

T.C
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT UZAYLARI ÜZERİNDE
KOMPAKT OPERATÖRLERİN
SPEKTRAL TEORİSİ

AYÇA KAYRAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİMDALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. İNCİ ALBAYRAK

İSTANBUL, 2011

ÖNSÖZ

Çalışmada, Hilbert uzayları üzerinde kompakt operatörlerin spektral teorisi incelenmiştir. İncelemede çeşitli kaynaklardan alınan tanımlara, teoremlere ve örneklere yer verilerek çalışmanın kolay anlaşılır olması amaçlanmıştır. Kompakt operatörlerin spektrumunun incelendiği problemler karşılaştırılmış, karşılaştırmalar sonucunda tartışılmaya açık sorular ortaya çıkmıştır.

Bu çalışmanın hazırlanma süresince yakın ilgi ve hoşgörüsü ile bana yol gösteren ve destek olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. İnci ALBAYRAK ‘ a en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Beni yetiştiren, her zaman maddi ve manevi yardımlarını benden esirgemeyen anneme ve babama teşekkür ederim.

Temmuz, 2011

Ayça KAYRAK

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	iv
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	1
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
ÖN BİLGİLER	3
BÖLÜM 3	
KOMPAKT LİNEER OPERATÖRLER	8
BÖLÜM 4	
OPERATÖRÜN SPEKTRUMU	16
BÖLÜM 5	
HİLBERT UZAYLARINDA KOMPAKT OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİ	21
BÖLÜM 6	
SONUÇ VE ÖNERİLER	32
KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	34

SİMGE LİSTESİ

$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
$A^\perp$	A kümesinin ortogonal bütünleyeni
$B_r(0)$	Birim yuvar
$B(X,Y)$	X kümesinden Y kümesine tanımlı lineer ve sınırlı operatörlerin uzayı
C	Kompleks sayılar kümesi
d	$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, metrik
$\dim$	Boyut
$\text{Im}T$	T operatörünün görüntü kümesi
I_X	X üzerindeki birim operatör
$K(X,Y)$	X kümesinden Y kümesine tanımlı kompakt operatörlerin uzayı
$\text{Ker}(T)$	T operatörünün çekirdeği
$L(X,Y)$	X kümesinden Y kümesine tanımlı lineer operatörlerin uzayı
$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$	limit
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\text{rank}(T)$	T operatörünün rankı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
Sup	Supremum
T^*	T operatörünün eşleniği
T^{-1}	T operatörünün tersi
$X \rightarrow Y$	X kümesinden Y kümesine
$\bar{\lambda}$	λ 'nın kompleks sayılar kümesindeki eşleniği
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\subset$	Alt küme
$\in$	Eleman
$\notin$	Eleman değil
$\emptyset$	Boş küme
$=$	Eşit
$\neq$	Eşit değil
∞	Sonsuz
$\sigma(T)$	T operatörünün spektrum kümesi
$\rho(T)$	T operatörünün resolvant kümesi
$\sigma_p(T)$	T operatörünün nokta spektrum kümesi
$\sigma_c(T)$	T operatörünün sürekli spektrum kümesi

$\sigma_r(T)$

T operatörünün residüal spektrum kümesi

**HİLBERT UZAYLARINDA KOMPAKT OPERATÖRLERİN
SPEKTRAL TEORİSİ**

Ayça KAYRAK

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. İnci ALBAYRAK

Banach ve Hilbert üzerinde tanımlı kompakt operatörler teoremler ve örnekler ile incelenmiştir.

Operatörün spektrumunun bulunabilmesi için gerekli teoremler verilmiştir. Hilbert uzaylarında kompakt ve kendine eş kompakt operatörlerin spektrumu incelenmiştir.

Kompakt operatörlerin spektrumunun incelendiği problemler karşılaştırılmıştır.

ABSTRACT

SPECTRAL THEORY OF COMPACT OPERATORS ON HILBERT SPACES

Ayça KAYRAK

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Assistant Prof. Dr. İnci ALBAYRAK

Compact operators that are defined on Banach and Hilbert spaces are investigated with theorems and examples.

The necessary theorems for finding the spectrum of an operator are given. Spectrum of compact and self-adjoint compact operators that are defined on Hilbert space are investigated.

Problems which are examined the spectrum of compact operators are compared.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Kompakt operatörler ilk kez integral operatörler şeklinde Volterra tarafından ortaya konulurken, Banach uzaylarında kompakt operatörlerin genel tanımını ilk kez Alman matematikçi David Hilbert tanımlamıştır (Dundorf ve Schwartz [1]). “Spektral Teori” tanımı da yine ilk olarak David Hilbert’ in Hilbert uzayı teorisi çalışmalarında ortaya çıkmıştır. Wilhelm Wirtinger 1987 yılında yayınladığı bir makalesinde “ Spektral Teori” yi “ Spektrum” olarak ifade etmiştir ve öğrencisi olan Edward Schmidt ve Hermann Weyl tarafından 20. yüzyılın ilk çeyreği boyunca incelenmiştir. Hilbert uzayları için kavramsal temeller Edward Schmidt ve Frigyes Riesz tarafından geliştirilmiştir (Young [2]). (Dorier [3]) Kompakt operatörler için spektral teori ise ilk olarak Frigzey Riesz tarafından geliştirilmiş ve incelenmek üzere biz matematikçilere bırakılmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Bu incelemede kompakt operatör tanımı yapılmış, kompaktlık kriteri verilerek hem Banach uzayları hem de Hilbert uzayları üzerinde tanımlı operatörlerin kompaktlığı örnekler üzerinde araştırılmıştır. Eşlenik operatörün önemine dikkat çekilerek kompakt bir operatörün eşleniğinin de kompakt olduğu gösterilmiştir.

Operatörün spektrumu ve kompakt operatörlerin spektrumu arasındaki farkların ve benzerliklerin araştırılabilmesi için operatörün spektrumu incelenmiştir. Spektrum çeşitlerinin tanımları verilerek her biri örneklenmiştir.

Hilbert uzaylarında kompakt operatörlerin ve kendine eş kompakt operatörlerin spektrumu, teoremlerle incelenmiştir. Çeşitli kaynaklardan alınan problemlerin kompaktlık, kendine eşlik ve spektrum araştırılması yapılmıştır.

1.3 Hipotez

Ele alınan problemlerin ve çözümlerinin karşılaştırılması yapılmıştır.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1 (M,d) bir metrik uzay ve $A \subset M$ olsun.

Her $x, y \in A$ için $d(x,y) < b$ olacak şekilde bir $b > 0$ sayısı varsa A kümesine sınırlı küme denir.

Tanım 2.2 (M,d) bir metrik uzay ve $A \subset M$ olsun.

Her $x \in A$ ve her $y \in M$ için $d(x,y) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa A açık bir kümedir, aksi halde A kümesine kapalı küme denir.

Tanım 2.3 (M,d) bir metrik uzay ve $A \subset M$ olsun.

A kümesindeki her (x_n) dizisi yakınsak bir alt diziye sahipse A kümesine kompakt küme denir.

Tanım 2.4 Şuhubi [4] göreceli kompaktlığı şu şekilde tanımlamıştır; (M,d) bir metrik uzay ve $A \subset M$ olsun.

A kümesinin kapanışı $\bar{A}$ kompakt ise A kümesine göreceli kompakt küme denir.

Tanım 2.5 (M,d) bir metrik uzay ve $A \subset M$ olsun.

$\bar{A} = M$ ise A kümesi yoğundur. M kümesinin sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa M kümesi ayrılabilir denir.

Teorem 2.6 (M,d) bir metrik uzay ve $A \subset M$ olsun.

Eğer A göreceli kompakt bir küme ise A kümesi ayrılabilir (Rynne ve Youngson [5]).

Tanım 2.7 F bir skalerler cismi ve X , F üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\| \cdot \|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\mathbf{N.1} \quad \|x\| \geq 0$$

$$\mathbf{N.2} \quad \|x\| = 0 \text{ olması için gerek ve yeter koşul } x = 0 \text{ olmasıdır.}$$

$$\mathbf{N.3} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$\mathbf{N.4} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

koşullarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu uzay denir.

Tanım 2.8 X bir normlu uzay olsun. X üzerinde tanımlı her Cauchy dizi yakınsak ise X uzayı Banach Uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.9 X ve Y vektör uzayları ve F bir skalerler cismi olsun.

$T: X \rightarrow Y$ olmak üzere her $x, y \in X$ ve herhangi $\alpha, \beta \in F$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

sağlanıyorsa T operatörü lineer operatör olarak adlandırılır.

Tanım 2.10 X ve Y normlu uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Her $x \in X$ için

$$\|T(x)\| \leq k \cdot \|x\|$$

olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı varsa T operatörü sınırlıdır denir.

Tanım 2.11 X bir normlu uzay ve $D(T) \subseteq X$ olsun.

$T: D(T) \rightarrow X$ olmak üzere her $(x_n) \in D(T)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ var olsun.

$\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(x)$ sağlanıyorsa T operatörü süreklidir denir.

Teorem 2.12 X ve Y normlu uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. T operatörü sınırlı ise süreklidir.

Tanım 2.13 X ve Y normlu uzaylar olsun.

$ST = I_X$ ve $TS = I_Y$ olacak şekilde $S \in B(Y, X)$ operatörü varsa $T \in B(X, Y)$ operatörü terslenebilirdir ve S operatörüne T' nin tersi denir.

Tanım 2.14 X bir normlu uzay ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun.

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere her $x, y \in X$ ve herhangi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

sağlanıyorsa f operatörü lineer fonksiyonel olarak adlandırılır. Bu fonksiyonellerden oluşan uzaya ise dual uzay denir ve X' ile gösterilir.

Tanım 2.15 X bir vektör uzayı olsun. $(\cdot, \cdot): X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ ve herhangi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

- (a) $(x, x) \geq 0$
- (b) $(x, x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = 0$ olmasıdır.
- (c) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$
- (d) $(x, y) = (y, x)$

koşullarını sağlıyorsa, $(\cdot, \cdot)$ fonksiyonuna X üzerinde bir iç çarpım denir.

Tanım 2.16 X iç çarpım uzayı üzerinde tanımlı her Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayı Hilbert uzayı olarak adlandırılır.

Lemma 2.17 H bir Hilbert uzayı ve $Y \subset H$ olsun. Y lineer alt uzayının Hilbert uzayı olması için gerek ve yeter koşul Y' nin kapalı olmasıdır (Kreyszig [6]).

Tanım 2.18 X bir iç çarpım uzayı ve (e_n) , X uzayının bir bazı olsun. Her $n, m \in \mathbb{N}$ için $(e_m, e_n) = 0$ ve $\|e_n\| = 1$ ise (e_n) , X uzayının ortonormal bazıdır denir.

