

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MÜHENDİSLİK PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN SAYISAL
YÖNTEMLERİN KARŞILAŞTIRILMASI EN HIZLI VE EN UYGUN
ALGORİTMANIN BULUNMASI**

MUSTAFA SEMİH SADAK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. HÜLYA ŞAHİNTÜRK**

İSTANBUL, 2011

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DÜZLEMSEL HOMOTETİK HAREKETLER ALTINDA YÜKSEK MERTEBEDEN
İVMELER VE POLLER**

Mustafa Semih SADAK tarafından hazırlanan tez çalışması 28.09.2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Hülya ŞAHİNTÜRK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Hülya ŞAHİNTÜRK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Yasemen UÇAN
İstanbul Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Işım DEMİRİZ
Yıldız Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Yüksek performanslı bilgisayarlar ve sayısal uygulamalar birçok sektör ve bilimsel alanlarda kullanıldığı gibi mühendislik problemlerinin çözümünde de kullanılmaktadır.

Mühendislik problemlerinin büyük bir kısmına analitik yaklaşım yapılamadığı için bu problemlerin sayısal yöntemlerle çözümü araştırılmaktadır.

Bu çalışmamda mühendislik problemlerinde sayısal yöntemlerin iterasyon sayısı, hata miktarı ve harcanan zaman kriterlerine göre kıyaslanması konusunu inceledim.

Tez çalışmam boyuncaengin tecrübelerini ve yardımlarını esirgemeyen SayınDoç. Dr. Hülya ŞAHİNTÜRK'E teşekkür ederim.

Ağustos, 2011

Mustafa Semih SADAK

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	Vi
KISALTMA LİSTESİ	Vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	Viii
ÇİZELGE LİSTESİ	ix
ÖZET	X
ABSTRACT	Xi
BÖLÜM 1.....	1
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Bulgular	2
BÖLÜM 2.....	4
MATEMATİK MODELLEME VE MÜHENDİSLİK PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ	4
2.1 Basit bir Matematik Model	4
BÖLÜM 3.....	8
TEK VE ÇOK ADIMLI METOTLAR.....	8
3.1 TEK ADIMLI METOTLAR.....	8
3.1.1 Euler Metodu	9
3.1.2 Runge Kutta Metotları	13
3.1.3 Açık ve Kapalı Tip Metotlar	15
3.1.4 Düzenlenmiş Metotlar	18

3.1.5	Gauss-Lobatto Düzenlenmiş Metotları.....	19
3.1.6	Rosenbrock Tipi Metotlar	21
3.2	ÇOK ADIMLI METOTLAR.....	22
BÖLÜM 4		28
UYGULAMA		28
4.1	Problemin İfadesi	28
BÖLÜM 5		32
SAYISAL ÇÖZÜMLER		32
6.1	Adams-Bashforth (2.mertebe).....	33
6.2	Adams-Bashforth (4.mertebe).....	36
6.3	Runge Kutta (4.mertebe)	37
6.4	Runge Kutta (5.mertebe)	40
6.5	Euler	43
6.6	Heun (Düzenlenmiş Euler Yöntemi).....	46
6.7	Taylor Seri Açılımı.....	49
6.8	Tüm metodlar	53
6.9	Hata ve Performans Grafikleri	54
SONUÇ VE ÖNERİLER		57
KAYNAKLAR		59
ÖZGEÇMİŞ		61

SİMGE LİSTESİ

- I Akım Şiddeti (Amper)
- R Direnç(ohm)
- ε Elektromotor kuvveti (Volt)
- L İndüktans (Henry)
- μ İntegrasyon çarpanı

KISALTMA LİSTESİ

LDM	Laplace ayrıştırma metodu
WGM	Wavelet–Galerkin metodu
HPM	Homotopy Perturbation Method
ADM	Adomian’s decomposition Method
VIM	Variational iteration Method
ABM	Adams-Bashforth-Moulton

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3. 2 Euler Metodu.....	11
Şekil 4. 3 Devre şeması	28

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 5. 1 Tüm metotların hata miktarları (256000)	54
Çizelge 5. 2 Tüm metotlar hata değerleri	54
Çizelge 5. 3 Tüm metotlar için Performans miktarları.....	55
Çizelge 5. 4 Tüm metotlar Performans değerleri	55

**MÜHENDİSLİK PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN SAYISAL
YÖNTEMLERİN KARŞILAŞTIRILMASI EN HIZLI VE EN UYGUN
ALGORİTMANIN BULUNMASI**

Mustafa Semih SADAK

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Hülya ŞAHİNTÜRK

Bu çalışmanın amacı mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılan sayısal yöntemlerin belirli türlerini ele alıp çözüm metodolojisini anlamak, bir uygulama üzerinde performans ve hata paylarını incelemektir.

Tezin ilk kısmında matematik modelleme ve mühendislik problemlerine uygulanması hakkında geniş bilgi verilmiştir. Sonraki bölümde tek ve çok adımlı nümerik metotlara giriş yapılmış, bu metotlar hakkında teorik bilgiler aktarılmıştır. Tezin bir sonraki bölümünde bir elektrik devresi problemi tanımlanmış ve bahsi geçen yöntemlerle çözümleri irdelenmiştir. Çözümlerden elde edilen verilere göre eğriler çizdirilmiştir. metotların çözüm performansları ve hata miktarları tablolar ve grafikler halinde sunulmuştur.

Sonuç kısmında gerçekleştirilen çözümler hakkında tablolar ve grafiklerden de yararlanılarak çıkarımlarda bulunulmuş ve hız, performans ve iterasyon sayısı bakımından en uygun metotlar tespit edilmiştir

Anahtar Kelimeler: Sayısal Yöntemler, Performans, Analitik Çözüm, Algoritma, Modelleme

ABSTRACT

COMPARISON OF NUMERICAL METHODS USED SOLVING ENGINEERING PROBLEMS PRESENCE OF THE FASTEST AND MOST APPROPRIATE ALGORITHM

Mustafa Semih SADAK

Department of Mathematical Engineering

MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Hülya ŞAHİNTÜRK

The purpose of this study is to present certain types of numerical methods for solving engineering problems, to understand the methodology of the solution, on an application to examine the performance and the error margins.

In the first part of the thesis on the application of mathematical modeling and engineering problems are given extensive information. The only entry made in the next section and multi-step numerical methods, these methods were transferred to the information about the theoretical. An electrical circuit to the next section of the thesis mentioned methods, solutions to problems identified and discussed. Curves drawn according to data obtained from the solutions. amounts of performance and error methods to the solution presented in tables and graphs.

In conclusion on the tables and graphs about the solutions making use of the inferences made and the speed, performance and the most appropriate methods have been identified in terms of the number of iterations.

Key words: Numerical Methods, Performans, Analytic Solution, Algorithm, Modelling

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Başta mühendislik olmak üzere bir çok bilim dalında problemler diferansiyel denklemler kullanılarak ifade edilmektedir. Bu diferansiyel denklemler genel olarak kısmi türevler içeren kısmi diferansiyel denklemler ve sadece adi türevleri içeren adi diferansiyel denklemler olmak üzere iki gruba ayrılır. Ancak bu diferansiyel denklemlerin analitik çözümünü bulmak genelde mümkün olmayabilir. Günümüzde kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerine halen çalışmalar sürdürülmektedir[1].

Son yıllarda yapılan bazı çalışmaları incelediğimizde;

D.Bahuguna yaptığı çalışmada integro diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılan 4 farklı nümerik metodu kıyaslamıştır[Bahunga, Ujlayan, 2008]. Bu metotlar Laplace ayrıştırma metodu (LDM), Wavelet–Galerkin metodu (WGM), Pade yaklaşımıyla Laplace ayrıştırma metodu ve Homotopi düzensizlik (HPM - Homotopy Perturbation Method) metodudur. Sonuçta WGM metodunun çözüm performansı açısından kullanışlı olmadığı görülmüştür. Bununla beraber LDM ve HPM metotları en az çözüm karmaşıklığına sahiptir ve aynı zamanda WGM metoduna nazaran daha güvenilir sonuçlar vermişlerdir[2].

F.Mohammadi yaptığı çalışmada Legendre Wavelet metoduyla riccati diferansiyel denklemlerini çözmüş ve Legendre Wavelet metodunu Adomian ayrıştırma metodu

(ADM – Adomian’s decomposition Method), değişken iterasyon metodu (VIM – Variational iteration Method) ve HPM metotlarıyla karşılaştırmıştır[Modammadi, Hosseini, 2010][3].

Legendre Wavelet metodunun diğer metotlara göre daha basit ve uygulanabilir olduğunu, aynı zamanda bu metodun kullanılmasıyla daha büyük aralık değerleriyle çözüme ulaşılabildiğini, yine de bu metotla Lagrange çarpanlarına, düzeltme fonksiyonlarına(correction fuctional), sabit durumlara ihtiyaç duyulmadığını, HPM metodunun tersine bu metot ile her bir iterasyona fonksiyonel denklem çözümü gerekmediğini saptamıştır[4].

C.Engstler de yapmış olduğu çalışmada ikinci dereceden cebirsel diferansiyel denklemlerin adi diferansiyel denklemler şeklinde tanımlanarak extrapolasyon kodu MEXX(çok parçalı sabitlenmiş mekanik sistemlerin integrasyonu için kullanılan sayısal program) ve Runge Kutta kodu ile olan çözümlerini klasik adi diferansiyel denklemler ile kıyaslamıştır[Engstler, Kaps, 1997][5].

Xueming Liu çalışmasında adi diferansiyel denklem çözümü için efektif bir algoritma sınıfı geliştirmiştir[Liu, 2005]. Bu algoritmaların klasik metotlara göre daha doğru ve daha hızlı çözümler elde ettiklerini gözlemlemiştir. Runge kutta, AB(Adams-Bashforth) ve ABM(Adams-Bashforth-Moulton) metotları üzerinde durmuştur. Sonuçta karşılaştırılan diğer metotlara göre daha hızlı çözüme ulaştığını gözlemlemiştir[5].

1.2 Tezin Amacı

Yapılan bu çalışmanın amacı hali hazırda kullanılmakta olan nümerik analiz metotlarının mühendislik problemlerine uygulanması ve bu uygulama esnasında her bir metodun performans ve hata değerlerinin elde edilmesi ile bu değerler ışığında metotlar arasında analitik çözüme yaklaşmak için gerçekleştirilen iterasyon sayısı, harcanan süre, ve en az hata ile yaklaşma kriterlerine göre karşılaştırma yapılması, metotların performans değerlerinin analitik yöntemle kıyaslamalarında bir referans değerler kümesi elde edilmesidir.

Tez çalışması çerçevesinde Adams-Bashforth 2.mertebe, Adams-Bashforth 4.mertebe, Runge-Kutta 4.mertebe, Runge- Kutta 5.mertebe, Taylor seri açılımı, Euler ve

Düzenlenmiş Euler metotlarıyla örnek bir problem çözümünde bulunulacak, bu çözümler sonucunda elde edilen sonuçların yakınsaklığı grafikler halinde verilirken, algoritmaların çözüme ulaşma hızları ve yaptıkları hatalar kendi aralarında kıyaslanacaktır.

1.3 Bulgular

1940'ların sonlarından itibaren sayısal bilgisayarların her yerde bulunması sayısal yöntemlerin gelişmesinde ve kullanılmasında patlamaya neden olmuştur. Başlangıçta bu gelişme merkezi bilgisayarlara erişebilmenin maliyeti ile sınırlıydı ve dolayısıyla bir çok mühendis işlerin belirgin bir kısmında basit analitik yaklaşımları kullanmaya devam etti. Son zamanlarda ucuz kişisel bilgisayarlardaki evrimin güçlü hesaplama olanaklarının kapısını açtığı görülmektedir.

Sayısal yöntemler son derece güçlü problem çözme araçlarıdır. Mühendislik uygulamalarında sıkça karşılaşılan ve analitik yollardan çözülmesi çoğu zaman olanaksız olan denklem sistemlerini ve karmaşık geometrileri çözmeyi başarabilirler, gerçek çözümlere ne kadar yaklaşıldığını belirleyebilirler.

MATEMATİK MODELLEME VE MÜHENDİSLİK PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Günümüzde bilgisayarların çok geniş kullanım alanları ve ihtiyaca göre yüksek potansiyelleri vardır. Ancak mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılabilmesi için mühendislik sistemlerinin temel çalışma ilkeleri köklü bir şekilde kavranmalıdır.

Mühendisler ve bilim insanları yıllar boyunca yaptıkları gözlem ve deneyler sonunda araştırmalarının belirli yönlerden hep tekrarlandığını fark etmişlerdir. Bu şekildeki genel bir tekrarlama, geçmişteki deneyimlerden özümseyen ve genel bilgileri içeren temel yasaları oluşturur. Böylelikle mühendislik problemlerinin çözümü çoğunlukla teorik analiz ve deneysellikten oluşan iki uçlu bir yaklaşımın uygulanmasını gerektirir.

Gerçekte bu iki ucun birbirine çok yakın olduğu vurgulanmalıdır. Yeni ölçümler yapıldıkça temel yasalar iyileştirilebilir ya da yeni yasalar geliştirilebilir. Benzer biçimde temel yasaların da gözlemler ve deneyler üzerinde çok güçlü bir etkisi olabilir. Bu yasalar özellikle gözlem ve deneysel sonuçlardan hareketle içinden önemli sonuçlar çıkarılabilen tutarlı ve geniş kapsamlı bir çerçevenin sentezinde yararlanılabilecek birleştirici ve düzenleyici ilkeler olarak kullanılabilir[7][8].

2.1 Basit bir Matematik Model

Matematik bir model en genel anlamıyla fiziksel bir sistemin veya bir sürecin ana özelliklerini matematik terimlerle ifade eden bir eşitlik veya formül olarak tanımlanabilir. Çok genelleştirilmiş halde matematik model;

Bağımlı değişken = f (bağımsız değişkenler, parametreler, zorlayıcı fonksiyonlar)

şeklindedir. Burada “bağımlı değişken” sistemin davranışını veya konumunu belirten bir özelliktir. Bağımsız değişkenler genellikle zaman veya konum gibi sistemin davranışını belirleyen boyuttur. Parametreler sistemin özelliklerini veya yapısını yansıtır. Zorlayıcı fonksiyonlar ise sistemi etkileyen dış etkenlerdir.[9]

Belirtilen bu eşitlik, gerçek matematiksel ifadesi basit bir cebirsel bağıntı olabileceği gibi çok uzun karmaşık diferansiyel denklem takımları da olabilir. Örneğin Newton gözlemlerine dayanarak bir cismin momentumundaki zamana göre değişimin cisme etkiyen bileşke kuvvete eşit olduğunu belirten ve kendi adıyla anılan ikinci hareket yasasını ifade etmiştir. Hareketin ikinci yasasının matematiksel ifadesi ya da modeli aşağıdaki çok bilinen şekilde ifade edilir:

$$F = m \cdot a$$

Burada F cisme etkiyen net kuvvet , m cismin kütlesi ve a ise cismin ivmesidir. Bu eşitlik cebirsel ifadesinin basitliğinden dolayı kolaylıkla çözülebilir.

Ancak diğer fiziksel olayların matematik modelleri çok daha karmaşık olabilir, bunlar ya tam olarak çözülemez ya da basit cebirsel işlemlerden daha karmaşık matematik teknikleri kullanmayı gerektirir.

$$y' = f(x, y), y(x_0) \quad (2.1)$$

şeklindeki başlangıç değer problemi için s basamaklı Runge-Kutta metodu aşağıdaki formdadır.

$$k_i = f(x_0 + c_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j) \quad (i = 1 \dots, s) \quad (2.2)$$

Bu metodun mertebesi c_i , a_{ij} ve b_i katsayılarının seçimine göre değişmektedir. Genel olarak bu katsayılar bulunup metotlar oluşturulurken aşağıdaki adımlar izlenir.

Adım 1: Metodun $h = 0$ 'da Taylor seri açılımı yapılır.

Adım 2: $y(x)$, problemingerçek çözümü olmak üzere $y(x)$ 'in $h = 0$,da Taylor seri açılımı yapılır.

Adım 3: 1'inci ve 2'nci adımlarda elde edilen denklemlerdeki karşılıklı katsayılar eşitlenerek c_i , a_{ij} ve b_i katsayıları bulunur ve metotlar oluşturulur.

3'üncü adımda mertebeler şartları diye isimlendirilen lineer olmayan bir denklem sistemi elde edilir ve daha sonra bu sistem çözülerek metotlar oluşturulur. Bu denklem sistemindeki denklem sayısı metodun mertebeler sayısına göre değişir. Mertebeler sayısı arttıkça denklem sayısı daha da hızlı bir şekilde artar. Örneğin, mertebeler sayısı 4 iken 8 tane denklem elde edilirken, mertebeler sayısı 6 olduğunda bu değer 37'ye, mertebeler sayısı 8 olduğunda 200'e, 10 olduğunda ise 1205'e yükselmektedir.

Görüldüğü üzere özellikle 6'ıncı mertebeden sonra denklem sayısı çok hızlı bir şekilde artmaktadır. Çünkü yüksek mertebeli metotlarda birinci adımı yapmak oldukça zor, zahmetli ve hatta içinden çıkılmaz bir hal alabilir. İşte bu nedenle 1960'lardan sonra yapılan çalışmalar sonucunda bu zorluğun üstesinden gelinmiştir.

Metotların mertebeler şartları üzerine bir çok çalışmalar yapan Butcher'ın bu konuya getirdiği en büyük yenilik 1987 de olmuştur[Butcher, J.C. 1964][10].

Butcher, metotların Taylor seri açılımlarını yaparken grafik teorisinden faydalanmıştır. Şöyle ki; gerek metotların ve gerekse gerçekte çözümün Taylor açılımlarını yaparken karşılaşılan çok uzun, kısmi türevler içeren denklemleri ağaç olarak adlandırılan çeşitli grafiklerle simgelemiş ve daha sonra bu ağaçlara yeni dallar eklemek suretiyle metotların ardıl türevlerini elde etmiştir. Böylelikle çok uzun ve karışık cebirsel denklem sistemleri daha kısa ve basit hale getirilmiş ve yüksek mertebeli metotlarında mertebeler analizleri yapılabilmiştir.

Yine aynı yıllarda Wanner ve Hairer'in çalışmaları ile bu yöntem daha da geliştirilmiş ve başka tip metotlara da uygulanmıştır[Wanner G, Hairer E., 2008][11].

