

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

2-PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HAREKETLER

FERDANE YEŞİLTAŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. SALİM YÜCE**

İSTANBUL, 2011

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

2-PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HAREKETLER

FERDANE YEŞİLTAŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. SALİM YÜCE**

İSTANBUL, 2011

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2-PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HAREKETLER

Ferdane YEŞİLTAS tarafından hazırlanan tez çalışması 28.04.2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU

Bahçeşehir Üniversitesi

Doç. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Filiz KANBAY

Yıldız Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Kinematik; mekaniğin, kuvvet ve kütle kavramlarının hiç rol oynamadığı bir alt dalı olup bir nokta veya nokta sisteminin zamana bağlı meydana getirdiği yer değiştirmeleri inceler. Bu çalışmada düzlemsel kinematığın geometriyi ilgilendiren kısmını ele alacağız. Bir düzlem parçasının düzlemsel bir taban üzerindeki hareketleri inceleyeceğiz ve bu hareket ile ilgili geometrik sonuçları vereceğiz.

Bu çalışmanın hazırlanmasında bana yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, her adımda bilgilerinden faydalandığım Hocam Sayın Doç. Dr. Salim YÜCE'ye saygı ve şükranlarımı sunarım. Aynı zamanda tezimi hazırlama sürecimde büyük fedakârlık gösteren ve desteklerini esirgemeyen değerli eşim Bayram YEŞİLTAS'a ve saygıdeğer ablam Füzûzan ÖZEN'e teşekkür etmek isterim.

Nisan, 2011

Ferdane YEŞİLTAS

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	x
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	1
1.3 Bulgular	2
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 Afin Uzay ve İzometri	3
2.2 E^n de Hareketler.....	4
2.3 Diferensiyel Formlar	6
BÖLÜM 3	
1-PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HAREKETLER	15
3.1 Türev Denklemleri	18
3.2 Hızlar.....	18
3.3 Dönme Polü ve Pol Eğrileri	20
3.4 Zarflar	29
3.5 Kapalı Hareket	30
BÖLÜM 4	
1-PARAMETRELİ HAREKETLERDE HAREKETLİ KOORDİNAT SİSTEMİ.....	32
4.1 Türev Denklemleri	32

4.2	Hızlar.....	35
4.3	Pol Noktaları.....	38
4.4	Kanonik İzafe Sistemi.....	41
BÖLÜM 5		
KOMPLEKS DÜZLEMDE 1-PARAMETRELİ HAREKETLER		44
5.1	Hızlar.....	45
5.2	Dönme Polü ve Pol eğrileri	47
BÖLÜM 6		
2-PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HAREKETLER		50
6.1	İki-Parametrelili Hareketler ve Onların Kutup Eksenleri	50
6.2	Hareketli Koordinat Sistemi	54
6.3	Bir Eğri elementini Çizen Noktalar	57
6.4	Kutup Eksenleri Dönüşümünün Yoğunluğu.....	61
6.5	Kutup Eksenleri Yoğunluğu Sıfır Olan Hareketler	68
6.6	Önceden Verilen Kutup Eksenleri Dönüşümü ve Hareket Arasındaki İlişki ...	71
6.7	B_H Hareketinin Destek Fonksiyonu	75
6.8	Tekrar Kutup Eksen Yoğunluğunun Sıfır Olması ile Hareket	80
6.9	Normlanmış Koordinat sistemi.....	82
6.10	M ve N İnvaryantlarının Geometrik Önemi.....	87
6.11	M ve N İnvaryantlarının H Destek Fonksiyonu ile İfadeleri.....	89
BÖLÜM 7		
SONUÇ VE ÖNERİLER		92
KAYNAKLAR.....		93
ÖZGEÇMİŞ.....		95

SİMGE LİSTESİ

d	Diferensiyel operatör
E^n	n -boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}^n$	n -boyutlu Reel vektör uzayı
E	Hareketli düzlem
E'	Sabit düzlem
Ω^p	p -formların kümesi
$\wedge$	Alterne çarpım (dış çarpım) fonksiyonu

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3. 1	1-Parametrelili düzlemsel hareket 15
Şekil 3. 2	$t = 0$ anında hareketli ve sabit koordinat sistemleri..... 16
Şekil 3. 3	Açısal hız 22
Şekil 3. 4	Hareketli ve sabit pol eğrileri 24
Şekil 3. 5	İki-nokta kılavuzluğu 25
Şekil 3. 6	İki-nokta kılavuzluğu özel durumu 25
Şekil 3. 7	Evolvent hareket 26
Şekil 3. 8	Bağlama kolu hareketi 27
Şekil 3. 9	Mafsallı dörtgende P dönme polü 27
Şekil 3. 10	Aynı yöne hareketli ikizler mekanizması 28
Şekil 3. 11	Ters yöne hareketli ikizler mekanizması 29
Şekil 3. 12	Eğrinin zarfı..... 30
Şekil 3. 13	Bir g doğrusu ve zarf eğrisi 31
Şekil 4. 1	Hareketli koordinat sistemi 32
Şekil 4. 2	Pol doğrusu..... 41
Şekil 4. 3	Kanonik İzafe sistemi 42
Şekil 6. 1	E düzleminde kutup eksenleri ve pol yörüngesi..... 63
Şekil 6. 2	E düzleminde g kutup eksenini ve izafe sistemi 66
Şekil 6. 3	g, g' doğrularının zarf eğrileri ve evolventleri 69
Şekil 6. 4	E' düzleminde izafe sistemiyle hareket 72
Şekil 6. 5	B_{II} hareketinin destek fonksiyonu 75
Şekil 6. 6	Vektörlerin dönmesi ile destek fonksiyonun değişimi 78
Şekil 6. 7	Normlanmış izafe sistemi ile g doğrusunun zarf eğrisi..... 88
Şekil 6. 8	Normlanmış izafe sisteminde Q Esas-polü 90

2-PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HAREKETLER

Ferdane YEŞİLTAŞ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Salim YÜCE

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, giriş kısmına ayrıldı.

İkinci bölümde, tez için gerekli temel kavramlar verildi.

Üçüncü bölümde, bir “ t ” zaman parametresine bağlı olarak 1-parametrelî düzlemsel hareketler ifade edildi. Hareketin türev denklemleri, hızları, pol noktaları ve zarf eğrileri verildi.

Dördüncü bölümde, 1-parametrelî hareketler için hareketli koordinat sistemi ile ilgili kavramlar aktarıldı.

Beşinci bölümde, 1-parametrelî hareketlerin kompleks sayılarla ifadesine yer verildi.

Son bölümde ise hareketin “ t ” parametresi yerine “ (u, v) ” gibi iki parametreye sahip olması durumu incelenerek 2-parametrelî düzlemsel hareketler ile ilgili kavramlar verildi. Özel olarak hareketin ikinci parametresi de ilk parametreye bağlı bir fonksiyon olarak kabul edildiğinde 2-parametrelî hareketlerden 1-parametrelî hareketler elde edildi ve bu hareket ile ilgili bazı teoremlerle verildi. Ayrıca,

- 2-parametrelî hareketlerin kutup eksenleri,
- Eğri çizici noktaları,
- Kutup eksenleri dönüşümünün yoğunluk değişmezliği,
- Doğru yoğunluğunun sıfır olma durumu,
- Doğru dönüşümünün bilinmesi ile hareket

incelendi. Buna ek olarak son bölümde,

- 2-parametrelili hareketlerin destek fonksiyonu

verildi. Ayrıca,

- Normlanmış izafe sistemi,
- Esas- B_I hareketi

incelenmiş olup, bunlara bağılı bazı teoremler ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Düzlemsel hareketler, kutup eksenli, doğru yoğunluğu, eğri elementi, hareketin destek fonksiyonu, esas- B_I hareketi.

2-PARAMETER PLANAR MOTIONS

Ferdane YEŞİLTAS

Department of Mathematic
MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Salim YÜCE

This study consists of six parts.

The first part of the study serves as an introduction.

The second part presents the basic concepts used throughout the thesis.

The third section accounts for 1-parameter plane motions depending on a “ t ” time parameter while supplying derivative equations, speeds, pole points and envelope curves of motion, as well.

The fourth part given concepts as to the moving coordinate system, for 1-parameter motions.

The fifth part expresses 1-parameter motion with complex numbers.

The last part provides concepts about 2-parameter plane motions, studying the motion having two parameters as “ (u, v) ” instead of the “ t ” parameter of motion. Given that the second parameter is a function depending on the first parameter, 1-parameter motions have been obtained from 2-parameter motions. Some theories relating this motion have also been introduced. Besides,

- Polar axes of 2-parameter motions,
- Curve plotter points,
- The density invariance of polar axes transformation,
- The situation of the density of the line zero,

- Motion with given of the line transformation

have been studied. In addition, in the last part

- Support function of 2-parameter motions is given.

Furthermore,

- Normed coordinate system,
- The Main- B_I motion

have been studied and related theories have been presented.