Teorem 2.19 Rynne ve Youngson [5] tarafından ifade edildiğine göre,

- a) Sonlu boyutlu normlu uzaylar ayrılabilir.
- b) Sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayının ayrılabilir olması için gerek ve yeter koşul ortonormal bir baza sahip olmasıdır.

Tanım 2.20 X bir iç çarpım uzayı ve $A \subset X$ olsun.

$A^\perp = \{ x \in X: \text{her } a \in A \text{ için } (x, a) = 0 \}$ kümesine A kümesinin ortogonal bütünleyeni denir.

Tanım 2.21 H bir Hilbert uzayı olmak üzere Y , H' nin kapalı bir alt uzayı ve $Y^\perp$, Y' nin ortogonal bütünleyeni olsun. Her $x \in H$ için

$$x = y + z$$

olacak şekilde bir $y \in Y$ ve $z \in Y^\perp$ varsa y' ye x' in ortogonal projeksiyonu denir.

Tanım 2.22 H_1 ve H_2 Hilbert uzayları ve $T: H_1 \rightarrow H_2$ bir sınırlı lineer operatör olsun. $T^*: H_2 \rightarrow H_1$ operatörü her $x \in H_1$ ve $y \in H_2$ için

$$(Tx, y) = (x, T^*y)$$

eşitliğini sağlıyorsa T' nin eşlenik operatörü olarak adlandırılır.

Teorem 2.23 T sınırlı bir lineer operatör ve T^* , T operatörünün eşleniği ise

$$\|T^*\| = \|T\|$$

eşitliği sağlanır (Kreyszig [6]).

Tanım 2.24 X bir vektör uzayı, K bir skalerler cismi ve $T: X \rightarrow X$ bir lineer operatör olsun. Eğer

$$T(x) = \lambda x$$

olacak şekilde sıfır olmayan, x vektörü varsa $\lambda \in K$ skalerine T operatörünün özdeğeri denir.

Bu bağıntıyı gerçekleyen her x vektörü de T' nin λ özdeğerine karşı gelen özvektörü olarak adlandırılır.

Tanım 2.25 $T \in B(H, H)$ olsun. Her $x, y \in H$ için $(Tx, y) = (x, Ty)$ eşitliği sağlanıyor ise T operatörü kendine eş olarak adlandırılır.

Tanım 2.26 T bir operatör olmak üzere, $\dim(\text{Im}T)$ sayısına operatörün rankı denir.

Teorem 2.27 H bir Hilbert uzayı ve $\{e_n\}$, H içinde ortonormal bir dizi olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Rynne ve Youngson [5]).

- a) $\{e_n : n \in N\}^\perp = \{0\}$;
- b) $\overline{\text{span}}\{e_n : n \in N\} = H$;
- c) Her $x \in H$ için $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$ dir.;
- d) Her $x \in H$ için $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$ dir.

Lemma 2.28 X bir iç çarpım uzayı ve $A \subset X$ olmak üzere, $B \subset A$ ise $A^\perp \subset B^\perp$ dir (Rynne ve Youngson [5]).

Tanım 2.29 X bir vektör uzayı ve $S \in L(X, X)$ olsun. $A \subset X$, $S(A) \subset A$ ifadesini sağlıyorsa A , S altında invaryanttır denir.

Lemma 2.30 K bir Hilbert uzayı ve $S \in B(K, K)$ kendine eş olsun. M , K' nin kapalı bir alt uzayı ve S altında invaryat ise, o zaman, $M^\perp$ kümesi de S altında invarttır (Rynne ve Youngson [5]).

Teorem 2.31 (M,d) bir metrik uzay ve $A \subset M$ olsun. A kümesinin yoğun olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in M$ için $d(x,y) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $y \in A$ noktasının var olmasıdır.

Teorem 2.32 X bir Banach uzayı olmak üzere $T \in B(X,X)$ ve $\|T\| \leq 1$ ise, $I - T$ terslenebilirdir (Rynne ve Youngson [5]).

Sonuç 2.33 X ve Y Banach uzayları olsun. $B(X,Y)'$ deki terslenebilir operatörlerin kümesi açık bir kümedir.

Lemma 2.34 H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H,H)$ terslenebilir ise, o zaman T^* terslenebilirdir ve $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ dır.

KOMPAKT LİNEER OPERATÖRLER

Kreyszig'e [6] göre kompakt lineer operatörler matematiksel fiziğin problemlerinde ve integral denklemlerin teorisinde öneme sahiptirler.

Tanım 3.1 X ve Y normlu uzaylar olsun.

Bir $T: X \rightarrow Y$ operatörü lineer ve X uzayının sınırlı her M alt kümesi için $\overline{T(M)}$ kompakt ise T kompakt lineer operatör olarak adlandırılır.

Lemma 3.2 X ve Y normlu uzaylar olsun. O zaman;

- a) Her kompakt lineer $T: X \rightarrow Y$ operatörü sınırlıdır, dolayısıyla sürekli.
- b) Eğer $\dim X = \infty$ ise, $I: X \rightarrow X$ birim operatörü kompakt değildir.

İspat: (a) $U = \{x \in X \mid \|x\|=1\}$ birim küresi sınırlıdır. T kompakt olduğundan $\overline{T(U)}$ kompakttır ve dolayısıyla sınırlıdır. Böylece;

$$\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < \infty \text{ dur.}$$

Yani; T sınırlıdır ve teorem 2.12 T operatörünün sürekli olduğunu gösterir.

(b) $M = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ birim yuvarı sınırlıdır. Eğer $\dim X = \infty$ ise o zaman M kompakt olamaz, böylece $I(M) = M = \overline{M}$ göreceli kompakt değildir. Δ

Teorem 3.3 X ve Y normlu uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. T operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter koşul X üzerindeki her sınırlı (x_n) dizisini, Y üzerinde yakınsak bir alt diziye sahip olan bir (Tx_n) dizisine götürmesidir.

İspat: T kompakt ve (x_n) sınırlıysa, o zaman (Tx_n) dizisinin Y uzayındaki kapanışı kompakttır ve tanım 2.3 (Tx_n) dizisinin yakınsak bir alt dizi içerdiğini gösterir.

Bunun aksine, her sınırlı (x_n) dizisinin bir (x_{n_k}) alt dizisinin var olduğunu düşünölsün; öyle ki (Tx_{n_k}) , Y üzerinde yakınsak olsun. Herhangi bir sınırlı $B \subset X$ alt kümesini ele alınsın ve (y_n) , $T(B)$ üzerinde herhangi bir dizi olsun. O zaman bazı $x_n \in B$ için $y_n = Tx_n$ dir. B sınırlı olduğundan (x_n) sınırlıdır. Varsayımdan, (Tx_n) yakınsak bir alt diziye sahiptir. Böylece; Tanım 2.3 gereğince $\overline{T(B)}$ kompakttır. Tanım 3.1, T operatörünün kompakt olduğunu gösterir. Δ

Örnek 3.4 X bir normlu uzay, $f \in X'$ sınırlı ve lineer bir fonksiyonel olsun. $z \in X$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$ operatörü her $x \in X$ için

$$T(x) = f(x)z$$

ile tanımlansın.

T operatörü kompakttır (Soykan [7]).

(x_n) , X üzerinde sınırlı bir dizi olsun. f sınırlı bir fonksiyonel olduğundan,

$(f(x_n))$ dizisinin skalerlerin bir dizisi olduğunu görürüz. Böylece; bu dizi yakınsak bir $(f(x_{n_k}))$ alt dizisine sahiptir. Eğer; $k \rightarrow \infty$ için $f(x_{n_k}) \rightarrow c$ ise, o zaman, $k \rightarrow \infty$ için $T(x_{n_k}) \rightarrow cz$ olur. O halde $(T(x_{n_k}))$, $(T(x_n))$ in yakınsak bir alt dizisi olur. Böylece; T kompakttır.

Teorem 3.5 X , Y ve Z normlu uzaylar olsun.

a) S ve T , X den Y ye tanımlı kompakt operatörler ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. O zaman,

$\alpha S + \beta T$ kompakttır.

b) $S: X \rightarrow Y$ sınırlı ve $T: Y \rightarrow Z$ kompakt bir operatör olsun. O zaman, $TS: X \rightarrow Z$ operatörü kompakttır.

İspat : **(a)** (x_n) , X de sınırlı bir dizi olsun. S kompakt olduğundan (Sx_{n_k}) yakınsak olacak şekilde (x_n) dizisinin bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. (x_{n_k}) sınırlı bir dizi ve T kompakt olduğundan $(Tx_{n_{kr}})$ yakınsak olacak şekilde (x_{n_k}) dizisinin bir $(x_{n_{kr}})$ alt dizisi vardır. Buradan da $(\alpha S(x_{n_{kr}}) + \beta T(x_{n_{kr}}))$ dizisi yakınsaktır denebilir. Böylece; $\alpha S + \beta T$ kompakttır.

(b) (x_n) , X üzerinde sınırlı bir dizi olsun. S sınırlı bir operatör olduğundan (Sx_n) dizisi sınırlıdır. T kompakt olduğundan, (TSx_{n_k}) yakınsak olacak şekilde (Sx_n) dizisinin bir (Sx_{n_k}) alt dizisi vardır. Böylece; TS kompakt olur. Δ

Sonuç 3.6 X sonsuz boyutlu bir normlu uzay ve $T: X \rightarrow X$ kompakt bir operatör ise, o zaman, T operatörünün tersi yoktur.

İspat: T operatörünün T^{-1} tersinin olduğu varsayalım. $I = T^{-1}T$, teorem 3.5 gereğince X üzerinde kompakt olmalıdır. Fakat X sonsuz boyutlu olduğundan bu durum lemma 3.2 ile çelişir. Δ

Teorem 3.7 X ve Y normlu uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. O zaman,

a) T sınırlı ve $\dim T(X) < \infty$ ise, T operatörü kompakttır.

b) Eğer $\dim X < \infty$ ise, T operatörü kompakttır.

İspat: (a) (x_n) , X üzerinde sınırlı herhangi bir dizi olsun. O zaman,

$$\|Tx_n\| \leq \|T\| \cdot \|x_n\|$$

eşitsizliği (Tx_n) dizisinin sınırlı olduğunu gösterir. $\dim T(X) < \infty$ olduğundan (Tx_n) göreceli kompakttır. Yani; (Tx_n) yakınsak bir alt diziye sahiptir. (x_n) , X üzerinde sınırlı herhangi bir dizi olduğundan, teorem 3.3' e göre T kompakttır.

(b) $\dim X < \infty$ olması, T operatörünün sınırlılığını gerektirir ve $\dim T(X) \leq \dim X$ dir.

