

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YARI HALKALARIN ASAL SPEKTRUMU

GÜLŞEN ULUCAK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. ÜNSAL TEKİR**

İSTANBUL, 2011

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YARI HALKALARIN ASAL SPEKTRUMU

GÜLŞEN ULUCAK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. ÜNSAL TEKİR**

İSTANBUL, 2011

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YARI HALKALARIN ASAL SPEKTRUMU

Gülşen ULUCAK tarafından hazırlanan tez çalışması 20.06.2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Ünsal TEKİR
Marmara Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Ünsal TEKİR
Marmara Üniversitesi

Yard. Doç. Dr. Kürşat H. ORAL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yard. Doç. Dr. Ali DELİCE
Marmara Üniversitesi



ÖNSÖZ

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç.Dr.Ünsal TEKİR'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Tez savunmam boyunca desteklerini esirgemeyen değerli hocam Yard.Doç.Dr.Kürşat H. ORAL hocama ve değerli arkadaşım Ayşen N. ÖZKİRİŞÇİ ye de teşekkürü borç bilirim.

Mayıs 2011

Gülşen ULUCAK

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	Vi
ÖZET	Vii
ABSTRACT.....	Viii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti.....	1
1.2 Tezin Amacı.....	2
1.3 Hipotez.....	2
BÖLÜM 2	
TOPOLOJİK UZAYLAR.....	3
BÖLÜM 3	
YARI HALKALARIN TEMEL TANIM VE ÖZELLİKLERİ.....	7
3.1 Yarı Halkalarda İdealler.....	11
3.2 Bölüm Yarı Halkaları.....	18
3.3 Yarı Halkalarda Homomorfizmalar	23
3.4 İdeallerin Genişleme ve Kısıtlamaları	29
BÖLÜM 4	
YARI HALKALARDA ASAL İDEALLER.....	30
4.1 $\square^+$ da Asal İdealler	33
BÖLÜM 5	
YARI HALKALARIN ASAL SPEKTRUMU.....	34
5.1 Regüler Uzaylar	50
BÖLÜM 6	

SONUÇ VE ÖNERİLER.....	52
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	55

SİMGE LİSTESİ

(X, τ)	Topolojik uzay
$P(X)$	Kuvvet kümesi
$\bar{Y}$	Y kümesinin kapanışı
τ_A	A kümesi üzerindeki Relatif topoloji
$A - B$	A kümesinin B kümesinden farkı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$I \cap J$	I ve J kümelerinin kesişimi
$\sqrt{I}$	I idealinin radikali
$N(S)$	S yarı halkasının nil radikali
$Spec(S)$	S yarı halkasının asal ideallerinin kümesi
$h(I)$	I idealini kapsayan asal ideallerin kümesi
$\tau(Y)$	Y nin τ açık komşuluğu
$Max(S)$	S yarı halkasının maksimal ideallerinin kümesi
$U(S)$	S yarı halkasının birimsel elemanlarının kümesi
$I(S)$	S yarı halkasının ideallerinin kümesi
$Spec(S)^\wedge$	S yarı halkasındaki asal ideallerin kesişimlerinden oluşan küme
$\emptyset$	Alt küme değildir
$\not\subset$	Has alt küme değildir

ÖZET

YARI HALKALARIN ASAL SPEKTRUMU

Gülşen ULUCAK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ünsal TEKİR

Tezin temel amacı halkaların asal ideallerinin kümesi üzerinde kurulan Zariski topolojisini ve özelliklerini değişmeli ve birimli yarı halkaların asal idealleri üzerinde kurmak ve topolojik özellikleri göstermektir.

Bunun için ilk önce yarı halka kavramı ve temel özellikleri ispatlanmıştır. Yarı halkaların idealleri ve homomorfizmaları ile halka idealleri ve homomorfizmalar arasında ilişkiler kurulmuştur. Bölüm halkaları cebirsel yapısı gibi bölüm yarı halkaları inşa edilmiştir. Yarı halkaların ideallerinin genişleme ve kısıtlamaları tanımlanmış ve gerekli özellikler tanıtılmıştır. Yarı halkalarda asal ideal kavramı ve özellikleri tanıtılmıştır. Daha sonra yarı halkaların asal idealleri üzerinde Zariski topolojisi kurulmuş ve ayırma aksiyomları incelenmiştir.

Sonuç olarak halkaların asal idealleri üzerinde kurulmuş olan topolojiye benzer şekilde topoloji kurulmuş ve özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yarı halkalar, asal idealler, Zariski topolojisi, asal spektrum.

ABSTRACT

PRIME SPECTRUM OF A SEMIRING

Gülşen ULUCAK

Department of Mathematics
MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ünsal TEKİR

In this study, for any commutative semiring S with identity, we define topology on prime ideals of S , which is analogous to that for any ring R .

For this, we give the definition and some properties of any semiring. We give relation between ideals of rings and semirings. We introduce quotient semiring which is similar to algebraic structure of quotient ring. Also we define extension and contraction of ideals of any semiring. We give definition of prime ideals of semirings and their properties. Then we define Zariski topology set of all prime ideals of semiring and we search for separation axioms for this topology.

Key Words: Semiring, prime ideal, Zariski topology, prime spectrum.

1.1 Literatür Özeti

An Introduction to General Topology, Genel Topoloji, General Topology, The Zariski Topology on the Prime Spectrum of a Module adlı kaynaklardan topolojinin tanımı, topolojik özellikler ve ayırma aksiyomları konuları incelenmiştir.

A Radical Theory for Semirings adlı kaynağın yarı halkaların temel tanım ve özellikleri, bölüm yarı halkaları ve yarı halkalar üzerinde homomorfizmalar konularından faydalanılmıştır. Semirings-Algebraic Theory and Applications in Computer Science adlı kitaptan yarı halkalar ile ilgili örnekler alınmıştır. Değişmeli Halkalar ve Modüller, On Prime and Maximal k -Subsemimodules of Semimodules ve On Ideals in Semirings adlı kaynaklardan yarı halkaların asal ideal, maksimal ideal, minimal ideal tanımlarını yapmada ve bu ideallerin bazı özelliklerini ispatlamada yararlanılmıştır.

The Prime Spectrum of a Ring, Separation Axioms and The Prime Spectrum of Commutative Semirings adlı makalelerden yarı halkaların üzerinde topoloji kurmak için ve bu topolojinin sober, spektral ve süperkompakt uzay olduklarını göstermek için faydalanılmıştır. More on λ -closed Sets in Topological Spaces, More on δ -Semiopen Sets, On λ -sets and The Dual of Generalized Continuity adlı makalelerde ki λ -closed kümelerin tanımlarından yararlanılarak yarı halkaların asal idealleri üzerinde R_0 -uzayı, R_1 -uzayı ve ayırma aksiyomları arasındaki durumlar ispatlandı.

1.2 Tezin Amacı

Halkaların asal idealleri üzerinde kurulmuş olan Zariski topolojisini yarı halkaların asal idealleri üzerinde kurmaya çalışacağız. Eğer yarı halkalar üzerinde bu topoloji kurulabilirse bu topoloji üzerinde ayırma aksiyomlarını ve bu aksiyomların aralarındaki durumu görmeyi hedefliyoruz.

1.3 Hipotez

Halkaların asal idealleri üzerinde bir topoloji kurulabildiğinden benzer şekilde bir topoloji yarı halkaların asal idealleri üzerinde de kurulabilir.

BÖLÜM 2

TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde topoloji tanımını, bazı teoremleri ve ayırma aksiyomları açıklanmıştır. Bu bölüm [1], [2] ve [15] numaralı kaynaklardan yararlanılarak derlenmiştir.

Tanım 2.1 $\emptyset \neq X$ bir küme olsun. Eğer $P(X)$ kuvvet kümesinin bir alt kümesi τ aşağıdaki koşulları sağlarsa τ ya X üzerinde bir topoloji denir.

- a) $X \in \tau$ ve $\emptyset \in \tau$,
- b) $U_1 \in \tau$ ve $U_2 \in \tau$ iken $U_1 \cap U_2 \in \tau$,
- c) τ kümesinin keyfi sayıda elemanlarından oluşan herhangi bir alt aile $\sigma = \{U_i : i \in \Delta\}$ olmak üzere $\bigcup_{i \in \Delta} U_i \in \tau$.

Tanım 2.2 τ topolojisinin her bir elemanına (X, τ) uzayında bir açık küme (τ -açık küme) adı verilir.

Sonuç 2.3 (X, τ) topolojik uzayında;

- a) X ve $\emptyset$ açık kümelerdir.
- b) Sonlu sayıda açık kümenin kesişimi de açıktır.
- c) Keyfi sayıda açık kümenin birleşimi de açıktır.

Tanım 2.4 Bir (X, τ) topolojik uzayında açık bir kümenin tümleyeni olan kümeye veya tümleyeni açık olan kümeye kapalı küme denir.

Önerme 2.5 Bir (X, τ) topolojik uzayında;

- a) $\emptyset$ ve X birer kapalı küme.

b) Sonlu sayıda kapalı kümenin birleşimi de kapalıdır.

c) Keyfi sayıda kapalı kümenin kesişimi de kapalıdır.

Tanım 2.6 Bir (X, τ) topolojik uzayını ve bu uzayın bir Y alt kümesini göz önüne alalım. Bu uzayın Y alt kümesini içeren tüm kapalı alt kümelerinin kesişimine Y nin kapanışı denir ve $\bar{Y}$ ile gösterilir.

Sonuç 2.7 Bir (X, τ) topolojik uzayında Y nin kapanışı, Y kümesini içeren en küçük kapalı kümedir.

Teorem 2.8 $x \in \bar{Y}$ olması için gerek ve yeter koşul x i içeren her açık küme ile Y nin kesişimi boştan farklıdır.

Önerme 2.9 Bir (X, τ) topolojik uzayının bir Y alt kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul $Y = \bar{Y}$ olmasıdır.

Tanım 2.10 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in bazı alt kümelerinin meydana getirdiği β küme ailesinin bir taban teşkil etmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir:

1. $\beta \subset \tau$,

2. Eğer $\emptyset \neq U \in \tau$ ise $U = \bigcup_{B_\alpha \in \beta} B_\alpha$ şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.11 (X, τ) bir topolojik uzayının boş olmayan bir alt kümesi $A \subset X$ olsun. τ_A ile X in bütün τ -açık kümeleri ile A nın arakesitlerinden meydana gelen kümeyi gösterelim. Bu küme sistemine A üzerinde Relatif Topoloji denir ve (A, τ_A) ile gösterilir. (A, τ_A) , (X, τ) nun bir alt uzayıdır. A nın bir W alt kümesi τ_A -açık olması için $W = U \cap A$ olacak şekilde X in bir U açık kümesi vardır.

Tanım 2.12 Bir X kümesi, bu kümenin bir Y alt kümesi ve bir $\omega \subset P(X)$ ailesi verilmiş olsun. Eğer $Y \subseteq \bigcup \{U : U \in \omega\}$ oluyorsa ω ailesine Y alt kümesinin bir örtüsü denir. Eğer ω sayılabilir ise sayılabilir örtü, ω sonlu ise sonlu örtü denir. Ayrıca, X üzerindeki bir τ topolojisi için eğer $\omega \subset \tau$ ise ω örtüsünün durumuna göre açık örtü, sayılabilir açık örtü ve sonlu açık örtü şeklinde kullanılır.

Tanım 2.13 Bir (X, τ) topolojik uzayının her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa bu uzaya kompakt uzay denir.

Tanım 2.14 (X, τ) ve (Y, η) birer topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer Y nin her açık alt kümesinin ters görüntüsü X de açıksa f fonksiyonuna sürekli denir.

Teorem 2.15 (X, τ) ve (Y, η) birer topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul Y nin her kapalı alt kümesinin ters görüntüsünün kapalı olmasıdır.

Tanım 2.15 Bir (X, τ) topolojik uzayının $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için x içeren fakat y yi içermeyen veya y yi içeren fakat x i içermeyen bir açık kümesi varsa (X, τ) topolojik uzayına T_0 – uzayı ve τ topolojisine de T_0 – topolojisi denir.

Teorem 2.16 (X, τ) topolojik uzay T_0 – uzayı olması için gerek ve yeter koşul $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için $\{\bar{x}\} = \{\bar{y}\}$.

Tanım 2.17 Bir (X, τ) topolojik uzayının $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için x içeren fakat y yi içermeyen ve y yi içeren fakat x i içermeyen iki açık kümesi varsa bu uzaya T_1 – uzayı ve τ topolojisine de T_1 – topolojisi denir.

Teorem 2.18 (X, τ) topolojik uzayının T_1 – uzayı olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümesinin kapalı olmasıdır.

Tanım 2.19 Bir (X, τ) topolojik uzayının $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U , V açık kümeleri varsa bu uzaya Hausdorff uzayı veya T_2 – uzayı denir.

Teoerm 2.20 Aşağıdaki özellikler denktir:

a) X uzayı Hausdorff uzayıdır.

b) $a \in X$ olsun. $x \neq a$ olacak şekildeki her $x \in X$ için $a \in U$ iken $x \notin \bar{U}$ olacak şekilde bir U açık kümesi vardır.

Sonuç 2.21 Her T_2 – uzayı, T_1 – uzayı ve her T_1 – uzayı, T_0 – uzayıdır.

Tanım 2.22 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $F \subset X$ kapalı kümesi ve $x \notin F$ noktası için $x \in U$, $F \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U , V açık kümeleri varsa bu uzaya Regüler uzay denir.

Teorem 2.23 Her kompakt T_2 – uzayı regüler uzaydır.

İspat (X, τ) topolojik uzayı kompakt T_2 – uzayı olsun. F , bu uzayın kapalı bir kümesi ve $x \in X - F$ olsun. Öyleyse her $y \in F$ için $x \neq y$ dir. (X, τ) , T_2 – uzayı olduğundan $x \in U_y$, $y \in V_y$ ve $U_y \cap V_y = \emptyset$ olacak şekilde U_y , V_y açık kümeleri vardır.

$F \subseteq \bigcup_{y \in F} V_y$ dir ve F kapalı kümesi kompakt olduğundan $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ olacak şekilde bir

alt örtüsü vardır. $V = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ olsun. Her $x \neq y$, $i = 1, 2, \dots, n$ için $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ kümesi x i kapsayan açık bir kümedir ve $U \cap V = \emptyset$ dir. Çünkü bir $z \in U$ için $z \in U_{y_i}$ olacak şekilde bir i vardır. Fakat, $z \notin V_{y_i}$ dir ve böylece $z \notin V$ dir.

Tanım 2.24 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in her ayrık kapalı küme çifti F_1 ve F_2 için $F_1 \subset U$, $F_2 \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U , V açık kümeleri varsa bu uzaya Normal uzay denir.

BÖLÜM 3

YARI HALKALARIN TEMEL TANIM ve ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde yarı halkaların temel tanımları, yarı halkaların idealleri, bölüm yarı halkaları, yarı halkalar üzerinde homomorfizma ve yarı halkaların genişleme ve kısıtlamaları incelenmiştir. Bu bölüm de kaynaklar [4], [5] ve [6] dan faydalanarak derlenmiştir.

Tanım 3.1 S boştan farklı bir küme olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(S, *)$ cebirsel yapısına yarı grup denir.

- i) S kümesi $*$ işlemine göre kapalıdır.
- ii) Her $a, b, c \in S$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ dir.

Tanım 3.2 S boştan farklı bir küme ve üzerinde tanımlı iki işlem $+$ ve $.$ olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(S, +, .)$ cebirsel yapısına bir yarı halka denir.

S1) $(S, +)$ bir yarı gruptur.

S2) $(S, .)$ bir yarı gruptur.

S3) Her $a, b, c \in S$ için $a.(b + c) = a.b + a.c$ ve $(a + b).c = a.c + b.c$ dir.

S4) Her $a, b \in S$ için $a + b = b + a$ dir.

S5) Her $a \in S$ için $a + 0 = 0 + a = a$ olacak şekilde $0 \in S$ vardır.

S6) Her $a \in S$ için $0.a = a.0 = 0$ dir.

Not 3.3 Bu tanımdan sonra $a.b$ ifadesi yerine ab ifadesini kullanacağız. Yani $.$ işlemini tanımlarken $.$ simgesini kullanmayacağız.

Tanım 3.4 $(S, \times)$ bir yarı grup olsun. Her $a \in S$ için $e_l \times a = a$ sağlayan $e_l \in S$ sol doğal eleman denir. Her $a \in S$ için $a \times e_r = a$ sağlayan $e_r \in S$ sağ doğal eleman denir. Sol ve sağ doğal eleman olan $e \in S$ her $a \in S$ için $e \times a = a \times e = a$ sağlıyorsa e ye doğal eleman denir.