Key words: Planar motions, the polar axis, density of the line, the curve element, the support function of the movement, the main- B_I motion.

1.1 Literatür Özeti

2-parametrelili düzlemsel hareketler ilk defa 1956 yılında W.Blaschke ve H.R.Müller tarafından [1] de tanımlanmıştır. Daha sonra H.R.Müller'in Ankara Üniversitesinde ders kitabı olarak hazırlanan eserin Türkçe çevirisi yapılmıştır [2]. 1992 yılında Özer'in [3] çalışmasında, Müller'in [2] eseri esas alınarak yüksek lisans tezi yapılmıştır. Daha sonra 2004'de Müller'in [2] de hareket tanımını kullanarak yüksek lisans tezi yayınlanmıştır [4].

Ayrıca 2-parametrelili hareketleri Müller'den sonra 1979 yılında O.Bottema ve B.Roth [5] de tanımlamışlardır. 2004 yılında [5] kitabı esas alınarak doktora tezi yapılmıştır [6]. Daha sonra [7] ve [8] makalelerinde [5] den yararlanılarak 2-parametrelili hareketler incelenmiş ve bir noktanın Hodograph eğrisi tanımlanmıştır. Aynı zamanda [8] çalışmasının Lorentz düzlemindeki karşılığı [9] makalesinde yayınlanmıştır. Bu çalışmaların ardından [10] ve [11] makalelerinde Bottema'nın [5] eseri referans alınarak ve dönme matrisinin rankı kullanılarak 2-parametrelili hareketler incelenmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezde, Müller'in [1] ve [2] kitaplarında yer alan 2-parametrelili düzlemsel hareketler incelenmiştir. [2] kitabında bulunan 1-parametrelili hareketler ve 2-parametrelili hareketler konularındaki notasyon farklılıkları düzenlenerek tezin bütününde bu notasyonlar titizlikle korundu. Aynı zamanda [3] ve [4] tezlerinde yer alanlardan farklı

olarak 2- parametreli hareketler ile ilgili olarak [1] de yer alan ama [2] de değinilmeyen bazı başlıklara da bu tezde yer verildi.

1.3 Bulgular

2-parametreli düzlemsel hareketler, Müller'in [1] ve [2] kitaplarında tanımlandığı şekilde ele alınmıştır. Tezde notasyonlar sistematik bir şekilde devam ettirilmiş ve konu bütünlüğü korunmuştur. Ayrıca [1] Almanca kitabında olup Türkçe kitap [2] de yer almayan konular Türkçe literatüre kazandırılmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez için gerekli olan bazı temel kavram ve teoremleri vereceğiz.

2.1 Afin Uzay ve İzometri

Tanım 2.1

$A \neq \emptyset$ bir küme ve V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$
$$P, Q \rightarrow f(P, Q) = \vec{PQ}$$

dönüşümü aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A kümesine V vektör uzayı ile birleşen bir *Afin Uzay* denir.

i. $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$ dir.

ii. $\forall P \in A$ ve $\forall \vec{\alpha} \in V$ için $f(P, Q) = \vec{\alpha}$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalıhoğlu [12]).

Tanım 2.2

V n -boyutlu reel vektör uzayı ve A da V ile birleşen bir afin uzay olsun. Eğer V bir iç-çarpım uzayı ise A ya *Öklid Uzay* denir ve E^n ile gösterilir [12].

Tanım 2.3

K cismi üzerinde iki vektör uzayı V_1 ve V_2 olsun. V_1 ve V_2 ile birleşen afin uzaylar A_1 ve A_2 olmak üzere $f : A_1 \rightarrow A_2$ dönüşümü $P, Q \in A_1$ için

$$\psi_p : V_1 \rightarrow V_2$$

$$PQ \rightarrow \psi_p \quad PQ = f \quad P \quad f \quad Q$$

şeklinde tanımlansın. Burada ψ_p dönüşümüne f ile birleşen dönüşüm adı verilir. Eğer ψ_p dönüşümü lineer ise f ye bir *Afin dönüşüm* denir.

Tanım 2.4

E_1^n ve E_2^n sırasıyla n -boyutlu V_1 ve V_2 iç çarpım uzayları ile birleşen birer Öklid uzayı olsunlar. Bir

$$f : E_1^n \rightarrow E_2^n$$

afin dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in V_1$ için

$$\langle \psi \alpha, \psi \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

olacak şekilde bir

$$\psi : V_1 \rightarrow V_2$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa f ye bir *izometri* denir [12].

2.2 E^n de Hareketler

Tanım 2.5

E^n nin bir f izometrisi için eğer

$$f \quad O = O, \quad O \in E^n$$

olacak şekilde bir O noktası mevcut ise f ye O noktası etrafında E^n nin bir *dönmesi* adı verilir [12].

E^n de başlangıç noktası O olan bir dik koordinat sistemi $x_1, x_2, \dots, x_n$ olsun.

$f : E^n \rightarrow E^n$ izometrisi O noktası etrafındaki bir dönme ise f nin bu dik koordinat sistemine göre ifadesi

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$X' = AX$$

şeklindedir. Burada $A \in O_n$ ve $X, X' \in \mathbb{R}_1^n$ dir.

Tanım 2.6

E^n nin bir f izometrisi ve $\forall X = x_1, x_2, \dots, x_n \in E^n$ için

$$f(X) = x_1 + t_1, x_2 + t_2, \dots, x_n + t_n, \quad t_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n$$

olacak şekilde bir tek $t = t_1, t_2, \dots, t_n \in E^n$ noktası varsa f 'ye E^n 'de bir *öteleme* denir [12].

E^n de başlangıç noktası O olan bir dik koordinat sistemi $x_1, x_2, \dots, x_n$ olsun.

$f : E^n \rightarrow E^n$ izometrisi $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ noktası ile belli olan bir öteleme olmak üzere,

f nin bu dik koordinat sistemine göre ifadesi

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$X' = X + t$$

şeklindedir.

Tanım 2.7

f , E^n n -boyutlu Öklid uzayı üzerinde bir izometri olsun. E^n deki bir $x_1, x_2, \dots, x_n$ dik koordinat sistemine göre f nin matrisel ifadesi, $A \in O_n$, yani $\det A = \pm 1$ ve $C \in \mathbb{R}_1^n$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$X' = AX + C$$

formundadır. f ye E^n de bir *hareket* adı verilir. Eğer, $\det A = 1$ ise f hareketine *direkt hareket*, $\det A = -1$ ise *karşıt hareket* denir [12].

2.3 Diferensiyel Formlar

Tanım 2.8

Verilen bir bölgede sürekli kısmi türevleri olan bir $u = u(x, y)$ fonksiyonunun tam diferensiyeli

$$du(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy \quad (2.1)$$

denklemini ile verilir. (2.1) denkleminin sağ yanına *tam diferensiyel* denir. Bu ifadenin

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy = 0 \quad (2.2)$$

olarak yazılmasına da *tam diferensiyel denklem* denir. Buna göre $u(x, y)$, (2.2) şeklindeki tam diferensiyel denklemin çözümü olur (Bayram [13]).

Tanım 2.9

$U \subset E^n$ nin açık alt kümesi olmak üzere bir

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunun k -yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve bu türevler sürekli ise f fonksiyonuna C^k sınıfından diferensiyellenebilir denir. f fonksiyonu C^1 sınıfından ise fonksiyona U üstünde sıfırıncı mertebeden diferensiyel form veya 0-form adı verilir (Hacısalıhoğlu [14]).

Tanım 2.10

Bir n -değişkenli fonksiyon yardımıyla tanımlanan

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i, \quad a_i = a_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.3)$$

ifadesine n -değişkenli 1.mertebeden diferensiyel form veya 1-form denir.

Tanım 2.11

$x_1, x_2, \dots, x_n$ koordinat fonksiyonlarının $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ diferensiyel formları için alterne çarpım

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $i = j$ için

$$dx_i \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_i$$

olduğundan dolayı

$$dx_i \wedge dx_i = 0$$

olur.

Tanım 2.12

Alterne çarpım yardımıyla elde edilen diferensiyel formlarda her terimde bulunan dx_i çarpanlarının sayısı diferensiyel formun derecesini verir. Eğer, her terimde p -tane dx_i çarpanı varsa bu diferensiyel forma p -form denir ve p -formların kümesi Ω^p ile gösterilir. Diferensiyel formlara Pfaff-formları da denilebilir.

$$\Omega = \sum a_{i_1 i_2 \dots i_p} du_{i_1} \wedge du_{i_2} \wedge \dots \wedge du_{i_p} \quad \text{ve} \quad \Phi = \sum b_{j_1 j_2 \dots j_q} du_{j_1} \wedge du_{j_2} \wedge \dots \wedge du_{j_q}$$

yüksek mertebeden alterne diferensiyel formlar olmak üzere Ω ve Φ formlarının alterne çarpımları veya dış çarpımları

$$\begin{aligned} \Omega \wedge \Phi &= \sum a_{i_1 i_2 \dots i_p} b_{j_1 j_2 \dots j_q} du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p} \wedge du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_q} \\ &= -1^{pq} \Phi \wedge \Omega \end{aligned} \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlıdır.