Özellikle son yıllarda grafik yöntemi mertebeler analizinde daha da önemli bir yer tutmuştur. Bilgisayar teknolojisinin gelişimi ile birlikte daha iyi sonuçlar veren yüksek mertebeli metotlar daha çok kullanılmıştır. Bu sebeple bu yönde çalışmalar artırılmış ve grafik yöntemi kullanılarak çeşitli şekilde yüksek mertebeli metotlar oluşturulmuştur. Yine son yıllarda Hairer'in oluşturduğu Hamilton sistemleri için kullanılan symplectic metotlar, manifoldlar üzerinde bazı fiziksel özellikleri koruyan (invariant bırakan) metotlarda da yine grafik yöntemi kullanılmıştır.

Günümüzde yüksek mertebeli metotlara duyulan ihtiyacın gün geçtikçe arttığı düşünüldüğünde, bulunan bu metotların mertebeler analizinde grafik yönteminin ne kadar

önemli olduğu ortaya çıkmaktadır. Aksi halde bu metotların mertebelerini klasik yöntemle belirlemek çok zor hatta imkansız olabilirdi.

Bu yüzden grafik yöntemi yüksek mertebeli metotların elde edilmesi ve bunların mertebe analizlerinin yapılabilmesi bakımından çok önemli bir kolaylıktır.

BÖLÜM 3

TEK VE ÇOK ADIMLI METOTLAR

3.1 TEK ADIMLI METOTLAR

Uygulamalı matematikte bir çok problem çeşitli tipte diferansiyel denklemlerle ifade edilir. Bu diferansiyel denklemler içerisinde en basit denklem çeşidi x bağımlı değişken ve $y(x)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $y' = f(x, y(x))$ tipindeki denklemlerdir. Bu tür denklemlere adi diferansiyel denklemler denir. Bu problemi sağlayan sonsuz tane çözüm vardır. Bu çözümler içerisinde (x_0, y_0) noktasından geçen çözümün bulunmasına başlangıç değer problemi denir ve başlangıç şartları da $y(x_0) = y_0$ formundadır. Şimdi daha genel olarak aşağıdaki gibi n boyutlu diferansiyel denklem sistemi ele alınırsa [13].

$$y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$$

$$y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$$

$$\vdots$$

$$y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$$

$$y_i(x_0) = y_{i0} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Bu sistem aşağıdaki vektör formları kullanılarak $y' = f(x, y)$ formuna getirilebilir.

$$y' = f(x, y), \quad y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}, \quad f(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{bmatrix}, \quad y(x_0) = y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{bmatrix}$$

Diferansiyel denklemler sadece birinci mertebeden türevleri değil aynı zamanda daha yüksek mertebeden türevleri de içerebilirler. Örneğin,

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (3.1)$$

şeklindeki n'inci mertebeden bir diferansiyel denklem

$$z_1(x) = y(x)$$

$$z_2(x) = y^{(1)}(x)$$

$$\vdots$$

$$z_n(x) = y^{(n-1)}(x)$$

eşitlikleri kurularak aşağıdaki şekilde birinci mertebeden n boyutlu bir sistem haline getirilebilir.

$$z' = \begin{bmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_{n-1}' \\ z_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ f(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{bmatrix}$$

3.1.1 Euler Metodu

Diferansiyel denklemler için oluşturulan nümerik metotların esas amacı,

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

şeklindeki başlangıç değer problemlerinin analitik yollarla elde edilemeyen çözümünün, herhangi bir noktadaki yaklaşık değerinin hesaplanmasıdır. Yani $y(x)$, probleminin analitik yollarla bulunamayan gerçek çözümü ve $\alpha \in R$ herhangi bir reel sayı olmak üzere $y(a)$ değerinin yaklaşık hesabının yapılmasıdır.

Başlangıç değer problemi birinci dereceden bir denklemdir ve geliştirilen nümerik metotlar bu tür problemlerin çözümünde kullanılır. Eğer problem daha yüksek

mertebeden ise, o zaman denklem daha önce de anlatıldığı gibi birinci mertebeden sisteme çevrilir ve daha sonra nümerik metot uygulanabilir. Yani anlatılacak olan metotlar birinci mertebeden n boyutlu sistemler için de geçerlidir. Ancak burada n = 1 alınarak anlatım yapılacaktır.

Şimdi problem, başlangıç değer problemi için $\alpha \in R$ ve $y(x)$ gerçek çözüm olmak üzere, $y(a)$ yaklaşık değerinin bulunması olsun. İlk olarak $[x_0, a]$ aralığı $x_0 < x_1 < \dots < x_n = a$ şeklinde alt aralıklara bölünür. Burada $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ değerleri her bir alt aralığın uzunluğudur ve bu değerlere adım uzunluğu denir. Her bir adım uzunluğu farklı seçilebileceği gibi $h_i = h$ şeklinde sabit bir değer de alınabilir. O zaman $y'(x)$ eğimi için aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \quad (3.2)$$

Şimdi probleme tekrar dönülürse

$$y'(x) = f(x, y) \quad (3.3)$$

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx f(x, y) \quad (3.4)$$

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x, y(x)) \quad (3.5)$$

denklemini elde edilir. Bu denkleme $y(x_0) = y_0$ başlangıç değeri uygulanırsa

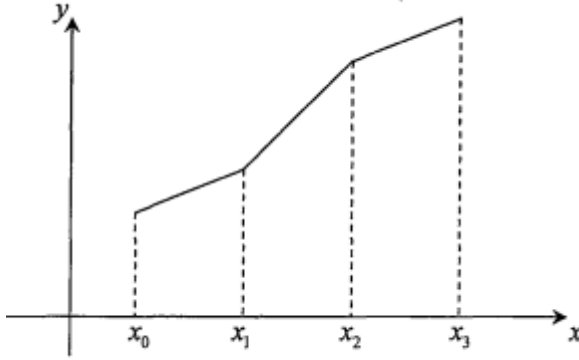
$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + hf(x_0, y_0) \quad (3.6)$$

ifadesi elde edilir. Böylelikle $y(x)$ gerçek çözümünün $x_0 + h = x_1$ noktasındaki yaklaşık değeri bulunmuş olur. Bu işlemler aynı şekilde $x_1, x_2, \dots, x_n$ değerleri için yapılır ve en sonunda $y(x_n) = y(a)$ yaklaşık değeri elde edilir. Gerçek değer ile yaklaşık değeri karıştırmamak amacıyla bundan sonra x_1 noktasındaki gerçek değer $y(x_1)$ şeklinde, yaklaşık değer ise y_1 şeklinde gösterilecektir. Tüm bunlar genelleştirilirse başlangıç değer problemi için

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (3.7)$$

$$x_{n+1} = x_n + h, n = 0, 1, \dots (3.8)$$

şeklinde bir nümerik metot elde edilmiş olur. Bu metoda Euler metodu denir. Burada x_i noktalarındaki teğet doğru ile birleşerek Euler poligonu denilen aşağıdaki kırık çizgiyi oluşturur.



Şekil 3.1 Euler Metodu

Euler metodu tipik bir tek adımlı metottur. Örneğin Euler metodu için

$$\Phi(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n) (3.9)$$

dir.

Başlangıç değer problemi için tek adımlı metot

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h) \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\Phi(x_n, y_n, h)$ fonksiyonu metodu belirleyen fonksiyondur ve bu fonksiyonun farklı seçimleri ile farklı metotlar elde edilir.

Başlangıç değer problemi için yukarıdaki metot uygulansın. Ayrıca bu problemin gerçek çözümü $y(x)$ olsun. Farzedelim ki x_n noktasındaki gerçek değer için, $y(x_n) = y_n$ olsun. O zaman

$$y_{n+1} = y(x_n) + h\Phi(x_n, y(x_n), h) (3.11)$$

olur. Genel olarak y_{n+1} noktasındaki hata $y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ şeklinde gerçek çözüm ile nümerik çözüm arasındaki fark olarak alınır. Buradan hata değeri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$hata = y(x_{n+1}) - y_{n+1} \quad (3.12)$$

$$hata = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\Phi(x_n, y(x_n), h) \quad (3.13)$$

Hata değerine yerel kesme hatası (local truncation error (l.t.e)) denir ve t_{n+1} ile gösterilir.

$$t_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\Phi(x_n, y_n, h) \quad (3.14)$$

Bu hata ölçümü bir anlamda metodun yaklaşım hızı ile alakalıdır. Şöyle ki, iyi bir metot için

$$\lim_{h \rightarrow 0} t_{n+1} = 0 \quad (3.15)$$

olması gerekir. Ancak burada önemli olan $h \rightarrow 0$ iken t_{n+1} değerinin ne kadar hızla sıfıra yaklaştığıdır. Başka bir ifade ile nümerik metottan elde edilen yaklaşık değer ile gerçek değer arasındaki hatanın ne kadar hızla azaldığıdır. Bu da metotların mertebeleri ile alakalıdır ve genel olarak, eğer bir metot için

$$t_{n+1} = O(h^{p+1}) \quad (\lim_{h \rightarrow 0} \frac{O(h^{p+1})}{h^{p+1}}) \quad (3.16)$$

ise o zaman bu metoda “p'ninci mertebededir” denilecektir. Burada, metodun mertebesi büyüdükçe yaklaşımda o kadar hızlı olacaktır.

Başlangıç değer probleminin $y(x)$ gerçek çözümü ile y_{n+1} nümerik çözümü arasındaki farka genel hata (global error (g.e)) denir ve e_{n+1} ile gösterilir.

$$e_{n+1} = y_{n+1} - y(x_{n+1}) \quad (3.17)$$

Taylor seri kullanımında aralık yeterince küçük alındığında hata küçülecektir. Hatta az terim kullanarak oldukça iyi sonuçlar elde etmek mümkündür. Buradan hareketle Taylor serisinin ilk iki terimini alarak hesaplanan ve birinci mertebeden türevleri kapsayan açılım Euler yöntemi olarak söylenebilir.

$$y(x_0+h)=y(x_0) + y'(x_0).h+0.5*y''(\xi).h^2$$

Burada eşitliğin kullanımında $y(x_0)$ başlangıç şartı olarak verilir. Ve $y(x_0)$ ise $f(x_0,y_0)$ 'dan hesaplanır. Çünkü $dy/dx=f(x,y)$ şeklinde olduğu bilinmektedir. Bu yöntemi iteratif olarak çalıştırmak gerekir. $y(x_0+h)$ 'dan başlayarak sonra $y(x_0+2h)$ ve $y(x_0+3h)$ şeklinde ilerletmek yerinde olacaktır. Yöntemin uygulanışı genel bir ifade ile gösterecek olursak ;

$$y_{n+1} = y_n + h.y'_n + \text{Hata}$$

şeklinde elde edilir.

3.1.2 Runge Kutta Metotları

s tamsayı ve $\alpha_{21}, \alpha_{31}, \alpha_{32}, \dots, \alpha_{s1}, \alpha_{s1}, \dots, \alpha_{s,s-1}, b_1, \dots, b_s, c_2, \dots, c_s$ de reel sabit katsayılar olmak üzere

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + h \alpha_{21} k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + c_3 h, y_n + h(\alpha_{31} k_1 + \alpha_{32} k_2))$$

$\vdots$

$$k_n = f(x_n + c_s h, y_n + h(\alpha_{s1} k_1 + \dots + \alpha_{s,s-1} k_{s-1}))$$

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + \dots + b_s k_s)$$

şeklindeki denklem sistemine s basamaklı açık tip Runge-Kutta metodu denir[14].

$$c_2 = \alpha_{21} \quad , \quad c_3 = \alpha_{31} + \alpha_{32} \quad , \quad \dots \quad , \quad c_s = \alpha_{s1} + \dots + \alpha_{s,s-1}$$

Özellikle yüksek mertebeden metotların ileride bahsedilecek olan mertebe şartları analizinde büyük oranda kolaylık sağlamaktadır.

Metotlar genelde denklem tipinden ziyade daha farklı şekillerde gösterilmektedir. Butcher metodu tablo şeklinde aşağıdaki gibi göstermiştir. Bu gösterime Butcher gösterimi denir.

0					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	$\dots$	$a_{s,s-1}$	
	b_1	b_2	$\dots$	b_{s-1}	b_s

4 basamaklı 4'üncü mertebeden klasik Runge-Kutta metodunun Butcher gösterimi aşağıdaki gibidir.

0				
$1/2$	$1/2$			
$1/2$	0	$1/2$		
1	0	0	1	
	$1/6$	$2/6$	$2/6$	$1/6$

Butcher açık tip Runge-Kutta metotlarının 's' basamak sayısı ile 'p' mertebesi arasında Butcher bariyerleri denilen aşağıdaki bağıntıyı kurmuştur.

$$p = s \quad 1 \leq s \leq 4$$

$$p \leq s - 1 \quad 5 \leq s \leq 7$$

$$p \leq s - 2 \quad s \geq 8$$

Üç basamaklı üçüncü mertebeden optimal ve beş basamaklı dördüncü mertebeden Kutta Merson metotları.

0					
$1/2$	$1/2$				
$3/4$	0	$3/4$			
	$2/9$	$1/3$	$4/9$		

0					
$1/3$	$1/3$				
$1/3$	$1/6$	$1/6$			
$1/2$	$1/8$	0	$3/8$		
1	$1/2$	0	$-3/2$	2	
	$1/6$	0	0	$4/6$	$1/6$

3.1.3 Açık ve Kapalı Tip Metotlar

b_i, a_{ij} ($i = 1, \dots, s$) reel sayılar olmak üzere

$$k_i = f\left(x_0 + c_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j\right) (i = 1, \dots, s)$$

(3.17)

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (3.18)$$

şeklindeki metoda s basamaklı Runge-Kutta (RK) metodu denir. Eğer $i > j$ için $a_{ij} = 0$ ise metoda açık tip RK metodu (Explicit Runge-Kutta (ERK)) denir. Eğer $i > j$ için $a_{ij} = 0$ ve en az bir i için $a_{ii} \neq 0$ ise metoda köşegensel kapalı tip RK metodu (Diagonally implicit Runge-Kutta (DIRK)) denir. Eğer tüm köşegen elemanları birbirine eşit ise yani $a_{ii} = \alpha$, $i = 1, \dots, s$ ise metoda tek tip köşegensel kapalı RK metodu (Singly Diagonally implicit Runge-Kutta (SDIRK)) denir. Tüm bunların dışındaki metotlara da kapalı tip RK metotları (implicit Runge-Kutta (IRK)) denir[15].

$i \geq j, a_{ij} = 0$	$i > j, a_{ij} = 0$ ve $\exists i, a_{ii} \neq 0$	$\exists i > j$ için $a_{ij} \neq 0$
Açık RK Metodu (ERK)	Köşegensel Kapalı RK Metodu (DIRK)	Kapalı RK Metodu (IRK)
$\begin{array}{c ccc} c_1 & 0 & & \\ c_2 & a_{21} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots 0 \end{array}$ $\begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array}$	$\begin{array}{c ccc} c_1 & a_{11} & & \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots a_{ss} \end{array}$ $\begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array}$	$\begin{array}{c cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{array}$ $\begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array}$

Kapalı orta nokta metodu

$$k_1 = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1)$$

$$y_1 = y_0 + hk_1$$

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

Hammer&Hollingsworth

$$k_1 = f(x_0, y_0)$$

$$k_2 = f(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{h}{3}(k_1 + k_2))$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2)$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

Metot kapalı olduğu zaman denklem ki (i = 1,...,s) değerlerine bağlı kapalı bir denklem oluşturur. Bu denklemin çözümünün varlık ve tekliği Butcher tarafından gösterilmiştir.

Sürekli ve başlangıç noktası komşuluğunda L Lipschitz sabiti olmak üzere Lipschitz şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer h adım uzunluğu

$$h < \frac{1}{L \max_i \sum_j |a_{ij}|}$$

(3.19)

olacak şekilde seçilirse, o zaman denklemin tek bir çözümü vardır ve bu iterasyon yoluyla elde edilir.

2 basamaklı 3'üncü mertebeden

$$k_1 = f(x_0 + c_1h, y_0 + h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)) \quad (3.20)$$

$$k_2 = f(x_0 + c_2h, y_0 + h(a_{21}k_1 + a_{22}k_2)) \quad (3.21)$$

$$y_1 = y_0 + h(b_1k_1 + b_2k_2) \quad (3.22)$$

kapalı tip RK metodunun mertebe şartları aşağıdaki gibidir.

$$b_1 + b_2 = 1 \quad (3.23)$$

$$b_1 c_1 + b_2 c_2 = \frac{1}{2} (3.24)$$

$$b_1 c_1^2 + b_2 c_2^2 = \frac{1}{3} \quad (3.25)$$

$$b_1 (a_{11} c_1 + a_{12} c_2) + b_2 (a_{21} c_1 + a_{22} c_2) = \frac{1}{6} \quad (3.26)$$

Bu değerler daha önce yapıldığı gibi Taylor seri açılımları karşılaştırılarak elde edilmiştir.

b_x ve b_2 yok edilerek c_1 ve c_2 ye bağlı

$$c_2 = \frac{2-3c_1}{3-6c_1} \quad (3.27)$$

denklemini elde edilir. Bulunan değerler denklemlerde yerine konularak

$$b_1 = \frac{c_2-1/2}{c_2-c_1}, b_2 = \frac{c_1-1/2}{c_1-c_2} \quad (c_1 \neq \frac{1}{2}, c_1 \neq c_2) \quad (3.28)$$

değerleri bulunur. Bulunan tüm bu değerler $a_{21} = c_2 - a_{22}$, $a_{11} = c_1 - a_{12}$ eşitlikleri kullanılarak dördüncü denklemden

$$a_{22} = \frac{\frac{1}{6} - b_1 (a_{12} (c_2 - c_1) + c_1^2)}{b_2 (c_2 - c_1)} \quad (3.29)$$

eşitliği elde edilir. Burada a_{12} ve c_1 serbest parametrelerdir. Bütün bunların sonucu olarak yukarıdaki bağıntılara göre eğer $a_{12} = 0$ alınırsa kapalı tip RK metodlarının 3'üncü mertebeden tek parametrelili ailesi elde edilir. Eğer $a_{12} = 0$ ve $a_{11} = a_{22}$ denirse SDIRK metodları elde edilir.

Üçüncü mertebeden SDIRK metodu

γ	γ
$1-\gamma$	$1-2\gamma \quad \gamma$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

4'üncü mertebeden metodlarda ise mertebeye şartlarında yukarıdakilerle birlikte 4 denklem daha vardır. Bunun da yine 2 parametreye bağlı tek çözümü vardır.