Tanım 3.5 $(S, +, \cdot)$ bir yarı halka olsun. $(S, \cdot)$ yarı grubu bir doğal elemanı e varsa e ye $(S, +, \cdot)$ yarı halkasının birim elemanı denir.

Örnek 3.5 Her halka bir yarı halkadır.

Uyarı 3.6 Her yarı halka, halka olmak zorunda değildir. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyelim:

Örnek 3.7 $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \cup \{0\}$ kümesi üzerinde bilinen toplama ve çarpma işlemi tanımlı olsun. Bu durumda $\mathbb{Q}_0$ kümesi halka olmayan bir yarı halkadır.

Çözüm $\mathbb{Q}_0$ bir yarı halkadır fakat bir halka değildir. Örneğin; $2 \in \mathbb{Q}_0$ elemanın $+$ işlemine göre tersi yoktur.

Örnek 3.8 Sabit bir $m \in \mathbb{Q}$ için $U_0 = m\mathbb{Q}_0 = \{u = mn : n \in \mathbb{Q}_0\}$ olsun. U_0 kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemleri altında bir yarı halkadır.

Çözüm S1) $(U_0, +)$ bir yarı grup olduğunu gösterelim.

i) Her $u, u' \in U_0$ için $u = mn$ ve $u' = mn'$ olacak şekilde $n, n' \in \mathbb{Q}_0$ vardır.

$n + n' \in \mathbb{Q}_0$ için $u + u' = mn + mn' = m(n + n') \in U_0$ olur.

ii) Her $u, u', u'' \in U_0$ için $u = mn$, $u' = mn'$ ve $u'' = mn''$ olacak şekilde $n, n', n'' \in \mathbb{Q}_0$ vardır.

$$\begin{aligned} u + (u' + u'') &= mn + (mn' + mn'') = mn + m(n' + n'') = m(n + (n' + n'')) \\ &= m((n + n') + n'') = m(n + n') + mn'' = (mn + mn') + mn'' = (u + u') + u'' \end{aligned}$$

S2) $(U_0, \cdot)$ bir yarı grup olduğunu gösterelim.

i) Her $u, u' \in U_0$ için $u = mn$ ve $u' = mn'$ olacak şekilde $n, n' \in \mathbb{Q}_0$ vardır.

$uu' = mnmn' = m(nmn') \in U_0$ dır, $nmn' \in \mathbb{Q}_0$ için.

ii) Her $u, u', u'' \in U_0$ için $u = mn$, $u' = mn'$ ve $u'' = mn''$ olacak şekilde $n, n', n'' \in \mathbb{N}_0$ vardır.

Her $n \in \mathbb{N}_0$ için $mn \in \mathbb{N}_0$ ve $\mathbb{N}_0$ çarpmanın birleşme özelliği olduğundan

$$u(u'u'') = (uu')u''.$$

S3) Her $u, u', u'' \in U_0$ için $u = mn$, $u' = mn'$ ve $u'' = mn''$ olacak şekilde $n, n', n'' \in \mathbb{N}_0$ vardır.

Her $n \in \mathbb{N}_0$ için $mn \in \mathbb{N}_0$ ve $\mathbb{N}_0$ çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği olduğundan

$$u(u' + u'') = uu' + uu'' \text{ ve } (u + u')u'' = uu'' + u'u''.$$

S4) Her $u, u' \in U_0$ için $u = mn$ ve $u' = mn'$ olacak şekilde $n, n' \in \mathbb{N}_0$ vardır.

$$u + u' = mn + mn' = m(n + n') = m(n' + n) = mn' + mn = u' + u.$$

S5) $0 \in \mathbb{N}_0$ için $0 = m0$ dır.

$u \in U_0$ için $u = mn$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}_0$ vardır.

$$u + 0 = 0 + u = mn + m0 = m(n + 0) = mn = u$$

S6) Her $u \in U$ için $0u = 0mn = 0 = mn0 = u0 = 0$ dır.

Örnek 3.9 $P = \{ p : p \text{ pozitif reel sayı} \}$ olmak üzere $P_0 = P \cup \{0\}$, P_0 kümesi üzerinde $+$ işlemi $p, q \in P_0$ için $p + q = \max(p, q)$ olarak tanımlansın. P_0 kümesi bu tanımlanan $+$ ve $\cdot$ bilinen çarpma işlemleri altında bir yarı halkadır.

Çözüm S1) $(P_0, +)$ yarı grup olduğunu gösterelim.

i) Her $p, q \in P_0$ için $p + q = \max(p, q) = p$ veya q olur. Yani, $p + q \in P_0$ dır.

ii) Her $p, q, r \in P_0$ için

$$p + (q + r) = p + \max(q, r) = \max(p, \max(q, r)) = \max(p, q, r)$$

$$(p + q) + r = \max(p, q) + r = \max(\max(p, q), r) = \max(p, q, r).$$

S2) $(P_0, \cdot)$ yarı grup olduğunu gösterelim.

i) Her $p, q \in P_0$ için $pq \in P_0$ dır.

ii) Her $p, q, r \in P_0$ için $p(qr) = (pq)r$ dır.

S3) Her $p, q, r \in P_0$ için

$$p(q + r) = p \max(q, r) = \max(pq, pr) = pq + pr$$

$$(p + q)r = \max(p, q)r = \max(pr, qr) = pr + qr .$$

S4) Her $p \in P_0$ için $p + q = \max(p, q) = \max(q, p) = q + p$ dır.

S5) Her $p \in P_0$ için $\max(p, 0) = \max(0, p) = p$ olacak şekilde $0 \in P_0$ vardır.

S6) Her $p \in P_0$ için $p0 = 0p = 0$ dır.

Örnek 3.10 $P = \{ p : p \text{ pozitif reel sayı} \}$ olmak üzere $P_0 = P \cup \{0\}$, P_0 kümesi üzerinde $+$ işlemi $p, q \in P_0$ için $p + q = \max(p, q)$ ve $\cdot$ işlemi her $p, q \in P_0$ için $pq = \min(p, q)$ olarak tanılsın. P_0 kümesi $+$ ve $\cdot$ işlemleri altında bir yarı halkadır.

Çözüm S1) $(P_0, +)$ yarı grup olduğunu Örnek 3.9 da gösterilmişti.

S2) $(P_0, \cdot)$ yarı grup olduğunu gösterelim.

i) Her $p, q \in P_0$ için $pq = \min(p, q) = p$ veya q olur. Yani, $pq \in P_0$ dır.

ii) Her $p, q, r \in P_0$ için

$$p(qr) = p \min(q, r) = \min(p, \min(q, r)) = \min(p, q, r)$$

$$(pq)r = \min(p, q)r = \min(\min(p, q), r) = \min(p, q, r) \text{ dir.}$$

S3) $p, q, r \in P_0$ ve $p < q < r$ olsun.

$$p(q + r) = p \max(q, r) = \min(p, r) = p$$

$$pq + pr = \min(p, q) + \min(p, r) = p + p = \max(p, p) = p$$

ve buradan da $p(q + r) = pq + pr$ dir. Diğer durumlarda benzer şekilde gösterilebilir.

Benzer şekilde $(p + q)r = pr + qr$ olduğu gösterilebilir.

S4) Her $p \in P_0$ için $p + q = \max(p, q) = \max(q, p) = q + p$ dır.

S5) Her $p \in P_0$ için $\max(p, 0) = \max(0, p) = p$ olacak şekilde $0 \in P_0$ vardır.

S6) Her $p \in P_0$ için $p0 = \min(p, 0) = 0p = \min(0, p) = 0$ dır.

Tanım 3.11 I, S yarı halkasının boştan farklı bir alt kümesi olsun. I, S deki işlemlere göre bir yarı halka ise I ya alt yarı halka denir.

Lemma 3.12 I, S yarı halkasının boştan farklı bir alt kümesi olsun. I nın alt yarı halka olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in I$ için

i) $a + b \in I$,

ii) $ab \in I$ olmasıdır,

iii) $0 \in I$ dır.

İspat $\Rightarrow$: I, S yarı halkasının alt yarı halkası olsun. Tanımdan i), ii) ve iii) sağlandığı açıktır.

$\Leftarrow$: **S1)** Her $a, b, c \in I$ için $I \subseteq S$ olduğundan $a + (b + c) = (a + b) + c$ ve i) den $a + b \in I$ elde edilir. Böylece $(S, +)$ bir yarı gruptur.

S2) Her $a, b, c \in I$ için $I \subseteq S$ olduğundan $a(bc) = (ab)c$ ve ii) den $ab \in I$ olur. Buradan $(S, \cdot)$ bir yarı gruptur.

S3) Her $a, b, c \in I$ için $I \subseteq S$ olduğundan $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$ olur.

S4) Her $a, b \in I \subseteq S$ olduğundan $a + b = b + a$ olur.

S5) Her $a \in I$ ve $I \subseteq S$ den dolayı $a + 0 = 0 + a = a$ elde edilir.

S6) Her $a \in I$ ve $I \subseteq S$ olduğundan $a0 = 0a = 0$ olur.

Örnek 3.13 Örnek 3.8 deki U_0 kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre $\mathbb{N}_0$ negatif olmayan tam sayılar yarı halkasının bir alt yarı halkasıdır.

Çözüm $U_0 \subset \mathbb{N}_0$ dir. Her $u, u' \in U_0$ için

i) $u + u' \in U_0$,

ii) $uu' \in U_0$ kümesi $\mathbb{N}_0$ yarı halkasının alt yarı halkasıdır.

iii) $0m = 0 \in U_0$ dır.

3.1 Yarı Halkalarda İdealler

Tanım 3.14 S bir yarı halka ve I , S nin bir alt yarı halkası olsun. Her $i \in I$ ve her $s \in S$ için $si \in I$ ($is \in I$) ise I kümesine S nin bir sol(sağ) ideali denir. I , hem sağ hem de sol ideal oluyorsa I ya S nin ideali denir. I , S yarı halkasının bir ideali ise S nin sıfırını içerir. Gerçekten ideal tanımını kullanırsak her $i \in I$ için $i0 = 0i = 0 \in I$ olmalıdır. S yarı halkasının ideallerinin kümesini $I(S)$ ile göstereceğiz.

Lemma 3.15 S bir yarı halka ve I , S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. I nın S yarı halkasının bir ideali olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in I$ ve her $s \in S$ için;

i) $a + b \in I$,

ii) $sa, as \in I$ olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$: I , S yarı halkasının bir ideali olsun. Her $a, b \in I$ ve her $s \in S$ için $sa, sa \in I$ sağlanır. Her ideal bir alt yarı halka olduğundan $a + b \in I$ sağlanır.

$\Leftarrow$: i) ve ii) sağlansın. I , S yarı halkasının bir idealidir.(Aşık)

Örnek 3.16 $\mathbb{N}_0$ kümesi Örnek 3.7 den bilinen toplama ve çarpma işlemleri altında bir yarı halkadır. $I = \{0\} \cup \{i \in \mathbb{N} : i \geq 5\} \subset \mathbb{N}_0$ kümesi $\mathbb{N}_0$ in bir idealidir.

Çözüm i) $i, j \in I$ olsun.

$i = 0$ ve $j = 0$ ise $i + j = 0$ dır.

$i \neq 0$ veya $j \neq 0$ ise $i + j \geq \max(i, j) \geq 5$ olduğundan $i + j \in I$ olur.

ii) $n \in \mathbb{N}_0$ veya $i \in I$ olsun.

1) $i = 0$ ve $n = 0$ ise $in = ni = 0 \in I$ dır.

2) $i \neq 0$ ve $n \neq 0$ ise $in = ni \geq i \geq 5$ olduğundan $in = ni \in I$ dır.

Dolayısıyla I , $\mathbb{N}_0$ in idealidir.

Örnek 3.17 $\mathbb{N}_0$ kümesi Örnek 3.7 den bilinen toplama ve çarpma işlemleri altında bir yarı halkadır. $J = \{j \in \mathbb{N} : j = 3h, h \in \mathbb{N}^+\}$ kümesi $\mathbb{N}_0$ in bir idealidir.

Çözüm i) $j, l \in J$ olsun. O halde $j = 3h$ ve $l = 3k$ olacak şekilde $h, k \in \mathbb{N}^+$ vardır.

$j + l = 3h + 3k = 3(h + k)$ olacak şekilde $h + k \in \mathbb{N}^+$ vardır. Buradan $j + l \in J$ dir.

ii) $n \in \mathbb{N}_0$ ve $j \in J$ olsun. O halde $j = 3h$ olacak şekilde bir $h \in \mathbb{N}^+$ vardır.

$nj = n(3h) = 3(nh)$ ve benzer şekilde $jn = (3h)n = 3(hn)$ dir. Böylece $nj, jn \in J$ dir.

$J, \square_0$ in bir idealidir.

Teorem 3.18 S bir yarı halka ve I ile J, S yarı halkasının iki ideali olsun.

i) $I \cap J, S$ nin bir idealidir.

ii) $I + J = \{i + j : i \in I, j \in J\}, S$ nin bir idealidir.

iii) $IJ = \{\sum_{k=1}^n i_k j_k : i_k \in I, j_k \in J, n \in N\}, S$ nin bir idealidir.

iv) a) $a \in S$ için $aS = \{as : s \in S\}, S$ nin sağ ideali,

b) $Sa = \{sa : s \in S\}, S$ nin sol ideali,

c) $SaS = \{\sum_{i=1}^n s_i a r_i : s_i, r_i \in S, n \in N\}, S$ nin idealidir.

v) B, S nin bir ideali ve A da B nin bir ideali ise $A' = A + AS + SA + SAS$ kümesi A tarafından üretilen S nin bir idealidir.

İspat i) $a, b \in I \cap J \Rightarrow a, b \in I$ ve $a, b \in J$

dir. Buradan $a + b \in I$ ve $a + b \in J$ olduğundan $a + b \in I \cap J$ elde edilir.

$a \in I \cap J, s \in S \Rightarrow a \in I, b \in J$

dir. Buradan $as, sa \in I$ ve $as, sa \in J$ olduğundan $as, sa \in I \cap J$ elde edilir.

ii) $i_1, i_2 \in I$ ve $j_1, j_2 \in J$ olmak üzere $i_1 + j_1, i_2 + j_2 \in I + J$ olsun.

$(i_1 + j_1) + (i_2 + j_2) = (i_1 + i_2) + (j_1 + j_2) \in I + J$

dir. $i + j \in I + J$ olsun. $s(i + j) = si + sj \in I + J$ ve benzer şekilde $(i_2 + j_2)s \in I + J$ dir.

iii) $a, b \in IJ$ olsun.

O halde $i_k, i_t \in I$ ile $j_k, j_t \in J$ için $a = \sum_{k=1}^n i_k j_k$ ve $b = \sum_{t=1}^m i_t j_t$ olarak alabiliriz.

$$a + b = \sum_{k=1}^n i_k j_k + \sum_{t=1}^m i_t j_t = \sum_{l=1}^{n+m} i_l j_l \in IJ$$

dir. Her $s \in S$, $a = \sum_{k=1}^n i_k j_k \in IJ$ olsun.

$$sa = s(\sum_{k=1}^n i_k j_k) = \sum_{k=1}^n (s i_k) j_k \in IJ$$

ve benzer şekilde $as \in IJ$ dir.

iv) a) $as_1, as_2 \in aS$ olsun. Buradan $as_1 + as_2 = a(s_1 + s_2) \in aS$ dir.

$k \in N$ ve her $s, s_k \in S$ olmak üzere her $as_k \in aS$ için $(as_k)s = a(s_k s) \in aS$ olur.

b) Yukarıdakine benzer şekilde gösterilebilir.

c) $x = \sum_{i=1}^n s_i ar_i$, $y = \sum_{i=1}^m s'_i ar'_i \in SaS$ olsun. $x + y = \sum_{i=1}^n s_i ar_i + \sum_{i=1}^m s'_i ar'_i \in SaS$ olur.

Her $s \in S$ ve $x = \sum_{i=1}^n s_i ar_i$ için $sx = \sum_{i=1}^n s(s_i ar_i) = \sum_{i=1}^n (ss_i) ar_i \in SaS$

$xs = (\sum_{i=1}^n s_i ar_i)s = \sum_{i=1}^n s_i a(r_i s) \in SaS$ elde edilir.

v) Öncelikle A' nün ideal olduğunu sonra da A yı kapsayan en küçük ideal olduğunu gösterelim. Teoremin önceki aksiyomlarından AS , SA , SAS nin ve ideallerin toplamlarının ideal olduklarını ispatlamıştık. Dolayısıyla A' idealdir. Şimdi A yı kapsayan herhangi bir I idealini alalım. Buradan $A \subseteq I$ ve I bir ideal olduğundan $AS, SA, SAS \subseteq I$ olur. Dolayısıyla $A' = A + SA + AS + SAS \subseteq I$ elde edilir. Seçilen her I ideali için A' , I da kapsanır. Dolayısıyla A yı kapsayan en küçük ideal A' dür.