(a)' dan T operatörünün kompakt olduğu açıkça görülür. Δ

Teorem 3.8 X ve Y normlu uzaylar ve $T \in L(X, Y)$ olsun.

a) T' nin kompakt olması için gerek ve yeter koşul her sınırlı $A \subset X$ alt kümesi için,

$T(A) \subset Y$ kümesinin göreceli kompakt olmasıdır.

b) T kompakt ise $\text{Im} T$ ve $\overline{\text{Im} T}$ ayrılabilirlerdir.

İspat: a) T kompakt ve $A \subset X$ sınırlı olsun. $\overline{T(A)}$ kümesinden keyfi bir (y_n) dizisi alınsın. O zaman, her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\|y_n - Tx_n\| < n^{-1}$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi vardır ve A sınırlı olduğundan (x_n) dizisi sınırlıdır. Böylece; T operatörünün kompaktlığından, (Tx_n) yakınsak bir alt dizi içerir. Böylece; (y_n) dizisinin limiti $\overline{T(A)}$ içinde bulunan bir alt dizi vardır. (y_n) keyfi olduğundan $\overline{T(A)}$ kompakttır.

Her sınırlı $A \subset X$ alt kümesi için $T(A) \subset Y$ kümesinin göreceli kompakt olduğunu varsayalım. O zaman, X üzerindeki herhangi sınırlı bir (x_n) dizisi için (Tx_n) kompakt bir kümenin içindedir. O halde, T kompakttır.

b) Herhangi bir $r \geq N$ için, $B_r(0) \subset X$ yuvarının görüntüsü $R_r = T(B_r(0)) \subset Y$ olsun. T kompakt olduğundan, R_r kümesi göreceli kompakttır ve ayrılabilirlerdir. Ayrıca

ImT sayılabilir $\bigcup_{r=1}^{\infty} R_r$ birleşimine eşit olduğundan sayılabilir olmak zorundadır. Son olarak, ImT kümesinin bir alt kümesi ImT üzerinde yoğunsa o zaman, $\overline{\text{ImT}}$ üzerinde de yoğundur, dolayısıyla $\overline{\text{ImT}}$ ayrılabilir. Δ

Teorem 3.9 X bir normlu uzay ve Y bir Banach uzayı olsun. $T_n : X \rightarrow Y$ kompakt lineer operatörlerinin bir dizisi olsun. Eğer $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ ise T operatörü kompakttır.

İspat: Bir ‘‘diagonal metod’’ kullanarak X‘ deki herhangi bir sınırlı (x_m) dizisi için (Tx_m) dizisinin bir yakınsak alt diziye sahip olduğunu gösterilmiş ve teorem 3.3 ü sağlanmıştır (Rynne ve Youngson [5]).

T_1 kompakt olduğundan, $(T_1 x_{1,m})$ Cauchy dizisi olacak şekilde (x_m) dizisinin $(x_{1,m})$ ile indeksli bir alt dizisi vardır. Benzer olarak, $(T_2 x_{2,m})$ Cauchy olacak şekilde $(x_{1,m})$ dizisinin $(x_{2,m})$ ile indeksli bir alt dizisi vardır. Bu yöntemle devam edilirse ‘‘diagonal dizi’’ elde edildiği görülür. Her sabit pozitif n tam sayısı için $(T_n y_m)$ Cauchy dizisi olacak şekilde (x_m) dizisinin $(y_m) = (x_{m,m})$ alt dizisi vardır. (x_m) sınırlı yani, her m için $\|x_m\| \leq c$ olduğundan her m için $\|y_m\| \leq c$ dir. $\varepsilon > 0$ için $T_m \rightarrow T$ olduğundan, $\|T - T_p\| < \varepsilon/3c$ olacak şekilde bir n = p vardır. $(T_p y_m)$ Cauchy dizisi olduğundan, j, k > N olmak üzere, $\|T_p y_j - T_p y_k\| < \varepsilon/3$ olacak şekilde bir N vardır.

Böylece; j, k > N için

$$\begin{aligned} \|Ty_j - Ty_k\| &\leq \|Ty_j - T_p y_j\| + \|T_p y_j - T_p y_k\| + \|T_p y_k - Ty_k\| \\ &\leq \|T - T_p\| \cdot \|y_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_p - T\| \cdot \|y_k\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3c}c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c}c = \varepsilon \end{aligned}$$

Bu ise; (Ty_m) in Cauchy dizisi olduğunu gösterir, Y tam olduğundan da (Ty_m) dizisi yakınsaktır. (y_m) ise keyfi sınırlı bir (x_m) dizisinin alt dizisi olduğundan teorem 3.3 gereğince T operatörü kompakttır. Δ

Sonuç 3.10 X bir normlu uzay, Y bir Banach uzayı olsun. (T_k) dizisi, sınırlı T operatörüne yakınsayan sonlu ranklı operatörlerin sınırlı bir dizisi ise T kompakttır.

Kreyzig [6], bir operatörün kompakt olduğunu yukarıdaki teoremi ve sonucunu kullanarak örneklemiştir.

Örnek 3.11 $T_n : l_2 \rightarrow l_2$ olsun ve $T_n x = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \dots, \frac{\xi_n}{n}, 0, 0, \dots)$ ile tanımlansın. T_n lineer ve sınırlıdır. Teorem 3.7 a) gereğince kompakt olduğu görülür.

$T: l_2 \rightarrow l_2$ operatörü $j = 1, 2, \dots$ için $\eta_j = \xi_j / j$ olmak üzere $y = (\eta_j) = Tx$ ile tanımlansın.

T lineerdir. Eğer $x = (\xi_j) \in l_2$ ise, o zaman $y = (\eta_j) \in l_2$ dir.

Üstelik;

$$\|(T - T_n)x\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\eta_j|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} |\xi_j|^2 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^2 \leq \frac{\|x\|^2}{(n+1)^2}$$

Normu 1 olan her x vektörü üzerinden supremum alırsak,

$$\|T - T_n\| \leq \frac{1}{n+1}$$

olduğu görülür.

Böylece; $T_n \rightarrow T$ dir ve T operatörü teorem 3.9 gereğince kompakttır.

Rynne ve Youngson [5], verilen bir T operatörüne yakınsayan sonlu ranklı operatörleri nasıl inşaa edilebileceğine dair bir örnek vermişlerdir. Bir operatörün kompakt olduğunu gösterirken genel olarak bu yolun kullanıldığını belirtmişlerdir.

Örnek 3.12 $T(a_n) = (n^{-1}a_n)$ ile tanımlı $T \in B(l_2, l_2)$ operatörünün kompakt olduğu gösterilsin.

Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $T_k \in B(l_2)$, $(T_k a_n) = (b_n^k)$ ile tanımlansın. Burada;

$$(b_n^k) = \begin{cases} b_n^k = n^{-1}a_n, & n \leq k \\ b_n^k = 0, & n \geq k \end{cases}$$

T_k operatörleri sınırlı ve lineerdir. Ayrıca sonlu ranka sahiptirler. Herhangi bir $a \in l_2$ için

$$\|(T_k - T)a\|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|^2 / n^2 \leq (k+1)^{-2} \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|^2 \leq (k+1)^{-2} \|a\|^2$$

dir. Buradan, $\|T_k - T\| \leq (k+1)^{-1}$ dir. Böylece; $\|T_k - T\| \rightarrow 0$ elde edilir. Bu halde Sonuç 3.10 gereğince T kompakttır.

Teorem 3.13 X bir normlu uzay, H bir Hilbert uzayı ve $T: X \rightarrow H$ kompakt bir operatör ise, o zaman $B(X, H)$ uzayında T operatörüne yakınsayan ve sonlu ranka sahip bir (T_k) operatör dizisi vardır.

İspat: T operatörü sonlu ranka sahip ise sonuç aşıkardır. O yüzden aksini kabul edelim.

Lemma 2.17' den ve teorem 3.8 den $\overline{\text{Im}T}$ kümesi sonsuz boyutludur ve ayrılabilir

Hilbert uzayıdır. Böylece; teorem 2.19 den ortonormal bir (e_n) bazına sahiptir. Her bir $k \geq 1$ indisi için, P_k , $\overline{\text{Im}T}$ kümesinden $M_k = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$ lineer alt uzayı üzerine tanımlı ortogonal projeksiyonu ve $T_k = P_k T$ olsun.

$\text{Im}T_k \subset M_k$ olduğundan, T_k sonlu ranka sahiptir. $k \rightarrow \infty$ iken $\|T_k - T\| \rightarrow 0$ olduğunu gösterilmelidir.

Bunun doğru olmadığını varsayalım. O zaman, eğer gerekliyse (T_k) dizisinin bir alt dizisini aldıktan sonra, her k için $\|T_k - T\| \geq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır denebilir. Böylece her k için $\|(T_k - T)x_k\| \geq \varepsilon/2$ olacak şekilde birim vektörlerin bir dizisi olan $(x_k) \in X$ vardır. T kompakt olduğundan, bazı $y \in H$ için $Tx_k \rightarrow y$ olduğu varsayılabilir.

$$\begin{aligned}(T_k - T)x_k &= (P_k - I)Tx_k = (P_k - I)y + (P_k - I)(Tx_k - y) \\ &= -\sum_{n=k+1}^{\infty} (y, e_n)e_n + (P_k - I)(Tx_k - y)\end{aligned}$$

dir. Buradan, her bir ifadenin normu alınarak,

$$\varepsilon/2 \leq \|(T_k - T)x_k\| \leq (\sum_{n=k+1}^{\infty} (y, e_n)^2)^{1/2} + 2\|Tx_k - y\|$$

hesaplanır. $k \rightarrow \infty$ iken eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra gider. Bu ise kabul ile çelişir. Δ

Örnek 3.14 $I = [0,1]$ olmak üzere, $K(t, \tau) \in L_2(I^2)$ operatörü göz önüne alınsın. Burada,

$$Kx = \int_0^1 K(t, \tau) x(\tau) d\tau$$

ile tanımlıdır. K operatörü kompakt olduğu aşağıdaki gibi gösterilmiştir (Eidelman, vd. [8]).

$\{\varphi_i(t)\}$, $L_2(I^2)$ üzerinde ortonormal bir dizi olsun. O zaman,

$K(t, \tau) = \sum_{ij} a_{ij} \varphi_i(t) \varphi_j(\tau)$ serisi $L_2(I^2)$ 'de yakınsaktır.

$K_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \varphi_i(t) \varphi_j(\tau)$ olsun. O halde, $n \rightarrow \infty$ iken $\|K_n - K\| = 0$ dır. Böylece,

$K_n = \int_0^1 K_n(t, \tau) x(\tau) d\tau$ operatörü sonlu ranka sahiptir ve K operatörüne yakınsaktır denir. Sonuç 3.10 gereğince K operatörü kompakttır.