Dördüncü mertebeden Hammer&Hollingsworth metodu

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Altıncı mertebeden Kuntzmann&Butcher metodu

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{15}}{15}$	$\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{30}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{24}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{24}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{30}$	$\frac{2}{9} + \frac{\sqrt{15}}{15}$	$\frac{5}{36}$
	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$

3.1.4 Düzenlenmiş Metotlar

s pozitif bir tamsayı ve $c_1, \dots, c_s$ ayrık reel sayılar (0 ile 1 arasında) olsun. Bu sayılara karşılık gelen s'ninci dereceden düzenlenmiş polinom aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$u(x_0) = y_0(\text{başlangıç değeri}) \quad (3.30)$$

$$u'(x_0 + c_i h) = f(x_0 + c_i h, u(x_0 + c_i h)) \quad i = 1, \dots, s \quad (3.31)$$

ve nümerik çözüm de aşağıdaki şekildedir.

$$y_1 = u(x_0 + h) \quad (3.32)$$

$s = 1$ için polinom aşağıdaki gibidir.

$$u(x) = y_0 + (x - x_0)k \quad (3.32)$$

$$k = f(x_0 + c_1 h, y_0 + h c_1 k) \quad (3.33)$$

denklemden $c_1 = 0$ alınırsa Euler metodu, $c_1 = 1$ alınırsa kapalı tip Euler metodu ve $c_1 = 1/2$ alınırsa orta nokta kuralı oluşmaktadır. Ayrıca $s = 2$ için de $c_1 = 0$ ve $c_2 = 1$ alınırsa kapalı tip yamuk metodu, $c_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{3}/6$ alınırsa Hammer&Hollingsworth metodu elde edilir.

Düzenlenmiş polinom aşağıdaki seçimlerle IRK metoduna eşdeğerdir.

$$a_{ij} = \int_0^{c_i} l_j(t) dt \quad b_{ij} = \int_0^1 l_j(t) dt \quad i, j = 1, \dots, s \quad (3.34)$$

Burada $l_j(t)$ ler

$$l_j(t) = \prod_{k \neq j} (t - c_k) / \prod_{k \neq j} (c_j - c_k) \quad (3.35)$$

Şeklindeki Langrange polinomlarıdır.

3.1.5 Gauss-Lobatto Düzenlenmiş Metotları

Yukarıda bahsedilen düzenlenmiş metotlarda $c_1, \dots, c_s$ sayıları s 'ninci dereceden

$$\frac{d^s}{dx^s} (x^s (x - 1)^s) \quad (3.36)$$

şeklindeki Legendre polinomlarının kökleri alınırsa Gauss metotları elde edilir. Bu metotlara Kuntzmann-Butcher metotları da denir, s basamaklı Gauss metodu $2s$ mertebededir.

Altıncı mertebeden Gauss metodu

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{15}}{15}$	$\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{30}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{24}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{24}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{30}$	$\frac{2}{9} + \frac{\sqrt{15}}{15}$	$\frac{5}{36}$
	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$

Geliştirilen diğer metot türleri ise yine $c_1, \dots, c_s$ sayılarının seçimine göre çeşitli isimlerle adlandırılmış olan aşağıdaki metot türleridir. Burada yine $c_1, \dots, c_s$ sayıları aşağıda verilen denklemlerin kökleri olarak alınır.

$$\text{I: } \frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}(x^s(x-1)^{s-1}) \quad \text{Radau IA}$$

$$\text{II: } \frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}(x^{s-1}(x-1)^s) \quad \text{Radau IIA}$$

$$\text{III: } \frac{d^{s-2}}{dx^{s-2}}(x^{s-1}(x-1)^{s-1}) \quad \text{Lobatto}$$

Radau formundaki (Hairer, E) s basamaklı metotlar $2s-1$ mertebeli ve Lobatto formundaki s basamaklı metotlar ise $2s-2$ mertebelidir. Ayrıca Radau IIA metotlarında $s = 1$ alınırsa kapalı tip Euler metodu oluşur.[16]

Beşinci mertebeden Radau IA metodu

0	$\frac{1}{9}$	$\frac{-1-\sqrt{6}}{18}$	$\frac{-1+\sqrt{6}}{18}$
$\frac{6-\sqrt{6}}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{88+7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{88-43\sqrt{6}}{360}$
$\frac{6+\sqrt{6}}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{88+43\sqrt{6}}{360}$	$\frac{88-7\sqrt{6}}{360}$
	$\frac{1}{9}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$

İkinci ve dördüncü mertebeden Lobatto IHA metotları

0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{24}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

İkinci ve dördüncü mertebeden Lobatto IIIB metotları

$$\begin{array}{c|cc}
0 & \frac{1}{2} & 0 \\
1 & \frac{1}{2} & 0 \\
\hline
& \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc}
0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\
1 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\
\hline
& \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

İkinci ve dördüncü mertebeden Lobatto IIIC metotları

$$\begin{array}{c|cc}
0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
& \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccc}
0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\
1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\
\hline
& \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

3.1.6 Rosenbrock Tipi Metotlar

Daha önce kapalı tip metotlar için her adımda ortaya çıkan, lineer olmayan denklemler için iterasyon metodunun kullanılması gerektiğinden bahsedilmişti. Rosenbrock metotları hesaplanması zor, lineer olmayan bu denklemleri lineer bir denklem dizisine çevirir.

Köşegensel kapalı tip Runge-Kutta metodunun otonom diferansiyel denklemler için uygulanan formunun genel gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$k_i = hf(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j + a_{ii}k_i) \quad (i = 1, \dots, s) \quad (3.37)$$

Burada problem

$$y' = f(y) \quad (3.38)$$

şeklinde otonom bir diferansiyel denklemdir.

Denklem lineerleştirilirse kapalı denklemi açık denklemine dönüştürülmüş olur. Burada daha önce her adımda $k_t^{(0)}=0$ başlangıç değeri alınarak Newton iterasyon metodunun uygulanması gerekirdi.

5 basamaklı Rosenbrock metodu aşağıdaki şekildedir.

$$k_i = hf(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j) + hJ \sum_{j=1}^i \gamma_{ij}k_j, i = 1, \dots, s \quad (3.39)$$

$$y_1 = y_0 + \sum_{j=1}^s b_jk_j \quad (3.40)$$

Burada $\alpha_{ij}, \gamma_{ij}, b_i$ değerleri belirli katsayılardır ve $J=f'(y_0)$ dir. Bu metodun her bir adımında k_i bilinmeyenlerine göre, $I-h\gamma_{ij}J$ şeklindeki bir lineer sistem matrisinin çözülmesi gerekir. Eğer problem

$$y' = f(x, y) \quad (3.41)$$

şeklinde otonom olmayan bir diferansiyel denklem ise o zaman $x' = I$ eşitliği denklemi otonom sisteme dönüştürür. Bu durumda metodu bu sisteme uygulanırsa

$$k_i = hf(x_0 + \alpha_i h, y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j) + \gamma_i h^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \sum_{j=1}^i \gamma_{ij}k_j \quad (3.42)$$

$$y_1 = y_0 + \sum_{j=1}^s b_jk_j \quad (3.43)$$

metodu elde edilir. Buradaki yeni katsayılar ise

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \gamma_i = \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} \quad (3.44)$$

şeklinde dir. Eğer problem, M sabit ve tekil olmayan bir matris olmak üzere

$$My' = f(x, y) \quad (3.45)$$

şeklinde kapalı diferansiyel denklem ise her iki tarafı M^{-1} ile çarpılır ve problem formuna getirilerek metodu uygulanır. Daha sonra da elde edilen formülün her iki tarafı M ile çarpılarak aşağıdaki metot elde edilir.

$$Mk_i = hf(x_0 + \alpha_i h, y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j) + \gamma_i h^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \sum_{j=1}^i \gamma_{ij}k_j \quad (3.46)$$

$$y_1 = y_0 + \sum_{j=1}^s b_jk_j$$

3.2 ÇOK ADIMLI METOTLAR

Çok adımlı metotlar

$$y' = f(x, y) y(x_0) = y_0 \quad (3.47)$$

şeklindeki başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanılır. $y(x)$ bu denklemin gerçek çözümü olmak üzere, x_{j+r} noktasındaki $y(x_{j+r})$ gerçek değerinin r_{j+r} yaklaşık değeri, $y(x_k)$ gerçek değerlerinin r_{jk} ($k = j, j+1, \dots, j+r-1$) yaklaşık değerleri ile hesaplanır. Burada $r \geq 2$ dir. $r = 1$ alınırsa metot tek adımlı hale gelir. Tek adımlı metotlarda olduğu gibi burada da aralıklar $x_k = x_0 + k_h$ şeklinde alınır.

$$\eta_j, \eta_{j+1}, \dots, \eta_{j+r-1} \Rightarrow \eta_{j+r}$$

Buradaki $\eta_j, \eta_{j+1}, \dots, \eta_{j+r-1}$ başlangıç değerleri herhangi bir tek adımlı metottan elde edilebilir.

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$dy = f(x, y)dx$$

$$\int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} dy = \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} f(t, y(t)) dt$$

$$y(x_{p+k}) - y(x_{p-j}) = \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} f(t, y(t)) dt$$

formülü elde edilir. Burada $f(t, y(t))$ ye Newton-Cotes metodu kullanılarak aşağıdaki özellikleri taşıyan bir $P_q(x)$ polinomu ile yaklaşılabılır.

$$\text{der}(P_q(x)) \leq q$$

$$P_q(x_k) = f(x_k, y(x_k)), \quad k = p, p-1, \dots, p-q$$

Daha sonra integral içerisindeki $f(x, y(t))$ fonksiyonu yerine bulunan $P_q(x)$ polinomu yazılır. Burada x 'ler eşit aralıklı seçilir. Yani $h = x_{i+1} - x_i$ dir. $P_q(x)$ polinomunu bulmak için aşağıdaki Lagrange interpolasyonu kullanılır ve daha sonra bu polinom denklem $f(t, y(t))$ fonksiyonunun yerine yazılırsa

$$P_q(x) = \sum_{i=0}^q f(x_{p-i}, y_{p-i}) L_i(x) \quad , \quad L_i(x) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{x - x_{p-l}}{x_{p-i} - x_{p-l}}$$

$$y(x_{p+k}) - y(x_{p-j}) \approx \sum_{i=0}^q f(x_{p-i}, y_{p-i}) \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} L_i(x) dx$$

$$y(x_{p+k}) - y(x_{p-j}) \approx h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f(x_{p-i}, y_{p-i})$$

$$\beta_{qi} = \frac{1}{h} \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} L_i(x) dx$$

formülleri elde edilir. Şimdi de

$$\beta_{qi} = \frac{1}{h} \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} L_i(x) dx = \frac{1}{h} \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{x - x_{p-l}}{x_{p-i} - x_{p-l}} dx$$

ifadesinde $x = x_0 + h(s+p)$ değişken değişikliği yapılırsa

$$x = x_0 + h(s+p)$$

$$dx = h.ds$$

$$x_{p+k} = x_0 + hp + hk = x_0 + hs + hp^* \Rightarrow s = k$$

$$x_{p-j} = x_0 + hp - hj = x_0 + hs + hp \Rightarrow s = -j$$

$$\beta_{qi} = \int_{-j}^k \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{s+l}{-i+l} ds \quad i = 0, 1, \dots, q$$

denklemini elde edilir. $y(x_{p+k})$ ve $y(x_{p-j})$ değerleri yerine, bunların yaklaşık değerleri olan η_{p+k} ve η_{p-j} değerleri yerleştirilip; $\approx$ işareti de eşit işareti ile değiştirilirse aşağıdaki formüller elde edilir.

$$\eta_{p+k} = \eta_{p-j} + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{p-i} \quad f_k = f(x_k, \eta_k)$$

$$\beta_{qi} = \int_{-j}^k \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{s+l}{-i+l} ds \quad i = 0, 1, \dots, q$$

Bu formüllerdeki k, j ve q nun değişik seçimleri ile değişik tipte çok adımlı metotlar elde edilir. Örneğin k = 1, j = 0 ve q = 0,1,2,... seçilirse aşağıdaki gibi tanımlanan Adams-Bashforth metotları elde edilir.

$$\eta_{p+1} = \eta_p + h \left[\beta_{q0} f_p + \beta_{q1} f_{p-1} + \dots + \beta_{qq} f_{p-q} \right]$$

$$\beta_{qi} = \int_0^1 \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{s+l}{-i+l} ds \quad i = 0, 1, \dots, q$$

k = 1, j = 0 ve q = 2 alınırsa Adams-Bashforth metotlarından bir tanesi aşağıdaki gibi elde edilir.

q = 2 için

$$\beta_{2i} = \int_0^1 \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^2 \frac{s+l}{-i+l} ds$$

olur. Buradan β_{2i} katsayıları i nin değerlerine göre

$$i = 0 \text{ için } \beta_{20} = \int_0^1 \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq 0}}^2 \frac{s+l}{l} ds = \int_0^1 \frac{s^2 + 3s + 2}{2} ds = \frac{s^3}{6} + \frac{3s^2}{4} + s \Big|_0^1 = \frac{23}{12}$$

$$i = 1 \text{ için } \beta_{21} = \int_0^1 \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq 1}}^2 \frac{s+l}{-1+l} ds = \int_0^1 \frac{s}{-1} \cdot \frac{s+2}{1} ds = - \left(\frac{s^3}{3} + s^2 \right) \Big|_0^1 = -\frac{4}{3}$$

$$i = 2 \text{ için } \beta_{22} = \int_0^1 \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq 2}}^2 \frac{s+l}{-2+l} ds = \int_0^1 \frac{s}{-2} \cdot \frac{s+1}{-1} ds = \frac{s^3}{6} + \frac{s^2}{4} \Big|_0^1 = \frac{10}{24}$$

şeklinde elde edildikten sonra bunlar

$$\eta_{p+1} = \eta_p + h \left[\beta_{20} f_p + \beta_{21} f_{p-1} + \beta_{22} f_{p-2} \right]$$

Denkleminde yerine yazılarak

$$\eta_{p+1} = \eta_p + h \left[\frac{23}{12} f_p - \frac{16}{12} f_{p-1} + \frac{5}{12} f_{p-2} \right]$$

şeklindeki Adams-Bashforth metotlarından birisi elde edilir. Eğer q = 0 alınırsa

$$\eta_{p+1} = \eta_p + h f_p$$

olur ki bu da açık Euler metodudur. Bazı Adams-Bashforth metotlarındaki β_{qi} katsayılarını gösteren tablo aşağıda verilmiştir.

Adams-Bashforth metotlarının katsayıları

β_{qi}	$i = 0$	1	2	3	4
β_{0i}	1				
$2\beta_{1i}$	3	-1			
$12\beta_{2i}$	23	-16	5		
$24\beta_{3i}$	55	-59	37	-9	
$720\beta_{4i}$	1901	-2774	2616	-1274	251

Ayrıca $k = 0$, $j = 1$ ve $q = 0,1,2,\dots$ seçilirse aşağıdaki Adams-Moulton formülleri elde edilir.

$$\eta_p = \eta_{p-1} + h[\beta_{q0}f_p + \beta_{q1}f_{p-1} + \dots + \beta_{qq}f_{p-q}]$$

Burada p yerine $p+1$ yazılırsa

$$\eta_{p+1} = \eta_p + h[\beta_{q0}f(x_{p+1}, \eta_{p+1}) + \beta_{q1}f_p + \dots + \beta_{qq}f_{p+1-q}]$$

$$\beta_{qi} = \int_{-1}^0 \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{s+l}{-i+l} ds \quad i = 0,1,\dots,q$$

denklemini elde edilir.

Verilen $\eta_p, \eta_{p-1}, \dots, \eta_{p+1-q}$ değerleri için β_{qi} denklemini η_{p+1} değerine göre genel olarak lineer olmayan bir denklem olur. Bu tür metotlara kapalı tip çok adımlı metotlar denir. Adams-Moulton metodu da kapalı tip bir metottur. Lineer olmayan bu tip denklemlerde η_{p+1} değerinin bulunması için aşağıdaki şekilde iteratif metotlar oluşturulur.

$$\eta_{p+1}^{(i+1)} = \eta_p + h[\beta_{q0}f(x_{p+1}, \eta_{p+1}^{(i)}) + \beta_{q1}f_p + \dots + \beta_{qq}f_{p+1-q}] \quad (i = 0,1,2,\dots)$$

Bu iterasyon için $\eta_{p+1}^{(0)}$ başlangıç değeri Adams-Bashforth gibi herhangi bir açık tip metottan elde edilebilir. Bunun için kullanılan Adams-Bashforth gibi açık tip metotlara prediktör metotlar ve Adams-Moulton gibi kapalı tip metotlara da korrektör metotlar denir.

Adams-Moulton metotlarının katsayıları

β_{qi}	$i = 0$	1	2	3	4
β_{0i}	1				
$2\beta_{1i}$	1	1			
$12\beta_{2i}$	5	8	-1		
$24\beta_{3i}$	9	19	-5	1	
$720\beta_{4i}$	251	646	-264	106	-19

Tüm bunların dışında eğer $k = 1, j = 1$ alınırsa Nyström metodu elde edilir.

$$\eta_{p+1} = \eta_{p-1} + h[\beta_{q0}f_p + \beta_{q1}f_{p-1} + \dots + \beta_{qq}f_{p-q}]$$

$$\beta_{qi} = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{s+l}{-i+l} ds \quad i = 0, 1, \dots, q$$

Diğer bir metot ise Milne metodudur ve bu metotta korrektör bir metottur. Euler metodu, değiştirilmiş Euler metodu ve Runge – Kutta metodunun hepsi bir başlangıç değer probleminin sayısal çözümü için başlangıç metotlarıydı. Daha öncede bahsettiğimiz gibi bir başlangıç metodu bir çözümü başlatmak için kullanılabilen bir metottur. Aksine bir devam metodu ise bir çözümü başlatmak için kullanılamayan ancak bir kere iyi başladıktan sonra devam ettirmek için kullanılabilen bir metottur. Burada da $k = 0, j = 2$ seçilir ve p ile $p + 1$ yer değiştirilerek metot elde edilir.

$$\eta_{p+1} = \eta_{p-1} + h[\beta_{q0}f(x_{p+1}, \eta_{p+1}) + \beta_{q1}f_{p-1} + \dots + \beta_{qq}f_{p+1-q}]$$

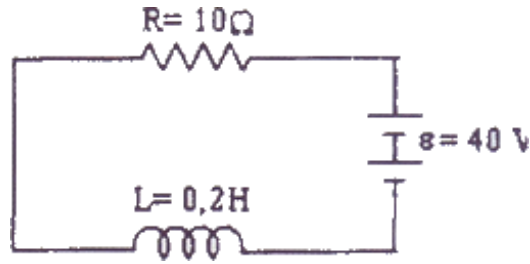
$$\beta_{qi} = \int_{-2}^0 \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{s+l}{-i+l} ds \quad i = 0, 1, \dots, q$$

BÖLÜM 4

UYGULAMA

4.1 Problemin İfadesi

Metotların test edilmesi için bir elektrik devre problemi ele alınmış ve sayısal yöntemlerle çözümü araştırılmıştır. Uygulama detayları aşağıda verilmiştir.[17]



Şekil 4.2 Devre şeması

(a) Elektromotor kuvveti $\varepsilon=40$ V olan bir üreteç, $R=10\Omega$ luk bir direnç teli ve $L=0.5$ H olan bir bobinle seri olarak bağlıdır. $I(0)=0$ olarak varsayılmıştır. Akım şiddetinin zamana bağlı olarak ifadesi şu şekilde bulunmuştur.