Burada

$$\wedge : \Omega^p \times \Omega^q \rightarrow \Omega^{p+q}$$

fonksiyonuna dış çarpım fonksiyonu denir (Flanders [15]).

Özel olarak, $\omega = \sum_{i=1}^n a_i du_i$ ve $\phi = \sum_{j=1}^n b_j du_j$ n -değişkenli 1-formlarının alterne çarpımları

$$\begin{aligned} \omega \wedge \phi &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j du_i \wedge du_j \\ &= \sum_{i < j=1}^n a_i b_j - a_j b_i du_i \wedge du_j \\ &= -\phi \wedge \omega \end{aligned} \quad (2.6)$$

şeklinde bulunur.

Tanım 2.13

Ω^p , p -formların kümesi olmak üzere

$$\begin{aligned} d : \Omega^p &\rightarrow \Omega^{p+1} \\ \varphi &\rightarrow d\varphi \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı d -operatörüne bir diferensiyel operatör denir [15].

Bir $\omega = \sum_{i=1}^n a_i du_i$ 1-formunun dış türevi

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i=1}^n da_i \wedge du_i \\
&= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial u_j} du_j \wedge du_i
\end{aligned} \tag{2.7}$$

şeklinde yazılabilir.

Genel olarak $\Omega = \sum a_{i_1 i_2 \dots i_p} du_{i_1} \wedge du_{i_2} \wedge \dots \wedge du_{i_p}$ p -formunun dış türevi

$$\begin{aligned}
d\Omega &= \sum da_{i_1 i_2 \dots i_p} \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p} \\
&= \sum \frac{\partial a_{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial u_k} du_k \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

olarak tanımlanır.

Ayrıca diferensiyeller sabitler gibi düşünülür ve diferensiyellerin dış türevleri sıfırdır.

Yani,

$$d du_i = 0$$

olarak alınır.

Teorem 2.1

$f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ skaler fonksiyonu sıfırıncı mertebeden bir diferensiyel form olmak üzere

$$d f \omega = df \wedge \omega + f d\omega \tag{2.9}$$

olur.

İspat: $\omega = \sum_{i=1}^n a_i du_i$ olsun.

$$d f \omega = d \left(\sum_{i=1}^n f a_i du_i \right) = \sum_{i=1}^n d f a_i \wedge du_i$$

yazılabilir. Zincir kuralından

$$d(f\omega) = \sum_{i=1}^n a_i df \wedge du_i + \sum_{i=1}^n f da_i \wedge du_i$$

bulunur. Buradan

$$d(f\omega) = df \wedge \sum_{i=1}^n a_i du_i + f \sum_{i=1}^n da_i \wedge du_i$$

olmak üzere

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$$

elde edilir.

Teorem 2.2

ω ve ϕ diferensiyel formlarının alterne çarpımlarının dış türevi

$$d(\omega \wedge \phi) = d\omega \wedge \phi - \omega \wedge d\phi \quad (2.10)$$

şeklinde ifade edilir.

Genel olarak yüksek mertebeden diferensiyel formlar için bu bağıntı şu şekilde yazılır:

$$d(\Omega \wedge \Phi) = d\Omega \wedge \Phi + (-1)^p \Omega \wedge d\Phi \quad (2.11)$$

İspat: Ω bir p -form ve Φ bir q -form olsun. Eğer Ω nın bileşenleri du_{i_1} ler ile Φ nin bileşenleri du_{j_1} ler birbirinden farklı değiller ise

$$\Omega \wedge \Phi = 0$$

olur. Bu nedenle Ω ve Φ formlarını farklı du_{i_1} lerden ve birer terimden oluşmuş alalım.

$$\Omega = \sum a du_{i_1} \wedge du_{i_2} \wedge \dots \wedge du_{i_p} \quad \text{ve} \quad \Phi = \sum b du_{j_1} \wedge du_{j_2} \wedge \dots \wedge du_{j_q}$$

olsun. Burada

$$du_{i_m} \neq du_{j_r} \quad ; \quad 1 \leq m \leq p, \quad 1 \leq r \leq q$$

dir. (2.5) eşitliği kullanılarak

$$\Omega \wedge \Phi = ab du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p} \wedge du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_q}$$

yazılabilir. Bu ifadenin dış türevi (2.8) bağıntısından

$$d \Omega \wedge \Phi = \sum \frac{\partial ab}{\partial u_k} du_k \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p} \wedge du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_q}$$

bulunur. Buradan

$$d \Omega \wedge \Phi = \sum \left(\frac{\partial a}{\partial u_k} b + a \frac{\partial b}{\partial u_k} \right) du_k \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p} \wedge du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_q}$$

veya

$$d \Omega \wedge \Phi = \sum \left(\frac{\partial a}{\partial u_k} b \right) du_k \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{j_q} + \sum \left(a \frac{\partial b}{\partial u_k} \right) du_k \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{j_q}$$

yazılabilir. Son ifadenin ikinci teriminde du_k p -terim yer değiştirilerek yazılırsa

$$\begin{aligned} d \Omega \wedge \Phi &= \sum \frac{\partial a}{\partial u_k} du_k \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p} \wedge b du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_q} \\ &+ \sum a du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p} \wedge (-1)^p \frac{\partial b}{\partial u_k} du_k \wedge du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_q} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$d \Omega \wedge \Phi = d\Omega \wedge \Phi + (-1)^p \Omega \wedge d\Phi$$

bulunur.

Teorem 2.3 (Poincare Özdeşliği)

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i du_{i_1} \text{ 1-form olmak üzere}$$

$$d d\omega = 0 \tag{2.12}$$

dir. Genel olarak Ω p -formu için

$$d \, d\Omega = 0$$

olur.

İspat: d operatörü lineer olduğu için Ω p -formu tek terimli olarak seçilebilir.

$$\Omega = \sum a \, du_{i_1} \wedge du_{i_2} \wedge \dots \wedge du_{i_p}$$

olsun. Dış türevin tanımından

$$d\Omega = \sum_{k=1}^n \frac{\partial a}{\partial u_k} du_k \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p}$$

yazılabilir. Son ifadenin tekrar dış türevi alındığında

$$d \, d\Omega = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 a}{\partial u_k \partial u_j} du_j \wedge du_k \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p}$$

bulunur. Bu son ifade k ve j durumlarına göre şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} d \, d\Omega &= \sum_{k < j}^n \frac{\partial^2 a}{\partial u_k \partial u_j} du_j \wedge du_k \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p} + \sum_{k=j}^n \frac{\partial^2 a}{\partial u_k \partial u_j} du_j \wedge du_k \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p} \\ &\quad + \sum_{k > j}^n \frac{\partial^2 a}{\partial u_k \partial u_j} du_j \wedge du_k \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p} \end{aligned}$$

$k = j$ için $du_j \wedge du_k = 0$ dır. Son terimde k ve j yerleri değiştirilirse

$$d \, d\Omega = \sum_{k < j}^n \frac{\partial^2 a}{\partial u_k \partial u_j} du_j \wedge du_k \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p} + \sum_{k < j}^n \frac{\partial^2 a}{\partial u_j \partial u_k} du_k \wedge du_j \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p}$$

olur. Burada (2.4) bağıntısı dikkate alınarak

$$d \, d\Omega = \sum_{k < j}^n \frac{\partial^2 a}{\partial u_k \partial u_j} du_j \wedge du_k \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p} - \sum_{k < j}^n \frac{\partial^2 a}{\partial u_j \partial u_k} du_j \wedge du_k \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p}$$

yazılabilir. O halde

$$d \, d\Omega = \sum_{k < j}^n \left(\frac{\partial^2 a}{\partial u_k \partial u_j} - \frac{\partial^2 a}{\partial u_j \partial u_k} \right) du_j \wedge du_k \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p}$$

olduğundan dolayı

$$d \, d\Omega = 0$$

elde edilir.

Özel olarak ω 1-formu tam diferensiyel olarak alınırsa, yani $\omega = df$ için

$$d \, df = d^2 f = 0 \quad (2.13)$$

olur.

Teorem 2.4

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ gibi k – tane Pfaff formları ancak ve ancak

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k = 0$$

ise lineer bağımlıdır [2].

Teorem 2.5

İki değişkenli Pfaff formu

$$\omega_j = A_j \, u, v \, du + B_j \, u, v \, dv \quad j=1,2,3$$

olmak üzere

$$\left. \frac{\omega_2}{\omega_3} \right|_{\omega_1=0} = \frac{\omega_1 \wedge \omega_2}{\omega_1 \wedge \omega_3} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 B_3 - A_3 B_1} \quad (2.14)$$

olur.