Bu sonuçları kullanarak bir kompakt operatörün eşlenik operatörünün kompakt olduğu gösterilmiştir. Önce sonlu ranklı operatörler göz önüne alınmıştır (Rynne ve Youngson [5]).

Lemma 3.15 H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ ise, o zaman, $\text{rank}(T) = \text{rank}(T^*)$

Ispat: $\text{rank}(T) < \infty$ olduğunu farzedilsin. Herhangi $x \in H$ için, x vektörünün ortogonal bütününi yazılsın; $u \in \text{Ker}(T^*)$ ve $v \in \text{Ker}(T^*)^\perp = \overline{\text{Im}T} = \text{Im}T$ olmak üzere,

$x = u + v$ dir. Böylece; $T^*x = T^*(u + v) = T^*(v)$ dir. Sonuç olarak;

$$\text{Im}T^* = T^*(\text{Im}T) \text{ dir .}$$

Bu ise;

$$\text{rank}(T^*) \leq \text{rank}(T) < \infty$$

olmasını gerektirir.

Aynı sonucu T^* operatörüne uygulanırsa, $(T^*)^* = T$ olduğunu kullanarak

$$\text{rank}(T) \leq \text{rank}(T^*)$$

elde edilir. Δ

Teorem 3.16 H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H, H)$ ise, o zaman, T operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter koşul T^* operatörünün kompakt olmasıdır.

Ispat: T kompakt olsun. O zaman; teorem 3.9 gereğince $\|T_k - T\| \rightarrow 0$ olacak şekilde sonlu ranka sahip operatörlerin bir dizisi vardır. Lemma 3.15 ten her bir (T_n^*) sonlu ranka sahiptir, teorem 2.23 gereğince $\|T_n^* - T^*\| = \|T_k - T\| \rightarrow 0$ dir. Böylece, sonuç 3.10 ' e göre T^* kompakttır. Yani, T kompakt ise T^* kompakttır denebilir. Bu sonuca göre ve $(T^*)^* = T$ olduğundan T^* kompaktsa, T kompakttır. Δ

Teorem 3.17 H sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayı, $\{e_n\}$ ve $\{f_n\}$ H ' nin ortonormal birer dizi olsun. $\{\alpha_n\}$, $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bir dizi ve bir lineer $T: H \rightarrow H$ operatörü

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x, e_n) f_n$$

ile tanımlansın. O zaman;

- a) T ' nin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\{\alpha_n\}$ dizisinin sınırlı olmasıdır.
- b) T operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ olmasıdır.

Ispat: a) $\{\alpha_n\}$ dizisinin sınırlı olsun. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için $|\alpha_n| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. O zaman, herhangi bir $x \in H$ için

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 |(x, e_n)|^2 \leq M^2 \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq M^2 \|x\|^2 \text{ dir.}$$

Böylece; T sınırlıdır.

Eğer $\{\alpha_n\}$ dizisi sınırlı değil ise, herhangi bir $M > 0$ için $|\alpha_{k(M)}| \geq M$ olacak şekilde $k(M)$ sayısı vardır. O zaman; $e_{k(M)}$ bir birim vektördür ve tanımdan,

$$Te_{k(M)} = \alpha_{k(M)} f_{k(M)} \text{ dir. Böylece, } \|Te_{k(M)}\| = |\alpha_{k(M)}| \geq M$$

bulunur. Dolayısıyla, T sınırlı olamaz.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ olsun. Her bir $k = 1, 2, \dots$ için $T_k : H \rightarrow H$ operatörü

$$T_k x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x, e_n) f_n$$

ile tanımlansın.

T_k operatörleri sınırlı, lineer ve sonlu ranka sahiptir. Böylece; T_k operatörleri kompakttır.

$\{\alpha_n\}$ dizisi sınırlı olsun ancak sıfıra yakınsamasın. O zaman, her r için $|\alpha_{n(r)}| \geq \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı ve $n(r)$, $r = 1, 2, \dots$ dizisi vardır. Herhangi $r, s \in \mathbb{N}$ için,

$$\|Te_{n(r)} - Te_{n(s)}\|^2 = \|\alpha_{n(r)} f_{n(r)} - \alpha_{n(s)} f_{n(s)}\|^2 = |\alpha_{n(r)}|^2 - |\alpha_{n(s)}|^2 \geq 2\varepsilon^2 \text{ dir.}$$

Böylece, T kompakt değildir. Δ

BÖLÜM 4

OPERATÖRÜN SPEKTRUMU

Tanım 4.1 X bir normlu uzay ve $T: D(T) \rightarrow X$ bir lineer operatör olsun.

$$\sigma(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \text{ terslenemez} \}$$

kümesine T operatörünün spektrumu denir.

$$\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T) \text{ kümesine } T \text{ operatörünün resolvanı denir.}$$

Örnek 4.2 H bir kompleks Hilbert uzayı ve I, H üzerinde birim operatör olsun. Eğer μ herhangi bir kompleks sayı ise o zaman $\sigma(\mu I) = \{ \mu \}$ olduğu Rynne ve Youngson [5] tarafından gösterilmiştir.

Eğer her $c \in \mathbb{C}$ için $c \neq 0$ ise o zaman cI terslenebilirdir. Böylece;

$$\begin{aligned} \sigma(\mu I) &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\mu I - \lambda I) \text{ terslenemez} \} \\ &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\mu - \lambda)I \text{ terslenemez} \} \\ &= \{ \mu \} \end{aligned}$$

Tanım 4.3 X bir normlu uzay ve $T: D(T) \rightarrow X$ bir lineer operatör olsun.

$$\sigma_p(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda, T \text{ operatörünün özdeğeri} \}$$

kümesine T operatörünün nokta spektrumu denir.

Örnek 4.4 $T \in B(l_2, l_2)$ operatörü, $T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots)$ ile tanımlı olsun. T operatörünün özdeğerleri bulunsun (Soykan [7]).

$(1, 0, 0, 0, \dots) \in l_2$ ve $(0, 1, 0, 0, \dots) \in l_2$ olduğunda,

$$T(1, 0, 0, 0, \dots) = (1, 0, 0, 0, \dots) = 1 \cdot (1, 0, 0, 0, \dots)$$

sağlanır. Bu nedenle $1, T$ operatörünün $(1, 0, 0, 0, \dots)$ özvektörlü bir özdeğeridir.

$$T(0,1,0,0, \dots) = (0,-1,0,0, \dots) = (-1) \cdot (0,1,0,0, \dots)$$

olduğundan (-1) , T operatörünün $(0,1,0,0, \dots)$ özvektörlü bir özdeğeridir.

T operatörünün özdeğerlerinden oluşan küme T operatörünün nokta spektrumu olduğundan $\sigma_p(T) = \{-1,1\}$ elde edilir.

Tanım 4.5 X bir normlu uzay ve $T: D(T) \rightarrow X$ bir lineer operatör olsun.

$$\sigma_c(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1} \text{ operatörü } X \text{ üzerinde yoğun} \}$$

kümesine T operatörünün sürekli spektrumu denir.

Örnek 4.6 Örnek 3.11 'de tanımlanan T operatörü için $\sigma_c(T) = \{0\}$ olduğu gösterilsin.

$\lambda = 0$, T 'nin özdeğeri olsun. O halde;

$$Tx = \left(\frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \dots \right) = (\lambda \xi_1, \lambda \xi_2, \dots, \lambda \xi_n, \dots) = (0, 0, \dots) \text{ dir.}$$

Dolayısıyla, $0 = \frac{\xi_1}{1} = \frac{\xi_2}{2} = \frac{\xi_3}{3} = \dots = 0$ olur. Ancak bu durum x 'in sıfırdan farklı bir özvektör olmasıyla çelişir. O halde, 0 , T 'nin özdeğeri değildir.

$\lambda \neq 0$, T 'nin özdeğeri olsun. O halde;

$$Tx = \left(\frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \dots \right) = (\lambda \xi_1, \lambda \xi_2, \dots, \lambda \xi_n, \dots) \text{ sağlanmalıdır.}$$

$\xi_1 = \lambda \xi_1$ ise $\lambda = 1$ dir. Ancak $\frac{\xi_2}{2} \neq 1 \cdot \xi_2$ olduğundan $\lambda \neq 0$, T 'nin özdeğeri olamaz.

$\text{Im}T$ kümesinin l_2 üzerinde yoğun olduğunu göstermek için herhangi bir $y \in l_2$ ve $\varepsilon > 0$ alınsın. $y_k = (y_1, \dots, y_k, 0, 0, \dots)$ olsun. $\|y - y_k\| < \varepsilon$ olacak şekilde $k \geq 1$ vardır.

$x_k = (y_1, 2y_2, \dots, ky_k, 0, 0, \dots)$ ile tanımlansın. O zaman, $y_k = Tx_k$ dir. Yani, $y_k \in \text{Im}T$ dir. Böylece; teorem 2.31 'den $\text{Im}T$, l_2 üzerinde yoğundur. Dolayısıyla, $\sigma_c(T) = \{0\}$ dir.

Tanım 4.7 X bir normlu uzay ve $T: D(T) \rightarrow X$ bir lineer operatör olsun.

$$\sigma_r(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1} \text{ operatörü } X \text{ üzerinde yoğun değil} \}$$

kümesine T operatörünün residual spektrumu denir.

Örnek 4.8 $S: l_2 \rightarrow l_2$ olmak üzere $Sx = \left(0, \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots \right)$ ile tanımlansın.

$$\sigma_r(S) = \{0\} \text{ olduğu gösterilsin.}$$

$\lambda = 0$, S 'nin özdeğeri olsun. O halde;

$$Sx = (0, \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n, \dots) = (0, 0, \dots) \text{ dır.}$$

Dolayısıyla, $0 = \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3} = \dots = 0$ olur ancak bu durum x 'in sıfırdan farklı bir özvektör olmasıyla çelişir.

$\lambda \neq 0$ olsun. O zaman, $\lambda x_1 = 0$ olduğundan, $x_1 = 0$ dır. Buradan $\lambda x_2 = x_1 = 0$ dır ve $x_2 = 0$ bulunur. Bu yolla devam edilirse $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \dots = 0$ bulunur ki, bu ise $x \neq 0$ olmasıyla çelişir. Böylece; S operatörünün özvektörü olmadığı görülür. $\sigma_p(S) = \emptyset$ dır.

Herhangi bir $y \in \text{Im}S$ için $y_1 = 0$ dır. Dolayısıyla, $\|e_1 - y\| \geq 1$ dır. Böylece; $\text{Im}S$, l_2 üzerinde yoğun değildir. $\lambda = 0$ residü spektrumdur. Dolayısıyla; $\sigma_r(S) = \{0\}$ dır.

Kreyszig [6], spektrum çeşitlerini tablolandırmıştır.