Tanım 3.7 S bir yarı halka ve I , S nin bir ideali olsun.

$I_S^* = \{s \in S : s+i \in I \text{ olacak şekilde en az bir } i \in I \text{ vardır}\}$ kümesine I nın S de kapanışı denir. Genellikle hangi yarı halkada kapanış aldığımız belli olacağından I_S^* daki alt indisi yazmayacağız ve I^* ile göstereceğiz.

Önerme 3.19 S bir yarı halka ve I , S nin bir ideali olmak üzere $I \subseteq I^*$ dir.

İspat $s \in I$ olsun. Her ideal toplamsal birim olan sıfırı içerdiğinden $0 \in I$ için $s + 0 = s \in I$ dir. Buradan $s \in I^*$ olur.

Önerme 3.20 S bir yarı halka ve I ile J de S nin iki ideali olmak üzere $I \subseteq J$ ise $I^* \subseteq J^*$ dir.

İspat $s \in I^*$ olsun. Şu halde $s + i \in I$ olacak şekilde $i \in I$ vardır. Böylece $I \subseteq J$ olduğundan $s + i \in J$ ve $i \in J$ dir. Dolayısıyla $I^* \subseteq J^*$ dir.

Teorem 3.21 S bir yarı halka ve I , S nin bir ideali ise I^* da S nin bir idealidir.

İspat $x, y \in I^*$ olsun. Şu halde $x + i, y + j \in I$ olacak şekilde $i, j \in I$ vardır.

I , S nin ideali olduğundan $(x + i) + (y + j) = x + y + i + j \in I$ ve $i + j \in I$ dir. Böylece $x + y \in I^*$ dir. $x \in I^*$ ve $s \in S$ olsun. Buradan $x + i \in I$ olacak şekilde $i \in I$ vardır. I , S nin bir ideali olduğundan $s(x + i) = sx + si \in I$ ve $si \in I$ dir. Dolayısıyla $sx \in I^*$ dir. Benzer şekilde $xs \in I^*$ dir.

Tanım 3.22 I , S yarı halkasının bir ideali olmak üzere $I = I^*$ ise I idealine S nin kapalı ideali denir. Eğer S bir halka ise S nin kapalı idealleri ile S nin idealleri eşittir.

Lemma 3.23 S bir yarı halka ve I , S nin bir ideali olsun. Şu halde I^* , S nin bir kapalı idealidir.

İspat $(I^*)^* = I^*$ olduğunu gösterelim. $I \subseteq I^*$ olduğunu biliyoruz. Buradan $I^* \subseteq (I^*)^*$ dir. Şimdi ters kapsamayı gösterelim. $x \in (I^*)^*$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x + a^* = b^*$ olacak şekilde $a^*, b^* \in I^*$ vardır. Ayrıca $a^* + i = j$ ve $b^* + l = k$ olacak şekilde $i, j, l, k \in I$ vardır.

Böylece; $x + j + l = x + (a^* + i) + l = (x + a^*) + i + l = b^* + i + l = (b^* + l) + i = k + i \in I$ ve $j + l, k + i \in I$ olduğundan $x \in I^*$ dir. Buradan da $(I^*)^* \subseteq I^*$ elde edilir.

Lemma 3.24 I ve J , S yarı halkasının iki ideali olmak üzere $I^* + J^* \subseteq (I + J)^*$ dir.

İspat $x + y \in I^* + J^*$ olsun.

$x \in I^*, y \in J^*$ olduğundan $x+i \in I, y+j \in J$ olacak şekilde $i \in I, j \in J$ vardır. Şu halde $i+j \in I+J$ olmak üzere $(x+i)+(y+j)=(x+y)+(i+j) \in I+J$ dir. Buradan $x+y \in (I+J)^*$ elde ederiz.

Aşağıdaki örnekte göstereceğimiz gibi bir yarı halkanın tüm ideallerinin kapalı olması gerekmez.

Örnek 3.25 $\mathbb{Z}_0$, bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile Örnek 3.7 den bir yarı halkadır. Örnek 3.16 den $I = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{Z}_0 : x \geq 5\}$ ve Örnek 3.8 den $J = \{x \in \mathbb{Z}_0 : x = 3h, h \in \mathbb{Z}^+\}$ kümeleri $\mathbb{Z}_0$ in idealleridir. Burada $I, \mathbb{Z}_0$ yarı halkasının kapalı ideali değil iken $J, \mathbb{Z}_0$ in kapalı idealidir.

Çözüm $I \subseteq I^*$ olduğunu biliyoruz. $12 \in I$ için $4+12 \in I$ iken $4 \in I^*$ dır. Fakat $4 \notin I$ dir. Buradan $I^* \not\subseteq I$ olduğundan I, S nin kapalı ideali değildir. $x \in J^*$ olsun. Burada $x+j \in J$ olacak şekilde $j \in J$ vardır. $j \in J$ olduğundan $j = 3k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Dolayısıyla $x \in J$ dir. Böylece $J^* \subseteq J$ sağlanır. Ters kapsamanın her zaman sağlandığını biliyoruz. Böylece J, S nin kapalı idealidir.

Tanım 3.26 I, S yarı halkasının bir ideali olsun.

$I^n = \{\sum_{i \in J} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n} : a_{i_k} \in I, k = 1, 2, \dots, n\}$ kümesine I idealinin n . kuvveti denir.

Tanım 3.27 S bir yarı halka olsun. $s \in S$ için $s^n = 0$ olacak şekilde n pozitif tamsayısı varsa s elemanına nilpotent eleman denir.

Tanım 3.28 S yarı halkasının bir I idealinin her elemanı nilpotent ise I idealine nil ideal, $I^n = (0)$ olacak şekilde n pozitif tamsayısı varsa I idealine nilpotent ideal denir.

Önerme 3.29 S bir yarı halka ve I, S nin bir ideali olsun. I nın bir nilpotent ideal olması için gerek ve yeter koşul bir n pozitif tamsayısı için I nin her n elemanın çarpımının sıfır olmasıdır.

Yani $I^n = (0)$ olması için gerek ve yeter koşul her $a_i \in I$ için $a_1 a_2 \dots a_n = 0$ olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$: Açık.

$\Leftarrow$: $x = \sum_{i \in J} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n} \in I^n$ olsun. Kabulümüzden her $a_1 a_2 \dots a_n = 0$ olduğundan $I^n = (0)$ dır.

Önerme 3.30 Bir yarı halkanın her nilpotent ideali bir nil idealdir.

İspat I , S yarı halkasının bir nilpotent ideali olsun. Şu halde $I^n = (0)$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $a \in I$ için $a^n = 0$ olduğu görülür. Sonuçta I bir nil idealdir.

Sonuç 3.31 S yarı halkasının nilpotent ideallerinin toplamı nil ideallerinin toplamı tarafından kapsanır.

İspat Her nilpotent idealin nil ideal olduğunu yukarıda göstermiştik. Ayrıca nil ideallerin toplamı da nil ideal olduğundan, nilpotent ideallerin toplamı nil ideal olur. Dolayısıyla bütün nil ideallerin toplamı tarafından kapsanır.

Lemma 3.32 S bir yarı halka ve I , S nin bir ideali olsun. Bir m pozitif tamsayısı için $I^m = (0)$ ise I dan $m-n$ tane eleman ile I^* dan n tane elemanın çarpımı sıfırdır. ($0 \leq n \leq m$)

İspat Tümevarım ile ispatı yapalım. Eğer $n = 0$ ise çarpım I dan m tane eleman içerir ve $I^m = (0)$ olduğundan çarpım sıfır olur.

$n = k$ için ($0 \leq k \leq m$) hipotez doğru olsun.

Yani herhangi çarpım I^* dan k tane eleman I dan $m-k$ tane eleman içerirse çarpım sıfır olur.

$n = k+1$ için;

Bir çarpım düşünelim I^* dan $k+1$ ve I dan $m-k-1$ tane eleman içersin. Bu çarpımda bir $r' \in I^*$ seçelim. Çarpım $sr't$ olsun. s , r' in solundaki bütün elemanların çarpımı ve t , r' in sağındaki bütün elemanların çarpımı olsun. s ve t diye isimlendirilen çarpımların olmaması mümkündür. Fakat s veya t den en az biri olmalıdır.

$r' \in I^*$ olduğundan $r' + b = c$ olacak şekilde $b, c \in I$ vardır. $sr't + sbt = sct$

Fakat sbt ve sct çarpımları I^* dan k tane I dan $m-k$ tane elemanın çarpımıdır ve kabulümüzden sbt ve sct sıfırdır. Sonuç olarak $sr't + 0 = 0$ ve buradan da $sr't = 0$ elde edilir.

Teorem 3.33 S bir yarı halka olsun. I ideali S nin bir nilpotent ideali ise I^* da S nin nilpotent idealidir.

İspat Bir m tamsayısı için $I^m = (0)$ olduğunu varsayalım. Lemma 3.32 de $n = m$ alınırsa $(I^*)^m = (0)$ elde edilir.

Tanım 3.34 S bir yarı halka ve I , S nin bir ideali olsun. $\sqrt{I} = \{a \in S : a^n \in I, n \in \mathbb{N}^+\}$ kümesine I nin radikali denir.

Önerme 3.35 S bir değişmeli yarı halka ve I , S nin bir ideali olsun. $\sqrt{I}$, I yı kapsayan bir idealdir.

İspat $I \subseteq \sqrt{I}$ olduğu açıktır.

i) $a, b \in \sqrt{I}$ olsun. Bir $m \in \mathbb{N}^+$ için $a^m \in I$ ve bir $n \in \mathbb{N}^+$ için $b^n \in I$ olur. Binom açılımı kullanırsak;

$$(a + b)^{m+n} = \sum_{k=1}^{m+n} \binom{m+n}{k} a^{m+n-k} b^k$$

dir. Toplamda her $a^i b^j$ terimi için $i + j = m + n$ olduğundan $i \geq m$ veya $j \geq n$ olmalıdır. Aksi halde $i \leq m$ ve $j \leq n$ olsaydı $m + n > i + j$ olurdu. $i \geq m$ ise $a^i \in I$, $j \geq n$ ise $a^j \in I$ olduğundan Binom açılımının her terimi I nin elemanıdır. Dolayısıyla $(a + b)^{m+n} \in I$ ve böylece $a + b \in \sqrt{I}$ dir.

ii) $s \in S$ ve $a \in \sqrt{I}$ olsun. Her $a \in \sqrt{I}$ için $a^m \in I$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}^+$ vardır ve $(sa)^m = s^m a^m \in I$ olduğundan $sa \in \sqrt{I}$ dir.

Tanım 3.36 S yarı halka olsun. S nin nilpotent elemanlarının idealine S nin nil radikali denir, $N(S)$ veya $\sqrt{0}$ ile gösterilir.

3.2 Bölüm Yarı Halkaları

Tanım 3.37 S bir yarı halka ve I da S nin bir ideali olsun. $s_1, s_2 \in S$ için

$s_1 \equiv s_2 \pmod{I} \Leftrightarrow s_1 + i = s_2 + j$ olacak şekilde $i, j \in I$ vardır. Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır ve bağıntıya göre oluşan denklik sınıflarının kümesini S/I ile gösterelim. Bu küme üzerinde tanımlanan

$$(s_1 + I) + (s_2 + I) = (s_1 + s_2) + I$$

$$(s_1 + I)(s_2 + I) = (s_1 s_2) + I$$

işlemleri S/I yı bir yarı halka yapar. Bu yarı halkaya I ya göre bölüm yarı halkası denir. S/I ile gösterilir. Yukarıda tanımlanan bağıntının bir denklik bağıntısı olduğunu ispatlayalım.

1. Yansıma özelliği:

$i, j \in I$ olmak üzere $i = j$ için $a + i = a + j$ dir. Böylece $a \equiv a \pmod{I}$ dır.

2. Simetri özelliği:

$a \equiv b \pmod{I}$ olsun. $\Rightarrow a + i = b + j$ olacak şekilde $i, j \in I$ vardır.

$$\Rightarrow b + j = a + i \text{ olacak şekilde } i, j \in I \text{ vardır.}$$

$$\Rightarrow b \equiv a \pmod{I} .$$

3. Geçişme özelliği:

$a \equiv b \pmod{I}$ ve $b \equiv c \pmod{I}$ olsun.

$\Rightarrow a + i = b + j$ olacak şekilde $i, j \in I$ vardır. Aynı şekilde $b + l = c + k$ olacak şekilde $k, l \in I$ vardır.

$$\Rightarrow b + l + j = c + k + j$$

$$\Rightarrow b + j + l = c + k + j = a + i + l$$

$$\Rightarrow i + l, k + j \in I \text{ için } a + i + l = c + k + j \text{ elde edilir.}$$

$$\Rightarrow a \equiv c \pmod{I} .$$

Lemma 3.38 Yukarıda tanımlanan bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile S/I yarı halkadır.

İspat S1) $(S/I, +)$ bir yarı gruptur.

Her $(s_1 + I), (s_2 + I), (s_3 + I) \in S/I$ için

Kapalılık : $(s_1 + I) + (s_2 + I) = (s_1 + s_2) + I \in S/I$ dır.

Birleşme : $(s_1 + I) + [(s_2 + I) + (s_3 + I)] = (s_1 + I) + [(s_2 + s_3) + I] = (s_1 + s_2 + s_3) + I$

$$= [(s_1 + s_2) + I] + (s_3 + I)$$

$$=[(s_1 + I) + (s_2 + I)] + (s_3 + I) .$$

S2) $(S/I, .)$ bir yarı gruptur.

Her $(s_1 + I), (s_2 + I), (s_3 + I) \in S/I$ için

Kapalılık : $(s_1 + I) (s_2 + I) = (s_1 s_2) + I \in S/I$ dır.

Birleşme: $(s_1 + I) [(s_2 + I)(s_3 + I)] = (s_1 + I) [(s_2 s_3) + I] = (s_1 s_2 s_3) + I$

$$=[(s_1 s_2) + I] (s_3 + I) = [(s_1 + I) (s_2 + I)] (s_3 + I) .$$

S3) Her $(s_1 + I), (s_2 + I), (s_3 + I) \in S/I$ için

$$\begin{aligned} (s_1 + I) [(s_2 + I) + (s_3 + I)] &= (s_1 + I) [(s_2 + s_3) + I] = s_1 (s_2 + s_3) + I = s_1 s_2 + s_1 s_3 + I \\ &= (s_1 s_2 + I) + (s_1 s_3 + I) \\ &= [(s_1 + I)(s_2 + I)] + [(s_1 + I)(s_3 + I)] \end{aligned}$$

olur. Sağdan dağılma özelliği de benzer şekilde gösterilir.

S4) Her $(s_1 + I), (s_2 + I) \in S/I$ olmak üzere

$$(s_1 + I) + (s_2 + I) = (s_1 + s_2) + I = (s_2 + s_1) + I = (s_2 + I) + (s_1 + I)$$

elde edilir.

S5) Her $(s + I) \in S/I$ için

$$(s + I) + (0 + I) = (s + 0) + I = (0 + s) + I = (0 + I) + (s + I) .$$

S6) Her $(s + I) \in S/I$ için

$$(0 + I) (s + I) = 0s + I = 0 + I = s0 + I = (s + I) (0 + I) .$$

Eğer S bir halka ve I da S nin bir halka ideali ise S nin modülo I ya göre bölümünün halka teorideki bölüm halkasıyla çakıştığı açıktır. Böylece bölüm yarı halkası üzerinde bölüm halkasının bütün özelliklerinin sağlanacağı sanılabilir. Ama bunun her zaman doğru olmadığını göreceğiz.

Halka teorisinde I , S halkasının bir ideali ise S/I bölüm halkasının toplamsal birimi I dır. Fakat Teorem 3.39 da göstereceğimiz gibi bir bölüm yarı halkası için bu ifade doğru değildir.

Modülo I ya göre x in denklik sınıfını $[x]_I$ ile göstereceğiz. Üzerinde çalışılan ideal belli olduğunda alt indisi kullanmayacağız.

Teorem 3.39 S bir yarı halka, I da onun ideali olsun. S/I bölüm yarı halkasının sıfır elemanı $[0] = I^*$ dır.

