

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DİKDÖRTGEN BİÇİMLİ DALGA KILAVUZLARI BOYUNCA SİNYAL TRANSFERİ

ÜMMÜ ŞAHİN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN
YARD. DOÇ. DR. KEVSER KÖKLÜ**

İSTANBUL, 2011

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DİKDÖRTGEN BİÇİMLİ DALGA KILAVUZLARI BOYUNCA SİNYAL TRANSFERİ

ÜMMÜ ŞAHİN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN
YARD. DOÇ. DR. KEVSER KÖKLÜ**

İSTANBUL, 2011

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİKDÖRTGEN BİÇİMLİ DALGA KILAVUZLARI BOYUNCA SİNYAL TRANSFERİ

Ümmü ŞAHİN tarafından hazırlanan tez çalışması 20.06.2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Yard Doç. Dr. Kevser KÖKLÜ

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Vatan KARAKAYA

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Zeynel YALÇIN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Yard Doç. Dr. Kevser KÖKLÜ

Yıldız Teknik Üniversitesi

Bu alışma, Uludağ Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü' nün UAP(F)-2010/18 numaralı “Dalga Kılavuzları Boyunca Sinyal Transferi” projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, elektromanyetik teoride önemli bir yere sahip Maxwell denklemlerinin çözümünde oldukça yeni bir metot olan Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşımlar (ETeY) yöntemi üzerinde durulmuştur. Analitik olarak çözülen sınır-değer problemlerimizden biri sayısal olarak da çözölüp karşılaştırma yapılmıştır. Çalışmalarımızı yaptığımız Hilbert uzayları kısaca tanıtılmıştır. Ayrıca Klein-Gordon denkleminde Miller'in listesi kullanılarak çözümler Bessel ailesi cinsinden bulunmuştur. Yarı-tamsayı dereceler için küresel Bessel fonksiyonlarının grafikleri çizilmiştir

Bu çalışmamı gerçekleştirmemde emeği geçen Yıldız Teknik Üniversitesi öğretim üyelerine ve özel olarak jüri üyesi hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca destek ve yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam Yard. Doç. Dr. Kevser KÖKLÜ'ye, her türlü desteğini sunan Dr. Emre EROĞLU'na ve ailesine ve Ersin ŞENER'e teşekkürü bir borç bilirim.

Beni yetiştiren, bu günlere gelmem için her türlü yardımda bulunan aileme sevgi, saygı ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs, 2011

Ümmü ŞAHİN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	Vii
KISALTMA LİSTESİ.....	Viii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
ÇİZELGE LİSTESİ	xi
ÖZET	xii
ABSTRACT.....	xiii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Bulgular	3
BÖLÜM 2	
ZAMAN DÖNEMİ MODLARI PROBLEMİ VE SAYISAL YAKLAŞIM.....	6
2.1 Giriş	6
2.2 TE Modu	7
2.3 TM Modu	12
2.4 Sayısal Yaklaşım	15
2.5 Analitik Çözüm ile Sayısal Yaklaşımın Karşılaştırılması	17
2.6 Ki-Kare (χ^2) Testi.....	23
2.6.1 Uygunluk Testi	23
2.6.2 Belirli Bir Hipoteze Uygunluk Testi.....	23
2.6.3 İhtimal Dağılımlarına Uygunluk Testi	26
BÖLÜM 3	
İÇ ÇARPIM UZAYLARI VE HİLBERT UZAYLARI	27

3.1	İç Çarpım Uzayları ve Hilbert Uzayları.....	27
3.2	İç Çarpım Uzaylarının Diğer Özellikleri.....	31
3.3	Hilbert-Adjoint Operatör	32
3.4	Self-Adjoint, Üniter ve Normal Operatörler	34
BÖLÜM 4		
MODAL GENLİK PROBLEMİ VE MODAL GENLİKLERİN BESSEL FONKSİYONU YARDIMIYLA BELİRLENMESİ.....		39
4.1	Giriş	39
4.2	Düzgün Tekil Nokta Etrafında Seri Çözüm	39
4.2.1	Fuchs Teoremi - Düzgün Tekil Nokta Etrafında Seri Çözüm	41
4.3	Bessel Diferansiyel Denklemi ve Çözümü	42
4.3.1	$2p$ 'nin Tamsayı Olmaması	46
4.3.2	$p = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$	48
4.3.3	p Pozitif Tamsayı	51
4.3.4	$p = k + \frac{1}{2}, k = 0, 1, \dots$ ve $\alpha_1 - \alpha_2 = 2k + 1$ 'in Pozitif Tamsayı Olması ...	54
4.4	Klein Gordon Denklemi	57
BÖLÜM 5		
GRAFİKLER.....		65
BÖLÜM 6		
SONUÇ VE ÖNERİLER		73
KAYNAKLAR		74
EK-A		
GRAFİK KODLARI		76
A-1 Şekil 5.3 Maple Kodları		76
EK-B		
MİLLER'İN LİSTESİ.....		80
EK-C		
KRİTİK χ^2 DEĞERLERİ.....		81
ÖZGEÇMİŞ		83

SİMGE LİSTESİ

$\mathbf{R}$	3-Bileşenli konum vektörü
∇	Nabla vektörü
$\mathbf{r}$	2-Bileşenli konum vektörü
$\nabla_{\perp}$	∇ 'nın enlemsel kısmı
∂_z	Zamana göre kısmi türev operatörü
$\hat{z}$	Oz eksenini boyunca yönlenmiş birim vektör
$\mathbf{E}$	Bazın elektrik elemanı olarak üç-bileşenli vektör
$\mathbf{H}$	Bazın manyetik elemanı olarak üç-bileşenli vektör
∂_n	Normal türev
ϵ_0	Boş uzayın dielektrik sabiti
μ_0	Boş uzayın manyetik geçirgenlik sabiti
c	Işığın boşluktaki hızı
ψ_m	Neumann probleminin özçözümleri
v_m	Neumann probleminin özdeğerleri
Ψ_m	Neumann probleminin özvektörleri
ϕ_m	Dirichlet probleminin özçözümleri
κ_m	Dirichlet probleminin özdeğerleri
Φ_m	Dirichlet probleminin özvektörleri
χ^2	Ki-kare testi
$h_m(z, t)$	Manyetik alan vektörünün zaman bağımlı modal genlikleri
$e_m(z, t)$	Elektrik alan vektörünün zaman bağımlı modal genlikleri
A_m^h	Manyetik alan normalizasyon sabiti
A_m^e	Manyetik alan normalizasyon sabiti
$\delta_{m,n}$	Dirac delta fonksiyonu
γ	Euler sabiti
$\oplus$	Direkt toplam
$\mathbf{G}$	TE modunun manyetik alan ailesi
$\mathbf{S}$	TM modunun elektrik alan ailesi
$\Re$	Reel parametreler ailesi

KISALTMA LİSTESİ

EAE	Evolutionary Approach to Elektromagnetics
ETEY	Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım
KTDD	Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem
TE	Enlemsel Elektrik (Transverse Electric)
TM	Enlemsel Manyetik (Transverse Magnetic)
ZUSF	Zaman Uzayında Sonlu Farklar

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1	Çizelge 2.1'deki değer ile (y) sayısal, $(y = \sin \pi x)$ analitik ve (y^*) sayısal-analitik verilerin grafiği 19	19
Şekil 2.2	Çizelge 2.2'deki değerler ile E_i hata payı ve $E_i^{\text{üst}}$ hatanın üst sınırının grafiği 20	20
Şekil 2.3	Çizelge 2.3'deki değerler ile ME_i hata payı ve $ME_i^{\text{üst}}$ hatanın üst sınırının grafiği 22	22
Şekil 2.4	Ki-kare (χ^2) kritik değer grafiği 25	25
Şekil 4.1	$J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ ve $J_3(x)$ fonksiyonlarının grafiği 47	47
Şekil 4.2	$Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ ve $Y_3(x)$ fonksiyonlarının grafikleri 47	47
Şekil 4.3	$J_0(x)$ ve $Y_0(x)$ 'ın grafikleri 50	50
Şekil 4.4	$J_{1/2}(x)$, $J_{3/2}(x)$, $J_{5/2}(x)$ ve $J_{7/2}(x)$ fonksiyonlarının grafiği 50	50
Şekil 4.5	$Y_{1/2}(x)$, $Y_{3/2}(x)$, $Y_{5/2}(x)$ ve $Y_{7/2}(x)$ fonksiyonlarının grafiği 51	51
Şekil 5.1	Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 1/2$ için grafiği 65	65
Şekil 5.2	Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 30$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 1/2$ için grafiği 66	66
Şekil 5.3	Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 10$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 3/2$ için grafiği 66	66
Şekil 5.4	Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 3/2$ için grafiği 67	67
Şekil 5.5	Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 30$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 3/2$ için grafiği 67	67
Şekil 5.6	Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 10$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 5/2$ için grafiği 68	68
Şekil 5.7	Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 5/2$ için grafiği 68	68
Şekil 5.8	Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 30$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 5/2$ için grafiği 69	69
Şekil 5.9	Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 10$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 7/2$ için grafiği 69	69

Şekil 5.10	Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 7/2$ için grafiği.....	70
Şekil 5.11	Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 30$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 7/2$ için grafiği.....	70
Şekil 5.12	Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 1/2$ için grafiği	71
Şekil 5.13	Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 3/2$ için grafiği.....	71
Şekil 5.14	Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 5/2$ için grafiği.....	72
Şekil 5.15	Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 7/2$ için grafiği.....	72

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 2.1	Dirichlet problemine sayısal yaklaşımlar	17
Çizelge 2.2	Hata analizi.....	19
Çizelge 2.3	Mutlak hata analizi.....	21
Çizelge 2.4	Ki-kare (χ^2) uygunluk testi hesaplamaları	23

DİKDÖRTGEN BİÇİMLİ DALGA KILAVUZLARI BOYUNCA SİNYAL TRANSFERİ

Ümmü ŞAHİN

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Kevser KÖKLÜ

Bu çalışmada Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım(ETeY) olarak adlandırılan bir analitik zaman-dönemi metoduyla düşünülen keyfi zamana bağlı mükemmel iletken yüzeye sahip bir dikdörtgen dalga kılavuzunda bir üreteç fonksiyonu tarafından üretilen elektromanyetik alan kuvvet problemine bakacağız.

TE ve TM dalga kılavuzu modlarının bir tam kümesi zaman döneminde direkt elde edilebilir. Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşımın analitik formuyla problem çözülebilir. Analitik olarak çözülen bu problemin Euler yöntemiyle TM modunun x değişkeni için sayısal çözümü de bulunur. Bulunan bu iki çözümün uygunluğu Ki-kare testi ile değerlendirilir.

Dalga kılavuzundaki dijital sinyallerin yayılım problemi nedensellik prensibine uygun çözülür. Bu çalışmalarımızı Hilbert uzay özelliklerini kullanarak yapabilmekteyiz. Bessel fonksiyonlarının derecelerinin yarı-tamsayılar olduğu durumlarda analitik ve grafiksel sonuçlarla gösterilir.

Anahtar Kelimeler: Elektromanyetik Teori, Maxwell denklemleri, zaman-dönemi, evrim denklemleri, modal baz, modal genlik, Euler yöntemi, Ki-kare testi, Bessel fonksiyonu, Hilbert uzayı, yarı-tamsayı derece.

THE SIGNAL TRANSFER ALONG THE RECTANGULAR WAVEGUIDE

Ümmü ŞAHİN

Department of Mathematical Engineering

MSc. Thesis

Advisor: Asst. Prof. Dr. Kevser KÖKLÜ

In this study, the problem of electromagnetic field strength which are produced by a given source function which has arbitrary time dependency in a rectangle waveguide having perfect electric conductor surface is considered by an analytical time domain method called Evolutionary Approach to Electromagnetics(EAE).

A complete set of TE and TM waveguide modes is obtained in time domain directly. The problem is solved within the analytical framework of the evolutionary approach to electromagnetics. The problem which is solved with analytically also solved with numerically for TM modes' x variable by Euler method. Both of these solutions are evaluated with Chi-square test.

The problem of propagation digital signals in the waveuide is solved explicitly in compliance with the causality principle. We can study by the using of Hilbert spaces' properties. Analytical and graphical results are presented for the cases when the orders of the Bessel fuctions are all possible and semi-integer numbers.

Key words: Electromagnetic theory, Maxwell equations, time-domain, evolutionary equations, modal base, modal amplitude, Euler method, Chi-square test, Bessel function, Hilbert space, semi-integer order

1.1 Literatür Özeti

Maxwell denklemleri 140 yıl önce önerilmiş olup elektromanyetik teoride 19. yüzyılın en başarılı denklemlerinden biridir. Bu denklemlerin ilk çözümleri frekans uzayı üzerinde olup gelişim temelde aşağıdaki gibi olmuştur [1].

1960 öncesinde kapalı form ve sonsuz seri tabanlı analitik çözümlerin ve sayısal sonuçların mekanik hesap makineleri ile elde edilmesine çalışılmıştır. 1960 sonrasında yüksek frekans asimptotik tekniklerin ve integral denklem tabanlı çözümlerin FORTRAN ve benzeri diller kullanılarak bilgisayarlarda hesaplanabilmiştir. Dolayısıyla monokromatik(sinüzoidal) çözümler yaygınlaşmıştır. Bunun nedenleri; Fourier teoreminin matematiksel etkileri, sınır değer problemlerinin çözümünün yaygınlaşması ve sinüzoidal türdeki dalgaların doğadaki varlıkları olarak açıklanabilir [1].

1980 sonrasında Maxwell denklemlerine farklı bir bakış ile Tretyakov Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşımlar yöntemini ileri sürmüştür [2]. ETEY yönteminin, zaman uzayında kutularda uygulanmasına ilişkin örnekler mevcuttur [3].

Elektromanyetik teoride Tretyakov'un metodu kullanılarak, elektromanyetik alan kuvvetlerinin arandığı başlangıç koşulları verilen üç kanonik sınır-değer problemi vardır. Bunlar, kutu problemi, dalga kılavuzu problemi ve harici problem. Bu tezde çözülen dalga kılavuzu problemi Euclid uzayının bir alt uzayında çalışılan kanonik bir problemdir. Kutu probleminde kullanılan metod ile Maxwell operatörünün denklemden ayrıştırılıp çözülmesidir. Çoklu bağlantılı olduğu kabul edilen dalga kılavuzunun içi boş rastgele bir kesit-alanlı fakat geometrik olarak Oz eksenı boyunca

düzgün bir kesitinde problemin çözümü yapılmıştır. Dalga kılavuzu yüzeyi mükemmel elektrik iletkenidir [4].

Problemin çözüldüğü yapılar kutu veya rezonator olarak adlandırılır. Klasik zaman-harmonik elektromanyetik teoride, teorik olarak sadece $t = -\infty$ 'da başlayıp $t = +\infty$ 'a kadar devam eden olayları incelemek mümkündür. Ancak gerçek durumda araştırmacılar bir uyarıcı kaynağın uyarılması sonucu meydana gelen elektromanyetik salınımlarla işlem yaparlar. Elektromanyetik alanlar sadece kaynak uygulanmaya başladıktan sonra doğar ve zamanla salınırlar. Doğal olarak böyle olayların $t = 0$ gibi bir başlangıçları vardır [4].

Zaman-dönemi çalışmalarının bilinen iki ana metot ile çözülmesi yaygındır. En sık uygulananı, sayısal analiz metodu kullanılarak çözülen, sayısal niceliklerin her bir veri sonrasında tespit edilip analiz edildiği Zaman Uzayında Sonlu Farklar (ZUSF) yöntemidir [5]. Metottaki verilerin bolluğu, salınım boyunca veri sağlanabilmesi ve bu verilerin kaydedilip sonucun karşılaştırılarak başlangıç-süreç-sonuç karşılaştırmasıyla gözlem yapıp sağlıklı bir neticeye ulaşılabilmesini sağlar. Metodun zenginliği bilgisayar verilerinin çokluğu ve karşılaştırılabilirliğini sunmasıdır [6].

İkinci yöntem ise analitiktir Bu yöntemde Fourier veya Laplace integral dönüşümleri kullanılır. İntegraller ile $(-\infty, \infty)$ aralığında çalışıldığından nedensellik prensibi bu metotta altı çizilmesi gereken önemli bir unsurdur. Fizik ve matematik beraber düşünülerek elde edilen matematiksel sonuçlar fiziksel gereksinimleri de karşılamalıdır [4].

Analitik bir metot olan Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım (ETey) metodu da bu cümledendir [7]. Metot zaman-döneminde elektromanyetik alanların çözümlerini analitik olarak inceler. Analitik incelemede zaman türevinin korunduğu diferansiyel evrim denklemleri ile çalışılır.

ETey yöntemi ile yakın zamanda, mükemmel iletken dalga kılavuzu yüzeyleriyle bu dalga kılavuzlarının kesit-alanlarında $t = 0$ zamanında başlangıcı olan sinüzoidal bir işaret ile elektromanyetik alanların uyarılması ve dalga kılavuzu boyunca transferi incelenmiştir [8], [9], [10].

Aynı zamanda bu çalışmada TM modundaki Dirichlet problemine x değişkeni için mühendislikte yaygın olarak kullanılan Euler yöntemi ile sayısal olarak yaklaşılmıştır. Elde edilen analitik ve sayısal sonuçlar grafiklendirilmiş yaklaşımlar görsel olarak sunulmuştur. Yapılan bu sunumun bilimsel olarak gerçekliğini sağlamak amacıyla istatistikte yaygın olarak kullanılan Ki-kare (χ^2) uyumluluk testine başvurulmuştur [11].

Bu tezde;

- (i) Üreteç fonksiyon, üstel fonksiyon ve Bessel fonksiyonun çarpımı olarak hesaplanmış ve daha sonra çözümdeki Bessel fonksiyon ailesi için tamsayı çözümleri verilmiştir.
- (ii) Analitik çözümü bulunmuş olan Dirichlet probleminin x değişkeni için sayısal çözümü Euler yöntemi ile yapılmıştır. Gerçekliği Ki-kare (χ^2) testi ile sağlanmıştır.
- (iii) Çözümlere grafiklerle görsel bir perspektif sağlanmaya çalışılmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Tezin amacı; Maxwell denklem sisteminin zaman-döneminde ∂_t 'nin korunduğu evrim denklemleri ve Laplasiyan vasıtasıyla analitik olarak çözülmesidir. Zaman dönemlerinden biri için sayısal çözümün de yapıp çözümlerin doğruluğunun Ki-kare (χ^2) testi ile gösterilmesidir. Elde edilen çözümler eşliğinde bir dikdörtgen dalga kılavuzu boyunca sinyalin nasıl aktarıldığı grafiklerle de görselleştirilmeye çalışılacaktır.

1.3 Bulgular

Bölüm 2:

Bölüm 2'de TE-TM modlarına dik koordinatlarda bir bakış yapılmış, Neumann ve Dirichlet problemlerinin çözümleri verilmiş, uyarıcı kaynak ile dikdörtgen dalga kılavuzu boyunca sinyal transferi için, koordinatların ve zamanın ikinci dereceden türevlere sahip (harmonik) reel-değerli öz vektör fonksiyonları sınıfında elde edilen tam analitik çözümleri verilmiştir.

Bu analitik çözümlerden TM modunda Dirichlet probleminin x değişkeni için Euler yöntemi kullanılarak MATLAB 7 ile sayısal çözümü yapılmıştır. Bulunan gerçek ve yaklaşık değerler Ki-kare uyumluluk testine tabi tutularak gerçekliği gözlenmiştir. Bu gerçeklik ayrıca çizelge değerleri kullanılarak EXCEL yardımıyla grafiklendirilmiştir.

Maxwell denklemleri çözülürken, nedensellik prensibine bağlı kalınmış başlangıç değerleri ve sınır şartları uygulanmıştır.

Bölüm 3:

Bölüm 3'te; iç çarpım uzayı ve Hilbert uzayı tanımlanmış ve bu uzayların özellikleri verilmiştir. Bu uzaylarla ilgili temel kavramlar tanımlanmış ve temel teoremlerden bahsedilmiştir. Bir uzayın hangi durumlarda Hilbert uzayı olabileceği üzerinde durulmuş, Hilbert uzayı olan ve olamayan uzaylara örnekler verilmiştir. Ayrıca bir Hilbert uzayının en önemli özelliklerinden biri olan diklik kavramından bahsedilmiştir. Kendine eş operatör kavramı tanımlanmış ve ilgili teoremler verilmiştir.

Bölüm 4:

Bölüm 4'te; Bessel diferansiyel denklemi ve çözümü hakkında genel bilgiler verilmiş, modal genliklerin Bessel fonksiyonu yardımıyla elde edilişinden bahsedilmiştir. Klein-Gordon denkleminin çözümlerine bakılmış, değişkenlerine ayırma metodu ile Klein-Gordon dalga denklemi çözülüp çözüm Bessel fonksiyonu ile üstel bir fonksiyonun çarpımı olarak bulunmuştur. Bu çözümün sıfır-sonsuz aralığında tam bir fonksiyon ailesi elde edilmiş ve Bessel fonksiyonunun indeksinin farklı durumları incelenmiştir. Sonuç olarak Bessel diferansiyel denklemi ve Bessel fonksiyonları ile ilgili ayrı bir tartışma yapılmış ve bunun yanı sıra genlik probleminin küresel Bessel fonksiyonu yardımı ile çözümleri gösterilmiştir. Bu yaklaşım sonucunda elde edilen denklemlere sınır koşulları uygulanmadan ve denklemler normalize edilmeden sunulmuş, bu tartışmalar başka çalışmalara bırakılmıştır.

Bölüm 5:

Bu bölümde grafikler çizilip birbirleri ile görsel olarak bir karşılaştırma yapılmıştır. Hemen her grafik için $p = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$ değerlerine ayrı ayrı bakılmış, $\tau = 10, 20, 30, \dots$ ve $\xi = 10, 20, 30, \dots$ değerlerine ait grafikleri MAPLE 14 yardımıyla çizilmiştir.

Bölüm 6:

Bu bölümde amaçlar doğrultusunda gerçekleştirmiş olduğumuz çalışmamızın öneri ve sonuçlarına değinilmiştir.

ZAMAN DÖNEMİ MODLARI PROBLEMİ VE SAYISAL YAKLAŞIM

2.1 Giriş

Dalga kılavuzları boyunca sinyal transferinin analizi iki ana kısımdan oluşur. İlki, zaman-dönemi dalga kılavuzu modlarının modal bazda sunumudur. İkincisi ise, Klein-Gordon dalga denkleminin çözülmesinden oluşur [4]. Dikdörtgen dalga kılavuzları boyunca sinyal transferini sağlayan zaman-bağımlı modal genlikler Klein-Gordon denkleminin çözümü ile bulunur. Klein-Gordon denkleminin çözümü nedensellik prensibine bağlı olarak seri halinde elde edilir.