I , t anında devreden geçen akım şiddetini gösterebilir.

R direnci üzerindeki potansiyel düşmesi $\varepsilon_R=RI$

L bobini üzerindeki potansiyel düşmesi $\varepsilon_L=L(dI/dt)$ olmak üzere Kirchoff yasası uygulanırsa

$$RI + L \frac{dI}{dt} = \varepsilon$$

yazılır. Denklemini düzenleyecek olursak

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{\varepsilon}{L}$$

biçiminde birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu = e^{\frac{R}{L}t}$$

dir. Buna göre denklemin genel çözümü

$$Ie^{\frac{R}{L}t} = \int e^{\frac{R}{L}t} \frac{\varepsilon}{L} dt + C$$
$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

bulunur. $I(0) = 0$ başlangıç koşulu kullanılarak önceki denklemdeki C sabitinin değeri

$$C = -\frac{\varepsilon}{R}$$

elde edilir. C nin değeri yerine yazılırsa

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

bulunur. Bu ifadede R ve L nin sayısal değerleri yerine koyulursa

$$I(t) = 4(1 - e^{-50t})$$

olarak akım şiddetinin zamana bağlı ifadesi bulunur.

(b) Birbirleriyle seri olarak bağlı bulunan bir R direnci ile L bobininin uçları arasına

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

alternatif gerilimi tatbik edildiğinde $t = 0$ anında devreden geçen akımın şiddeti sıfır ise

devreden geçen akım şiddetini zamana bağlı ifadesini ve $\varepsilon = 100 \sin 40t$ V $R = 10 \Omega$ ve

$L = 0,5$ H değerleri için devreden geçen akım şiddetinin zamana bağlı ifadesini aşağıdaki şekilde bulabiliriz.

Genel çözümü bulmak için;

$$Ie^{\frac{R}{L}t} = \frac{\varepsilon_0}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt + C \quad (4.1)$$

yazılır. Bu eşitliğin ikinci tarafındaki integralin değeri

$$\int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt = e^{\frac{R}{L}t} \left[\frac{\frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t}{(R/L)^2 + \omega^2} \right] \quad (4.2)$$

dir. Bu integral değeri önceki denklemde yerine konulduğunda

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0 \frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t}{L (R/L)^2 + \omega^2} + C e^{-\frac{R}{L}t} \quad (4.3)$$

Genel çözüm bulunur. Başlangıç koşulu olarak $I(0) = 0$ kullanılırsa C integrasyon sabitinin değeri

$$C = \frac{\varepsilon_0 \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (4.4)$$

elde edilir. Bu değer genel çözümde yerine yazılırsa akım şiddetinin zamana bağlı olarak ifadesi

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0 L}{R^2 + \omega^2 L^2} \left[\frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega e^{-\frac{R}{L}t} \right] \quad (4.5)$$

bulunur. Denklemden $\varepsilon=100\sin 40t$ V, $R = 10\Omega$ ve $L = 0.5$ H değerleri yerine yazılırsa

$$\frac{dI}{dt} + 20I = 200 \sin 40t \quad (4.6)$$

eşitliği elde edilir.

Problemin diferansiyel denklemi bulunur. Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemin integrasyon çarpanı $\mu = e^{20t}$ olduğu görülür. Bu denklem çözülürse

$$e^{20t} I(t) = \int e^{20t} 200 \sin 40t dt + C \quad (4.7)$$

$$e^{20t} I(t) = \frac{200 e^{20t} [20 \sin 40t - 40 \cos 40t]}{2000} + C \quad (4.8)$$

$$I(t) = 2(\sin 40t - 2 \cos 40t) + C e^{-20t} \quad (4.9)$$

bulunur. Başlangıç koşulu olarak $I(0) = 0$ kullanılırsa C integrasyon sabitinin değeri $C = 4$ elde edilir. Bu değer denklem (4.9) yerine yazılırsa akım şiddetinin zamana bağlı olarak ifadesi

$$I(t) = 2(\sin 40t - 2 \cos 40t) + Ce^{-20t} \quad (4.10)$$

bulunur.

BÖLÜM 5

SAYISAL ÇÖZÜMLER

Önceki bölümde tanımlanmış ve çözümü açıklanmış olan uygulama nümerik analiz yöntemlerinden “Adams-Bashforth 2 adım, Adams-Bashforth 4 adım, Euler, Heun, Runge-Kutta 4 adım, Runge-Kutta 5 adım ve Taylor” ile ayrı ayrı çözülmüştür. Analitik ve nümerik sonuç grafikleri aşağıdaki gibi alınmıştır.

Sayısal çözümlerin eldesinde “MathWorks – MATLAB” programından yararlanılmıştır.

Çıktılar Matlab programından alınan “figure” dosyalarından elde edilmiştir. Grafikler her bir metot için düşük iterasyonlardan yüksek iterasyonlara kadar çıkarılmıştır. Metot başlıkları altında en yüksek iterasyon sayısına sahip olan grafiklerdeki sayısal çözümlerin her biri analitik çözüme eşit uzaklıktadır ve bu uzaklığın hata değeri 0.000331... şeklindedir.

Sayısal çözümlerde kullanılan donanım özellikleri kısaca şu şekildedir;

İşlemci: İntel i3 2.27GHz-x64

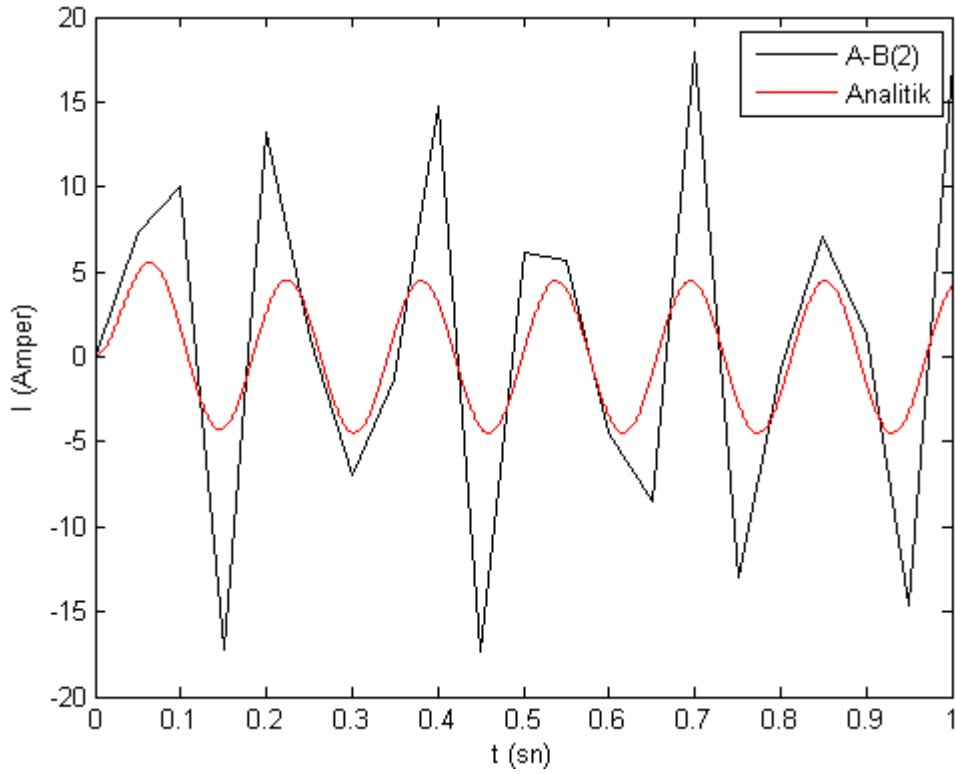
Ram: 2 GB DDR3 Ram

İşletim Sistemi: Windows XP- X64

Genel olarak her bir metot için birkaç farklı iterasyon sayısında figür alınmış ve iterasyon miktarının çözüm yakınsamasına olan etkisinin gösterilmesi amaçlanmıştır.

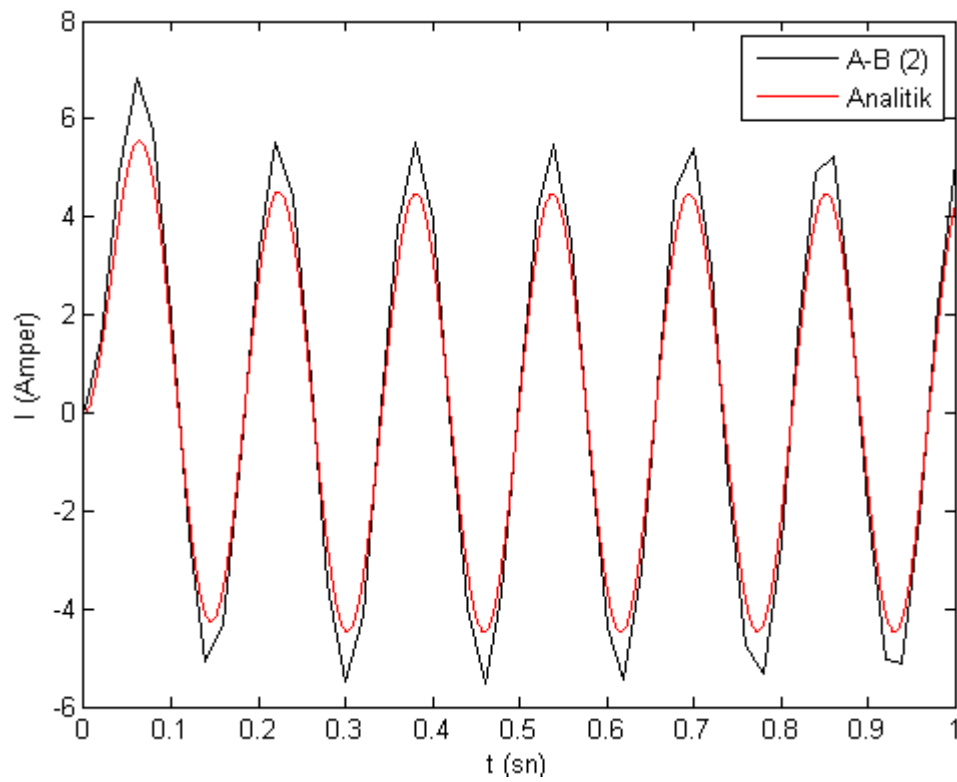
6.1 Adams-Bashforth (2.mertebe)

Aşağıdaki grafiklerde bağımsız değişken t 0-1 aralığında sırasıyla 20,50,60 ve 3227 aralığa bölünmüştür . Bu aralıklarda Adams-Bashforth (2. mertebe) metodu kullanılmıştır.3227 iterasyonla yapılan çözümde sayısal çözümün analitik çözüme 0.000331... kadar hata ile yaklaşması amaçlanmıştır.

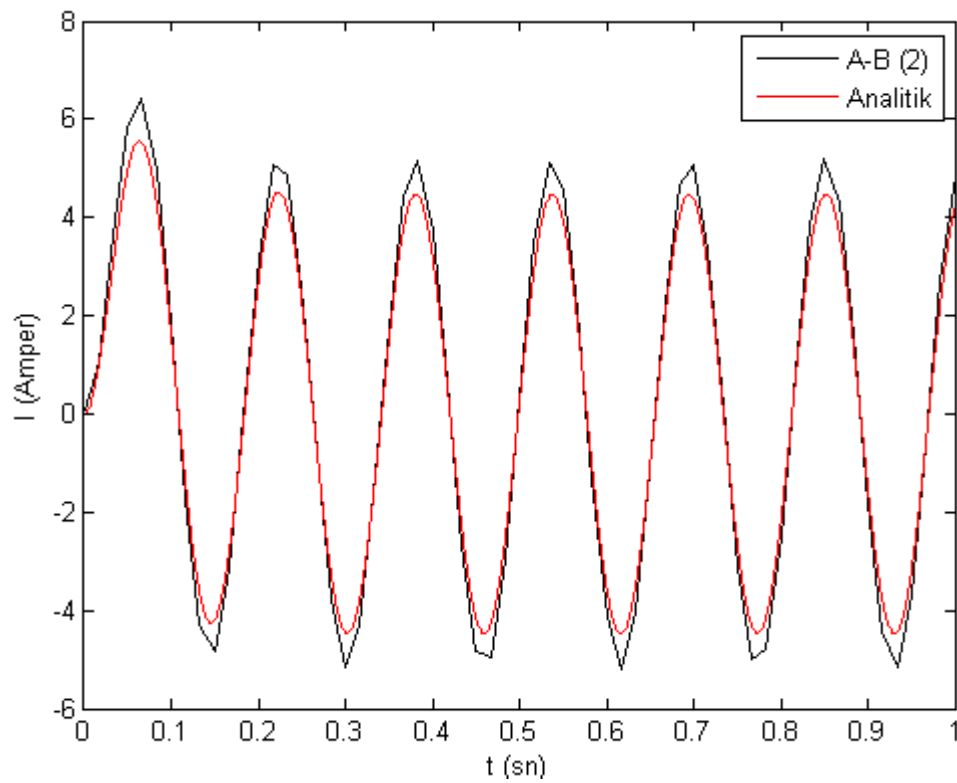


Adams-Bashforth (2.mertebeden) 20 iterasyon

Bağımsız değişken t 'nin 20 aralığa bölündüğü grafikte bazı noktalarda analitik çözüme yaklaşılmış ,bazı noktalarda analitik çözümden çok uzaklaşılmıştır.

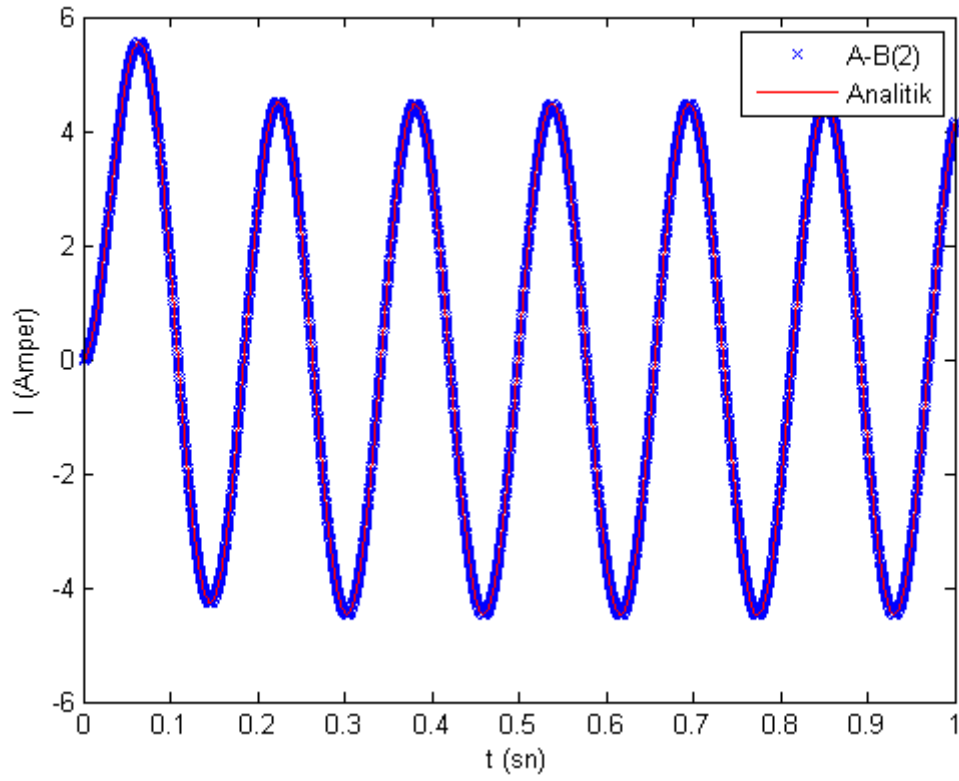


Adams-Bashforth (2.mertebeden) 50 iterasyon



Adams-Bashforth (2.mertebeden) 60 iterasyon

Bağımsız değişken t 'nin 50 ve 60 aralığa bölündüğü grafiklerde çözüm grafiğinin analitik çözüm grafiğine daha çok yaklaştığı görülüyor.

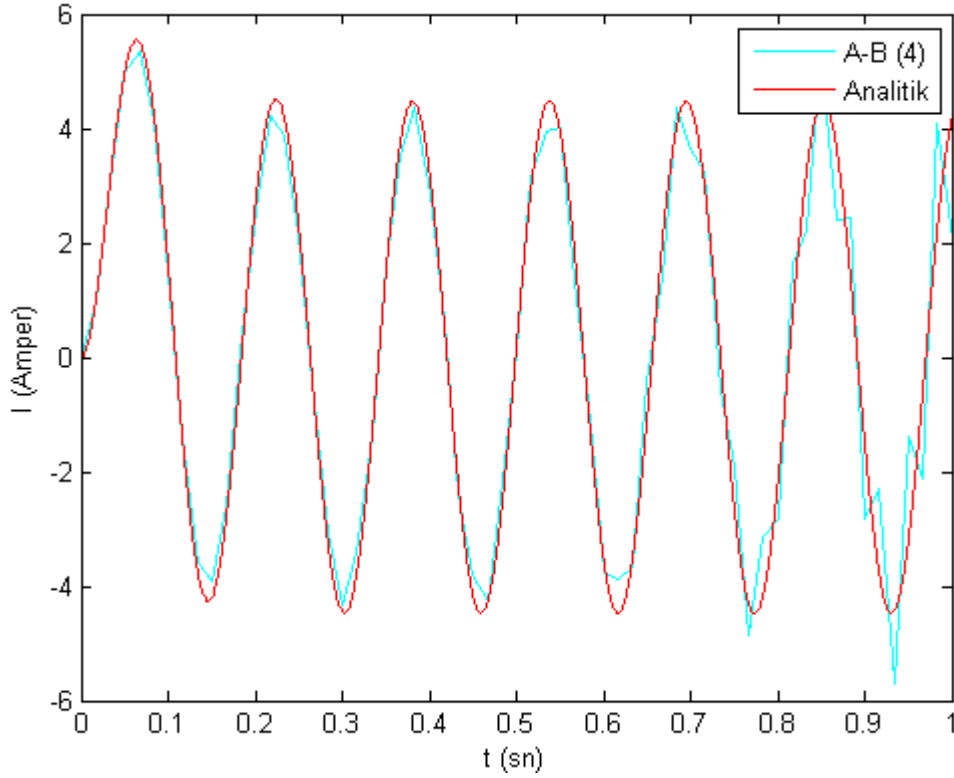


Adams-Bashforth (2.mertebeden) 3227iterasyon

Bağımsız değişken t 'nin 3227 aralığa bölündüğü grafikte ise sayısal çözüm ve analitik çözüm arasındaki fark 0.000331... şeklindedir. Analitik çözüm grafiği ile sayısal çözüm grafiğinin çakışmaya yakın bir durumda olduğu görülüyor.

