

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DALGA KILAVUZLARI BOYUNCA SİNYAL TRANSFERİ VE WALSH
FONKSİYONU**

ERSİN ŞENER

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
YARD. DOÇ. DR. KEVSER KÖKLÜ**

İSTANBUL, 2011

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DALGA KILAVUZLARI BOYUNCA SİNYAL TRANSFERİ VE WALSH
FONKSİYONU**

ERSİN ŞENER

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
YARD. DOÇ. DR. KEVSER KÖKLÜ**

İSTANBUL, 2011

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DALGA KILAVUZLARI BOYUNCA SİNYAL TRANSFERİ VE WALSH
FONKSİYONU

Ersin ŞENER tarafından hazırlanan tez çalışması 20.06.2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Yard Doç. Dr. Kevser KÖKLÜ

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Vatan KARAKAYA

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Zeynel YALÇIN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Yard. Doç. Dr. Kevser KÖKLÜ

Yıldız Teknik Üniversitesi

Bu alışma, Uludağ Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü' nün UAP(F)-2010/21 numaralı “Modal Amplitutlara Farklı Bir Bakış” projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, elektromanyetik teoreinin temel taşı olan Maxwell denklemlerine yönelik farklı bir bakışı öneren Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşımlar (ETeY) yöntemi üzerinde durulmuştur. Bu yaklaşımdan elde edilen üstel fonksiyon ve Bessel fonksiyonunun çarpımı şeklindeki çözümler Bessel fonksiyon ailesinin tamsayı değerleri için incelenmiş ve silindirik formdaki Bessel fonksiyonlarının grafiksel izahına yer verilmiştir. Bunun yanı sıra Walsh fonksiyonuna ait sayısal bir uygulamaya yer verilmiş ve sayısal sonuçlar grafiklendirilmiştir.

Bütün bu çalışmaları gerçekleştirmemde ve bu aşamaya kadar gelmemde emeği geçen modern öğrenim ve araştırma imkanlarını sağlayan Yıldız Teknik Üniversitesi öğretim üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim süresince gerekli ilgi, destek ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yard. Doç. Dr. Kevser KÖKLÜ'ye, her türlü desteğini sunan Dr. Emre EROĞLU'na ve ailesine ve Ümmü ŞAHİN'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca daimi desteklerini ve öngörülerini içtenlikle dile getirip yanımda bulunan başta Bayrampaşa Belediyesi Bilim Merkezi Genel Koordinatörü Hasip GÖNÜLKIRMAZ'a ve değerli mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Beni yetiştiren, sevgi, destek ve yardımlarını hep yanı başımda hissettiğim aileme sonsuz teşekkür ederim.

Mayıs, 2011

Ersin ŞENER

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	Vii
KISALTMA LİSTESİ.....	Viii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
ÇİZELGE LİSTESİ	xi
ÖZET	xii
ABSTRACT.....	xiii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Bulgular	4
BÖLÜM 2	
ELEKTROMANYETİK TEORİYE EVRİMSEL YAKLAŞIMLAR	6
2.1 Giriş	6
2.2 TE Modu	7
2.3 TM Modu	9
2.4 Hilbert Uzayı.....	12
2.4.1 İç Çarpım	12
2.4.2 Eşlenik Uzay	14
2.4.3 İç Çarpım Normları.....	15
2.4.4 Operatörler	15
2.5 Zaman Dönemi Modlarının Tamlığı	18
BÖLÜM 3	
KLEİN-GORDON VE BESSEL DİFERANSİYEL DENKLEMİ.....	20

3.1	Klein-Gordon Denklemi.....	20
3.2	Bessel Diferansiyel Denklemi ve Çözümü	23
3.2.1	Sıfırıncı Mertebeden Bessel Diferansiyel Denklemi.....	23
3.2.2	p'inci Mertebeden Bessel Diferansiyel Denklemi.....	32
3.2.3	Değişik Mertebelerden Bessel Fonksiyonları Arasındaki Bağlıntılar ...	38
3.2.4	Bessel Denkleminde İndirgenebilen Denklemler.....	39
3.3	Modal Genliklerin Bessel Fonksiyonu Yardımıyla Belirlenmesi	41
BÖLÜM 4		
WALSH FONKSİYON SİNYALLERİ		46
4.1	Giriş	46
4.2	Walsh Fonksiyon Kümesi	46
4.3	Sayısal Sonuçlar.....	47
BÖLÜM 5		
GRAFİKLER.....		53
BÖLÜM 6		
SONUÇLAR VE ÖNERİLER		62
KAYNAKLAR		64
EK-A		
GRAFİKLERİN MAPLE KODLARI		66
A-1 Şekil 5.2 için Maple Kodları		66
A-2 Şekil 5.17 için Maple Kodları		69
EK-B		
MİLLERİN LİSTESİ.....		73
B-1 Manyetik alanla ilgili durumlar.....		73
ÖZGEÇMİŞ		74

SİMGE LİSTESİ

$\mathbf{R}$	3-Bileşenli konum vektörü
∇	Nabla vektörü
S	Dalga kılavuzu kesit alanın yüzeyi
$\mathbf{r}$	2-Bileşenli konum vektörü
$\nabla_{\perp}$	∇ 'nın enlemsel kısmı
∂_z	Zamana göre kısmi türev operatörü
$\hat{z}$	Oz eksenini boyunca yönelen birim vektör
$\mathbf{E}$	Bazın elektrik elemanı olarak üç-bileşenli vektör
$\mathbf{H}$	Bazın manyetik elemanı olarak üç-bileşenli vektör
∂_n	Normal türev
ϵ_0	Boş uzayın dielektrik sabiti
μ_0	Boş uzayın manyetik geçirgenlik sabiti
c	Işığın boşluktaki hızı
ψ_m	Neumann probleminin özçözümleri
v_m	Neumann probleminin özdeğerleri
Ψ_m	Neumann probleminin özvektörleri
ϕ_m	Dirichlet probleminin özçözümleri
κ_m	Dirichlet probleminin özdeğerleri
Φ_m	Dirichlet probleminin özvektörleri
$h_m(z, t)$	Manyetik alan vektörünün zaman bağımlı modal genlikleri
$e_m(z, t)$	Elektrik alan vektörünün zaman bağımlı modal genlikleri
A_m^h	Manyetik alan normalizasyon sabiti
A_m^e	Manyetik alan normalizasyon sabiti
$\delta_{m,n}$	Dirac delta fonksiyonu
γ	Euler sabiti
$\oplus$	Direkt toplam
$\mathbf{G}$	TE modunun manyetik alan ailesi
$\mathbf{J}$	TM modunun elektrik alan ailesi
$\Re$	Reel parametreler ailesi

KISALTMA LİSTESİ

EAE	Evolutionary Approach to Elektromagnetics
ETEY	Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım
KTDD	Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem
TE	Enlemsel Elektrik (Transverse Electric)
TM	Enlemsel Manyetik (Transverse Magnetic)
ZUSF	Zaman Uzayında Sonlu Farklar

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3. 1	$J_0(x)$ ve $Y_0(x)$ 'ın grafikleri 31
Şekil 3. 2	$J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ ve $J_3(x)$ fonksiyonlarının grafiği 37
Şekil 3. 3	$Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ ve $Y_3(x)$ fonksiyonlarının grafikleri 37
Şekil 4. 1	H_8 ile üretilen walsh fonksiyon kümesinin grafiği 48
Şekil 4. 2	Eksenel bileşenin modal genliği $h_m(\xi, \tau)$ veya $e_n(\xi, \tau)$ τ 'nun fonksiyonunun grafiği 49
Şekil 4. 3	Enlemsel bileşenin modal genliği τ 'nun fonksiyonu olarak $\partial W(\zeta, \tau)/\partial \zeta$ 'ye karşılık grafiği 50
Şekil 4. 4	Enine bileşenin modal genliği τ 'nun fonksiyonu olarak $-\partial W(\zeta, \tau)/\partial \tau$ 'ye karşılık grafiği 50
Şekil 4. 5	Eksenel bileşenin modal genliği ξ 'nun fonksiyonu olarak $h_m(\zeta, \tau)$ veya $e_n(\zeta, \tau)$ 'nın grafiği 51
Şekil 4. 6	Enlemsel bileşenin modal genliği ξ 'nun fonksiyonu olarak $\partial W(\zeta, \tau)/\partial \xi$ 'ye karşılık grafiği 51
Şekil 4. 7	Enlemsel bileşenin modal genliği ξ 'nun fonksiyonu olarak $-\partial W(\zeta, \tau)/\partial \tau$ 'ye karşılık grafiği 52
Şekil 5. 1	Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 10$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat grafiği 53
Şekil 5. 2	Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 0$ için grafiği 54
Şekil 5. 3	Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 10$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 1$ için grafiği 54
Şekil 5. 4	Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 1$ için grafiği 55
Şekil 5. 5	Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 10$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 2$ için grafiği 55
Şekil 5. 6	Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 2$ için grafiği 56
Şekil 5. 7	Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 10$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 3$ için grafiği 56

Şekil 5. 8	Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 3$ için grafiği	57
Şekil 5. 9	Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 0$ için grafiği.....	57
Şekil 5. 10	Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 0$ için grafiği.....	58
Şekil 5. 11	Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 1$ için grafiği.....	58
Şekil 5. 12	Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 1$ için grafiği.....	59
Şekil 5. 13	Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 1$ için grafiği.....	59
Şekil 5. 14	Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 2$ için grafiği.....	60
Şekil 5. 15	Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 2$ için grafiği.....	60
Şekil 5. 16	Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 2$ için grafiği.....	61
Şekil 5. 17	Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 3$ için grafiği.....	61

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4.1	$W(\zeta, \tau)$ ile birlikte TE ve TM zaman dönemi modlarının ζ ve τ 'ya göre kısmi türevleri	48
-------------	---	----

DALGA KILAVUZLARI BOYUNCA SİNYAL TRANSFERİ VE WALSH FONKSİYONU

Ersin ŞENER

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Kevser KÖKLÜ

Bu çalışmada Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım(ETey) olarak adlandırılan bir analitik zaman-dönemi metoduyla düşünölen keyfi zamana bağılı mükemmel iletken yüzeye sahip bir dalga kılavuzunda üreteç fonksiyonu tarafından üretilen elektromanyetik alan problemi ele alınmıştır.

Analitik olarak çözülen bu problemde TE ve TM dalga kılavuzu modlarının bir tam kümesi zaman döneminde direkt elde edilebilir. Elde edilen çözümlerin ait olduğı Hilbert uzayından bahsedilmiştir. Her alan bileşeni iki faktörün ürünüdür. Bunlardan biri enlemsel dalga kılavuzu koordinatlarının bir vektör fonksiyonudur. Diğer faktör ise dalga kılavuzu alan bileşenleri için modal genliklerin fiziksel anlamına sahip skaler fonksiyonlardır. Dalga kılavuzundaki dijital sinyallerin yayılım problemi nedensellik prensibine uygun çözülmüştür. Walsh fonksiyonu üzerinde durularak sayısal bir örneğe yer verilip uygulamanın grafikleri eklenmiştir.

Bessel fonksiyonlarının derecelerinin tamsayılar olduğı durumlarda analitik sonuçlar grafiksel olarak MAPLE 14 yardımıyla gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Elektromanyetik teori, Maxwell denklemleri, zaman-dönemi, evrim denklemleri, modal bazlar, modal genlik, Bessel fonksiyonu, tamsayı derece, Hilbert uzayı, Walsh fonksiyonu, Hadamard matrisi, MAPLE

ABSTRACT

SIGNAL TRANSFER ALONG THE WAVEGUIDES AND WALSH FUNCTION

Ersin ŞENER

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Asst. Prof. Dr. Kevser KÖKLÜ

In this study, the problem of electromagnetic field strength are produced by source function which has arbitrary time dependency in a waveguide having perfect electric conductor surface is discussed with an analytical time domain method called Evolutionary Approach to Electromagnetics(EAE).

In this problem, which is solved analytically, a complete set of TE and TM waveguide modes is obtained in time domain directly. We mentioned Hilbert spaces in which our solutions that obtained are verified. Every field component is product of two factors. One of them is a vector function of transverse waveguide coordinates. The other factors, which are scalar functions, have physical sense of the modal amplitudes for the waveguide field components. The problem of propagation digital signals in the waveguide is solved explicitly in compliance with the causality principle. We discussed Walsh function with a numerical example and attached the graphics of it.

Analytical results' graphics are presented for the cases when the orders of the Bessel fuctions are all possible integer numbers by MAPLE 14.

Key words: Electromagnetic theory, Maxwell equations, time-domain, evolutionary equations, modal basis, modal amplitude, Bessel function, integer, Hilbert space, Walsh function, Hadamard matrix, MAPLE

**YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE**

1.1 Literatür Özeti

Bu tezde ele alınan konu üzerindeki incelemeler Elektromagnetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım (ETey) yöntemi [1], [2] çerçevesi içerisinde gerçekleştirilmiştir. ETEY'in temel düşüncesi Maxwell denklemler sisteminin problemin başlangıcından sonuna kadar ∂t zaman türevi korunarak incelemektir.

Elektromanyetik teoride, ETEY yöntemi elektromanyetik alan kuvvetlerinin arandığı başlangıç koşulları verilen kutu problemi, dalga kılavuzu problemi ve harici problem olmak üzere üç kanonik sınır-değer probleminden oluşmaktadır [1]. Çalışmamızda dalga kılavuzu problemi, Euclid uzayının bir alt uzayında çalışılan kanonik problemdir ve kutu probleminde kullanılan metod ile Maxwell operatörünün denklemden ayrıştırılıp çözülmesidir. Çoklu bağlantılı olduğu kabul edilen dalga kılavuzunun içi boş rastgele bir kesit-alanlı fakat geometrik olarak Oz eksenı boyunca düzgün bir kesitinde problemin çözümü yapılmıştır. Dalga kılavuzu yüzeyi mükemmel elektrik iletkenidir [3].

Sonlu sınır-değer problemlerinde elektromanyetik alanların incelenmesi elektromanyetik teoride temel bir problemdir. Problemin çözüldüğü yapılar kutu veya rezonatör olarak adlandırılır. Klasik zaman-harmonik elektromanyetik teoride, teorik olarak sadece $t = -\infty$ 'da başlayıp $t = +\infty$ 'a kadar devam eden olayları incelemek mümkündür. Ancak gerçek durumda araştırmacılar zorlanmış salınımlarla işlem yapar. Elektromanyetik alanların bir uyarıcı kaynağın uygulamaya başlaması ile oluşması zorlanmış terimini ifade etmektedir. Elektromanyetik alanlar sadece kaynak

uygulanmaya başladıktan sonra doğar ve zamanla salınırlar. Elbette ki böyle olayların $t = 0$ gibi bir başlangıçları vardır [3].

Zaman-dönemi çalışmaları genelde iki ana metot ile çözülmektedir. En çok kullanılanı, sayısal analiz metodu kullanılarak çözülen sayısal niceliklerin her bir veri sonrasında tespit edilip analiz edildiği Zaman Uzayında Sonlu Farklar (ZUSF) yöntemidir. Kullanılan metotlar sayısal analizin uygulamaları ve bu uygulamaların sağladığı çeşitliliktendir [4]. Metottaki verilerin bolluğu, salınım boyunca veri sağlanabilmesi ve bu verilerin kaydedilip sonucun mukayese edilerek başlangıç-süreç-sonuç karşılaştırmasıyla gözlem yapıp sağlıklı bir neticeye ulaşılabilmesine olanak sunmaktadır. Ayrıca bilgisayar verilerinin çokluğu ve karşılaştırılabilirliği metodun zenginliğidir [3].

İkinci yöntem ise analitiktir. Bu yöntemde Fourier veya Laplace integral dönüşümleri kullanılır. İntegraller $(-\infty, \infty)$ aralığında çalışıldığından nedensellik prensibi bu metotta altı çizilmesi gereken önemli hususlardan biridir. Bu yöntemde fizik ve matematik beraber düşünülmelidir. Matematiksel sonuçlar fiziksel gereksinimleri de karşılamalıdır [5].

Analitik bir metot olan Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım (ETey) [6] metodu da bu cümledendir. Metotda zaman-döneminde elektromanyetik alanların çözümleri analitik olarak incelenir. Analitik incelemede zaman türevine sahip diferansiyel denklemler (evrim denklemleri) ile çalışılır. Bu denklemlerin uygun başlangıç koşulları altında herhangi bir çözümü; başlangıcından gözlem zamanına kadar sürecin zamanla nasıl geliştiğini gösterir. Bu yöntemin Evrimsel Yaklaşım olarak adlandırılması bundan kaynaklanmaktadır.

Bu fikir 1980'lerde Tretyakov tarafından ileri sürülmüş ve Rus bilimsel dergilerinde yayınlanmıştır [1], [2]. İngilizce tercümesi ise ilk olarak 90'lı yılların başlarında yayınlanmıştır [6], [7]. ETEY yöntemi ile yakın zamanda, mükemmel iletken dalga kılavuzu yüzeyleriyle bu dalga kılavuzlarının kesit-alanlarında zamanda başlangıcı olan sinüsoidal bir işaret ile elektromanyetik alanların uyarılması sonucu meydana gelen sinyallerin dalga kılavuzu boyunca sinyal transferi incelenmiştir [8], [9], [10].

Walsh fonksiyonları, ilk kez Amerikalı bir matematikçi olan J. L. Walsh tarafından 1923 yılında tanımlanmıştır. Bu fonksiyonlar aynı zamanda tam bir ortogonal kümedir. Walsh

fonksiyonları sadece +1 ve -1 değerlerini alır, bununla birlikte bu fonksiyonların trigonometrik serilerle benzerlik gösterdiği bulunmuştur. Walsh fonksiyonlarının ortaya çıkışından önce bir Alman matematikçi olan H. Rademacher, Walsh fonksiyonlarına tamamlanmamış fakat doğru bir alt küme sunmuştur [11].

Bu fonksiyon kümeleri işaret işleme ve haberleşmede yeni bir yöntemin temelini oluşturmaktadır. 1931 yılında başka bir Amerikan matematikçi olan R. E. A. C. Paley tarafından Walsh fonksiyonlarının tamamen farklı bir tanımlaması yapılmıştır. Çeşitli Alman ve Amerikan matematikçiler ilerleyen yıllarda da bu konu üzerine çalışmalar yapmıştır [11].

Bu tezde;

(i) ETEY yönteminden bahsedilmiş, TE ve TM modları üzerinde durularak modların tamlığına değinilmiştir. Ayrıca ETEY yönteminin çalışıldığı Hilbert uzayından bahsedilmiştir.

(ii) Modal Genliklerin eldesi Klein-Gordon denkleminin çözümü ile sağlanmış olup çözümden elde edilen f üreteç fonksiyonu; üstel fonksiyon ve Bessel fonksiyonun çarpımı olarak hesaplanmış ve daha sonra çözümdeki Bessel fonksiyonları için tamsayı çözümleri verilmiştir.

(iii) Walsh fonksiyonu ile sayısal örneklendirme yapılmıştır.

(iv) Üreteç fonksiyonun garfiklendirmesi yapılmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Maxwell denklem sisteminin zaman-döneminde ∂_t 'nin korunduğu evrim denklemleri ve Laplasiyen vasıtasıyla analitik olarak çözülmesi amaçlanmaktadır. Elektromanyetik alanlar Maxwell denklem sisteminden bu şekilde ayrıştırılıp zaman döneminde çözülecektir. Çözümlere özdeğer-özvektör ilişkisi içerisinde bakılarak elektromanyetik problemin matematikçiler açısından nasıl okunduğu ortaya konulmaya çalışılacaktır. Dalga kılavuzu boyunca çözümler elde edilmiştir. Sonuç olarak sinyal transferinin nasıl gerçekleştiği hakkında fikir oluşturmaya çalışılmaktadır.

1.3 Bulgular

Bölüm 2:

Bölüm 2’de; TE-TM modlarına genel bir bakış yapılmış, Neumann ve Dirichlet problemlerinin çözümü tartışılmış, uyarıcı kaynak ile dalga kılavuzu boyunca sinyal transferi için koordinatların ve zamanın ikinci dereceden türevlere sahip reel-değerli öz vektör fonksiyonları sınıfından elde edilen tam analitik çözümleri verilmiştir.

Maxwell denklemleri çözülürken, başlangıç şartları uygulanmış, sınır değerleri kullanılarak nedensellik prensibine bağlı kalınıp çözümler elde edilmiştir. ETEY yöntemi kullanılarak elde ettiğimiz çözüm fonksiyonlarının L_2 Hilbert uzayı üzerinde tam olmasından dolayı bu konu hakkında temel tanım ve teoremlerden bu bölümde söz edinilmiştir.