İspat Her $[x] \in S/I$ için $[x] + [0] = [x]$ olduğundan $[0]$ ın S/I nin sıfır elemanı olduğu açıktır.

Şu halde $[0] = I^*$ eşitliğini gösterelim.

$x \in [0] \Rightarrow x + i = 0 + j$ olacak şekilde $i, j \in I$ vardır.

$$\Rightarrow x + i = j, \quad i, j \in I$$

$$\Rightarrow x \in I^*$$

Diğer taraftan

$x \in I^* \Rightarrow x + k = l$ olacak şekilde $k, l \in I$ vardır.

$$\Rightarrow x + k = 0 + l, \quad k, l \in I$$

$$\Rightarrow x \in [0] .$$

Sonuç 3.40 I , S yarı halkasının bir ideali olsun. $[x] = [0]$ olduğunda $x \in I$ olması için gerek ve yeter şart I nin S yarı halkasının kapalı ideali olmasıdır.

İspat $\Leftarrow$: I nin S de kapalı ideal olduğunu kabul edelim. $[x] = [0]$ ise Teorem 3.39 dan $x \in I^*$ dır ve I kapalı ideal olduğundan $I = I^*$ dır. Böylece $x \in I$ olur.

$\Rightarrow$: Şimdi $[x] = [0]$ olduğunda $x \in I$ olduğunu kabul edelim.

$x \in I^* \Rightarrow x + i = j$ olacak şekilde $i, j \in I$ vardır.

$$\Rightarrow x + i = 0 + j, \quad i, j \in I$$

$$\Rightarrow x \in [0]$$

$$\Rightarrow [x] = [0]$$

$$\Rightarrow x \in I$$

olur. Böylece $I^* \subseteq I$ elde ederiz. I^* ın I y ı kapsadığını daha önce gösterdik. Böylece $I = I^*$ olduğundan I kapalı idealdir.

Sonuç 3.41 I , S yarı halkasının bir ideali olsun. $S/I = [0]$ iken $S \subseteq I$ olması için gerek ve yeter koşul I nın S de kapalı ideal olmasıdır.

İspat $\Leftarrow$: I kapalı ideali olsun. Her $x \in S$ için $S/I = [0]$ iken $x \in I$ sağlandığını gösterelim. Her $x \in S$ için $S/I = [0]$ ise $[x] = [0]$ olur. Sonuç 3.40 dan $x \in I$ bulunur.

$\Rightarrow$: $S/I = [0]$ iken $S \subseteq I$ olsun. Yani her $x \in S$ için $[x] = [0]$ iken $x \in I$ olur. Buradan Sonuç 3.40 dan I kapalı idealdir.

Bütün yarı halkaların sıfır elemanı için 0 , bütün trivial idealler için (0) sembolünü kullanacağız. I ideali S yarı halkasına ait olduğunda I^* da S yarı halkasının bir ideali olduğundan S/I ve S/I^* her ikisi de bölüm yarı halkası olarak düşünülebilir. Bu iki bölüm yarı halkası çok benzer özellikler gösterir.

Teorem 3.42 I ideali S yarı halkasında olsun. Modülo I denkliği ve modülo I^* denkliği özdeştir. Yani S/I ve S/I^* özdeştir.

İspat $s_1, s_2 \in S$ olmak üzere

$s_1 \equiv s_2 \pmod{I}$ olsun. Buradan $I \subseteq I^*$ olduğu için $s_1 \equiv s_2 \pmod{I^*}$ olur.

$s_1 \equiv s_2 \pmod{I^*}$ olsun. Yani $i_1^*, i_2^* \in I^*$ için $s_1 + i_1^* = s_2 + i_2^*$ olur. Buradan $i_1^* + i_1 = i_2$ ve $i_2^* + i_3 = i_4$ olacak şekilde $i_1, i_2, i_3, i_4 \in I$ vardır. $s_1 + i_1^* = s_2 + i_2^*$ denkleminde $s_1 + i_1^* + i_1 + i_3 = s_2 + i_2^* + i_1 + i_3$ elde edilir. Buradan $s_1 + i_2 + i_3 = s_2 + i_4 + i_1$ olur. $i_2 + i_3$ ve $i_4 + i_1 \in I$ olduğu için $s_1 \equiv s_2 \pmod{I}$ dir.

Teorem 3.43 I ve K , S yarı halkasının iki ideali olsun. $I \subseteq K$ olmak üzere

$K/I = \{[x] \in S/I : x \in K\}$ kümesi S/I nın bir idealidir. Ayrıca K , S nin kapalı ideali ise K/I da, S/I nın bir kapalı idealidir.

İspat K/I nın S/I nın bir ideali olduğunu gösterelim

i) $x, y \in K$ olmak üzere $[x], [y] \in K/I$ iken $x + y \in K$ olduğu için $[x] + [y] = [x + y] \in K/I$ dır.

ii) $[s] \in S/I$ ve $[x] \in K/I$ olmak üzere $sx \in K$ olduğu için $[s][x] = [sx] \in K/I$ dır. Benzer şekilde $[xs] \in K/I$ dır.

Ayrıca K ideali S yarı halkasının kapalı ideali olmak üzere K/I nın kapalı ideal olduğunu gösterelim.

$[x] \in (K/I)^*$ olsun. $\Rightarrow [x] + [k] = [t]$ olacak şekilde $[k], [t] \in K/I$ vardır. $(k, t \in K)$

$$\Rightarrow i, j \in I \text{ için } x + k + i = t + j \text{ yazılabilir.}$$

$$\Rightarrow I \subseteq K \text{ olduğu için } k + i, t + j \in K \text{ ve } x + k + i = t + j$$

$$\Rightarrow x \in K^*$$

$$\Rightarrow K \text{ kapalı olduğundan } x \in K \text{ dır.}$$

$$\Rightarrow [x] \in K/I$$

$$\Rightarrow K/I = (K/I)^*$$

yani $K/I, S/I$ yarı halkasının kapalı idealidir.

3.3 Yarı Halkalarda Homomorfizmalar

Tanım 3.44 S ve T iki yarı halka ve α, S den T ye bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in S$ için

i) $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$

ii) $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$

aksiyomları sağlanıyorsa α fonksiyonuna bir homomorfizma denir. Fonksiyonun tanımından anlaşılağı üzere her iki denklemde de ilk işlem S de, ikinci işlem T de tanımlıdır.

Ayrıca α homomorfizma bire-bir ve örten ise α , izomorfizma olarak adlandırılır ve $S \cong T$ ile gösterilir.

Tanım 3.45 α, S den T ye homomorfizma olmak üzere $\ker \alpha = \{x \in S : \alpha(x) = 0\}$ kümesine α nın çekirdeğı denir.

Lemma 3.46 α , S den T ye bir homomorfizma ise α nın çekirdeği S yarı halkasının bir idealidir.

İspat $\ker \alpha$ nın bir ideal olduğunu gösterelim:

$$\text{i) } x, y \in \ker \alpha \Rightarrow \alpha(x) = 0 \text{ ve } \alpha(y) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(x) + \alpha(y) = \alpha(x + y) = 0$$

$$\Rightarrow x + y \in \ker \alpha .$$

$$\text{ii) } s \in S \text{ ve } x \in \ker \alpha \Rightarrow \alpha(x) = 0 \text{ ve } \alpha(sx) = \alpha(s)\alpha(x) = \alpha(s)0 = 0$$

$$\Rightarrow sx \in \ker \alpha .$$

Benzer şekilde $xs \in \ker \alpha$ elde edilir.

Teorem 3.47 α , S den T ye bir örten homomorfizma olmak üzere;

i) S deki herhangi bir idealin görüntüsü T de bir idealdir.

ii) T nin herhangi bir idealinin ters görüntüsü S de çekirdeği kapsayan bir idealdir.

iii) I , S yarı halkasının bir ideali olsun. π , S den S/I ya olmak üzere $\pi(x) = [x]$ ile tanımlanan fonksiyona doğal homomorfizma denir ve $\ker \pi = I^*$ dır.

İspat i) I , S nin bir ideali olmak üzere, $x, y \in I$ için;

$$\alpha(x), \alpha(y) \in \alpha(I) \Rightarrow \alpha(x) + \alpha(y) = \alpha(x + y) \in \alpha(I)$$

dir. $t \in T$, $\alpha(x) \in \alpha(I)$ olsun. α örten olduğundan $t = \alpha(s)$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır. $t\alpha(x) = \alpha(s)\alpha(x) = \alpha(sx) \in \alpha(I)$ yazılabilir çünkü $sx \in I$ dır. Benzer şekilde $\alpha(x)t \in \alpha(I)$ elde edilir. $\alpha(I)$, T yarı halkasının bir idealidir.

ii) K , T nin bir ideali olsun.

$$a, b \in \alpha^{-1}(K) \text{ olsun. } \Rightarrow \alpha(a), \alpha(b) \in K \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow \alpha(a) + \alpha(b) = \alpha(a + b) \in K$$

$$\Rightarrow a + b \in \alpha^{-1}(K)$$

$$s \in S \text{ ve } a \in \alpha^{-1}(K) \text{ olsun. } \Rightarrow \alpha(s) \in \alpha(S) = T \text{ ve } \alpha(a) \in K$$

$$\Rightarrow \alpha(s)\alpha(a) = \alpha(sa) \in K$$

$$\Rightarrow sa \in \alpha^{-1}(K)$$

Benzer şekilde $as \in \alpha^{-1}(K)$ elde edilir. $\alpha^{-1}(K)$ idealinin $\text{çek}\alpha$ yı kapsadığını gösterelim:

$$s \in \text{çek}\alpha \text{ olsun. } \Rightarrow \alpha(s) = 0 \in K$$

$$\Rightarrow s \in \alpha^{-1}(K)$$

$$\Rightarrow \text{çek}\alpha \subseteq \alpha^{-1}(K)$$

iii) $\text{çek}\pi = I^*$ olduğunu gösterelim:

$x \in \text{çek}\pi$ olması için gerek ve yeter şart $[x] = [0]$ olmasıdır. Öte yandan Teorem 3.39 dan $[x] = [0]$ olması için gerek ve yeter şart $x \in I^*$ olmasıdır. Böylece $\text{çek}\pi = I^*$ dır.

Tanım 3.48 α , S den T ye bir örten homomorfizma olsun. $\text{çek}\alpha = [0]$ ise α homomorfizmasına S den T ye yarı izomorfizma denir ve $S \approx T$ ile gösterilir. S yarı izomorfik T şeklinde ifade edilir.

Dikkat edilmelidir ki halka teorisinin aksine $\text{çek}\alpha = 0$ olması α nın bire bir olmasını gerektirmez. Bununla ilgili bir örnek inceleyelim:

Örnek 3.49 $\square_0$ kümesi üzerinde $a + b = \max(a, b)$ ve $ab = \min(a, b)$ işlemleri ile Örnek 3.10 dan bir yarı halkadır. $\square_0$ tarafından kapsanan

$T = \{\text{negatif olmayan çift tamsayılar}\}$ kümesi üzerinde de yukarıdaki gibi $+$ ve $.$ işlemleri tanımlansın. T , Lemma 3.15 den $\square_0$ nın bir alt yarı halkasıdır.

$$\alpha: \square_0 \rightarrow T \text{ olmak üzere}$$

her çift $n \in \square_0$ için $\alpha(n-1) = \alpha(n) = n$ olacak şekilde α fonksiyonu tanımlansın.

α fonksiyonu iyi tanımlıdır ve α ayrıca şu özelliğe sahiptir.

$m \leq n$ ise $\alpha(m) \leq \alpha(n)$ olur. Böylece;

$$\alpha(m+n) = \alpha(\max(m, n)) = \max(\alpha(m), \alpha(n)) = \alpha(m) + \alpha(n),$$

$$\alpha(mn) = \alpha(\min(m, n)) = \min(\alpha(m), \alpha(n)) = \alpha(m)\alpha(n)$$

sağlanır. Bu durumda α bir homomorfizmadır. Değer kümesinin sıfır elemanını sadece tanım kümesinin sıfır elemanının görüntüsü verdiği için $\ker \alpha = 0$ dır. Fakat α bire bir değildir. Çünkü dikkat edilirse $\alpha(1) = 2$ ve $\alpha(2) = 2$ dir.

Yarı halkalarda $\ker \alpha = 0$ olması bire birliği gerektirmediği için halka teorisindeki bazı teoremler yarı halkalara genişletilemeyecektir.

Şimdi izomorfizma ve yarı izomorfizma arasındaki önemli bir farktan söz edelim. İki yarı halka arasındaki “ $\cong$ ” bağıntısı bir denklik bağıntısıdır, fakat iki yarı halka arasındaki “ $\approx$ ” bağıntısı bir denklik bağıntısı değildir. Dolayısıyla simetrik olacağı anlayışı bir yanılgıdır. Yani S yarı halkasından T yarı halkasına çekirdeği sıfır olan bir homomorfizma olması, T yarı halkasından S yarı halkasına çekirdeği sıfır olan bir homomorfizma olduğunu garanti etmez. Hatta böyle bir homomorfizmanın bulunabileceği bile şüphelidir. Bununla ilgili aşağıdaki örneği inceleyelim:

Örnek 3.50 $\square_0$ ve her $a, b \in S$ için $a + b = \max(a, b)$ ve $ab = \min(a, b)$ işlemleri tanımlansın. $T = \{0, 1\}$ kümesi de tablolardaki işlemler ile bir yarı halka olsun.

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Bu iki yarı halka üzerinde $\alpha : \square_0 \rightarrow T$ olmak üzere $x \in N_0$ olmak üzere $\alpha(0) = 0$ ve $\alpha(x) = 1$ olacak şekilde α homomorfizmasını tanımlayalım. α , örten ve çekirdeği sıfır olan bir homomorfizmadır. Tanım 3.11 den $\square_0 \approx T$ yazılabilir. Burada T den $\square_0$ a bir homomorfizma olmadığı açıktır. Dolayısıyla $T \approx \square_0$ yazılamaz.

Teorem 3.51 α , S yarı halkasından T yarı halkasına örten bir homomorfizma olsun.

$S / \ker \alpha \approx T$ dır.

İspat β fonksiyonu $S / \ker \alpha$ bölüm yarı halkasından $T = \alpha(S)$ yarı halkasına $\beta([s]) = \alpha(s)$ olacak şekilde fonksiyon tanımlayalım. β bir homomorfizmadır. Gösterelim:

$$\beta([s] + [t]) = \beta([s + t]) = \alpha(s + t) = \alpha(s) + \alpha(t) = \beta([s]) + \beta([t]),$$

$$\beta([s][t]) = \beta([st]) = \alpha(st) = \alpha(s)\alpha(t) = \beta([s])\beta([t])$$

α homomorfizması örten olduğundan β homomorfizması örtendir.

Şimdi $\ker \beta = 0$ olduğunu gösterelim.

$[s] \in \ker \beta$ olsun. $\beta([s]) = \alpha(s) = 0$ dır. O halde $s \in \ker \alpha$ dır ve $[s] = [0]$ dır. Böylece $\ker \beta = 0$ olduğu görülür.

Teorem 3.52 S bir yarı halka olmak üzere A ve M , $A \subseteq M$ olacak şekilde S nin iki ideali olsun. π , S yarı halkasından S/A bölüm yarı halkasına doğal homomorfizması için $\pi(M) = \{[m]_A \in S/A : m \in M\}$ kümesi M/A ile gösterilmek üzere

$S/M \cong (S/A)/(M/A)$ olur.

İspat $\alpha : S/M \rightarrow (S/A)/(M/A)$ ve $\alpha([x]_M) = [[x]_A]_{M/A}$ olacak şekilde bir fonksiyon tanımlayalım. $[x]_M = [y]_M$ olsun. Yani $m, n \in M$ için $x + m = y + n$ olur.

Buradan $[m]_A, [n]_A \in M/A$ için $[x]_A + [m]_A = [y]_A + [n]_A$ elde edilir. Dolayısıyla $[[x]_A]_{M/A} = [[y]_A]_{M/A}$ olduğundan α iyi tanımlıdır.