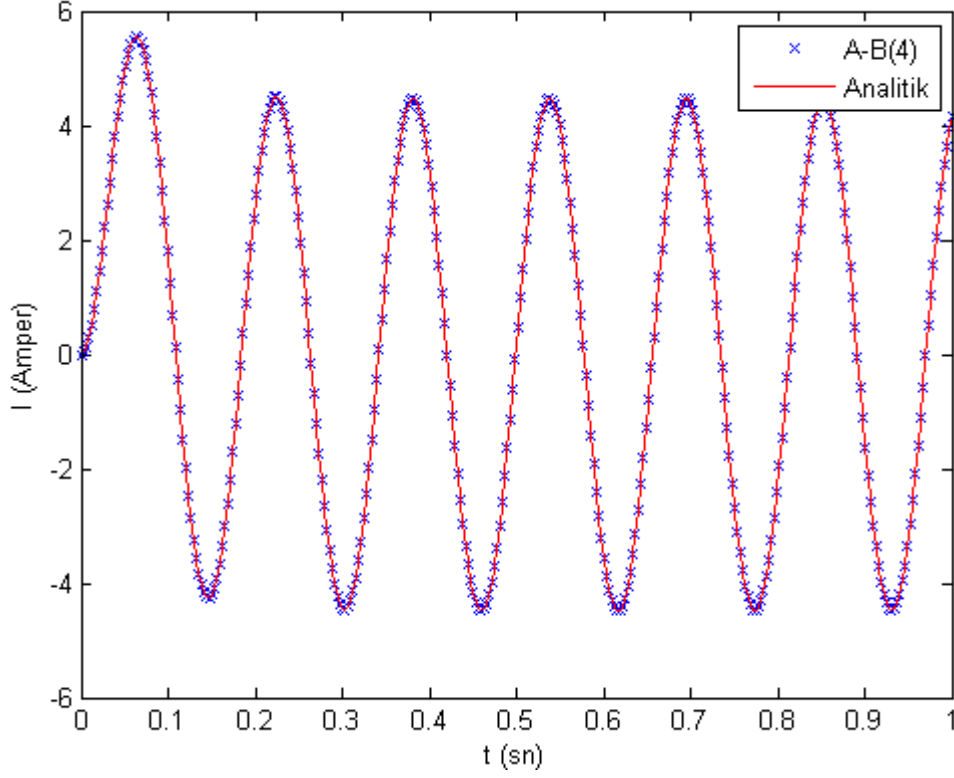
6.2 Adams-Bashforth (4.mertebe)

Aşağıdaki grafiklerde bağımsız değişken t 0-1 aralığında sırasıyla ,60 ve 333 aralığa bölünmüştür . Bu aralıklarda Adams-Bashforth (4. mertebe) metodu kullanılmıştır.333 iterasyonla yapılan çözümde sayısal çözümün analitik çözüme 0.000331... kadar hata ile yaklaşması amaçlanmıştır.



Adams-Bashforth (4.mertebeden) 60 Iterasyon

Bağımsız değişken t 'nin 60 aralığa bölündüğü grafikte sayısal çözüm grafiği analitik çözüm grafiğine çok yakın olmasına rağmen bazı noktalarda sapmalar görülüyor.Adams-Bashforth (2.mertebeden) 60 iterasyondaki sayısal çözüm grafiğine göre analitik çözüme daha çok yaklaşmıştır.

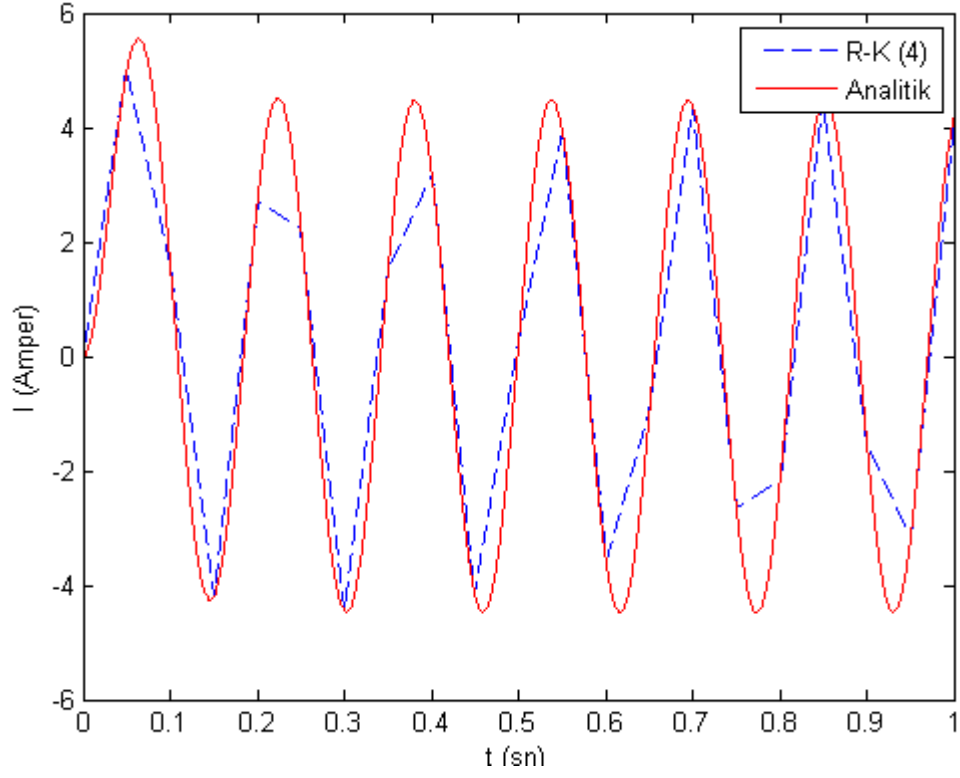


Adams-Bashforth (4.mertebeden) 333Iterasyon

Bağımsız değişken t 'nin 333 aralığa bölündüğü grafikte sayısal çözüm ve analitik çözüm arasındaki fark 0.000331... şeklindedir. Adams-Bashforth (2.mertebeden) metoduna göre analitik çözüme daha az iterasyon ile yaklaşmıştır. Analitik çözüm grafiği ile sayısal çözüm grafiğinin çakışmaya yakın bir durumda olduğu görülüyor..

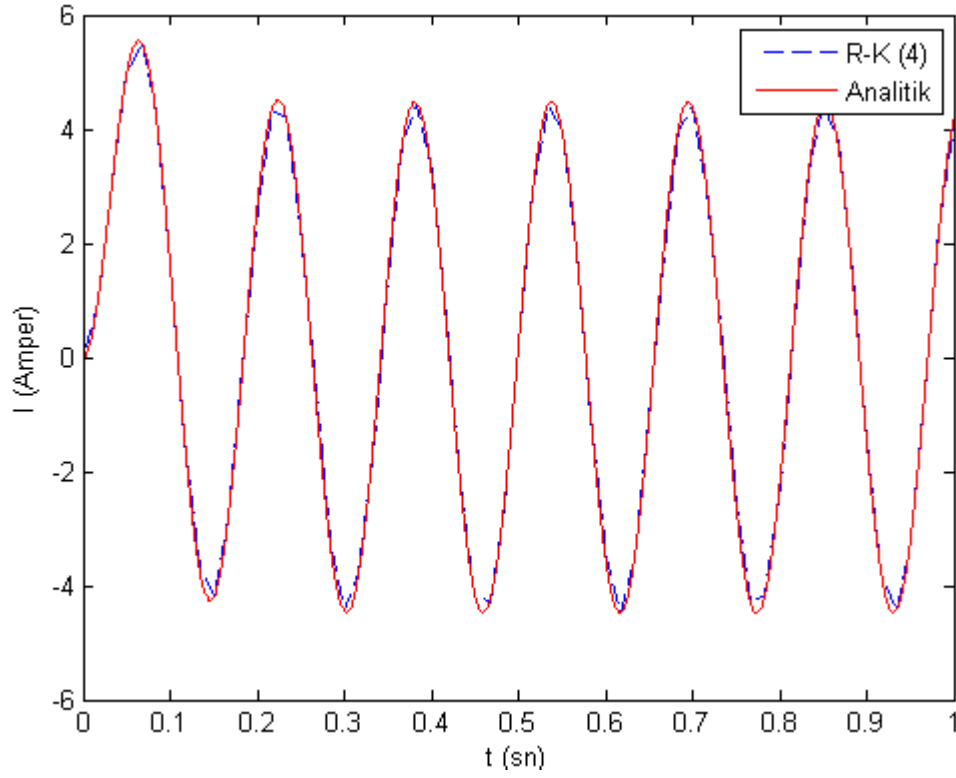
6.3 Runge Kutta (4.mertebe)

Aşağıdaki grafiklerde bağımsız değişken t 0-1 aralığında sırasıyla 20,60 ve 70 aralığa bölünmüştür . Bu aralıklarda Runge-Kutta (4. mertebe) metodu kullanılmıştır.70 iterasyonla yapılan çözümde sayısal çözümün analitik çözüme 0.000331... kadar hata ile yaklaşması amaçlanmıştır.



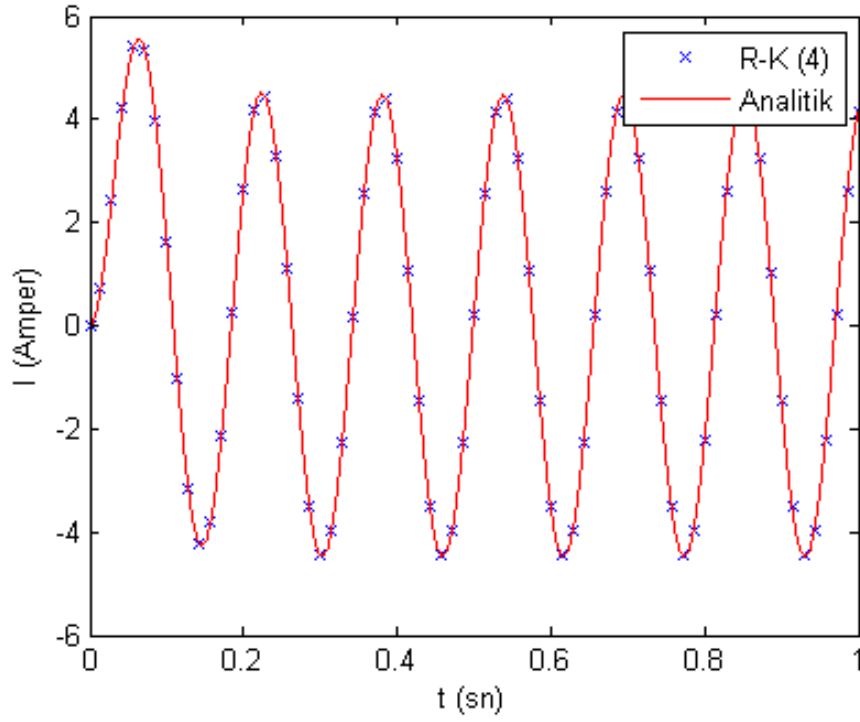
Runge Kutta (4.mertebe) 20 iterasyon

Bağımsız değişken t 'nin 20 aralığa bölündüğü grafikte bazı noktalarda sayısal çözüm grafiği analitik çözüm grafiğine yaklaşmış ,bazı noktalarda analitik çözüm grafiğinden uzaklaşmıştır. Ancak yine de Adams-Bashford(2.mertebe) 20 iterasyondaki sayısal çözüm grafiğine göre analitik çözüme daha yakındır.



Runge Kutta (4.mertebe) 60 iterasyon

Bağımsız değişken t 'nin 60 aralığa bölündüğü grafikte sayısal çözüm grafiğinin analitik çözüm grafiğine daha çok yaklaştığı görülüyor. Adams-Bashforth (4.mertebeden) 60 iterasyondaki sayısal çözüm grafiğine göre analitik çözüm grafiğine daha çok yaklaştığı görülüyor .

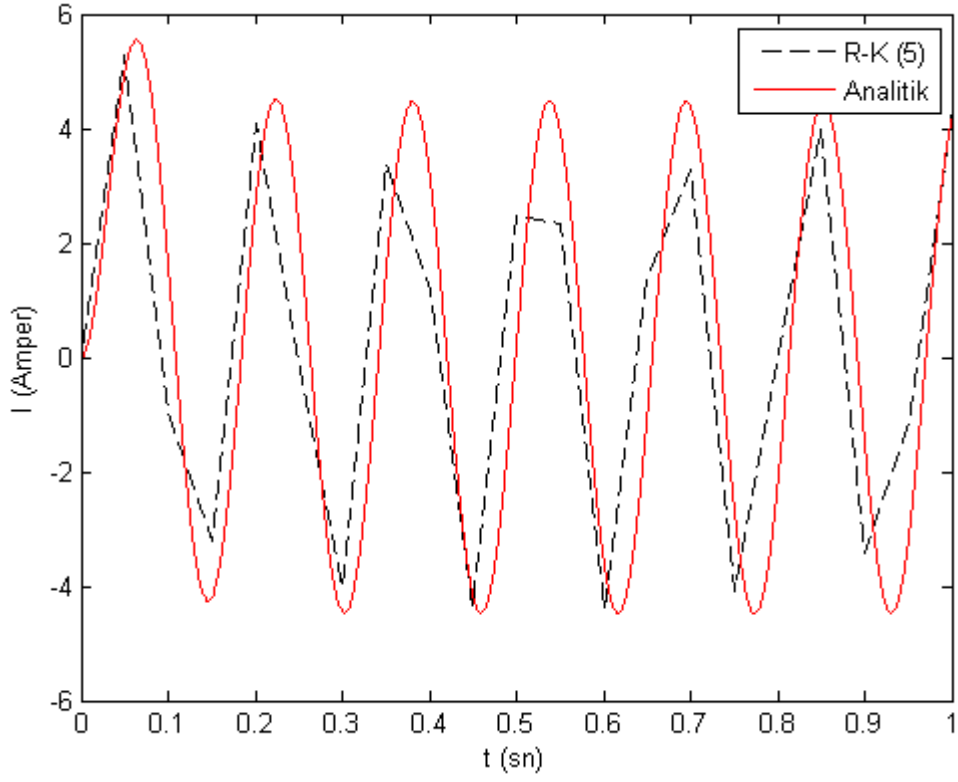


Runge Kutta (4.mertebe) 70iterasyon

Bağımsız değişken t 'nin 70 aralığa bölüldüğü grafikte sayısal çözüm ve analitik çözüm arasındaki fark 0.000331... şeklindedir. Diğer metotlara göre analitik çözüme daha az iterasyon ile yaklaşmıştır. Analitik çözümü grafiği ile sayısal çözüm grafiğinin çakışmaya yakın bir durumda olduğu görülüyor..

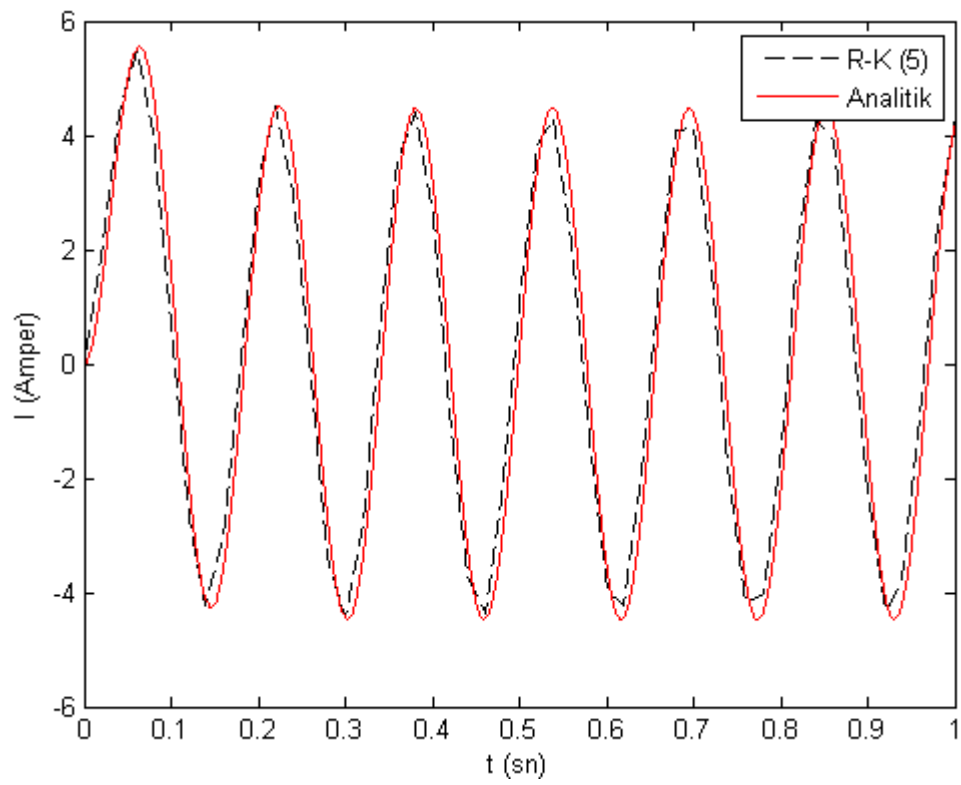
6.4 Runge Kutta (5.mertebe)

Aşağıdaki grafiklerde bağımsız değişken t 0-1 aralığında sırasıyla 20,50,60 ve 138970 aralığa bölünmüştür . Bu aralıklarda Runge-Kutta (5. mertebe) metodu kullanılmıştır.138970 iterasyonla yapılan çözümde sayısal çözümün analitik çözüme 0.000331... kadar hata ile yaklaşması amaçlanmıştır.