Bölüm 3:

Bölüm 3’te; Bessel diferansiyel denklemi ve çözümü hakkında genel bilgiler verilmiş, modal genliklerin Bessel fonksiyonu yardımıyla nasıl çözüldüğü ele alınmıştır. Klein-Gordon denkleminin çözümlerine bakılmış, değişkenlerine ayırma metodu ile Klein-Gordon dalga denklemi çözülüp çözüm Bessel fonksiyonu ile bir üstel fonksiyonun çarpımı olarak elde edilmiştir. Bu çözümün sıfır-sonsuz aralığında tam bir fonksiyon ailesi elde edilmiştir. Bessel diferansiyel denkleminin dercesi olan p , $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ alınarak silindirik Bessel fonksiyon ailesi verilmiştir. Elde edilen Bessel fonksiyonu yardımıyla genlik probleminin çözümleri gösterilmiştir. Yaklaşım sonucunda elde edilen denklemlere sınır koşulları uygulanmadan ve denklemler normalie edilmeden sunulmuştur. Sonuç olarak Bessel diferansiyel denklemi ve çözüm fonksiyonları ile ilgili ayrı bir tartışma yapılmıştır. Çözüm fonksiyonlarında sadece tamsayı dereceler göz önünde bulundurulmuş kesirli değerlerin tartışılması başka çalışmalara bırakılmıştır.

Bölüm 4:

Bu bölümde Walsh fonksiyonuna ait genel bilgiler sunulmuş ve Hadamard matrisi ile Walsh fonksiyonu ilişkisinden bahedilmiştir. Ayrıca sinyal transferine ait bir örnek Walsh fonksiyonu ile çözülüp grafikleri sunulmuştur.

Bölüm 5:

Bu bölümde grafikler MAPLE 14 programı yardımıyla çizilip birbirleri ile kıyaslanmış ve grafikler hakkında yorumlar yapılmıştır. Hemen her grafik için $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ değerlerine ayrı ayrı bakılmış $\tau = 10, 20, 30, \dots$ ve $\xi = 10, 20, 30, \dots$ değerlerine ait grafiklerin birbiri ile kıyaslanması yapılmıştır.

Bölüm 6:

Bu bölümde amaçlarımız doğrultusunda yapılan çalışmamızdan elde edilen bilgilerle sonuçlar sunulmuş ve önerilerde bulunulmuştur.

ELEKTROMANYETİK TEORİYE EVRİMSEL YAKLAŞIMLAR

2.1 Giriş

Dalga kılavuzları boyunca sinyal transferinin analizi iki ana kısımdan oluşur. İlki, zaman-dönemi dalga kılavuzu modlarının modal bazda sunulması, ikincisi ise Klein-Gordon dalga denkleminin çözülmesidir. Klein-Gordon denkleminin çözümü ile sinyal transferini sağlayan zaman-bağımlı modal genlikler elde edilir. Klein-Gordon denkleminin çözümü nedensellik prensibi çerçevesinde bulunur. Bu çözümler seri halinde evrimsel olarak ifade edilir [5].

Boş bir dalga kılavuzunda sinyallerin yayılması ve iletilmesi problemi analitik bir zaman-dönemi metodu olarak düşünülür. Dalga kılavuzu geometrik olarak homojen, Oz eksenini boyunca düzgün ve kesit-alanı yeteri kadar düzgün yüzeyli kapalı tekli-bağılantılıdır. Dalga kılavuzu yüzeyi mükemmel elektriksel iletkenidir. Tam TE ve TM dalga kılavuzu modları direkt olarak zaman-döneminde elde edilmiştir. Her bir modal alan enlemsel ve eksenel kısımlarının vektör uzantılarının toplamı olarak alınmıştır. Her bir uzantı iki etkenden oluşur. Biri dalga kılavuzunun bir elemanı ve enlemsel dalga kılavuzu koordinatlarının vektör fonksiyonu olan modal baz, diğeri t zamanı ve eksenel koordinat z nin skaler bir fonksiyonu olan bir modal genlik. Modal bazların bütün elemanları iki skaler potansiyel yardımıyla belirlenir. Bunlar uygun bir yol ile normalize edilmiş Laplacian için Dirichlet ve Neumann sınır-değer problemlerinin öz çözümleridir. Modal bazın her bir elemanı dalga kılavuzu yüzeyinde uygun sınır koşullarını sağlar. Modal genlikler evrimsel kısmi diferansiyel denklemler sisteminin zamana ve eksenel koordinat z 'ye bağlı çözümlerinden oluşur [5].

3-bileşenli konum vektörü $\mathbf{R}$ ve ∇ operatörü, dalga kılavuzu kesit-alanının yüzeyi S ve z -ekseni,

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + z\mathbf{z}, \quad \nabla = \nabla_{\perp} + z\partial_z \quad (2.1)$$

olarak alınacaktır. Burada $\mathbf{z}$, Oz eksenini boyunca yönelen birim vektör, $\mathbf{r}$; S kesit alanlı dalga kılavuzundaki 2-bileşenli pozisyon vektörü ve $\nabla_{\perp}$, ∇ 'nin enlemsel kısmıdır. Diferansiyel operatörü $\nabla_{\perp}$ sadece enlemsel dalga kılavuzu koordinatlarında ($\mathbf{r}$) çalışır. 3-bileşenli elektromanyetik alan kuvvet vektörleri $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ her biri aşağıdaki gibi iki-bileşenli ve bir-bileşenli vektörlerin toplamı olarak

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, z, t) + z\mathbf{E}_z(\mathbf{r}, z, t) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{R}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}, z, t) + z\mathbf{H}_z(\mathbf{r}, z, t)$$

sunulmuştur. Sınır koşulları,

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})|_L = 0, \quad (\mathbf{l} \cdot \mathbf{E})|_L = 0, \quad (\mathbf{z} \cdot \mathbf{E})|_L = 0 \quad (2.3)$$

dır.

2.2 TE Modu

Neuman problemini çözerek başlamalıyız.

$$(\nabla_{\perp}^2 + v_m^2)\psi_m(\mathbf{r}) = 0$$

$$\partial_n \psi_m(\mathbf{r})|_L = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{v_m^2}{S} \int_S |\psi_m(\mathbf{r})|^2 ds = 1$$

Burada $\partial_n = \mathbf{n} \cdot \nabla_{\perp}$, L konturu üzerinde normal türev, $v_m^2 > 0$, $m = 1, 2, \dots$ özdeğerler, m indisi reel ekseninde artan bir sıra ile sıralanan nümerik değerler, $\psi_m(\mathbf{r})$ 'ler de bu özdeğerlere karşılık gelen öz vektörlerdir.

Örnek 2.1

Tipik $0 \leq x \leq a$ ve $0 \leq y \leq b$ ile sınırları belirlenen dikdörtgen şeklinde bir dalga kılavuzu olan L konturunu düşünelim. A_m^h normalizasyon sabiti olmak üzere $\Psi_m(\mathbf{r})$ potansiyelini $\Psi_m(\mathbf{r}) = A_m^h \psi_m(\mathbf{r})$ olarak alalım. $\psi_m(\mathbf{r}) = \cos(p\pi x/a) \cos(q\pi y/b)$ dir. p ve q parametreleri $p, q = 0, 1, 2, \dots, p+q \neq 0$ şartını sağlayan tamsayılardır. (2.4) problemini çözerek

$$v_m^2 = \pi^2 (p^2/a^2 + q^2/b^2) \equiv v_{p,q}^2 \quad (2.5)$$

$$A_m^h = \sqrt{(2 - \delta_{p,0})(2 - \delta_{q,0})} / v_{p,q} \equiv A_{p,q}^h$$

elde edilir. Burada $\delta_{p,0}$ ve $\delta_{q,0}$ Kronecker deltasıdır ($\delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & \text{eger } m \neq n \\ 1, & \text{eger } m = n \end{cases}$ olduğu

hatırlanmalıdır.). v_m^2 özdeğerlerini reel eksen üzerinde konumlayan indis m indisidir: örnek; $m \rightarrow (p, q)$. $\Psi_m(\mathbf{r})$ potansiyeli zaman-dönemi TE modlarının tanımının bir parçasıdır [12].

$$\mathbf{E}_{zm}^h = 0$$

$$v_m^{-1} \mathbf{E}_m^h = \left\langle -\partial_{(v_m c t)} h_m(z, t) \right\rangle \left[1/\sqrt{\epsilon_0} \nabla_{\perp} \psi_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{z} \right] \quad (2.6)$$

$$v_m^{-1} \mathbf{H}_m^h = \left\langle \partial_{(v_m z)} h_m(z, t) \right\rangle \left[1/\sqrt{\mu_0} \nabla_{\perp} \psi_m(\mathbf{r}) \right]$$

$$v_m^{-1} \mathbf{H}_{zm}^h = \left\langle h_m(z, t) \right\rangle \left[v_m 1/\sqrt{\mu_0} \psi_m(\mathbf{r}) \right]$$

burada $\partial_{(v_m c t)} = \frac{1}{c v_m} \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_{(v_m z)} = \frac{1}{v_m} \frac{\partial}{\partial t}$ ve $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ boşlukta ışık hızıdır.

Modal alan çiftleri dalga kılavuzu kesit-alanında $[*]$ köşeli parantez ile gösterilir. Buradaki potansiyellerin hepsi Laplacian'dan elde edilirler. $\langle * \rangle$ kırık parantez ile ifade edilen faktörler uygun modal alan uzantılarının modal genliklerinin fiziksel manasına

sahiptir. Hepsi Klein-Gordon denkleminde elde edilen bir $h_m(z, t)$ potansiyeli tarafından belirlenir.

$$(\partial_{v_m c t}^2 - \partial_{v_m z}^2 + 1)h_m(z, t) = 0 \quad (2.7)$$

(2.4) problemi sıfır aşıkaz çözümüne de sahiptir. Bu çözüm $v_0^2 = 0$ özdeğerine karşılık gelir ve harmonik $\Psi_0(\mathbf{r})$ fonksiyonu için $\nabla_{\perp}^2 \Psi_0(\mathbf{r}) = 0$, $\partial_n \Psi_0(\mathbf{r})|_L = 0$ problemini üretir. $\mathbf{r} \in L + S$ ve c_1 bir sabit olmak üzere harmonik fonksiyonlar maksimum-minimum teoreminden $\Psi_0(\mathbf{r}) = c_1$ elde edilir. $\Psi_0(\mathbf{r})$ potansiyeli bir TE modu daha üretir.

$$\mathbf{E}_0^h(\mathbf{r}, z, t) = 0, \quad \mathbf{H}_0^h(\mathbf{r}, z, t) = \mathbf{z}c_1 \quad (2.8)$$

burada $\mathbf{H}_0^h$ alanının modal genliğı de bir sabittir [5].

Weyl Teoremi TE zaman-dönemi modlarının L_2 Hilbert uzayında tam olduğunu ifade etmektedir [11].

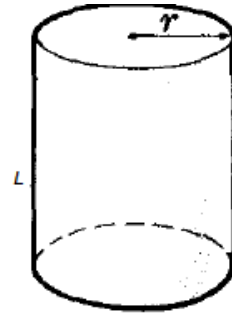
2.3 TM Modu

ilk olarak $(\nabla_{\perp}^2 + v_m^2)\varphi_m(\mathbf{r}) = 0$ Dirichlet problemini silindirik dalga kılavuzu için aşğıdaki şekilde ele alalım.

$$0 \leq r \leq a$$

$$0 \leq r \leq a \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \text{ veya } -\pi \leq \phi \leq \pi$$

$$-L \leq z \leq L$$



$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi(r, \phi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi(r, \phi)}{\partial \phi^2} + k_m^2 \varphi(r, \phi) = 0$$

Burada $\nabla_{\perp}$ operatörü için sadece r ve ϕ ile çalışılacak.

$$\varphi(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$$

$$\frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k_m^2 = 0$$

Her iki tarafı $R(r)$ ile çarpalım.

$$\frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{\kappa \phi^2}{r^2} + k_m^2 = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \left(k_m^2 - \frac{k_\phi^2}{r^2} \right) R = 0$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k_m^2 - \frac{k_\phi^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (2.9)$$

(2.9) eşitliği Bessel diferansiyel denklemi formundadır.

$$R(r) = a_r J_p(k_m r), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

ve

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -k_\phi^2 \Rightarrow \Phi(\phi) = a_\phi \sin(k_\phi \phi) + b_\phi \cos(k_\phi \phi)$$

$\varphi(r, \phi) = R(r)\Phi(r)$ yazılabildiğinden;

$\varphi(r, \phi) = a_r J_p(k_m r) [a_\phi \sin(k_\phi \phi) + b_\phi \cos(k_\phi \phi)]$ şeklini alır.

$\varphi(r, \phi) = a_r a_\phi J_p(k_m r) \sin(k_\phi \phi) + a_r b_\phi J_p(k_m r) \cos(k_\phi \phi)$ yazabiliriz.

$r = a$ sınır koşulları için;

$$\varphi(a, \phi) = 0$$

$$\varphi(a, \phi) = a_r J_p(k_m a) = 0 \Rightarrow J_p(k_m a) = 0$$

k_m 'ler Bessel diferansiyel denkleminin kökleridir. $k_m = \frac{X_{mp}}{a}$ şeklindedir.

ϕ için genel olarak $a_\phi(k)$ ve $b_\phi(k)$ katsayıları sırasıyla

$$a_{\phi}(k) = \frac{k}{\pi} \int_0^{\infty} dr r \int_0^{2\pi} d\phi J_p(k_m r) \sin(k_{\phi} \phi)$$

$$b_{\phi}(k) = \frac{k}{\pi} \int_0^{\infty} dr r \int_0^{2\pi} d\phi J_p(k_m r) \cos(k_{\phi} \phi)$$

yukarıdaki gibi hesaplanabilir.

Dirichlet problemi;

$$(\nabla_{\perp}^2 + \kappa_m^2) \varphi_m(\mathbf{r}) = 0$$

$$\varphi_m(\mathbf{r})|_L = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\kappa_m^2}{S} \int_S |\varphi_m(\mathbf{r})|^2 ds = 1$$

şeklindedir.

Burada $\kappa_m^2 > 0$, $m = 1, 2, \dots$ özdeğerler, m indisi reel ekseninde artan bir sıra ile sıralanan sayısal değerler, $\Phi_m(\mathbf{r})$ 'lerde bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleridir. $\kappa_0^2 = 0$ özdeğerine karşılık gelen $\Phi_0(\mathbf{r})$ çözümü sıfırdır [5].

Örnek 2.2

Dikdörtgen dalga kılavuzu içinde bir örnek düşünelim. A_m^e normalizasyon sabiti olmak üzere $\Phi_m(\mathbf{r})$ potansiyelini $\Phi_m(\mathbf{r}) = A_m^e \phi_m(\mathbf{r})$ olarak alalım.

$\phi_m(\mathbf{r}) = \sin(p\pi x/a) \sin(q\pi y/b)$ dir. p ve q , $p+q \neq 0$ şartıyla $p, q = 0, 1, 2, \dots$ tamsayılarıdır.

(2.10) problemini çözerek

$$\kappa_m^2 = \pi^2 (p^2/a^2 + q^2/b^2) \equiv \kappa_{p,q}^2 \quad (2.11)$$

$$A_m^e = 2/\kappa_m \equiv A_{p,q}^e$$

$\Phi_m(\mathbf{r})$ potansiyeli aynen TE modlarındaki $\Psi_m(\mathbf{r})$ potansiyeli gibi zaman-dönemi TM modlarının tanımının bir parçasıdır [12].

$$H_{zm}^e = 0$$

$$\kappa_m^{-1} H_m^e = \left\langle -\partial_{(\kappa_m c t)} e_m(z, t) \right\rangle \left[z \times 1 / \sqrt{\mu_0} \nabla_{\perp} \varphi_m(\mathbf{r}) \right]$$

$$\kappa_m^{-1} E_m^e = \left\langle \partial_{(\kappa_m z)} e_m(z, t) \right\rangle \left[1 / \sqrt{\epsilon_0} \nabla_{\perp} \varphi_m(\mathbf{r}) \right] \quad (2.12)$$

$$\kappa_m^{-1} E_{zm}^e = \left\langle e_m(z, t) \right\rangle \left[\kappa_m 1 / \sqrt{\epsilon_0} \varphi_m(\mathbf{r}) \right]$$

burada $\partial_{(\kappa_m c t)} = \frac{1}{c \kappa_m} \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_{(\kappa_m z)} = \frac{1}{\kappa_m} \frac{\partial}{\partial z}$ ve $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ boşlukta ışık hızıdır [5]. Weyl

Teoremi TM zaman-dönemi modlarının çözümleri L_2 Hilbert uzayında tam olduğunu ifade etmektedir [11]. Çalışmalarımızın Hilbert uzaylarında mümkün olması Hilbert uzaylarına genel bir bakışı gerektirmektedir. Bu nedenle bölüm 2.4'te iç çarpım ve Hilbert uzaylarından bahsedilecektir.

2.4 Hilbert Uzayı

2.4.1 İç Çarpım

Tanım 2.1 Bir lineer uzay üzerindeki iç çarpım (a, b) şeklinde seçilen iki değişkenli kompleks değerli bir fonksiyondur ve aşağıdaki şartları sağlar;

(i) $(a, b), b$ 'nin sabit bir değeri için a 'nın lineer bir fonksiyonudur,

(ii) $(b, a) = \overline{(a, b)}$

(iii) eğer $a \neq 0$ ise $(a, a) > 0$.

Skaler t ve a, b, c vektörleri için $(ta + b, c) = t(a, c) + (b, c)$ 'dir. Her a için $(0, a) = (a, 0) = 0$ ve $(a, tb + c) = \bar{t}(a, b) + (a, c)$ 'dir [13].

Örnek 2.3

İç çarpımın bir örneği olarak;

(a) E^n uzayı, $(a, b) = \sum_{k=1}^n a_k b_k$,

(b) l^p uzayı, $1 \leq p \leq 2$, $(a, b) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$,

Bu seriler

$$\sum |a_k b_k| \leq \left(\sum |a_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum |b_k|^2 \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

Hölder eşitsizliği için her zaman yakınsaktır.

Bir reel iç çarpım reel değerlidir ve $(a, b) = (b, a)$ şartını sağlar. Teoremleri genellikle kompleks için ispatlamalıyız. Reel durum her zaman aynıdır.

Örnek 2.4 R^n Euclid Uzayı

R^n uzayı, $x = (\xi_j) = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ve $y = (\eta_j) = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ olmak üzere,

$$\langle x, y \rangle = \xi_1 \eta_1 + \xi_n \eta_n \quad (2.14)$$

ile tanımlanan iç çarpıma göre, bir Hilbert uzayıdır [12].

Gerçekten, (2.14)'ten

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2}$$

ve buradan da,

$$d(x, y) = \|x - y\| = \langle x - y, x - y \rangle^{1/2} = [(\xi_1 - \eta_1)^2 + \dots + (\xi_n - \eta_n)^2]^{1/2}$$

ile tanımlanan Euclid metriğini elde ederiz.

$n = 3$ olması halinde, (2.14) formülü, $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ve $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ 'ün, bilinen $\langle x, y \rangle = x \cdot y = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3$ skaler çarpımını verir ve $\langle x, y \rangle = x \cdot y = 0$ dikliği, elemanter diklik kavramıyla uyudur [12].

Tanım 2.2 Bir iç çarpım uzayı üzerinde tanımlanan iç çarpımla birlikte bir lineer uzaydır. Eğer norm tam ise iç çarpım uzayı bir Hilbert uzayıdır.

Örneğin her sonlu boyutlu iç çarpım uzayı bir Hilbert uzayıdır.

Örnek 2.5 Verilen iç çarpımdan türetilen l^p üzerindeki norm $\|a\| = \left(\sum |a_k|^2\right)^{1/2}$, $p = 2$ için bu bir doğal normdur. Bu yüzden l^2 bir Hilbert uzayıdır. $1 \leq p < 2$ için iç çarpımdan üretilen norm tam değildir.

Bu uzayların hiçbir zaman Hilbert uzayı olmadığını görelim. l^2 bir Hilbert uzayıdır. Fakat C iç çarpımı doğal normun bir ürünü olmadığından Hilbert uzayı değildir. $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$ reel veya kompleks paralelkenar kuralı her iç çarpım için temel bir özelliktir.

İspatı şu şekildedir;

$$\|a \pm b\|^2 = (a \pm b, a \pm b) = \|a\|^2 \pm 2R(a, b) + \|b\|^2$$

Bu kurala uymayan her norm iç çarpımdan türetilmemiştir. Örneğin R^2 için $a = (x, y) \in R^2$ olmak üzere $\|a\| = |x| + |y|$ kuralı paralelkenar kuralına uymaz. Bununla birlikte bu norm iç çarpımdan türetilmiştir [13].

Örnek 2.6 l^p , $p \geq 1$, $p \neq 2$ için Hilbert uzayı değildir. $p \geq 1$ için paralelkenar kuralı sağlanmaz.

Örneğin $\|\delta^1 \pm \delta^2\| = \|\{1, \pm 1, 0, 0, \dots\}\| = (1^p + 1^p)^{1/2} = 2^{1/p}$, $\|\delta^1\| = \|\delta^2\| = 1$. Bundan dolayı $p \neq 2$ için paralelkenar kuralı sağlanmaz.