Boş bir dikdörtgen dalga kılavuzundaki sinyallerin yayılması ve iletilmesi problemi analitik bir zaman-dönemi metodudur. Dalga kılavuzu geometrik olarak homojen, Oz eksenini boyunca düzgün yüzeyli kapalı tekli bağlantılıdır. Dalga kılavuzu yüzeyi mükemmel elektrik iletkenidir. Tam TE ve TM dalga kılavuzları modları direkt olarak zaman-döneminde elde edilmiştir. Her bir modal alan enlemsel ve eksenel kısımlarının vektör uzantılarının toplamı olarak alınmıştır. Her bir uzantı iki etkenden oluşur. Biri dalga kılavuzunun bir elemanı ve enlemsel dalga kılavuzu koordinatlarının vektör fonksiyonu olan modal baz diğeri t zamanı ve eksenel koordinat z 'nin skaler bir fonksiyonu olan bir modal genlik. Modal bazların bütün elemanları iki skaler potansiyel yardımıyla belirlenir. Bunlar uygun bir yol ile normalize edilmiş Laplasiyan için Dirichlet ve Neumann sınır-değer problemlerinin özçözümleridir. Modal bazın her bir elemanı dalga kılavuzu yüzeyinde uygun sınır koşulları sağlar. Modal genlikler evrimsel kısmi türevli diferansiyel denklemler sisteminin zamana (ve eksenel koordinat z 'ye) bağlı çözümleridir [4].

3-bileşenli pozisyon vektörü $\mathbf{R}$ ve ∇ operatörü, dalga kılavuzu kesit-alanının S yüzeyi ve z eksenini,

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + z\mathbf{z}, \quad \nabla = \nabla_{\perp} + z\partial_z \quad (2.1)$$

olarak alınacaktır. Burada z , Oz eksenini boyunca yönelmiş birim vektör, $\mathbf{r}$ S kesit alanlı dalga kılavuzundaki 2-bileşenli pozisyon vektörü ve $\nabla_{\perp}$, ∇ 'nin enlemsel kısmıdır.

Diferansiyel operatörü $\nabla_{\perp}$ sadece enlemsel dalga kılavuzu koordinatlarında ($\mathbf{r}$) çalışır.

3-bileşenli elektromanyetik alan kuvvet vektörleri $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ her biri aşağıdaki gibi iki-bileşenli ve bir-bileşenli vektörlerin toplamı olarak

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, z, t) + zE_z(\mathbf{r}, z, t)$$

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{R}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}, z, t) + zH_z(\mathbf{r}, z, t) \quad (2.2)$$

sunulmuştur. Sınır koşulları,

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})|_L = 0, \quad (\mathbf{l} \cdot \mathbf{E})|_L = 0, \quad (\mathbf{z} \cdot \mathbf{E})|_L = 0 \quad (2.3)$$

dır.

2.2 TE Modu

Neuman problemini çözerek başlamalıyız.

$$(\nabla_{\perp}^2 + v_m^2)\psi_m(\mathbf{r}) = 0$$

$$\partial_n \psi_m(\mathbf{r})|_L = 0$$

$$\frac{v_m^2}{S} \int_S |\psi_m(\mathbf{r})|^2 ds = 1 \quad (2.4)$$

burada $\partial_n = \mathbf{n} \cdot \nabla_{\perp}$, L konturu üzerinde normal türev, $v_m^2 > 0$, $m = 1, 2, \dots$ özdeğerler, m indisi reel ekseninde artan bir sıralamaya sahip sayısal değerler, $\psi_m(\mathbf{r})$ 'ler de bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerdir.

Özel olarak $\psi_m(r) = X(x)Y(y)$ şeklinde seçilsin ve Laplasiyan: $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

şeklindedir.

Bu değerleri (2.4) denkleminde yerine koyarsak;

$$\frac{\partial^2 [X(x)Y(y)]}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 [X(x)Y(y)]}{\partial y^2} + v_m^2 X(x)Y(y) = 0$$

$$Y \frac{d^2 [X]}{dx^2} + X \frac{d^2 [Y]}{dy^2} + v_m^2 XY = 0 \text{ ve } \frac{1}{XY} \text{ ile çarpılırsa}$$

$$\underbrace{\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}}_{-t^2(x)} + \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{-t^2(y)} + v_m^2 = 0 \Rightarrow v_m^2 = t^2(x) + t^2(y)$$

bulunur.

Denklemin çözümü;

$$X(x) = A \cos(t(x)x) + B \sin(t(x)x)$$

$$Y(y) = C \cos(t(y)y) + D \sin(t(y)y)$$

bulunur.

$$\psi_m(r) = X(x)Y(y) = [A \cos(t(x)x) + B \sin(t(x)x)] [C \cos(t(y)y) + D \sin(t(y)y)] \quad (2.5)$$

şeklindedir.

$\partial_n \psi_m(r)|_L = 0$ Neumann sınır koşullarını uygulayalım;

$$1. \ 0 \leq x \leq a, \quad \frac{\partial}{\partial y} \psi_m|_{y=0} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \psi_m|_{y=0} = [A \cos(t(x)x) + B \sin(t(x)x)] [-Ct(y) \sin(t(y)y) + Dt(y) \cos(t(y)y)] = 0$$

$$[-Ct(y).0 + Dt(y).1] = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$2. 0 \leq x \leq a, \quad \frac{\partial}{\partial y} \psi_m|_{y=b} = 0$$

$$\Rightarrow [-Ct(y) \sin(t(y)b)] = 0 = \sin(0 + p\pi); p = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow t(y) = \frac{p\pi}{b}; \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

$$3. 0 \leq y \leq b, \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_m|_{x=0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \psi_m|_{x=0} = [-At(x) \sin(t(x)x) + Bt(x) \cos(t(x)x)] [C \cos(t(y)y)]|_{x=0} = 0$$

$$[-At(x).0 + Bt(x).1] [C \cos(t(y)y)] = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$4. 0 \leq y \leq b, \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_m|_{x=a} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi_m|_{x=a} = [-At(x) \sin(t(x)a)] [C \cos(t(y)y)] = 0$$

$$\sin(t(x)a) = \sin(0 + q\pi) \Rightarrow t(x) = \frac{q\pi}{a}; q = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ve } v_m^2 = t^2(x) + t^2(y)$$

$$v_m^2 = \left(\frac{q\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{b}\right)^2 = \pi^2 \left(\frac{q^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2}\right) \Rightarrow v_m = \pi \sqrt{\frac{q^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2}}; \quad p + q \neq 0$$

Sonuç olarak bulunan değerlerin (2.5) denkleminde yerine konulmasıyla;

$$\psi_m(r) = X(x)Y(y) = [A \cos(t(x)x)] [C \cos(t(y)y)] = N \cos(t(x)x) \cos(t(y)y)$$

$$\text{bulunur. Burada, } t(x) = \frac{q\pi}{a}, \quad t(y) = \frac{p\pi}{b}$$

$$\text{Normalizasyon sabiti; } \frac{v_m^2}{S} \int_S |\psi_m|^2 ds = 1, \quad S = a.b$$

$$\frac{v_m^2}{S} \int_S |\psi_m|^2 ds = \frac{v_m^2}{a.b} N^2 \int_{x=0}^a \cos^2(t(x)x) \int_{y=0}^b \cos^2(t(y)y) dy dx = 1$$

$$= \frac{\pi^2 \left(\frac{q^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} \right)}{ab} N^2 \left[\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \frac{\cos(2t(x)x)}{2t(x)} \right) \right]_{x=0}^a \left[\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{2} \frac{\cos(2t(y)y)}{2t(y)} \right) \right]_{y=0}^b = 1$$

$$\frac{\pi^2 (b^2 q^2 + a^2 p^2)}{a^2 b^2} \frac{N^2}{ab} \left[\frac{a}{2} + \frac{a}{4q\pi} - \frac{a}{4q\pi} \right] \left[\frac{b}{2} + \frac{b}{4p\pi} - \frac{b}{4p\pi} \right] = 1$$

$$\frac{\pi^2 (b^2 q^2 + a^2 p^2)}{a^2 b^2 ab} N^2 \frac{a}{2} \frac{b}{2} = 1 \Rightarrow N^2 = \frac{4a^2 b^2}{\pi^2 (b^2 q^2 + a^2 p^2)}$$

$$N = \frac{2ab}{\pi \sqrt{b^2 q^2 + a^2 p^2}}; \quad p + q \neq 0$$

Böylece,

$$\psi_m(r) = N \cos(t(x)x) \cos(t(y)y)$$

$$\psi_m(x, y) = \frac{2ab}{\pi \sqrt{b^2 q^2 + a^2 p^2}} \cos\left(\frac{q\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{p\pi}{b} y\right); \quad p + q \neq 0$$

elde edilir.

Örnek 2.1

Tipik $0 \leq x \leq a$ ve $0 \leq y \leq b$ ile sınırları belirlenen dikdörtgen şeklinde bir dalga kılavuzu olan L konturunu düşünelim. A_m^h normalizasyon sabiti olmak üzere $\Psi_m(\mathbf{r})$ potansiyelini $\Psi_m(\mathbf{r}) = A_m^h \psi_m(\mathbf{r})$ olarak alalım. $\psi_m(\mathbf{r}) = \cos(p\pi x/a) \cos(q\pi y/b)$ dir. q ve p parametreleri $p, q = 0, 1, 2, \dots, p + q \neq 0$ şartını sağlayan tamsayılardır. (2.4) problemini çözerek

$$v_m^2 = \pi^2 (p^2 / a^2 + q^2 / b^2) \equiv v_{p,q}^2$$

$$A_m^h = \sqrt{(2 - \delta_{p,0})(2 - \delta_{q,0})} / v_{p,q} \equiv A_{p,q}^h \quad (2.6)$$

elde edilir. Burada $\delta_{p,0}$ ve $\delta_{q,0}$ Kronecker deltasıdır ($\delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & \text{eger } m \neq n \\ 1, & \text{eger } m = n \end{cases}$ olduğu hatırlanmalıdır). v_m^2 özdeğerlerini reel eksen üzerinde konumlayan indis m indisidir: $m \rightarrow (p, q)$. $\Psi_m(\mathbf{r})$ potansiyeli zaman dönemi TE modlarının tanımının bir parçasıdır [6].

$$\mathbf{E}_{zm}^h = 0$$

$$v_m^{-1} \mathbf{E}_m^h = \left\langle -\partial_{(v_m c t)} h_m(z, t) \right\rangle \left[1/\sqrt{\epsilon_0} \nabla_{\perp} \psi_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{z} \right]$$

$$v_m^{-1} \mathbf{H}_m^h = \left\langle \partial_{(v_m z)} h_m(z, t) \right\rangle \left[1/\sqrt{\mu_0} \nabla_{\perp} \psi_m(\mathbf{r}) \right]$$

$$v_m^{-1} \mathbf{H}_{zm}^h = \left\langle h_m(z, t) \right\rangle \left[v_m 1/\sqrt{\mu_0} \psi_m(\mathbf{r}) \right] \quad (2.7)$$

burada $\partial_{(v_m c t)} = \frac{1}{c v_m} \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_{(v_m z)} = \frac{1}{v_m} \frac{\partial}{\partial t}$ ve $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ boşlukta ışık hızıdır.

Modal alan çiftleri dalga kılavuzu kesit-alanında $[*]$ köşeli parantez ile gösterilir. Buradaki potansiyellerin hepsi Laplasiyandan elde edilirler. $\langle * \rangle$ kırık parantez ile ifade edilen faktörler uygun modal alan uzantılarının modal genlikleri fiziksel manasına sahiptir. Hepsi Klein-Gordon denkleminde elde edilen bir $h_m(z, t)$ potansiyeli tarafından belirlenir [4].

$$(\partial_{v_m c t}^2 - \partial_{v_m z}^2 + 1) h_m(z, t) = 0 \quad (2.8)$$

(2.4) problemi bir sıfır aşıkır çözümüne daha sahiptir. Bu çözüm $v_0^2 = 0$ özdeğerine karşılık gelir ve harmonik $\Psi_0(\mathbf{r})$ fonksiyonu için $\nabla_{\perp}^2 \Psi_0(\mathbf{r}) = 0$, $\partial_n \Psi_0(\mathbf{r})|_L = 0$ problemini üretir. $\mathbf{r} \in L + S$ ve c_1 bir sabit olmak üzere harmonik fonksiyonlar maksimum-minimum teoreminden $\Psi_0(\mathbf{r}) = c_1$ elde edilir. $\Psi_0(\mathbf{r})$ potansiyeli bir TE modu daha üretir.

$$\mathbf{E}_0^h(\mathbf{r}, z, t) = 0, \quad \mathbf{H}_0^h(\mathbf{r}, z, t) = \mathbf{z} c_1 \quad (2.9)$$

burada $\mathbf{H}_0^h$ alanının modal genliği de bir sabittir [4].

Weyl Teoremi TE zaman-dönemi modlarının L_2 Hilbert uzayında tam olduğunu ifade etmektedir [12].

2.3 TM Modu

Dirichlet problemini dik koordinatlarda ele alalım. TM modları için Dirichlet problemi;

$$(\nabla_{\perp}^2 + \kappa_m^2) \phi_m(\mathbf{r}) = 0$$

$$\phi_m(\mathbf{r})|_L = 0$$

$$\frac{\kappa_m^2}{S} \int_S |\phi_m(\mathbf{r})|^2 ds = 1 \quad (2.10)$$

şeklindedir.

Burada $\kappa_m^2 > 0$, $m = 1, 2, \dots$ özdeğerler, m indisi reel ekseninde artan bir sıralamaya sahip sayısal değerler, $\phi_m(\mathbf{r})$ 'ler de bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerdir. $\kappa_0^2 = 0$ özdeğerine karşılık gelen $\phi_0(\mathbf{r})$ çözümü sıfırdır. Dalga kılavuzunun S kesit alanı dikdörtgen olarak alınsın. Homojen Helmholtz denklemi;

$$(\nabla_{\perp}^2 + \kappa_m^2) \phi_m(\mathbf{r}) = 0, \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \kappa_m^2 \right) \phi_m(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.11)$$

olarak yazılırsa ve $\phi_m(\mathbf{r}) = X(x)Y(y)$ şeklinde değişkenlerine ayrılırsa (2.11) denklemi

$$Y(y) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \kappa_m^2 X(x)Y(y) = 0 \quad (2.12)$$

halini alır. Buradan, her iki taraf $1/X(x)Y(y)$ ile çarpılırsa (2.12) denklemi,

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \kappa_m^2 = 0 \quad (2.13)$$

şeklinde yazılabilir. (2.13) denklemi $\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -t^2(x)$ ve $\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -t^2(y)$

biçiminde değişkenlerine ayrılırsa

$$\kappa_m^2 = t^2(x) + t^2(y) \quad (2.14)$$

özdeğer ailesi elde edilmiş olur. Nihayetinde κ_m özdeğerler kümesi (2.14) denkleminden rahatça çekilebilir. Burada $t^2(x)$ ve $t^2(y)$ sabitleri neden negatif seçildiler diye bir soru karşımıza çıkar. Eğer $t^2(x)$ ve $t^2(y)$ keyfi sabitleri pozitif seçilseydi (2.10) denkleminin çözümü rahatça görülebileceği gibi $\exp(\pm it(x)x)$ ve $\exp(\pm it(y)y)$ olarak bulunacaktı. Böylece $\phi_m(\mathbf{r})$ potansiyeli $\exp(\pm it(x)x) \exp(\pm it(y)y)$ elde edilecekti. Oysa bu üstel fonksiyonlar ıraksamalar içermektedir. Fakat problem Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım (ETeY) ile çözüleceğinden çözümler yakınsak olmalıdır [5].

(2.11) denkleminin çözümü $\phi_m(\mathbf{r})|_L = 0$ sınır koşulları altında

$$\phi_m(\mathbf{r}) = A_m^e \sin(p\pi x/a) \sin(q\pi y/b) \quad (2.15)$$

olarak elde edilir. Burada p ve q parametreleri $p+q \neq 0$ şartıyla $p, q = 0, 1, 2, \dots$ tamsayılarıdır. A_m^e normalizasyon katsayısıdır. (2.10) denkleminde κ_m özdeğerler kümesi

$$\kappa_m^2 = \pi^2 (p^2/a^2 + q^2/b^2) \quad (2.16)$$

şeklinde bulunur. A_m^e için (2.10) denkleminin üçüncü satırı çözülmelidir.

$$\frac{\kappa_m^2}{S} \int_S |\phi_m(\mathbf{r})|^2 ds = 1 \text{ normalizasyon integralinde } S = ab \text{ alınırsa}$$

$$\frac{\kappa_m^2 (A_m^e)^2}{ab} \int_{x=0}^{x=a} \sin^2(p\pi x/a) dx \int_{y=0}^{y=b} \sin^2(q\pi y/b) dy = 1 \quad (2.17)$$

(2.17) denkleminde gerekli sadeleştirmelerden sonra A_m^e normalizasyon sabiti

$$A_m^e = 2 / \kappa_m \quad (2.18)$$

olarak bulunur.

$\phi_m(\mathbf{r})$ potansiyeli zaman-dönemi TM modlarının tanımının bir parçasıdır [4].

$$H_{zm}^e = 0$$

$$\kappa_m^{-1} H_m^e = \left\langle -\partial_{(\kappa_m ct)} e_m(z, t) \right\rangle \left[z \times 1 / \sqrt{\mu_0} \nabla_{\perp} \phi_m(\mathbf{r}) \right]$$

$$\kappa_m^{-1} E_m^e = \left\langle \partial_{(\kappa_m z)} e_m(z, t) \right\rangle \left[1 / \sqrt{\epsilon_0} \nabla_{\perp} \phi_m(\mathbf{r}) \right]$$

$$\kappa_m^{-1} E_{zm}^e = \left\langle e_m(z, t) \right\rangle \left[\kappa_m 1 / \sqrt{\epsilon_0} \phi_m(\mathbf{r}) \right] \quad (2.19)$$

burada $\partial_{(\kappa_m ct)} = \frac{1}{c \kappa_m} \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_{(\kappa_m z)} = \frac{1}{\kappa_m} \frac{\partial}{\partial t}$ ve $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ boşlukta ışık hızıdır [4]. Weyl

Teoremi TM modlarının L_2 Hilbert uzayında tam olduğunu ifade etmektedir [12].

(2.7) ve (2.19) zaman-dönemi modlarının her ikisi de 6-bileşenli reel değerli fonksiyonel vektör uzayı içinde aşağıdaki iç çarpım tarafından belirlenen keyfi X_1, X_2 vektör çifti tanımlar.

$$(X_1, X_2) = \frac{1}{S} \int_S (\epsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mu_0 \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2) ds < \infty \quad (2.20)$$

burada $X_1 = \text{col}(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ ve $X_2 = \text{col}(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$ ve col'un anlamı kolon ve “.” üç bileşenli vektörler için skaler çarpımdır.

TE ve TM modlarının (2.7) ve (2.19) kümesini sırasıyla, aşağıdaki gibi

$$\mathbf{G} = \{X_m^h\}_{m=0}^{\infty} \quad \mathfrak{S} = \{X_m^e\}_{m=1}^{\infty} \quad (2.21)$$

$X_m^h = \text{col}(\mathbf{E}_m^h, \mathbf{H}_m^h)$ ve $X_m^e = \text{col}(\mathbf{E}_m^e, \mathbf{H}_m^e)$ olarak gösterelim. $m = m'$ olmak üzere, ilk farklı eleman çiftini X_m^h ve $X_{m'}^h$ alıp (2.21) denkleminde bunları X_1, X_2 'nin yerlerine koyarsak $(X_m^h, X_{m'}^h) = 0$ sonucunu buluruz. Bu bize $\mathbf{G}$ kümesindeki bütün elemanların karşılıklı birbirine dik olduğunu gösterir. Aynı durum $\mathfrak{S}$ kümesi elemanları için de

geçerlidir. Şimdi $\mathbf{G}$ kümesinden bir X_m^h elemanı ve $\mathfrak{S}$ kümesinden bir $X_{m'}^h$ elemanı alıp bunları tekrar (2.21) denkleminde yerine koyalım. Yine m, m' keyfi olmak üzere $(X_m^h, X_{m'}^e) = 0$ sonucunu elde ederiz [4].

$\mathbf{G}$ ve $\mathfrak{S}$ 'nin her birinin kendi içerisindeki tamlıkları [13], [7] çalışmalarında ispatlanmıştır. İlaveten $\mathbf{G}$ ve $\mathfrak{S}$ çözümler uzayında bir alt uzay oluştururlar. Sonuç olarak bunların direkt toplamı: $\mathbf{G} \oplus \mathfrak{S}$ 'dir. Bundan dolayı, bir alt uzay diğerine diktir.

Bu çalışmamızın sadece L_2 Hilbert uzayında mümkün olması, Hilbert uzaylarına genel bir bakışı gerektirmektedir. Bu nedenle üçüncü bölümde iç çarpım ve Hilbert uzaylarından ayrıntılı bahsedilecektir.

2.4 Sayısal Yaklaşım

(2.12) eşitliğinin Euler yöntemi ile sayısal çözümü yapılarak daha önce yapılan analitik çözümle aşağıdaki şekilde karşılaştırılacaktır. Öncelikle Euler yöntminden kısaca bahsedelim;

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.22)$$

- i. x_0 ve b sonlu değerler olmak üzere, $f(x, y)$ fonksiyonu $x_0 \leq x \leq b$ ve $-\infty \leq y \leq +\infty$ aralıklarında tanımlı ve sürekli,
- ii. $f(x, y)$ fonksiyonu, $[x_0, b]$ kapalı aralığında herhangi bir x değeri için Lipschitz koşulunu sağlasın. (2.22) diferansiyel denklemi ele alınsın. $h = \Delta t$ adım aralığı, t_i adımındaki sayısal çözüm y_i , analitik çözüm Y_i olmak üzere Euler denklemi, t_i adımından t_{i+1} adımına yapılan kesim hatası E_{i+1} ve i . adıma kadar biriken toplam hata e_i :

$$y_{i+1} = y_i + hf(y_i, t_i) \quad (2.23)$$

$$y_{i+1}^* = y_i + hf(Y_i, t_i) \quad (2.24)$$

$$E_{i+1} = -\frac{h^2}{2} f'(Y_i, u_i) \quad (2.25)$$

$$|e_i| \leq \frac{f'(Y_i, u_i)h}{2 \frac{\partial f}{\partial y}(z_i, t_i)} \left[\left(1 + h \frac{\partial f}{\partial y}(z_i, t_i) \right)^i - 1 \right] \quad (2.26)$$

olarak yazılabilir. Burada z_i, y_i ile Y_i arasında herhangi bir değer ve $u_i \in (t_i, t_{i+1})$ dir [14]. (2.12) numaralı denklemde y sabit tutularak elde edilen yeni denklem;

$$\frac{1}{X(t)} \frac{\partial^2 X(t)}{\partial t^2} = -c^2(t) \text{ veya } \frac{\partial^2 X(t)}{\partial t^2} + c^2(t)X(t) = 0 \quad (2.27)$$

şeklindedir.

(2.27) numaralı denklemin analitik çözümü; $X(t) = \sin \frac{p\pi t}{a}$, şeklindedir.