X bir normlu uzay $T: D(T) \rightarrow X$ bir lineer operatör olmak üzere $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ olsun. Burada λ kompleks bir sayı ve I , $D(T)$ üzerindeki birim operatördür.

(R1) $R_\lambda(T)$ vardır.

(R2) $R_\lambda(T)$ sınırlıdır.

(R3) $R_\lambda(T)$, X içinde yoğun olan bir küme üzerinde tanımlıdır.

Sağlar	Sağlamaz	λ aittir
(R1) , (R2) , (R3)		$\rho(T)$
	(R1)	$\sigma_p(T)$
(R1) , (R3)	(R2)	$\sigma_c(T)$
(R1)	(R3)	$\sigma_r(T)$

Operatörün Hilbert uzaylarında eşlenik operatörünün belirlenmesi spektrumun bulunmasında çok önemlidir. Bu sebeple verilen tanımların Hilbert uzaylarında da geçerli olduğu göz önüne alınarak spektrum incelemesi yapılmıştır (Rynne ve Youngson [5]).

Lemma 4.9 H bir kompleks Hilbert uzayı ve $T \in B(H,H)$ olsun. λ , T nin bir özdeğeri ise, o zaman λ , $\sigma(T)$ ' nin içindedir.

İspat: $T(x) = \lambda x$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $x \in H$ vektörü var olduğundan, $x \in \text{Ker}(T - \lambda I)$ ' dir. O zaman, $T - \lambda I$ terslenemezdir. Δ

Eğer H sonlu boyutlu bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H,H)$ ise, T ' nin spektrumu yalnızca T ' nin özdeğerlerinden oluşur. Bunun sonsuz boyutluda olması beklenebilir ancak sonsuz boyutlu uzaylar üzerindeki bazı operatörler, özdeğerlere sahip olmayabilir.

Örnek 4.10 l_2 üzerindeki kaydırma operatörü S göz önüne alınsın (Rynne ve Youngson [5]). $S : l_2 \rightarrow l_2$ olmak üzere $S(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$ ile tanımlıdır.

λ ' nın S ' in bir özdeğeri olduğu varsayalım. Buna bağlı olarak sıfırdan farklı özvektör $x = (x_n)$ olsun. O zaman,

$$(0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n, \dots) \quad \text{dir.}$$

Eğer, $\lambda = 0$ ise, o zaman, bu eşitliğin sağ tarafı sıfır vektörüdür, yani,

$$0 = x_1 = \dots = x_n = \dots = 0 \quad \text{dir,}$$

Bu ise, $x \neq 0$ olmasıyla çelişir.

Eğer, $\lambda \neq 0$ ise, o zaman $\lambda x_1 = 0$ olduğundan, $x_1 = 0$ dir. Buradan, $\lambda x_2 = x_1 = 0$ dir ve $x_2 = 0$ bulunur. Bu yolla devam edilirse,

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \dots = 0$$

bulunur ki, bu ise, $x \neq 0$ olmasıyla çelişir.

Böylece S operatörünün özdeğerleri olmadığı görülür. O zaman; S operatörünün spektrumu araştırılsın.

Teorem 4.11 H bir kompleks Hilbert uzayı ve $S \in B(H,H)$ olsun.

(a) Eğer $|\lambda| > \|S\|$ ise $\lambda \notin \sigma(S)$ dir.

(b) $\sigma(S)$ kapalı bir kümedir.

İspat : (a) Eğer $|\lambda| > \|S\|$ ise, o zaman $\|\lambda^{-1}S\| \leq 1$ dir ve teorem 2.32 den $(I - \lambda^{-1}S)$ ' nin tersi vardır. Dolayısıyla; $\lambda I - S$ ' nin tersi vardır. O zaman; $\lambda \notin \sigma(S)$ dir.

(b) $F : C \rightarrow B(H,H)$ operatörü $F(\lambda) = \lambda I - S$ ile tanımlansın. O zaman;

$$\|F(\mu) - F(\lambda)\| = \|\mu I - S - (\lambda I - S)\| = |\mu - \lambda|$$

olduğundan F süreklidir. Sonuç 2.33 gereğince $\sigma(S) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : F(\lambda) \text{ terslenemez} \}$ kümesi kapalıdır. Δ

Bu teorem ile bir S operatörünün, $\mathbb{C}$ kümesinin merkezi orijin ve yarıçapı $\|S\|$ olan kapalı ve sınırlı bir alt kümesi olduğunu açıklanmıştır (Rynne ve Youngson [5]).

Lemma 4.12 Eğer H kompleks bir Hilbert uzayı ve $S \in B(H, H)$ ise,

$$\sigma(S^*) = \{ \bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(S) \} \text{ dir.}$$

İspat: Eğer $\lambda \notin \sigma(S)$ ise o zaman $(S - \lambda I)^{-1}$ nin tersi vardır. Lemma 2.34' den $(S - \lambda I)^* = S^* - \bar{\lambda} I$ nin tersi vardır denebilir. Yani; $\bar{\lambda} \notin \sigma(S^*)$ dir. Yine benzer şekilde eğer $\bar{\lambda} \notin \sigma(S^*)$ ise o zaman $\lambda \notin \sigma(S)$ dir. Böylece; $\sigma(S^*) = \{ \bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(S) \}$ dir. Δ

Bu sonuçlar doğrultusunda, Örnek 4.10' da tanımlanan kaydırma operatörü S^* in spektrumu bulunmuştur (Rynne ve Youngson [5]).

(a) Eğer $|\lambda| < 1$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ ise, o zaman; λ , S^* ' in bir özdeğeridir.

(b) $\sigma(S) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1 \}$

Çözüm : (a) $|\lambda| < 1$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun.

Sıfırdan farklı bir $(x_n) \in l_2$ bulunmalıdır. Öyle ki $S^*((x_n)) = \lambda(x_n)$ olsun.

$$S^*(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_2, \dots, x_n, \dots) \text{ dir.}$$

Bu ise $(x_2, \dots, x_n, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n, \dots)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $(x_n) \in l_2$ bulunması gerektiği anlamına gelir. Yani; her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = \lambda x_n$ olmalıdır. Bu eşitliğin bir çözümü $(x_n) = (\lambda^{n-1})$ dir. Bununla birlikte, $|\lambda| < 1$ olduğundan;

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda^n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^{2n} < \infty$$

ve $(x_n) \in l_2$ dir. Böylece $S^*((x_n)) = \lambda(x_n)$ dir. Sonuç olarak λ , S^* ' in bir özdeğeridir. Dolayısıyla, $\lambda \in \sigma(S^*)$ dir.

(b) (a)' dan ve $\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1 \} \subseteq \sigma(S^*)$ olduğundan lemma 4.12' ye göre $\{ \bar{\lambda} \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1 \} \subseteq \sigma(S)$ dir. $\{ \bar{\lambda} \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1 \} = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1 \}$ olduğundan $\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1 \} \subseteq \sigma(S)$ dir. $\sigma(S)$ kapalı olduğundan $\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1 \} \subseteq \sigma(S)$ olur.

$|\lambda| > 1$ ise, o zaman, $\lambda \notin \sigma(S)$ dir. Böylece; $\sigma(S) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1 \}$ elde edilir.

BÖLÜM 5

HİLBERT UZAYLARINDA KOMPAKT OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİ

H sonlu boyutlu bir Hilbert uzayı ve T bir kompakt operatör iken $\sigma(T)$ spektrumu her biri sonlu katlılığa sahip boş kümeden farklı özdeğerlerin sonlu bir kümesidir. Sonsuz boyutlu uzaylar içindeki kompakt operatörler için spektrum, sonlu boyutlu uzaylardaki spektrum ile birçok benzerlik gösterir. Kompakt bir T operatörünün spektrumu incelenirken λ özdeğerinin iki farklı durumu ele alınmıştır (Rynne ve Youngson [5], Soykan [7]).

Öncelikle $\lambda = 0$ noktası göz önüne alınarak $\sigma(T)$ incelenmiştir.

Teorem 5.1: H sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayı ve $T \in K(H, H)$ olsun. Bu durumda; $0 \in \sigma(T)$ dir. Eğer; H ayrılabilir değil ise o zaman, $0 \in \sigma_p(T)$ dir.

İspat: $0 \in \rho(T)$ olduğunu varsayalım. O zaman T terslenebilir olurdu ancak I birim operatörü sonsuz boyutlu uzaylarda kompakt olmadığından T^{-1} operatörü de kompakt olamaz. Dolayısıyla $0 \in \sigma(T)$ dir.

H ayrılabilir değil ise, teorem 3.8 gereğince $\overline{\text{Im}T} \neq H$ dir. Bu durumda $\text{Ker}T \neq \{0\}$ dir. Dolayısıyla, $\overline{\text{Im}T}^\perp \neq \{0\}$ dir. O halde, $T(e) = 0$ olacak şekilde $e \neq 0$ vardır ve e , T 'nin sıfır özdeğerli bir özvektörüdür. Böylece $0 \in \sigma_p(T)$ dir. Δ

Şimdi, $\lambda \neq 0$ durumunu göz önüne alalım.

Teorem 5.2 H bir Hilbert uzayı ve $T \in K(H, H)$ olsun. $\lambda \neq 0$ ise $\text{Ker}(T - \lambda I)$ sonlu boyutludur.

İspat: Aksini kabul edelim, yani $\text{Ker}(T - \lambda I)$ sonlu boyutlu olmasın. Sınırlı bir operatörün çekirdeği kapalı olduğundan $\text{Ker}(T - \lambda I)$ sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayıdır.

Her sonsuz boyutlu Hilbert uzayı ortonormal bir dizi içerdiğinden $(T - \lambda I)^{-1}(0)$ ve $\text{Ker}(T - \lambda I)$ içinde ortonormal bir (e_n) dizisi vardır. $(e_n) \in \text{Ker}(T - \lambda I)$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $Te_n = \lambda e_n$ bulunur. (e_n) ortonormal ve $\lambda \neq 0$ olduğundan (λe_n) dizisi yakınsak bir alt diziye sahip olamaz. Bu ise T^* nin kompaktlığı ile çelişir. Δ

Teorem 5.3 H bir Hilbert uzayı ve $T \in K(H, H)$ olsun. $\lambda \neq 0$ ise $\text{Im}(T - \lambda I)$ kapalıdır.

İspat: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ olmak üzere (y_n) , $\text{Im}(T - \lambda I)$ içinde bir dizi olsun. O zaman, her bir n için, $y_n = (T - \lambda I) x_n$ olacak şekilde bir x_n vardır. $\text{Ker}(T - \lambda I)$ kapalı olduğundan, $u_n \in \text{Ker}(T - \lambda I)$ ve $v_n \in \text{Ker}(T - \lambda I)^\perp$ olmak üzere x_n vektörü $x_n = u_n + v_n$ formunda ortogonal ayrışımına sahiptir. $\text{Ker}(T - \lambda I)^\perp$ kümesinin kapalı olduğu gösterilmelidir. Bunun için de (v_n) dizisinin sınırlılığını incelemek yeterli olacaktır.