Bölüm yarı halkasındaki denklik sınıflarında tanımlı toplama ve çarpma işlemleri ile α nın homomorfizma olduğu gösterelim:

$$[x]_M + [y]_M = [x + y]_M$$

ve α fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} \alpha([x + y]_M) &= [[x + y]_A]_{M/A} = [[x]_A + [y]_A]_{M/A} \\ &= [[x]_A]_{M/A} + [[y]_A]_{M/A} = \alpha([x]_M) + \alpha([y]_M). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha([xy]_M) &= [[xy]_A]_{M/A} = [[x]_A [y]_A]_{M/A} \\ &= [[x]_A]_{M/A} [[y]_A]_{M/A} = \alpha([x]_M) \alpha([y]_M) \end{aligned}$$

elde edilir. α fonksiyonunun bire-bir olduğunu gösterelim:

$$[[x]_A]_{M/A} = [[y]_A]_{M/A} \text{ olsun.}$$

$[x]_A + [z]_A = [y]_A + [w]_A$ olacak şekilde $[z]_A, [w]_A \in M/A$ vardır. Yani;

$[x+z]_A = [y+w]_A$ ve $a, b \in A$ için $x+z+a = y+w+b$ olur. Buradan $A \subseteq M$ olduğundan $z+a, w+b \in M$ dir. Dolayısıyla $[x]_M = [y]_M$ olur. Ayrıca α fonksiyonunun örten olduğu açıktır. Sonuç olarak α bir izomorfizmadır.

Teorem 3.53 I ve J idealleri S yarı halkasına ait olsun. I den $(I+J)/J$ e örten bir homomorfizma vardır. J ideali S yarı halkasının kapalı ideali ise $I/I \cap J \approx (I+J)/J$ dir.

İspat I dan $(I+J)/J$ ye bir α fonksiyonunu her $i \in I$ için $\alpha(i) = [i]_J$ olacak şekilde tanımlayalım. α iyi tanımlıdır ve $I \subseteq I+J$ olduğundan $I \subseteq (I+J)/J$ dir.

Ayrıca her $i, j \in I$ için,

$$\alpha(i+j) = [i+j]_J = [i]_J + [j]_J = \alpha(i) + \alpha(j)$$

$$\alpha(ij) = [ij]_J = [i]_J [j]_J = \alpha(i)\alpha(j)$$

olduğu için α bir homomorfizmadır. Şimdi her $[i+j]_J \in (I+J)/J$ için $[i+j]_J = [i]_J = \alpha(i)$ olduğundan α örtendir.

Teorem 3.51 den $I/\text{çek}\alpha \approx (I+J)/J$ dir.

$$\text{çek}\alpha = \{x \in I : [x]_J = 0\} = \{x \in I : x \in J^*\}.$$

J , S yarı halkasının kapalı ideali ise $J = J^*$ olduğundan

$\text{çek}\alpha = \{x \in I : x \in J\} = I \cap J$ dir. Dolayısıyla $I/(I \cap J) \approx (I+J)/J$ olduğu açıktır.

Lemma 3.54 α , S yarı halkası üzerinde bir homomorfizma ve I , S nin herhangi bir ideali olsun. $\alpha(I) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\alpha(I^*) = 0$ olmasıdır.

İspat $\alpha(I^*) = 0$ olsun. I^* , I yı kapsadığından $\alpha(I) = 0$ dir.

Tersine $\alpha(I) = 0$ olsun. $x \in I^*$ ise $x+i = j$ olacak şekilde $i, j \in I$ vardır

Buradan $\alpha(x) + \alpha(i) = \alpha(j)$ olduğu açıktır. Fakat $\alpha(i) = \alpha(j) = 0$ olduğundan $\alpha(x) = 0$ dir. Böylece $\alpha(I^*) = 0$ olduğu görülür.

Lemma 3.55 α , S yarı halkası üzerinde bir homomorfizma olsun. $\text{çek}\alpha$, S nin kapalı idealidir.

İspat $\text{çek}\alpha$, Lemma 3.46 dan S nin bir idealidir. Şimdi $x \in \text{çek}\alpha^*$ olsun. Buradan $i, j \in \text{çek}\alpha$ için $x+i=j$ ve $\alpha(x)+\alpha(i)=\alpha(j)$ dir. $i, j \in \text{çek}\alpha$ olduğu için $\alpha(i)=\alpha(j)=0$ ve dolayısıyla $\alpha(x)=0$ bulunur. Yani $x \in \text{çek}\alpha$ dır. Buradan $\text{çek}\alpha \subseteq \text{çek}\alpha^*$ olur. Diğer kapsama aşıkardığı için $\text{çek}\alpha^* = \text{çek}\alpha$ dır.

3.4 İdeallerin Genişleme ve Kısıtlamaları

Önerme 3.56 S ile R iki yarı halka ve $f : S \rightarrow R$ homomorfizma olsun.

1. J , R nin bir ideali ise $f^{-1}(J) = \{r \in R : f(r) \in J\}$ kümesi S nin bir idealdir.
2. $f : S \rightarrow R$ örten homomorfizma olsun. I , S nin bir ideali ise $f(I)$, R nin bir idealidir.

İspat Teorem 3.47 den açıktır.

Tanım 3.57 S ile R iki yarı halka olsun. $f : S \rightarrow R$ homomorfizması altında;

1. J , R nin bir ideali ise $f^{-1}(J) \subseteq S$ ideale J nin kısıtlanması denir ve J^c ile gösterilir.
2. I , S nin bir ideali ise $f(I)$ nın R de ürettiği ideale I nin genişlemesi denir ve I^e ile gösterilir.

Sonuç 3.58 S ile R iki yarı halka olsun. $f : S \rightarrow R$ bir örten homomorfizma ise S nin bir I idealinin genişlemesi $I^e = f(I)R = f(I)$ dır.

Genişleme ve kısıtlamalar kapsamayı korur. Yani, I_1 ile I_2 , S nin idealleri ve J_1 ile J_2 , R nin idealleri olsun;

$$I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow I_1^e \subseteq I_2^e, J_1 \subseteq J_2 \Rightarrow J_1^c \subseteq J_2^c.$$

BÖLÜM 4

YARI HALKALARDA ASAL İDEALLER

Asal idealler, maksimal idealler, minimal idealler ve ilgili teoremler açıklanmıştır. Bu bölümde kaynaklar [7], [8] ve [9] dan yararlanılarak derlenmiştir.

Bu bölümde yarı halkaları değişmeli ve birimli yarı halka olarak alıyoruz.

Tanım 4.1 P , S yarı halkasının bir ideali olsun. $a, b \in S$, $ab \in P \Rightarrow a \in P$ veya $b \in P$ gerektirmesi doğru ise P ye bir asal ideal denir. S yarı halkasının tüm asal ideallerinin kümesi $Spec(S)$ ile gösterilir.

Tanım 4.2 $(S, +, \cdot)$ birimli değişmeli yarı halka olsun. $R \subseteq S$ alt kümesi için $1 \in R$ ve her $r_1, r_2 \in R$ için $r_1 r_2 \in R$ ise R ye S nin çarpımsal kapalı alt kümesi denir.

Önerme 4.3 S birimli, değişmeli yarı halka olsun. I , S yarı halkasının bir ideali, R çarpımsal kapalı alt kümesi ve $I \cap R = \emptyset$ olsun. $\Omega = \{J \in I(S) : J \cap R = \emptyset, I \subseteq J\}$ kümesinin en az bir maksimal elemanı vardır ve bu maksimal eleman S yarı halkasının asal idealidir.

İspat $I \cap R = \emptyset$ olduğundan $I \in \Omega$ dır. Böylece $\Omega \neq \emptyset$ dir. $(\Omega, \subseteq)$ kısmen sıralı kümesinin herhangi bir tam sıralı alt kümesi (zinciri) olarak $\{I_i\}$ alalım. $J = \bigcup I_i$ olsun. J , S yarı halkasının bir has ideali ve $J \cap R = \bigcup (I_i \cap R) = \emptyset$ dir. Gerçekten, $1 \in R$ olduğundan $1 \notin J$ dir. Her $a, b \in J$ için $a \in I_k$, $b \in I_t$ olacak şekilde $k, t \geq 1$ tam sayıları bulunabilir. $\max(k, t) = k$ dersek, $a, b \in I_k$ ve $a + b \in I_k \Rightarrow a + b \in J$ dir. Her $s \in S$ ve $a \in J$ için $a \in I_k$ olacak şekilde bir $k \geq 1$ var ve $sa \in I_k \Rightarrow sa \in J$ dir. Şu halde J alınan zincirin Ω da bir üst sınırıdır. Zorn Lemmaya göre Ω nın en az bir maksimal elemanı vardır. Şimdi bu maksimal eleman J nin asal ideal olduğunu

gösterelim. $a, b \notin J$ iken $ab \notin J$ olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer $a \notin J$ ise $I \subseteq J \subset J + Sa$ ve J, Ω nin maksimal elemanı olduğundan $(J + Sa) \cap R \neq \emptyset$ dir. Şu halde bir $r = x + sa$ olacak şekilde $r \in R, x \in J$ ve $s \in S$ vardır. Benzer şekilde $b \notin J$ ise $I \subseteq J \subset J + Sb$ ve J, Ω nin maksimal elemanı olduğundan $(J + Sb) \cap R \neq \emptyset$ dir. Şu halde bir $r^* = y + s^*b$ olacak şekilde $r^* \in R, y \in J$ ve $s^* \in S$ vardır. Bu iki eşitlikten $rr^* = (x + sa)(y + s^*b) = xy + xs^*b + say + ss^*ab$ bulunurdu. Eğer $ab \in J$ olsaydı $rr^* \in J \cap R \neq \emptyset$ çelişki olurdu. O halde $ab \notin J$ dir. J asal idealdir.

Önerme 4.4 P, S yarı halkasının asal ideali ve $I_1, I_2, \dots, I_n$ de S nin idealleri olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktirler:

1. Bir $j = 1, 2, 3, \dots, n$ için $P \supseteq I_j$,

2. $P \supseteq \bigcap_{i=1}^n I_i$,

3. $P \supseteq \prod_{i=1}^n I_i$.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) gerektirmeleri açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1)

$P \supseteq \prod_{i=1}^n I_i$ sağlansın. Her $j = 1, 2, 3, \dots, n$ için $P \not\subseteq I_j$ olsun. Öyleyse bir $a_j \in I_j - P$

bulunur. $a_1 a_2 \dots a_n \in \prod_{i=1}^n I_i$ ve P asal olduğundan $a_1 a_2 \dots a_n \notin P$ olurdu. Bu ise

$P \supseteq \prod_{i=1}^n I_i$ olması ile çelişirdi.

Tanım 4.5 I, S yarı halkasının bir ideali olsun. $I \subseteq P$ asal ideali için, $I \subseteq P' \subset P$ olacak şekilde hiçbir P' asal ideali yoksa P ye I nin bir minimal asal ideali denir. S nin minimal asal ideali denildiğinde $I = (0)$ ın minimal asal ideali kastedilecektir.

Lemma 4.6 S yarı halkasının P idealinin minimal asal ideal olması için gerek ve yeter şart her $x \in P$ için ax nilpotent olacak şekilde bir $a \in S - P$ vardır. Bu durumda

$$P = \bigcup_{a \in R - P} (\sqrt{0} : a) \text{ dir.}$$

İspat P ideali S yarı halkasının minimal asal ideali olduğunu varsayalım. $R = S - P$ ve $x \in P$ olsun. $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} Rx^n$ kümesi R kümesini kapsayan S nin bir çarpımsal kapalı alt kümesidir (Çünkü $x^0 = 1$). Eğer $T \cap \sqrt{0} = \emptyset$ ise Önerme 4.3 den bir asal Q ideali vardır öyle ki $T \cap Q = \emptyset$ dir. Böylece $Q \subseteq P$ ve $x \notin Q$ dur. Bu ise P nin minimalliği ile çelişir. Böylece $T \cap \sqrt{0} \neq \emptyset$ ve $a \in R$ vardır öyle ki bir $n \in \mathbb{N}_0$ için $ax^n \in \sqrt{0}$ dir. Buradan da $ax \in \sqrt{0}$ olur.

Tersine her $x \in P$ için ax nilpotent olacak şekilde $a \in S - P$ var olsun. Eğer P minimal asal ideal değilse S nin P de kapsanan bir Q minimal asal ideali ve $x \in P - Q$ vardır. Kabulümüzden $x \in P - Q$ için $ax \in \sqrt{0} \subseteq Q$ olacak şekilde bir $a \in S - P$ vardır. Bu ise bir çelişki oluşturur. Dolayısıyla P minimal asal idealdir.

Tanım 4.7 S yarı halkasının I idealini kapsayan tüm asal ideallerin kümesini $h(I) = \{P \in \text{Spec}(R) : P \supseteq I\}$ ile gösterelim.

Önerme 4.8 S birimli, değişmeli yarı halka ve I , S yarı halkasının bir ideali olsun. I idealinin radikali I yı kapsayan tüm asal ideallerin kesişimidir. Yani, $\sqrt{I} = \bigcap_{P \in h(I)} P$ dir.

İspat $a \in \sqrt{I} \Rightarrow a^n \in I$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

$$\Rightarrow \text{her } P \in h(I) \text{ için, } a^n \in P$$

$$\Rightarrow a \in P$$

Tersine, bir $b \in \bigcap_{P \in h(I)} P$ alalım:

$b \notin \sqrt{I}$ olsa idi; $R = \{b^n : n \in \mathbb{N}\}$ çarpımsal kümesi için $R \cap I = \emptyset$ olurdu. Önerme 4.3 den I yı kapsayan ve R ile ayrık bir P' asal ideali bulunabilir. Bu ise $b \in \bigcap_{P \in h(I)} P$

olması ile çelişir. O halde $b \in \sqrt{I}$ dır.

Tanım 4.9 M , S yarı halkanın bir has ideali olsun. $M \subset I \subset S$ olacak şekilde bir I ideali yoksa M idealine maksimal ideal denir.

Önerme 4.10 Sıfırdan farklı her birimli, değişmeli yarı halkanın en az bir maksimal ideali vardır.

İspat $\Omega = \{I \in I(S) : I \neq S\}$, S yarı halkasının has ideallerinin kümesini alalım.

$(0) \in \Omega$ olduğundan $\Omega \neq \emptyset$ dir. $(\Omega, \subseteq)$ kısmen sıralı kümesinin herhangi bir tam sıralı alt kümesi (zinciri) olarak $\{I_i\}$ alalım. $J = \bigcup I_i$ olsun. Önerme 4.3 de J nin bir ideal olduğunu göstermiştik. J has bir idealdir. Gerçekten de, her $i \geq 1$ için $1 \notin I_i$ olduğundan $1 \notin J$ dir. Şu halde J alınan zincirin Ω da bir üst sınırıdır ve Zorn lemmaya göre Ω nın en az bir maksimal elemanı vardır. Ω nın maksimal elemanları da S nin maksimal idealleridir.

Sonuç 4.1 $J \subset S$ has bir ideal ise J yi kapsayan bir maksimal ideal vardır.

4.1 $\mathbb{Z}^+$ da Asal İdealler

Lemma 4.11 $\mathbb{Z}^+ = \{\text{negatif olmayan tam sayılar}\}$ olsun. $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $b > a > 1$ ve $\text{ebob}(a, b) = 1$ olsun. Her $t \geq n$ için $t \in (a, b)$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

İspat $\text{ebob}(a, b) = 1$ ise $qa = pb + 1$ olacak şekilde sıfırdan farklı vardır. $n = paqb \in (a, b)$ ve $t = n + r$, $r \geq 0$ olsun. Eğer $r = 0$ ise $t = n \in (a, b)$ dir. Eğer $a > r > 0$ ise $t = n + r = (qa - r)pb + rqa \in (a, b)$ dir. Eğer $r \geq a$ ise bölme algoritması aracılığıyla $r = au + v$, $0 \leq v < a$ dir. Böylece $t = n + v + au \in (a, b)$ dir.

Teorem 4.1 $(\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ yarı halkasının I idealinin asal ideal olması için gerek ve yeter şart $I = (0)$ veya bir p asal sayısı için $I = (p)$ veya $I = (2, 3)$ olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$: $I = (0)$ ın asal ideal olduğu açıktır. Sıfırdan farklı I , $(\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ nin bir asal ideali olsun. Eğer $I = (p)$ ise p asalıdır. I nın temel ideal olmadığını varsayalım. a , I nin sıfırdan farklı en küçük elemanı olsun. Öyleyse a asal sayıdır. Ayrıca $\text{ebob}(a, b) = 1$ ve $b > a$ olacak şekilde bir en küçük $b \in I$ vardır. Lemma 4.11 den her $t \geq n$ için $t \in I$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Eğer $a > 2$ ise $2^j \in I$ olacak şekilde en küçük $j \in \mathbb{Z}^+$, $j > 1$ seçeriz. Buradan $2^{j-1} \in I$ veya $2 \in I$ olur. Bu ise bir çelişki oluşturur. O halde $a = 2$ dir. Eğer $b > 3$ ise $3^k \in I$ olacak şekilde en küçük $k \in \mathbb{Z}^+$, $k > 1$ seçeriz. Buradan $3^{k-1} \in I$ veya $3 \in I$ olur. Bu ise bir çelişki oluşturur. Sonuç olarak $b = 3$ tür.