Bu çalışmada, özel olarak; $p, a \in \mathbb{Z}$ değerlerini $p=1, a=1$ olarak alınmıştır. Buna bağlı olarak, $c(t) = \pi$ olacaktır. Bu şartlar altında (2.27) numaralı denklemimiz,

$$X'' + X\pi^2 = 0 \quad (2.28)$$

İkinci mertebeden sabit katsayılı bir lineer diferansiyel denkleme dönüşen (2.28) numaralı denklemimizi $t=0$ anında $X(0)=0, \frac{dX}{dt}=u(t), u(0)=\pi$ başlangıç koşulları altında $h=0,02$ adım uzunluğu ile $t=1$ anı için Euler yöntemi ile sayısal çözüme gidilmiştir.

Çözüm öncesinde (2.27) ve (2.28) numaralı denklemler verilen şartlar altında,

$$t = t_0 = 0$$

$$u(0) = u_0 = \pi$$

$$x_{i+1} = x_i + u_i \cdot h \quad (2.29)$$

$$u_{i+1} = u_i + h \cdot (-x_i \cdot \pi^2)$$

$$x_{i+1}^* = x_i + u_i \cdot h$$

şeklindedir.

(2.28) numaralı denklem (2.29) numaralı denklem çiftleri ile sayısal olarak çözümlerse,

$$i = 0 \text{ için } x_1 = x_0 + u_0.h \quad u_1 = u_0 + h.(-x_0.\pi^2)$$

$$i = 1 \text{ için } x_2 = x_1 + u_1.h \quad u_2 = u_1 + h.(-x_1.\pi^2)$$

$$i = 2 \text{ için } x_3 = x_2 + u_2.h \quad u_3 = u_2 + h.(-x_2.\pi^2)$$

⋮

$$i = 49 \text{ için } x_{50} = x_{49} + u_{49}.h \quad u_{50} = u_{49} + h.(-x_{49}.\pi^2)$$

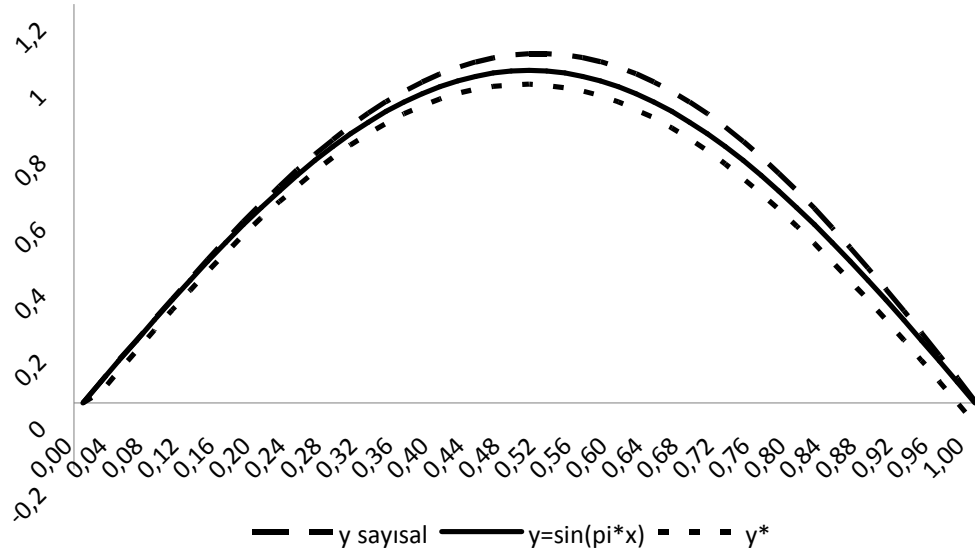
şeklinde hesaplanmıştır. Tüm sayısal hesaplamalar MATLAB 7 ile yapılırsa x_i , x_i^* ve u_i değerlerine ait veriler aşağıdakiler şekildedir.

2.5 Analitik Çözüm ile Sayısal Yaklaşımın Karşılaştırılması

Çizelge 2.1 Dirichlet problemine sayısal yaklaşımlar

x	$y = \sin \pi x$	y sayısal	y^*
0	0	0	0
0,02	0,06279052	0,06283185	0,03141593
0,04	0,12533323	0,12566371	0,09420645
0,06	0,18738131	0,18824751	0,1564393
0,08	0,24868989	0,25033521	0,21786889
0,1	0,30901699	0,31167974	0,27825277
0,12	0,36812455	0,37203599	0,33735264
0,14	0,42577929	0,43116177	0,39493526
0,16	0,48175367	0,48881882	0,45077338
0,18	0,53582679	0,54477371	0,50464663
0,2	0,58778525	0,59879882	0,55634239
0,22	0,63742399	0,65067324	0,60565665
0,24	0,68454711	0,70018371	0,65239478
0,26	0,72896863	0,74712542	0,69637233
0,28	0,77051324	0,79130291	0,73741575
0,3	0,80901699	0,83253087	0,77536305
0,32	0,84432793	0,8706349	0,81006447
0,34	0,87630668	0,90545222	0,84138306
0,36	0,90482705	0,93683242	0,86919523
0,38	0,92977649	0,96463803	0,8933912
0,4	0,95105652	0,98874517	0,91387549
0,42	0,96858316	1,00904408	0,93056726

0,44	0,98228725	1,02543958	0,94340063
0,46	0,9921147	1,03785153	0,95232495
0,48	0,99802673	1,04621521	0,95730501
0,5	1	1,05048162	0,95832114
0,52	0,99802673	1,05061773	0,95536935
0,54	0,9921147	1,04660671	0,94846128
0,56	0,98228725	1,03844801	0,93762419
0,58	0,96858316	1,02615748	0,92290085
0,6	0,95105652	1,00976732	0,90434936
0,62	0,92977649	0,98932605	0,88204295
0,64	0,90482705	0,96489838	0,85606965
0,66	0,87630668	0,93656501	0,82653195
0,68	0,84432793	0,90442237	0,79354643
0,7	0,80901699	0,86858232	0,75724328
0,72	0,77051324	0,82917176	0,71776576
0,74	0,72896863	0,78633217	0,67526967
0,76	0,68454711	0,74021914	0,62992272
0,78	0,63742399	0,69100179	0,58190388
0,8	0,58778525	0,63886218	0,53140266
0,82	0,53582679	0,5839946	0,47861836
0,84	0,48175367	0,5266049	0,4237593
0,86	0,42577929	0,46690967	0,36704198
0,88	0,36812455	0,4051355	0,30869024
0,9	0,30901699	0,34151803	0,24893437
0,92	0,24868989	0,27630116	0,18801019
0,94	0,18738131	0,20973603	0,12615814
0,96	0,12533323	0,1420801	0,06362233
0,98	0,06279052	0,07359618	0,00064956
1	0	0,00455134	-0,06251165

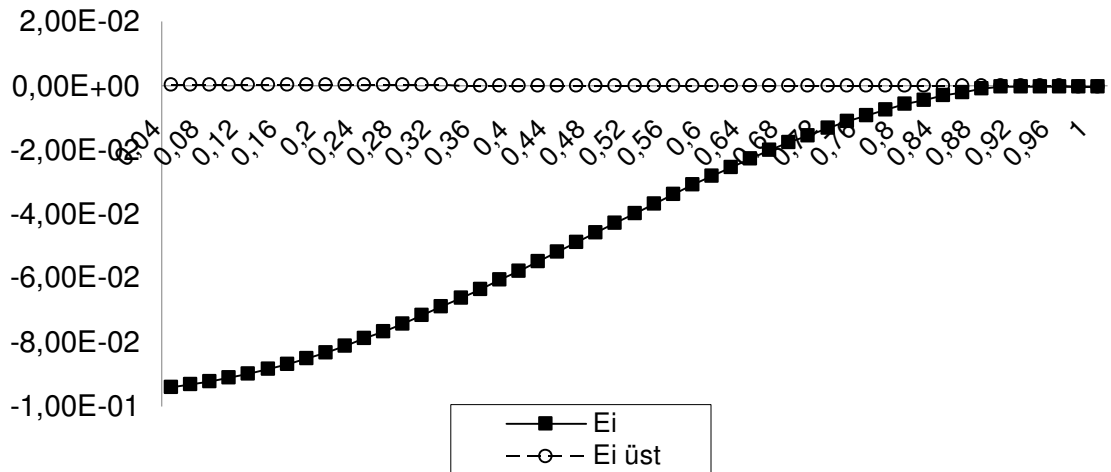


Şekil 2.1 Çizelge 2.1'deki değer ile (y) sayısal, $(y = \sin \pi x)$ analitik ve (y^*) sayısal-analitik verilerin grafiği

Çizelge 2.2 Hata analizi

x	E_i	$E_{iüst}$
0,04	-9,39E-02	1,98E-04
0,06	-9,32E-02	1,96E-04
0,08	-9,23E-02	1,94E-04
0,1	-9,11E-02	1,90E-04
0,12	-8,99E-02	1,86E-04
0,14	-8,84E-02	1,81E-04
0,16	-8,68E-02	1,75E-04
0,18	-8,51E-02	1,69E-04
0,2	-8,31E-02	1,62E-04
0,22	-8,11E-02	1,54E-04
0,24	-7,89E-02	1,46E-04
0,26	-7,66E-02	1,37E-04
0,28	-7,41E-02	1,27E-04
0,3	-7,16E-02	1,18E-04
0,32	-6,90E-02	1,07E-04
0,34	-6,62E-02	9,64E-05
0,36	-6,34E-02	8,52E-05
0,38	-6,06E-02	7,36E-05
0,4	-5,77E-02	6,18E-05
0,42	-5,47E-02	4,97E-05
0,44	-5,17E-02	3,75E-05
0,46	-4,87E-02	2,51E-05
0,48	-4,57E-02	1,26E-05
0,5	-4,27E-02	0,00E+00

0,52	-3,97E-02	-1,26E-05
0,54	-3,67E-02	-2,51E-05
0,56	-3,38E-02	-3,75E-05
0,58	-3,10E-02	-4,97E-05
0,6	-2,82E-02	-6,18E-05
0,62	-2,54E-02	-7,36E-05
0,64	-2,28E-02	-8,52E-05
0,66	-2,02E-02	-9,64E-05
0,68	-1,78E-02	-1,07E-04
0,7	-1,55E-02	-1,18E-04
0,72	-1,33E-02	-1,27E-04
0,74	-1,12E-02	-1,37E-04
0,76	-9,28E-03	-1,46E-04
0,78	-7,50E-03	-1,54E-04
0,8	-5,88E-03	-1,62E-04
0,82	-4,42E-03	-1,69E-04
0,84	-3,14E-03	-1,75E-04
0,86	-2,02E-03	-1,81E-04
0,88	-1,08E-03	-1,86E-04
0,9	-3,27E-04	-1,90E-04
0,92	-2,27E-04	-1,94E-04
0,94	-2,17E-04	-1,96E-04
0,96	-2,13E-04	-1,98E-04
0,98	-2,12E-04	-2,00E-04
1	-2,07E-04	-2,00E-04



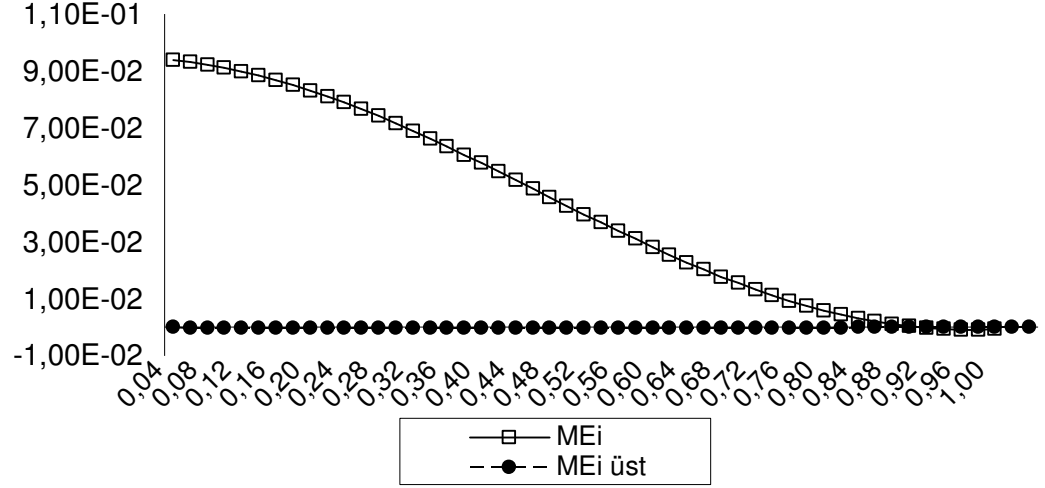
Şekil 2.2 Çizelge 2.2'deki değerler ile E_i hata payı ve $E_{i\text{üst}}$ hatanın üst sınırının grafiği

E_i , Hata analizinde hata payını göstermektedir. $E_{i\text{üst}}$; Hatanın üst sınırını göstermektedir.

Çizelge 2.3 Mutlak hata analizi

x	ME_i	$ME_{üst}$
0,04	9,39E-02	-1,98E-04
0,06	9,32E-02	-1,96E-04
0,08	9,23E-02	-1,94E-04
0,1	9,11E-02	-1,90E-04
0,12	8,99E-02	-1,86E-04
0,14	8,84E-02	-1,81E-04
0,16	8,68E-02	-1,75E-04
0,18	8,51E-02	-1,69E-04
0,2	8,31E-02	-1,62E-04
0,22	8,11E-02	-1,54E-04
0,24	7,89E-02	-1,46E-04
0,26	7,66E-02	-1,37E-04
0,28	7,41E-02	-1,27E-04
0,3	7,16E-02	-1,18E-04
0,32	6,90E-02	-1,07E-04
0,34	6,62E-02	-9,64E-05
0,36	6,34E-02	-8,52E-05
0,38	6,06E-02	-7,36E-05
0,4	5,77E-02	-6,18E-05
0,42	5,47E-02	-4,97E-05
0,44	5,17E-02	-3,75E-05
0,46	4,87E-02	-2,51E-05
0,48	4,57E-02	-1,26E-05
0,5	4,27E-02	0,00E+00
0,52	3,97E-02	1,26E-05
0,54	3,67E-02	2,51E-05
0,56	3,38E-02	3,75E-05
0,58	3,10E-02	4,97E-05
0,6	2,82E-02	6,18E-05
0,62	2,54E-02	7,36E-05
0,64	2,28E-02	8,52E-05
0,66	2,02E-02	9,64E-05
0,68	1,78E-02	1,07E-04
0,7	1,55E-02	1,18E-04
0,72	1,33E-02	1,27E-04
0,74	1,12E-02	1,37E-04
0,76	9,28E-03	1,46E-04
0,78	7,50E-03	1,54E-04
0,8	5,88E-03	1,62E-04
0,82	4,42E-03	1,69E-04
0,84	3,14E-03	1,75E-04
0,86	2,02E-03	1,81E-04
0,88	1,08E-03	1,86E-04

0,9	3,27E-04	1,90E-04
0,92	2,27E-04	1,94E-04
0,94	2,17E-04	1,96E-04
0,96	2,13E-04	1,98E-04
0,98	2,12E-04	2,00E-04
1	2,07E-04	2,00E-04



Şekil 2.3 Çizelge 2.3’deki değerler ile ME_i hata payı ve ME_i üst hatanın üst sınırının grafiği

Sayısal çözümlerle ve analitik çözümlerle elde edilen Çizelge 2.1’deki verilerin gerçekliğini sağlamak amacıyla ki-kare (χ^2) uygunluk testi yapalım.

H_0 : Dirichlet probleminin analitik çözümü ile sayısal çözümü aynı değeri versin.

H_1 : Dirichlet probleminin analitik çözümü ile sayısal çözümü aynı değeri vermesin.

Hipotezler çerçevesinde Çizelge 2.1’deki $y = \sin(\pi x)$, y , y^* sayısal verileri için ki-kare (χ^2) uygunluk testi EXCEL ile hesaplanarak uygunluk testinin değeri 0,0107 olarak hesaplanmıştır. Bu değere karşılık gelen ki-kare (χ^2) tablo değeri 72’den çok küçüktür (EK-C). Ki-kare uygunluk testine göre H_0 hipotezi reddedilmez ve analitik çözümün sayısal çözümün ile aynı sonucu vermektedir.

Tüm bu değerlendirmelerde ele alınan verilerin karşılaştırması için kullanılan Ki-kare (χ^2) uygunluk testinden bölüm 2.6’da bahsedilmiştir.

2.6 Ki-Kare (χ^2) Testi

Ki-kare testi birçok maksatla kullanılan oldukça yaygın bir testtir. Bu çalışmada gerçekleştirmiş olduğumuz TM modunun hesaplanması esnasında karşılaştığımız Dirichlet probleminin çözümü işleminde elde ettiğimiz analitik çözümler ayrıca sayısal yaklaşımlarla gerçekleşmektedir. Yapmış olduğumuz sayısal çözümlerin uygunluğunu test etmek amacıyla Ki-kare testinden faydalanılmıştır. Bu durum göz önünde bulundurulduğundan bu bölümde ki-kare uygunluk testinden kısaca söz edilecektir.

2.6.1 Uygunluk Testi

Gözlenen frekansların belirli bir hipoteze uygun olup olmadığını belirlemek, ayrıca herhangi bir teorik dağılıma bu gözlenen frekansların uyum gösterip göstermediğini tespit etmek amacıyla ki-kare uygunluk testi yapılır [11].

Ki-kare uygunluk testinin bu iki kullanım şekli alt bölümler halinde ele alınmıştır.

2.6.2 Belirli Bir Hipoteze Uygunluk Testi

Anakütleden şansa bağlı alınan N birimlik bir örneğin birimlerinin, r kategoriden oluşan bir kümenin her bir elemanına dağılım sayıları gözlenmiş olsun. Bu gözlenen değerleri O_i ile gösterelim. Belli bir hipoteze göre bu kategoride olması gereken, yani, beklenen değerlerin de hesaplanabildiğini farz edelim ve bunları e_i ile gösterelim. Burada bahsedilen gözlenen değerler ve beklenen değerler r kategorinin frekanslarıdır. Buna göre her bir O_i gözlenen frekansına bir e_i beklenen frekansı karşılık gelecektir. Bunu bir çizelge halinde ifade edelim [11]:

Çizelge 2.4 Ki-kare (χ^2) uygunluk testi hesaplamaları

Kategoriler	Gözlenen frekanslar	Beklenen frekanslar
1	o_1	e_1
2	o_2	e_2
3	o_3	e_3
.	.	.
.	.	.
r	o_r	e_r
	$\sum o_i$	$\sum e_i$

Örnek büyüklüğü N olmak üzere $\sum o_i = \sum e_i = N$ olacaktır.

Ki-kare uygunluk testi ile gözlenen frekansların (o_i), beklenen frekanslara (e_i) uygun olup olmadığı araştırılır. Başka bir ifadeyle, o_i değerlerinin belli bir hipoteze göre elde edilen e_i değerlerine uygun olup olmadığı tespit edilmeye çalışılır. Bu durumda testin safhaları aşağıdaki gibi olur.

1. Safha: Hipotezler.

$$H_0: o_i = e_i, i = 1, 2, \dots, r$$

$$(o_1 = e_1, o_2 = e_2, \dots, o_r = e_r)$$

Gözlenen frekanslar beklenen frekanslara uygundur, görülen farklılık önemsizdir.

$$H_1: o_i \neq e_i,$$

Gözlenen frekanslar beklenen frekanslara uygun değildir. Görülen farklılık önemlidir.

2. Safha: Test İstatistiğinin Hesaplanması.

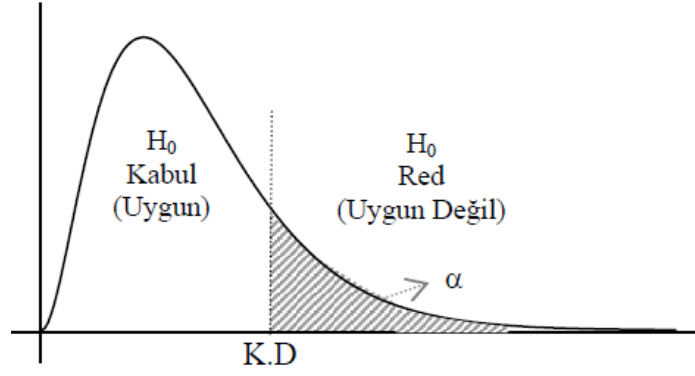
Test istatistiği aşağıdaki eşitlik yardımıyla hesaplanır.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \left(\text{veya } \chi^2 = \sum \frac{o_i^2}{e_i} - N \right) \quad (2.30)$$

Görüldüğü gibi o_i 'lerin e_i 'lere yaklaşması durumunda χ^2 istatistiği sıfıra yaklaşacaktır.

3. Safha: Karar Modeli

Ki-kare uygunluk testleri sağ kuyruk testidir [15]. Çünkü $o_i - e_i$ farklarının kareleri alınarak χ^2 test istatistiği hesaplanır. Fark büyüdükçe, farkların kareleri pozitif yönde sonsuza doğru büyür. Böylece red bölgesi daima dağılımın sağ kuyruğunda olur. Buna göre karar modeli şöyledir [11].



Şekil 2.4 Ki-kare (χ^2) kritik değer grafiği

Kritik değer (K.D), α önem seviyesi ve $s.d = r - 1$ serbestlik derecesine göre hazırlanmış χ^2 kritik değerler tablosundan belirlenir (EK-C).

$$K.D = \chi^2_{\alpha; r-1}$$

olarak sembolize edilir [11].

4. Safha: Karar Verme.

2. Safhada hesaplanan χ^2 değeri ile kritik $\chi^2_{\alpha; r-1}$ değeri, karar modeline göre mukayese edilerek karar verilir. Buna göre,

$\chi^2 < \chi^2_{\alpha; r-1}$ ise H_0 hipotezi kabul edilerek gözlenen değerlerle beklenen değerlerin birbirine uygun olduğuna, görülen farklılığın önemsiz olduğuna α önem seviyesinde karar verilir.

$\chi^2 > \chi^2_{\alpha; r-1}$ ise, H_0 hipotezi reddedilerek o_i 'lerin e_i 'lere uygun olmadığına α önem seviyesinde karar verilir.

Testten daha güvenilir bir sonuç alınması için şu iki durum dikkate alınmalıdır [11].

1. İki kategori varsa her bir beklenen frekans 10 veya daha büyük olmalıdır.

$$r = 2 \Rightarrow e_i \geq 10$$

2. Kategori sayısı ikiden fazla ise ($r > 2$) her bir beklenen frekans beş veya daha büyük olmalıdır.

$$r > 2 \Rightarrow e_i \geq 5$$

Ki-kare testi yaparken, çok sık yapılan yanlış kullanma hatalarından birisi küçük beklenen frekanslarla çalışılmasıdır. Küçük bir beklenen frekansın χ^2 ye katkısı büyük olacaktır. e_i küçüldükçe χ^2 büyüyecektir. Bu durum H_0 hipotezinin reddedilmesi ihtimalini arttırır [15].

