) \in N(A)$ olduğu ispatlanmıştır.

Son olarak Teorem 5.1' de ise bir Archimedean hemen hemen f -cebi A ' da $d:A \rightarrow A$ sıralı sınırlı yerel türetmesinin A üzerinde bir ortalama operatör olduğu ispatlanmıştır.

Çalışmada geçen f -cebirleri başka cebirlerle değiştirildiği zaman sonuçların doğru olup olmadığı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Aliprantis, C.D. ve Burkinshaw, O., (1985). "Positive Operators", Academic Press, Orlando .
- [2] Bernau, S.J. ve Huijsmans, C.B., (1990). "Almost f -algebras and d -algebras", Math. Proc. Cam. Phil. Soc., 107: 287–308.
- [3] Birkhoff, G., (1967). "Lattice theory", (Amer.Math. Soc. Colloq. Publ., 25) Providence,R.I.: A.M.S.
- [4] Birkhoff, G. ve Pierce, R.S., (1956), "*Lattice-ordered rings*", An. Acad. Brasil. Ciênc.,28 : 41–49
- [5] Boulabiar, K., (2002). "Positive derivations on almost f -rings", Order, 19: 385–395.
- [6] Buskes, G. ve van Rooij, A., (2000). "Almost f -algebras, commutativity and the Cauchy-Schwarz inequality", Positivity, 4: 227–331.
- [7] Buskes, G. ve Kusraev, A.G., (2007). "Representation and extension of orthoregular bilinear operators", Vladikavkaz Math. J., 9: 16–29.
- [8] Colville, P., Davis, G. ve Keimel, K., (1977). "Positive derivations on f -rings", J. Aust. Math. Soc., 23: 371–375.
- [9] De Pagter, B., (1981). " f -Algebras and Orthomorphisms", Thesis, Leiden
- [10] Diem, J.E., (1968). "A radical for lattice-ordered rings", Pacific J. Math., 25: 71–82.
- [11] Henriksen, M. ve Smith, F.A., (1982). "Some properties of positive derivations on f -rings", In: Ordered Fields and Real Algebraic Geometry. (San Francisco), Contemp. Math. 8. American Mathematical Society, Providence, 175–184
- [12] Kadison, R.V., (1990). "*Local derivations*", J. Algebra, 130: 494–509.
- [13] Kusraev, A.G., (2006). "Automorphisms and derivations on a universally complete complex f -algebra", Siberian Math. J., 47 (1): 77–85.
- [14] Luxemburg, W.A.J. ve Zaanen, A.C., (1971). Riesz Spaces I, North-Holland, Amsterdam.
- [15] Schaefer, H.H., (1974). Banach Lattices and Positive Operators, Springer, New York.

- [16] Toumi, A. ve Toumi, M. A, (2010). "Order bounded derivations on Archimedean almost f-algebras", *Positivity*, 14: 239-245.
- [17] Toumi, M. A, (2009). "Order bounded local derivations on Archimedean almost f-algebras", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 58: 337-344.
- [18] Zaanen, A.C., (1983). *Riesz Spaces II*. North-Holland, Amsterdam.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ahmet ELMA
Doğum Tarihi ve Yeri : 01. 10. 1985/ Şişli
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : ahmetcan.elma@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2008
Lise	Fen Bilimleri	Bağcılar YDA Lisesi	2004

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2010-2011	Bahçeşehir Sevinç Dershane	Matematik Öğretmeni
2009-2010	Bakırköy Sevinç Dershane	Matematik Öğretmeni
2006-2009	Bakırköy Birey Dershane	Matematik Öğretmeni