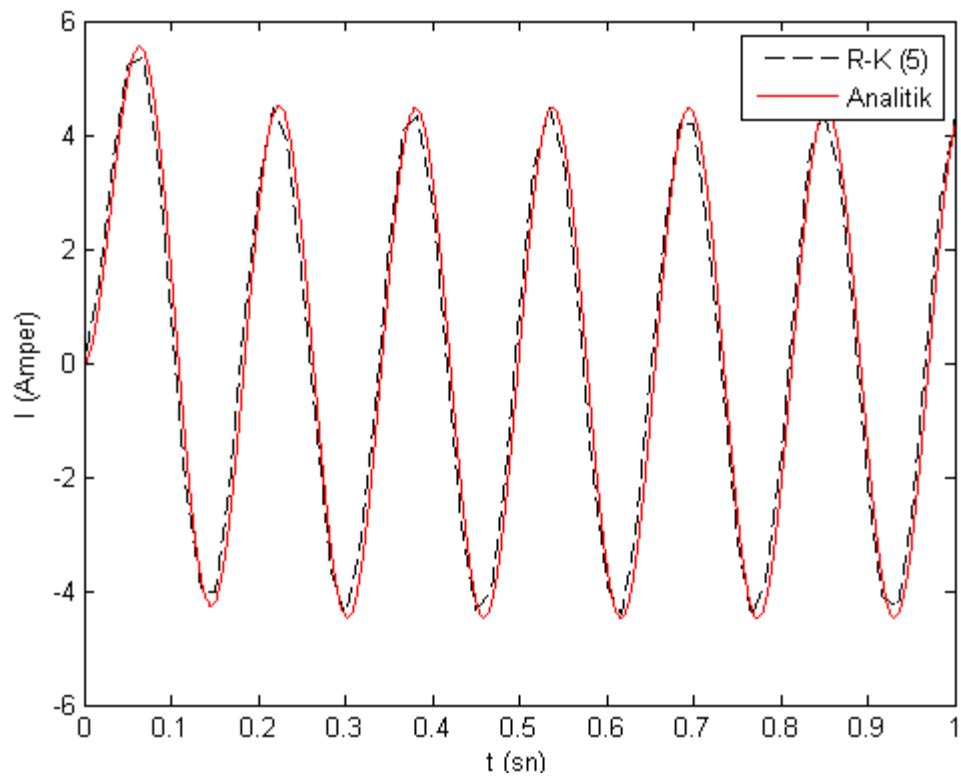


Runge Kutta (5.mertebe) 20 iterasyon

Bağımsız değişken t 'nin 20 aralığa bölündüğü grafikte bazı noktalarda sayısal çözüm grafiği analitik çözüm grafiğine yaklaşmış ,bazı noktalarda analitik çözüm grafiğinden uzaklaşmıştır. Runge-Kutta (4.mertebe) 20 iterasyondaki sayısal çözüm grafiğinin analitik çözüm grafiğine yaklaştığı kadar yaklaşmadığı görülüyor.

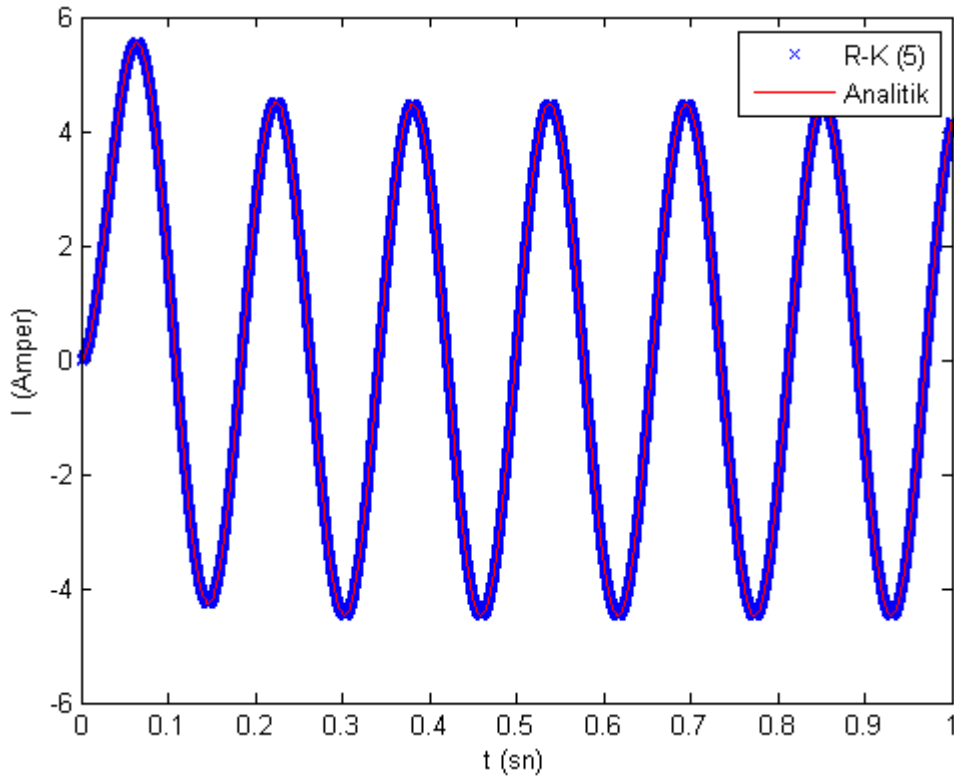


Runge Kutta (5.mertebe) 50 iterasyon



Runge Kutta (5.mertebe) 60 iterasyon

Bağımsız değişken t 'nin 50 ve 60 aralıklara bölündüğü grafikte sayısal çözüm grafiğinin analitik çözüm grafiğine daha çok yaklaştığı görülüyor. Bağımsız değişken t 'nin 60 aralığa bölündüğü grafikte Runge-Kutta (4.mertebe) 60 iterasyondaki sayısal çözüm grafiğinin analitik çözüm grafiğine yaklaştığı kadar analitik çözüm grafiğine yaklaşılmadığı görülüyor.



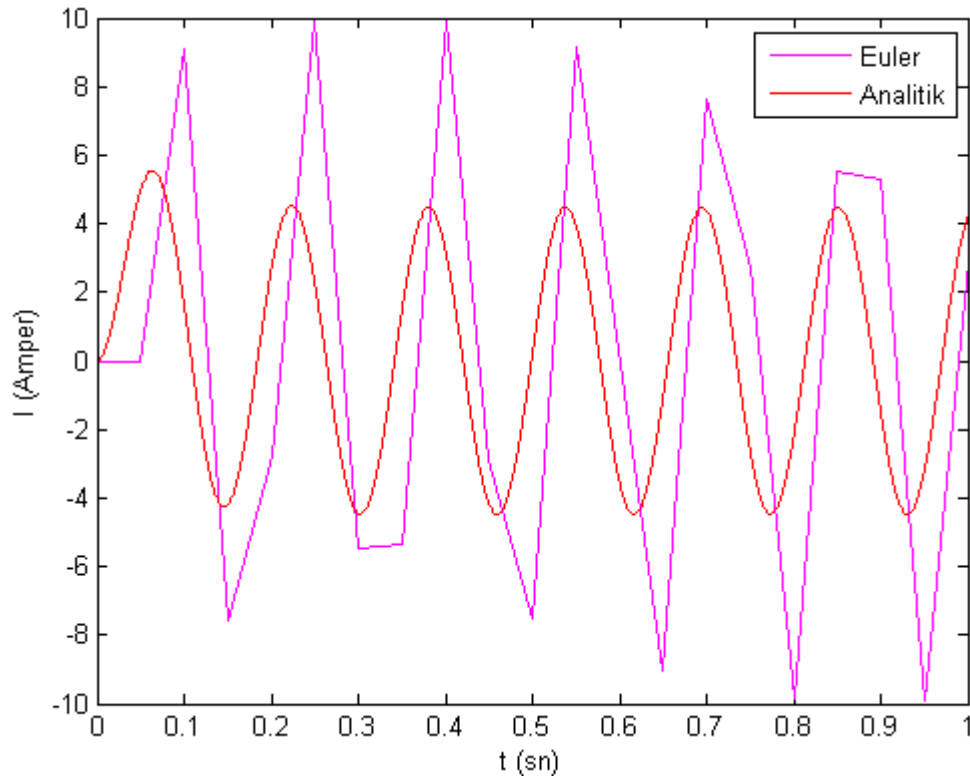
Runge Kutta (5.mertebe) 138970iterasyon

Bağımsız değişken t 'nin 138970 aralığa bölündüğü grafikte sayısal çözüm ve analitik çözüm arasındaki fark 0.000331... şeklindedir. Adams-Bashforth (2.mertebeden), Adams-Bashforth(4.mertebeden), Runge-Kutta(4.mertebeden), Heun ve Taylor metotlarına göre analitik çözüme daha fazla iterasyon ile yaklaşmıştır. Analitik çözüm grafiği ile sayısal çözüm grafiğinin çakışmaya yakın bir durumda olduğu görülüyor..

6.5 Euler

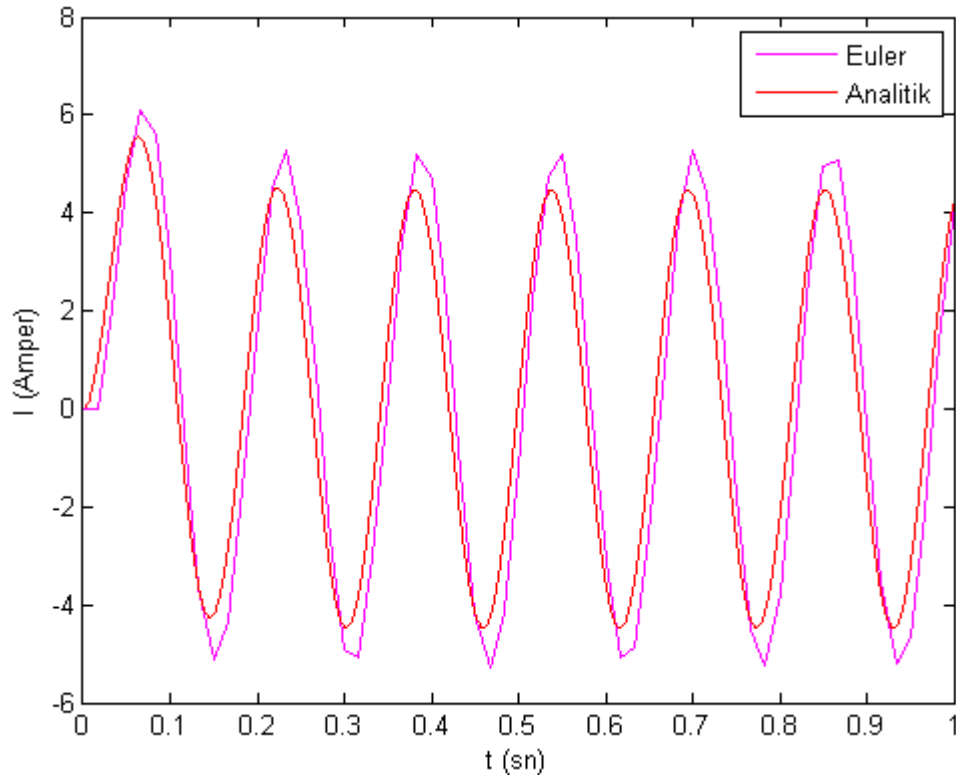
Aşağıdaki grafiklerde bağımsız değişken t 0-1 aralığında sırasıyla 20,60 ve 248500 aralığa bölünmüştür . Bu aralıklarda Euler metodu kullanılmıştır.248500 iterasyonla

yapılan çözümde sayısal çözümün analitik çözüme 0.000331... kadar hata ile yaklaşması amaçlanmıştır.



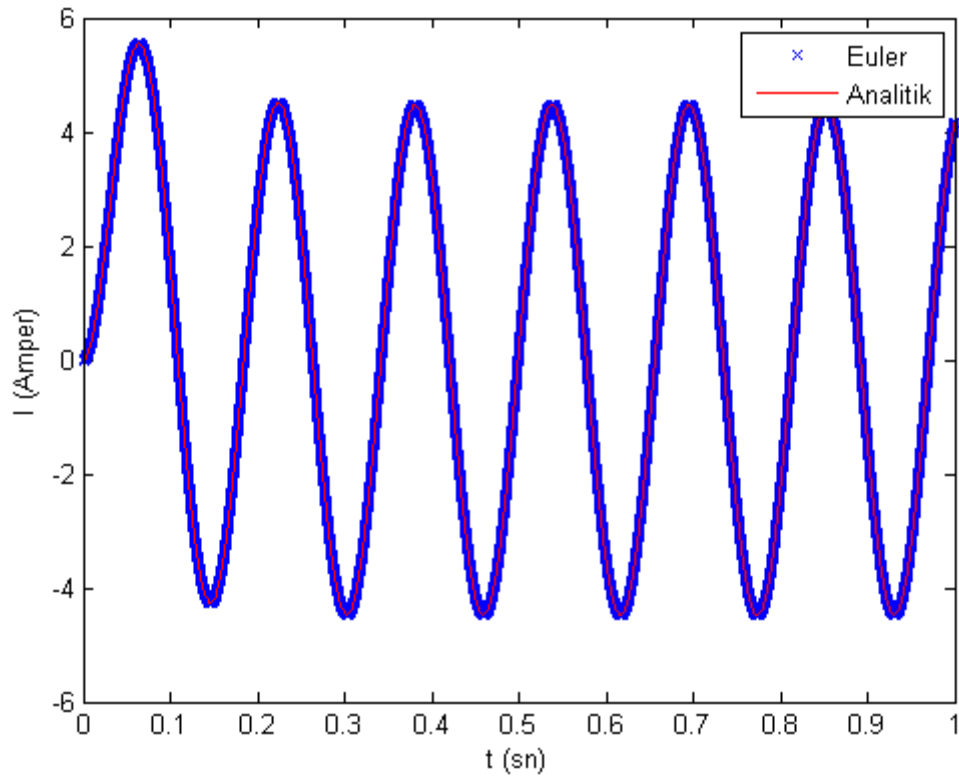
Euler 20 iterasyon

Bağımsız değişken t 'nin 20 aralığa bölündüğü grafikte bazı noktalarda sayısal çözüm grafiği analitik çözüm grafiğine yaklaşmış ,bazı noktalarda analitik çözüm grafiğinden uzaklaşmıştır. Runge-Kutta (4.mertebe) 20 iterasyondaki sayısal çözüm grafiğinin analitik çözüm grafiğine yaklaştığı kadar analitik çözüme yaklaşmadığı ve Adams-Bashford(2.mertebe) 20 iterasyondaki sayısal çözüm grafiğine göre analitik çözüme daha çok yaklaştığı görülüyor.



Euler 60 iterasyon

Bağımsız değişken t 'nin 60 aralığa bölündüğü grafikte sayısal çözüm grafiğinin analitik çözüm grafiğine daha çok yaklaştığı ve Runge-Kutta (4.mertebe) 60 iterasyondaki sayısal çözüm grafiğinin analitik çözüm grafiğine yaklaştığı kadar analitik çözüm grafiğine yaklaşılmadığı görülüyor.

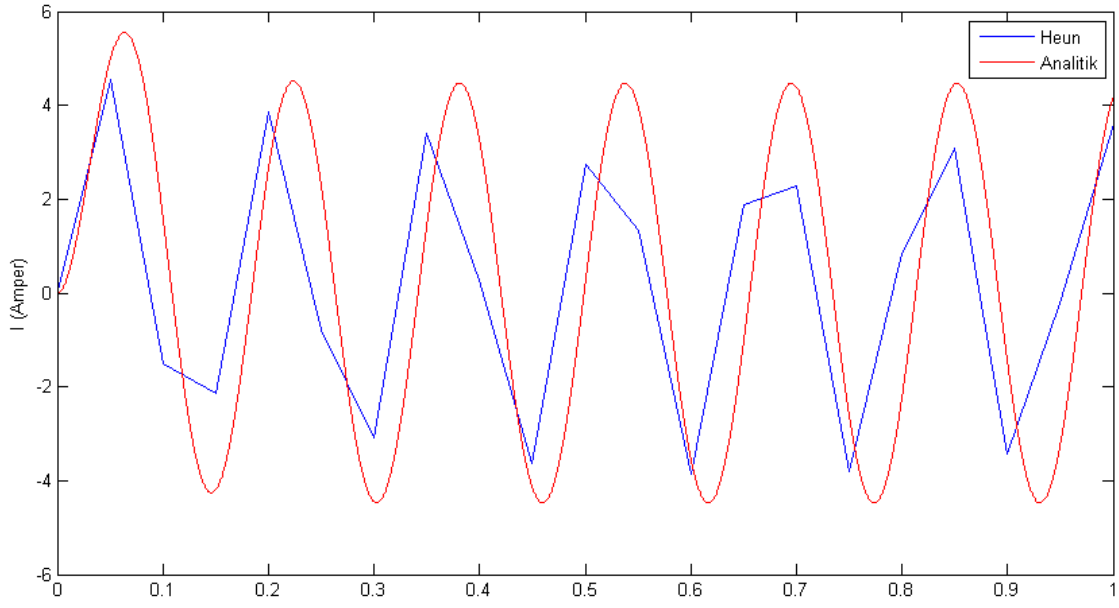


Euler 248500iterasyon

Bağımsız değişken t 'nin 248500 aralığa bölündüğü grafikte sayısal çözüm ve analitik çözüm arasındaki fark 0.000331... şeklindedir. Diğer metotlaragöre analitik çözüme daha fazla iterasyon ile yaklaşmıştır. Analitik çözüm grafiği ile sayısal çözüm grafiğinin çakışmaya yakın bir durumda olduğu görülüyor..

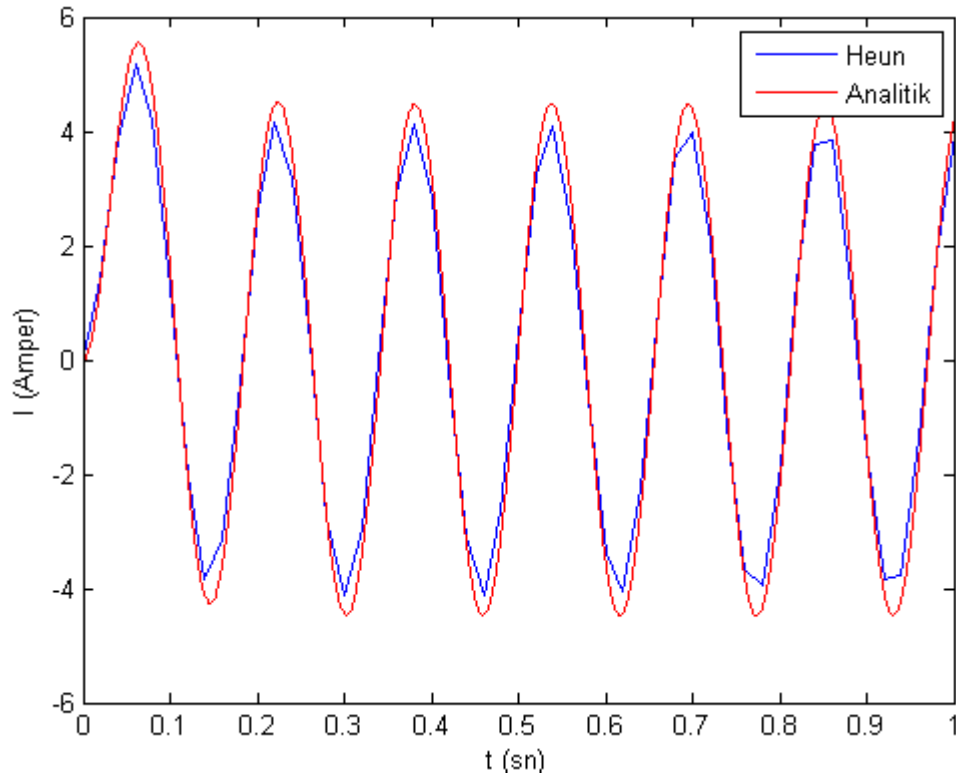
6.6 Heun (Düzenlenmiş Euler Yöntemi)

Aşağıdaki grafiklerde bağımsız değişken t 0-1 aralığında sırasıyla 20,50,60 ve 1801 aralığa bölünmüştür . Bu aralıklarda Heun metodu kullanılmıştır.1801 iterasyonla yapılan çözümde sayısal çözümün analitik çözüme 0.000331... kadar hata ile yaklaşması amaçlanmıştır.