2.6.3 İhtimal Dağılımlarına Uygunluk Testi

Bu test ile grup gözlenen frekansların belirli özelliklere sahip ihtimal dağılım fonksiyonlarınca temsil edilip edilmeyecekleri araştırılmaktadır. Uygulamada daha ziyade Binom, Poisson ve normal ihtimal dağılım fonksiyonlarına uygunluk testi yapılmaktadır [11].

İhtimal dağılımlarına uygunluk testinde beklenen frekanslar ilgili ihtimal fonksiyonu kullanılarak elde edilir. Daha sonra (2.30) eşitliği ile test istatistiği hesaplanır. Daha önce görülen uygunluk testinden farklı olarak serbestlik derecesi $s.d = r - 1 - m$ eşitliği ile tespit edilir. Burada m tahmin edilen parametre sayısıdır. Binom ve Poisson dağılımları için $m = 1$, normal dağılım için ise $m = 2$ alınır. Binom dağılımında tahmin edilen parametre p , Poisson dağılımında λ , normal dağılımda ise μ ve σ' 'dir [15].

İÇ ÇARPIM UZAYLARI VE HİLBERT UZAYLARI**3.1 İç Çarpım Uzayları ve Hilbert Uzayları****Tanım 3.1**

Bir iç çarpım uzayı (ya da ön-Hilbert uzayı) üzerinde bir $\langle x, y \rangle$ iç çarpımı tanımlı olan bir X vektör uzayıdır. Bir Hilbert uzayı ise, üzerinde iç çarpımla tanımlanmış metriğe göre, tam olan bir iç çarpım uzayıdır. Burada sözü edilen iç çarpım, $X \times X$ 'den X 'in bir k skaler cismi içine yapılan bir dönüşümdür; yani X 'in her x ve y vektör çifti, x ve y 'nin vektörel çarpımı olarak adlandırılan ve $\langle x, y \rangle$ ile gösterilen ve her x, y ve z vektörleri ve α skaleri için aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir skalerle eşlenmektedir.

$$(i\text{ç } 1) \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$(i\text{ç } 2) \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$(i\text{ç } 3) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$(i\text{ç } 4) \langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

X üzerinde tanımlanan bir iç çarpım, X üzerinde,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{3.1}$$

ile verilen bir norm ve

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)} \quad (3.2)$$

ile verilen bir metrik tanımlar.

Buna göre, iç çarpım uzayları birer normlu uzay olup, Hilbert uzayları ise birer Banach uzayıdır.

(İç 3)'deki üst çizgi, karmaşık eşleniği göstermekte olup, X 'in reel bir vektör uzay olması halinde, kolayca,

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \text{ (simetri)}$$

sonucunu elde ederiz.

(İç 1)-(İç 3) ifadelerinden ise, sık sık kullanacağımız,

$$(a) \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

$$(b) \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle \quad (3.3)$$

$$(c) \langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$$

formüllerini elde ederiz. (a) formülü, iç çarpımın birinci çarpana göre lineer olduğunu ortaya koyar. (c) ise, sağ tarafta $\overline{\alpha}$ ve $\overline{\beta}$ eşlenikleri bulunduğundan, iç çarpımın ikinci çarpana göre eşlenik lineer olduğunu gösterir. Bu iki özelliği birlikte ifade ederek, iç çarpımın sesquilineer olduğunu söyleyeceğiz. Bunun anlamı, eşlenik lineerliğin bazen yarı-lineer olarak adlandırılması nedeniyle, “ $1\frac{1}{2}$ kere lineer” demektir. İç çarpım uzayı üzerindeki norm, paralelkenar eşitliği olarak bilinen,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (3.4)$$

eşitliğini sağlar.

(3.4) eşitliğini gerçeklemeyen bir normun, (3.1)'in kullanılmasıyla, iç çarpımdan elde edilemeyeceğini söyleyebiliriz. Böyle normlar vardır ve bunlara ilişkin örnekler aşağıda verilecektir. Bu nedenle herhangi bir yanlış anlamaya yer vermeksizin,

“Normlu uzayların hepsi bir iç çarpım uzayı değildir.” diyebiliriz.

Örneklerimizi incelemeden önce, teoremin tümünde esas olan diklik kavramını tanımlamamız gerekmektedir. Üç boyutlu uzaylarda iki vektörün skaler çarpımının sıfır olması halinde, bu iki vektörün dik olduklarını, ya da, en az bir tanesinin sıfır vektörü olduğunu biliyoruz. Bu durum bizi aşağıdaki tanıma götürmektedir.

Tanım 3.2 Bir X iç çarpım uzayının, x ve y gibi, iki elemanı verildiğinde eğer,

$$\langle x, y \rangle = 0$$

ise x elemanı y elemanına diktir denir ve $x \perp y$ şeklinde yazılır. Benzer şekilde, $A, B \subset X$ altkümeleri verildiğinde, eğer, her $a \in A$ için, $x \perp a$ ise, $x \perp A$ ve her $a \in A$ ve her $b \in B$ için, $a \perp b$ ise, $A \perp B$ yazarız.

Örnek 3.1 R^n Euclid Uzayı

R^n uzayı, $x = (\xi_j) = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ve $y = (\eta_j) = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ olmak üzere,

$$\langle x, y \rangle = \xi_1 \eta_1 + \xi_n \eta_n \quad (3.5)$$

ile tanımlanan iç çarpıma göre, bir Hilbert uzayıdır.

Gerçekten, (3.5)'ten

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2}$$

ve buradan da,

$$d(x, y) = \|x - y\| = \langle x - y, x - y \rangle^{1/2} = [(\xi_1 - \eta_1)^2 + \dots + \xi_n - \eta_n]^2]^{1/2}$$

ile tanımlanan Euclid metriğini elde ederiz.

$n = 3$ olması halinde, (3.5) formülü, $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ve $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ 'ün, bilinen $\langle x, y \rangle = x \cdot y = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3$ skaler çarpımını verir ve $\langle x, y \rangle = x \cdot y = 0$ dikliği, elemanter diklik kavramıyla uyuşur.

Örnek 3.2 $L^2[a,b]$ Uzayı $L^2[a,b]$ uzayı üzerindeki norm $\|x\| = \left(\int_a^b x(t)^2 dt \right)^{1/2}$ ile

tanımlanır ve

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt \quad (3.6)$$

ile tanımlanan iç çarpımdan elde edilir. Kolaylık olması açısından buradaki fonksiyonları reel değerli olarak da alabiliriz. Ancak, belli uygulamalarda bu kısıtlamayı kaldırmak ve fonksiyonları $(t \in [a,b])$ olmak koşuluyla) karmaşık değerli fonksiyonlar olarak almak bazı avantajlar sağlar. Bu fonksiyonlar,

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt \quad (3.7)$$

tanımını yapmamız halinde, bir iç çarpım uzayına dönüşecek olan bir karmaşık vektör uzayı oluştururlar. Burada gösterdiğimiz üst çizgi yine karmaşık eşleniği göstermektedir. Buna göre, (İç 3) gerçekleşmekte ve dolayısıyla, $\langle x, x \rangle$ yine reel

olmaktadır. Bu özelliğe, $x(t)\overline{x(t)} = |x(t)|^2$ olması nedeniyle, $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ ile

tanımlanan norma ilişkin işlemlerde yine gereksinme duyacağız. (3.6)'ye karşılık gelen uzayın tanımlanmış reel $L^2[a,b]$ uzayıdır. Benzer şekilde (3.7)'e karşılık gelen uzayın tanımlanmış ise karmaşık $L^2[a,b]$ uzayıdır. Yapılan bu incelemelerden sonra $L^2[a,b]$ uzayının bir Hilbert uzayı olduğunu söyleyebiliriz [16].

Örnek 3.3 ℓ^2 Hilbert Uzayı

ℓ^2 uzayı,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\eta}_j \quad (3.8)$$

ile tanımlanan iç çarpıma göre bir Hilbert uzayıdır. Buradaki serinin yakınsaklığı, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden ve $x, y \in \ell^2$ varsayımından çıkmaktadır. ℓ^2 'deki norm ise,

$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 \right)^{1/2}$ ile tanımlanır. ℓ^2 uzayı bu norma göre tamdır.

ℓ^2 uzayı Hilbert uzaylarının ilk örneği olup, ilk kez D. Hilbert tarafından integral denklemlere ilişkin bir çalışmada tanımlanmış ve incelenmiştir (1912). Bununla birlikte, Hilbert uzayının aksiyomatik tanımı, daha sonraları, J.von Neumann tarafından kuantum mekaniğinin matematiksel temellerine ilişkin bir çalışmada verilmiştir [16].

Örnek 3.4 ℓ^p Uzayı

$p \neq 2$ olmak üzere, ℓ^p uzayı bir iç çarpım uzayı olmayıp, dolayısıyla, bir Hilbert uzayı da değildir.

İspat Yukarıdaki ifademiz, $p \neq 2$ olmak üzere, ℓ^p 'nin normunun bir iç çarpımdan elde edilemeyeceği anlamına gelmektedir. Bu durumu, söz konusu normun, (3.4)'deki paralelkenar eşitliğini gerçekleştirmediğini göstererek ispatlayabiliriz. Gerçekten, $x = (1, 1, 0, 0, \dots) \in \ell^p$ ve $y = (1, -1, 0, 0, \dots) \in \ell^p$ alırsak,

$$\|x\| = \|y\| = 2^{1/p}, \quad \|x + y\| = \|x - y\| = 2$$

olduğunu hesaplayabiliriz. Böylece, $p \neq 2$ olması halinde, (3.4)'ün gerçekleşmediğini görebiliriz.

ℓ^p uzayı tamdır. Buna göre, $p \neq 2$ olmak üzere, ℓ^p dizi uzayı, Hilbert uzayı olmayan bir Banach uzayıdır [9].

3.2 İç Çarpım Uzaylarının Diğer Özellikleri

İlk olarak, yukarıda verdiğimiz (3.1) bağıntısının bir norm tanımladığını göstermemiz gerekmektedir.

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0$$

$$(N2) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(N3) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(N4) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(N1) ve (N4) koşulları, (iç 4)'den çıkmaktadır. Ayrıca, (N3) koşulu, (iç 2) ve (iç 3)'den yararlanılarak elde edilir; gerçekten,

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2$$

dir. Son olarak, (N4) koşulu, aşağıdaki lemmada içerilmektedir.

Lemma 3.1

Bir iç çarpım ve buna karşılık gelen norm Schwarz eşitsizliğini ve üçgen eşitsizliğini, aşağıda belirtildiği şekilde gerçekler:

(a) Eşitlik hali, ancak ve ancak, $\{x, y\}$ 'nin lineer bağımlı olması halinde geçerli olmak üzere,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (\text{Schwarz eşitsizliği}) \quad (3.9)$$

'dir.

(b) Söz konusu norm, eşitlik hali, ancak ve ancak, $y = 0$ ya da $x = cy$ (c reel ve ≥ 0) halinde geçerli olmak üzere,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Üçgen Eşitsizliği}) \quad (3.10)$$

eşitsizliğini gerçekler [16].

3.3 Hilbert-Adjoint Operatör

Tanım 3.3

H_1 ve H_2 Hilbert uzayları olmak üzere, $T : H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun.

T nin, T^* Hilbert-adjoint operatörü, her $x \in H_1$ ve $y \in H_2$ için,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad (3.11)$$

olacak şekilde bir

$$T^* : H_2 \rightarrow H_1$$

operatörüdür.

Kuşkusuz, önce, bu tanımın bir anlamının olduğunu, yani, verilen bir T için, böyle bir T^* in var olduğunu göstermemiz gerekmektedir.

Tanım 3.4

X ve Y aynı bir k ($= R$ ya da C) cismi üzerindeki iki vektör uzayı olsun. $X \times Y$ üzerinde bir h sesquilineer formu (ya da, sesquilineer fonksiyoneli), her $x, x_1, x_2 \in X$ ve $y, y_1, y_2 \in Y$ ve her α, β skalerleri için,

$$(a) \quad h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$$

$$(b) \quad h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$$

$$(c) \quad h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$$

$$(d) \quad h(x, \beta y) = \overline{\beta} h(x, y)$$

olacak şekilde bir,

$h: X \times Y \rightarrow k$ dönüşümüdür.

Buna göre, h , birinci argümente göre lineer, ikinci argümente göre de eşlenik lineerdir.

X ve Y reel ise ($k = R$)'dir. (d) kısaca, $h(x, \beta y) = \beta h(x, y)$ olarak yazılır ve h , her iki argümente göre de lineer olduğundan, bilineerdir denir. X ve Y normlu uzaylar ise, ve her x, y için,

$$|h(x, y)| \leq c \|x\| \|y\| \tag{3.12}$$

olacak şekilde reel bir c sayısı varsa, h 'a sınırlıdır denir ve

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \in X - \{0\} \\ y \in Y - \{0\}}} \frac{|h(x, y)|}{\|x\| \|y\|} = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |h(x, y)| \tag{3.13}$$

sayısına da, h 'ın normu adı verilir.

Örneğin, iç çarpım, sesquilineer ve sınırlıdır.

(3.12) ve (3.13)'ten,

$$|h(x, y)| \leq \|h\| \|x\| \|y\| \quad (3.14)$$

elde edebileceğimizi de belirtmeliyiz.

Şimdi de, Hilbert-Adjoint operatörlerin, uygulamada sıklıkla kullanılan, bazı özelliklerini verip, ispatlarını yapacağız [16].

Theorem 3.1

H_1 ve H_2 uzayları, $S: H_1 \rightarrow H_2$ ve $T: H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer operatörler ve α herhangi bir skaler olsun.

Buna göre,

$$(a) \langle T^* y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle \quad (x \in H_1, y \in H_2)$$

$$(b) (S + T)^* = S^* + T^*$$

İspat (a) (3.11)'den (a)'yı elde edebiliriz:

$$\langle T^* y, x \rangle = \overline{\langle x, T^* y \rangle} = \overline{\langle Tx, y \rangle} = \langle y, Tx \rangle.$$

(b) (3.11)'ten, her x ve y için,

$$\begin{aligned} \langle x, (S + T)^* y \rangle &= \langle (S + T)x, y \rangle \\ &= \langle Sx, y \rangle + \langle Tx, y \rangle \\ &= \langle x, S^* y \rangle + \langle x, T^* y \rangle \\ &= \langle x, S^* y \rangle + \langle x, T^* y \rangle \end{aligned}$$

yazılır. Buna göre, her y için, $(S + T)^* y = (S^* + T^*)y$ olup, bu da, tanım gereği, (b)'dir.

3.4 Self-Adjoint, Üniter ve Normal Operatörler

Hilbert-adjoint operatör yardımıyla, uygulamada büyük önemi olan bazı sınırlı lineer operatör sınıflarını tanımlamak mümkündür. Bir H Hilbert uzayında, sınırlı lineer bir

$T: H \rightarrow H$ operatörü verilmiş olsun. $T^* = T$ ise, T 'ye self-adjoint ya da Hermityen, T bire-bir, üzerine ve $T^* = T^{-1}$ ise, T 'ye üniter, $TT^* = T^*T$ ise, T 'ye normal operatör adı verilir.

T 'nin T^* Hilbert-adjoint operatörü, (3.11) ile, yani,

$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$ ile tanımlanır. T self-adjoint ise, bu formül,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad (3.16)$$

şekline dönüşür. Tanımdan, aşıkarak görebileceğimiz üzere, T , self-adjoint ya da üniter ise, normaldir.

Kuşkusuz, bir operatör, self-adjoint ya da üniter olmak zorunda değildir. Örneğin, $I: H \rightarrow H$ özdeşlik operatörü ise, $T^* = -2iI$ olması nedeniyle, $T = 2iI$ normaldir; dolayısıyla, $TT^* = T^*T = 4I$ olup, buna karşılık, $T^* \neq T^{-1} = -\frac{1}{2}iI$ olmasının yanı sıra, $T^* \neq T'$ 'dir. Şimdi, bunun nedenini açıklayıp, bazı önemli bağıntılardan söz edeceğiz [16].

Örnek 3.5

$$C^n \text{ 'i } \langle x, y \rangle = x^T \bar{y} \quad (3.17)$$

ile tanımlanan iç çarpımla birlikte göz önüne alalım; burada x ve y , kolon vektörleri olarak yazılmış olup, T transpoz anlamındadır. Dolayısıyla, $x^T = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ olup, adı matris çarpımı kullanılmıştır.

$T: C^n \rightarrow C^n$, sınırlı olan lineer bir operatör olsun. C^n için bir baz verildiğinde, T ve T^T 'nin T^* Hilbert-Adjoint operatörünü, sırasıyla, A ve B adını vereceğimiz, $n -$ satırlı iki kare matrisle gösterebiliriz.

(3.17)'yi, çarpımın transpozuna ilişkin, bilinen $(Bx)^T = x^T B^T$ kuralını kullanarak,

$$\langle Tx, y \rangle = (Ax)^T \bar{y} = x^T A^T \bar{y}$$

ve

$$\langle x, T^* y \rangle = x^T \bar{B} y$$

elde ederiz. Bu iki eşitlikte, sol taraflar, (3.11) gereğince, her $x, y \in C^n$ için, eşittir. Bu nedenle, $A^T = \bar{B}$ olması gerekmektedir. Sonuç olarak,

$B = \overline{A}^T$ bulunur ve bu da ispatımızı tamamlar. Bu sonucu aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

C^n için bir baz verildiğinde ve C^n üzerindeki lineer bir operatör belirli bir matrisle gösterilebiliyorsa, bu operatörün Hilbert-adjoint operatörü, bu matrisin karmaşık eşlenik transpozu ile gösterilir.

Sonuç olarak, gösterim matrisleri,

T self-adjoint (Hermityen) ise, Hermityen,

T üniter ise, üniter

T normal ise, normal'dir.

Benzer şekilde, bir $T : R^n \rightarrow R^n$ lineer operatörü için, gösterim matrisleri,

T self-adjoint ise, reel simetrik,

T üniter ise, normal 'dir.

Konuya ilişkin olarak, bazı tanımları hatırlamamız yerinde olacaktır. Karesel bir $A = (\alpha_{jk})$ matrisi verildiğinde, A matrisine,

$\overline{A}^T = A$ ise Hermityen, (dolayısıyla, $\overline{\alpha}_{kj} = \alpha_{jk}$)

$\overline{A}^T = -A$ ise Burgu- Hermityen, (dolayısıyla, $\overline{\alpha}_{kj} = -\alpha_{jk}$)

$\overline{A}^T = A^{-1}$ ise üniter

$A \overline{A}^T = \overline{A}^T A$ ise, normal' dir denir.

Reel karesel bir $A = (\alpha_{jk})$ matrisine de,

$A^T = A$ ise reel simetrik (dolayısıyla, $\alpha_{kj} = \alpha_{jk}$)

$A^T = -A$ ise reel burgu simetrik (dolayısıyla, $\alpha_{kj} = -\alpha_{jk}$)

$A^T = A^{-1}$ ise, ortogonal'dir denir.

Buna göre, bir reel Hermityen matris bir (reel) simetrik matris; bir reel burgu Hermityen matris bir (reel) burgu Hermityen matris; ve bir reel üniter matris bir

ortogonal matristir (Hermityen matris deyimi, Fransız matematikçisi Charles Hermite'in adına ithafen verilmiştir (1822-1901)) [16].

Şimdi, yine, keyfi Hilbert uzayları üzerinde tanımlı lineer operatörlere dönelim ve self-adjoint olmaya ilişkin, önemli ve oldukça basit bir kriteri ifade edelim:

Teorem 3.2

$T : H \rightarrow H$, bir H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu durumda,

(a) T self-adjoint ise, $\langle Tx, x \rangle$, her $x \in H$ için, reeldir.

(b) H karmaşık ve $\langle Tx, x \rangle$, her $x \in H$ için, reel ise, T operatörü self-adjointtir.

İspat (a) T self-adjoint ise, her x için, $\overline{\langle Tx, x \rangle} = \langle x, Tx \rangle = \langle Tx, x \rangle$ 'dir. O halde, $\langle Tx, x \rangle$ kendisinin karmaşık eşleniğine eşittir, yani reeldir.

(b) $\langle Tx, x \rangle$, her x için reel ise,

$$\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} = \overline{\langle x, T^*x \rangle} = \langle T^*x, x \rangle$$

yazabiliriz. Buna göre,

$$0 = \langle Tx, x \rangle - \langle T^*x, x \rangle = \langle (T - T^*)x, x \rangle$$

olup, H 'ın karmaşık olması nedeniyle $T - T^* = 0$ 'dır.

Teoremin (b) kısmında, H 'ın karmaşık olması esastır. Ve bu açıkça görülmektedir. Çünkü, reel bir H için, iç çarpım reel değerli olup, bu durumda, T lineer operatörü üzerine hiçbir varsayım koymaksızın, $\langle Tx, x \rangle$ reel olur.

Self-adjoint operatörlerin çarpımları (bileşimleri) uygulamada sık sık ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle aşağıdaki teorem yararlı olacaktır [16].

Teorem 3.3

Bir H Hilbert uzayı üzerinde, sınırlı self-adjoint lineer iki S ve T operatörlerinin çarpımının self-adjoint olması için gerek ve yeter koşul bu operatörlerin komütatif yani,

$$ST = TS$$

olmasıdır.

İspat Bilindiği üzere,

$$(ST)^* = T^* S^* = TS$$

yazabiliriz. Buna göre,

$ST = (ST)^* \Leftrightarrow ST = TS$ 'dir. Bu da ispatı tamamlar [16].

MODAL GENLİK PROBLEMİ VE MODAL GENLİKLERİN BESSEL FONKSİYONU YARDIMIYLA BELİRLENMESİ**4.1 Giriş**

Modal genliklerin belirlenmesinden önce modal genlikleri Bessel fonksiyonu yardımıyla belirleyeceğimiz için Bessel diferansiyel denklemine, Bessel diferansiyel denkleminin çözüm yöntemi olan düzgün tekil nokta etrafında seri çözüme ve Bessel diferansiyel denkleminin çözüm ailesine bakalım.

4.2 Düzgün Tekil Nokta Etrafında Seri Çözüm**Tanım 4.1**

n . mertebeden lineer ve homojen adi diferansiyel denklem

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + p_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + p_0(x)y = 0$$

şeklinde verilmiş olsun. Bu durumda;

i) Eğer $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$ katsayılarının hepsi $x = x_0$ noktasında analitik değilse x_0 noktasına verilen diferansiyel denklemin bir tekil noktası denir.

ii) Eğer bütün $p_k(x)$ katsayıları analitik değil fakat tüm $(x - x_0)^{n-k} p_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ için analitik ise x_0 noktasına bir düzgün tekil nokta denir.

iii) Eğer x_0 noktası verilen diferansiyel denklemin ne adi noktası ne de düzgün tekil noktası değilse bu durumda düzgün olmayan tekil noktası denir.

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ ikinci mertebeden lineer homojen adi diferansiyel denklemini düşünelim. Eğer $x = 0$ düzgün bir tekil nokta ise $xP(x)$ ve $x^2Q(x)$ fonksiyonları

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n, \quad |x| < r$$

$$x^2Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n, \quad |x| < r$$

şeklinde kuvvet serilerine açılabilir veya bunları

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^{n-1}, \quad |x| < r, \quad x \neq 0$$

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^{n-2}, \quad |x| < r, \quad x \neq 0$$

şekliyle de yazabiliriz.