İspat: $\omega_1 = A_1 du + B_1 dv = 0$

diferensiyel denkleminin çözümü için

$$\frac{du}{dv} = -\frac{B_1}{A_1}$$

elde edilir. $\omega_1 = 0$ olması durumunda

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} \Big|_{\omega_1=0} = \frac{A_2 du + B_2 dv}{A_3 du + B_3 dv} \Big|_{\omega_1=0}$$

veya

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} \Big|_{\omega_1=0} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 B_3 - A_3 B_1} \quad (2.15)$$

bulunur. Ayrıca

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = A_1 du + B_1 dv \wedge A_2 du + B_2 dv = A_1 B_2 - A_2 B_1 du \wedge dv$$

ve

$$\omega_1 \wedge \omega_3 = A_1 du + B_1 dv \wedge A_3 du + B_3 dv = A_1 B_3 - A_3 B_1 du \wedge dv$$

yazılabilir. Buradan bu son eşitlikler kullanılarak

$$\frac{\omega_1 \wedge \omega_2}{\omega_1 \wedge \omega_3} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 B_3 - A_3 B_1} \quad (2.16)$$

elde edilir.

O halde (2.15) ve (2.16) ifadelerinden iki diferensiyel formun oranı

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} \Big|_{\omega_1=0} = \frac{\omega_1 \wedge \omega_2}{\omega_1 \wedge \omega_3} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 B_3 - A_3 B_1}$$

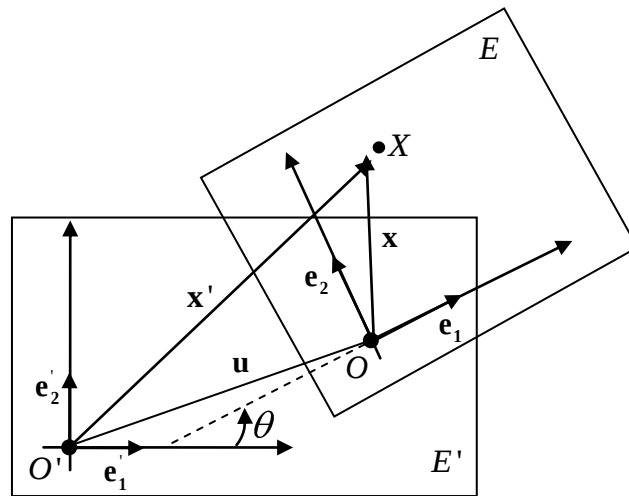
olarak bulunur.

1-PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HAREKETLER

E ve E' $E = E' = E^2$ iki Öklid düzlemi olsun. Bu öklid düzlemlerinde $O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ve $O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ dik koordinat sistemlerini alalım. Eğer

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1(t) \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2(t) \end{cases}$$

$t \in I \subset \mathbb{R}$ parametresinin sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonları ise $O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ dik çatısının $O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ dik çatısına göre hareket ettiği kabul edilir. Bu durumda $O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ dik çatısının bağlı olduğu E düzleminin, $O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ dik çatısının bağlı olduğu E' düzlemi üzerinde hareket ettiği kabul edilir. $\mathbf{e}_1$ ile $\mathbf{e}'_1$ arasındaki açı θ olmak üzere θ ya *dönme açısı* denir. $\mathbf{OO}' = \mathbf{u}$ hareketin *öteleme vektörü* olmak üzere:

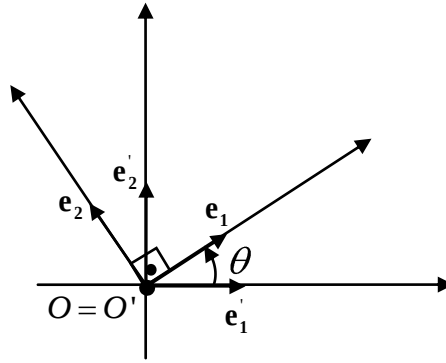


Şekil 3. 1 1-Parametrelî düzlemsel hareket

$$\mathbf{OO}' = \mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 \quad (3.1)$$

yazılabilir. Eğer $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, $\theta = \theta(t)$ $t \in I \subset \mathbb{R}$ parametresinin sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonları iseler, E düzleminin E' düzlemi üzerindeki hareketine *bir-parametrelili düzlemsel hareket* denir ve $B = E/E'$ ile gösterilir. Burada E düzlemine hareketli düzlem, $O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ çatısına hareketli çatı, E' düzlemine sabit düzlem ve $O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ çatısına da sabit çatı denir. Burada “ t ” parametresi genel olarak *zaman* parametresi olarak alınır.

$t=0$ anında $O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ve $O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ çatılarının başlangıç noktalarının aynı olduğu kabul edilir.



Şekil 3. 2 $t = 0$ anında hareketli ve sabit koordinat sistemleri

$\mathbf{e}_j$ ile $\mathbf{e}'_j$ ($j=1,2$) vektörleri arasında

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos \theta \mathbf{e}'_1 + \sin \theta \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_2 &= -\sin \theta \mathbf{e}'_1 + \cos \theta \mathbf{e}'_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

eşitlikleri elde edilir (Şekil 3.2).

Hareketli koordinat sistemde (x_1, x_2) koordinatlarına ve sabit koordinat sistemde (x'_1, x'_2) koordinatlarına sahip bir X noktasını göz önüne alalım. Buna göre her iki sistemde, X noktasına ait konum vektörleri için

$$\mathbf{x} = \mathbf{OX} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$$

ve

$$\mathbf{x}' = \mathbf{O}'\mathbf{X} = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2$$

yazılabilir. Böylece

$$\mathbf{O}'\mathbf{X} = \mathbf{O}\mathbf{X} - \mathbf{O}\mathbf{O}'$$

veya

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{u} = (x_1 - u_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 - u_2)\mathbf{e}_2 \quad (3.3)$$

denklemini elde edilir. (3.3) denkleminin 1-parametrelili düzlemsel hareketin *vektörel denklemi* denir. Buradan,

$$x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 = (x_1 - u_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 - u_2)\mathbf{e}_2$$

eşitliğinin her iki yanının $\mathbf{e}'_1$ ve $\mathbf{e}'_2$ ile iç çarpımı sonucunda

$$\begin{cases} x'_1 = (x_1 - u_1)\cos\theta - (x_2 - u_2)\sin\theta \\ x'_2 = (x_1 - u_1)\sin\theta + (x_2 - u_2)\cos\theta \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} x'_1 = x_1\cos\theta - x_2\sin\theta + (-u_1\cos\theta + u_2\sin\theta) \\ x'_2 = x_1\sin\theta + x_2\cos\theta + (-u_1\sin\theta - u_2\cos\theta) \end{cases} \quad (3.4)$$

bulunur. Bu ifadeye 1-parametrelili düzlemsel hareketin *kartezyen denklemi* denir. Bu son eşitlik

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

veya

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{C}$$

şeklinde matris formunda da gösterilebilir.

3.1 Türev Denklemleri

$B = E / E'$ hareketi esnasında hareketli E düzleminde tespit edilen bir $X \in E$ noktası E' sabit düzleminde sürekli bir eğri çizer. Bu hareket esnasında hareketli düzlemdeki hareketli bir X noktasının hızlarını araştırmak için önce türev denklemlerine ihtiyaç duyulur. Bunun için (3.2) denklemlerinin, $\mathbf{e}'_1$ ve $\mathbf{e}'_2$ vektörlerini sabit kabul ederek, t zamanına göre türev alınırsa,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{e}'_1}{dt} = \dot{\mathbf{e}}_1 &= -\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}'_1 + \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}'_2 = (-\sin \theta \mathbf{e}'_1 + \cos \theta \mathbf{e}'_2) \dot{\theta} \\ \frac{d\mathbf{e}'_2}{dt} = \dot{\mathbf{e}}_2 &= -\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}'_1 - \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}'_2 = -(\cos \theta \mathbf{e}'_1 + \sin \theta \mathbf{e}'_2) \dot{\theta}\end{aligned}$$

bulunur. Buradan kısaca

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_1 = \dot{\theta} \mathbf{e}_2 \\ \dot{\mathbf{e}}_2 = -\dot{\theta} \mathbf{e}_1 \end{cases} \quad (3.5)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.1) denkleminin t ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}} = \dot{u}_1 \mathbf{e}_1 + u_1 \dot{\mathbf{e}}_1 + \dot{u}_2 \mathbf{e}_2 + u_2 \dot{\mathbf{e}}_2$$

elde edilir. $\dot{\mathbf{e}}_1$ ve $\dot{\mathbf{e}}_2$ nın (3.5) deki değerleri son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\dot{\mathbf{u}} = (\dot{u}_1 - \dot{\theta} u_2) \mathbf{e}_1 + (\dot{u}_2 + \dot{\theta} u_1) \mathbf{e}_2 \quad (3.6)$$

bulunur. (3.5) ve (3.6) denklemlerine $B = E / E'$ hareketinin *türev denklemleri* denir.