2.4.2 Eşlenik Uzay

Sabit bir H Hilbert uzayını ele alalım ve H üzerindeki lineer fonksiyonelleri araştıralım. Her $a \in H$ vektörü H üzerindeki bir sürekli lineer fonksiyonelle $f(x) = (x, a)$ formülünü sağlar. Gerçekten $\|f\| = \|a\|$ 'dır [14].

Şimdi H üzerindeki bütün sürekli lineer fonksiyonellerin bu formda olduğunu görelim; H' 'dan H^* 'a tanımlanan dönüşüm üzerinedir.

Teorem 2.1

f , bir H Hilbert uzayı üzerinde sürekli bir lineer fonksiyonel olsun. O zaman bir $a \in H$ vektörü vardır ki her $x \in H$ için $f(x) = (x, a)$ ve $\|a\| = \|f\|$ 'dir.

2.4.3 İç Çarpım Normları

Bazı normlar iç çarpımdan üretilmektedir. İç çarpımdan türetilen bir norm paralelkenar kuralını sağlamalıdır.

$$\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$$

Bu şart yeterli olduğu kadar da gereklidir [13].

2.4.4 Operatörler

Tanım 2.3 (T^* Hilbert-Adjoint Operatör)

H_1 ve H_2 Hilbert uzayları olmak üzere, $T: H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun.

T nin, T^* Hilbert kendine eş operatörü, her $x \in H_1$ ve $y \in H_2$ için,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad (2.15)$$

olacak şekilde bir $T^*: H_2 \rightarrow H_1$ operatörüdür.

Kuşkusuz, önce, bu tanımın bir anlamının olduğunu, yani, verilen bir T için, böyle bir T^* in var olduğunu göstermemiz gerekmektedir [14].

Teorem 2.2

Tanım 2.1 deki, T' nin, T^* Hilbert kendine eş operatörü mevcuttur, tekdir ve

$$\|T^*\| = \|T\| \quad (2.16)$$

normuna sahip, sınırlı lineer bir operatördür [14].

İspat: İç çarpımın sesquilineer ve T' nin lineer olması nedeniyle,

$$h(x, y) = \langle y, Tx \rangle \quad (2.17)$$

formülü, $H_2 \times H_1$ üzerinde, sesquilinear bir form tanımlar. Gerçekten söz konusu formun, eşlenik lineerliği,

$$h(y, \alpha x_1 + \beta x_2) = \langle y, T(\alpha x_1 + \beta x_2) \rangle$$

$$= \langle y, \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 \rangle$$

$$= \bar{\alpha} \langle y, Tx_1 \rangle + \bar{\beta} \langle y, Tx_2 \rangle$$

$$= \bar{\alpha} h(y, x_1) + \bar{\beta} h(y, x_2)$$

yazılarak hemen görülür. Ayrıca, h sınırlıdır. Gerçekten, Schwarz eşitsizliği yardımıyla,

$$|h(y, x)| = |\langle y, Tx \rangle| \leq \|y\| \|Tx\| \leq \|T\| \|x\| \|y\|$$

yazabiliriz. Bu yazış ayrıca, $\|h\| \leq \|T\|$ sonucunu da verir. Bunun yanı sıra,

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|\langle y, Tx \rangle|}{\|y\| \|x\|} \geq \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|\langle Tx, Tx \rangle|}{\|Tx\| \|x\|} = \|T\|$$

eşitsizliğinden, $\|h\| \geq \|T\|$ elde ederiz. Bu ikisi birlikte,

$$\|h\| = \|T\| \quad (2.18)$$

sonucunu verir. Riesz gösterimi teoreminden h için, bir Riesz gösterimi vermektedir; S yerine, T^* yazacak olursak,

$$h(y, x) = \langle T^* y, x \rangle \quad (2.19)$$

elde ederiz. Söz konusu teoremden, $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ 'in,

$\|T^*\| = \|h\| = \|T\|$ normuna sahip olan ve tek olarak belirli sınırlı bir operatör olduğunu biliyoruz. Ayrıca (2.15) ve (2.16)'yı karşılaştırsak, $\langle y, Tx \rangle = \langle T^* y, x \rangle$ olduğunu görürüz. Eşlenik alarak da, (2.18)'yi elde ederiz ki, bu bize, T^* 'ın aradığımız tipte bir operatör olduğunu gösterir [14].

Teorem 2.3

$T : H \rightarrow H$, bir H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu durumda,

(a) T self-adjoint ise, $\langle Tx, x \rangle$, her $x \in H$ için, reeldir.

(b) H karmaşık ve $\langle Tx, x \rangle$, her $x \in H$ için, reel ise, T operatörü kendine-eştir [14].

İspat (a) T self-adjoint ise, her x için, $\overline{\langle Tx, x \rangle} = \langle x, Tx \rangle = \langle Tx, x \rangle$ 'dir. O halde, $\langle Tx, x \rangle$ kendisinin karmaşık eşleniğine eşittir, yani reeldir.

(b) $\langle Tx, x \rangle$, her x için reel ise,

$$\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} = \overline{\langle x, T^* x \rangle} = \langle T^* x, x \rangle$$

yazabiliriz. Buna göre,

$$0 = \langle Tx, x \rangle - \langle T^* x, x \rangle = \langle (T - T^*)x, x \rangle$$

olup, H 'ın karmaşık olması nedeniyle $T - T^* = 0$ 'dır.

Teoremin (b) kısmında, H 'ın karmaşık olması esastır. Çünkü, reel bir H için, iç çarpım reel değerli olup, bu durumda, T lineer operatörü üzerine hiçbir varsayım koymaksızın, $\langle Tx, x \rangle$ reel olur.

Self-adjoint operatörlerin çarpımları (bileşimleri) uygulamada sık sık ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle aşağıdaki teorem yararlı olacaktır [14].

Teorem 2.4

Bir H Hilbert uzayı üzerinde, sınırlı self-adjoint lineer iki S ve T operatörlerinin çarpımının self-adjoint olması için gerek ve yeter koşul bu operatörlerin komütatif yani,

$$ST = TS$$

olmasıdır [14].

İspat: Bilindiği üzere;

$$(ST)^* = T^* S^* = TS$$

yazabiliriz. Buna göre,

$$ST = (ST)^* \Leftrightarrow ST = TS \text{ 'dir. Bu da ispatı tamamlar.}$$

2.5 Zaman Dönemi Modlarının Tanımları

Zaman-dönemi modlarının L_2 Hilbert uzayında tam olduğu Weyl teoreminden bilinmektedir [15]. Operatörlerin kendine eş olması özelliğinden dolayı özdeğerler ve bunlara bağlı özfonksiyonlar da reel değerlidir. Aşağıda elektrik alan ve manyetik alan kümelerinin tanımları incelensin.

(2.6) ve (2.12) zaman-dönemi modlarının her ikisi de 6-bileşenli reel değerli fonksiyonel vektör uzayı içinde aşağıdaki iç çarpım tarafından belirlenen keyfi X_1, X_2 vektör çiftini tanımlar.

$$(X_1, X_2) = \frac{1}{S} \int_S (\epsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mu_0 \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2) ds < \infty \quad (2.20)$$

burada $X_1 = \text{col}(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ ve $X_2 = \text{col}(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$ ve “col” un manası “kolon” ve “.” Üç bileşenli vektörler için skaler çarpımdır.

TE ve TM modlarının (2.6) ve (2.12) kümesini sırasıyla, aşağıdaki gibi

$$\mathbf{G} = \{X_m^h\}_{m=0}^{\infty} \quad (2.21)$$

$$\mathfrak{S} = \{X_m^e\}_{m=1}^{\infty}$$

$X_m^h = \text{col}(\mathbf{E}_m^h, \mathbf{H}_m^h)$ ve $X_m^e = \text{col}(\mathbf{E}_m^e, \mathbf{H}_m^e)$ olarak gösterelim. $m = m'$ olmak üzere, ilk farklı eleman çiftini X_m^h ve $X_{m'}^h$ alıp (2.19) denkleminde bunları X_1, X_2 'nin yerlerine koyarsak $(X_m^h, X_{m'}^h) = 0$ sonucunu buluruz. Bu bize $\mathbf{G}$ kümesindeki bütün elemanların karşılıklı birbirine dik olduğunu gösterir. Aynı durum $\mathfrak{S}$ kümesi elemanları için de

geçerlidir. Şimdi $\mathbf{G}$ kümesinden bir X_m^h elemanı ve $\mathfrak{S}$ kümesinden bir $X_{m'}^h$ elemanı alıp bunları tekrar (2.20) denkleminde yerine koyalım. Yine m, m' keyfi olmak üzere $(X_m^h, X_{m'}^e) = 0$ sonucunu elde ederiz [5].

$\mathbf{G}$ ve $\mathfrak{S}$ 'nin her birinin kendi içerisindeki tamlıkları [16], [6] çalışmalarında ispatlanmıştır. İlaveten $\mathbf{G}$ ve $\mathfrak{S}$ çözümler uzayında bir alt uzay oluştururlar. Nihayetinde bunların direkt toplamı: $\mathbf{G} \oplus \mathfrak{S}$ dir. Bundan dolayı, bir alt uzay diğerine diktir.

KLEİN-GORDON VE BESSEL DİFERANSİYEL DENKLEMİ

3.1 Klein-Gordon Denklemi

Klein-Gordon denklemi herhangi diğer ikinci dereceden kısmi türevli diferansiyel denklemler (KTDD) gibi başlangıç koşulları çifti ile desteklenmelidir. Fiziksel olarak bunlar uygun bir sinyal kaynağının uyarılmasında rol oynar. Bu kaynağın $t = 0$ anından önce uyarılmadığı fakat $t = 0$ anında uyarılmaya başlandığı farz edilsin. Bu durumda, başlangıç koşulu;

$$f(\xi, \tau)_{|\xi=0} = \begin{cases} \phi(\tau), \tau \geq 0 \Rightarrow t \geq 0 \text{ için} \\ 0, \tau < 0 \Rightarrow t < 0 \text{ için} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\partial_\tau f(\xi, \tau)_{|\xi=0} = \begin{cases} \check{\phi}(\tau), \tau \geq 0 \Rightarrow t \geq 0 \text{ için} \\ 0, \tau < 0 \Rightarrow t < 0 \text{ için} \end{cases}$$

olarak yazılmalıdır. $\phi(\tau)$, $\check{\phi}(\tau)$ verilmelidir ve $\xi = 0 \Rightarrow z = 0$ olmalıdır [5].

Nihayetinde, Klein-Gordon denkleminin çözümleri nedensellik prensibinin şartını sağlamalıdır. Burada en son iki yorum vardır ve biri diğerini destekler. Eğer kaynakları bu başlangıç zamanında sıfır ise bütün alanların sıfır olduğu zayıf nedensellik vardır. Bizim problemimizde bu $\tau < 0$ 'a karşılık gelir. Güçlü nedensellik koşulu ise Einstein aksiyomunun ileri sürdüğü herhangi bir manyetik alanın bir sinyali boşlukta c ışık hızıyla yaydığı iddiasını takip eder. Bizim problemimiz, kaynağın; dalga kılavuzu kesit-

alanının içinde, $\xi = 0$ 'da yer yer aldığı şeklidir. Bu bize Klein-Gordon denkleminin çözümünün $\xi = 0$ kaynak noktasının ötesinde $\xi = \tau$ ($z = ct$) 'dan sonra sıfır olmak zorunda olduğunu söyler. Bundan dolayı, eğer sinyal Oz eksenini boyunca yayılıyorsa Klein-Gordon denkleminin çözümü fiziksel olarak

$$f(\tau, \xi) = \begin{cases} f(\tau, \xi) = 0 & \text{eger } \tau < 0 \\ f(\tau, \xi) \neq 0 & \text{eger } 0 \leq \xi \leq \tau \\ f(\tau, \xi) = 0 & \text{eger } \xi > \tau \end{cases} \quad (3.2)$$

şeklinde olur.

Klein-Gordon denklemi grup teorisinin iskelet çatısındaki Poincare grubu altında çalışıldığında kendi özelliklerini korur. W. Jr. Miller Klein-Gordon denklemini bu yönüyle çalışmış ve bu denklemin çözümünde simetrinin yörüngeleri denen (2.13) birbiri ile dik fonksiyon oluşturmuştur [17]. Çalışmaların sonuçları zaman-döneminde elektromanyetik alan teorisinin gelişmesinde geniş uygulama alanı bulmuştur. Aşağıda bu konuda bir örnek bulabilirsiniz.

(2.7) Klein-Gordon denkleminin $f(\xi, \tau)$ çözümünün modal genlikler için potansiyel belirlediği hatırlansın. Düşünölsün ki henüz bilinmeyen (u, v) değişkenleri ile verilen bir fonksiyon $f[u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)]$ ve (u, v) iki kere diferansiyellenebilen, (ξ, τ) değişkenlerinin bir fonksiyonu olsun. $f[u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)]$ fonksiyonunun (2.7) denkleminin çözümü olarak yerine konması aşağıdaki işlemlerden sonra denklemi yeni haliyle verir [5]. Bu işlemlere bir bakalım:

f fonksiyonunu aşağıdaki gibi değişkenlerine ayrılın

$$f \equiv f(\xi, \tau) = f[u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)] \equiv f(u, v) = U(u)V(v) \quad (3.3)$$

(2.7) denklemini (u, v) cinsinden yeniden şekillendirmek için aşağıdaki işlemler yapılsın

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \tau} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} f(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

u ve v değişkenleri bağımsız değişkenler olduğundan bu son denklem daha basitleştirilebilir

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} f(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} \quad (3.6)$$

aynı yolla aşağıdaki elde edilebilir

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(u, v) = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\} \quad (3.7)$$

(3.6) ve (3.7) eşitliklerinin (2.7) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right] \frac{\partial f}{\partial u} \\ & + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right] \frac{\partial f}{\partial v} + 2 \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right] \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + f = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

yeni denklemi elde edilir. Burada f fonksiyonu (u, v) bağımsız değişkenlerine bağlı bir kaynak fonksiyonudur. Bir sonraki hedefimiz (3.8) denkleminde eski (ξ, τ) bağımsız değişkenlerinin yok edilmesidir. u ve v ye uygulanan ∂_τ ve ∂_ξ kısmi türevleri yardımıyla burada verilmiştir. Bundan dolayı, bu hedef u ve v 'nin (ξ, τ) değişkenlerinin fonksiyonu olarak belirlenebilmesi ile gerçekleştirilebilir. Bu simetrisinin yörüngeleri çalışması adımı, Miller $\xi(u, v)$ ve $\tau(u, v)$ ters fonksiyon çiftleri kümesi elde edilmiştir [17].

Zaman-harmonik modal genlikler diğerleri arasında belirli bir durumdur. Miller¹'in listesinde 1 durumuna karşılık gelir [17]. Gerçekten $u = \tau$, $v = \xi$ yerlerine yazıp (3.8) denklemi (2.7)'deki orijinal haline getirilir. (ξ, τ) değişkenleri zaman-harmonik modlarının ayrılmasına yol açacağı aşıkardır. Klein-Gordon denkleminin çözümünde elde edilen denklemler bizi Bessel diferansiyel denklemlerine götürmektedir. Bu durum göz önünde bulundurularak Bessel diferansiyel denklemine ve denklemin çözümünden elde edilecek Bessel fonksiyonuna bir bakalım.

3.2 Bessel Diferansiyel Denklemi ve Çözümü

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0 \quad (3.9)$$

denkleme, p 'inci mertebeden Bessel diferansiyel denklemi denir. Burada p , herhangi bir sabit sayı, bir parametredir. Bu denklemin çözümüne de, p 'inci mertebeden Bessel fonksiyonu denir. Hemen ifade edelim ki biz burada p 'nin yalnız $p \geq 0$ olan reel değerlerini göz önüne alacağız ve p 'nin bu değerlerine karşılık olan (3.9) denkleminin çözümünü veren Bessel fonksiyonlarını bulmaya çalışacağız [18].

3.2.1 Sıfırıncı Mertebeden Bessel Diferansiyel Denklemi

Eşitlik (3.9)'un çözümünde önce $p = 0$ durumunu göz önüne alalım. Bu durumda Bessel diferansiyel denklemi,

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0 \quad (3.10)$$

şeklini alır. Bu denkleme, sıfırıncı mertebeden Bessel diferansiyel denklemi denir. Açıkça görülmektedir ki, $x = 0$ noktası denklem (3.10)'un bir düzgün tekil noktasıdır. Burada, kolaylık olsun diye yalnız $x \geq 0$ için çözüm bulmaya çalışacağız.

Önceden biliyoruz ki, $a_0 \neq 0$ olmak üzere, (3.10) denkleminin çözümü,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = x^r \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) \quad (3.11)$$

¹ EK-B'de bulunan listede yer almaktadır.

şeklinde bir Frobenius serisidir. Burada r ve a_n katsayılarının belirlenmesi gerekmektedir [18]. Bunun için sıra ile y 'nin birinci ve ikinci türevleri alınır ve eşitlik (3.10)'da yerlerine konulursa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0$$

elde edilir. Yeniden düzenlenirse,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+r)(n+r-1) + (n+r)] x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0$$

veya

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)^2 x^{n+r-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r-1} = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$r^2 a_0 x^{r-1} + (1+r)^2 a_1 x^r + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n+r)^2 x^{n+r-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r-1} = 0$$

veya

$$r^2 a_0 x^{r-1} + (1+r)^2 a_1 x^r + \sum_{n=2}^{\infty} [a_n (n+r)^2 + a_{n-2}] x^{n+r-1} = 0$$

elde edilir. x 'in aynı üslerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse,

$$\text{i.} \quad r^2 a_0 = 0, \quad a_0 \neq 0$$

$$\text{ii.} \quad (1+r)^2 a_1 = 0$$

$$\text{iii.} \quad (n+r)^2 a_n + a_{n-2} = 0, \quad n \geq 0$$

bulunur. Görülüyor ki a_n katsayıları, r 'nin ve n 'nin fonksiyonlarıdır. Birinci denklem indisel denklemdir. $a_0 \neq 0$ olması nedeniyle buradan $r^2 = 0$ veya indisel kökler $r_1 = r_2 = 0$ bulunur. İkinci eşitlikten $a_1 = 0$ elde edilir [18].

Üçüncü eşitlik ise,

$$a_n(r) = -\frac{a_{n-2}(r)}{(n+r)^2}, \quad n \geq 2 \quad (3.12)$$

katsayılar arasındaki genel bağıntıyı veren rekürans formülünü tarif eder. Burada önce $r_1 = 0$ değeri göz önüne alınarak, bütün $a_n(r)$ değerleri hesaplanır ve bu değerler eşitlik (3.11)'de yerlerine konularak $y_1(x)$ elde edilir. Bunun için, önce eşitlik (3.12)'den $a_3 = a_5 = \dots = a_{2n+1} = 0$ bulunur. Bu demektir ki, bütün tek indisli katsayılar sıfırdır. Bu durumda, eşitlik (3.12)'de tekrar yazılırsa,

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}, \quad n \geq 2$$

veya $n = 2m$ alınarak,

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m)^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

yazılabilir. Buradan,

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{(2.2)^2} = \frac{a_0}{(2.2)^2 \cdot 2^2} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2^2}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{(2.3)^2} = -\frac{a_0}{(2.3)^2 \cdot 2^4 \cdot 2^2} = -\frac{a_0}{2^6 \cdot (2.3)^2}$$

$$a_8 = -\frac{a_6}{(2.4)^2} = \frac{a_0}{(2.4)^2 \cdot 2^6 \cdot (2.3)^2} = \frac{a_0}{2^8 \cdot (2.3.4)^2}$$

$\vdots$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} \cdot (m!)^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

bulunur. Bütün bu değerler eşitlik (3.11)'de yerlerine konursa,

$$y_1(x) = a_0 \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} \right], \quad \infty > x > 0 \quad (3.13)$$

elde edilir. Böylece (3.10) denkleminin birinci çözümü bulunmuş olur. Burada, köşeli parantez içinde kalan fonksiyon $J_0(x)$ ile gösterilirse,

$$J_0(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m}, \quad x > 0 \quad (3.14)$$

olur. Bu şekilde tarif edilen $J_0(x)$ fonksiyonuna, sıfıncı mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu denir [17].

Açıkça görülüyor ki, (3.10) denkleminin çözümü olan $J_0(x)$ fonksiyonu, $x = 0$ noktasında analitiktir ve x 'in bütün değerleri için (3.14) serisi yakınsaktır.

Bilindiği üzere, $r_1 = r_2$ olduğu zaman (3.10) denklemi şeklinde değişken katsayılı bir diferansiyel denklemin, $a_0 = 1$ özel değeri için, lineer bağımsız iki çözümü,

$$y_1(x) = x^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right]$$

ve

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{r_2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1) x^n \quad (3.15)$$

dır. $a_0 = 1$ için $y_1(x) = J_0(x)$ olduğuna göre, şimdi amacımız ikinci çözüm $y_2(x)$ fonksiyonunu bulmaktır. Burada problem $b_n(r_1)$ in bulunmasıdır [17].