Verilen diferansiyel denklemin Frobenius seri çözümünü aşağıdaki formda önerelim.

$$y(x) = x^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}, \quad 0 < x < r,$$

y' 'nin x' e göre türevini alır ve bu sonuçları diferansiyel denklemde yerine koyarsak

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n x^{n+\alpha-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n x^{n+\alpha-2} + \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^{n-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1} + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^{n-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} = 0$$

sonucunu buluruz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n x^{n-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_{n-m} x^{n-m-1} (m+\alpha) a_m x^{m+\alpha-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n (m+\alpha) P_{n-m} a_m \right] x^{n+\alpha-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^{n-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n Q_{n-m} a_m \right) x^{n+\alpha-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ (n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n + \sum_{m=0}^n [(m+\alpha)P_{n-m} + Q_{n-m}]a_m \} x^{n+\alpha-2} = 0$$

Bu eşitliğin sağlanması için $x^{n+\alpha-2}$, $n=0,1,\dots$ katsayısı sıfır olmalıdır.

$n=0$ için;

$$[\alpha(\alpha-1) + \alpha P_0 + Q_0]a_0 = 0, \text{ denklemini elde edilir.}$$

Bu durumda $a_0 = 0$ veya $\alpha(\alpha-1) + \alpha P_0 + Q_0 = 0$ olmalıdır.

$n=1$ için;

$$(n+\alpha) + (n+\alpha-1)a_n + \sum_{m=0}^n [(m+\alpha)P_{n-m} + Q_{n-m}]a_m = 0$$

ise

$$a_n = -\frac{1}{(n+\alpha)(n+\alpha-1) + (n+\alpha)P_0 + Q_0} \sum_{m=0}^{n-1} [(m+\alpha)P_{n-m} + Q_{n-m}]a_m$$

i) Eğer $a_0 = 0$ ise $a_1 = a_2 = \dots = 0$ olur ve sonuç olarak $y(x) = 0$ sıfır çözümü elde edilir.

ii) Eğer $a_0 \neq 0$ ise $\alpha(\alpha-1) + \alpha P_0 + Q_0 = 0$ indisel denklemi elde edilir.

İndisel denklemin α için çözülmesiyle α_1 ve α_2 kökleri elde edilir. Bu nedenle sıfır olmayan çözüm için $\alpha_0 \neq 0$ olmalıdır ve α indisel denklemin köküdür [17].

4.2.1 Fuchs Teoremi - Düzgün Tekil Nokta Etrafında Seri Çözüm

$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$ ikinci mertebeden lineer homojen adi diferansiyel denklemi için $x=0$ bir düzgün tekil nokta ise

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n, \quad x^2Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n, \quad |x| < r \text{ yazabiliriz.}$$

Kabul edelim ki $\alpha(\alpha+1) + \alpha P_0 + Q_0 = 0$ indisel denklemi α_1 ve α_2 $\alpha_1 \geq \alpha_2$ olmak üzere iki reel köke sahip olsun. Bu durumda verilen diferansiyel denklemin aşağıdaki gibi Frobenius seri çözümü vardır.

$y_1(x) = x^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_0 \neq 0$, $0 < x < r$, buradaki a_n katsayıları $y_1(x)$ 'in diferansiyel denklemde yerine konulmasıyla bulunur. İkinci lineer bağımsız çözüm ise aşağıdaki gibi bulunur [17]:

1. Eğer $\alpha_1 - \alpha_2$ farkı tamsayıdan farklı ise ikinci Frobenius seri çözümü

$y_2(x) = x^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $0 < x < r$ şeklindedir. Buradaki b_n katsayıları $y_2(x)$ 'in diferansiyel denklemde yerine konulmasıyla bulunur.

2. Eğer $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ise

$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $0 < x < r$, buradaki b_n katsayıları $y_2(x)$ 'in diferansiyel denklemde yerine konulmasıyla bulunur. Bu durumda $y_2(x)$ ikinci çözümü bir Frobenius seri çözümü değildir.

3. Eğer $\alpha_1 - \alpha_2$ farkı tamsayı ise

$y_2(x) = a y_1(x) \ln x + x^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $0 < x < r$, buradaki b_n ve a katsayıları $y_2(x)$ 'in diferansiyel denklemde yerine konulmasıyla bulunur. a parametresi sıfır olabilir, aynı zamanda $y_2(x)$ ikinci çözümü bir Frobenius seri çözümü olabilir.

Sonuç olarak diferansiyel denklemin genel çözümü $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ şeklinde verilebilir [17].

4.3 Bessel Diferansiyel Denklemi ve Çözümü

Bessel diferansiyel denklemi $x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2) y = 0$, $x > 0$, formundadır. Burada $p \geq 0$ sabit bir sayıdır. Bessel diferansiyel denkleminin çözümünde düzgün tekil nokta etrafında seri çözüm yöntemi kullanılır.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = \frac{x^2 - p^2}{x^2} \quad x=0 \text{ noktasının bir düzgün tekil}$$

nokta olduğu açıktır. Çünkü

$$xP(x) = 1 = 1 + 0.x + 0.x^2 + \dots \Rightarrow P_0 = 1,$$

$$x^2Q(x) = x^2 - p^2 = -p^2 + 0.x + x^2 + 0.x^3 + 0.x^4 + \dots \Rightarrow Q_0 = -p^2,$$

$xP(x)$ ve $x^2Q(x)$ 'lerin her ikisi de $x=0$ noktasında analitiktir ve seriye açılabilirler, bu seriler $|x| < \infty$ için yakınsaktır. Bu nedenle $x=0$ noktası bir düzgün tekil noktadır.

İndisel denklem $\alpha(\alpha-1) + \alpha P_0 + Q_0 = 0$ şeklindedir.

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha.1 - p^2 = 0 \Rightarrow \alpha - p^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = p, \quad \alpha_2 = -p$$

Bessel diferansiyel denklemi aşağıdaki formda seri çözüme sahiptir.

$$y_1(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p}, \quad a_0 \neq 0, \quad 0 < x < \infty$$

x 'e bağlı türev alırsak

$$y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p) a_n x^{n+p-1}$$

$$y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)(n+p-1) a_n x^{n+p-2}$$

y_1, y_1' ve y_1'' değerlerinin denklemde yerine konulmasıyla

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)(n+p-1) a_n x^{n+p-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+p) a_n x^{n+p-1} + (x^2 - p^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p} = 0$$

Toplamın indeksinin değiştirilmesiyle

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p+2} \Rightarrow \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{m+p} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+p},$$

$$x^p \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [(n+p)(n+p-1) + (n+p) - p^2] a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \right\} = 0$$

$$x^p \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n+2p) a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

Bu denklemin sağlanabilmesi için $x^n, n = 0, 1, \dots$ sıfır olmalıdır

$$x^0 : 0.(0+2p)a_0 = 0 \Rightarrow a_0 \neq 0 \text{ sabiti keyfidir.}$$

$$x^1 : 1.(1+2p)a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$n \geq 2$ için;

$$x^n : n(n+2p)a_n + a_{n-2} = 0 \Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)}$$

Böylece $a_{2n+1} = 0, n = 0, 1, \dots$ ve

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2+2p)} = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 1(1+p)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(4+2p)} = -\frac{a_2}{2^2 \cdot 2(2+p)} = (-1)^2 \frac{a_0}{2^4 \cdot 2!(1+p)(2+p)},$$

$\vdots$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2^{2n} \cdot n!(1+p)(2+p)\dots(n+p)},$$

ve

$$y_1(x) = a_0 x^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(1+p)(2+p)\dots(n+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad 0 < x < \infty$$

Çözümü daha sade yazabilmek için

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} t^p e^{-t} dt, \quad p > 0 \text{ şeklinde tanımlanan Gamma fonksiyonunu kullanabiliriz [17].}$$

$$\Gamma(p+1) = -\int_0^{\infty} t^p d(e^{-t}) = -t^p e^{-t} \Big|_{t=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} p t^{p-1} dt$$

$$= p \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt = p \Gamma(p),$$

öyle ki

$$\Gamma(n+p+1) = (n+p)\Gamma(n+p) = (n+p)(n+p-1)\Gamma(n+p-1) = \dots$$

$$= (n+p)(n+p-1)\dots(1+p)\Gamma(1+p)$$

$p = k$ 'nın bir tamsayı olması durumunda

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_{t=0}^{\infty} = 1,$$

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1 = 2!,$$

...

$$\Gamma(k+1) = k.\Gamma(k) = k!$$

Bu nedenle $a_0 = [2^p \Gamma(1+p)]^{-1}$ seçilmesiyle birinci Frobenius seri çözümü

$$y_1(x) = J_p(x),$$

$J_p(x)$ fonksiyonuna p 'inci mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu denir.

$$J_p(x) = \frac{1}{2^p \Gamma(1+p)} x^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(1+p)(2+p)\dots(n+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}, \quad 0 < x < \infty$$

Funch Teoremine göre lineer bağımsız ikinci çözüm indisel denklemin kökleri arasındaki farka göre değişmektedir. $\alpha_1 - \alpha_2 = 2p$ farkının tamsayıdan farklı, sıfır veya pozitif tamsayı olması durumuna göre değişmektedir [17].

4.3.1 $2p$ 'nin Tamsayı Olmaması

İkinci Frobenius seri çözümü

$$y_2(x) = x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad 0 < x < \infty$$

Aynı işlemleri kullanarak $n = 1, 2, \dots$ için

$$a_{2n-1} = 0, \quad a_{2n} = (-1)^n \frac{b_0}{2^{2n} \cdot n! (1-p)(2-p) \dots (n-p)},$$

$$y_2(x) = b_0 x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! (1-p)(2-p) \dots (n-p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad 0 < x < \infty$$

$b_0 = [2^{-p} \Gamma(1-p)]^{-1}$ seçilmesiyle

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! \Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} = J_{-p}(x), \quad 0 < x < \infty$$

elde edilir. Buradan genel çözüm;

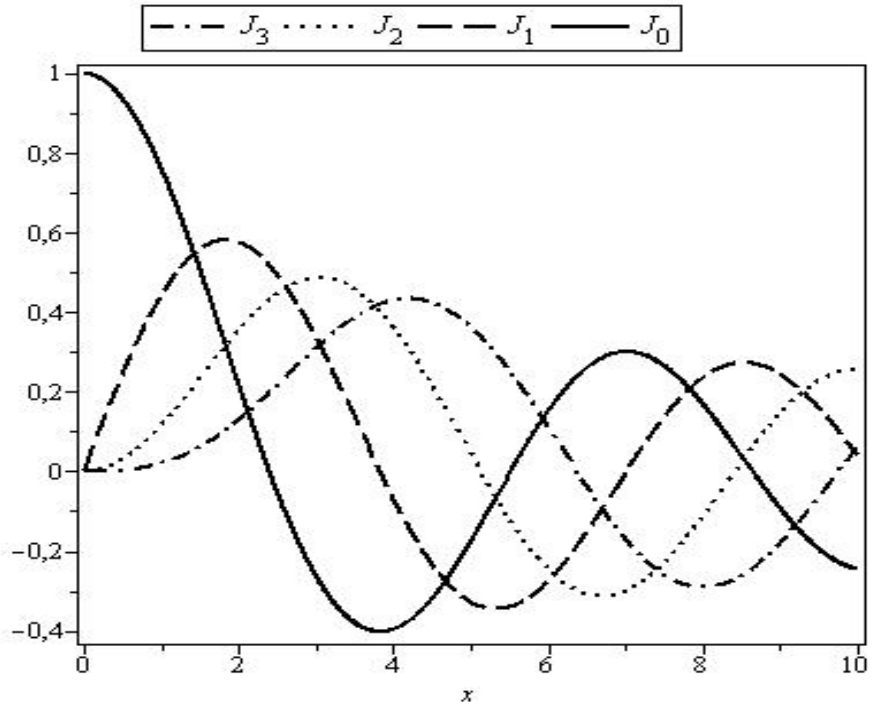
$$y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x) \text{ şeklindedir.}$$

Genel çözüm aynı zamanda

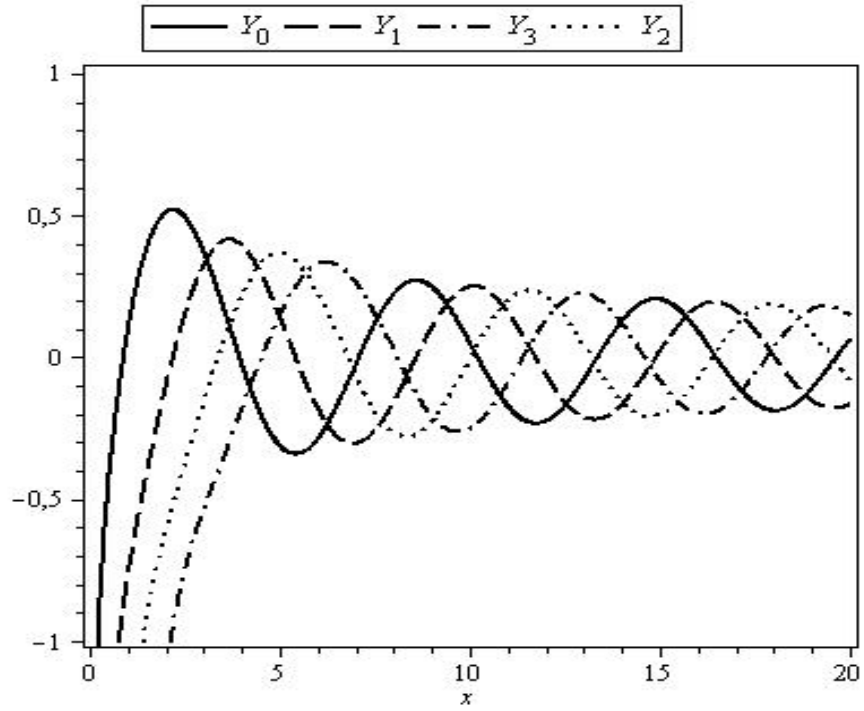
$$y(x) = D_1 J_p(x) + D_2 Y_p(x)$$

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} \quad p \text{ 'inci mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonudur.}$$

$J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ ve $J_3(x)$ fonksiyonlarının grafikleri ile $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ ve $Y_3(x)$ fonksiyonlarının grafikleri şu şekildedir [6].



Şekil 4.1 $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ ve $J_3(x)$ fonksiyonlarının grafiği



Şekil 4.2 $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ ve $Y_3(x)$ fonksiyonlarının grafikleri

Yukarıda verilen $J_0(x)$ ve $Y_0(x)$ fonksiyonlarının grafiklerine yakından bakılacak olursa, görülür ki, x 'in büyük değerleri için bu eğriler sönümlü kosinüs ve sinüs eğrilerini andırmaktadır [6].

4.3.2 $p = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Birinci Fronenius seri çözümünü sadeleştirilerek

$$y_1(x) = J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad 0 < x < \infty$$

Lineer bağımsız ikinci çözüm

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad 0 < x < \infty \text{ 'dir.}$$

x 'e bağlı türev alırsak;

$$y_2'(x) = y_1'(x) \ln x + \frac{y_1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1},$$

$$y_2''(x) = y_1''(x) \ln x + \frac{2y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2}, \quad 0 < x < \infty$$

y_2, y_2' ve y_2'' 'nün Bessel diferansiyel denkleminde yerine konulmasıyla ve $p = 0$ durumunda;

$$(x^2 y_1'' + x y_1' + x^2 y_1) \ln x + 2x y_1' + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+2} = 0$$

bulunur [17].

$y_1(x)$ 'in Bessel denkleminin bir çözümü olması nedeniyle $x^2 y_1'' + x y_1' + x^2 y_1 = 0$ 'dır ve belirtilmelidir ki

$$2x y_1' = 2x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \frac{2n x^{2n-1}}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \text{ bulunur.}$$

Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} x^n = 0 \text{ elde edilir.}$$

Bu eşitliğin sağlanabilmesi için $x^n, n = 0, 1, \dots$ sıfır olmalıdır.

x^1 katsayısından $1.b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 0$ dır.

$x^n, n \geq 1$ katsayısından $b_{2n+1} = 0$ dır ve

$$(-1)^n \frac{4n}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + [2n(2n-1) + 2n]b_{2n} + b_{2n-2} = 0, \text{ öyle ki}$$

$$b_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \frac{b_{2n-2}}{(2n)^2} \text{ elde edilir.}$$

$$\text{Sadelik için } b_0 = 0 \text{ alalım. Gerekli işlemler yapılarak } b_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

olduğu gösterilebilir.

Bu nedenle lineer bağımsız ikinci çözüm

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}, \quad 0 < x < \infty$$

sıfıncı mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonunun terimidir.

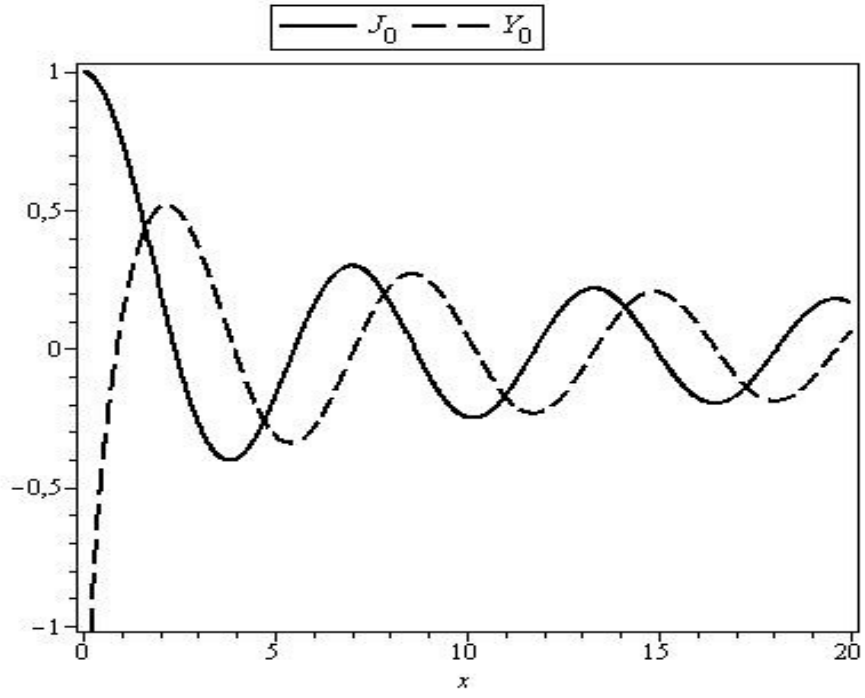
$$y_2(x) = \frac{\pi}{2} Y_0(x) + (\ln 2 - \gamma) J_0(x), \quad 0 < x < \infty$$

$0 < x < \infty$ için sıfıncı mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonu

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \right\} \text{ şeklindedir.}$$

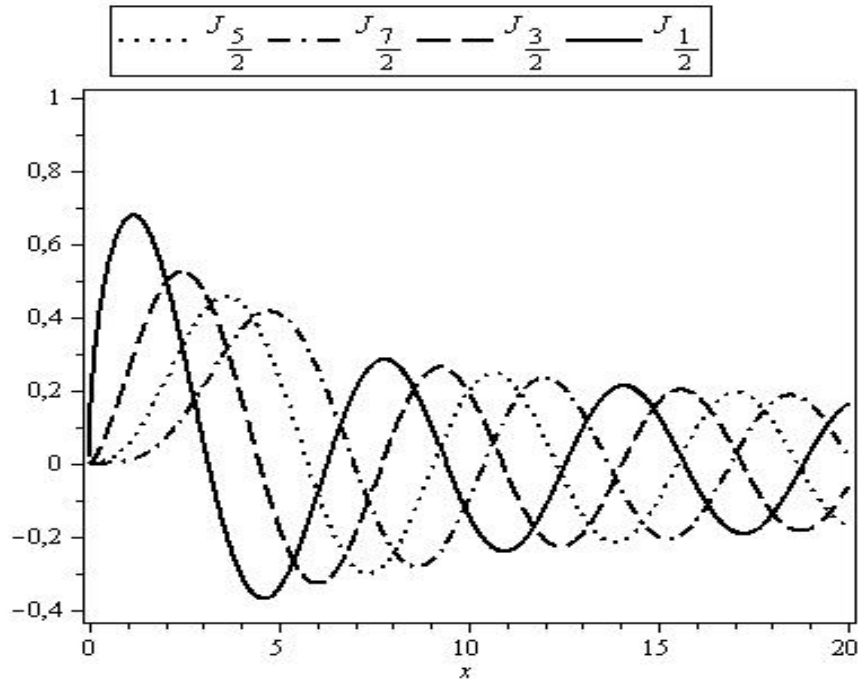
$$\gamma = 0,57721566490153\dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \text{ Euler sabitidir.}$$

Genel çözüm ise $y(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)$ şeklindedir.

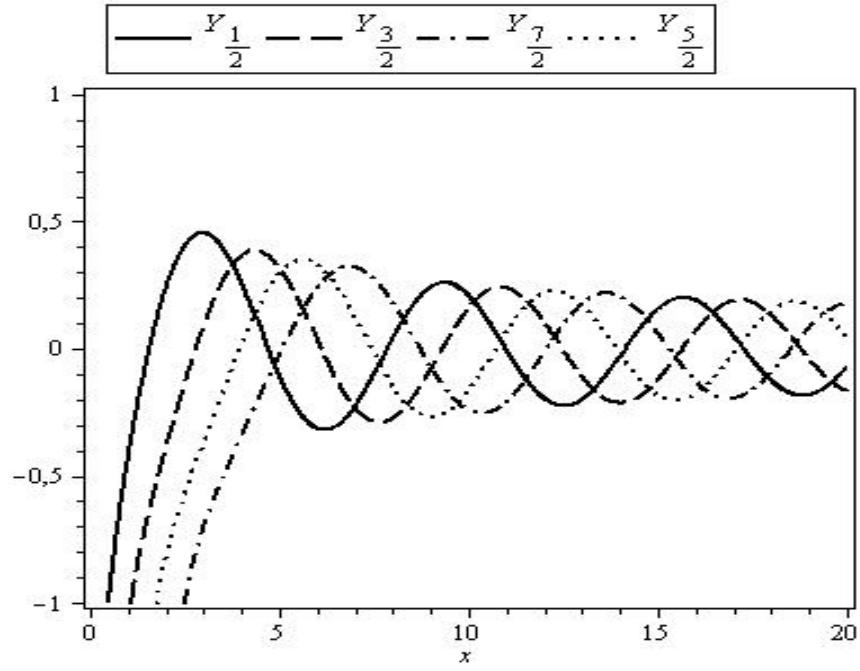


Şekil 4.3 $J_0(x)$ ve $Y_0(x)$ 'in grafikleri

Şimdi de küresel Bessel fonksiyonlarının grafiklerine bir göz atmak gerekirse;



Şekil 4.4 $J_{1/2}(x)$, $J_{3/2}(x)$, $J_{5/2}(x)$ ve $J_{7/2}(x)$ fonksiyonlarının grafiği



Şekil 4.5 $Y_{1/2}(x)$, $Y_{3/2}(x)$, $Y_{5/2}(x)$ ve $Y_{7/2}(x)$ fonksiyonlarının grafiği

4.3.3 p Pozitif Tamsayı

Birinci Frobenius seri çözümü

$$y_1(x) = J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}, \quad 0 < x < \infty \text{ şeklinde yazılmıştı.}$$

lineer bağımsız ikinci çözüm

$$y_2(x) = ay_1(x) \ln x + x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad 0 < x < \infty$$

$$y_2'(x) = a(y_1'(x) \ln x + \frac{y_1}{x}) + \sum_{n=0}^{\infty} (n-p)b_n x^{n-p-1}$$

$$y_2''(x) = a(y_1''(x) \ln x + \frac{2y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2}) + \sum_{n=0}^{\infty} (n-p)(n-p-1)b_n x^{n-p-2}$$

Bulunan bu değerlerin Bessel denkleminde yerine konulmasıyla

$$a[x^2 y_1'' + xy_1' + (x^2 - p^2)y_1] \ln x + 2axy_1' + \sum_{n=0}^{\infty} (n-p)(n-p-1)b_n x^{n-p}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-p)b_n x^{n-p} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-p-2} - \sum_{n=0}^{\infty} p^2 b_n x^{n-p} = 0$$

$y_1(x)$ 'in denklemin bir çözümü olması nedeniyle

$$x^2 y_1'' + x y_1' + (x^2 - p^2) y_1 = 0 \text{ dır.}$$

$$2ax y_1' = 2ax \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+p).x^{2n+p-1}}{n!(n+p)! 2^{2n+p}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2a(2n+p)}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

denklemin x^p ile çarpılmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{p+1} a(2n+p)}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+p)} + \sum_{n=0}^{\infty} n(2n-p) b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n-2} x^n = 0 \text{ bulunur [17].}$$

Bu eşitliğin sağlanabilmesi için $x^n, n=0,1,\dots$ katsayısı sıfır olmalıdır.