$\Leftarrow$: Açık

BÖLÜM 5

YARI HALKALARIN ASAL SPEKTRUMU

Bu bölümde yarı halkalar üzerinde topoloji kurulmuştur ve bu topoloji üzerinde ayırma aksiyomları incelenmiştir. Bu bölüm kaynaklar [10], [11], [12], [13], [14] ve [3] den yararlanılarak derlenmiştir.

Önerme 5.1 S birimli ve değişmeli bir yarı halka olsun. S nin her I alt kümesi için;

$h(I) = \{P \in \text{Spec}(S) : I \subseteq P\}$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:

1. S nin herhangi I ve J idealleri için $I \subseteq J \Rightarrow h(J) \subseteq h(I)$ dır,
2. I, L ile üretilmiş bir ideal ise $h(I) = h(L) = h(\sqrt{I})$,
3. $h(0) = \text{Spec}(S)$, $h(S) = \emptyset$,
4. $\{I_i\}_{i \in \Lambda}$, S nin alt kümelerinin herhangi bir ailesi olmak üzere, $\bigcap_{i \in \Lambda} h(I_i) = h(\bigcup_{i \in \Lambda} I_i)$,
5. S nin herhangi I ve J idealleri için $h(I) \cup h(J) = h(I \cap J) = h(IJ)$.

İspat 1. $I \subseteq J$ ve $P \in h(J)$ olsun. Öyleyse $J \subseteq P$ dir. Buradan $I \subseteq P$ ve $P \in h(I)$ dır.

2. $L \subseteq I \subseteq \sqrt{I}$ olduğundan $h(\sqrt{I}) \subseteq h(I) \subseteq h(L)$ dır. I, L yi içeren en küçük ideal olduğu için $P \in h(L) \Rightarrow P \in h(I)$ dır. Böylece $h(I) = h(L)$ dir. $h(I) = h(\sqrt{I})$ olduğu açıktır.

3. Açıktır.

4. $P \in \bigcap_{i \in \Lambda} h(I_i) \Leftrightarrow$ her $i \in \Lambda$ için, $I_i \subseteq P$

$$\Leftrightarrow \bigcup_{i \in \Lambda} I_i \subseteq P$$

$$\Leftrightarrow P \in h\left(\bigcup_{i \in \Lambda} I_i\right)$$

$$5. P \in h(I \cap J) \Leftrightarrow I \cap J \subseteq P$$

$$\Leftrightarrow I \subseteq P \text{ veya } J \subseteq P$$

$$\Leftrightarrow P \in h(I) \text{ veya } P \in h(J)$$

$$\Leftrightarrow P \in h(I) \cup h(J)$$

dir. Benzer şekilde,

$$P \in h(IJ) \Leftrightarrow IJ \subseteq P$$

$$\Leftrightarrow I \subseteq P \text{ veya } J \subseteq P$$

$$\Leftrightarrow P \in h(I) \text{ veya } P \in h(J)$$

$$\Leftrightarrow P \in (I) \cup h(J) .$$

Sonuç 5.2 $\tau = \{h(I) : I \subseteq S\}$ olsun. τ nun elemanlarını, kapalı kümeler olarak göz önüne alırsak τ , yukarıdaki 3), 4) ve 5) deki özelliklerle $X = \text{Spec}(S)$ üzerinde bir topoloji belirler. X üzerindeki bu τ topolojisine Zariski topolojisi denir. $(\text{Spec}(S), \tau)$ topolojik uzayına S nin asal spektrumu denir.

$X = \text{Spec}(S)$ nin herhangi bir kapalı kümesi, $I \subseteq S$ olmak üzere $h(I)$ şeklindedir. X in herhangi bir açık kümesi $X - h(I)$ şeklinde olur.

Örnek 5.3 $(\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ yarı halkasının asal idealleri (0) , bir p asal sayısı için (p) ve $(2,3)$ dür. $X = \text{Spec}(\mathbb{Z}^+) = \{(0), (2,3), (2), (3), \dots, (p), \dots\}$ dir. $p \in \mathbb{Z}^+ - \{2,3\}$ asal sayısı için $h(p) = (p)$ dir. Şu halde (p) noktası $\text{Spec}(\mathbb{Z}^+)$ kapalı kümedir. $h(2,3) = (2,3)$ olduğundan $(2,3)$ de $\text{Spec}(\mathbb{Z}^+)$ da kapalı kümedir. Fakat (0) , (2) ve (3) , $\text{Spec}(\mathbb{Z}^+)$ da kapalı küme değildirler, çünkü $h(0) = \text{Spec}(\mathbb{Z}^+)$, $h(2) = \{(2), (2,3)\}$ ve $h(3) = \{(3), (2,3)\}$ tür.

Tanım 5.4 S birimli ve değişmeli bir yarı halka olsun. $f \in S$ için $X_f = X - h(f)$ ile tanımlayalım.

Önerme 5.5 $\{X_f : f \in S\}$, Zariski topolojisi için bir tabandır.

İspat U , X de açık küme olsun. O halde bir $I \subseteq S$ için $U = X - h(I)$ şeklindedir.

$$U = X - h(I) = X - h\left(\bigcup_{f \in I} \{f\}\right) = X - \bigcap_{f \in I} h(f) = \bigcup_{f \in I} (X - h(f)) = \bigcup_{f \in I} X_f \text{ dir. } U, \text{ herhangi}$$

bir açık küme olduğundan $\{X_f : f \in S\}$, X için bir tabandır.

Önerme 5.6 S birimli ve değişmeli bir yarı halka olsun. $f \in S$ için $X_f = X - h(f)$ olsun.

1. Her $f, g \in S$ için $X_f \cap X_g = X_{fg}$ dir.
2. $X_f = \emptyset \Leftrightarrow f$ nilpotenttir.
3. $X_f = X \Leftrightarrow f$ birimseldir.
4. $X_f = X_g \Leftrightarrow \sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$ dir.
5. X kompakttır.
6. Her $f \in S$ için X_f kompakttır.
7. X in bir açık alt kümesi G kompakttır $\Leftrightarrow G$, X_f lerin sonlu bir birleşimidir.

İspat 1. $P \in X_f \cap X_g \Leftrightarrow P$ asal ideali için, $f \notin P$ ve $g \notin P \Leftrightarrow fg \notin P \Leftrightarrow P \in X_{fg}$ dir.

2. $X_f = \emptyset \Leftrightarrow h(f) = X \Leftrightarrow$ her $P \in X$ için $f \in P \Leftrightarrow f$ nilpotenttir.
3. $X_f = X \Leftrightarrow h(f) = \emptyset \Leftrightarrow f$ yi kapsayan S de hiçbir asal ideal yoktur. Dolayısıyla f birimseldir.
4. $X_f = X_g \Leftrightarrow h(f) = h(g) \Leftrightarrow$ her $P \in X$ için $(f \in P \Leftrightarrow g \in P) \Leftrightarrow \sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$ dir.
5. $\{G_i : i \in \Delta\}$, X in bir açık örtüsü olsun. Her bir G_i , X_f kümelerinin birleşimi olarak yazılabildiğinden, genelliği bozmadan her $i \in \Delta$ için $G_i = X_{f_i}$ olarak kabul edebiliriz. Bu durumda,

$$X = \bigcup_{i \in \Delta} G_i = \bigcup_{i \in \Delta} X_{f_i} = \bigcup_{i \in \Delta} (X - h(f_i)) = X - \bigcap_{i \in \Delta} h(f_i) = X - h(\{f_i : i \in \Delta\})$$

dir. Böylece $h(\{f_i : i \in \Delta\}) = \emptyset$ yani $(\{f_i : i \in \Delta\})$ ı içeren bir asal ideal yoktur. Bundan dolayı $(\{f_i : i \in \Delta\}) = (1)$ dir.

Böylece her $j \in I$ için $a_j \in S$ olmak üzere $1 = \sum_{j \in I} a_j f_j$ olacak şekilde sonlu bir $I \subseteq \Delta$ alt kümesi vardır. Şu halde $h(\{f_i : i \in \Delta\}) = \emptyset$ dir. Buradan da $X = X - h(\{f_i : i \in \Delta\}) = X - \bigcap_{j \in I} h(f_j) = \bigcup_{j \in I} (X - h(f_j)) = \bigcup_{j \in I} X_{f_j}$

dir. X sonlu sayıda X_{f_i} tarafından örtüldüğünden, X kompakttır.

6. $f \in S$ olsun. Her $i \in \Delta$ için $a_i \in S$ olmak üzere $\{X_{a_i} : i \in \Delta\}$, X_f in bir örtüsü olsun.

Böylece; $X_f = X - h(f) \subseteq \bigcup_{i \in \Delta} X_{a_i} = \bigcup_{i \in \Delta} (X - h(a_i)) = X - \bigcap_{i \in \Delta} h(a_i) = X - h(\bigcup_{i \in \Delta} \{a_i\})$ ve buradan $h(\bigcup_{i \in \Delta} \{a_i\}) \subseteq h(f) = h(\sqrt{(f)})$ bulunur. Böylece $\sqrt{(f)} \subseteq \sqrt{(\bigcup_{i \in \Delta} \{a_i\})}$ elde edilir.

Şu halde $f^n \in (\bigcup_{i \in \Delta} \{a_i\})$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $j \in I$ için $s_j \in S$ olmak üzere $f^n = \sum_{j \in I} s_j a_j$ olacak şekilde sonlu bir $I \subseteq \Delta$ alt kümesi vardır. Ayrıca

$$P \in h(f^n) \Leftrightarrow P \in h(f) \text{ olduğundan}$$

$$(f^n) \subseteq (\{a_j : j \in I\}) \Rightarrow h(\{a_j : j \in I\}) \subseteq h(f^n) = h(f)$$

$$\Rightarrow \bigcap_{j \in I} h(a_j) \subseteq h(f)$$

$$\Rightarrow X - h(f) \subseteq \bigcup_{j \in I} (X - h(a_j))$$

$$\Rightarrow X_f \subseteq \bigcup_{j \in I} X_{a_j}$$

dır. I sonlu olduğu için X_f kompakttır.

7. $G \subset X$ açık küme olsun.

$\Rightarrow$: $G \subset X$ kompakt olsun. G açık küme olduğundan S nin bir I ideali için $G = X - h(I) = \bigcup_{f \in I} X_f$ dır. G kompakt olduğundan bir sonlu $J \subseteq I$ için $G = \bigcup_{f \in J} X_f$ dır.

$\Leftarrow$: Bir sonlu $I \subset S$ için $G = \bigcup_{f \in I} X_f$ olduğunu varsayalım. $\sigma = \{X_g : g \in J\}$, G nin bir açık örtüsü olsun. Öyleyse σ her bir X_f için açık örtülüdür. Her bir X_f , her $f \in I$ için $J_f \subset J$ kümesi sonlu olacak şekilde $\{X_{g_f} : g_f \in J_f\}$ açık örtülüşüne sahiptir. Böylece $\bigcup_{f \in I} (\bigcup_{g_f \in J_f} X_{g_f})$, G nin sonlu açık örtülüşüdür. Yani, G kompakttır.

Tanım 5.7 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $X \neq \emptyset$ ve U ile V , X in herhangi boş olmayan iki açık kümesi olsun. $U \cap V \neq \emptyset$ ise X e indirgenemez denir.

Bu tanıma dayanarak şu sonucu elde ederiz: $X \neq \emptyset$ uzayı indirgenemez değil ise $X = F_1 \cup F_2$ iken $X = F_1$ veya $X = F_2$ olacak şekilde F_1 ve F_2 kapalı kümeleri vardır.

Lemma 5.8 S bir yarı halka olsun. $X = \text{Spec}(S)$ nin indirgenemez olması için gerek ve yeter şart S nin nil radikalının asal ideal olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$: S yarı halkasının nil radikali $N = N(S)$ asal ideali olmasın. O halde $ab \in N$, fakat $a, b \in S - N$ olacak şekilde $a, b \in S$ vardır. Böylece;

$$a \notin N \Rightarrow h(a) \neq X \Rightarrow X - h(a) = X_a \neq \emptyset \text{ dır.}$$

Benzer şekilde $X_b \neq \emptyset$ dır. X_a ve X_b , X de açık kümelerdir.

Fakat, $X_a \cap X_b = X_{ab} = X - h(ab) = \emptyset$ dir. Bu ise X in indirgenemez olması ile çelişir. Bundan dolayı $N = N(S)$ asal idealdir.

$\Leftarrow$: $N = N(S)$, S nin nil radikali ve asal ideal olsun. X in boş olmayan, iki açık alt kümeleri olarak, U ile V yi alalım. $P_U \in U$ ve $P_V \in V$ olsun. $E \subseteq S$ için $U = X - h(E)$ olsun. Şu halde $P_U \in U \Rightarrow P_U \notin h(E) \Rightarrow E \not\supset P_U$ dur ve $N \subseteq P_U$ olduğundan, $E \not\supset N$, yani $N \notin h(E)$, $N \in U$ dur. Benzer şekilde, $N \in V$ dir. Bundan dolayı, $N \in U \cap V$ ve $U \cap V \neq \emptyset$ dir. Şu halde X indirgenemezdir.

$f : S \rightarrow R$ bir homomorfizma olsun. $X = \text{Spec}(S)$, $Y = \text{Spec}(R)$ olsun. f aracılığı ile bir $f^* : Y \rightarrow X$ dönüşümünü tanımlayalım:

Her $P \in Y$ için $f^*(P) = f^{-1}(P) = P^c$ olsun.

Bu gösterimlerle;

1. $P \in h_S(E)$ nin anlamı $E \subseteq S$ ve $E \subseteq P \in X$ dir.

2. $P \in h_R(F)$ nin anlamı $F \subseteq R$ ve $F \subseteq P \in Y$ dir.

$a \in S$ için $E = \{a\}$ ise $h_S(\{a\}) = h_S(a)$ yazalım. Aşağıdaki durum göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} f(E) \subseteq P &\Leftrightarrow E \subseteq f^{-1}(P) = P^c \\ &\Leftrightarrow f^*(P) \in h_S(E) \Leftrightarrow P \in f^{*-1}(h_S(E)) \end{aligned}$$

dir. $r \in R$ ve $P \in Y$ olsun.

$$\begin{aligned} P \in Y_{f(r)} = Y - h(f(r)) &\Leftrightarrow f(r) \notin P \\ &\Leftrightarrow P \notin f^{*-1}(h_R(r)) \\ &\Leftrightarrow P \in f^{*-1}(X) - f^{*-1}(h_R(r)) \\ &\Leftrightarrow P \in f^{*-1}(X - h_R(r)) = f^{*-1}(X_r) \end{aligned}$$

Böylece $Y_{f(r)} = f^{*-1}(X_r)$ dir.

Önerme 5.9 S ile R iki yarı halka, $f : S \rightarrow R$ bir homomorfizma ve $X = \text{Spec}(S)$, $Y = \text{Spec}(R)$ olsun. f aracılığı ile bir $f^* : Y \rightarrow X$ dönüşümünü her $P \in Y$ için $f^*(P) = f^{-1}(P) = P^c$ şeklinde tanımlayalım. Şu halde;

1. f^* süreklidir.

2. I , S nin bir ideali ise $f^{*-1}(h_S(I)) = h_R(I^e)$ dir.

İspat 1. $U \subseteq X$ bir açık küme ise $f^{*-1}(U)$ nun Y de açık olduğunu gösterelim:

$U \subseteq X$ bir açık küme ise bir $E \subseteq S$ vardır öyle ki $U = X - h(E) = \bigcup_{e \in E} X_e$ şeklindedir.

$$f^{*-1}(U) = f^{*-1}\left(\bigcup_{e \in E} X_e\right) = \bigcup_{e \in E} f^{*-1}(X_e) = \bigcup_{e \in E} Y_{f(e)}$$

dir. Öyleyse f^* süreklidir.

Eğer $F \subseteq X$ kapalı bir küme ise f^* sürekli olduğundan $f^{*-1}(F)$, Y de kapalıdır.

F , X kapalı olduğundan S nin bir I ideali için $F = h_S(I)$ dır.

2. I , S nin bir ideali olsun. Bir $P \in Y$ için

$$P \in f^{*-1}(h_S(I)) \Leftrightarrow f(I) \subseteq P$$

$$\Leftrightarrow P \in h_R(f(I))$$

$$\Leftrightarrow P \in h_R(I^e) .$$

Tanım 5.10 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bir $A \subset X$ kümesi her boştan farklı açık G kümesi için $A \cap G \neq \emptyset$ ise A kümesine X de yoğun denir.