$b_n(r_1)$ in değerlerini bulmak için birkaç yöntem izlenebilir. Bunlardan birisi, (3.15) denklemi ile ifade edilen $y_2(x)$ fonksiyonunun doğrudan eşitlik (3.10)'da yerine konması ve buradan $b_n(r_1)$ 'in bulunmasıdır. İkinci yol ise $a'_n(r_1) = \frac{da_n}{dr}$ değerini hesaplamak ve $b_n(r_1) = a'_n(r_1)$ olmasından yararlanmaktır. Bunun için önce yukarıda

bulunan ii numaralı $(1+r)^2 a_1(r) = 0$ bağıntısını tekrar göz önüne alalım. Burada $r_1 = 0$ için $a_1(0) = 0$ ve $a_1'(0) = 0$ olduğu göz önünde tutularak, (3.12) yineleme formülünden,

$$a_3'(0) = a_5'(0) = \dots = a_{2n+1}'(0) = 0$$

olduğu açıkça görülmektedir. Geriye kalan çift indisli katsayıların birinci türevleri ise aşağıdaki şekilde bulunur. Bunun için önce (3.12) rekürans formülü, $n = 2m$ alınarak tekrar yazılırsa,

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m+r)^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

olur. Buradan,

$$a_2 = -\frac{a_0}{(2+r)^2}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{(4+r)^2} = \frac{a_0}{(4+r)^2(2+r)^2}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{(6+r)^2} = -\frac{a_0}{(6+r)^2(4+r)^2(2+r)^2} = -\frac{a_0}{2^6(2.3)^2}$$

$\vdots$

$$a_{2m} = -\frac{a_0}{(2m+r)^2(2m-2+r)^2 \dots (4+r)^2(2+r)^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

bulunur [18].

(3.16) rekürans formülünden $a_{2m}'(0)$ 'ın değerini bulabilmek için önce $\frac{a_{2m}'}{a_{2m}}$ değerini

bulalım.

$$\frac{a_{2m}'}{a_{2m}} = -2 \left(\frac{1}{2m+r} + \frac{1}{2m-2+r} + \dots + \frac{1}{4+r} + \frac{1}{2+r} \right)$$

burada $r = 0$ konursa

$$a'_{2m}(0) = -2 \left(\frac{1}{2m} + \frac{1}{2(m-1)} + \frac{1}{2(m-2)} + \dots + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) a_{2m}(0)$$

elde edilir. $a_{2m}(0)$ da a_0 gibi keyfi bir sabit sayı olduğundan bu katsayı yerine,

$$a_{2m}(0) = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} (m!)^2}$$

değeri yazılırsa,

$$a'_{2m}(0) = - \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{(m-1)} + \frac{1}{(m-2)} + \dots + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right) \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} (m!)^2}$$

elde edilir. Burada,

$$H_m = \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} + \dots + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1$$

ile gösterilirse,

$$a'_{2m}(0) = -H_m \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} (m!)^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.16)$$

bulunur. Yukarıda değindiğimiz gibi, $b_n(0) = a'_n(0) = a'_{2m}(0)$ olduğundan, eşitlik (3.15)'de $b_n(0)$ yerine $a'_{2m}(0)$ 'ın bulunan bu değeri konulabilir. Bu durumda eşitlik (3.16)'da a_0 yerine $a_0 = 1$ özel değeri alınırsa,

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m}, \quad x > 0 \quad (3.17)$$

bulunur.

2.Yol

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1) x^n \quad (3.15)$$

ile önerilen çözümün doğrudan eşitlik. (3.9)'da yerine koyularak $b_n(r_1)$ 'in bulunmasıdır.

Eşitlik (3.15)'in x 'e göre türevlerini alalım,

$$y_2'(x) = y_1'(x) \ln x + \frac{y_1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1) x^{n-1}$$

$$y_2''(x) = y_1''(x) \ln x + \frac{2y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-2}$$

Bu eşitlikleri (3.9) denkleminde yerine yazalım. Bessel denkleminin $p = 0$ 'da sonucu,

$$(x^2 y_1'' + x y_1' + x^2 y_1) \ln x + 2x y_1' + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+2} = 0$$

şeklindedir.

$y_1(x)$ Bessel denkleminin bir çözümü olduğundan, $x^2 y_1'' + x y_1' + x^2 y_1 = 0$ 'dır. $y_1'(x)$ denklemde yerine yazılırsa;

$$2x y_1' = 2x \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(n!)^2} \frac{2n x^{2n-1}}{2^{2n}} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{4n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

denklem;

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{4n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} x^n = 0$$

şeklinde bulunur.

Bu denklemde aynı dereceden bilinmeyenlerin (x^n 'in $n = 0, 1, 2, \dots$) katsayılarını sıfıra eşitleyelim.

i. $b_1 = 0$

$$\text{ii.} \quad (-1)^n \frac{4n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + [2n(2n-1) + 2n] b_{2n} + b_{2n-2} = 0$$

$$\therefore b_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{b_{2n-2}}{(2n)^2}$$

Kolaylık olsun diye, $b_0 = 0$ alalım. Matematiksel çıkarım ile;

$$b_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{(n!)^2} n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

olduğu görülür. Böylece lineer bağımsız ikinci çözüm

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{(n!)^2} n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad 0 < x < \infty$$

olur. Buna sıfıncı mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonu denir [19].

$$y_2(x) = \frac{\pi}{2} Y_0(x) + (\ln 2 - \gamma) J_0(x), \quad 0 < x < \infty$$

sıfıncı mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonu, $0 < x < \infty$ için

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{(n!)^2} n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \right\}$$

olarak tanımlanır [19].

Hemen işaret edelim ki, $a_0 = 1$ için bulunan $y_1(x) = J_0(x)$ fonksiyonu, (3.10) denkleminin bir çözümü olduğu halde, burada (3.17) denklemi ile tarif edilen $y_2(x)$ fonksiyonu, $J_0(x)$ ile lineer bağımsız olmadığından, (3.10)'un aranan ikinci çözümü değildir. Buna karşılık $J_0(x)$ ile $y_2(x)$ 'ın bir lineer kombinasyonu olan ve aşağıdaki şekilde tarif edilen

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} [y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_0(x)] \quad (3.18)$$

fonksiyonu, diferansiyel denklemin aranan ikinci çözümüdür. Eşitlik (3.18)'de $y_2(x)$ yerine, (3.17) eşitliğindeki değeri yazılırsa,

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[\left(\gamma + \ln \frac{x}{2} \right) J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m} \right] \quad (3.19)$$

elde edilir [18].

Burada γ ya Euler sabiti denir ve değeri,

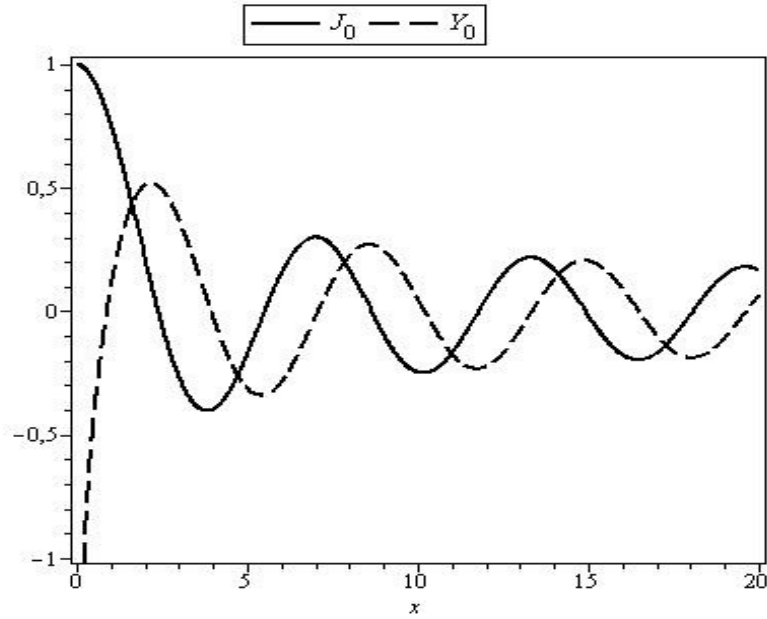
$$\gamma = \lim_m (H_m - \ln m) \approx 0,57721566... \text{'dir.}$$

$a_0 = 1$ özel değeri için, eşitlik (3.10)'un bir çözümü olan $Y_0(x)$ fonksiyonuna, sıfırıncı mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonu denir. Böylece, (3.10) Bessel denkleminin genel çözümü;

$$y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$$

bulunmuş olur. Burada c_1 ve c_2 herhangi iki keyfi sabit sayıdır.

$J_0(x)$ ve $Y_0(x)$ fonksiyonlarının $0 < x < 20$ değerleri için grafikleri Şekil 3.1'de verilmiştir.



Şekil 3.1 $J_0(x)$ ve $Y_0(x)$ 'in grafikleri

3.2.2 p'inci Mertebeden Bessel Diferansiyel Denklemi

Şimdi, $x > 0$ değerleri için p 'inci mertebeden Bessel denkleminin çözümünü bulmaya çalışacağız. Burada p , sıfırdan farklı ve pozitif bir sayıdır. Önce, (3.9) numaralı Bessel diferansiyel denklemini tekrar yazalım [18].

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0$$

Biliyoruz ki, bu denklemin çözümü,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

şeklinde bir fonksiyondur. y 'nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa,

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} \text{ ve } y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

bulunur. y ve y' 'nin türevleri denklemde yerlerine konursa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r+p)(n+r-p) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = 0$$

olur. Burada x 'in aynı dereceye sahip katsayıları sıfıra eşitlenirse,

$$\text{I. } a_0 (r+p)(r-p) = 0, \quad a_0 \neq 0$$

$$\text{II. } a_1 (r+p+1)(r-p+1) = 0$$

$$\text{III. } a_n (r+p+n)(r-p+n) + a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2$$

elde edilir [18]. Buradan $r_1 = p$, $r_2 = p$ ve $a_1 = 0$ bulunur. Üçüncü denklemde $r = r_1 = p$ yazılırsa,

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)}, \quad n \geq 2 \tag{3.20}$$

elde edilir. Görülüyor ki, $a_1 = 0$ olduğundan, bütün tek indisli katsayılar sıfırdır. Çift indisli katsayılar ise, (3.20) rekürans formülünden aşağıdaki şekilde kolayca elde edilir.

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2+2p)} = -\frac{a_0}{2^2(1+p)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(4+2p)} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2!(1+p)(2+p)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6(6+2p)} = -\frac{a_0}{2^6 \cdot 3!(1+p)(2+p)(3+p)}$$

⋮

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{[2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2m)] [(2+2p)(4+2p) \dots (2m+2p)]}$$

nihayetinde buradan,

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m! [(1+p)(2+p) \dots (m+p)]}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

elde edilir. Böylece $r_1 = p$ köküne karşılık olan $y_1(x)$ çözümü

$$y_1(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+p}}{2^{2m} m! [(1+p)(2+p) \dots (m+p)]} \quad (3.21)$$

Eşitlik (3.21)'de $p = 0$ ve $a_0 = 1$ alınırsa, beklendiği üzere $y_1(x)$ fonksiyonu doğrudan $J_0(x)$ fonksiyonunu verir. $y_1(x)$ çözümü, eşitlik (3.21)'de verildiği şekilde ifade edildiği gibi, ayrıca gamma fonksiyonları kullanılarak daha basit ve alışılmış olarak aşağıdaki gibi de verilebilir. Bunun için önce gamma fonksiyonları hakkında bildiklerimizi hatırlatmakta yarar vardır [18]. Tarif olarak,

$$\Gamma(p) = \int e^{-t} t^{p-1} dt, \quad 0 < t < \infty \quad (3.22)$$

dır. Burada p yerine $p+1$ yazılırsa,

$$\Gamma(p+1) = \int e^{-t} t^p dt = \left[e^{-t} t^p \right] - \int (p t^{p-1}) (-e^{-t}) dt$$

$$\text{olur. } \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-t} t^p) = 0 \text{ ve } \lim_{t \rightarrow 0} (e^{-t} t^p) = 0, \quad p > 0$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \tag{3.23}$$

bağıntısı elde edilir. Aynı şekilde,

$$(p+1)\Gamma(p+1) = \Gamma(p+2)$$

$$(p+2)(p+1)\Gamma(p+1) = \Gamma(p+3)$$

$$(p+3)(p+2)(p+1)\Gamma(p+1) = \Gamma(p+4)$$

$\vdots$

$$(p+n)(p+n-1)\dots(p+2)(p+1)\Gamma(p+1) = \Gamma(p+n+1) \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.22)'de, $p = 1$ alınırsa,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

bulunur. (3.23) eşitliği yardımıyla,

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1.1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2.1 = 3!$$

bulunur. Buradan p pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$\Gamma(p+1) = p! \tag{3.25}$$

bağıntısı elde edilir [18].

Ayrıca $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğu görülebilir.

Bu eşitliği Gamma fonksiyonunun tanımından hareketle göstermek mümkündür. Şimdi, (3.21) eşitliğine geri dönelim. Yukarıda görülen (3.24) ve (3.25) eşitliklerini kullanarak ayrıca a_0 için,

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$$

olduğu kabul edilerek, $y_1(x)$ çözümünü diğer bir şekli ile bulmaya çalışalım. Önce $y_1(x)$ 'i yukarıda verildiği gibi tekrar yazalım.

$$y_1(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+p}}{2^{2m} m! [(1+p)(2+p)\dots(m+p)]}$$

Burada yukarıda olduğu gibi, $a_0 = 1$ özel değeri için $y_1(x)$ fonksiyonu genel olarak $J_p(x)$ ile gösterilir. O zaman,

$$J_p(x) = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+p}}{2^{2m} m! [(1+p)(2+p)\dots(m+p)]}$$

veya

$$\begin{aligned} J_p(x) &= \frac{1}{2^p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+p}}{2^{2m} m! \Gamma(p+m+1)} \\ &= \frac{1}{2^p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+p}}{2^{2m} m! (p+m)!} \end{aligned}$$

olur. Yeniden düzenlenirse,

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (p+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p} \quad (3.26)$$

elde edilir. $J_p(x)$ fonksiyonuna p 'inci mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu adı verilir. Burada açıkça ifade edelim ki, bütün $p \geq 0$ değerleri için (3.26) denklemi ile

verilen $J_p(x)$ fonksiyonu, (3.9) denkleminin bir çözümüdür. Bu çözümle lineer bağımsız olan ikinci çözüm, p 'nin değerlerine bağlı olarak değişir.

Eğer p sıfırdan farklı ve aynı zamanda pozitif bir tamsayı değilse, o zaman diferansiyel denklemin $r_2 = p$ ye karşılık olan ikinci çözümü, (3.26) denkleminde p yerine $-p$ koymak suretiyle kolayca bulunur. Bu çözüm $J_{-p}(x)$ ile gösterilir ve değeri

$$J_{-p}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-p} \quad (3.27)$$

olur.

$J_p(x)$ ve $J_{-p}(x)$ fonksiyonları aralarında lineer bağımsız olan iki ayrı çözüm olduğundan, p 'nin yukarıda belirtilen için, (3.9) denkleminin genel çözümü,

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x) \quad (3.28)$$

olur. Burada c_1 ve c_2 iki keyfi sabit sayıdır.

Eğer, p herhangi bir pozitif tamsayı ise, o zaman $J_p(x)$ fonksiyonunun $J_{-p}(x)$ ile orantılı olduğu kolayca görülür. Bu durumda $J_p(x)$ ve $J_{-p}(x)$ fonksiyonları aralarında lineer bağımsız olmadığından $J_{-p}(x)$ yeni bir çözüm değildir. O zaman önceden gördüğümüz metotlardan birini kullanarak, eşitlik (3.26) ile verilen $J_p(x)$ fonksiyonu ile lineer bağımsız olan ikinci çözüm bulunabilir. p 'inci mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

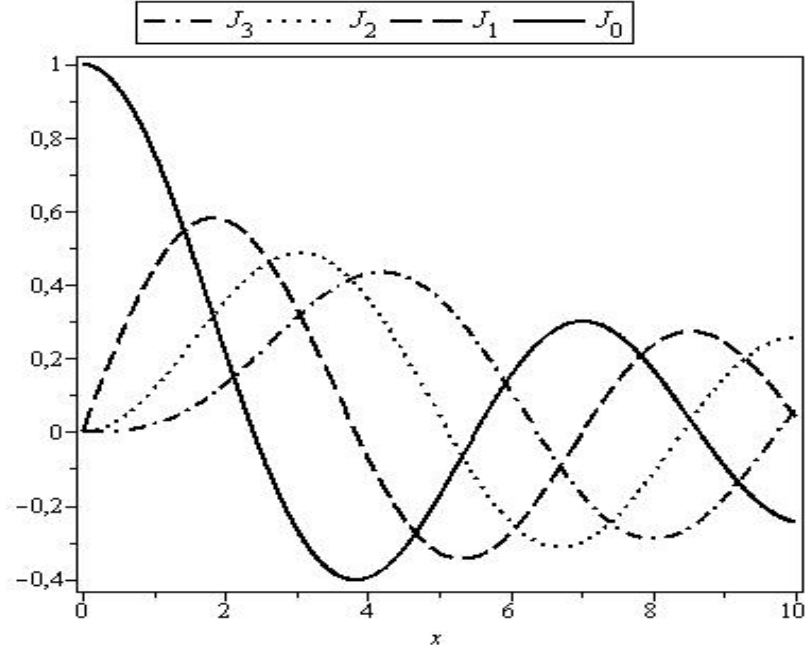
$$Y_p(x) = \frac{2}{\pi} J_p(x) \left(\ln \frac{x}{2} \gamma \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(p-m-1)!}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-p} \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(p+m)!} \left(\sum_{k=1}^{p+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

Böylece, p herhangi bir pozitif tamsayı olduğu zaman (3.9) denkleminin genel çözümü,

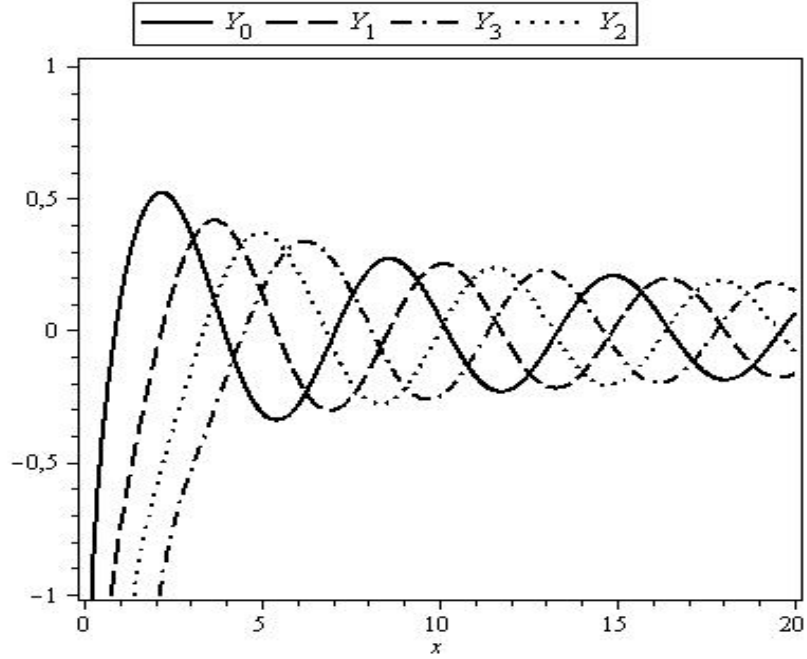
$$y(x) = A J_p(x) + B Y_p(x) \quad (3.29)$$

olur. Burada A ve B herhangi iki keyfi sabit sayıdır.

Bir uygulama olmak üzere $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ ve $J_3(x)$ fonksiyonlarının grafikleri ile $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ ve $Y_3(x)$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıda verilmiştir [18].



Şekil 3.2 $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ ve $J_3(x)$ fonksiyonlarının grafiği



Şekil 3.3 $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ ve $Y_3(x)$ fonksiyonlarının grafikleri

sıra ile, Şekil 3. 2 ve Şekil 3. 3'te birlikte verilmiştir.

Yukarıda verilen $J_0(x)$ ve $Y_0(x)$ fonksiyonlarının grafiklerine yakından bakacak olursak, görürüz ki, x 'in büyük değerleri için bu eğriler sönümlü kosinüs ve sinüs eğrilerini andırmaktadır. Diğer taraftan, $y'' + y = 0$ denkleminin çözümleri $\cos x$ ve $\sin x$ olduğundan, (3.10) denkleminin

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0$$

şeklinde yazılması durumunda, x 'in büyük değerleri için (3.10) denkleminin, $y'' + y = 0$ denklemine nasıl yaklaştığı ve bu eğrilerin de, sinüs ve kosinüs eğrilerine nasıl yaklaştığı açıkça görülmektedir [18].

3.2.3 Değişik Mertebelerden Bessel Fonksiyonları Arasındaki Bağıntılar

Bessel fonksiyonları arasında değişik rekürans formülleri vardır. Bunlar kısaca aşağıdaki şekilde bulunabilir.