Yukarıdaki eşitliğe $x^n, 0 \leq n < 2p$ 'nin hiçbir katkısı yoktur.

$$x^0 : 0.(0-2p)b_0 = 0 \Rightarrow b_0 \text{ keyfi olduğu için } b_0 = 1 \text{ alalım.}$$

$$x^1 : 1.(1-2p)b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 0$$

$x^n, 2 \leq n < 2p$ katsayısından

$$n(n-2p)b_n + b_{n-2} = 0 \Rightarrow b_n = \frac{b_{n-2}}{n(2p-n)}$$

$$n=2 : b_2 = \frac{b_0}{2(2p-2)} = \frac{1}{2^2 \cdot 1(p-1)}$$

$$n=4 : b_4 = \frac{b_2}{4(2p-4)} = \frac{1}{2^4 \cdot 2!(p-1)(p-2)}$$

$\vdots$

$$n=2k : b_{2k} = \frac{b_{2k-2}}{2k(2p-2k)} = \frac{1}{2^{2k} \cdot k!(p-1)(p-2)\dots(p-k)} = \frac{(p-k-1)!}{2^{2k} k!(p-1)!}$$

Buradan $b_{2n+1} = 0, n=0,1,2,\dots$ olduğu görülür.

$$x^{2p} \text{ katsayısından } \frac{2^{p+1}ap}{p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} + b_{2p-2} = 0 \Rightarrow a = -2^{p-1}(p-1)!b_{2(p-1)} = -\frac{1}{2^{p-1}(p-1)!}$$

elde edilir.

b_{2p} değeri keyfidir fakat sadelik için $b_{2p} = 0$ alalım.

$x^{2(n+p)}, n \geq 1$, katsayısından

$$(-1)^n \frac{2^{p+1}a(2n+p)}{n!(n+p)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+p)} + (2n+2p)(2n)b_{2(n+p)} + b_{2(n-1+p)} = 0, \text{ öyle ki}$$

$$b_{2(n+p)} = (-1)^{n+1} \frac{2^{p-1}a(2n+p)}{n(n+p)n!(n+p)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+p)} - \frac{b_{2(n-1+p)}}{2^2 n(n+p)}$$

Matematiksel işlemleri kullanarak

$$b_{2(n+p)} = (-1)^{n+1} \frac{2^{p-1}aA_n}{n!(n+p)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+p)}, \quad A_n = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{1+p} + \frac{1}{2+p} + \dots + \frac{1}{n+p}\right)$$

Buradan lineer bağımsız ikinci çözüm $0 < x < \infty$ için,

$$y_2(x) = aJ_p(x) \ln x + x^{-p} \left\{ \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!(p-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{p-1}A_n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+p)} \right\}$$

Notasyon değişikliği yapılarak

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \psi(n+1) + \gamma, \quad \psi(1) = -\gamma, \quad \psi(n) = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} \text{ psi fonksiyonu. } y_2(x) \text{ } p' \text{inci}$$

mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonunun bir terimidir.

$$y_2(x) = a \left\{ J_p(x) \ln x + \frac{x^{-p}}{a} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!(p-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\psi(n+1) + \psi(n+p+1) - \psi(p+1) + \gamma}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \right\}$$

$$= a \left[J_p(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\psi(n+1) + \psi(n+p+1)}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \right]$$

$$-\frac{1}{2}[\gamma - \psi(p+1) - 2 \ln 2] J_p(x) \}$$

$$= a \left\{ \frac{\pi}{2} Y_p(x) - \frac{1}{2} [\gamma - \psi(p+1) - 2 \ln 2] J_p(x) \right\}, \quad 0 < x < \infty$$

$$Y_p(x) = \frac{2}{\pi} J_p(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\psi(n+1) + \psi(n+p+1)}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonlarının kullanılmasıyla genel çözüm

$$y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x)$$

Bu çözüm $\alpha_1 - \alpha_2$ farkının pozitif tamsayı olması durumudur. İkinci çözüm $\ln x$ logaritmik terimini içerir [17].

4.3.4 $p = k + \frac{1}{2}, k = 0, 1, \dots$ ve $\alpha_1 - \alpha_2 = 2k + 1$ 'in Pozitif Tamsayı Olması

Birinci Frobenius seri çözümü

$$y_1(x) = J_{k+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! \Gamma(n+k+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k+\frac{1}{2}}, \quad 0 < x < \infty \text{ şeklindedir.}$$

$$y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+k+\frac{1}{2}}{2n! \Gamma(n+k+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k-\frac{1}{2}},$$

Lineer bağımsız ikinci çözüm

$$y_2(x) = a y_1(x) \ln x + x^{-(k+\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad 0 < x < \infty$$

$$y_2'(x) = a(y_1'(x) \ln x + \frac{y_1}{x}) + \sum_{n=0}^{\infty} (n-k-\frac{1}{2})b_n x^{n-k-\frac{3}{2}}$$

$$y_2''(x) = a(y_1''(x) \ln x + \frac{2y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2}) + \sum_{n=0}^{\infty} (n-k-\frac{1}{2})(n-k-\frac{3}{2})b_n x^{n-k-\frac{5}{2}}$$

Bu değerlerin Bessel denkleminde yerine konulmasıyla

$$a[x^2 y_1' + x y_1' + (x^2 - p^2) y_1] \ln x + 2a x y_1' + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-2k-1)b_n x^{n-k-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-k+\frac{3}{2}} = 0$$

$x^2 y_1'' + x y_1' + (x^2 - p^2) y_1 = 0$ olduğu belirtilmelidir ve denklemin $x^{k+\frac{1}{2}}$ ile çarpılmasıyla

$$a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{k+\frac{3}{2}} (2n+k+\frac{1}{2})}{n! \Gamma(n+k+\frac{3}{2})} (\frac{x}{2})^{2n+2k+1} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-2k-1)b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+2} = 0$$

Bu eşitliğin sağlanabilmesi için $x^2, n = 0, 1, \dots$ sıfır olmalıdır.

Yukarıdaki eşitliğe $x^n, 0 \leq n < 2k+1$ için hiçbir katkısı yoktur.

$$x^0 : 0.(0-2k-1)b_0 = 0 \Rightarrow b_0 \text{ keyfidir.}$$

$$x^1 : 1.(1-2k-1)b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 0$$

$x^n, 2 \leq n < 2p$ katsayısından

$$b_{2m+1} = -\frac{b_{2m-1}}{(2m+1)(2m-2k)} = 0, 1 < m < k \text{ olduğunu gösterebiliriz.}$$

x^{2k+1} katsayısından

$$a \frac{k+\frac{1}{2}}{2^{k-\frac{1}{2}} \Gamma(k+\frac{3}{2})} + (2k+1).0.b_{2k+1} + b_{2k-1} = 0 \Rightarrow a = 0$$

$a = 0$ ile birlikte x^n katsayısı verilir.

$$n(n-2p)b_n + b_{n-2} = 0 \Rightarrow b_{2m-1} = 0, \quad b_{2m} = -\frac{b_{2m-2}}{2^2 m(m-p)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$b_{2m} = (-1)^m \frac{b_0}{2^{2m} m!(1-p)(2-p)\dots(m-p)}. \text{ olduğu gösterilebilir.}$$

$$b_0 = [2^{-p} \Gamma(1-p)]^{-1} \text{ seçilmesiyle } b_{2m} = \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m-p+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-p} \text{ bulunur.}$$

$$y_2(x) = x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} = J_{-p}(x), \quad 0 < x < \infty.$$

Genel çözüm

$y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x)$ şeklindedir ve $2p$ 'nin tamsayı olmaması durumuyla aynıdır.

Bu durum $\alpha_1 - \alpha_2$ nin pozitif tamsayı olduğu durumdur, ikinci çözüm bir Frobenius serisidir ve $\ln x$ logaritmik terimini içermez [17].

Uygulamalarda Bessel fonksiyonu nadiren standart formda bulunur. İkinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklem

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1-2\alpha}{x} \frac{dy}{dx} + [(\beta \rho x^{\rho-1}) + \frac{\alpha^2 - p^2 \rho^2}{x^2}] y = 0, \quad x > 0, \quad (4.1)$$

burada α, β, p, ρ sabit sayılardır ve bu denklem Bessel denklemine dönüştürülebilir.

$$\xi^2 \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \xi \frac{d\eta}{d\xi} + (\xi^2 - p^2) \eta = 0, \quad \xi > 0 \quad (4.2)$$

Sonuç aşağıdaki gibi bulunur.

$\xi = \beta x^\rho$ değişken dönüşümüyle,

$$\xi \frac{dy}{d\xi} = \xi \frac{dy/dx}{d\xi/dx} = \beta x^\rho \frac{1}{\beta \rho x^{\rho-1}} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\rho} \frac{dy}{dx} \Rightarrow \xi \frac{d(.)}{d\xi} = \frac{x}{\rho} \frac{d(.)}{dx}$$

Bu durumda (4.2) denklemi

$$\xi \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\eta}{d\xi} \right) + (\xi^2 - p^2) \eta = 0 \Rightarrow \frac{x}{\rho} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\rho} \frac{d\eta}{dx} \right) + (\beta^2 x^{2\rho} - p^2) \eta = 0$$

$\eta = x^{-\alpha} y$ dönüşümüyle

$$x \frac{d\eta}{dx} = x^{1-\alpha} \frac{dy}{dx} - \alpha x^{-\alpha} y$$

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\eta}{dx} \right) = x^{2-\alpha} \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-2\alpha) x^{1-\alpha} \frac{dy}{dx} + \alpha^2 x^{-\alpha} y \text{ elde edilir.}$$

Buradan diferansiyel denklem

$$x^{2-\alpha} \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-2\alpha) x^{1-\alpha} \frac{dy}{dx} + \alpha^2 x^{-\alpha} y + (\beta^2 x^{2\rho} - p^2) \rho^2 x^{-\alpha} y = 0 \text{ haline gelir ve bu da}$$

(4.1) denkleminin formatındadır.

Eğer (4.2) Bessel diferansiyel denkleminin çözümünde $\eta = B_p(\xi)$ olarak alınsaydı (4.1)

denkleminin çözümü $y = x^\alpha B_p(\beta x^\rho)$ şeklinde olacaktı.

4.4 Klein Gordon Denklemi

Klein-Gordon denklemi herhangi diğer ikinci dereceden kısmi türevli diferansiyel denklemler (KTDD) gibi başlangıç koşulları çifti ile desteklenmelidir. Fiziksel olarak, bunlar uygun bir sinyal kaynağının uyarılmasında rol oynar. Bu kaynağın $t = 0$ anından önce uyarılmadığı (hareketsiz olduğu) fakat $t = 0$ anında uyarılmaya başladığı kabul edilsin. Eğer böyleyse başlangıç koşulu

$$f(\xi, \tau)_{|\xi=0} = \begin{cases} \phi(\tau), \tau \geq 0 \Rightarrow t \geq 0 \text{ için} \\ 0, \tau < 0 \Rightarrow t < 0 \text{ için} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\partial_\tau f(\xi, \tau)_{|\xi=0} = \begin{cases} \dot{\phi}(\tau), \tau \geq 0 \Rightarrow t \geq 0 \text{ için} \\ 0, \tau < 0 \Rightarrow t < 0 \text{ için} \end{cases}$$

olarak yazılmalıdır. $\varphi(\tau)$, $\bar{\varphi}(\tau)$ verilmelidir ve $\xi = 0 \Rightarrow z = 0$ olmalıdır [4].

Sonuç olarak, Klein-Gordon denkleminin çözümleri nedensellik prensibi şartlarına uymalıdır. Burada en son iki yorum vardır ve biri diğerini destekler. Eğer kaynakları bu başlangıç zamanında sıfır ise bütün alanların sıfır olduğu zayıf nedensellik vardır. Bizim problemimizde bu $\tau < 0$ 'a karşılık gelir. Güçlü nedensellik koşulu ise Einstein aksiyomunun ileri sürdüğü herhangi bir manyetik alanın bir sinyali boşlukta c ışık hızıyla yaydığı iddiasını takip eder. Bizim problemimiz, kaynağın; dalga kılavuzu kesit alanının içinde, $\xi = 0$ 'da yer aldığıdır. Bu bize Klein-Gordon denkleminin çözümünün $\xi = 0$ kaynak noktasının ötesinde $\xi = \tau$ (örnek, $z = ct$)'dan sonra sıfır olmak zorunda olduğunu söyler. Bundan dolayı, eğer sinyal Oz eksenini boyunca yayılıyorsa Klein-Gordon denkleminin çözümü fiziksel olarak

$$f(\tau, \xi) = \begin{cases} f(\tau, \xi) = 0 & \text{eger } \tau < 0 \\ f(\tau, \xi) \neq 0 & \text{eger } 0 \leq \xi \leq \tau \\ f(\tau, \xi) = 0 & \text{eger } \xi > \tau \end{cases} \quad (4.4)$$

şeklinde okunmalıdır.

Klein-Gordon denklemi grup teorisinin iskelet çatısındaki Poincare grubu altında çalışıldığında kendi özelliklerini korur. W. Jr. Miller Klein-Gordon denklemini bu yönüyle çalışmış ve bu denklemin çözümünde simetrinin yörüngeleri denen onbir birbiri ile dik fonksiyon oluşturmuştur [18]. Çalışmaların sonuçları zaman döneminde elektromanyetik alan teorisinin gelişmesinde geniş uygulama alanı bulmuştur. Bu konuyla ilgili bir örneğe aşağıda yer verilmiştir.

(2.8) Klein-Gordon denkleminin $f(\xi, \tau)$ çözümünün modal genlikler için potansiyel belirlediği hatırlansın. Düşünölsün ki henüz bilinmeyen yeni (u, v) değişkenleri ile verilen bir fonksiyon $f[u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)]$ ve (u, v) iki kere diferansiyellenebilen eski (ξ, τ) değişkenlerinin bir fonksiyonu olsun. $f[u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)]$ fonksiyonunun (2.8) denkleminin çözümü olarak yerine konulması ve aşağıdaki işlemlerden sonra denklem yeni haliyle elde edilir [4]. Bu işlemlere bir bakalım:

f fonksiyonunu aşağıdaki gibi değişkenlerine ayrılın

$$f \equiv f(\xi, \tau) = f[u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)] \equiv f(u, v) = U(u)V(v) \quad (4.5)$$

(2.8) denklemini (u, v) cinsinden yeniden şekillendirmek için aşağıdaki ön hazırlıklar yapalım

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \tau} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} f(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

u ve v değişkenleri bağımsız değişkenler olduğundan bu son denklem daha da basitleştirilebilir

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} f(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} \quad (4.8)$$

aynı yolla aşağıdaki elde edilebilir

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(u, v) = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\} \quad (4.9)$$

(4.6)-(4.9) denklemlerinin (2.8) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right] \frac{\partial f}{\partial u} \\ & + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right] \frac{\partial f}{\partial v} + 2 \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right] \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + f = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

yeni denklemi elde edilir. Burada f fonksiyonu (u, v) bağımsız değişkenlerine bağlı bir kaynak fonksiyonudur. Bir sonraki hedefimiz (4.10) denkleminde eski (ξ, τ) bağımsız

değişkenlerinin elimine edilmesidir. u ve v 'ye uygulanan ∂_τ ve ∂_ξ kısmi türevleri yardımıyla burada verilmiştir. Bundan dolayı, bu hedef u ve v 'nin (ξ, τ) değişkenlerinin fonksiyonu olarak belirlenebilmesi ile gerçekleştirilebilir. Bu simetrinin yörüngeleri çalışması adımı, Miller $\xi(u, v)$ ve $\tau(u, v)$ ters fonksiyon çiftleri kümesi elde edilmiştir.

Zaman-harmonik modal genlikler diğerleri arasında belirli bir durumdur. Miller'in listesinde durum 1'e karşılık gelir. Gerçekten $u = \tau$, $v = \xi$ yerlerine yazıp (4.10) denklemi (2.7)'deki orijinal haline getirilir. Aşıkardır ki (ξ, τ) değişkenleri zaman-harmonik modlarının ayrılmasına yol açarlar.

Miller'in listesinden durum 2'ye detaylı bir göz atalım.

$$\tau = u \cosh v, \quad \xi = u \sinh v, \quad 0 \leq u \leq \infty, \quad -\infty \leq v \leq \infty \quad (4.11)$$

olarak alınsın. Önce $u(\xi, \tau)$ ve $v(\xi, \tau)$ değişkenlerine geçiş yapılmalıdır. Bundan dolayı,

$$\tau^2 = u^2 \cosh^2 v \text{ ve } \xi^2 = u^2 \sinh^2 v,$$

$$\tau^2 - \xi^2 = u^2 \underbrace{(\cosh^2 v - \sinh^2 v)}_1 = u^2$$

ve böylece,

$$u^2 = \tau^2 - \xi^2 \Rightarrow u = \sqrt{\tau^2 - \xi^2}, \quad 0 \leq u < \infty \quad (4.12)$$

elde edilir. Buna ilaveten,

$$\frac{\xi}{\tau} = \frac{u \sinh v}{u \cosh v} = \tanh v, \text{ yani, } \arctan h \frac{\xi}{\tau} = v, \quad -\infty < v < \infty \quad (4.13)$$

yazılabilir. Ve bu denklemi de

$$v = \arctan h \frac{\xi}{\tau} \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{\tau + \xi}{\tau - \xi} \quad (4.14)$$

şeklinde daha kullanışlı hale getirilebilir. İfade bu hale,

$$\arctan hx \equiv \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad |x| < 1$$

özelliğinden yararlanılarak gelmiştir.

Burada,

$$\arctan h \frac{\xi}{\tau} \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{\xi}{\tau}}{1 - \frac{\xi}{\tau}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tau + \xi}{\tau - \xi} \right) \text{ olarak hesaplanmıştır.}$$

Şimdi, $u(\xi, \tau)$ ve $v(\xi, \tau)$ 'ye ait kısmi diferansiyeller hesaplanır.

$$u = \sqrt{\tau^2 - \xi^2} \quad v = \arctan h \frac{\xi}{\tau} \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{\tau + \xi}{\tau - \xi}$$

olduğu hatırlanırsa,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \sqrt{\tau^2 - \xi^2} = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}} = \frac{u \cosh v}{u} = \cosh v \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\tau + \xi}{\tau - \xi} \right) = -\frac{\xi}{\tau^2 - \xi^2} = -\frac{u \sinh v}{u^2} = -\frac{\sinh v}{u} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \cosh v = \frac{\partial v}{\partial \tau} \sinh v = -\frac{\sinh^2 v}{u} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(-\frac{\sinh v}{u} \right) = \frac{\sinh 2v}{u^2} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{\tau^2 - \xi^2} = -\frac{\xi}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}} = -\frac{u \sinh v}{u} = -\sinh v \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\tau + \xi}{\tau - \xi} \right) = \frac{\tau}{\tau^2 - \xi^2} = \frac{u \cosh v}{u^2} = \frac{\cosh v}{u} \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = -\frac{\cosh^2 v}{u} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = \frac{\sinh 2v}{u^2} \quad (4.22)$$

elde edilir [4].

Bütün bu kısmi diferansiyel sonuçları (4.10) Klein-Gordon diferansiyel denkleminde yerine yazılsın. Bu durumda aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left[\cosh^2 v - \sinh^2 v \right] \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \left[\frac{\sinh^2 v}{u^2} - \frac{\cosh^2 v}{u^2} \right] \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \\ & + \left[-\frac{\sinh^2 v}{u} + \frac{\cosh^2 v}{u} \right] \frac{\partial f}{\partial u} + \left[\frac{\sinh 2v}{u^2} - \frac{\sinh 2v}{u^2} \right] \frac{\partial f}{\partial v} + \\ & + 2 \left[-\frac{\sinh v \cosh v}{u} + \frac{\sinh v \cosh v}{u} \right] \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + f = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Sadeleştirmelerin ardından

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} + 1 - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) f(u, v) = 0 \quad (4.24)$$

kısmi türevli diferansiyel denklemi (KTDD) elde edilir. Bernoulli'nin çarpım metodu u ve v değişkenlerine uygulanarak $f \equiv f(\xi, \tau) = f[u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)] \equiv f(u, v) = U(u)V(v)$ yazılır. Değişkenlerine ayrılmış bu çarpımın (4.26) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} + 1 - \frac{1}{u^2} \underbrace{\frac{V''(v)}{V(v)}}_{\alpha^2} \right) U(u) = 0 \quad (4.25)$$

kısmi türevli diferansiyel denklemi (KTDD) elde edilir. Yani,

$$U_p''(u) + \frac{1}{u} U_p'(u) + \left(1 - \frac{\alpha^2}{u^2} \right) U_p(u) = 0$$

$$V_p''(v) - \alpha^2 V_p(v) = 0 \quad (4.26)$$

(4.26) adi diferansiyel denklem çiftine varılır. Burada α değişkenlerine ayrılma metodunun bir sabitidir. (4.26) denkleminin $U(u)$ fonksiyonuna ait adi diferansiyel denklem kısmındaki Bessel diferansiyel denkleminde Bessel fonksiyonu, $V(v)$ fonksiyonuna ait olan kısımdan ise (matematiksel ve fiziksel olarak dikkate değer olmasından dolayı üstel gelmesi istenen) bir üstel fonksiyon elde edilir. Her iki denklem de iki lineer bağımsız çözüme sahiptir.