$(v_n)'$ in sınırlı olmadığını kabul edilsin.

O zaman; her n için $\|v_n\| \neq 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\| = \infty$ olduğunu kabul edilebilir. $w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$ $n = 1, 2, \dots$ ise, o zaman; $w_n \in \text{Ker}(T - \lambda I)^\perp$ ve $\|w_n\| = 1$ dir. (y_n) sınırlı olduğundan $(T - \lambda I) w_n = \frac{y_n}{\|v_n\|} \rightarrow 0$ elde edilir. Ayrıca T^* nin kompaktlığından (Tw_n) dizisinin yakınsak olduğu kabul edilir. Böylece; $\lambda \neq 0$ olduğundan $(w_n)'$ in yakınsak olduğu elde edilir.

$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$ ise, $\|w\| = 1$ ve $(T - \lambda I)w = \lim_{n \rightarrow \infty} (T - \lambda I)w_n = 0$ bulunur. Bu nedenle, $w_n \in \text{Ker}(T - \lambda I)^\perp$ elde edilir. Bununla birlikte; $w_n \in \text{Ker}(T - \lambda I)^\perp$ dir. Bu nedenle,

$$\|w - w_n\|^2 = (w - w_n, w - w_n) = 1 + 1 = 2 \text{ dir.}$$

Bu ise, $w_n \rightarrow w$ ile çelişir. Sonuç olarak (v_n) dizisi sınırlıdır.

T kompakt olduğundan (Tv_n) dizisinin yakınsak olduğu kabul edilebilir. O zaman, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$v_n = \lambda^{-1}(Tv_n - (T - \lambda I)v_n) = \lambda^{-1}(Tv_n - y_n) \text{ dir.}$$

(v_n) dizisi yakınsaktır. $(v_n)'$ in limiti v olsun. O zaman,

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (T - \lambda I)v_n = (T - \lambda I)v \text{ dir.}$$

Bu nedenle; $y \in \text{Im}(T - \lambda I)$ dir. Bu ise, $\text{Im}(T - \lambda I)'$ nin kapalı olduğunu gösterir. Δ

T^* operatörü de kompakt olduğundan teoremler T^* için de sağlanır. Yani, $\lambda \neq 0$ ise, $\text{Im}(T^* - \bar{\lambda}I)$ kümesi de kapalıdır.

Sonuç 5.4 H bir Hilbert uzayı ve $T \in K(H, H)$ olsun. $\lambda \neq 0$ ise,

$$\text{Im}(T - \lambda I) = \text{Ker}(T^* - \bar{\lambda}I)^\perp$$

$$\text{Im}(T^* - \bar{\lambda}I) = \text{Ker}(T - \lambda I)^\perp \text{ dir. } \Delta$$

Şimdi, $\sigma(T)$ ve $\sigma(T^*)$ 'nin sıfır olmayan parçasının yapısı incelenmeye başlanabilir.

Teorem 5.5 H bir Hilbert uzayı ve $T \in K(H, H)$ olsun. Herbir $t > 0$ reel sayısı için T 'nin $|\lambda| \geq t$ 'yi sağlayan bütün farklı özdeğerlerinin kümesi sonludur.

İspat: Tersine, bazı $t_0 > 0$ ve her n için $|\lambda_n| \geq t_0$ olmak üzere farklı özdeğerlerin bir (λ_n) dizisinin var olduğunu kabul edilsin ve bu özdeğerlere karşılık gelen birim özvektörlerin bir dizisi (e_n) olsun. Tümevarımla birim vektörlerin belirli bir (y_n) dizisi elde edilir. $y_1 = e_1$ olsun. Herhangi bir $k \geq 1$ tamsayısını göz önüne alınsın.

$\{e_1, \dots, e_k\}$ kümesi lineer bağımsızdır. $M_k = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$ kümesi k boyutludur ve bu nedenle de kapalıdır. Herhangi bir $e \in M_k$, $e = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k$ olarak yazılabilir.

$$(T - \lambda I)e = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)e_1 + \dots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)e_{k-1}$$

elde edilir. Bu nedenle eğer $e \in M_k$ ise, o zaman; $(T - \lambda_k I)e \in M_{k-1}$ dir. Benzer yolla $e \in M_k$ ise, o zaman; $Te \in M_k$ bulunur.

M_k, M_{k+1} 'nin kapalı alt uzayıdır ve M_{k+1} 'e eşit değildir. Bu nedenle, M_k 'nin M_{k+1} içindeki ortogonal bütünleyeni M_{k+1} 'in lineer bir özalt uzayıdır. O halde; her $e \in M_k$ için $(y_{k+1}, e) = 0$ ve $\|y_{k+1} - e\| \geq 1$ olacak şekilde bir $y_{k+1} \in M_{k+1}$ birim vektörü vardır. Bu yöntemle devam edilirse, tümevarımla bir (y_n) dizisi elde edilir.

Yukarıdaki sonuçlar doğrultusunda $-(T - \lambda I)y_n + Ty_m \in M_{n-1}$ olduğundan ve (y_n) dizisinin özelliklerinden $n > m$ 'yi sağlayan her n, m tamsayıları için,

$$\|Ty_n - Ty_m\| = |\lambda_n| \|y_n - \lambda_n^{-1}[-(T - \lambda I)y_n + Ty_m]\| \geq |\lambda_n| \geq t_0$$

elde edilir. Bu, (Ty_n) dizisinin yakınsak bir alt diziye sahip olamayacağını gösterir. Δ

Sonuç 5.6 H bir Hilbert uzayı ve $T \in K(H, H)$ olsun. $\sigma_p(T)$ kümesi en çok sayılabilir sonsuzluktadır. Eğer (λ_n) , T 'nin farklı özdeğerlerinin bir dizisi ise, o zaman; $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ dır.

İspat: $|\lambda_n| \geq r^{-1}$, $r = 1, 2, \dots$ olmak üzere λ özdeğerlerinin sonlu kümelerinin birleşimini alarak ve bir önceki teoremi kullanarak istenen elde edilir. Δ

X, Y normlu uzaylar ve $C \in B(X, X)$, $D \in B(X, Y)$, $E \in B(Y, X)$ ve $F \in B(Y, Y)$ olsun.

$M(x, y) = (Cx + Dy, Ex + Fy)$ ile bir $M : X \times Y \rightarrow X \times Y$ operatörünü tanımlayalım. Bu operatör

$M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & D \\ E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ matris gösterimi ile temsil edilebilir. Burada matrislerin içindeki elemanlar operatörler veya vektörler olarak düşünülse de matris çarpımını hesaplamak için standart matris çarpım kuralları kullanılır.

Önerme 5.7 X, Y normlu uzaylar olmak üzere,

$C \in B(X, X)$, $D \in B(X, Y)$, $E \in B(Y, X)$ ve $F \in B(Y, Y)$ olsun. $(x, y) \in X \times X$ olduğu kabul edilsin. $M(x, y) = (Cx + Dy, Ex + Fy)$ ile bir $M : X \times Y \rightarrow X \times Y$ operatörünü tanımlansın. Y üzerindeki birim operatör I_Y olsun ve $X \times Y$ üzerinde

$$M_1 = \begin{bmatrix} C & D \\ D & I_Y \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} C & D \\ E & I_Y \end{bmatrix}$$

matrisleri ile temsil edilen operatörleri göz önüne alınsın. O zaman,

- (a) $M \in B(X, Y)$
- (b) C terslenebilir ise M_1 ve M_2 terslenebilirdir.
- (c) C terslenebilir değil ise o zaman,
 $\text{Ker} M_1 = \text{Ker} C \times \{0\}$ dir ve $\text{Ker} M_2 = \{(x, y) : x \in \text{Ker} C \text{ ve } y = -Ex\}$

Önerme 5.8 H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H, H)$ olsun. T sonlu ranka sahipse ve $\lambda \neq 0$ ise, o zaman ya

- (a) $\lambda \in \rho(T)$ ve $\bar{\lambda} \in \rho(T^*)$

ya da

- (b) $\lambda \in \sigma_p(T)$ ve $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$

İspat: $M = \text{Im} T$ ve $N = \text{Ker} T^* = M^\perp$ olsun. M sonlu boyuta sahip olduğundan kapalıdır ve bu nedenle; her bir $x \in H$ vektörü $u \in M$, $v \in N$ olmak üzere bir $x = u + v$ ortogonal ayrışımına sahiptir. Bu ayrışımı kullanarak her bir $x \in H$ vektörünü bir tek $(u, v) \in M \times N$ ile eşlenebilir. Ayrıca, $(T - \lambda I)(u + v) = Tu - \lambda u + Tv - \lambda v$ dir. $Tu - \lambda u \in M$, $Tv \in M$ ve $-\lambda v \in N$ dir. Buradan; $(T - \lambda I)$ operatörü

$$(T - \lambda I) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (T - \lambda I)|_M & T|_N \\ 0 & -\lambda I|_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

ile matris formunda belirtilebilir. Burada $(T - \lambda I)|_M \in B(M, M)$, $T|_N \in B(N, M)$ ve $I|_N \in B(N, N)$ operatörleri $T - \lambda I$, T ve I operatörlerinin M ve N uzaylarına kısıtlanışlarıdır. $C = (T - \lambda I)|_M$ olsun.

C ya terslenebilirdir ya da $\text{rank}(T - \lambda I) = \text{rank} C > 0$ dır. Yani, ya $\lambda \in \rho(T)$ ya da $\lambda \in \sigma_p(T)$ dir.

H' nin M ve N üzerine olan ortogonal projeksiyonları P_M ve P_N olsun. $I = P_M + P_N$ ve $N = \text{Ker} T^*$ olduğunu kullanarak ,

$(T^* - \bar{\lambda} I)(u+v) = (T^* - \bar{\lambda} I)u - \bar{\lambda} v = P_M(T^* - \bar{\lambda} I)u + P_N T^* u - \bar{\lambda} v$ bulunur. O halde; $(T^* - \bar{\lambda} I)$ operatörü

$$(T^* - \bar{\lambda} I) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_M(T^* - \bar{\lambda} I)|_M & 0 \\ P_N T^* u & -\bar{\lambda} I|_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

ile matris formunda temsil edilebilir.

İlk olarak $C^* = P_M(T^* - \bar{\lambda} I)|_M \in B(M, M)$ olduğu ıspatlansın.

Her $u, w \in M$ için,

$$\begin{aligned} (Cu, v) &= ((T - \lambda I)u, w) = (u, (T^* - \bar{\lambda} I)w) = (P_M, (T^* - \bar{\lambda} I)w) \\ &= (u, P_M(T^* - \bar{\lambda} I)w) \end{aligned}$$

dir. Eşlenik operatörün tanımından $C^* = P_M(T^* - \bar{\lambda} I)|_M$ dir.