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

fonksiyonu, x in her değeri için yakınsak olduğundan, türevi alınırsa,

$$J'_p(x) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+p)}{m! \Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p-1}$$

elde edilir.

$$xJ'_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+p)}{m! \Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

$$xJ'_p(x) = p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+p)}{m! \Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p} + 2m \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+p)}{m! \Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

$$= pJ_p(x) + x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m! \Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p+1}$$

Buradan,

$$\text{I. } xJ'_p(x) = pJ_p(x) - xJ_{p+1}(x)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\text{II. } xJ'_p(x) = -pJ_p(x) - xJ_{p-1}(x)$$

$$\text{III. } J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x}J_p(x) - J_{p-1}(x)$$

$$\text{IV. } J'_p = \frac{1}{2}(J_{p-1} - J_{p+1})$$

elde edilir. Bu formüller $Y_p(x)$ için de doğrudur.

Bu formüllerin ne kadar faydalı olduğunu anlamak için, (iii) numaralı formülde $p = 1$ konursa,

$$J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x)$$

elde edilir. Eğer J_0 ve J_1 fonksiyonları biliniyorsa $J_2(x)$ ve aynı şekilde, n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere, $J_n(x)$ bulunabilir.

3.2.4 Bessel Denklemine İndirgenebilen Denklemler

Yukarıda verilen (3.9) numaralı Bessel diferansiyel denklemine indirgenebilen ve çözümleri Bessel fonksiyonları cinsinden ifade edilebilen bazı diferansiyel denklemler ve çözümleri aşağıda özet olarak ele alınmıştır. Örnek olarak,

$$x^2 y'' + (x + 2bx^p)y' + [c + dx^{2q} + b(a + p - 1)x^p + b^2 x^{2p}]y = 0 \quad (3.30)$$

denklemini ele alalım. Bazı şartlar altında bu denklemin Bessel diferansiyel denklemine indirgenmesi ve bilinen yöntemler yardımıyla genel çözümün bulunması mümkündür.

Bu şartlar (Kural-1)

$$(1 - a)^2 \geq 4c \text{ ve } d \neq 0, \quad p \neq 0, \quad q \neq 0$$

ve denklemin genel çözümü,

$$y(x) = x^\alpha e^{-\beta x^\beta} \left[c_1 J_n(\lambda x^q) + c_2 Y_n(\lambda x^q) \right]$$

bulunur. Burada,

$$\alpha = \frac{1-a}{2}, \beta = \frac{b}{p}, \lambda = \frac{\sqrt{|d|}}{q}, m = \frac{\sqrt{(1-a)^2 - 4c}}{2q}$$

dır.

Eğer $d < 0$ ise J_n yerine I_n ve Y_n yerine K_n kullanmak adettir.

İkinci bir kural (Kural-2) olarak eğer, $(1-r)^2 \geq 4b$, $a \neq 0$ ve $s > r-2$ veya $b=0$ koşulları geçerli ise, aşağıda verilen denklem

$$\frac{d}{dx} \left(x^r \frac{dy}{dx} \right) + (ax^5 + bx^{r-2})y = 0$$

Bessel diferansiyel denkleminde indirgenebilir ve genel çözümü;

$$y(x) = x^\alpha \left[c_1 J_n(\lambda x^r) + c_2 Y_n(\lambda x^r) \right]$$

bulunur [18]. Burada,

$$\alpha = \frac{1-r}{2}, \beta = \frac{2-r+s}{2}, \lambda = \frac{2\sqrt{|a|}}{2-r+s}, m = \frac{\sqrt{(1-r)^2 - 4b}}{2-r+s}$$

elde edilir.

Eğer, $\alpha < 0$ ise J_n yerine I_n ve Y_n yerine K_n konulur. Ayrıca, n tamsayı değilse, istenildiği takdirde Y_n yerine J_{-n} ve K_n yerine I_{-n} kullanılabilir [18].

Örnek 3.1

$$y'' + y = 0$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Bu denklemin genel çözümünün,

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

olduğunu biliyoruz. Ancak adı geçen diferansiyel denklem Kural-2'nin özel bir uygulamasıdır. Sabit değerler,

$$r = 0, \quad s = 0, \quad a = 1, \quad b = 0$$

ve

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad r = 1, \quad \lambda = 1, \quad n = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre, denklemin genel çözümü

$$y(x) = d_1 \sqrt{x} J_{\frac{1}{2}}(x) + d_2 \sqrt{x} J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

bulunur. Burada d_1 ve d_2 herhangi iki keyfi sabit sayıdır. Aynı denklem için değişik görünüm altında bulunan her iki genel çözüm şüphesiz aynıdır [18]. Bu bilgiler dahilinde modal genlikler bir sonraki alt bölümde ele alınacaktır.

3.3 Modal Genliklerin Bessel Fonksiyonu Yardımıyla Belirlenmesi

Miller¹'in listesinden (2) durumuna detaylı bir göz atalım.

$$\tau = u \cosh v, \quad \xi = u \sinh v, \quad 0 \leq u \leq \infty, \quad -\infty \leq v \leq \infty \quad (3.31)$$

olarak alınsın. Önce $u(\xi, \tau)$ ve $v(\xi, \tau)$ değişkenlerine geçiş yapılmalıdır. Bundan dolayı,

$$\tau^2 = u^2 \cosh^2 v \text{ ve } \xi^2 = u^2 \sinh^2 v,$$

$$\tau^2 - \xi^2 = u^2 \underbrace{(\cosh^2 v - \sinh^2 v)}_1 = u^2$$

ve böylece

$$u^2 = \tau^2 - \xi^2 \Rightarrow u = \sqrt{\tau^2 - \xi^2}, \quad 0 \leq u < \infty \quad (3.32)$$

elde edilir. Buna ilaveten,

$$\frac{\xi}{\tau} = \frac{u \sinh v}{u \cosh v} = \tanh v$$

¹ EK-B'de bulunan listede yer almaktadır.

yani,

$$\arctan h \frac{\xi}{\tau} = v, \quad -\infty < v < \infty \quad (3.33)$$

yazılabilir ve bu denklemi de

$$v = \arctan h \frac{\xi}{\tau} \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{\tau + \xi}{\tau - \xi} \quad (3.34)$$

şeklinde daha kullanışlı hale getirilebilir. İfade bu hale,

$$\arctan hx \equiv \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad |x| < 1$$

özelliğinden yararlanılarak gelmiştir.

Burada, $\arctan h \frac{\xi}{\tau} \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{\xi}{\tau}}{1 - \frac{\xi}{\tau}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tau + \xi}{\tau - \xi} \right)$ olarak hesaplanmıştır. Şimdi, $u(\xi, \tau)$ ve

$$v(\xi, \tau)'ye \text{ ait kısmi diferansiyeller hesaplanır. } u = \sqrt{\tau^2 - \xi^2}, \quad v = \arctan h \frac{\xi}{\tau} \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{\tau + \xi}{\tau - \xi}$$

olduğu hatırlanırsa,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \sqrt{\tau^2 - \xi^2} = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}} = \frac{u \cosh v}{u} = \cosh v \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\tau + \xi}{\tau - \xi} \right) = -\frac{\xi}{\tau^2 - \xi^2} = -\frac{u \sinh v}{u^2} = -\frac{\sinh v}{u} \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \cosh v = \frac{\partial v}{\partial \tau} \sinh v = -\frac{\sinh^2 v}{u} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(-\frac{\sinh v}{u} \right) = \frac{\sinh 2v}{u^2} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{\tau^2 - \xi^2} = -\frac{\xi}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}} = -\frac{u \sinh v}{u} = -\sinh v \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\tau + \xi}{\tau - \xi} \right) = \frac{\tau}{\tau^2 - \xi^2} = \frac{u \cosh v}{u^2} = \frac{\cosh v}{u} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = -\frac{\cosh^2 v}{u} \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = \frac{\sinh 2v}{u^2} \quad (3.42)$$

elde edilir [5].

Bütün bu kısmi diferansiyel sonuçları (3.8) Klein-Gordon diferansiyel denkleminde yerine yazılsın. Aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left[\cosh^2 v - \sinh^2 v \right] \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \left[\frac{\sinh^2 v}{u^2} - \frac{\cosh^2 v}{u^2} \right] \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \\ & + \left[-\frac{\sinh^2 v}{u} + \frac{\cosh^2 v}{u} \right] \frac{\partial f}{\partial u} + \left[\frac{\sinh 2v}{u^2} - \frac{\sinh 2v}{u^2} \right] \frac{\partial f}{\partial v} + \\ & + 2 \left[-\frac{\sinh v \cosh v}{u} + \frac{\sinh v \cosh v}{u} \right] \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + f = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

sadeleştirmelerin ardından

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} + 1 - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) f(u, v) = 0 \quad (3.44)$$

kısmi türevli diferansiyel denklemi (KTDD) elde edilir. Bernoulli'nin çarpım metodu u ve v değişkenlerine uygulanarak $f \equiv f(\xi, \tau) = f[u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)] \equiv f(u, v) = U(u)V(v)$ yazılır. Bu son değişkenlerine ayrılmış çarpımın (3.44) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} + 1 - \frac{1}{u^2} \underbrace{\frac{V''(v)}{V(v)}}_{\alpha^2} \right) U(u) = 0 \quad (3.45)$$

kısmi diferansiyeli elde edilir. Yani,

$$U_p''(u) + \frac{1}{u}U_p'(u) + \left(1 - \frac{\alpha^2}{u^2}\right)U_p(u) = 0$$

$$V_p''(v) - \alpha^2 V_p(v) = 0 \quad (3.46)$$

(3.46) adi diferansiyel denklem çiftine varılır. Burada α değişkenlerine ayrılma metodunun bir sabitidir. (3.46) denkleminin $U(u)$ fonksiyonuna ait adi diferansiyel denklem kısmındaki Bessel diferansiyel denkleminden Bessel fonksiyonu, $V(v)$ fonksiyonuna ait olan kısımdan ise (matematiksel ve fiziksel olarak dikkate değer olmasından dolayı üstel gelmesi istenen) bir üstel fonksiyon elde edilir. Her iki denklemde iki lineer bağımsız çözüme sahiptir [5].

$V(v)$ fonksiyonu α keyfi sabit bir parametre olmak üzere $V''(v) = \alpha^2 V(v)$ yazılarak

$$V(v) = a_p e^{\alpha v} + b_p e^{-\alpha v}$$

yazılabilir. Burada $a_p, b_p \in \Re$ olmak üzere keyfi reel parametrelerdir. Fakat aşağıda f fonksiyonu oluşturulacağı için bu keyfi parametreler şimdilik ihmal edilecektir. Yani,

$$V(v) = e^{\pm pv} \quad (3.47)$$

olarak ifade edilebilir.

Ardından, $U(u)$ fonksiyonu Bessel diferansiyel denklemini verir

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} + 1 - \frac{\alpha^2}{u^2} \right) U(u) = 0 \quad (3.48)$$

Bu denklem lineer bağımsız iki çözüme sahiptir,

$$U(u) = A_p J_p(u) + B_p Y_p(u) \quad (3.49)$$

burada A_p ve B_p keyfi sabitlerdir. Denklemden, J ye birinci tür Bessel fonksiyonu, Y ye ikinci tür Bessel fonksiyonu adı verildiği biliniyor. Oysa ikinci tür Bessel fonksiyonu $Y(x)$, $x \rightarrow 0$ iken $Y(x) \rightarrow -\infty$ olmaktadır. Yani orijin etrafında ıraksaktır. Bu istenmeyen bir ıraksaklık durumudur. Çözümün seri açılımını bulabilmek için fonksiyonlarımızın yakınsak olması gerekmektedir. Şu halde ikinci çeşit Bessel

fonksiyonu $Y(x)$ den kurtulmak için keyfi katsayısı $B_p = 0$ seçilmelidir. Nihayetinde $U(u)$ çözümü A_p keyfi sabit olmak üzere

$$U(u) = A_p J_p(u) \quad (3.50)$$

olarak elde edilmiş olur.

Şimdi bu üstel fonksiyon ve Bessel fonksiyonunun çarpımı olarak ifade edilen f fonksiyonunu yazalım.

$$f_p(\xi, \tau) = \left[C_p \left(\frac{\tau - \xi}{\tau + \xi} \right)^{\frac{p}{2}} J_p \left(\sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right) + D_p \left(\frac{\tau + \xi}{\tau - \xi} \right)^{\frac{p}{2}} J_p \left(\sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right) \right] \quad (3.51)$$

çözümü elde edilir. Çözümün $\xi = 0$ 'a göre simetrik olduğunu görmek kolaydır. Bu noktadan sonra artık $\xi \geq 0$ uzayının mümkün olduğu ve keyfi sabit'in ihmal edildiği, α keyfi sabit bir parametre olmak üzere,

$$f_p(\xi, \tau) = \left(\frac{\tau - \xi}{\tau + \xi} \right)^{\frac{p}{2}} J_p \left(\sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right) \quad (3.52)$$

denklemleri ile çalışılacaktır.

Fiziksel olarak bu, TE modları için H_{zm} , TM modları için E_{zm} eksenel alan bileşenlerinin modal genliğidir. (2.6) ve (2.12) denklemleri hatırlanarak enlemsel alan bileşenlerinin modal genlikleri aşağıdaki gibi gösterilsin:

$$A_p(\xi, \tau) = -\partial_\tau f_p \text{ ve } B_p(\xi, \tau) = \partial_\xi f_p \quad (3.53)$$

Bu türevlerdeki basit işlemlerle

$$\begin{aligned} A_p(\xi, \tau) &= -\partial_\tau f_p = (-1/2)(f_{p-1} - f_{p+1}) \\ B_p(\xi, \tau) &= \partial_\xi f_p = (-1/2)(f_{p-1} + f_{p+1}) \end{aligned} \quad (3.54)$$

kısmi türev sonuçları elde edilir [5].

WALSH FONKSİYON SİNYALLERİ

4.1 Giriş

Walsh fonksiyonları, esas olarak Fourier analizinde kullanılan kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının sayısal bir şekilde ifade edilmesidir. Fourier serileri seçilmiş frekanslardaki saf kosinüs ve sinüs dalgalarının toplamı olarak oluşturulan dalga işaretidir. Fourier serileri karmaşık işlemler içerir ve yüksek matematik bilgisi gerektirir. Walsh fonksiyonlarında birkaç ana temel düşünce esas alınarak çalışılabilir [20].

Genellikle haberleşmede, işaret işlemede, görüntü işlemede, dalga uygulamalarında, spektrum ölçümlerinde kullanılır. Bununla birlikte Walsh fonksiyonları, harmonik analizinde de kullanılan bir yöntemdir [21].

Walsh fonksiyonları, sadece $+1$ ve -1 genlik değeri alan kare dalga işaretlerinin düzenlenmiş tümüyle dik bir kümeden oluşmaktadır ve birçok özelliğinin trigonometrik serilere benzemektedir. Sınırlandırılmış bir zaman aralığında tanımlanır. Parçalı sabit dik fonksiyondur. Sinüs ve kosinüs fonksiyonları gibi iki bağımsız değişken, Walsh fonksiyonlarının tanımlanmasında yeterlidir. Bu iki değişkenden biri t (bir zaman periyodu), diğeri ise n (frekansla ilişkili olarak sıra numarası)'dır. Walsh fonksiyonu $Wal(n, t)$ olarak gösterilir.

4.2 Walsh Fonksiyon Kümesi

Walsh fonksiyonu T 'nin temel zaman olarak adlandırıldığı $[0, T]$ sonlu zaman aralığında tanımlanır. Kümedeki Walsh fonksiyonlarının zamana bağımlılığı H_N Hadamard matrisi ile belirlenir, N lineer bağımsız Walsh fonksiyonlarının bir kümesine

genellenebilir. Hadamard matrisinin en düşük derecesi $N = 2$ 'dir ve aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$H_2 = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

H_2 'nin her satırı mümkün olabilecek iki Walsh fonksiyonundan birini tanımlar. N matris derecesinin 2 değerinin anlamı T temel zaman $T/2$ şeklinde iki eşit alt aralığa ayrılmıştır. Walsh fonksiyonunun uygun değerlerini belirleyen satırdaki $+1$ veya -1 değerleri $N = 2$ ile zamanın bölünmesinden sonra elde edilen alt aralıklardaki zaman eksenini boyunca atanmış olmalıdır.

$N = 4$ derecesine sahip sıradaki Hadamard matrisi H_2 matrisinden matris eşitlik (4.1)'de her bir sayının yer değiştirmesi ile elde edilir.

$$H_4 = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Bu durumda, T temel zaman $N = 4$ ile bölünmüştür ki bu $0 \leq t \leq T$ 'yi her biri $T/4$ olan 4 eşit alt aralığa böler. Bu değiştirme işlemi Walsh fonksiyonunun istenen kümesini elde etmek için tekrar edilebilir. Walsh fonksiyonlarının her kümesi dijital haberleşmenin gelişmesi için çalışan teorik esaslar gibi durumlarda ortogonaldır. H_8 matrisi tarafından üretilen küme Şekil 4.1'deki gibi gösterilebilir [22].

4.3 Sayısal Sonuçlar

τ_i ve $\delta\tau$ keyfi parametreleri için

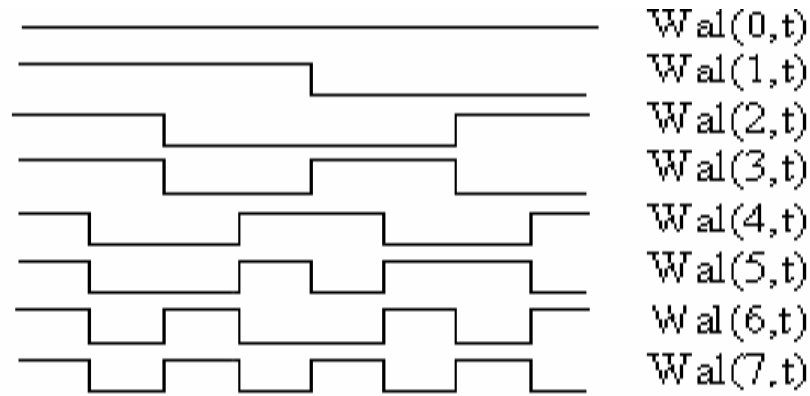
$$W_i(\xi, \tau) = F_i(\xi, \tau) - F_i(\xi, \tau)|_{\tau_i=\tau_j}, \quad \tau_j = \tau_i + \delta\tau$$

formülü $\tau_i \leq \tau \leq \tau_i + \delta\tau$ zaman aralığında $z=0$ tesir kesitinde bir dikdörtgensel darbeyle

$$w_i = \begin{cases} 0, & \tau < \tau_i \\ 1, & \tau_i \leq \tau \leq \tau_i + \delta\tau \\ 0, & \tau > \tau_i + \delta\tau \end{cases}$$

eşitliğine uygulanan uyarılmış sinyal için açık bir çözüm tanımlar. Her Walsh fonksiyon sinyali dikdörtgensel darbelerin bir dizisidir ve şu şekilde yazılır;

$$W(\zeta, \tau) = \sum_{i=0}^{N-1} S_i W_i(\zeta, \tau) \quad (4.3)$$



Şekil 4.1 H_8 ile üretilen walsh fonksiyon kümesinin grafiği

eğer normalize edilmiş temel zaman 1 ise $\tau_i = i/N$, $\delta\tau = 1/N$. H_N Hadamard matrisinin satırındaki uygun değerlere göre istenen Walsh fonksiyonunu tanımlayan S_i katsayıları +1 veya -1'e eşittir. $Wal(5, \tau)$ Walsh fonksiyon sinyali aşağıdaki sayısal örnekler için seçilmiştir. (2.6) ve (2.12) eşitliklerdeki modal genliklerin ve onun kısmi türeviyle uyumu aşağıda verilmiştir [22].