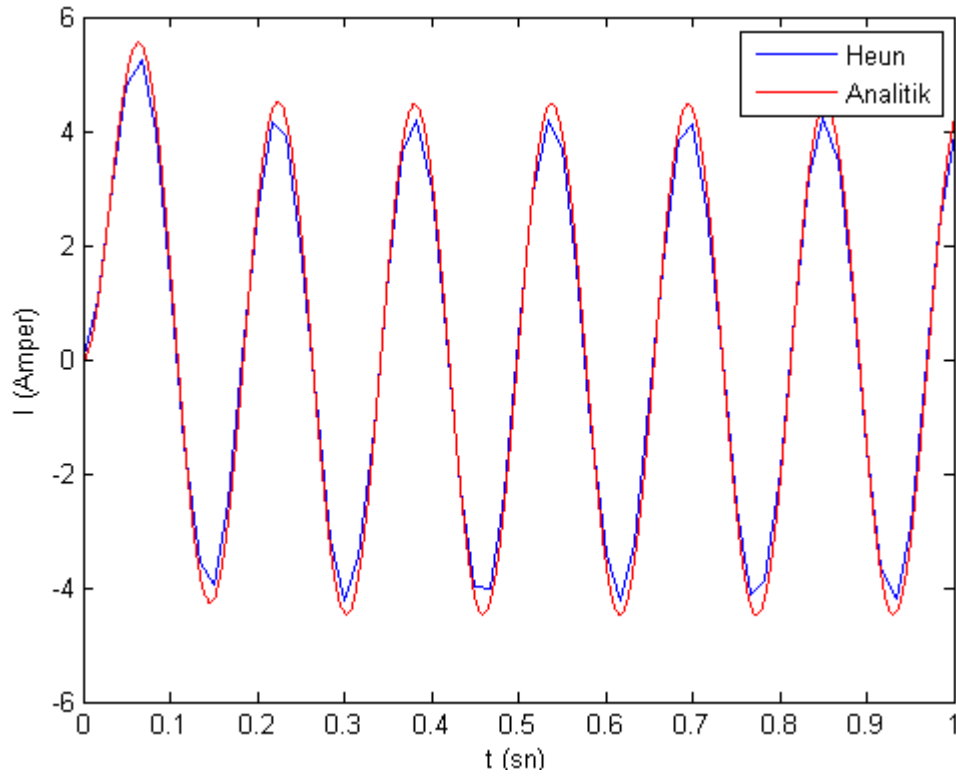


Heun 20 iterasyon

Bağımsız değişken t 'nin 20 aralığa bölündüğü grafikte bazı noktalarda sayısal çözüm grafiği analitik çözüm grafiğine yaklaşmış ,bazı noktalarda analitik çözüm grafiğinden uzaklaşmıştır. Runge-Kutta (4.mertebe) 20 iterasyon ve Runge-Kutta (5.mertebe) 20 iterasyondaki sayısal çözüm grafiklerinin analitik çözüm grafiğine yaklaştığı kadar analitik çözüme yaklaşmadığı ve Adams-Bashford(2.mertebe) 20 iterasyon Euler 20 iterasyondaki sayısal çözüm grafiklerine göre analitik çözüme daha çok yaklaştığı görülüyor.



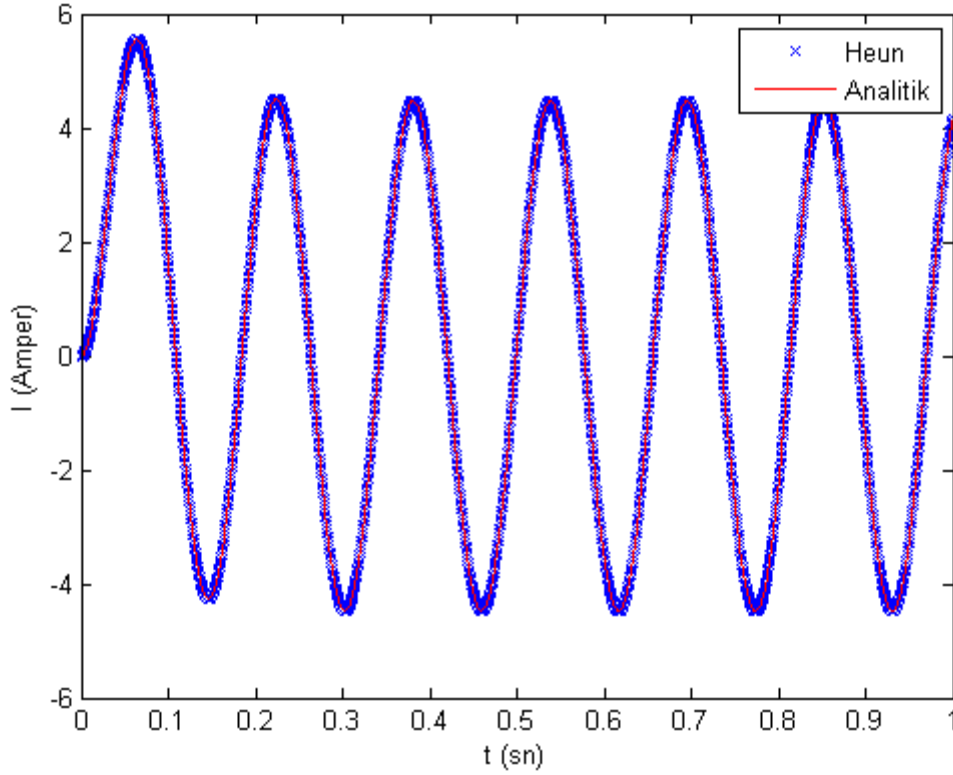
Heun 50 iterasyon



Heun 60 iterasyon

Bağımsız değişken t 'nin 50 ve 60 aralıklara bölündüğü grafikte sayısal çözüm grafiğinin analitik çözüm grafiğine daha çok yaklaştığı görülüyor. Bağımsız değişken t 'nin 60

aralığa bölündüğü grafikte Runge-Kutta (4.mertebe) 60 iterasyon ve Runge-Kutta (5.mertebe) 60 iterasyondaki sayısal çözüm grafiklerinin analitik çözüm grafiğine yaklaştığı kadar analitik çözüm grafiğine yaklaşılmadığı görülüyor.

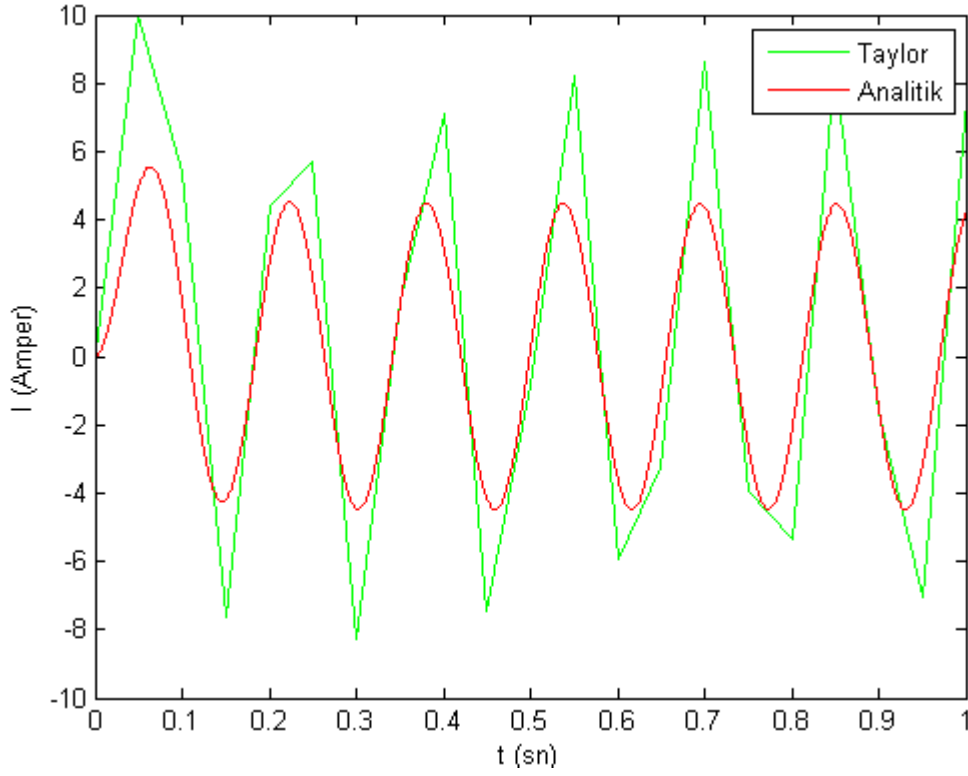


Heun 1801iterasyon

Bağımsız değişken t 'nin 1801 aralığa bölündüğü grafikte sayısal çözüm ve analitik çözüm arasındaki fark 0.000331... şeklindedir. Adams-Bashforth (4.mertebeden), Runge-Kutta (4.mertebeden) metotlarına göre analitik çözüme daha fazla iterasyon ile yaklaşmıştır. Diğer metotlara göre dah az iterasyon ile analitik çözüme yaklaşmıştır. Analitik çözüm grafiği ile sayısal çözüm grafiğinin çakışmaya yakın bir durumda olduğu görülüyor..

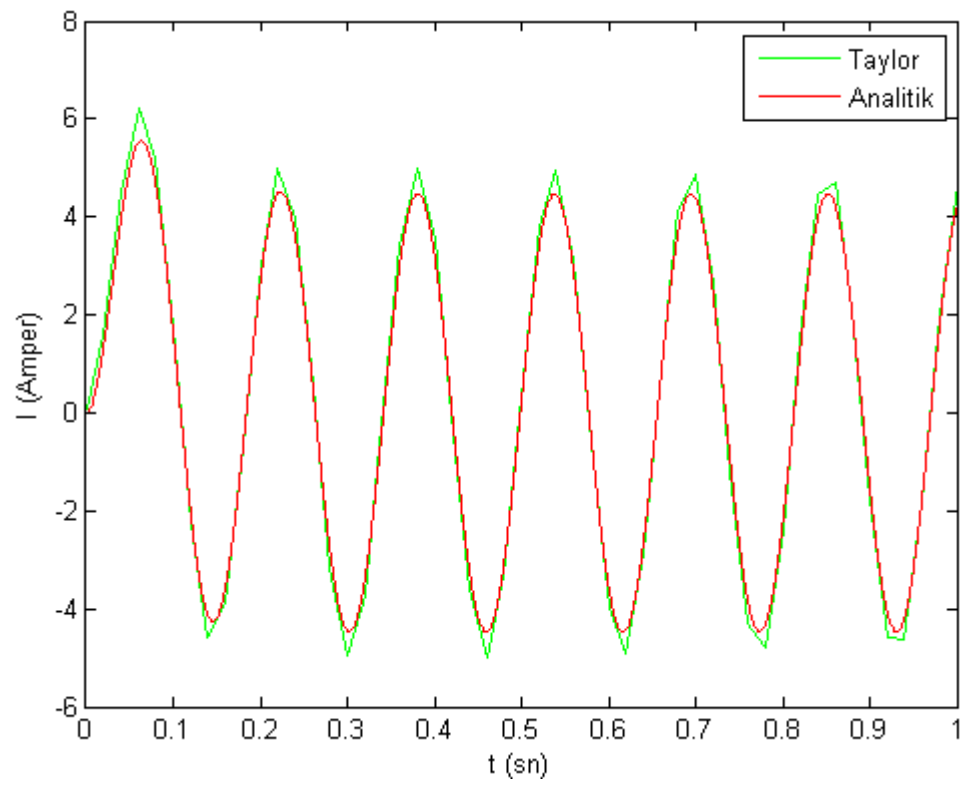
6.7 Taylor Seri Açılımı

Aşağıdaki grafiklerde bağımsız değişken t 0-1 aralığında sırasıyla 20,50,60 ve 2047 aralığa bölünmüştür . Bu aralıklarda Taylor metodu kullanılmıştır.2047 iterasyonla yapılan çözümde sayısal çözümün analitik çözüme 0.000331... kadar hata ile yaklaşması amaçlanmıştır.

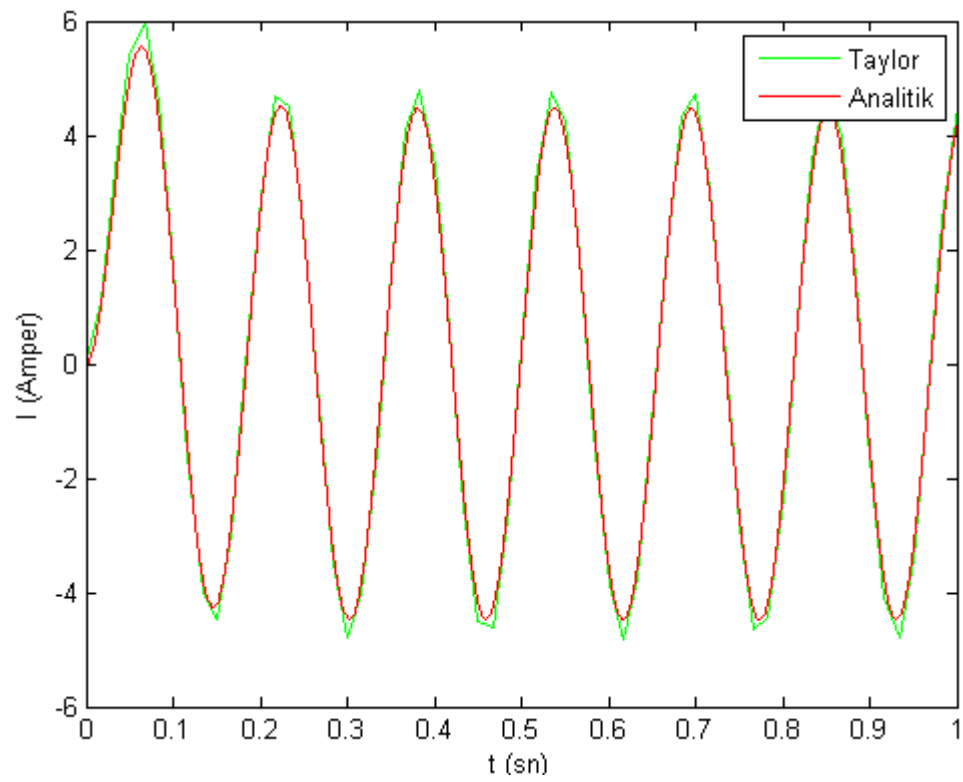


Taylor 20 iterasyon

Bağımsız değişken t 'nin 20 aralığa bölündüğü grafikte bazı noktalarda sayısal çözüm grafiği analitik çözüm grafiğine yaklaşmış ,bazı noktalarda analitik çözüm grafiğinden uzaklaşmıştır. Adams-Bashford(2.mertebe) 20 iterasyon ve Euler 20 iterasyondaki sayısal çözüm grafiklerine göre analitik çözüme daha çok yaklaştığı bunların dışındaki metotların sayısal çözüm grafiklerine göre de analitik çözüme daha az yaklaştığı görülüyor.