3.2 Hızlar

E hareketli, E' sabit Öklid düzlemleri olmak üzere E düzlemi E' düzlemi üzerinde 1-parametrelili hareket yaparken, bir X noktası da hareketli E düzlemi üzerindeki yerini t zamanı ile değiştirsin. Bu durumda bu iki hareket esnasında X noktası farklı iki hıza sahiptir.

Tanım 3.1

X noktasının E düzleminde hareket ederken sahip olduğu hıza *relatif hız* denir ve $\mathbf{V}_r$ ile gösterilir. Bu hız

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$$

denkleminin $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}_2$ yi sabit tutup türev alarak

$$\mathbf{V}_r = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{e}_2 \quad (3.7)$$

elde edilir. Eğer X noktası E düzleminde sabit ise $\mathbf{V}_r = 0$ dır.

Tanım 3.2

X noktasının E' düzlemine göre sahip olduğu hıza *mutlak hız* denir ve $\mathbf{V}_a$ ile gösterilir. (3.3) denkleminin t ye göre türevi alınırsa $\mathbf{V}_a$ için aşağıdaki ifade bulunur:

$$\mathbf{V}_a = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \dot{\mathbf{x}}' = (\dot{x}_1 - \dot{u}_1) \mathbf{e}_1 + (x_1 - u_1) \dot{\mathbf{e}}_1 + (\dot{x}_2 - \dot{u}_2) \mathbf{e}_2 + (x_2 - u_2) \dot{\mathbf{e}}_2$$

Burada $\dot{\mathbf{e}}_1$ ve $\dot{\mathbf{e}}_2$ nin (3.5) deki değerleri yerine yazılırsa

$$\mathbf{V}_a = -\dot{u}_1 - (x_2 - u_2) \dot{\theta} \mathbf{e}_1 + -\dot{u}_2 + (x_1 - u_1) \dot{\theta} \mathbf{e}_2 + \dot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{e}_2$$

veya

$$\mathbf{V}_a = -\dot{u}_1 - (x_2 - u_2) \dot{\theta} \mathbf{e}_1 + -\dot{u}_2 + (x_1 - u_1) \dot{\theta} \mathbf{e}_2 + \mathbf{V}_r \quad (3.8)$$

elde edilir. Burada

$$\mathbf{V}_f = -\dot{u}_1 - (x_2 - u_2) \dot{\theta} \mathbf{e}_1 + -\dot{u}_2 + (x_1 - u_1) \dot{\theta} \mathbf{e}_2 \quad (3.9)$$

vektörüne X noktasının *sürüklenme hız vektörü* denir.

Teorem 3.1

$B = E/E'$; 1-parametrel düzlemsel hareket esnasında eğer $X \in E$ noktası her iki sisteme göre hareketli ise $X \in E$ noktasının hız vektörleri arasında

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_f + \mathbf{V}_r \quad (3.10)$$

bağıntısı vardır.

Çalışmamız boyunca pure öteleme hareketinden kaçınmak için $\dot{\theta} \neq 0$ alınacaktır.

3.3 Dönme Polü ve Pol Eğrileri

$B = E/E'$ hareketi esnasında $\mathbf{V}_f = 0$ özelliğine sahip noktalar incelenecektir. Bu noktalar için (3.10) dan $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_r$ özelliği sağlanır. Bir diğer ifadeyle mutlak ve relatif hızları birbirine eşit olduğundan dolayı her iki düzlemde de sabit olan noktalar araştırılacaktır.

(3.9) denkleminde

$$-\dot{u}_1 - (x_2 - u_2)\dot{\theta} = 0$$

ve

$$-\dot{u}_2 + (x_1 - u_1)\dot{\theta} = 0$$

elde edilir. $\dot{\theta} \neq 0$ olduğundan lineer denklem sisteminin Cramer metodu ile çözümü vardır ve çözüm tektir. Bu çözümler p_1 ve p_2 olmak üzere

$$\begin{cases} p_1 = u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\theta}} = u_1 + \frac{du_2}{d\theta} \\ p_2 = u_2 - \frac{\dot{u}_1}{\dot{\theta}} = u_2 - \frac{du_1}{d\theta} \end{cases} \quad (3.11)$$

bulunur.

Tanım 3.3

$$\mathbf{OP} = \mathbf{p} = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2$$

yer vektörüne karşılık gelen $P = (p_1, p_2)$ noktasına $B = E/E'$ hareketinin t anındaki *pol(kutup) noktası, dönme polü veya ani dönme merkezi* denir.

Buradan şu teorem verilebilir:

Teorem 3.2

$B = E / E'$ 1-parametrelili düzlemsel hareket esnasında, her t anında sürüklenme hızı sıfır olan, yani her iki düzlemde de sabit kalan bir tek nokta (pol noktası) vardır.

P pol noktası yardımıyla herhangi bir X noktasının $\mathbf{V}_f$ sürüklenme hızı aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

Bunun için (3.11) denklemlerinden

$$\dot{u}_1 = (u_2 - p_2)\dot{\theta}$$

ve

$$\dot{u}_2 = -(u_1 - p_1)\dot{\theta}$$

ifadeleri hesaplanır ve (3.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{V}_f = -(x_2 - p_2)\mathbf{e}_1 + (x_1 - p_1)\mathbf{e}_2 \quad \dot{\theta} \quad (3.12)$$

elde edilir.

X noktasının sürüklenme hızının bu son ifadesi kullanılarak aşağıdaki sonuç ve teoremler verilebilir:

Sonuç 3.1

P polünden X noktasına giden

$$\mathbf{PX} = (x_1 - p_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 - p_2)\mathbf{e}_2$$

pol ışını vektörü $\mathbf{V}_f$ vektörüne diktir. Yani

$$\langle \mathbf{PX}, \mathbf{V}_f \rangle = -(x_2 - p_2)(x_1 - p_1) + (x_1 - p_1)(x_2 - p_2) = 0$$

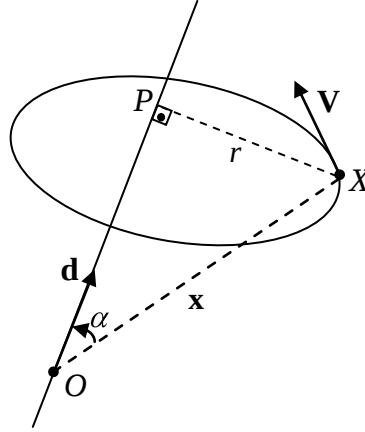
dır.

Sonuç 3.2

$\mathbf{V}_f$ vektörünün uzunluğu için şu bağıntı vardır:

$$\|\mathbf{V}_f\| = \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2} \dot{\theta} = \dot{\theta} \|\mathbf{PX}\|$$

Tanım 3.4



Şekil 3. 3 Açısal hız

Bir eksen etrafında dönme hareketini göz önüne alalım. $\mathbf{d}$ vektörü eksenli dönme hareketinde bir X noktasının hız vektörü $\mathbf{V}$ ile gösterilsin (Şekil 3.3). Noktanın hızı

$$\mathbf{V} = \mathbf{d} \times \mathbf{x}$$

olduğundan, buradan

$$\|\mathbf{V}\| = \|\mathbf{d}\| \|\mathbf{x}\| \sin \alpha$$

yazılabilir. Şekil 3.3'e göre r , dönen noktanın dönme merkezine uzaklığı olmak üzere

$$\sin \alpha = \frac{r}{\|\mathbf{x}\|} \text{ olduğundan}$$

$$\|\mathbf{V}\| = \|\mathbf{d}\| r$$

elde edilir. Fizikte dönme hareketi, $\omega = \pm \|\mathbf{d}\|$ olmak üzere

$$\|\mathbf{V}\| = \pm \omega r$$

tanımlandığından, buradan

$$\omega = \pm \frac{V}{r}$$

ifadesine hareketin *açısal hızı* denir.

O halde Sonuç 3.2'ye göre

$$\|\mathbf{V}_f\| = \dot{\theta} \|\mathbf{PX}\|$$

olduğundan $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ türevine $B = E/E'$ hareketinin *açısal hızı* denir. Burada $\theta = \theta(t)$

hareket altında t nin sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonudur.

Teorem 3.3

$B = E/E'$; 1-parametrel düzlemsel hareket anında, hareketli E düzleminin her X noktası t anında P merkezli $\dot{\theta}$ açısal hızlı bir ani dönme hareketi yapar.

Teorem 3.4

$B = E/E'$; 1-parametrel düzlemsel hareket anında, hareketli E düzleminin X noktaları, E' sabit düzleminde yörünge normalleri P dönme polünden geçen yörünge eğrileri çizerler.