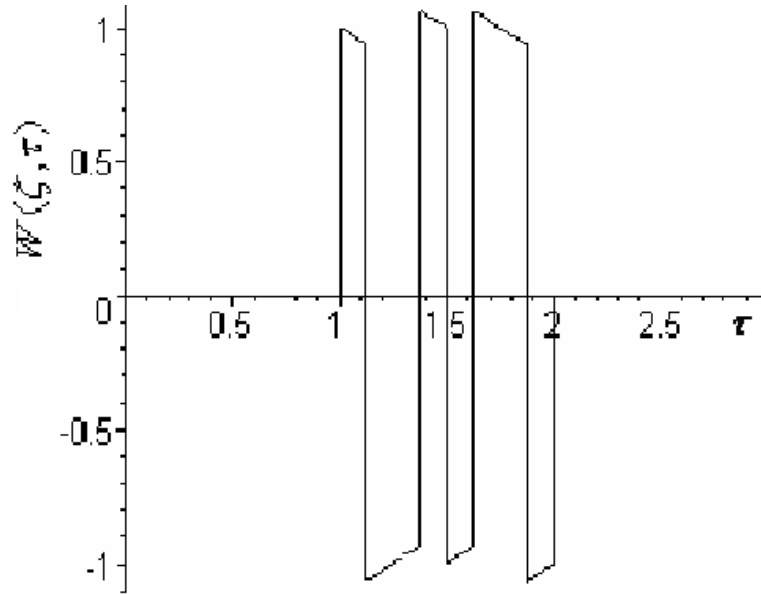
Çizelge 4.1 $W(\zeta, \tau)$ ile birlikte TE ve TM zaman dönemi modlarının ζ ve τ 'ya göre kısmi türevleri

	$W(\zeta, \tau)$	$\partial W / \partial \zeta$	$-\partial W / \partial \tau$
$TE :$	$h_m(v_m z, v_m ct)$	I_m^h / v_m	V_m^h / v_m
$TM :$	$h_m(\kappa_n z, \kappa_n ct)$	V_n^e / κ_n	I_n^e / κ_n

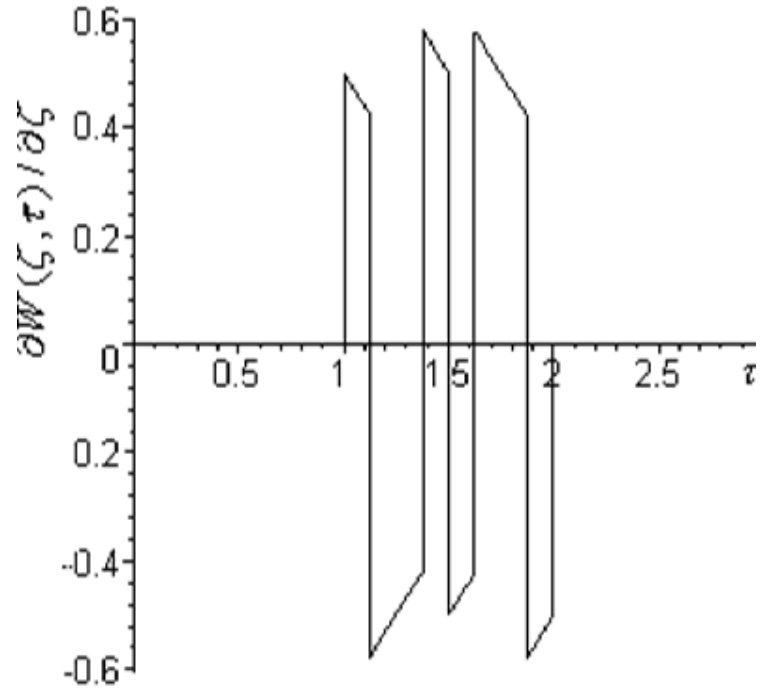
Farz edelim ki, dijital sinyal $\zeta = 0$ dalga kılavuzu kesitine bir birim olarak yerleştirilsin ve $\tau = 0$ 'da başlasın. Birim sadece boylamsal alan bileşenine hareket ettirebilir. Böylece enine alanlar $\zeta = 0$ 'da sıfırdır. Sinyal $O\xi$ eksenini boyunca yayılırken, boylamsal alan bileşenleri enine alanlar hareket eder.

Bütün modal genlikler $\zeta = 1$ 'deki dalga kılavuzu kesitinde elde edilen zaman fonksiyonları olarak Şekil 4.4'te gösterilmiştir. Başlıca düşük-frekanslı evre kayması olarak dalga kılavuzuyla elde edilen dijital sinyallerin bozulmasına sebep olur.

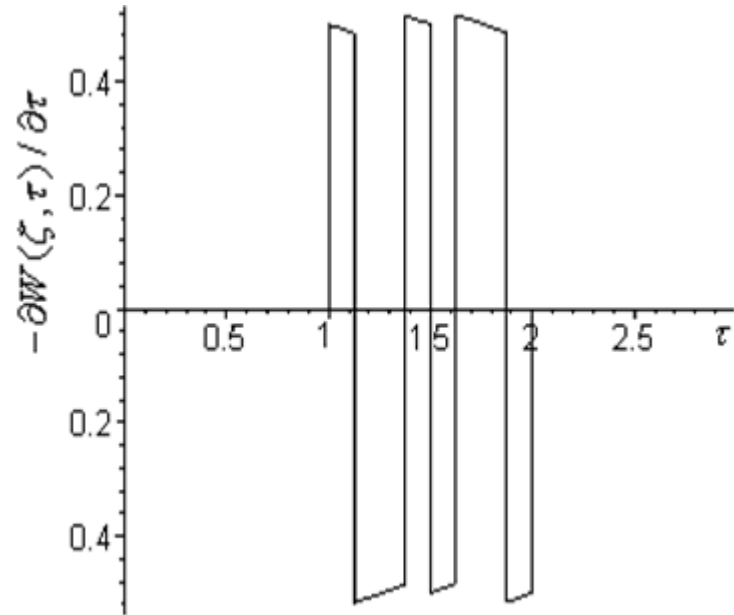
$\tau = 1$ 'e sabitleyelim ve modal genlikleri ζ koordinatının fonksiyonları olarak hesaplayalım. Sonuçlar Şekil 4.7'de gösterildi. Yayılım işleminde dijital sinyal başka çeşit bir değişime uğrar. Buna da dalga kılavuzu yayılımına sebep olur fakat geciken düşük frekanslı faz kayması ile ilgili olarak aşağıdaki grafikler verilmiştir [22].



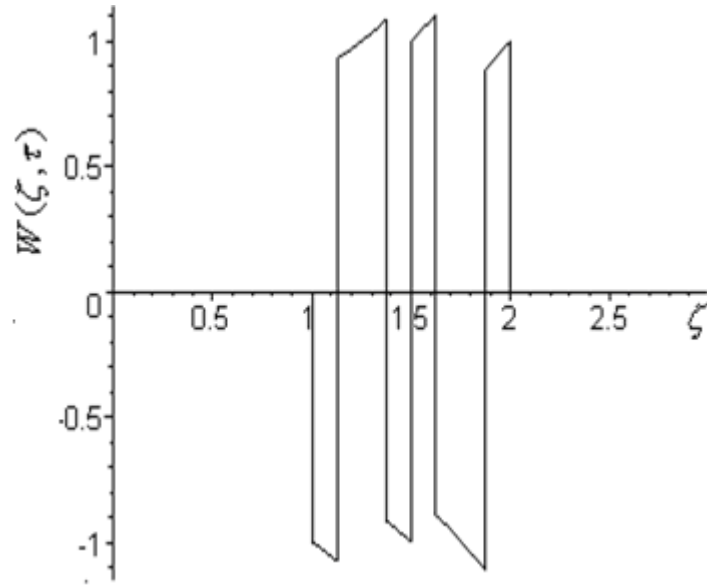
Şekil 4.2 Eksenel bileşenin modal genliği $h_m(\xi, \tau)$ veya $e_n(\xi, \tau)$ τ 'nin fonksiyonunun grafiği



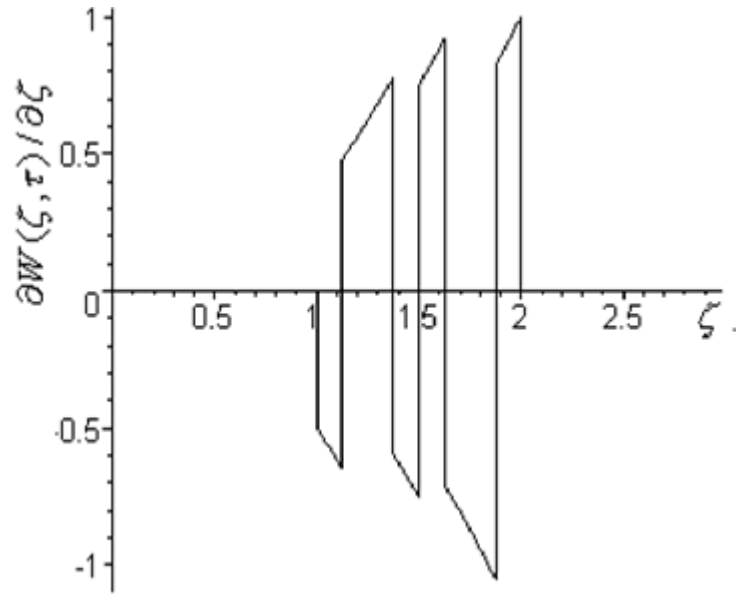
Şekil 4.3 Enlemsel bileşenin modal genliği τ 'nün fonksiyonu olarak $\partial W(\zeta, \tau) / \partial \zeta$ 'ye karşılık grafiği



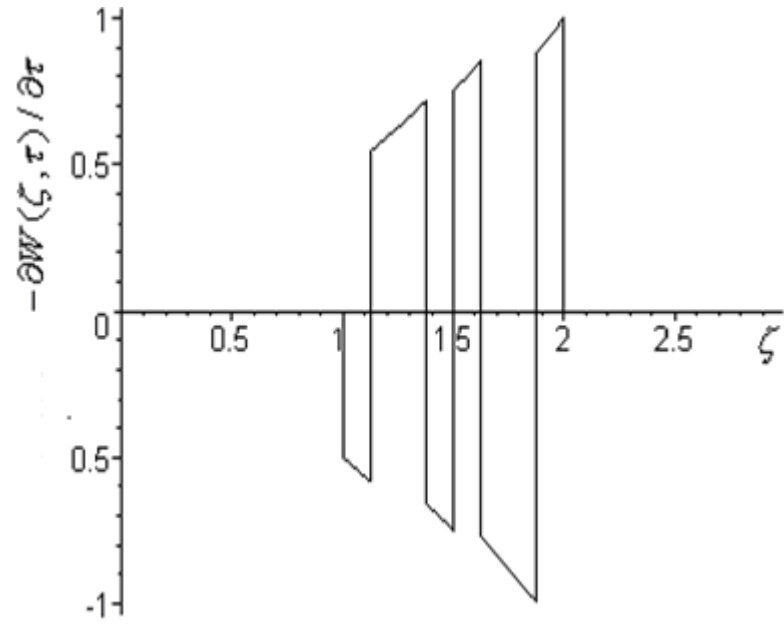
Şekil 4.4 Enine bileşenin modal genliği τ 'nün fonksiyonu olarak $-\partial W(\zeta, \tau) / \partial \tau$ 'ye karşılık grafiği



Şekil 4.5 Eksenel bileşenin modal genliği ξ 'nin fonksiyonu olarak $h_m(\xi, \tau)$ veya $e_n(\xi, \tau)$ 'nin grafiği



Şekil 4.6 Enlemsel bileşenin modal genliği ξ 'nin fonksiyonu olarak $\partial W(\xi, \tau)/\partial \xi$ 'ye karşılık grafiği

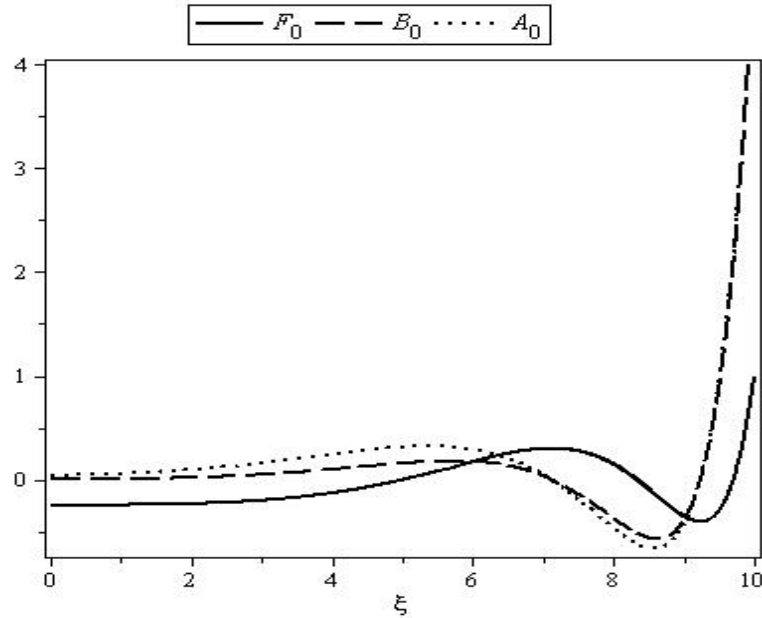


Şekil 4.7 Enlemsel bileşenin modal genliği ζ 'nin fonksiyonu olarak $-\partial W(\zeta, \tau)/\partial \tau$ 'ye karşılık grafiği

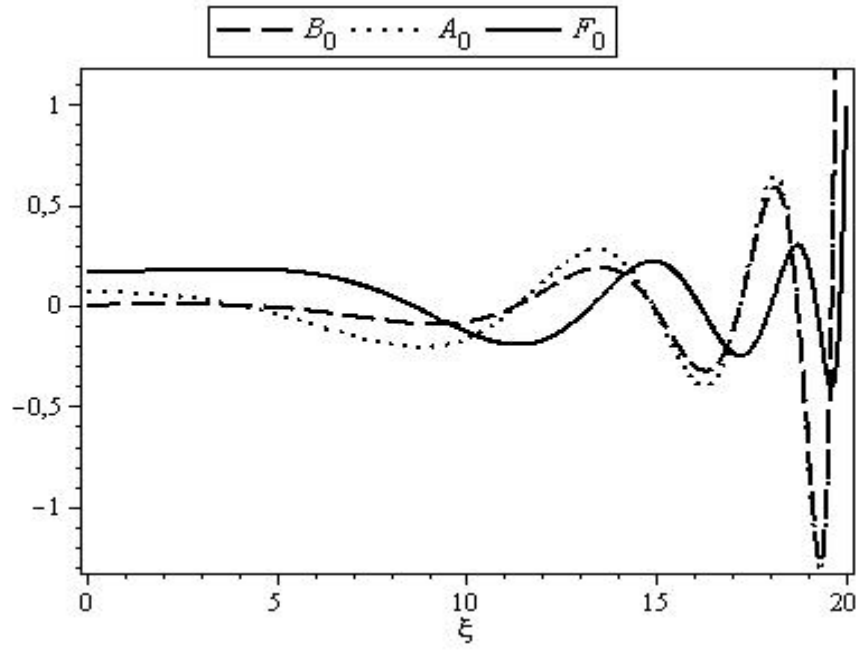
BÖLÜM 5

GRAFİKLER

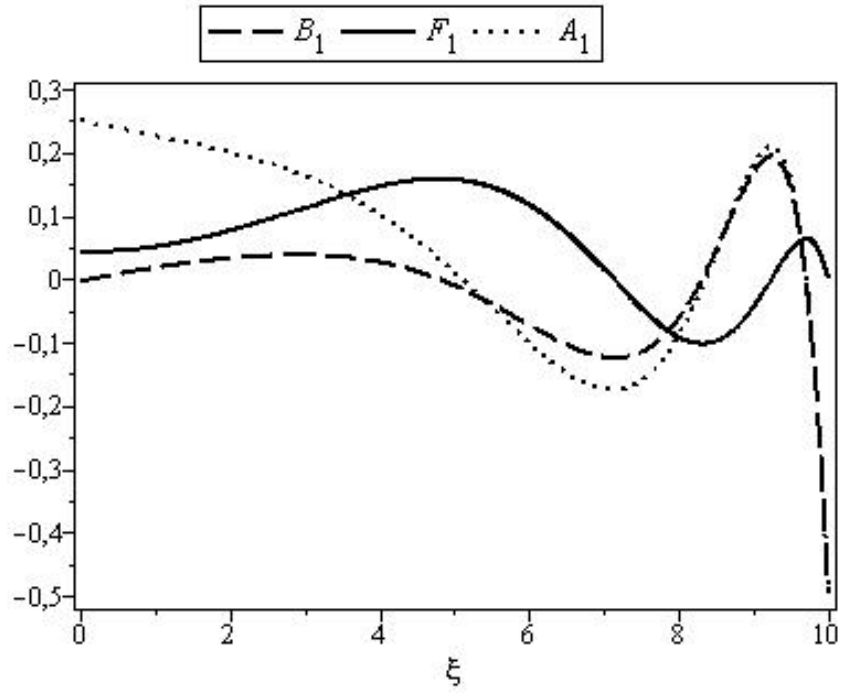
Bu bölümde Klein-Gordon denkleminde elde edilen (3.53) ve (3.54) denklemlerindeki üstel fonksiyon ve Bessel fonksiyonun çarpımı şeklindeki (3.52) denklemini yardımıyla MAPLE 14'te f fonksiyonun salınımları ile bu salınımların zaman t yani τ ve eksenel koordinat z yani ξ 'nin farklı değerlerindeki görüntüleri sergilenmeye çalışılmıştır. ξ eksenini boyunca olan salınımlarda τ sabit tutulmuş, τ eksenini boyunca sergilenen salınımlarda ξ sabit tutulmuştur. Üreteç fonksiyonunda yer alan Bessel fonksiyonun derecesi $p=0,1,2$ tamsayı değerleri için silindirik Bessel fonksiyonuna ait grafikler aşağıdaki gibidir.



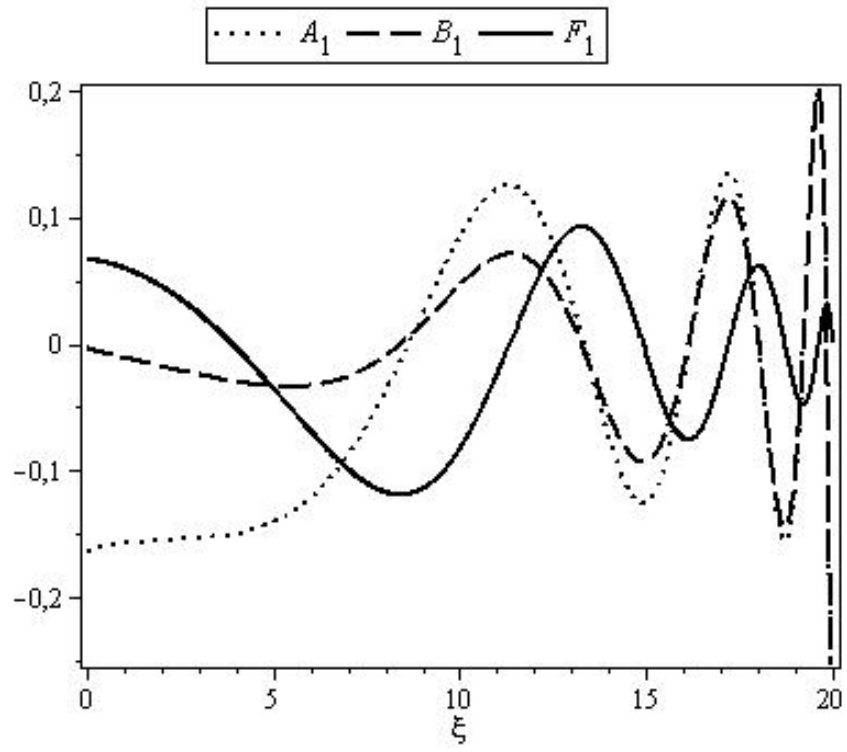
Şekil 5.1 Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 10$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat grafiği



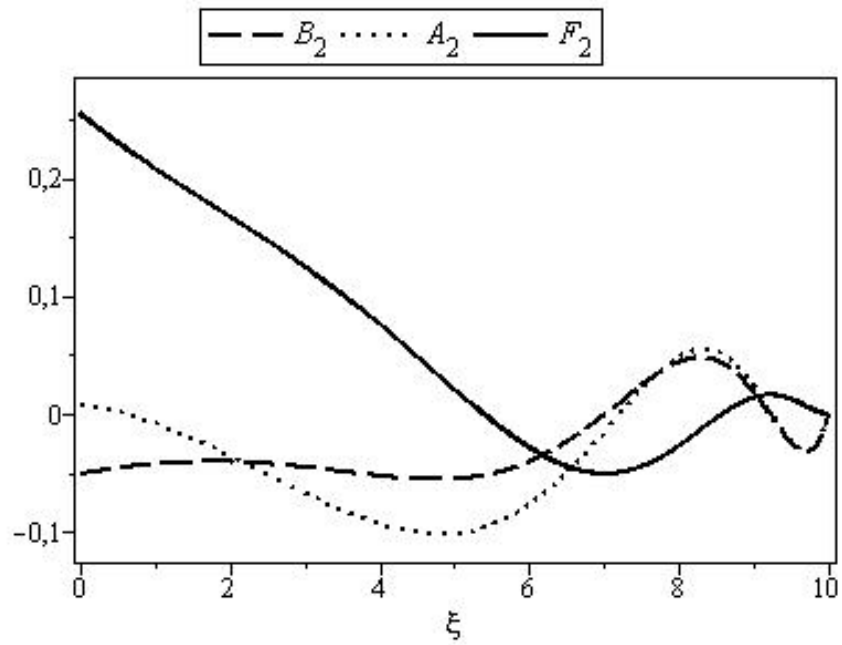
Şekil 5.2 Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 0$ için grafiği