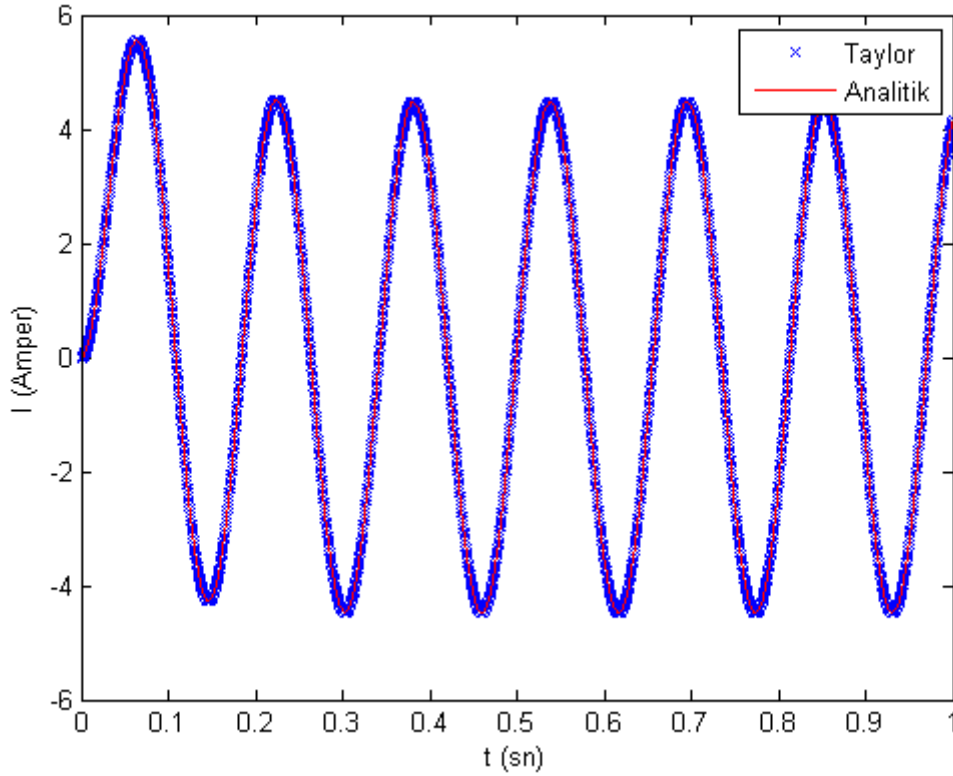


Taylor 50 iterasyon



Taylor 60 iterasyon

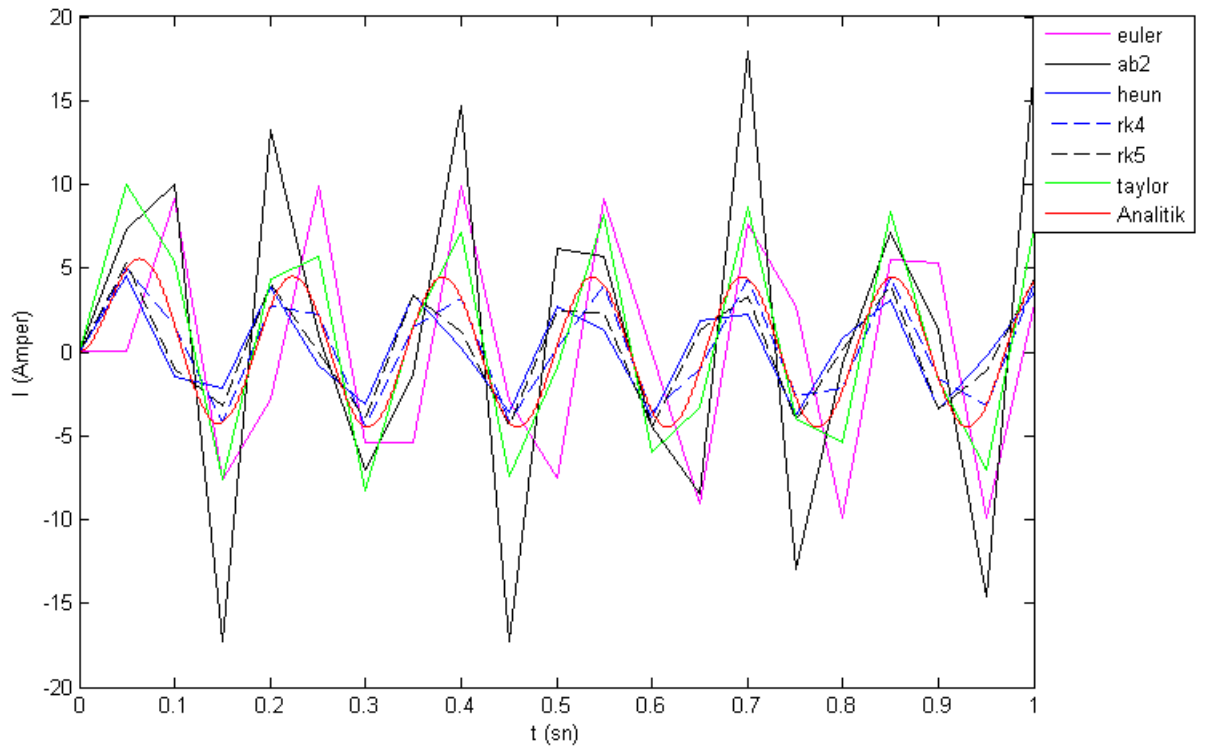
Bağımsız değişken t 'nin 50 ve 60 aralıklara bölündüğü grafikte sayısal çözüm grafiğinin analitik çözüm grafiğine daha çok yaklaştığı görülüyor. Bağımsız değişken t 'nin 60 aralığa bölündüğü grafikte Runge-Kutta (4.mertebe) 60 iterasyon ve Runge-Kutta (5.mertebe) 60 daki sayısal çözüm grafiklerinin analitik çözüm grafiğine yaklaştığı kadar analitik çözüm grafiğine yaklaşılmadığı görülüyor.



Taylor 2047iterasyon

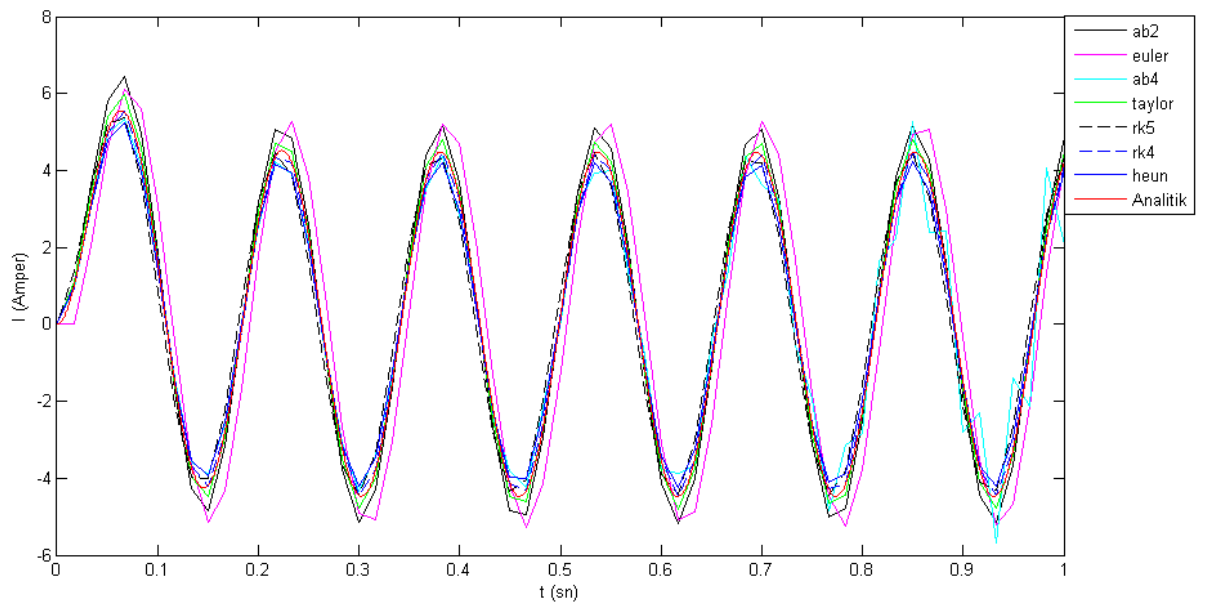
Bağımsız değişken t 'nin 2047 aralığa bölündüğü grafikte sayısal çözüm ve analitik çözüm arasındaki fark 0.000331... şeklindedir. Adams-Bashforth (4.mertebeden), Runge-Kutta (4.mertebeden) ve Heun metotlarına göre analitik çözüme daha fazla iterasyon ile yaklaşmıştır. Diğer metotlara göre dah az iterasyon ile analitik çözüme yaklaşmıştır. Analitik çözüm grafiği ile sayısal çözüm grafiğinin çakışmaya yakın bir durumda olduğu görülüyor..

6.8 Tüm metodlar



Tüm metodlar 20 iterasyon

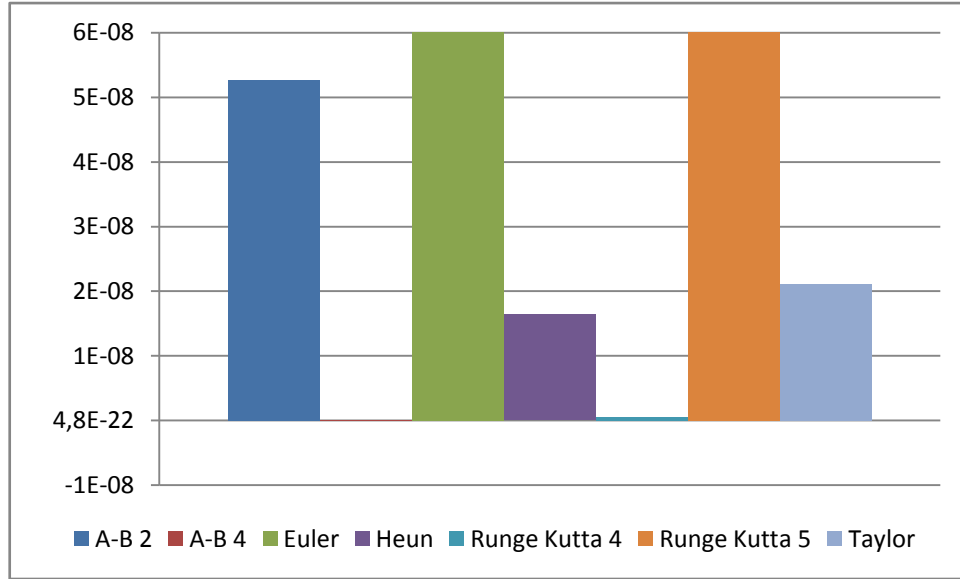
Bu grafikte analitik çözüme en çok Runge-Kutta (4. mertebe) metodu yaklaşıyor daha sonra analitik çözüme yakınlık sıralarına göre Runge-Kutta (5.mertebe), Heun,Taylor,Euler ve Adams-Bashford(2. mertebe) metotları geliyor.



Tüm metodlar 60 iterasyon

Bu grafikte bağımsız değişken t 60 aralığa bölünmüş ve tüm metotların sayısal çözüm grafiği analitik çözüm grafiğine daha çok yaklaşmıştır. Bazı metotların grafiği birbiriyle insan gözüyle kıyaslanamayacak kadar analitik analitik çözüme yaklaşmış olmasına rağmen bu grafikte analitik çözüme yaklaşma açısından, bağımsız değişken t nin 20 aralığa bölündüğü grafikteki sıralamaya benzer bir sıralama vardır.

6.9 Hata ve Performans Grafikleri

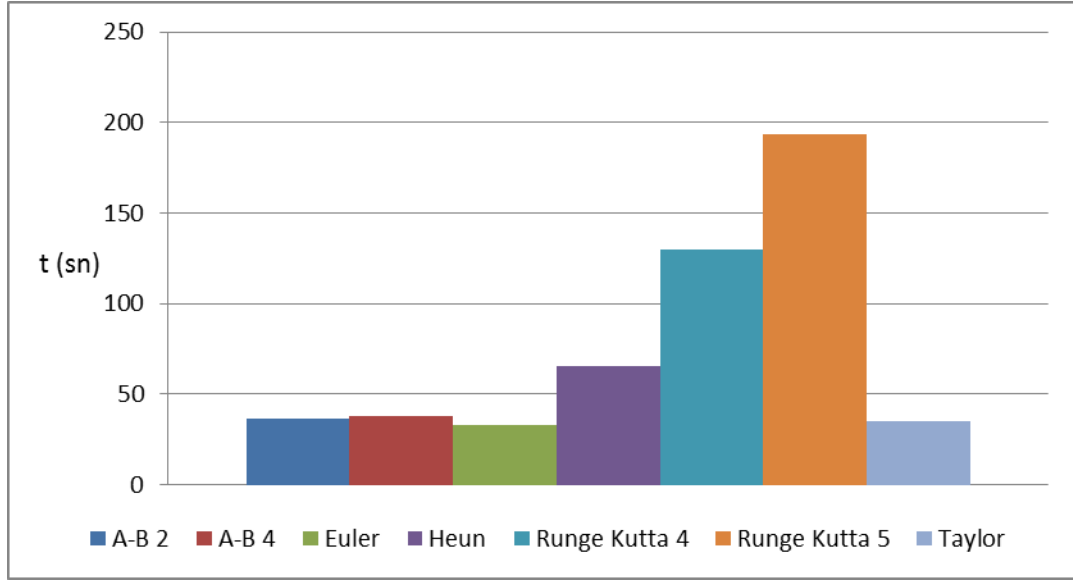


Çizelge 5.1Tüm metotların hata miktarları (256000)

Tüm metotlar Hata Miktarları	
Adams-Bahsforth (2.mertebe)	5.27069E-08
Adams-Bahsforth (4.mertebe)	5.6575E-11
Euler	0.000321637
Heun	1.63723E-08
Runge-Kutta (4.mertebe)	5.65748E-10
Runge-Kutta (5.mertebe)	0.000180002
Taylor	2.10839E-08

Çizelge 5. 2 Tüm metotlar hata değerleri

Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2 'den de anlaşılacağı gibi Bağımsız değişken t 'yi çok yüksek sayıda aralığa bölersek, Analitik çözüme en çok Adams-Bashford(4.mertebe) metodu yaklaşıyor



Çizelge 5.3Tüm metotlar için Performans miktarları

Tüm metotlar Performans Miktarları	
Adams-Bahsforth (2.mertebe)	36.482014
Adams-Bahsforth (4.mertebe)	37.716756
Euler	33.352905
Heun	65.429855
Runge-Kutta (4.mertebe)	129.978477
Runge-Kutta (5.mertebe)	193.741785
Taylor	35.390032

Çizelge 5. 4 Tüm metotlar Performans değerleri

Çizelge 5.3 ve Çizelge 5.4'ten de anlaşılacağı gibi elektrik devresi problemi için en hızlı çalışan metot Euler metodu olarak saptanmıştır.

Sıra	Sabit hata – Performans değerleri	Süre(sn)	İterasyon Sayısı
1.	Runge-Kutta (4.mertebe)	0.046626	70
2.	Adams-Bahsforth (4.mertebe)	0.066898	333
3.	Taylor	0.307201	2047
4.	Adams-Bahsforth (2.mertebe)	0.439715	3227
5.	Heun	0.473802	1801
6.	Runge-Kutta (5.mertebe)	107.442547	138970
7.	Euler	32.436957	248500

Çizelge 5.9Sabit hata – Performans değerleri

Çizelge 5.9'da 0.000331... hata ile analitik çözüme yaklaşan metotlar, iterasyon sayıları, bu iterasyon sayılarında çalışma sürelerine göre sıralanmıştır. Runge-Kutta (4.mertebe) metodu analitik çözüme en küçük iterasyon sayısı ve en az süre ile yaklaşmaktadır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada bir elektrik devresi problemi için bilgisayar ortamında Runge-Kutta, Euler, Heun, Adams-Bashford,Taylor metotları ile sayısal çözümler gerçekleştirilmiş ve bazı sonuçlar alınmıştır.

Taylor,Runge-Kutta,Adams-Bashforth,Euler gibi nümerik metotlar tüm mühendislik problemlerinin çözümleri için uygun olmakla birlikte, analitik çözümü bulunmayan, hesaplamalı akışkanlar dinamiği, ileri mukavemet ve yapısal analiz problemlerinde daha yoğun şekilde kullanılmaktadırlar.

Elektrik devresi problemi için elde edilen verilere göre bu metotlar arasında iterasyon sayısı arttıkça çözüme en hızlı yaklaşan metot Runge-Kutta (4.Mertebe) olarak saptanmıştır.Runge-Kutta (4. Mertebe) , Runge-Kutta (5.Mertebe), Euler, Heun, Adams-Bashford(2.mertebe), Adams-Bashford(4.mertebe),Taylor metotları arasında yüksek iterasyon sayısı referans alındığında(0-1 aralığında 256000 iterasyon) analitik çözüme en yakın çözüm üreten metot Adams-Bashford(4.mertebe) metodu olarak saptanmıştır ve Bu metotlar arasında bilgisayar ortamında en hızlı çalışan metot Euler metodu olarak tespit edilmiştir.Elektrik devresi için optimum sayısal çözüm metodu Adams-Bashford(4.mertebe) metodu olarak görülmüştür çünkü bu metot hem analitik çözüme en çok yaklaşan metot, iterasyon hem de hız bakımından Euler metodunun çözüm hızına yakın bir hızda çözüm üretiyor.

Nümerik metotlarda problemin karmaşıklığıyla orantılı bir şekilde metotların yapmış oldukları hata miktarları ve yakınsama süreleri artacaktır. Problemin çözümüne ulaşılırken her bir iterasyonda çözülmesi gereken denklem ve bu denklemlere ait değişken ve sabit terim sayıları da bu süreleri ve performansları etkileyecektir.

Birinci mertebeden lineer denklem ve denklem sistemlerinin çözümünün gerçekleştirildiği bu çalışma, birinci mertebeden non-lineer, yüksek mertebeden non-lineer, yüksek mertebeden lineer denklem ve denklem sistemlerinin çözümünü araştırmak için yardımcı olacaktır.

Bu çalışmadan sonra, kullanılan bu metotlara daha yeni ve etkili metotlar eklenip, bir metodun problemi belli bir düzeye getirdikten sonra çıktıları başka bir metodun girdisi olarak kullanıp metot değiştirme çalışmaları, eş zamanlı birkaç metodun çalıştırılması gibi çalışmalar araştırma konusu olabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Al-Khafaji, A.W. and J.R.Tooley, (1986), Numerical Methods in Engineering Practice, Holt,Rinehart and Winston, New York
- [2] Bahuguna D. , Ujlayan A. , Pandey D.N., (2008), “A comparative study of numerical methods for solving an integro – differential equation”, Elsevier
- [3] Mohammadi F. , Hosseini M.M., (2010), “A comparative study of numerical methods for solving quadratic Ricatti differential equations”, Elsevier
- [4] Sherratt J.A.,(1996),“A comparison of two numerical methods for oscillatory Reaction- Diffusion systems “
- [5] Engstler C. , Kaps P., (1997),” A comparison of one-step methods for mutlibody system Dynamics in descriptor and state space form”, Elsevier
- [6] Liu Xueming,(2005), “Fast methods for solving nonlinearly coupled equations describing fiber amplifiers”, Elsevier
- [7] Cheney, W., and D. Kincaid, (1994), Numerical Mathematics and Computing, 2d ed., Brooks/Cole, Monterey, CA
- [8] Gerald, C.F., and P.O. Wheatley, (1989), Applied Numerical Analysis, 3d ed., Addison-Wesley, Reading, MA,
- [9] Hayt, W.H., and J.E. Kemmerly, (1986), Enginnering Circuit Analysis, McGraw-Hill, New York
- [10] Butcher J. C., (2003),Numerical Methods for Ordinary Differential Equations
- [11] Wanner Gerhard, Hairer Ernst,(2008), Analysis by Its History, Springer
- [12] Hoffman, J.,(1992), Numerical Methods for Engineers and Scientists, McGraw-Hill, New York
- [13] Lapidus, L., and G.F. Pinder, (1981), Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Enginnering, Wiley, New York

- [14] Ralston,A., (1962), Runge-Kutta Methods with Minimum Error Bounds, Match. Comp.
- [15] Hairer,E. andStiff, (1999), differential equations solved by Radau methods, Journal of computational and applied mathematics
- [16] Hamzaoğlu Melek, (2000), Çözümlü diferansiyel denklemler ,Marmara Üniversitesi,

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : MUSTAFA SEMİH SADAK
Doğum Tarihi ve Yeri : 21.08.1985 / Elazığ
Yabancı Dili : İNGİLİZCE
E-posta : semihsadak@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	MAT.MÜH.	Y.T.Ü.	2011
Lisans	MAT.MÜH.	Y.T.Ü.	2009
Lise	Sayısal	TekerekoğluAnd.Li.	2003

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2010	CETECH	Java Yazılım Uzmanı
2011	Tübitak	Araştırmacı