Tanım 3.5

$B = E/E'$ hareketi esnasında P pol noktası E ve E' düzlemlerinde birer eğri çizecektir. P noktasının hareketli E düzlemindeki çizmiş olduğu eğriye *hareketli pol eğrisi* denir ve P ile gösterilir. P noktasının E' düzlemindeki geometrik yerine ise *sabit pol eğrisi* denir ve P' ile gösterilir.

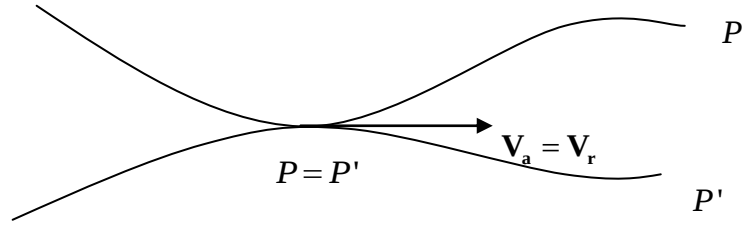
$P \in E$ pol noktası için $\mathbf{V}_f = 0$ olduğu için Teorem 3.1 den

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_r$$

yazılır. Buradan

$$\|\mathbf{V}_a\| = \|\mathbf{V}_r\|$$

olur.



Şekil 3. 4 Hareketli ve sabit pol eğrileri

Buradan aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.5

E' sabit ve E hareketli düzlemlerindeki pol eğrilerini çizen P dönme polünün her t anındaki hızları aynıdır.

Bu teoremden dolayı her t anında P ve P' pol eğrileri P pol noktasında birbirine teğettir ve

$$ds' = \|\mathbf{V}_a\| dt = \|\mathbf{V}_r\| dt = ds$$

olduğundan P dönme polü dt zaman aralığında her iki pol eğrisi üzerinde eşit uzaklıklar kat eder.

Böylelikle aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.6

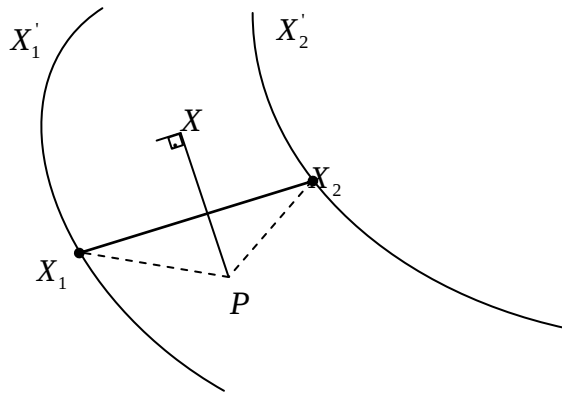
$B = E / E'$; 1-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında E düzleminin hareketli P pol eğrisi E' düzleminin sabit P' pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

Şimdi elde edilen bu teoremleri birkaç örnek üzerinde uygulayalım:

Örnek 3.1 (İki-Nokta Kılavuzluğu)

Bir B hareketi, hareketli E düzleminde tespit edilen X_1, X_2 gibi iki noktanın E' sabit düzleminde X'_1, X'_2 eğrileri üzerinde hareket etmesiyle verilsin.

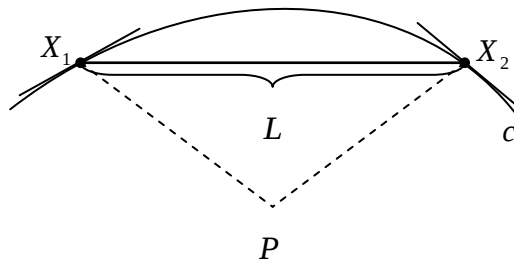
Sonuç 3.1'e göre bir noktadaki pol ışını, noktanın sürüklenme vektörüne dik olduğundan X_1, X_2 noktalarının yörünge normallerinin kesim noktası $B = E/E'$ hareketinin P dönme polüdür (Şekil 3.4). Aynı şekilde E düzleminin herhangi bir X noktasının yörünge teğeti de PX pol ışınına diktir.



Şekil 3. 5 İki-nokta kılavuzluğu

Burada $\overline{X_1X_2} = L$ sabit uzunluklu doğru parçasının iki kılavuz eğri arasına her defa uygun şekilde yerleştirilmesi ile pol eğrileri nokta nokta tespit edilir.

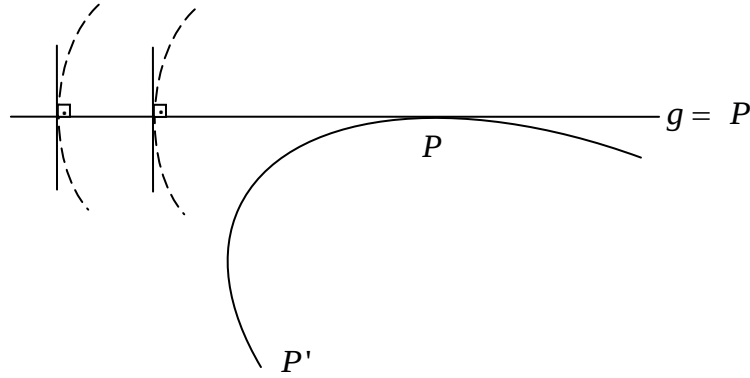
Özel olarak, L sabit uzunluklu $\overline{X_1X_2}$ doğru parçası X_1 ve X_2 uçları aynı $X'_1 = X'_2 = c$ eğrisi üzerinde hareket ettirilsin. Burada da P dönme polü X_1, X_2 noktalarının yörünge normallerinin kesim noktası olarak aynı şekilde bulunur (Şekil 3.6).



Şekil 3. 6 İki-nokta kılavuzluğu özel durumu

Örnek 3.2 (Evolver Hareket)

Bir B hareketinde E düzleminin hareketli P pol eğrisi E' düzleminin sabit P' pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır (Teorem 3.6). Burada hareketli pol eğrisi olarak $g = P$ gibi bir doğru alalım ve bu doğru P' sabit pol eğrisi üzerinde yuvarlansın (Şekil 3.7).

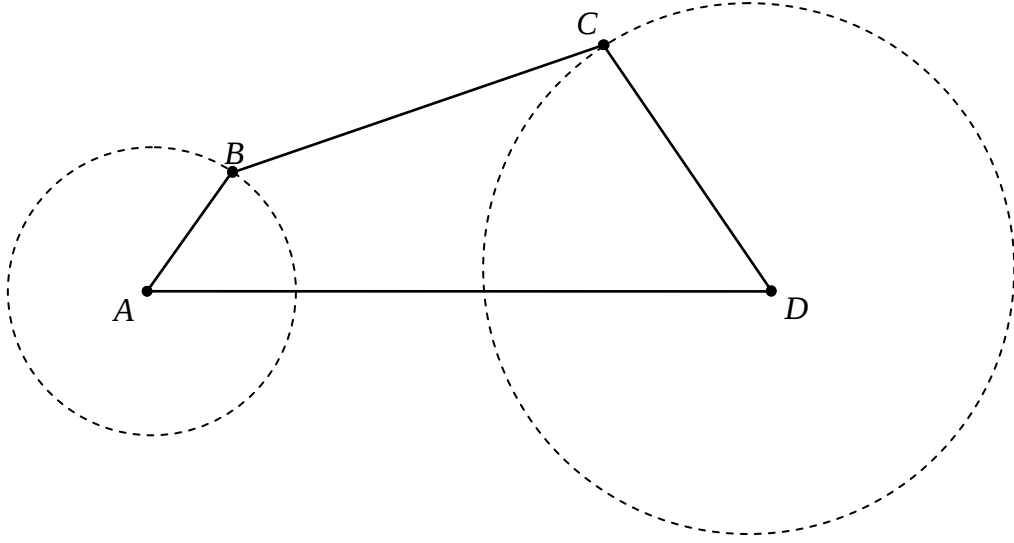


Şekil 3. 7 Evolver hareket

g doğrusunun her noktası Sonuç 3.1 gereğince P' eğrisinin bir evolverini çizer. Bu eğriler ortak normaller üzerinde bulunurlar ve uzunlukları aynıdır. Dolayısıyla iki farklı evolver paralel eğrilerdir. Bu şekilde elde edilen harekete *evolver hareket* denir. Eğer P' eğrisi özel olarak daire alınırsa, yuvarlanan teğetin noktaları daire evolverleri çizerler.