Önerme 5.11 (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

1. Y , X in indirgenemez alt uzayı ise $\bar{Y}$ indirgenemezdir.
2. X in her indirgenemez alt uzayı bir maksimal indirgenemez uzayda kapsanır.
3. X in maksimal indirgenemez uzayları kapalıdır ve X i örterler.

İspat 1. Y , X de indirgenemez uzay ve U ile V , $\bar{Y}$ nin boştan farklı iki açık kümesi olsun. $U \cap Y$ ile $V \cap Y$, Y nin boştan farklı alt kümeleridir çünkü Y , $\bar{Y}$ da yoğundur. U nun $\bar{Y}$ da açık olması $U = G \cap \bar{Y}$ olacak şekilde açık $\emptyset \neq G \subseteq X$ nin var olmasıdır. Böylece $Y \cap U = Y \cap (G \cap \bar{Y}) = Y \cap G$ dir öyleyse $Y \cap U$, Y de açıktır.

Benzer şekilde $Y \cap V$ nin de Y de açık olduğu gösterilebilir. Buradan da $(Y \cap U) \cap (Y \cap V) \neq \emptyset \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \bar{Y}$ indirgenemezdir.

2. $E \subset X$ bir indirgenemez alt uzay olsun.

$\Omega = \{S \subset X : S \text{ bir indirgenemez alt uzay}, E \subseteq S\}$ olsun. $E \in \Omega$ olduğundan $\Omega \neq \emptyset$ dir. $\{S_i, \subseteq\}_{i \in I}$, Ω da bir zincir ve $M = \bigcup_{S \in \Omega} S$ olsun. $M \in \Omega$ olduğunu gösterirsek Ω da

bir maksimal elemanın varlığını Zorn lemmadan söyleyebiliriz. $U, V \in M$ boştan farklı

açık alt kümeler olsun. $S_1 \cap U \neq \emptyset$, $S_2 \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde $S_1, S_2 \in \{S_i, \subseteq\}_{i \in I}$ vardır. $\{S_i, \subseteq\}_{i \in I}$ bir zincir olduğundan $S_1 \subseteq S_2$ dir. Böylece $S_2 \cap U$ ile $S_2 \cap V$, S_2 nin boştan farklı açık alt kümeleridir. S_2 indirgenemez olduğundan $\emptyset \neq (S_2 \cap U) \cap (S_2 \cap V) \subset U \cap V$ dir. Böylece M , X in indirgenemez alt uzayıdır. $E \subseteq M$ olduğu açıktır. Buradan da $M \in \Omega$ dır.

3. $M \subset X$ bir maksimal indirgenemez alt uzay olsun. $M \subseteq \overline{M}$ dır. 1) den $\overline{M}$ indirgenemez bir alt uzaydır ve 2) den $M = \overline{M}$ dır.

Şimdi bir $x \in X$ alalım. $\{x\}$ in açık alt kümeleri kendisi ve $\emptyset$ dir. Öyleyse $\{x\}$, X de indirgenemez bir uzaydır. 2) den $\{x\} \subseteq M$ olacak şekilde bir maksimal indirgenemez M alt uzayı vardır.

Tanım 5.12 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in bir maksimal indirgenemez alt uzayına X in bir indirgenemez bileşeni denir.

Önerme 5.13 S bir yarı halka ve $X = \text{Spec}(S)$ olsun. X in indirgenemez bileşenleri P , S nin bir minimal asal ideali olacak şekilde $h(P)$ kapalı kümeleridir.

İspat $Y = \{R \subseteq X : R \text{ bir kapalı indirgenemez alt uzay}\}$ olsun.

1. $P \in X \Rightarrow h(P) \in Y$ olduğunu gösterelim:

$\emptyset \neq U, V \subset h(P)$ açık alt kümeler olsun. Öyleyse E, F gibi S nin iki alt kümesi için $U = h(P) \cap (X - h(E))$ ve $V = h(P) \cap (X - h(F))$ olsun.

$$U \cap V = h(P) \cap [(X - h(E)) \cap (X - h(F))] = h(P) \cap [X - (h(E) \cup h(F))] = h(P) \cap [X - h(E \cup F)]$$

$$U \neq \emptyset \Rightarrow h(P) \cap (X - h(E)) \neq \emptyset \Rightarrow h(P) \not\subset h(E) \Rightarrow E \not\subset P$$

dir. Benzer şekilde $F \not\subset P$ dir.

P asal ideal olduğundan $E \cap F \not\subset P \Rightarrow h(P) \not\subset h(E \cap F)$ dir.

Böylece $U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow h(P)$ kapalı indirgenemez alt uzaydır. $\Rightarrow h(P) \in Y$

Şimdi $h : X \rightarrow Y$ bire bir, örten dönüşüm olduğunu gösterelim:

2. Eğer $R \in Y \Rightarrow h(P) = R$ olacak şekilde bir $P \in X$ vardır. Öyleyse h örtendir.

E , S nin asal olmayan bir ideali olsun. $E = \sqrt{E}$ olduğunu varsayalım.

$a, b \in S - E$ olsun. Öyleyse $ab \in E$ dir.

$(a) \cap E$ dir. O halde $a \notin Q$ olacak şekilde $Q \in h(E)$ vardır, çünkü $\bigcap_{P \in h(E)} P = E$ dir.

Böylece $h(E) \cap h(a)$ dir.

Benzer şekilde $h(E) \cap h(b)$ dir.

Böylece $X_a \cap h(E)$ ile $X_b \cap h(E)$, $h(E)$ nin boştan farklı iki açık kümesidir.

$$(X_a \cap h(E)) \cap (X_b \cap h(E)) = X_a \cap X_b \cap h(E) = X_{ab} \cap h(E) = h(E) \cap (X - h(ab))$$

$$ab \in E \Rightarrow (ab) \subseteq E \Rightarrow h(E) \subseteq h(ab) \Rightarrow h(E) \cap (X - h(ab)) = \emptyset$$

O halde $h(E)$ indirgenelirdir.

3. h , bire birdir. Çünkü,

$$P, Q \in X \text{ için } P = Q \Leftrightarrow h(P) = h(Q) \text{ dur.}$$

X in maksimal indirgenemez alt uzaylarına Y nin maksimal elemanı karşılık gelmektedir.

h ters kapsamayı sağladığından, yani;

$$X \text{ de } P \subseteq Q \Leftrightarrow Y \text{ de } h(Q) \subseteq h(P) \text{ dir.}$$

O halde X in minimal elemanı h altında Y nin bir maksimal elemanına karşılık gelir. Böylece $M \subseteq X$ indirgenemez bileşendir $\Leftrightarrow M = h(P)$ olacak şekilde bir minimal asal ideali vardır.

Tanım 5.14 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in her Y alt kümesi için $\tau(Y)$, Y nin τ -açık komşuluğunu gösterir. $\hat{Y} = \bigcap \tau(Y)$ kümesine Y nin çekirdeği denir ve $Y = \hat{Y}$ ise Y ye çekirdek denir. Ayrıca her $x \in X$ için $\tau(x) = \tau(\{x\})$, $\bar{x} = \overline{\{x\}}$ ve $\hat{x} = \{\hat{x}\}$ dir.

Tanım 5.15 I , S yarı halkasının bir ideali olsun. Eğer $I = \sqrt{I}$ ise I ideali yarı asal ideal ve $N(S) = \sqrt{0} = (0)$ ise S ye yarı asal denir.

Önerme 5.16 S bir yarı halka ve $P \in \text{Spec}(S)$ olsun. $\bar{P} = h(P)$ dir ve $\{P\}$ nin kapalı olması için gerek ve yeter şart P nin maksimal ideal olmasıdır.

İspat Açık.

Önerme 5.17 S bir yarı halka olsun. $\text{Spec}(S)$, kompakt T_0 – uzayıdır.

İspat Önerme 5.6 dan $\text{Spec}(S)$ kompakt uzaydır. $P \neq Q$ ve $P, Q \in \text{Spec}(S)$ olsun. O halde bir $x \in P - Q$ vardır ve $P \in h(x)$, $Q \notin h(x)$ dir. Öyleyse $Q \in \text{Spec}(S) - h(x)$ ve $P \notin \text{Spec}(S) - h(x)$ dir. Böylece $\text{Spec}(S)$ kompakt T_0 – uzayıdır.

Tanım 5.18 (X, τ) bir topolojik uzayı olsun. X in boştan farklı indirgenemez kapalı alt kümeleri bir (tek) $x \in X$ için $\bar{x}$ formunda ise X e sober denir.

Tanım 5.19 (X, τ) bir topolojik uzayı olsun. X ;

i. Kompakt T_0 – uzay,

ii. Kompakt açık alt kümeleri, sonlu kesişimler altında kapalı olan τ nun bir tabanını oluşturur,

iii. Sober uzay

ise (X, τ) uzayına spektral uzay denir

Teorem 5.20 S yarı halka olsun. $\text{Spec}(S)$ bir spektral uzaydır.

İspat $X = \text{Spec}(S)$ ve S nin sonlu üretilmiş bir ideali $I = Sx_1 + Sx_2 + \dots + Sx_n$ olsun.

$X - h(I) = \bigcup_{i=1}^n X_{x_i}$ Teorem 5.6 dan kompakt olduğu açıktır.

$\{X - h(I) : I, S \text{ nin sonlu ideali}\}$ kümesi $\{X_f : f \in S\}$ tabanını kapsadığından τ nun bir tabanıdır.

$\{X - h(I) : I, S \text{ nin sonlu ideali}\}$ ailesi sonlu kesişimler altında kapalı mı?

I ve J , S nin iki sonlu ideali olsun. $(X - h(I)) \cap (X - h(J)) = X - h(IJ)$ ve IJ de S nin sonlu ideali olduğundan $(X - h(I)) \cap (X - h(J)) \in \{X - h(I) : I, S \text{ nin sonlu ideali}\}$ dir. Son olarak $\text{Spec}(S)$ nin sober uzay olduğunu gösterelim. P , S nin bir asal ideali ve I ile J , S nin iki ideali olsun öyle ki $h(P) \subseteq h(I) \cup h(J) = h(IJ)$ olsun. Öyleyse,

$IJ \subseteq P \Rightarrow I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ dir. Buradan $h(P) \subseteq h(I)$ veya $h(P) \subseteq h(J)$ dir. Yani, $h(P)$ indirgenemezdir ve $\bar{P} = h(P)$ olduğunu daha önce göstermiştik.

Q , S nin yarı asal ideali olsun ve $h(Q)$ nun boştan farklı indirgenemez küme olsun. $a, b \in S$ için $ab \in Q$ olsun. Öyleyse $h(Q) \subseteq h(ab) = h(a) \cup h(b)$ dir ve $h(Q)$ nun

boştan farklı indirgenemez küme olduğundan $h(Q) \subseteq h(a)$ veya $h(Q) \subseteq h(b)$ dir. Eğer $h(Q) \subseteq h(a)$ ise $a \in Q$ dur. (Aksi halde $b \in Q$ dur.) Q , S nin asal idealidir ve X spektral uzaydır.

Tanım 5.21 (X, τ) topolojik uzayı olsun. $\{U_i\}_{i \in I}$ ailesi X in bir açık örtülüğü olsun. Bu ailenin bir U_k ($k \in I$) elemanı için $X = U_k$ sağlanıyorsa (X, τ) uzayına süperkompakt uzay denir.

Teorem 5.22 Bir S yarı halkasının lokal olması için gerek ve yeter şart $Spec(S)$ nin bir süperkompakt uzay olmasıdır.

İspat $X = Spec(S)$, S lokal ve Q , S nin maksimal ideali olsun. $\{U_j\}_{j \in \Delta}$, X in bir açık örtülüğü olsun öyle ki her $U_j \neq X$. Her $j \in \Delta$ için $Q \in h(I_j) = X - U_j$ olacak şekilde S de bir I_j ideali vardır. Bu durumda $Q \in \bigcap_{j \in \Delta} h(I_j) = \emptyset$ dir. Bu ise bir çelişki oluşturur.

Tersine X süperkompakt uzay ve $|Max(S)| > 1$ olsun. $X = \bigcup_{P \in Max(S)} (X - h(P))$

sağlanır. X süperkompakt uzay olduğundan $X = X - h(P)$ olacak şekilde $P \in Max(S)$ vardır. Buradan $h(P) = \emptyset$ dir. Bu ise bir çelişki oluşturur.

Tanım 5.23 A , (X, τ) topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. L bir çekirdek ve F kapalı bir küme olmak üzere $A = L \cap F$ ise A kümesine λ -kapalı küme denir. Ayrıca, tek nokta kümesi $\{x\}$, λ -kapalı ise $x \in X$ noktasına λ -kapalı denir.

Lemma 5.24 (X, τ) topolojik uzayının bir A alt kümesi için aşağıdakiler denktir:

1. A bir λ -kapalı kümedir.
2. L , çekirdek olmak üzere $A = L \cap \bar{A}$ dır.
3. $A = \hat{A} \cap \bar{A}$ dır.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2)

A bir λ -kapalı küme olduğundan L bir çekirdek ve F kapalı bir küme olmak üzere $A = L \cap F$ şeklinde yazılır. Öyleyse $A \subseteq \bar{A} \subseteq F$ dir ve $A = L \cap \bar{A}$ olduğu açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3)

L , çekirdek olmak üzere $A = L \cap \bar{A}$ olsun. Öyleyse $A \subseteq \hat{A} \subseteq L$ dir. Böylece $A = \hat{A} \cap \bar{A}$ dır.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Açık.

Tanım 5.25 (X, τ) topolojik uzayının her U açık kümesi için $x \in U$ iken $\bar{x} \subseteq U$ gerektirmesi sağlanıyorsa (X, τ) uzayına R_0 –uzayı denir. (X, τ) uzayının her λ –kapalı noktası çekirdek ise uzaya zayıf R_0 –uzayı denir. $\bar{x} \neq \bar{y}$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için $\bar{x} \subseteq U$, $\bar{y} \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ile V açık kümeleri varsa (X, τ) uzayına R_1 –uzayı denir.

Önerme 5.26 Her (kapalı) çekirdek alt küme λ –kapalıdır.

İspat (X, τ) topolojik uzayının bir çekirdek alt kümesi Y olsun. O halde $Y = \hat{Y}$ dir ve $\bar{Y} \cap \hat{Y} = \bar{Y} \cap Y = Y$ sağlandığından Y alt kümesi λ –kapalıdır.

Teorem 5.27 Bir topolojik uzayın T_0 –uzayı olması için gerek ve yeter şart her tek nokta kümesinin λ –kapalı olmasıdır.

İspat (X, τ) topolojik uzayı T_0 –uzayı olsun. $x \in X$ olsun. Öyleyse her $y \neq x$ için x noktasını içeren $\{y\}$ ile ayrık bir A_y kümesi vardır ve bu A_y açık ya da kapalıdır. Bütün açık A_y kümelerinin kesişimi L , bütün kapalı A_y kümelerinin kesişimi F olsun. Açıktır ki L , bir çekirdektir ve F , bir kapalı kümedir. Buradan $\{x\} = L \cap F$ dir. Yani $\{x\}$, λ –kapalıdır.

Tersine, x ve y , X uzayının birbirinden farklı noktaları olsun. Hipotezden $\{x\} = \{\hat{x}\} \cap \{\bar{x}\}$ dır. Eğer $y \notin \{\bar{x}\}$ ise $y \in X - \{\bar{x}\}$ dır. Böylece (X, τ) topolojik uzayı T_0 –uzayı olur.

Eğer $y \in \{\bar{x}\}$ ise $y \notin \{\hat{x}\}$ dir. Böylece bazı açık U kümeleri için $x \in U$ ve $y \notin U$ dur.

Yani, (X, τ) topolojik uzayı T_0 –uzayıdır.

Teorem 5.28 Her R_0 –uzayı bir zayıf R_0 –uzayıdır.

İspat (X, τ) topolojik uzayı R_0 – uzayı, $x \in X$ ve $\{x\} = \{\hat{x}\} \cap \{\bar{x}\}$ olsun. $y \neq x$ ve $y \in \{\hat{x}\}$ olsun. Öyleyse $y \notin \{\bar{x}\}$ dir ve $y \in X - \{\bar{x}\}$ dir. (X, τ) , R_0 – uzayı olduğundan $\{\bar{y}\} \subseteq X - \{\bar{x}\}$ dir. Bu ise $x \notin \{\bar{y}\}$ olduğunu gösterir. Böylece $\{y\}$ ile ayırık ve x içeren bir açık küme $X - \{\bar{y}\}$ vardır. Buradan $y \notin \{\hat{x}\}$ ve $\{x\} = \{\hat{x}\}$ dir.