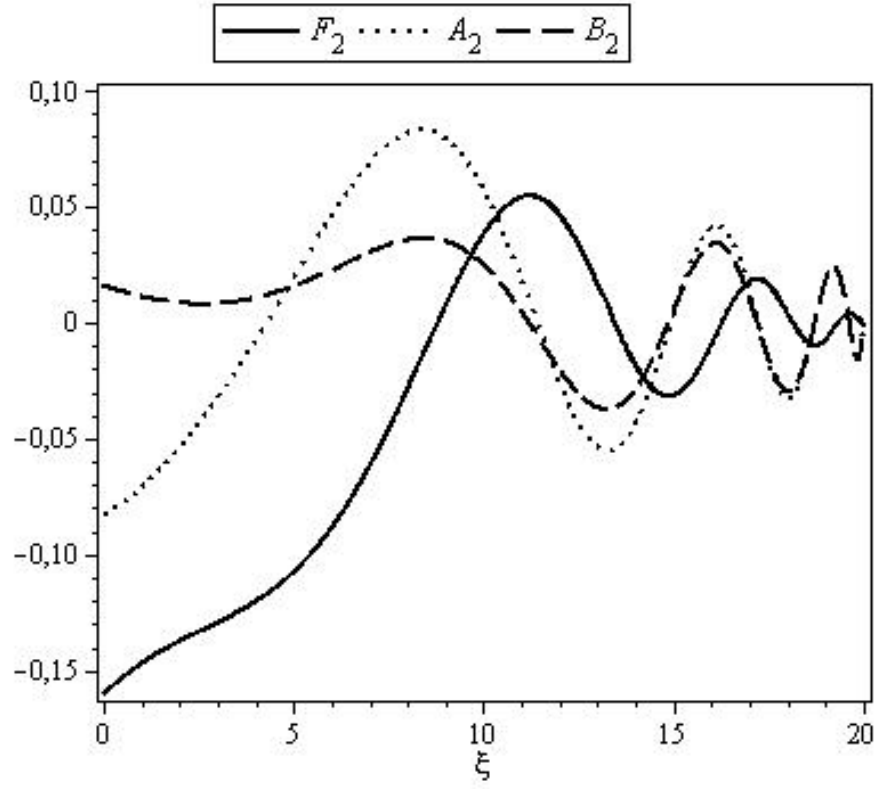
Şekil 5.3 Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 10$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 1$ için grafiği



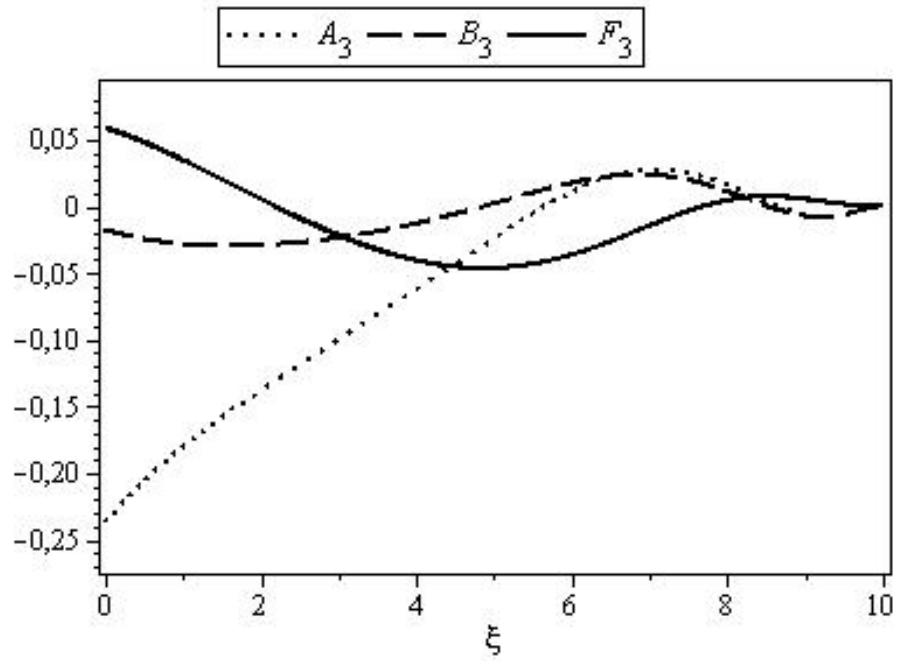
Şekil 5.4 Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz aksenal koordinat, $p = 1$ için grafiği



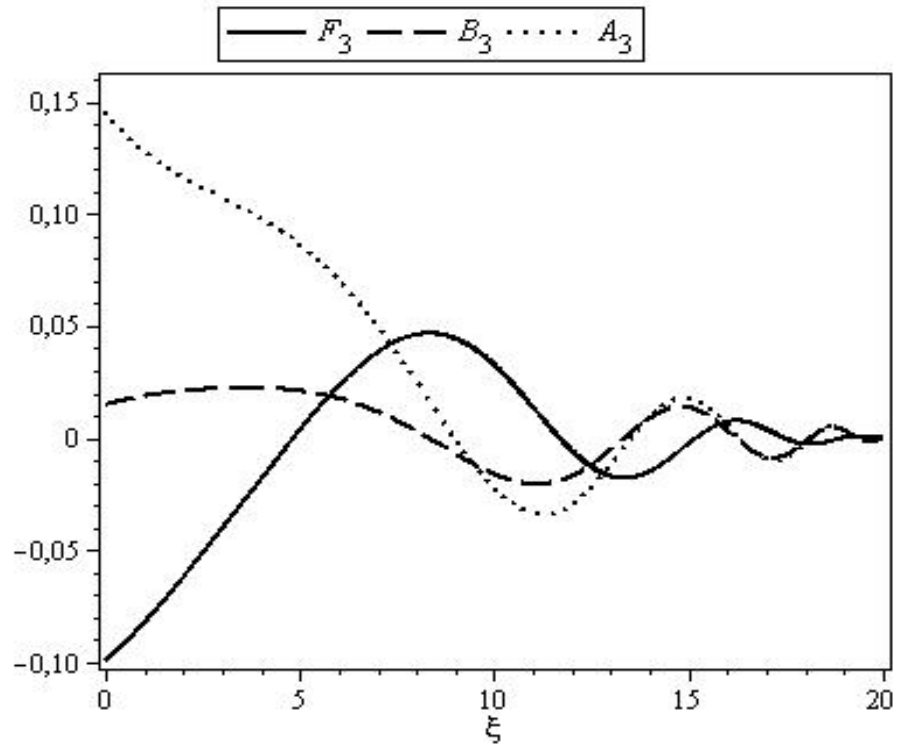
Şekil 5.5 Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 10$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz aksenal koordinat, $p = 2$ için grafiği



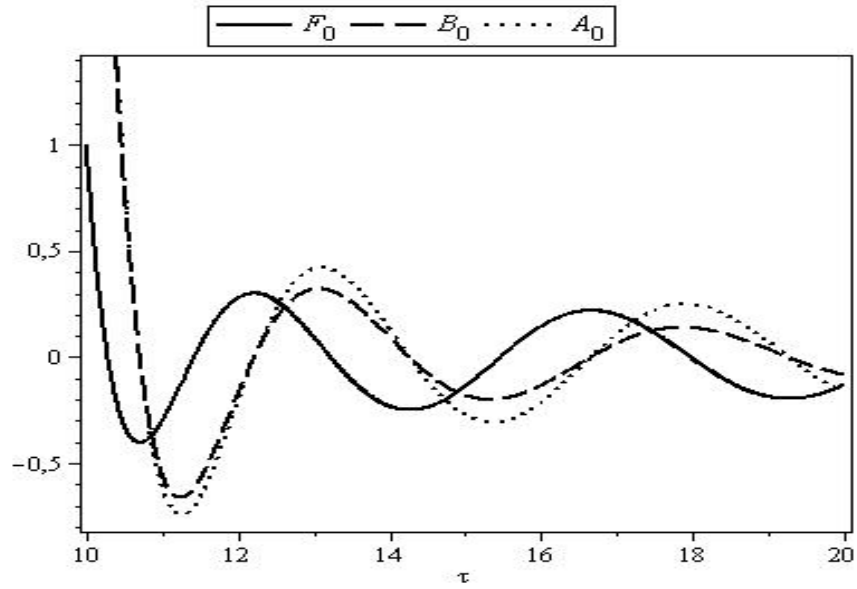
Şekil 5.6 Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 2$ için grafiği



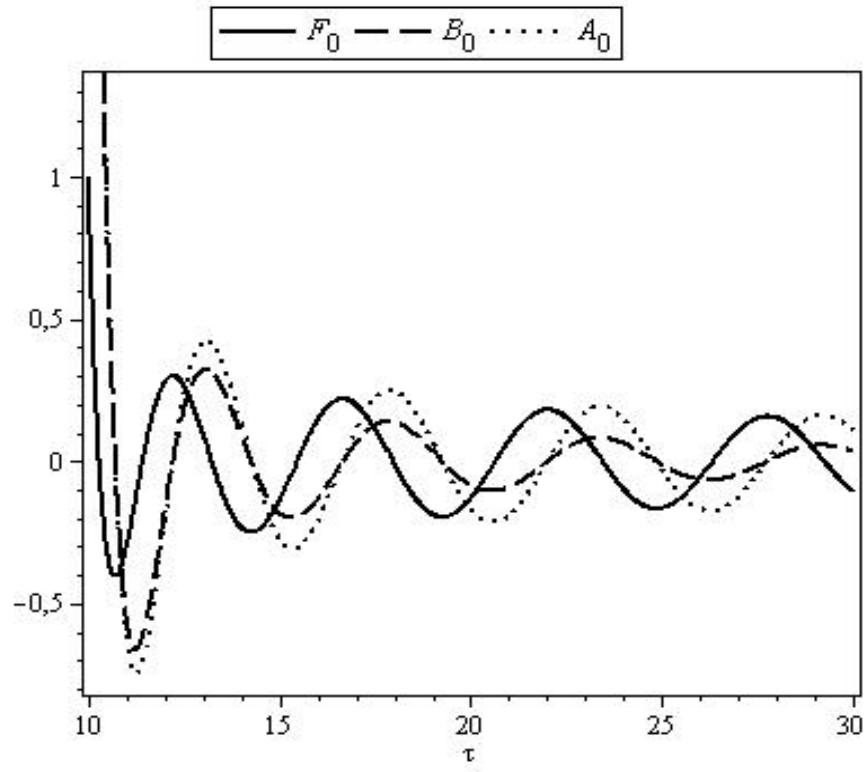
Şekil 5.7 Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 10$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 3$ için grafiği



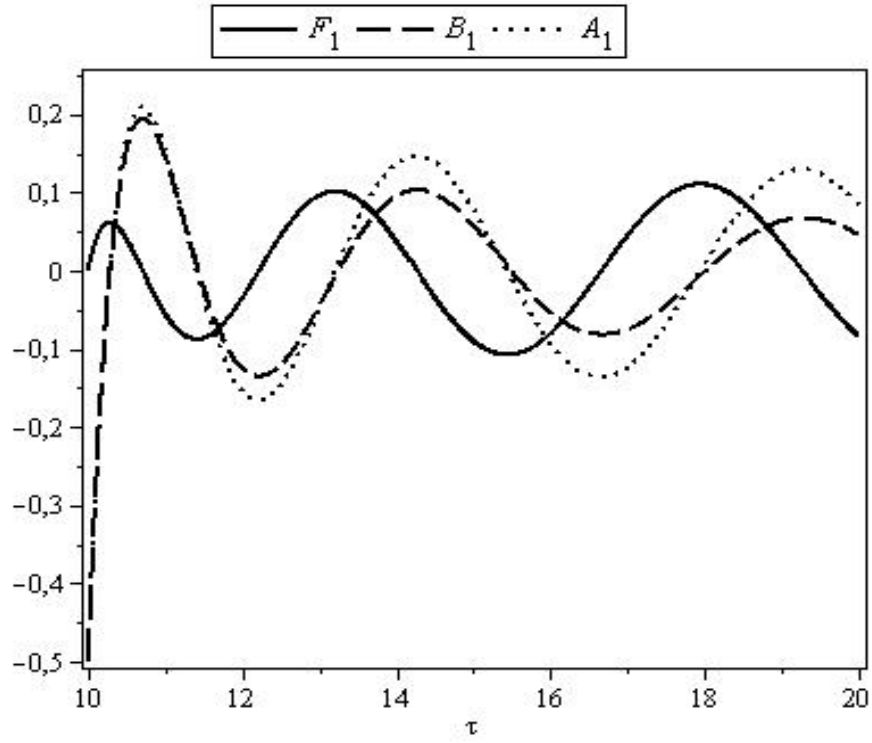
Şekil 5.8 Modal genliklerin $0 \leq \xi \leq 20$ aralığında değişimi. τ sabit, ξ boyutsuz eksenel koordinat, $p = 3$ için grafiği



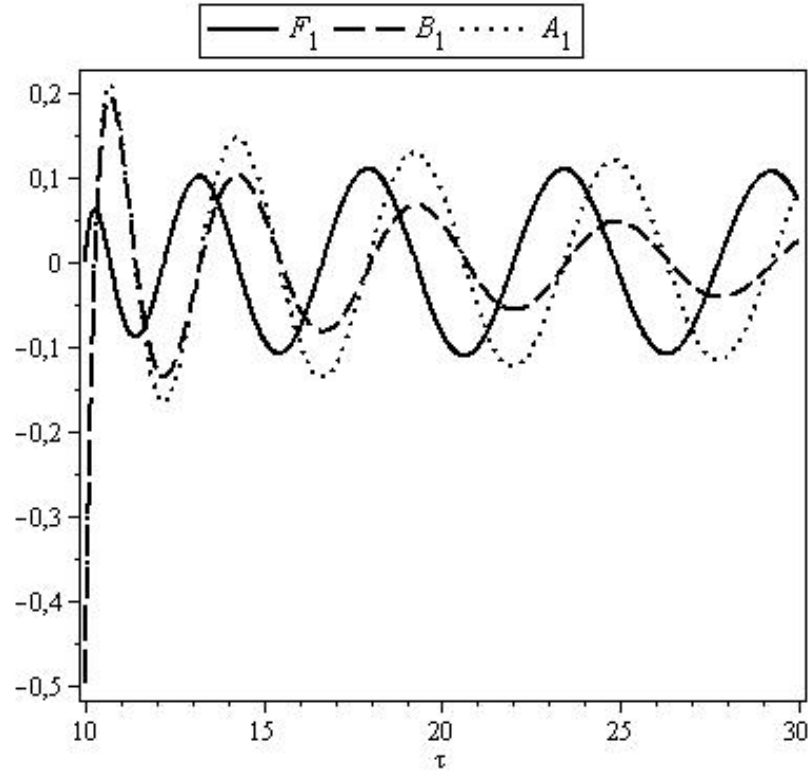
Şekil 5.9 Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 0$ için grafiği



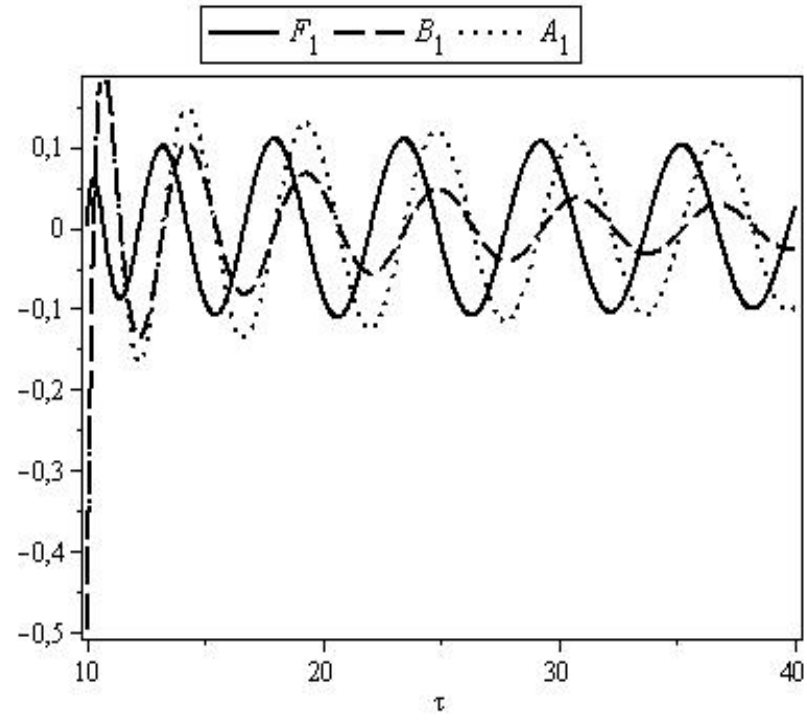
Şekil 5.10 Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 0$ için grafiği



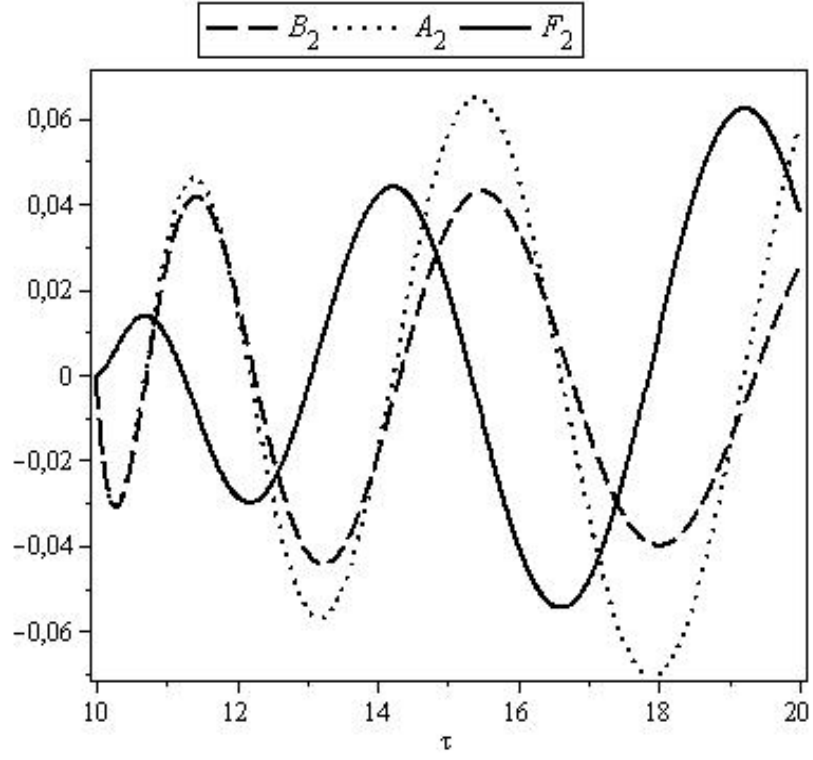
Şekil 5.11 Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 1$ için grafiği



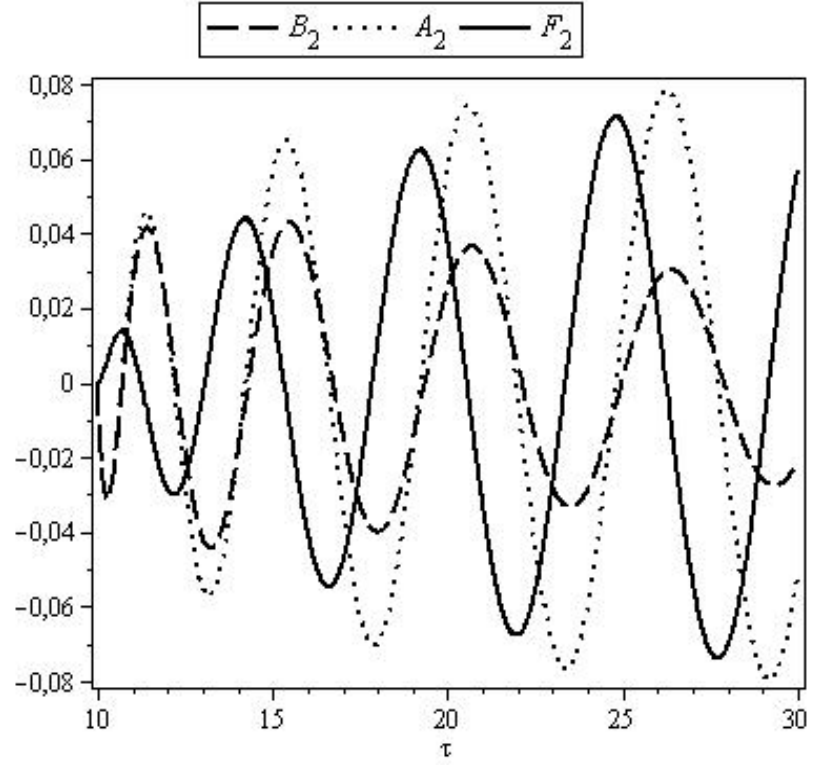
Şekil 5.12 Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 1$ için grafiği