$\text{rank}(C) > 0$ ise $\text{rank}(T - \lambda I) = \text{rank}(T^* - \bar{\lambda} I) > 0$ dır. Bu nedenle;

$\lambda \in \sigma_p(T)$ ya da $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$ dır. Δ

Bu sonuçlar genel bir T kompakt operatörüne genellenebilir.

Teorem 5.9 H bir Hilbert uzayı ve $T \in K(H, H)$ olsun. $\lambda \neq 0$ ise, o zaman, ya

(a) $\lambda \in \rho(T)$ ve $\bar{\lambda} \in \rho(T^*)$

ya da

(b) $\lambda \in \sigma_p(T)$ ve $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$

koşullarından biri sağlanır. Ayrıca $\text{rank}(T - \lambda I) = \text{rank}(T^* - \bar{\lambda} I) < \infty$ dır.

İspat: Problem ilk olarak sonlu ranklı bir operatörün durumuna indirgensin. T sınırlı ve kompakt olduğundan, $\|\lambda^{-1}(T - T_F)\| < \frac{1}{2}$ olacak şekilde H üzerinde sonlu ranklı bir T_F operatörü vardır. Bu nedenle $S = I - \lambda^{-1}(T - T_F)$ ve S^* operatörleri terslenebilirdir.

$G = T_F S^{-1}$ denirse, o zaman $T - \lambda I = (G - \lambda I)S$ dir.

Buradan; $T^* - \bar{\lambda}I = S^* (G^* - \bar{\lambda}I)$ bulunur. S ve S^* terslenebilir olduklarından $T - \lambda I$ ve $T^* - \bar{\lambda}I$ terslenebilmesi için gerek yeter koşul $G - \lambda I$ ve $G^* - \bar{\lambda}I$ operatörlerinin terslenebilmesidir sonucu elde edilir. Ayrıca,

$$\text{rank}(T - \lambda I) = \text{rank}(G - \lambda I)$$

$$\text{rank}(T^* - \bar{\lambda}I) = \text{rank}(G^* - \bar{\lambda}I)$$

bulunur. Δ

Teorem 5.10 H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H, H)$ operatörü kendine eş ve kompakt olsun. T operatörünün sıfırdan farklı özdeğerlerinin kümesi boştan farklı ve sonludur. T operatörünün özdeğerlerinin oluşturduğu dizi sıfıra yakınsar. Sıfırdan farklı her bir özdeğeri reeldir ve sonlu katlılığa sahiptir. Farklı özdeğerlere ait özvektörleri ortogonaldır.

İspat: Teorem 5.2, teorem 5.5 ve sonuç 5.6 yardımıyla teoremdeki yargılar kolayca gösterilebilir.

Farklı özdeğerlere ait özvektörlerin ortogonal olduğu gösterilsin.

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ özdeğerine ait özvektörler e_1, e_2 olsun. O zaman, T kendine eş olduğundan,

$$\lambda_1(e_1, e_2) = (Te_1, e_2) = (e_1, Te_2) = \lambda_2(e_1, e_2) \text{ dir.}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan $(e_1, e_2) = 0$ dir. Δ

Teorem 5.11 H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H, H)$ operatörü kendine eş ve kompakt olsun. T^c nin sıfırdan farklı özdeğerlerinin sayısı $r(T)$ olsun. $\{e_n\}_{n=1}^{r(T)}$ özvektörlerinin kümesi $\overline{\text{Im}(T)}$ kümesi için bir ortonormal bazdır. $\{\lambda_n\}_{n=1}^{r(T)}$, T^c nin sıfırdan farklı özdeğerleri olmak üzere, T operatörünün

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x, e_n) e_n$$

temsili vardır.

İspat: $M = \overline{\text{span}}\{e_n\}_{n=1}^J$ olsun. Böylece; teorem 2.27 gereğince $\{e_n\}_{n=1}^J$, M için bir ortonormal baz olur. $M = \text{Im}(T)$ olduğu gösterilecek. Yani, $J = r(T)$ elde edilmeli. Eğer $r(T) < \infty$ ise, o zaman, $\text{Im}T$ kapalıdır. Böylece; $\text{Im}T = \overline{\text{Im}(T)}$ dir

Herhangi bir $u \in M$ için $\alpha_n = (u, e_n)$, $n = 1, \dots, J$ olmak üzere $u = \sum_{n=1}^J \alpha_n e_n$ dir. Böylece; eğer $J = \infty$ ise,

$$u = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \alpha_n \lambda_n^{-1} T e_n = \lim_{k \rightarrow \infty} T(\sum_{n=1}^k \alpha_n \lambda_n^{-1} e_n) \in \overline{\text{Im}(T)} \text{ dir.}$$

Böylece; $M \subset \overline{\text{Im}(T)}$ dir. Aynı sonuç, $J < \infty$ için limitler yok farzedilerek elde edilebilir. Buradan, teorem 3.8 ve lemma 2.28 yardımıyla $\text{Ker}T = \overline{\text{Im}(T)}^\perp \subset M^\perp$ olduğu elde edilir.

$M^\perp \subset \text{Ker}T$ olduğu gösterilecek.

Böylece; $M^\perp = \text{Ker}T$ olduğu elde edilerek $M = M^{\perp\perp} = \overline{\text{Im}(T)}$ olduğu sonucuna varılacak.

Eğer, $J = \infty$ ve $u \in M$ ise, o zaman,

$$\begin{aligned} Tu &= T(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \alpha_n e_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \alpha_n T e_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \lambda_n \alpha_n e_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n e_n \in M \text{ dir.} \end{aligned}$$

Aynı sonuç, $J < \infty$ için limitler yok varsayılarak elde edilebilir. Böylece; M , T' nin altında invaryanttır. Lemma 2.30 $N = M^\perp$ kümesinin T altında invaryant olmasını gerektirir. T' nin N' ye kısıtlanması T_N ile gösterilsin. T_N kendine eş ve kompakttır. T_N 'in, N üzerinde sıfırdan farklı bir operatör olduğu düşünölsün. O zaman, T_N 'in sıfırdan farklı özdeğerleri $\tilde{\lambda}$ vardır. Bu özdeğere ait özvektör $\tilde{e} \in N$ dir.

Tanım gereğince, $T\tilde{e} = T_N\tilde{e} = \tilde{\lambda}\tilde{e}$ dir. Dolayısıyla, $\tilde{\lambda}$, T' nin sıfırdan farklı bir özdeğeri olur. Bazı n 'ler için $\tilde{\lambda} = \lambda_n$ olduğu elde edilmelidir. $\tilde{e}$, λ_n 'e ait özvektörler tarafından gerilen alt uzaya ait olmalıdır. Ancak, bu alt uzay M' in alt uzayı olduğundan $\tilde{e} \in M$ olur, ki bu ise, $\tilde{e} \in N = M^\perp$ olması ile çelişir. Dolayısıyla, T_N sıfır operatörü olmalıdır. Yani, her $v \in N$ için $Tv = T_Nv = 0$, ya da $M^\perp = N \subset \text{Ker}T$ dir. Δ

Sonuç 5.12 H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H, H)$ operatörü kendine eş ve kompakt olsun.

$\text{Ker}(T) = \{0\}$ ise, o zaman, özvektörlerin kümesi $\{e_n\}_{n=1}^{r(T)}$, H için ortonormal bir bazdır. H sonsuz boyutlu ve $\text{Ker}(T) = \{0\}$ ise, o zaman, T nin sonsuz tane özdeğeri vardır. Δ

Sonuç 5.13 H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H, H)$ operatörü kendine eş ve kompakt olsun.

H ayrılabilir olsun. O zaman H' nin, sadece T' nin özvektörlerinden oluşan bir ortonormal bazı vardır. $\{e_n\}_{n=1}^{r(T)}$, $\overline{\text{Im}(T)}$ 'nin bir ortonormal bazı ve $\{z_n\}_{n=1}^{n(T)}$, $\text{Ker}(T)$ 'nin

nin bir ortonormal bazı olmak üzere H' nin bir ortonormal bazı $\{e_n\}_{n=1}^{r(T)} \cup \{z_n\}_{n=1}^{n(T)}$ formundadır. Δ

Hibert uzaylarındaki bazı kompakt operatörlerin spektrumu Kreyszig [6] ve Eidelman vd. [8]' den alınan problemler ile araştırılmıştır.

Problem 5.14 $K : L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$ ve $0 \leq t,s \leq 1$ için $k(t,s) = \min[t,s]$ olmak üzere,

$$(Kf)(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s)ds$$

ile tanımlansın.

a) K operatörünün kendine eş ve kompakt olduğu gösterilsin.

b) K' nin spektrumu bulunsun.

c) K' nin özvektörlerinin ortonormal olduğu gösterilsin.

Çözüm: $k(t,s) = \overline{k(s,t)}$ ve $k(t,s)$ sürekli bir fonksiyon olduğundan K kendine eş ve kompakttır. Böylece; K' nin spektrumu sıfır ve reel özdeğerlerden oluşmaktadır. $\lambda y = Ky$ olduğu varsayalım. Bu ise,

$$\lambda y(t) = \int_0^t sy(s)ds + t \int_t^1 y(s)ds$$

anlamına gelir. İfadenin diferansiyeli alınarak;

$$\lambda y'(t) = ty(t) + \int_t^1 y(s)ds - ty(t) = \int_t^1 y(s)ds ,$$

$$\lambda y''(t) = - y(t)$$

elde edilir. $\lambda \neq 0$ dır. Aksi halde, $y = 0$ ve dolayısıyla, $\text{Ker}K = 0$ olurdu. $y'(1) = y(0) = 0$ sınır değerler koşullarını sağlayan $\lambda y'' + y = 0$ diferansiyel denklemi var. Diferansiyel denklem $\bar{y}$ çarpılıp $0'$ dan $1'$ e integre edilirse,

$$\lambda \int_0^1 y''(t) \bar{y}(t)dt + \|y\|^2 = 0$$

$$\lambda(y'\bar{y}|_0^1 - \int_0^1 |y'|^2 dt) + \|y\|^2 = 0$$

elde edilir. Sınır değer koşulları

$$- \lambda \int_0^1 |y'|^2 dt + \|y\|^2 = 0$$

bulunmasını sağlar ve böylece $\lambda > 0$ dır.

Diferansiyel denklemin çözümü,

$$y = c_1 \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} t + c_2 \sin \frac{1}{\sqrt{\lambda}} t \text{ dir.}$$

Sınır değer koşullarından $c_1 = 0$, $c_2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0$ dır. Böylece; $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{-\pi}{2} + \pi k$ dır.