$V(v)$ fonksiyonu α keyfi sabit bir parametre olmak üzere $V''(v) = \alpha^2 V(v)$ yazılarak

$$V(v) = a_p e^{\alpha v} + b_p e^{-\alpha v}$$

yazılabilir. Burada $a_p, b_p \in \Re$ olmak üzere keyfi reel parametrelerdir. Fakat aşağıda f fonksiyonu oluşturulacağı için bu keyfi parametreler şimdilik ihmal edilecektir. Yani,

$$V(v) = e^{\pm \alpha v} \quad (4.27)$$

olarak ifade edilebilir.

Ardından, $U(u)$ fonksiyonu Bessel diferansiyel denklemini verir.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} + 1 - \frac{\alpha^2}{u^2} \right) U(u) = 0. \quad (4.28)$$

Bu denklem lineer bağımsız iki çözüme sahiptir,

$$U(u) = A_p J_p(u) + B_p Y_p(u) \quad (4.29)$$

burada A_p ve B_p keyfi sabitlerdir. Denklemden, J 'ye birinci çeşit Bessel fonksiyonu, Y 'ye ikinci çeşit Bessel fonksiyonu adı verildiği biliniyor. Oysa ikinci çeşit Bessel fonksiyonu $Y(x)$, $x \rightarrow 0$ iken $Y(x) \rightarrow -\infty$ olmaktadır. Yani orijin etrafında ıraksaktır. Bu istenmeyen bir ıraksaklık durumudur. Çözümün seri açılımını bulabilmek için fonksiyonlarımızın yakınsak olması gerekmektedir. Şu halde ikinci çeşit Bessel

fonksiyonu $Y(x)$ 'den kurtulmak için keyfi katsayısı $B_p = 0$ seçilmelidir. Nihayetinde $U(u)$ çözümü A_p keyfi sabit olmak üzere

$$U(u) = A_p J_p(u) \quad (4.30)$$

olarak elde edilmiş olur.

Şimdi bu üstel fonksiyon ve Bessel fonksiyonunun çarpımı olarak ifade edilen f fonksiyonu yazılsın. $f \equiv f(\xi, \tau) = f[u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)] \equiv f(u, v) = U(u)V(v)$ idi. Buradan,

Bunların birleşimi (ξ, τ) bağımsız değişkenleri cinsinden fiziksel olarak dikkate değer:

$$f_p(\xi, \tau) = \left[C_p \left(\frac{\tau - \xi}{\tau + \xi} \right)^{\frac{p}{2}} J_p \left(\sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right) + D_p \left(\frac{\tau + \xi}{\tau - \xi} \right)^{\frac{p}{2}} J_p \left(\sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right) \right] \quad (4.31)$$

çözümü elde edilir. Çözümün $\xi = 0$ 'a göre simetrik olduğunu görmek kolaydır. Bu noktadan sonra artık $\xi \geq 0$ uzayının mümkün olduğu ve keyfi sabitin ihmal edildiği, p keyfi sabit bir parametre olmak üzere,

$$f_p(\xi, \tau) = \left(\frac{\tau - \xi}{\tau + \xi} \right)^{\frac{p}{2}} J_p \left(\sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right) \quad (4.32)$$

denklemleri ile çalışılacaktır.

Fiziksel olarak bu, TE modları için H_{zm} , TM modları için E_{zm} eksenel alan bileşenlerinin modal genliğidir. (2.7) ve (2.19) denklemleri hatırlanarak enlemsel alan bileşenlerinin modal genlikleri aşağıdaki gibi gösterilsin:

$$A_p(\xi, \tau) = -\partial_\tau f_p \text{ ve } B_p(\xi, \tau) = \partial_\xi f_p \quad (4.33)$$

Bu türevlerdeki basit işlemlerle

$$\begin{aligned} A_p(\xi, \tau) &= -\partial_\tau f_p = (-1/2)(f_{p-1} - f_{p+1}) \\ B_p(\xi, \tau) &= \partial_\xi f_p = (-1/2)(f_{p-1} + f_{p+1}) \end{aligned} \quad (4.34)$$

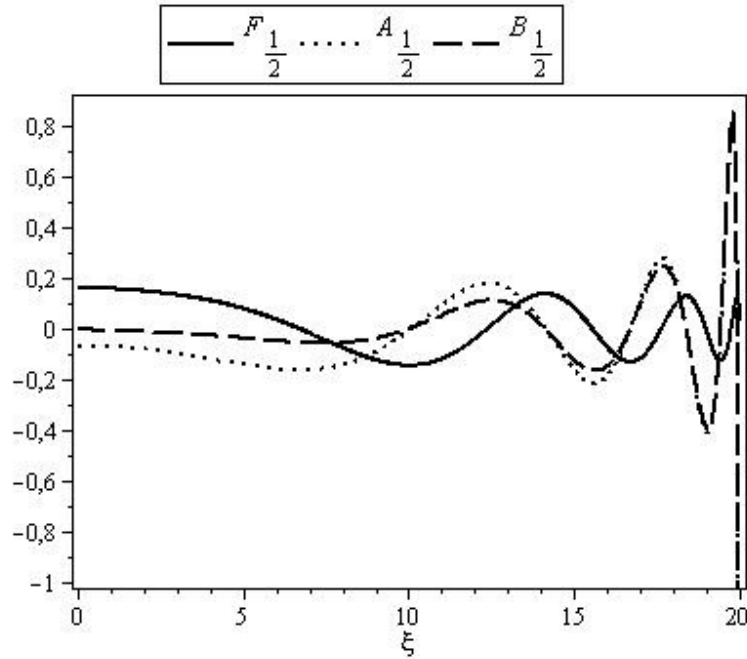
kısmi türev sonuçları elde edilir [4].

BÖLÜM 5

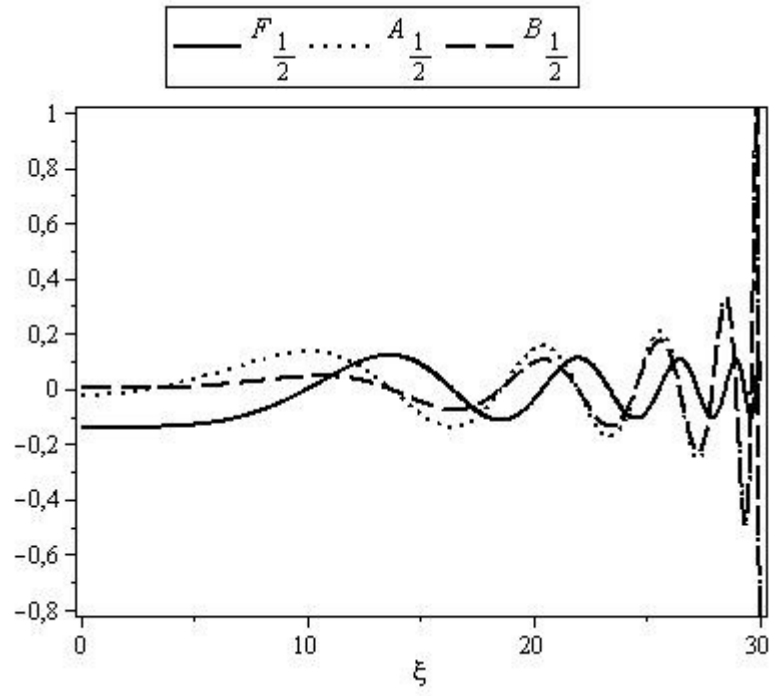
GRAFİKLER

Bu bölümde küresel formda f , A ve B fonksiyonlarının $p = 1/2, 3/2, 5/2 \dots$ değerlerindeki salınımları ile bu salınımların zaman t yani τ ve eksenel koordinat z yani ξ 'nin farklı değerlerindeki grafikleri verilmiştir. ξ eksenı boyunca olan salınımlarda τ sabit tutulmuş, τ eksenı boyunca sergılenen salınımlarda ξ sabit tutulmuştur.

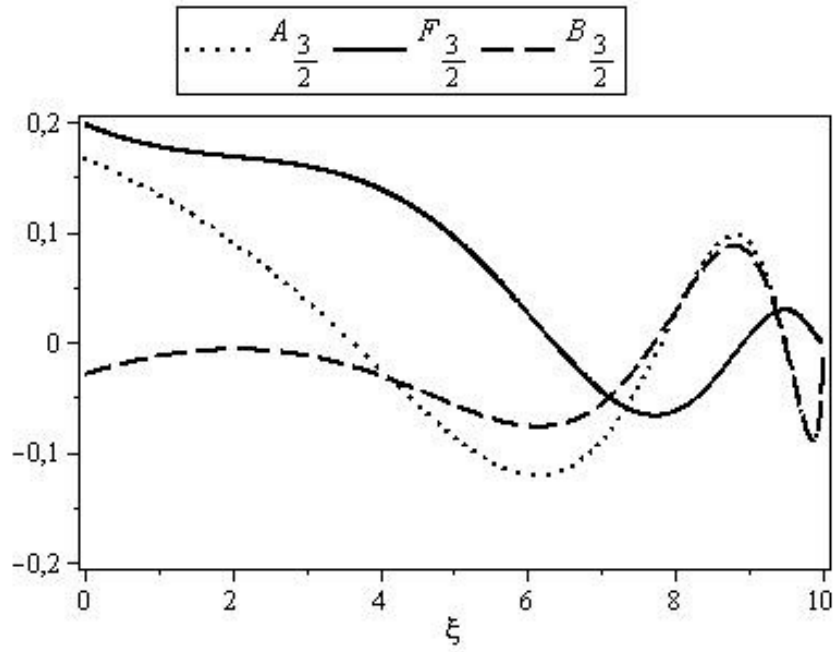
Bu bölümde incelenecek salınım grafikleri küresel formdadır.



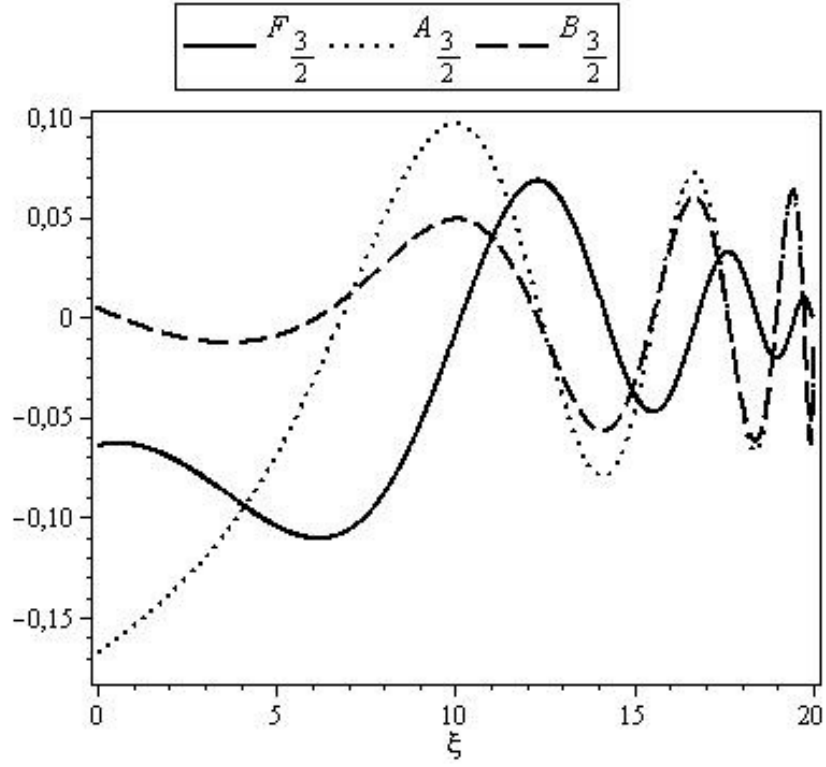
Şekil 5.1 Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığında değışimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 1/2$ için grafiğı



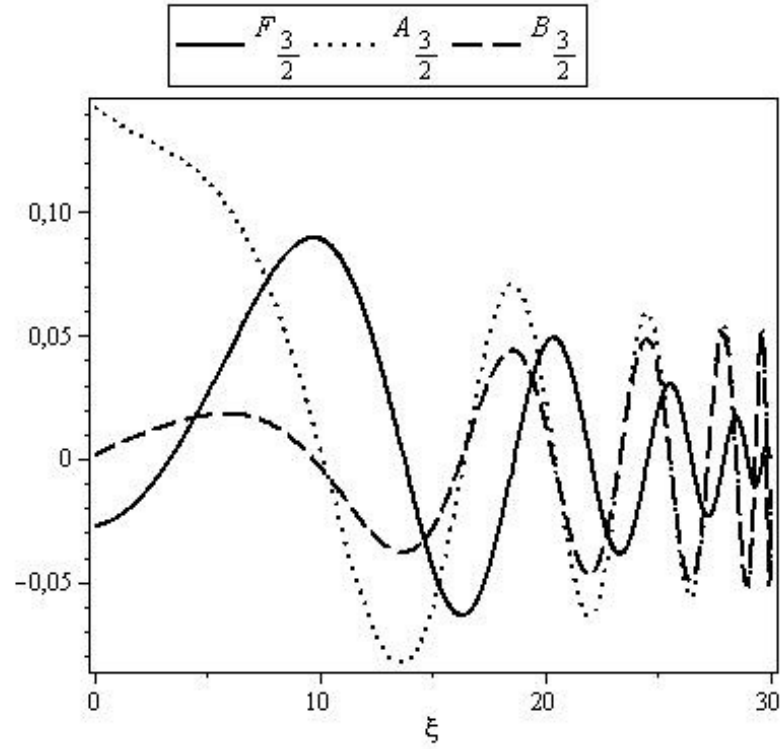
Şekil 5.2 Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 30$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 1/2$ için grafiği



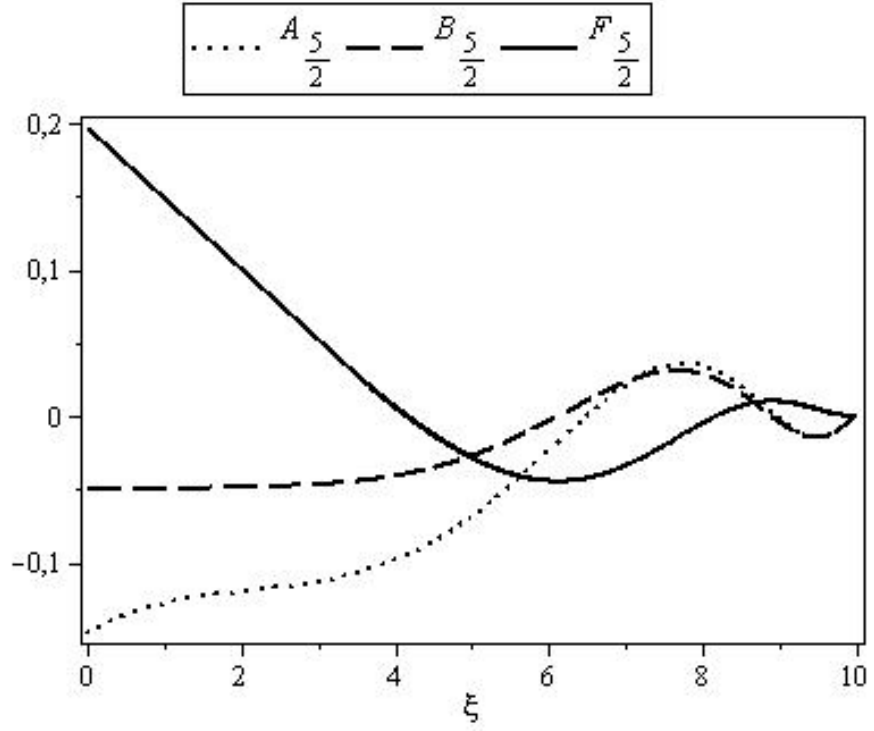
Şekil 5.3 Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 10$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 3/2$ için grafiği



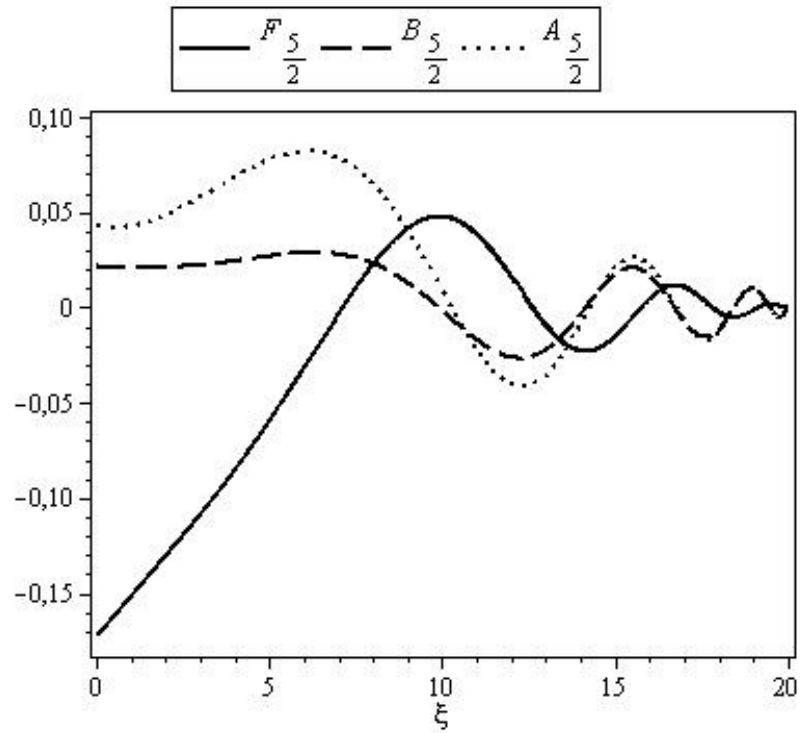
Şekil 5.4 Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 3/2$ için grafiği



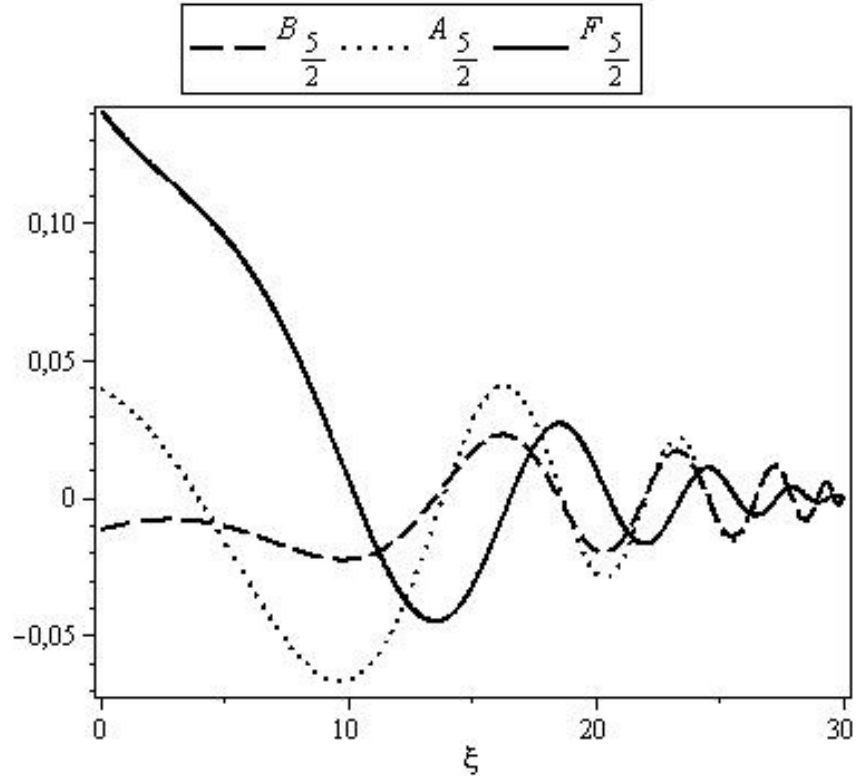
Şekil 5.5 Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 30$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 3/2$ için grafiği



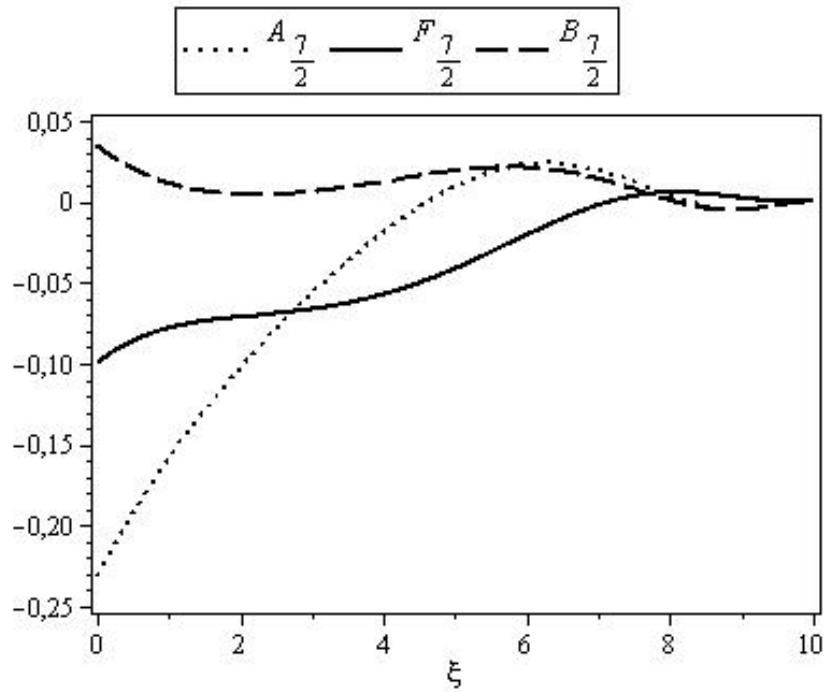
Şekil 5.6 Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 10$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 5/2$ için grafiği