Örnek 3.3 (Mafsallı Dörtgen)

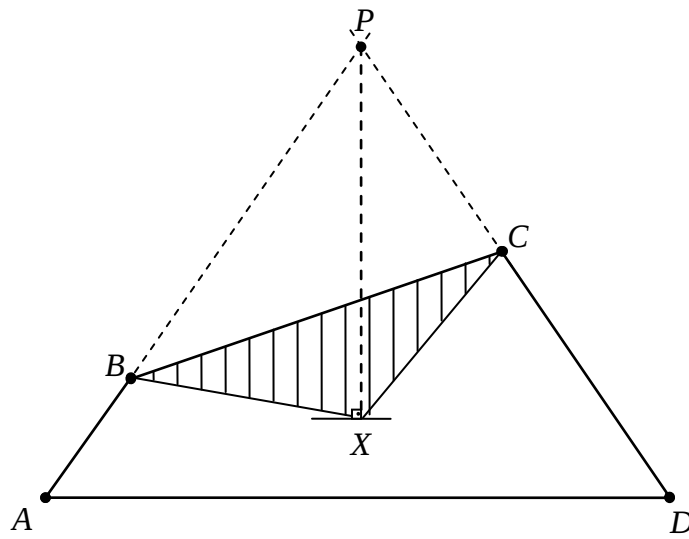
Mafsal, hareket eden iki parçanın hareket edebilme özelliklerini kaybetmeden birbirine bağlanmasını sağlayan mekanik sistemdir. Mafsallar vasıtasıyla çeşitli uzunluklardaki dört çubuğun, bir düzlemsel dörtgen oluşturacak şekilde birbirine bağlanmasıyla da bir *mafsallı dörtgen* elde edilir. Bu dörtgende bir kenar tespit edilir ve karşısındaki kenara *bağlama kolu* denir. *Bağlama kolu hareketi* (Şekil 3.8) de B ve C noktalarının A ve D merkezli daireler çizmesiyle karakterize edilmiştir.



Şekil 3. 8 Bağlama kolu hareketi

Burada B, C hareketli noktalar, A, D sabit noktalar ve BC bağlama kolu olarak adlandırılır. Bağlama koluna bağlı bir X noktasının yörüngesine de *bağlama kolu eğrisi* denir.

Mafsallı dörtgenin bir t anı için P dönme polü, AB ve CD kollarının kesim noktası olarak bulunur. Çünkü bu doğrular daireler üzerinde hareket eden B ve C noktalarının yörünge normalleridir (Şekil 3.9). Bu şekilde X noktasındaki yörünge teğeti de bulunabilir.

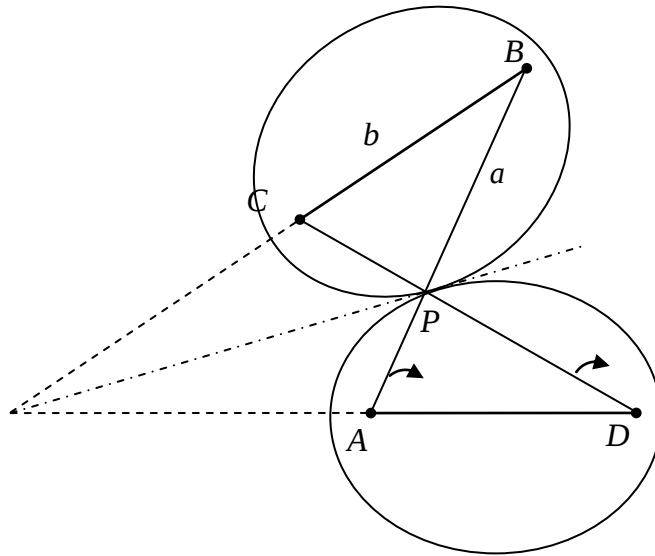


Şekil 3. 9 Mafsallı dörtgende P dönme polü

Örnek 3.4 (İkizler Mekanizması)

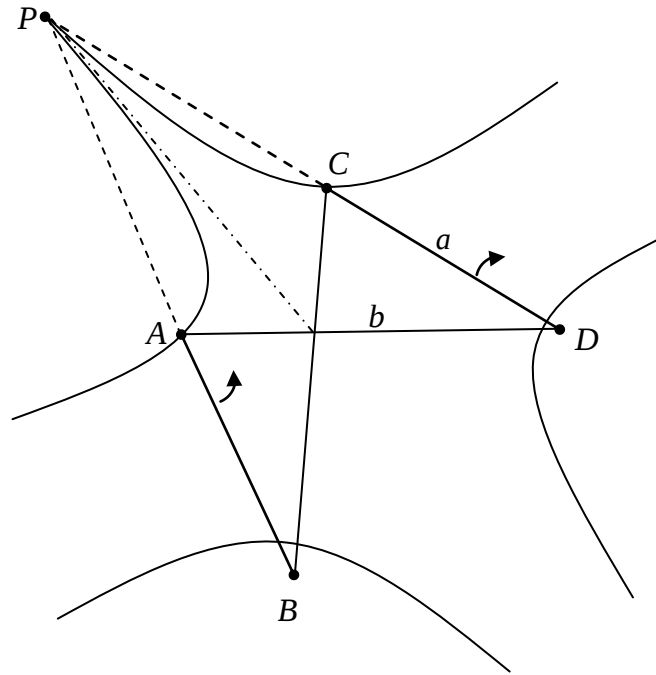
Karşılıklı kenarları eşit olan ve uzun kenarları kesişen mafsallı dörtgene *ikizler mekanizması* denir (Şekil 3.10, Şekil 3.11). $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ ve $\overline{BC} = \overline{DA} = b$ olmak üzere B ve C yine A ve D merkezli daireler üzerinde bulunacağından P dönme polü AB ile CD kollarının kesim noktası olur. Bu şekilde dörtgenin şekli simetrik iki üçgenden oluşturulabilir.

Eğer $a > b$ ise *aynı yöne hareketli ikizler mekanizması* elde edilir. Bu mekanizmada her iki kol aynı yönde hareket eder (Şekil 3.10). Bu hareket ile P' sabit pol eğrisi, odakları A, D ve esas eksen uzunluğu a olan bir elips olur. Aynı şekilde P hareketli pol eğrisi, odakları B, C ve esas eksen uzunluğu a olan bir elips olur. Bu iki elips birbirinin aynısıdır. BC bağlama kolunun meydana getirdiği hareket, her defa pol teğetine göre *simetrik durumda bulunan eşit iki elipsin (dıştan) yuvarlanması* ile olur.



Şekil 3. 10 Aynı yöne hareketli ikizler mekanizması

Eğer $a < b$ ise *ters yöne hareketli ikizler mekanizması* elde edilir ve kollar ters yönde hareket ederler (Şekil 3.11). Burada P' sabit pol eğrisi, odakları A, D ve esas eksen uzunluğu b olan bir hiperpoldür. Aynı şekilde P hareketli pol eğrisi, odakları B, C olan bir hiperpoldür. O halde BC bağlama kolunun hareketi ile iki eşşekil hiperbol elde edilir ve kollar ters yönde hareket ettiği için *simetrik bir yuvarlanma hareketi* olur.



Şekil 3. 11 Ters yöne hareketli ikizler mekanizması

3.4 Zarflar

Tanım 3.6

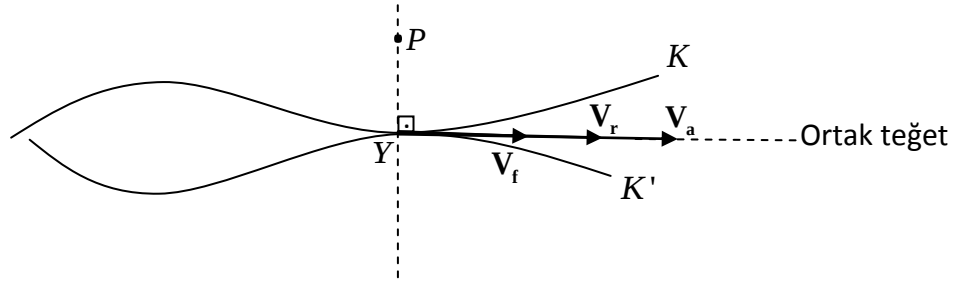
$$F_{x,y,c} = 0$$

bir eğri ailesi olmak üzere eğer F ailesindeki eğrilerin tümüne teğet olan bir z eğrisi varsa bu z eğrisine F ailesinin *zarfı* denir [13].

Bir B hareketinde, E hareketli düzleminde alınan bir K eğrisi E' düzlemi üzerinde sonsuz duruma sahiptir. Genel olarak K 'nın E' üzerindeki bu durumları K' gibi bir zarfa sahip olsun. Yani K eğrisinin B hareketindeki zarfı K' dır. Burada K ve K' eğrilerini düzgün eğriler olarak kabul edelim.

Bir t anında K eğrisi K' zarfına Y noktasında değsin. B hareketi esnasında bu ortak Y değme noktası hem K eğrisi üzerinde hem de K' üzerinde hareket eder. B hareketinde K eğrisi V_r vektörel hızı ile, yani Y noktasının E düzlemindeki relatif

hızı ile çizilir. Aynı şekilde K' eğrisi de Y noktasının E' düzlemindeki V_a mutlak hızı ile çizilir (Şekil 3.12).