Buradan, her $k = 1, 2, \dots$ için K' nin özdeğerleri $\lambda_k = \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}$ bulunur. λ_k özdeğerine

ait özvektör ise $\varphi_k(t) = \sin \frac{\pi(2k-1)}{2} t$ dir. $\|\varphi_k\| = 1$ dir.

Problem 5.15 Önceki problem

$$k(t,s) = \begin{cases} 1-t, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ 1-s, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

iken çözüm aransın.

Çözüm: $k(t,s) = \overline{k(s,t)}$ ve $k(t,s)$ sürekli bir fonksiyon olduğundan K kendine eş ve kompakttır. Böylece; K' nin spektrumu sıfır ve reel özdeğerlerden oluşmaktadır.

$\lambda y = Ky$ olduğu varsayalım. Bu ise,

$$\lambda y(t) = (1-t) \int_0^t y(s) ds + \int_t^1 (1-s) y(s) ds$$

İfadenin diferansiyeli alınarak;

$$\lambda y'(t) = - \int_t^1 y(s) ds + (1-t)y(t) - (1-t)y(t) = - \int_0^t y(s) ds ,$$

$$\lambda y''(t) = - y(t)$$

elde edilir. $\lambda \neq 0$ dır. Aksi halde, $y = 0$ ve dolayısıyla, $\text{Ker} K = 0$ olurdu. $y'(1) = y(0) = 0$ sınır değer koşullarını sağlayan $\lambda y'' + y = 0$ diferansiyel denklemi var. Diferansiyel denklem $\bar{y}$ çarpılıp 0 ' dan 1 ' e integre edilirse,

$$\lambda \int_0^1 y''(t) \bar{y}(t) dt + \|y\|^2 = 0$$

$$\lambda (y' \bar{y}|_0^1 - \int_0^1 |y'|^2 dt) + \|y\|^2 = 0$$

elde edilir. Sınır değer koşulları

$$- \lambda \int_0^1 |y'|^2 dt + \|y\|^2 = 0$$

bulunmasını sağlar ve böylece $\lambda > 0$ dır.

Diferansiyel denklemin çözümü,

$$y = c_1 \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} t + c_2 \sin \frac{1}{\sqrt{\lambda}} t \text{ dir.}$$

Sınır değer koşullarından $c_2 = 0$ ve $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{-\pi}{2} + \pi k$ dir. Buradan, her $k = 1, 2, \dots$ için K 'nin özdeğerleri $\lambda_k = \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}$ bulunur.

λ_k özdeğerine ait özvektör ise $\varphi_k(t) = \cos \frac{\pi(2k-1)}{2} t$ dir. $\|\varphi_k\| = 1$ dir.

Problem 5.16 $T: l_2 \rightarrow l_2$ olmak üzere $Tx = (\frac{x_2}{1}, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{3}, \dots)$ ile tanımlansın.

T operatörünün kompakt ve $\sigma_p(T) = \{0\}$ olduğu gösterilsin.

(Burada $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$ dir.)

Çözüm : $(e_n) = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots) \in l_2$ (n .terimi 1) olsun.

Bir $x_n = (x, e_n) \in l_2$ dizisini göz önüne alınsın. O zaman,

$$\|Tx_n\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{n} e_n \right\|^2 = \|Tx\|^2 \text{ dir.}$$

Yani, $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx$ dir. Böylece; Tx_n yakınsaktır. Dolayısıyla, T operatörü kompakttır.

$x = (1, 0, 0, \dots)$ özvektörü göz önüne alınsın. $Tx = \lambda x$ eşitliğini sağlansın.

$$T(1, 0, 0, \dots) = (0, 0, \dots) = 0 \cdot (1, 0, 0, \dots)$$

olduğundan $\lambda = 0$ bulunur. O halde; $\sigma_p(T) = \{0\}$ dir.

Problem 5.17 Örnek 4.8' de tanımlanan S operatörünün kompakt olduğu gösterilsin.

Çözüm: $(e_n) = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots) \in l_2$ (n .terimi 1) olsun.

O zaman,

$$\|Sx_n\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} e_{n+1} \right\|^2 = \|Sx\|^2 \text{ dir.}$$

Yani, $\lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = Sx$ dir. Böylece; Sx_n yakınsaktır, dolayısıyla; S operatörü kompakttır.

Problem 5.16 ve 5.17' de tanımlı olan T ve S operatörleri birbirinin eşleniğidir:

Her $x, y \in l_2$ için $(Sx, y) = (x, S^*y)$ olacak şekilde $S^*y = z = (z_1, z_2, z_3, \dots) \in l_2$ vektörü bulunsun.

$$\begin{aligned} ((0, \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots)) &= 0\overline{y_1} + \frac{x_1}{1}\overline{y_2} + \frac{x_2}{2}\overline{y_3} + \dots \\ &= x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} + x_3\overline{z_3} + \dots \end{aligned}$$

ise, $z_1 = y_2, z_2 = \frac{y_3}{2}, z_3 = \frac{y_4}{3} \dots$ dir. Yani, $S^*y = (y_2, \frac{y_3}{2}, \frac{y_4}{3}, \dots) = Ty$ bulunur.

Her $x, y \in l_2$ için $(Tx, y) = (x, T^*y)$ olacak şekilde $T^*y = z = (z_1, z_2, z_3, \dots) \in l_2$ vektörü bulunsun.

$$\begin{aligned} ((\frac{x_2}{1}, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{3}, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots)) &= 0x_1 + \frac{x_2}{1}\overline{y_1} + \frac{\overline{x_3}}{2}y_2 + \frac{x_4}{3}\overline{y_3} + \dots \\ &= x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} + x_3\overline{z_3} + \dots \end{aligned}$$

ise, $z_1 = 0, z_2 = \frac{y_1}{1}, z_3 = \frac{y_2}{2} \dots$ dir. Yani, $T^*y = (0, \frac{y_1}{1}, \frac{y_2}{2}, \dots) = Sy$ bulunur.

Problem 5.18 $T_n : R^n \rightarrow R^n$ olmak üzere $T_n x = (0, \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_{n-1}}{n-1})$ ile tanımlı operatör dizisinin özdeğerleri $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ iken bulunsun.

Çözüm: λ, T_n 'nin özdeğeri ise $T_n x = \lambda x$ eşitliğini sağlayan bir x özvektörü vardır.

$\lambda = 0, T_n$ 'nin özdeğeri olsun. O halde;

$$T_n x = (0, \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_{n-1}}{n-1}) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = (0, 0, \dots, 0) \text{ dir.}$$

Bu ise; $0 = \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \dots = \frac{x_{n-1}}{n-1} = 0$ olmasını gerektirir. Bu durumda $x_n \neq 0$ alınabilir. Böylece; $\lambda = 0, T_n$ 'nin $(0, 0, \dots, 1)$ özvektörlü bir özdeğeri olur.

$$\sigma_p(T_n) = \{0\} \text{ dir.}$$

$\lambda \neq 0$ olsun. O zaman, $\lambda x_1 = 0$ olduğundan, $x_1 = 0$ dir. Buradan, $\lambda x_2 = x_1 = 0$ dir ve $x_2 = 0$ bulunur. Bu yolla devam edilirse, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ bulunur ki, bu ise $x \neq 0$ olmasıyla çelişir. Böylece; T_n operatörünün $\lambda = 0$ dışında özvektörü olmadığı görülür.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Hilbert uzayları üzerinde, kompakt ve kendine eş kompakt operatörlerin spektrumu incelendi. Kreyszig [6] ve Eidelman, vd. [8] ‘den alınan bazı problemlerde, operatörlerin kompaktlık, kendine eşlik ve spektrum araştırılması yapılarak aşağıdaki sonuçlara varıldı.

Problem 5.16 ve problem 5.17 ‘de tanımlanan operatörlerin birbirlerinin eşlenikleri oldukları gösterildi. Ancak; kendine eş olmadıkları görüldü. Böylece; kompakt bir operatörün eşleniğinin de kompakt bir operatör olduğu örneklendi. $\lambda = 0$ ın, T operatörünün özdeğeri iken S operatörünün öz değeri olmadığı gösterilerek, $\sigma_p(T) = \{0\}$ ancak $\sigma_p(S) = \emptyset$ iken $\sigma(T) = \sigma(S) = \{0\}$ olabileceği görüldü.

Bu sonuç, kompakt operatörler üzerinde genellenebilir mi? Yani, $\lambda = 0 \in \sigma_p(T)$ ise $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ olduğu söylenebilir mi? Sorusunun incelemeye açık olduğu görüldü.

Problem 5.17 de tanımlı S operatörü için $\text{Im}S = l_2$ olduğundan $\text{rank}S = \dim(\text{Im}S) = \infty$ dur. Problem 5.18 de tanımlı T_n operatörü için $\text{Im}T_n = R^n$ olduğundan $\text{rank}(T_n) = n$ dir. S ve T_n operatörleri aynı operatörler olmasına rağmen tanımlandıkları uzaylar ve rankları farklıdır. Sonsuz ranka sahip olan S operatörünün özdeğeri yoktur. Sonlu ranka sahip T_n operatörünün ise $(0,0,\dots,1)$ özvektörlü $\lambda = 0$ özdeğeri vardır. Dolayısıyla, operatörler aynı olmasına rağmen $\sigma_p(S) \neq \sigma_p(T_n)$ olabileceği görüldü.

Bu sonuç, kompakt operatörler üzerinde genellenebilir mi? Yani, T kompakt bir operatör ve $\text{rank}(T) < \infty$ ise $\lambda = 0 \in \sigma_p(T)$ olduğu söylenebilir mi? Sorusunun incelemeye açık olduğu görüldü.

KAYNAKLAR

- [1] Dunderf, N. , Schawartz, J. (1988). Linear Operators Part 1: General Theory, John Wiley & Sons, New Jersey.
- [2] Young, N. , (1988). An İntroduction to Hilbert Space, Cambrige University Press
- [3] Dorier, J. , (2000). On The Teaching of Linear Algebra, Springer.
- [4] Şuhubi, E. , (2001). Fonksiyonel Analiz, 1. Baskı, İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul.
- [5] Rynee, B.P. ve Youngson,M.A.,(2000). Linear Funtional Analysis, Second Edition, Springer.
- [6] Kreszig, E. ,(1989). Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York.
- [7] Soykan, Y. , (2008). Fonksiyonel Analiz, Nobel Dağıtım, Ankara.
- [8] Eidelman, Y. , Milman, V. ve Tsolomitis, A. (2004). Functional Analysis An İntroduction, American Mathematical Society Providence, Rhode Island

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ayça KAYRAK
Doğum Tarihi ve Yeri : 12.06.1986 / SİVAS
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : ayca_kayrak@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi	2008
Lise	Fen Bilimleri	Akif Ersezgin Anadolu Lisesi - İZMİR	2004