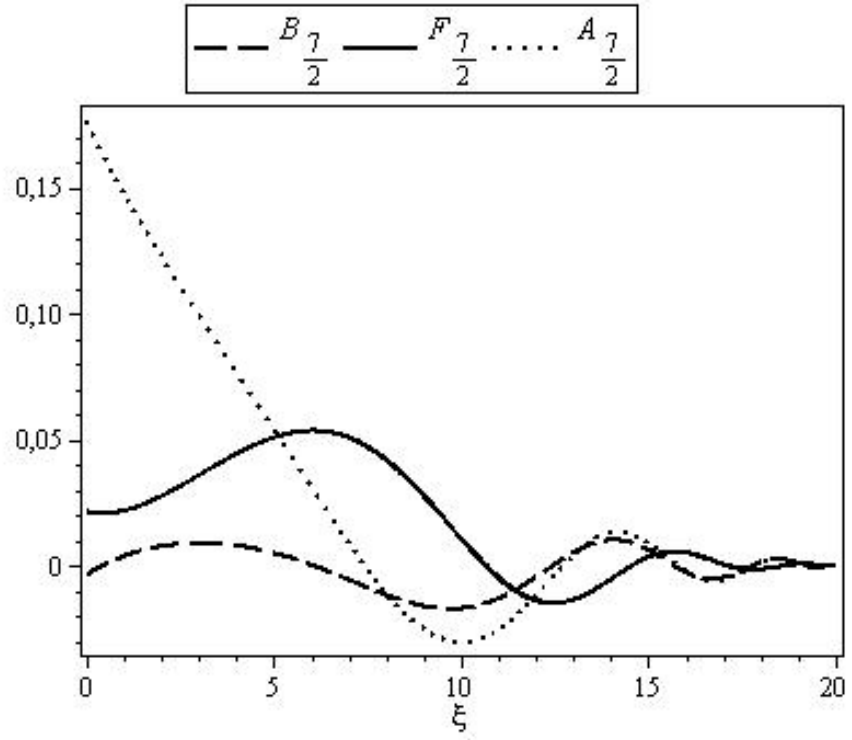
Şekil 5.7 Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 5/2$ için grafiği



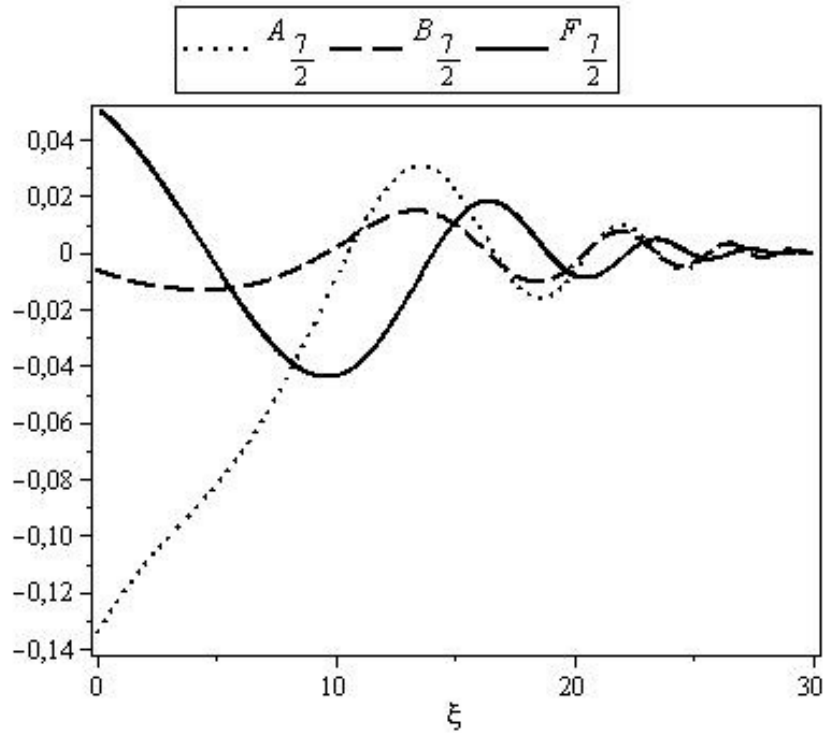
Şekil 5.8 Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 30$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 5/2$ için grafiği



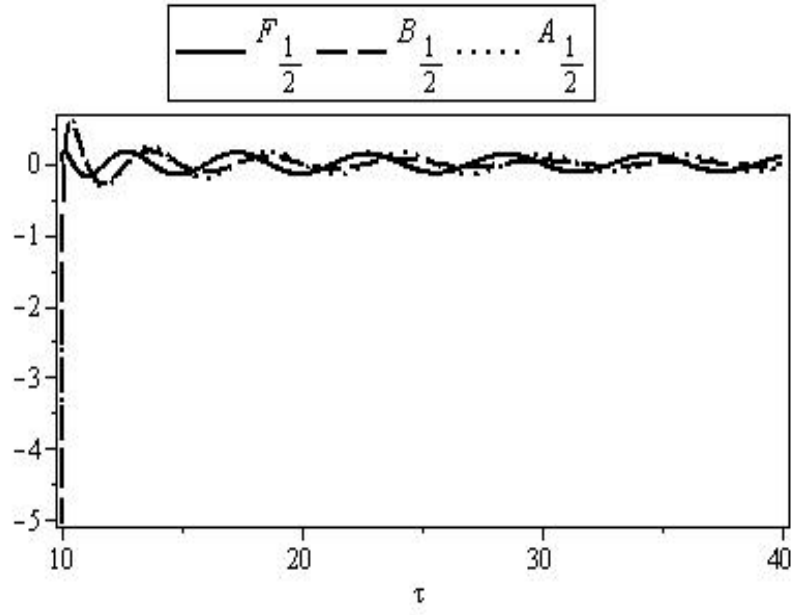
Şekil 5.9 Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 10$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 7/2$ için grafiği



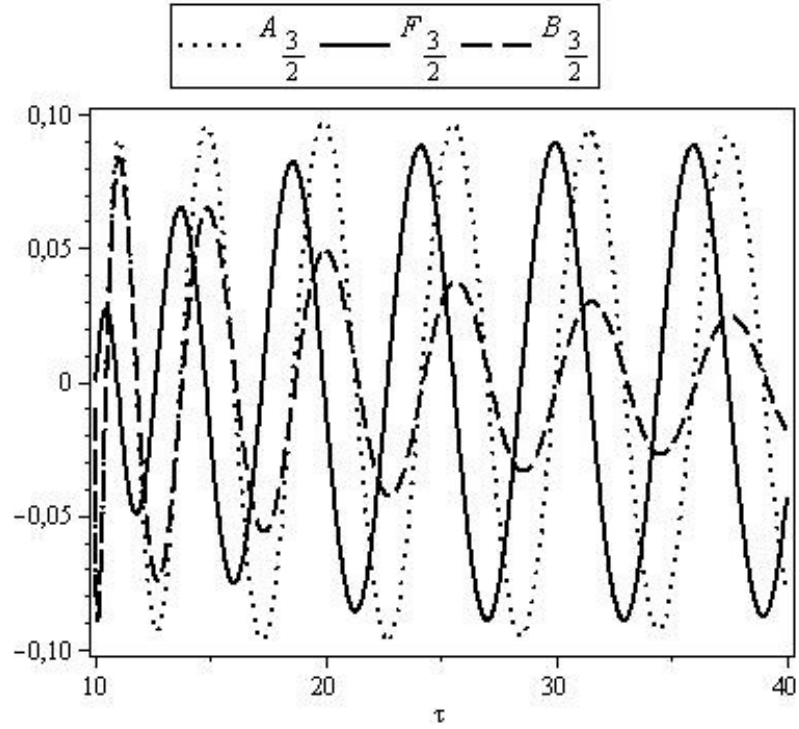
Şekil 5.10 Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 7/2$ için grafiği



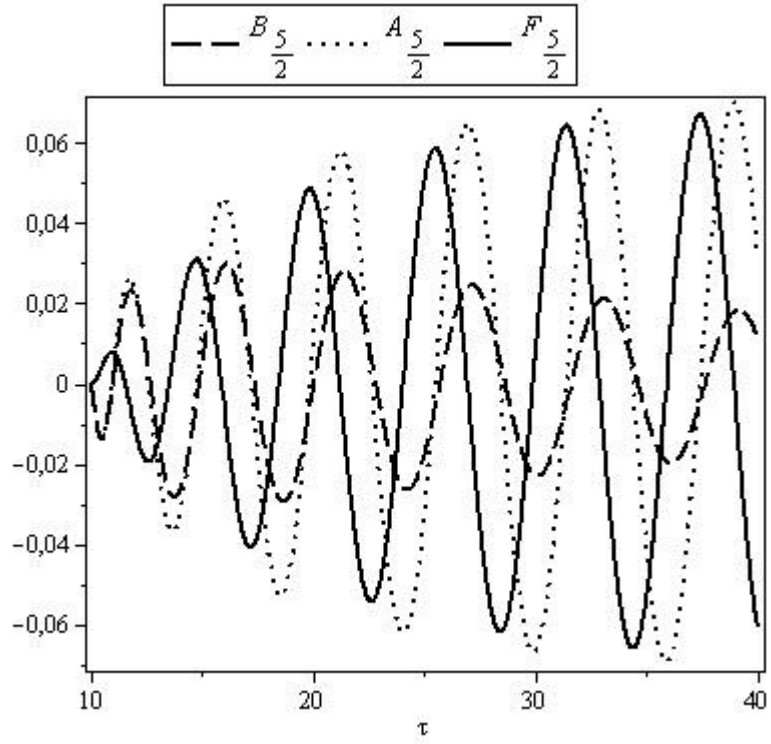
Şekil 5.11 Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 30$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 7/2$ için grafiği



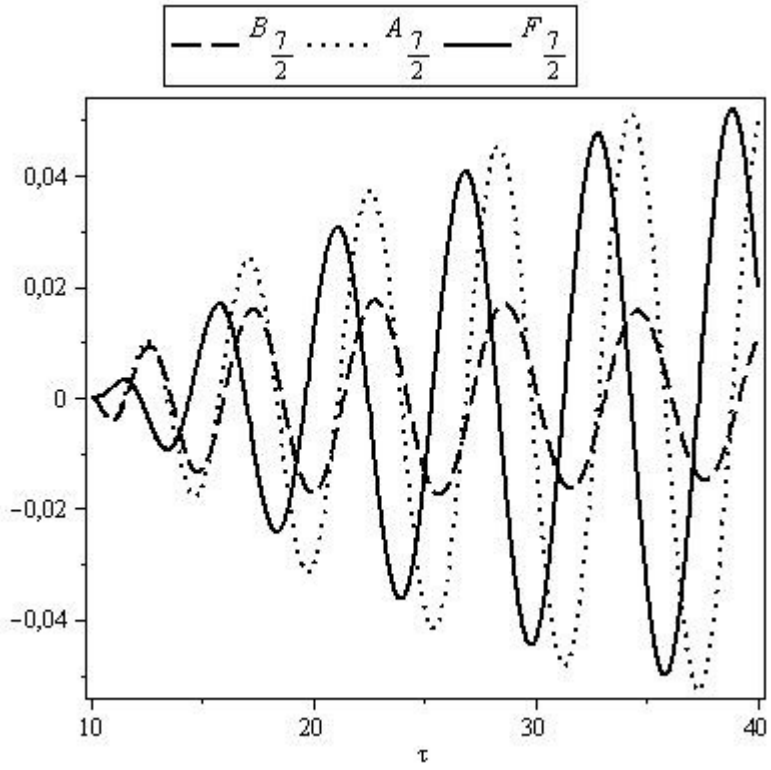
Şekil 5.12 Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 1/2$ için grafiği



Şekil 5.13 Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 3/2$ için grafiği



Şekil 5.14 Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 5/2$ için grafiği



Şekil 5.15 Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 7/2$ için grafiği

SONUÇ VE ÖNERİLER

Zaman-dönemi mod problemi iki ana başlık altında tartışılmıştır. Birincisi; Maxwell denklemlerinde ∂_t zaman türevi korunarak ve nedensellik prensibine bağlı kalınarak modal bazın belirlenmesidir. L_2 Hilbert uzayında self-adjoint lineer bir operatör Maxwell denklemlerinden ayrıştırılmış, Neumann ve Dirichlet sınır-özdeğer problemleri çözülerek bu özdeğerlere bağlı özfonksiyonlar (potansiyel) aileleri üretilmiştir. İkincisi; Klein-Gordon denkleminde elde edilen genliklerin bulunmasıdır. Buradan üretilen üreteç fonksiyonu üstel bir fonksiyon ile Bessel fonksiyonunun çarpımı olarak bulunmuştur. Böylece manyetik alanları belirleyecek potansiyellere ve genliklere ulaşılmıştır.

(x, y) eksenli boyunda eliptik Helmholtz denklemi önce analitik olarak çözülmüş, ardından bu çözümde y sabit tutularak sadece x için sayısal değerlere bakılmış ve analitik çözüm ile sayısal çözüm arasında bir karşılaştırma yapılmıştır. Bu karşılaştırma hata analizi ile birlikte okuyucuyu bir gerçeklemeye götürmektedir. Grafikler ise görsel yorumlama imkanı vermektedir. Bu tartışmalara ilave olarak Zaman Uzayında Sonlu Farklar (ZUSF) ile daha ciddi gerçeklemeler yapmak da mümkündür.

Bu kısımdan sonra matematikçiler için önem arz eden Bessel diferansiyel denkleminde ve çözüm fonksiyonlarına bir göz atılmış ve bunlar ile ilgili tartışmalar verilmiştir. Sonuç olarak belirlenen genlikler için grafikler ile sinyalin transfer edilmesine ışık tutulmaya çalışılmıştır. Tezde yeni olarak Bessel fonksiyonlarının yarı-tamsayı grafikleri sunulmuştur.

KAYNAKLAR

- [1] Aksoy, S., (2011). "Zaman Uzayında Sonlu Farklar Yöntemi", Ders Notları, GYTE Elektronik Mühendisliği, Kocaeli.
- [2] Tretyakov, O. A., (1986). "The Modal Basis Method", Radiotekhnika i Elektronika, 6:1071-1082 (in Russian).
- [3] Erden, F., (2009). "Kavitelerde Zorlanmış Salınımların Zaman Dömeni Analizlerinin İncelenmesi", Doktora Tezi, GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli.
- [4] Eroğlu E., (2011). "Dalga Kılavuzları Boyunca Geçici Sinyal Transferi", Doktora Tezi, GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli.
- [5] Taflove, A. ve Hagness, S., (2005). Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time-Domain Methods, First Edition, Artech House, Boston.
- [6] Şener E., (2011). "Dalga Kılavuzları Boyunca Sinyal Transferi ve Walsh Fonksiyonu", Yüksek Lisans Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [7] Tretyakov, O. A., Hashimoto, M. ve Idemen, M., (1993). Analytical and Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory, First Edition, Science House Company, Japan.
- [8] Tretyakov, O. A., (1994). "Evolutionary Equations for the Theory of Waveguides", Proc. IEEE AP-S Int. Symp. Dig., 2465–2471, Seattle.
- [9] Aksoy, S., Tretyakov, O. A., (2002). "Study of a Time Variant Cavity System", Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 16 (11): 1535-1553.
- [10] Aksoy, S. ve Tretyakov, O. A., (2004). "The Evolution Equations in Study of the Cavity Oscillations Excited by a Digital Signal", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 52 (1):263-270.
- [11] Kartal, M., (2006). "Bilimsel Araştırmalarda Hipotez Testleri", 3. Baskı, Nobel Yayınları No:947 Ankara.
- [12] Weyl, H., (1940). "The Method of Orthogonal Projection in Potential Theory", Duke Math. Journal, 7: 411-444.
- [13] O. A. Tretyakov, (1990)."Evolutionary Waveguide Equations", Sov. J. Comm. Tech. Electron. (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika), 35 (2): 7-17.

- [14] Aydın M.,Kuryel B.,Gündüz G, Oturanç G, (2005). Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, 7.Baskı, Ege Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Ders Kitapları Yayınları, No:14 İzmir.
- [15] Bircan, H., Karagöz, Y., Kasapoğlu, Y., (2003). “Ki-kare ve Kolmogorov Smirnov Uygunluk Testlerinin Simulasyon ile Elde Edilen Veriler Üzerinde Karşılaştırılması”, Cumhuriyet Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi, 4 (1): 69-80.
- [16] Kreyszig, E., (1989). “Introductory Functional Analysis With Applications”, 21 (3), New York, 1989. Derleyen: Çakar Ö, “Fonksiyonel Analize Giriş”, (2007) 7. Baskı, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No:13 Ankara
- [17] Xie W-C., (2010). “Differential Equations For Engineers”, First published in print format Cambridge University Press The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK.
- [18] Miller, W. Jr., (1977). “Symmetry and Separation of Variables”, Addison-Wesley publication M.A, Co., Boston.

GRAFİK KODLARI

A-1 Şekil 5.3 Maple Kodları**SPHERICAL BESSEL-Tau is FIXED**

```

restart;

n:=1;

alpha:=n+1/2; #n:=0,1,2..

tau:=10.001;

xi1:=0;

xi2:=10;

y1:=-0.2;

y2:=0.2;

N:=1500;      #N=numpoints

th:=2;        #th is thickness

R1:=simplify((((tau-xi)/(tau+xi))^(alpha/2))*BesselJ(alpha,sqrt(tau^2-xi^2))));

F1:=R1;

h1:=piecewise(0xi,0,xi10,0,F1);

with(plots):

a1:=plot(h1,xi=0..10,numpoints=N,thickness=th,view=[xi1..xi2,y1..y2],legend=[F[1/2]],c
olor=black,axes=boxed,symbol=box,linestyle=solid);

```

```

display({a1}):

n:=1;  #n=0,1,2..

alpha:=n+1/2-1;

tau:=10.001;

xi1:=0;

xi2:=10;

y1:=-1;

y2:=1;

N:=1500;  #N=numpoints

Fam1:=simplify((((tau-xi)/(tau+xi))^(alpha/2))*BesselJ(alpha,sqrt(tau^2-xi^2))));

h2:=piecewise(0xi,0,xi10,0,Fam1);

with(plots):

b1:=plot(Fam1,xi=0..10,numpoints=N,thickness=th,view=[xi1..xi2,y1..y2],axes=boxed,le
gend=[F[am1]]);

display({b1}):

#alpha:='alpha';

alpha:=n+1/2+1;

tau:=10.001;

xi1:=0;

xi2:=10;

y1:=-0.4;

y2:=0.4;

R3:=simplify((((tau-xi)/(tau+xi))^(alpha/2))*BesselJ(alpha,sqrt(tau^2-xi^2))));

Fap1:=R3;

h3:=piecewise(0xi,0,xi10,0,Fap1);

```

```

with(plots):

c1:=plot(Fap1,xi=0..10,numpoints=N,thickness=th,view=[xi1..xi2,y1..y2],axes=boxed,le
gend=[F[ap1]]);

display({c1}):

n:=1;

#alpha:='alpha'; #n:=0,1,2..

tau:=10.001;

xi1:=0;

xi2:=10;

y1:=-1;

y2:=1;

N:=1500;    #N=numpoints

th:=2;    #th is thickness

A1:=(-1/2)*(R2-R3);

g1:=piecewise(0xi,0,xi10,0,A1);

with(plots):

s1:=plot(g1,xi=0..10,numpoints=N,thickness=th,view=[xi1..xi2,y1..y2],legend=[A[1/2]],c
olor=black,axes=boxed,symbol=box,linestyle=dash);

display({s1}):

n:=1;

tau:=10.001;

xi1:=0;

xi2:=10;

y1:=-1;

y2:=1;

```

```

N:=1500;      #N=numpoints

th:=2;      #th is thickness

B1:=(-1/2)*(R2+R3);

g2:=piecewise(0xi,0,xi10,0,B1);

with(plots):

s2:=plot(g2,xi=0..10,numpoints=N,thickness=th,view=[xi1..xi2,y1..y2],legend=[B[1/2]],c
olor=black,axes=boxed,symbol=box,linestyle=dot);

display({s2}):

with(plots):

display({a1,s1,s2});

```

MİLLER'İN LİSTESİ

(4.27) denkleminde $\xi(u, v)$ ve $\tau(u, v)$ yerlerine yazıldığında $f(u, v) = U(u)V(v)$ eşitliği elede edilir bu değişimin sonucunda aşağıdaki listeye ulaşılır.

1. $-\infty < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$ aralıkları için $\tau = u$ ve $\xi = v$, $f(u, v)$ üstel fonksiyonların çarpımıdır.
2. $\tau = u \cosh v$ ve $\xi = u \sinh v$ $-\infty < v < \infty$ $0 \leq u < \infty$ üstel ve Bessel fonksiyonlarının çarpımıdır.
3. $\tau = (u^2 + v^2)/2$ ve $\xi = uv$ ile $0 \leq u < \infty$ $-\infty < v < \infty$, $f(u, v)$ parabolik silindirik fonksiyonların çarpımıdır.
4. $\tau = uv$ ve $\xi = (u^2 + v^2)/2$ ile $0 \leq u < \infty$, $-\infty < v < \infty$ parabolik silindirik fonksiyonların çarpımıdır.
5. $\tau + \xi = 2(u + v)$ ve $\tau - \xi = (u - v)^2$ ile $-\infty < u, v < \infty$ Airy fonksiyonlarının bir çarpımıdır.
6. $\tau + \xi = \cosh[(u - v)/2]$ ve $\tau - \xi = \sinh[(u + v)/2]$ ile $-\infty < u, v < \infty$ Mathieu fonksiyonlarının bir çarpımıdır.
7. $\tau + \xi = 2 \sinh(u - v)$ ve $\tau - \xi = \exp(u + v)$ ile $-\infty < u, v < \infty$ Bessel fonksiyonlarının bir çarpımıdır.
8. $\tau + \xi = 2 \cosh(u - v)$ ve $\tau - \xi = \exp(u + v)$ ile $-\infty < u, v < \infty$ Bessel fonksiyonlarının bir çarpımıdır.
9. $\tau = \sinh u \cosh v$ ve $\xi = \cosh u \sinh v$ ile $-\infty < u, v < \infty$ Mathieu fonksiyonlarının bir çarpımıdır.
10. $\tau = \cosh u \cosh v$ ve $\xi = \sinh u \sinh v$ ile $-\infty < u < \infty$, $0 \leq v < \infty$ Mathieu fonksiyonlarının bir çarpımıdır.
11. $\tau = \cos u \cos v$ ve $\xi = \sin u \sin v$ ile $0 < u < 2\pi$, $0 \leq v < \pi$ Mathieu fonksiyonlarının bir çarpımıdır.

KRİTİK χ^2 DEĞERLERİ

s.d	Önem Seviyesi, α									
	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	---	---	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801

s.d	Önem Seviyesi, α									
	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490
60	35,534	37,485	40,482	43,188	46,459	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952
70	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215
80	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321
90	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299
100	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169
s α	-2,58	-2,33	-1,96	-1,64	-1,28	+1,28	+1,64	+1,96	+2,33	+2,58

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ümmü ŞAHİN
Doğum Tarihi ve Yeri : 25.05.1987 / Mersin
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : ummusahin@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Süleyman Demirel	2009
Lise	Fen Bilimleri	Mut Anadolu Lisesi	2005

YAYINLARI

Makale

1. Eroğlu E., **Şahin Ü.**, (2010). "TM Modunda Sinyal Transferine Yeni Bir Bakış". İstanbul Aydın Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, İstanbul (basımda).
2. Güney, İ., Eroğlu, E., **Şahin, Ü.**, Şener, E., "Factor Analysis of the Effects of Class Rules on the Behaviours", Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS), 1-3 July, Baku, Azerbaijan. (accepted)
3. Eroğlu, E., Güney, İ., Yıldız, N., Şener, E., **Şahin, Ü.**, (2011). "Statistical Modeling of Experiment Applications in the Solution of the Learning Scenarios Based on Problem", Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS), 1-3 July, Baku, Azerbaijan. (accepted)