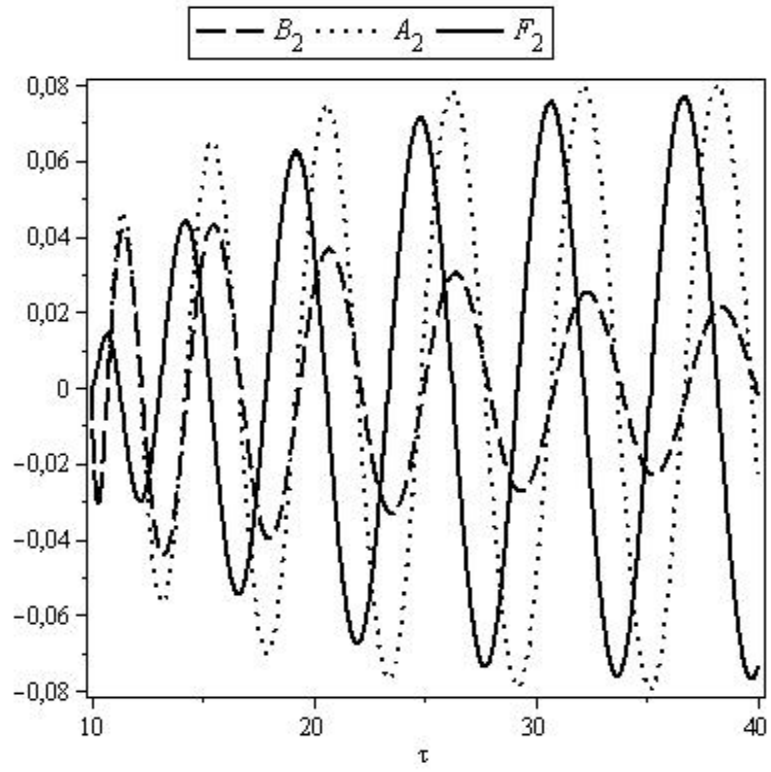
Şekil 5.13 Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 1$ için grafiği



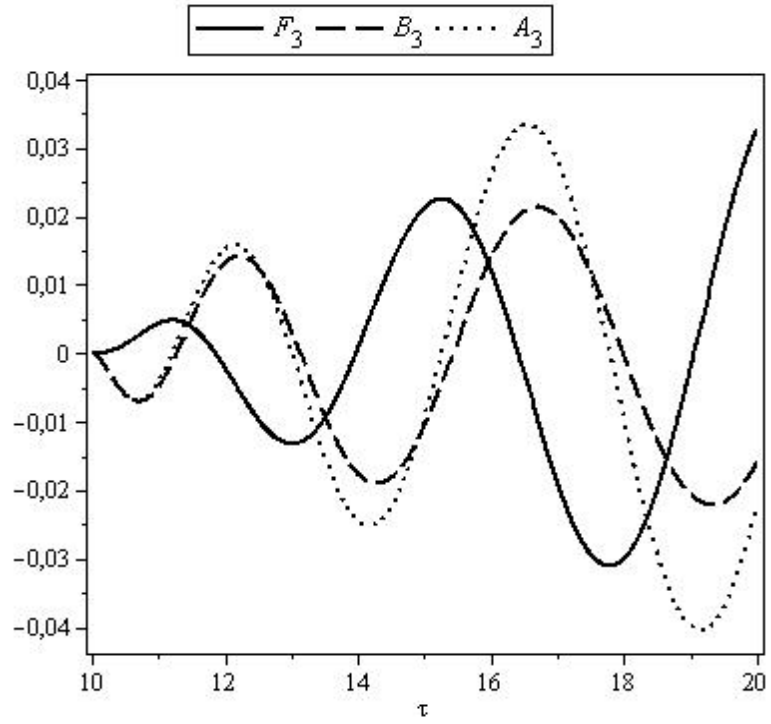
Şekil 5.14 Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 2$ için grafiği



Şekil 5.15 Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 30$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 2$ için grafiği



Şekil 5.16 Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 40$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 2$ için grafiği



Şekil 5.17 Modal genliklerin $10 \leq \tau \leq 20$ zaman aralığında değişimi. ξ sabit, $p = 3$ için grafiği

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Zaman-dönemi mod problemi iki ana başlık altında tartışılmıştır. Birincisi; Maxwell denklemlerinde ∂_t zaman türevi korunarak ve nedensellik prensibine bağlı kalınarak modal bazın belirlenmesidir. L_2 Hilbert uzayında self-adjoint lineer bir operatör Maxwell denklemlerinden ayrıştırılmış, Neumann ve Dirichlet sınır-özdeğer problemleri çözülerek bu özdeğerlere bağlı özfonksiyon aileleri üretilmiştir. İkincisi; Klein-Gordon denkleminde elde edilen genliklerin bulunmasıdır. Buradan üretilen üreteç fonksiyonu üstel bir fonksiyon ile Bessel fonksiyonunun çarpımı olarak bulunmuştur. Böylece manyetik alanları belirleyecek potansiyel ve genliklere ulaşılmıştır. Bu kısımdan sonra Matematikçiler için önem arz eden fonksiyonlara bir göz atılmış ve bunlara ile ilgili tartışmalar verilmiştir. Ayrıca Bessel fonksiyonlarında hesaplanan katsayılar tamsayı değerleriyle ele alınıp silindirik Bessel fonksiyonlarının birbirleri cinsinden yazılabilirliği gösterilmiş ve bu fonksiyonun katsayı hesaplamaları çeşitli yöntemlerle gösterilmiştir.

Walsh fonksiyonu hakkında bilgi verilip Hadamard matrisleri aracılığıyla sayısal uygulama yapılarak grafikleri elde edilmiştir. Nihayetinde belirlenen genlikler için grafikler ile sinyalin transfer edilişine ışık tutulmaya çalışılmıştır. Tezde yeni olarak üreteç fonksiyonunu oluşturan üstel ve Bessel fonksiyonlarının çarpımında tamsayı dereceli Bessel fonksiyonlarının değerleri için grafikleri sunulmuştur.

Yapmış olduğumuz çalışma özel olarak ETEY yöntemi gereği L_2 Hilbert uzayında ele alınmıştır. Benzer çalışmalar başka uzaylarda da ele alınabilir. Dalga kılavuzları boyunca sinyal transferine genel başlık yapılmış olup özel olarak ilgilenilmesi diğer çalışmalara

bırakılmıştır. Çalışmamızda Miller¹in listesinde yer alan 2 durumu üzerinde durulmuştur. Listede yer alan diğer durumlara ait çalışmalarla yeni ufuklara ulaşılabilir.

¹ EK-B'de bulunan listede yer almaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Tretyakov, O. A., (1986). "The Modal Basis Method", Radiotekhnika i Elektronika, 6: 1071-1082 (in Russian).
- [2] Tretyakov, O. A., (1989). "Waveguide Evolutionary Equations", Radiotekhnika i Elektronika, 5: 917-926 (in Russian).
- [3] Erden, F., (2009). "Kavitelerde Zorlanmış Salınımların Zaman Dömeni Analizlerinin İncelenmesi", Doktora Tezi, GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli.
- [4] Taflove, A. ve Hagness, S., (2005). Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time-Domain Methods, First Edition, Artech House, Boston.
- [5] Eroğlu E., (2009). "Dalga Kılavuzları Boyunca Geçici Sinyal Transferi", Doktora Tezi, GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli.
- [6] Tretyakov, O. A., Hashimoto, M. ve Idemen, M., (1993). Analytical and Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory, First Edition, Science House Company, Japonya.
- [7] Tretyakov, O. A., (1994). "Evolutionary Equations for the Theory of Waveguides", Proc. IEEE AP-S Int. Symp. Dig., 2465–2471, Seattle.
- [8] Aksoy, S. ve Tretyakov, O. A., (2002). "Study of a Time Variant Cavity System", Journal of Electromagnetic Waves and Applications, vol: 16, 11:1535-1553.
- [9] Aksoy, S. ve Tretyakov, O. A., (2004). "The Evolution Equations in Study of the Cavity Oscillations Excited by a Digital Signal", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 52 (1): 263-270.
- [10] Aksoy, S., Antyufeyeva, M., Basaran ve E., Ergin, A. A., Tretyakov, O. A., (2005). "Time-Domain Cavity Oscillations Supported by a Temporally Dispersive Dielectric", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 53 (8): 2465-2471.
- [11] Aydemir, S., (2006). "Harmoniklerin Azaltılmasında Walsh Fonksiyonlarının Eviricilerde Uygulanması", Yüksek Lisans Tezi, Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli.
- [12] Şahin, Ü., (2011). "Dikdörtgen Biçimli Dalga Kılavuzları Boyunca Sinyal Transferi", Yüksek Lisans Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [13] Wilansky A., (1964). Functional Analysis, Lehigh University, Blaisdell Publishing Company, New York.

- [14] Kreyszig, E., (1989). "Introductory Functional Analysis With Applications", Volume:21, Issue:3,Wiley, New York, 1989. Derleyen: Çakar Ö, Fonksiyonel Analize Giriş, 7. Baskı, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No:13 Ankara 2007
- [15] Weyl, H., (1940). "The Method of Orthogonal Projection in Potential Theory", Duke Math. Journal, 7: 411-444.
- [16] Tretyakov, O. A., (1990). "Evolutionary Waveguide Equations",Sov. J. Comm. Tech. Electron. (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika), 35 (2): 7-17.
- [17] Miller, W. Jr., (1977). "Symmetry and Separation of Variables", Addison-Wesley publication M.A, Co., Boston.
- [18] Aydın M.,Kuryel B.,Gündüz G ve Oturanç G, (2005). Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, 7.Baskı, Ege Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Ders Kitapları Yayınları, No:14 İzmir.
- [19] Xie Wei-Chau, (2010). Differential Equations for Engineers, First Edition, Cambridge University Press, New York .
- [20] Jacoby, B., (1973). "Walsh Functions: A Digital Fourier Series", Doktora Tezi, American Journal of Math, 65.
- [21] Liang, T. J. ve Hoft, R. G., (1993). "Walsh Function Method of Harmonic Elimination", Power Electronics Research Center, IEEE APEC Conf. Rec, 847-853.
- [22] Aksoy, S. ve Tretyakov, O. A., (2003). "Evolution Equations for Analytical Study Digital Signals in Waveguides", Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 17 (12):1665-1682.

GRAFİKLERİN MAPLE KODLARI**A-1 Şekil 5.2 için Maple Kodları**

```
restart;

n:=0;

alpha:=n; #n:=0,1,2..

tau:=20.001;

xi1:=0;

xi2:=20;

y1:=-0.6;

y2:=0.6;

N:=1500;          #N=numpoints

th:=2;            #th is thickness

F1:=simplify((((tau-xi)/(tau+xi))^(alpha/2))*BesselJ(alpha,sqrt(tau^2-xi^2))));

h1:=piecewise(0>xi,0,xi>20,0,F1);

with(plots):

a1:=plot(h1,xi=xi1..xi2,numpoints=N,thickness=th,view=[xi1..xi2,y1..y2],legend=[F[n]],c
olor=black,axes=boxed,symbol=box,linestyle=solid);

display({a1});
```



```

alpha:=n-1;

xi1:=0;

xi2:=20;

y1:=-1.2;

y2:=1.2;

N:=1500;          #N=numpoints

Fam1:=simplify((((tau-xi)/(tau+xi))^(alpha/2))*BesselJ(alpha,sqrt(tau^2-xi^2))));

h2:=piecewise(0>xi,0,xi>20,0,Fam1);

with(plots):

b1:=plot(Fam1,xi=xi1..xi2,numpoints=N,thickness=th,view=[xi1..xi2,y1..y2],axes=boxed
,legend=[F[am1]]);

display({b1}):


alpha:=n+1;

tau:=20.001;

xi1:=0;

xi2:=20;

y1:=-0.4;

y2:=0.4;

Fap1:=simplify((((tau-xi)/(tau+xi))^(alpha/2))*BesselJ(alpha,sqrt(tau^2-xi^2))));

h3:=piecewise(0>xi,0,xi>20,0,Fap1);

with(plots):

c1:=plot(Fap1,xi=xi1..xi2,numpoints=N,thickness=th,view=[xi1..xi2,y1..y2],axes=boxed,l
egend=[F[ap1]]);

display({c1}):

```

```

alpha:=0;

tau:=20.001;

xi1:=0;

xi2:=20;

y1:=-1.3;

y2:=1;

N:=1500;                #N=numpoints

th:=2;                  #th is thickness

A1:=(-1/2)*(Fam1-Fap1);

g1:=piecewise(0>xi,0,xi>20,0,A1);

with(plots):

s1:=plot(g1,xi=xi1..xi2,numpoints=N,thickness=th,view=[xi1..xi2,y1..y2],legend=[A[alph
a]],color=red,axes=boxed,symbol=box,linestyle=dot);

display({s1}):

```

```

alpha:=0;

tau:=20.001;

xi1:=0;

xi2:=20;

y1:=-1.3;

y2:=1;

N:=1500;                #N=numpoints

th:=2;                  #th is thickness

B1:=(-1/2)*(Fam1+Fap1);

g2:=piecewise(0>xi,0,xi>20,0,B1);

```

```

with(plots):

s2:=plot(g2,xi=xi1..xi2,numpoints=N,thickness=th,view=[xi1..xi2,y1..y2],legend=[B[alph
a]],axes=boxed,color=blue,symbol=box,linestyle=dash);

display({s2}):

with(plots):

display({a1,s1,s2});

```

A-2 Şekil 5.17 için Maple Kodları

CYLINDRICAL BESSEL-Xi is FIXED

```

restart;

n:=2;

alpha:=n;

xi:=10;

y1:=-0.08;

y2:=0.08;

tau1:=10;

tau2:=40;

N:=1500;           #N=numpoints

th:=2;             #th is thickness

F1:=simplify((((tau-xi)/(tau+xi))^(alpha/2))*BesselJ(alpha,sqrt(tau^2-xi^2))));

h1:=piecewise(10>tau,0,tau>40,0,F1);

with(plots):

a1:=plot(h1,tau=tau1..tau2,numpoints=N,thickness=th,view=[tau1..tau2,y1..y2],axes=b
oxed,legend=[F[n]],color=black,symbol=box,linestyle=solid);

display({a1}):

n:=2;

```

```

xi:=10;

y1:=-0.08;

y2:=0.08;

tau1:=10;

tau2:=40;

N:=1500;          #N=numpoints

alpha:=n-1;

Fam1:=simplify((((tau-xi)/(tau+xi))^(alpha/2))*BesselJ(alpha,sqrt(tau^2-xi^2))));

h2:=piecewise(10>tau,0,tau>40,0,Fam1);

with(plots):

b1:=plot(Fam1,tau=tau1..tau2,numpoints=N,thickness=th,view=[tau1..tau2,y1..y2],axe
s=boxed,legend=[F[am1]]);

display({b1}):


alpha:=n+1;

xi:=10;

y1:=-0.08;

y2:=0.08;

tau1:=10;

tau2:=40;

Fap1:=simplify((((tau-xi)/(tau+xi))^(alpha/2))*BesselJ(alpha,sqrt(tau^2-xi^2))));

h3:=piecewise(10>tau,0,tau>40,0,Fap1);

with(plots):

c1:=plot(Fap1,tau=tau1..tau2,numpoints=N,thickness=th,view=[tau1..tau2,y1..y2],axes
=boxed,legend=[F[ap1]]);

```

```
display({c1}):
```

```
alpha:=n;
```

```
xi:=10;
```

```
y1:=-0.08;
```

```
y2:=0.08;
```

```
tau1:=10;
```

```
tau2:=40;
```

```
N:=1500;          #N=numpoints
```

```
th:=2;            #th is thickness
```

```
A1:=(-1/2)*(Fam1-Fap1);
```

```
g1:=piecewise(10>tau,0,tau>40,0,A1);
```

```
with(plots):
```

```
s1:=plot(g1,tau=tau1..tau2,numpoints=N,thickness=th,view=[tau1..tau2,y1..y2],axes=b  
oxed,legend=[A[alpha]],color=red,symbol=box,linestyle=solid);
```

```
display({s1}):
```

```
alpha:=n;
```

```
xi:=10;
```

```
y1:=-0.08;
```

```
y2:=0.08;
```

```
tau1:=10;
```

```
tau2:=40;
```

```
N:=1500;          #N=numpoints
```

```
th:=2;            #th is thickness
```

```

B1:=(-1/2)*(Fam1+Fap1);
g2:=piecewise(10>tau,0,tau>40,0,B1);
with(plots):
s2:=plot(g2,tau=tau1..tau2,numpoints=N,thickness=th,view=[tau1..tau2,y1..y2],axes=b
oxed,legend=[B[alpha]],color=blue,symbol=box,linestyle=solid);
display({s2}):
with(plots):
display({a1,s1,s2});

```

MİLLERİN LİSTESİ

B-1 Manyetik alanla ilgili durumlar

(3.2) denkleminde $\xi(u, v)$ ve $\tau(u, v)$ yerlerine yazıldığında $f(u, v) = U(u)V(v)$ eşitliği elede edilir bu değişimin sonucunda aşağıdaki listeye ulaşılır [15].

1. $-\infty < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$ aralıkları için $\tau = u$ ve $\xi = v$, $f(u, v)$ üstel fonksiyonların çarpımıdır.
2. $\tau = u \cosh v$ ve $\xi = u \sinh v$ $-\infty < v < \infty$ $0 \leq u < \infty$ üstel ve Bessel fonksiyonlarının çarpımıdır.
3. $\tau = (u^2 + v^2)/2$ ve $\xi = uv$ ile $0 \leq u < \infty$ $-\infty < v < \infty$, $f(u, v)$ parabolik silindirik fonksiyonların çarpımıdır.
4. $\tau = uv$ ve $\xi = (u^2 + v^2)/2$ ile $0 \leq u < \infty$, $-\infty < v < \infty$ parabolik silindirik fonksiyonların çarpımıdır.
5. $\tau + \xi = 2(u + v)$ ve $\tau - \xi = (u - v)^2$ ile $-\infty < u, v < \infty$ Airy fonksiyonlarının bir çarpımıdır.
6. $\tau + \xi = \cosh[(u - v)/2]$ ve $\tau - \xi = \sinh[(u + v)/2]$ ile $-\infty < u, v < \infty$ Mathieu fonksiyonlarının bir çarpımıdır.
7. $\tau + \xi = 2 \sinh(u - v)$ ve $\tau - \xi = \exp(u + v)$ ile $-\infty < u, v < \infty$ Bessel fonksiyonlarının bir çarpımıdır.
8. $\tau + \xi = 2 \cosh(u - v)$ ve $\tau - \xi = \exp(u + v)$ ile $-\infty < u, v < \infty$ Bessel fonksiyonlarının bir çarpımıdır.
9. $\tau = \sinh u \cosh v$ ve $\xi = \cosh u \sinh v$ ile $-\infty < u, v < \infty$ Mathieu fonksiyonlarının bir çarpımıdır.
10. $\tau = \cosh u \cosh v$ ve $\xi = \sinh u \sinh v$ ile $-\infty < u < \infty$, $0 \leq v < \infty$ Mathieu fonksiyonlarının bir çarpımıdır.
11. $\tau = \cos u \cos v$ ve $\xi = \sin u \sin v$ ile $0 < u < 2\pi$, $0 \leq v < \pi$ Mathieu fonksiyonlarının bir çarpımıdır.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ersin ŞENER
Doğum Tarihi ve Yeri : 03.05.1985 Biga
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : ersinsener1@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2009
Lise	Fen Bilimleri	Biga Atatürk Anadolu Lisesi	2003

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2009 -	Bayrampaşa Belediyesi Bilim Merkezi	Matematik Atölyesi Sorumlusu

YAYINLARI

Bildiri

1. Güzel, N., Şener, E., (2009). "High School Students' Spatial Ability and Creativity in Geometry" Procedia - Social and Behavioral Sciences, 1 (1):1763-1766.

Makale

1. Güney, İ., Eroğlu, E., Şahin, Ü., **Şener, E.**, "Factor Analysis of the Effects of Class Rules on the Behaviours", Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS), 1-3 July, Baku, Azerbaijan. (accepted)
2. Eroğlu, E., Güney, İ., Yıldız, N., **Şener, E.**, Şahin, Ü., (2011). "Statistical Modeling of Experiment Applications in the Solution of the Learning Scenarios Based on Problem", Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS), 1-3 July, Baku, Azerbaijan. (accepted)

Proje

1. AB Ulusal Ajansı 5.1 Gençlik Girişimleri “GENÇLİK KONUŞUYOR” Mayıs 2010, Araştırmacı.
2. TÜBİTAK-110B083 nolu “BİLİM SOKAĞI”, Ağustos 2010, Araştırmacı/Uzman.
3. TÜBİTAK AB 7. Çerçeve Programı “AVRUPA BİLİM EĞLENCE GÜNÜ”, Eylül 2010, Katılımcı.
4. TÜBİTAK-111B135 nolu “KÜÇÜK BİLİM ADAMLARI YAZ OKULU(KUBAYO)”, Haziran 2011, Araştırmacı/Uzman.
5. TÜBİTAK-111B218 nolu “YENİ UFUKLAR”, Haziran 2011, Araştırmacı/Uzman.