Teorem 5.29 Her R_1 -uzayı, R_0 – uzayıdır.

İspat (X, τ) topolojik uzayı R_1 – uzayı, U bir açık küme ve $x \in U$ olsun. Eğer $y \notin U$ ise $x \notin \{\bar{y}\}$ dir. (Çünkü $x \in \{\bar{y}\}$ olsaydı x in her komşuluğu ile $\{y\}$ nin kesişimi boştan farklı olurdu. Bu ise $y \notin U$ olması ile çelişirdi). Öyleyse $\{\bar{x}\} \neq \{\bar{y}\}$ dir. (X, τ) , R_1 – uzayı olduğundan $\{\bar{y}\} \subset V_y$ olacak şekilde V_y açık kümesi vardır ve $x \notin V_y$ dir. O halde $y \notin \{\bar{x}\}$ dir. Böylece $\{\bar{x}\} \subset U$ dur.

Teorem 5.30 (X, τ) topolojik uzayının her tek nokta kümesi çekirdek ise (X, τ) topolojik uzayı T_1 – uzayıdır.

İspat (X, τ) topolojik uzayının her tek nokta kümesi çekirdek olsun. x ve y , X uzayının birbirinden farklı noktaları olsun. $x \neq y$ olduğu için $y \notin \{x\} = \{\hat{x}\}$ dir ve bir U açık kümesi için $x \in U$ ve $y \notin U$ dur. Benzer şekilde $x \neq y$ olduğu için $x \notin \{y\} = \{\hat{y}\}$ dir ve bir V açık kümesi için $y \in V$ ve $x \notin V$ dir.

Teorem 5.31 Her T_1 – uzayı, R_0 – uzayıdır.

İspat (X, τ) topolojik uzayı, T_1 – uzayı olsun. U bir açık küme ve $x \in U$ olsun. O halde $\{x\} \subset U$ dur. (X, τ) topolojik uzayı, T_1 – uzayı olduğundan her tek nokta kümesi kapalıdır. Böylece $\{\bar{x}\} \subset U$ dur.

Teorem 5.32 (X, τ) topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir:

1. X , T_1 – uzayıdır.
2. X , T_0 ve R_0 – uzayıdır.
3. X , T_0 ve zayıf R_0 – uzayıdır.

İspat $(1) \Rightarrow (2)$ ve $(2) \Rightarrow (3)$ açıktır.

$(3) \Rightarrow (1)$

(X, τ) topolojik uzayının her tek nokta kümesi çekirdek ise (X, τ) topolojik uzayı T_1 -uzayıdır. X uzayı T_0 -uzayı olduğundan Teorem 5.27 den her nokta kümesi λ -kapalıdır ve X uzayı zayıf R_0 -uzayı olduğundan her bir nokta kümesi çekirdektir.

Teorem 5.33 (X, τ) topolojik uzayının T_2 -uzayı olması için gerek ve yeter şart topolojik uzayın hem T_1 -uzayı hem de R_1 -uzayı olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$: (X, τ) topolojik uzayı T_2 -uzayı olsun. Sonuç 2.21 e göre her T_2 -uzayı, T_1 -uzayıdır. (X, τ) topolojik uzayının R_1 -uzayı olduğunu gösterelim: $\{\bar{x}\} \neq \{\bar{y}\}$ olacak şekilde $x, y \in X$ olsun. (X, τ) topolojik uzayı T_1 -uzayı olduğundan $\{\bar{x}\} = \{x\}$ dir. Dolayısıyla $\{x\} \neq \{y\}$ ve (X, τ) topolojik uzayı T_2 -uzayı olduğundan $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V açık kümeleri vardır. $\{x\} \subset U$ ve $\{y\} \subset V$ dir yani, $\{\bar{x}\} \subset U$, $\{\bar{y}\} \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ dir.

$\Leftarrow$: (X, τ) topolojik uzayı hem T_1 -uzayı hem de R_1 -uzayı olsun. $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ alalım. Buradan $\{x\} \neq \{y\}$ dir ve uzay T_1 -uzayı olduğundan $\{\bar{x}\} = \{x\} \neq \{y\} = \{\bar{y}\}$ dir. (X, τ) uzayı R_1 -uzayı olduğundan $\{\bar{x}\} \subset U$, $\{\bar{y}\} \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V açık kümeleri vardır ve yine uzay T_1 -uzayı olduğundan $\{x\} \subset U$, $\{y\} \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ dir. Yani $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V açık kümeleri vardır.

Teorem 5.34 Bir S yarı halkası için aşağıdakiler denktir:

- a) S nin her asal ideali maksimaldir.
- b) $\text{Spec}(S)$, bir T_1 -uzayıdır.
- c) $\text{Spec}(S)$, bir T_2 -uzayıdır.
- d) $\text{Spec}(S)$, bir R_0 -uzayıdır.
- e) $\text{Spec}(S)$, bir zayıf R_0 -uzayıdır.
- f) $\text{Spec}(S)$, bir R_1 -uzayıdır.
- g) $\text{Spec}(S)$ nin her noktası çekirdektir.

İspat (a) $\Leftrightarrow$ (b)

Her $P \in \text{Spec}(S)$ için Önerme 5.16 dan $\{P\}$ kapalıdır. $\Leftrightarrow \text{Spec}(S)$ bir T_1 –uzayıdır.

(c) $\Rightarrow$ (b)

Açıktır.

(b) $\Leftrightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e)

Teorem 4.32 den açıktır.

(a) $\Rightarrow$ (c)

S nin her asal idealinin maksimal olduğunu varsayalım.

$P, Q \in \text{Spec}(S)$ için $P \neq Q$ olsun. $a \in S - Q$ ve $b \in S - P$ vardır öyle ki $ab \in \sqrt{0}$ olduğunu göstermek yeterlidir, çünkü bu durum da $X - h(a)$ ve $X - h(b)$ kümeleri Q ve P noktalarını kapsayan ayrık açık kümelerdir. Hipotezden P ve Q idealleri ayrık olduğundan bir $a \in P - Q$ vardır. P nin minimalliği ve Lemma 4.6 dan $b \in S - P$ vardır öyle ki ab nilpotenttir ve böylece $(X - h(a)) \cap (X - h(b)) = X - h(ab) = \emptyset$ dir. Gerekli durum sağlanır.

(c) $\Rightarrow$ (f)

5.33 den açıktır.

(f) $\Rightarrow$ (c)

$R_1 \Rightarrow R_0$ ve $\text{Spec}(S)$ bir T_0 –uzayı olduğundan T_1 –uzayıdır. Böylece $\text{Spec}(S)$ bir T_2 –uzayıdır.

(g) $\Rightarrow$ (e)

Açıktır.

(e) $\Rightarrow$ (g)

$\text{Spec}(S)$ uzayı T_0 –uzayı olduğundan her noktası λ –kapalıdır. $\text{Spec}(S)$ bir zayıf R_0 –uzayı olduğundan her λ –kapalı noktası çekirdektir.

Tanım 5.36 S bir yarı halka ve P asal ideali olsun. $\text{Spec}(S)^\wedge$, S yarı halkasındaki asal ideallerin kesişimlerinden oluşan kümedir ve $F_P = \{I \in \text{Spec}(S)^\wedge : I \neq R, I \not\subseteq P\}$ dir.

Buradan $\hat{P} = \bigcap_{I \in F_P} (X - h(I))$ dir.

Önerme 5.37 S bir yarı halka ve P asal ideali olsun. Eğer $F_p \neq \emptyset$ ise F_p boştan farklı sonlu kesişimler altında kapalıdır.

İspat $F_p \neq \emptyset$ olsun. O halde $I, J \in F_p$ olacak şekilde idealleri vardır. $I \not\subset P$ ve $J \not\subset P$ dir. P asal ideali olduğundan $I \cap J \not\subset P$ dir. Böylece $I \cap J \in F_p$ dir.

Teorem 5.38 S bir yarı halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- a) S , lokal yarı halkadır.
- b) $F_p = \emptyset$ olacak şekilde bir P asal ideali vardır.
- c) $\hat{P} = \text{Spec}(S)$ olacak şekilde bir P asal ideali vardır.

İspat (a) $\Rightarrow$ (b)

S lokal yarı halka olsun. P ideali S yarı halkasının maksimal ideali olsun. S nin P maksimal ideali için $F_p = \emptyset$ dir.

(b) $\Rightarrow$ (a)

$F_p = \emptyset$ olacak şekilde bir P asal ideali var olsun. O halde P , S nin maksimal idealidir. P tek maksimal ideal mi? Tek maksimal ideal olmasın. Q da S nin maksimal ideali olsun. Öyleyse $Q \not\subset P$ dir. Öyleyse $Q \in F_p$ dir. Bu ise bir çelişki oluşturur.

(b) $\Rightarrow$ (c)

$F_p = \emptyset$ olacak şekilde bir P asal ideali var olsun. $\hat{P} = \bigcap_{I \in F_p} (X - h(I))$ olduğundan

$$\hat{P} = \bigcap_{\emptyset} (X - h(I)) = X - \bigcup_{\emptyset} h(I) = X - h\left(\bigcap_{\emptyset} I\right) = X - h(S) = X - \emptyset = X$$

(c) $\Rightarrow$ (b)

$\hat{P} = \text{Spec}(S)$ olacak şekilde bir P asal ideali var olsun.

$\hat{P} = \text{Spec}(S) = \bigcap_{I \in F_p} (X - h(I)) = X - \bigcup_{I \in F_p} h(I)$ olduğundan $\bigcup_{I \in F_p} h(I) = \emptyset$ dir. Öyleyse her

$h(I) = \emptyset$ dir. Yani her $I = S$ dir. Öyleyse $F_p = \emptyset$ dir.

5.1 Regüler Uzaylar

Tanım 5.39 Bir (X, τ) topolojik uzay olsun. $x \in X - F$ olacak şekilde her F kapalı kümesi için $x \in U, F \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ sağlayan U, V açık kümeleri varsa x noktası regüler nokta denir.

Her noktası regüler nokta olan uzaya regüler uzay denir.

Teorem 5.40 S bir yarı halka ve $P, F_p \neq \emptyset$ olacak şekilde S nin bir asal ideali olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

a) $P, \text{Spec}(S)$ nin regüler noktasıdır.

b) Her $I \in F_p$ için $I + J = S$ ve $Ja \subseteq \sqrt{0}$ olacak şekilde $a \in S - P$ ve S nin bir J ideali vardır.

c) Her $x \in S - P$ için $Sx + J = S$ ve $Ja \subseteq \sqrt{0}$ olacak şekilde $a \in S - P$ ve S nin bir J ideali vardır.

Ayrıca, bu durum da P, S nin maksimal idealidir.

İspat $X = \text{Spec}(S)$ olsun. (a) $\Leftrightarrow$ (b) olduğunu gösterelim. $I \in F_p$ olsun. Aşağıdaki durumlar denktir:

1. $P \in U, h(I) \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri vardır.
2. $P \in X - h(a), h(I) \subseteq X - h(J)$ ve $X - h(a) \cap X - h(J) = \emptyset$ olacak şekilde $a \in S$ ve S nin bir J ideali vardır.
3. $h(I) \cap h(J) = \emptyset$ ve $h(a) \cup h(J) = X$ olacak şekilde $a \in S - P$ ve S nin bir J ideali vardır.
4. $h(I + J) = \emptyset$ ve $h(aJ) = X$ olacak şekilde $a \in S - P$ ve S nin bir J ideali vardır.
5. $I + J = S$ ve $aJ \subseteq \sqrt{0}$ olacak şekilde $a \in S - P$ ve S nin bir J ideali vardır.

(c) $\Rightarrow$ (b)

Açıktır.

(b) $\Rightarrow$ (c)

$x \in S - P$ olsun. $x \in U(S)$ ise $a = x$ ve $J = \sqrt{0}$ alabiliriz.

$x \notin U(S)$ olduğunu varsayalım. Öyleyse $I = \sqrt{x} \in F_p$ ve hipotezden $I + J = S$ ve $Ja \subseteq \sqrt{0}$ olacak şekilde $a \in S - P$ ve S nin bir J ideali vardır. $i + j = 1$ olacak şekilde $i \in I$ ve $j \in J$ vardır. $i^n \in Sx$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır ve $1 = (i + j)^n \in Sx + J$ dir.

P nin maksimal ideal olduğunu gösterelim.

Her $a \in S - P$ için $J \subseteq (\sqrt{0} : a) \subseteq P$ dir. Öyleyse her $x \in S - P$ için $S = Sx + J \subseteq Sx + P$ dir. Yani, P maksimal idealdir.

Sonuç 5.41 S bir yarı halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

a) $\text{Spec}(S)$ bir regüler uzaydır.

b) S nin her P asal ideali ve her $I \in F_p$ için $I + J = S$ ve $Ja \subseteq \sqrt{0}$ olacak şekilde $a \in S - P$ ve S nin bir J ideali vardır.

c) S nin her P asal ideali ve her $x \in S - P$ için $Sx + J = S$ ve $Ja \subseteq \sqrt{0}$ olacak şekilde $a \in S - P$ ve S nin bir J ideali vardır.

d) S nin her asal ideali maksimaldir.

İspat Teorem 5.40 dan $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c)$ ve $(a) \Rightarrow (d)$ dir.

Teorem 5.34 den ve Teorem 2.23 den her kompakt T_2 -uzayı regüler uzay olduğundan $(d) \Rightarrow (a)$

Açıktır.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Yarı halkaların asal idealleri üzerinde Zariski topolojisi kuruldu ve topolojik uzayın tabanı belirlendi. Kurulan bu topolojik uzayın sober uzay, spektral uzay ve süperkompakt uzay olduğu ispatlandı. λ –kapalı küme kavramı tanımlanarak bu topolojik uzay üzerinde R_0 –uzayı, R_1 –uzayı ve ayırma aksiyomları incelendi. Bu topolojik uzay üzerinde ayırma aksiyomlarının birbirleriyle ilişkileri incelendi.

KAYNAKLAR

- [1] Long, P.E., (1971), “An Introduction to General Topolgy”, Merrill Mathematics Series
- [2] Prof. Dr.Kılıç, S.A., (2002), “Genel Topoloji”, 2002 VİPAŞ A.Ş. yayın no:66, Bursa 2002
- [3] Murdeshwar, M.G. (1990). “General Topology”, New Age International Publishers, Second edition ,Canada.
- [4] Olson, D.M. (1971), “A Radical Theory for Semirings”, University of Wyoming, Ph.D., 1971 Mathematics.
- [5] Hebisch, U. ve Weinert, H.J. (1993),”Semirings-Algebraic Theory and Applications in Computer Science”, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.
- [6] Çallıalp, F. ve Tekir, Ü. (2009),”Değişmeli Halkalar ve Modüller”, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- [7] Yeşilot, G. (2010),” On Prime and Maximal k -Subsemimodules of Semimodules”, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume 39(3): 305 - 312.
- [8] Deore, R.P. ve Patil, K.B. (2006), “On Ideals in Semirings”, Southeast Asian Bulletin of Mathematics (2008) 32: 417 - 424.
- [9] Gupta, V. ve Chaudhari, J.N. “Prime Ideals in Semirings”, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2).
- [10] Fernandez, J.S. (1991),” The Prime Spectrum of a Ring”,Florida Atlantic University Boca Raton, December 1991,Florida.
- [11] Peña, A., Ruza, L.M. ve Vielma, J. (2009), “Separation Axioms and The Prime Spectrum of Commutative Semirings”, Revista Notas de Matemática 5(2): 284, 66-82.
- [12] Caldas, M., Jafari, S. ve Navalagi, G. (2007),” More on λ -closed Sets in Topological Spaces”, Revista Colombiana de Matemáticas Volumen 41(2): 355 - 369.
- [13] Caldas, M., Georgiou, D. N., Jafari, S. ve T. Noiri, (2003),” More on δ -Semiopen Sets”, Note di Matematica 22(2): 113 - 126.

- [14] Francisco G. Arenas, Julian Dontchev and Maximilian Ganster, (1991), " On λ - sets and The Dual of Generalized Continuity", 1991 Math. Subject Classification Primary: 54C05, 54C08, 54D10; Secondary: 26A15, 54H05.
- [15] Lu, C.P. (1999), " The Zariski Topology on the Prime Spectrum of a Module", Houston Journal of Mathematics 25 (3): 417-432.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Gülşen ULUCAK
Doğum Tarihi ve Yeri :30.07.1986\ÜSKÜDAR
Yabancı Dili :İngilizce
E-posta :gulsenulucak58@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Marmara Üniversitesi	2009
Lise	Fen-Matematik	Yakacık Lisesi	2001