Şekil 3. 12 Eğrinin zarfı

K ve K' eğrileri Y de temas ettiklerinden V_r ve V_a vektörleri ortak teğet ile çakışırlar. O halde Y noktasının sürüklenme hızına ait V_f vektörü de

$$V_f = V_a - V_r$$

olduğundan dolayı ortak teğet doğrultusundadır. Aynı zamanda Y noktasının V_f sürüklenme hız vektörü $\overline{PY}$ pol ışınına dik olacağından aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.7

$B = E/E'$; 1-parametrelili düzlemsel hareketinde zarfın normali, yani E düzleminde sabit K nin ve E' düzleminde sabit K' eğrilerinin Y değme noktasındaki ortak normali daima B nin P ani dönme polünden geçer.

3.5 Kapalı Hareket

Tanım 3.7

$B = E/E'$ hareketi esnasında

$$\begin{cases} u_j(t+T) = u_j(t) & , \quad 1 \leq j \leq 2 \\ \varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi\nu \end{cases}$$

olacak şekilde $T > 0$ en küçük sayısı varsa B hareketine T periyotlu ve ν dönme sayılı 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareket denir [2].

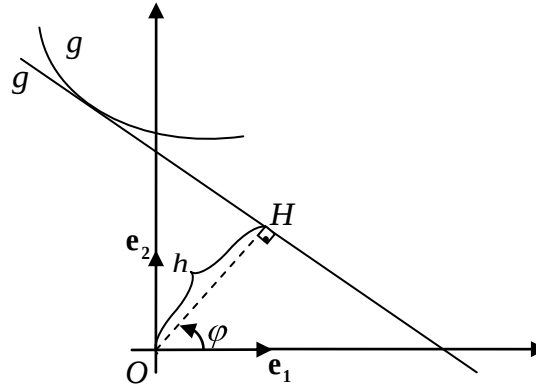
Burada ν bir tamsayı olup E düzleminin E' düzlemine göre ilk konumuna gelinceye kadar T zamanında yapmış olduğu tam devirlerin sayısıdır. Bu durumda E düzlemi T periyodu içerisinde kendi etrafında $2\pi\nu$ kadar tam dönme açısı yapar.

Tanım 3.8 (Cauchy-Çevre formülü)

$O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ koordinat sistemine göre bir g doğrusunun Hess formundaki denklemi için

$$x_1 \cos \varphi + x_2 \cos \varphi = h$$

yazılabilir (Şekil 3.13).



Şekil 3. 13 Bir g doğrusu ve zarf eğrisi

Eğer $h = h(\varphi)$; φ nin sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyonu ise 1-parametrelili doğru demeti tespit edilir. Bu doğru demeti genel olarak bir g zarfına sahiptir ve $h(\varphi)$ fonksiyonu da dayanak fonksiyonu olarak alınır.

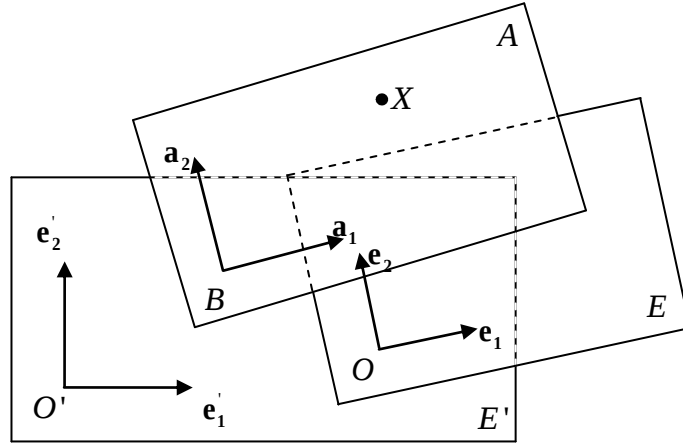
Bir g zarf eğrisinin uzunluğu

$$L = \int h d\varphi \quad (3.13)$$

Cauchy-çevre formülü ile hesaplanır [2].

1-PARAMETRELİ HAREKETLERDE HAREKETLİ KOORDİNAT SİSTEMİ

E ve E' düzlemlerini temsil eden $O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ve $O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ koordinat sistemleri yanında hareketli bir $B; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ koordinat sistemini ele alalım. $B; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ sistemi bir A düzlemini temsil etsin. A nın E düzlemine göre hareketini ve A nın E' düzlemine göre hareketine bakarak E nin E' düzlemine göre hareketini inceleyelim.



Şekil 4. 1 Hareketli koordinat sistemi

Bir noktanın E düzlemine göre değişimini $\ll d... \gg$ ile E' düzlemine göre değişimini de $\ll d'... \gg$ ile gösterelim.

4.1 Türev Denklemleri

A/E hareketi için türev denklemleri şu şekilde elde edilir:

$t=0$ anında $B; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ve $O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ çatılarının başlangıç noktalarının aynı olduğu kabul edilir. Buradan $\mathbf{a}_1$ ile $\mathbf{e}_1$ arasındaki açı φ olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_2 &= -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2\end{aligned}\tag{4.1}$$

yazılabilir. t ye göre türev alınırsa

$$\begin{aligned}d\mathbf{a}_1 &= (-\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2)d\varphi \\ d\mathbf{a}_2 &= (-\cos \varphi \mathbf{e}_1 - \sin \varphi \mathbf{e}_2)d\varphi\end{aligned}$$

bulunur. Kısaca

$$\begin{cases} d\mathbf{a}_1 = d\varphi \mathbf{a}_2 \\ d\mathbf{a}_2 = -d\varphi \mathbf{a}_1 \end{cases}\tag{4.2}$$

yazılabilir.

$$\mathbf{BO} = \mathbf{b} = b_1 \mathbf{a}_1 + b_2 \mathbf{a}_2\tag{4.3}$$

olmak üzere bu bağıntının t ye göre türevi alınır ve burada da_1 ve da_2 nin değerleri yerine yazılırsa

$$d\mathbf{b} = (db_1 - b_2 d\varphi) \mathbf{a}_1 + (db_2 + b_1 d\varphi) \mathbf{a}_2\tag{4.4}$$

elde edilir.

Benzer şekilde A/E' hareketi için türev denklemleri şu şekilde bulunur:

$t=0$ anında $B; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ve $O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ çatılarının başlangıç noktalarının aynı olduğu kabul edildiğinden, $\mathbf{a}_1$ ile $\mathbf{e}'_1$ arasındaki açı φ' olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= \cos \varphi' \mathbf{e}'_1 + \sin \varphi' \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{a}_2 &= -\sin \varphi' \mathbf{e}'_1 + \cos \varphi' \mathbf{e}'_2\end{aligned}\tag{4.5}$$

yazılabilir ve t ye göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} d'\mathbf{a}_1 &= (-\sin \varphi' \mathbf{e}'_1 + \cos \varphi' \mathbf{e}'_2) d\varphi' \\ d'\mathbf{a}_2 &= (-\cos \varphi' \mathbf{e}'_1 - \sin \varphi' \mathbf{e}'_2) d\varphi' \end{aligned}$$

bulunur. Kısaca

$$\begin{cases} d'\mathbf{a}_1 = d\varphi' \mathbf{a}_2 \\ d'\mathbf{a}_2 = -d\varphi' \mathbf{a}_1 \end{cases} \quad (4.6)$$

yazılabilir.

$$\mathbf{BO}' = \mathbf{b}' = b'_1 \mathbf{a}_1 + b'_2 \mathbf{a}_2 \quad (4.7)$$

olmak üzere bu bağıntının t ye göre türevi alınır ve burada (4.6) daki değerler yerine yazılırsa

$$d'\mathbf{b}' = d'\mathbf{b} = (db'_1 - b'_2 d\varphi') \mathbf{a}_1 + (db'_2 + b'_1 d\varphi') \mathbf{a}_2 \quad (4.8)$$

elde edilir.

Kısaca

$$\begin{cases} d\varphi = \tau \\ db_1 - b_2 d\varphi = \sigma_1 \\ db_2 + b_1 d\varphi = \sigma_2 \end{cases} \quad (4.9)$$

ve

$$\begin{cases} d\varphi' = \tau' \\ db'_1 - b'_2 d\varphi' = \sigma'_1 \\ db'_2 + b'_1 d\varphi' = \sigma'_2 \end{cases} \quad (4.10)$$

diyelim. O halde A/E ve A/E' hareketleri için sırasıyla türev denklemleri

$$\begin{cases} d\mathbf{a}_1 = \tau \mathbf{a}_2 \\ d\mathbf{a}_2 = -\tau \mathbf{a}_1 \\ d\mathbf{b} = \sigma_1 \mathbf{a}_1 + \sigma_2 \mathbf{a}_2 \end{cases} \quad (4.11)$$

ve

$$\begin{cases} d'\mathbf{a}_1 = \tau'\mathbf{a}_2 \\ d'\mathbf{a}_2 = -\tau'\mathbf{a}_1 \\ d'\mathbf{b} = \sigma_1'\mathbf{a}_1 + \sigma_2'\mathbf{a}_2 \end{cases} \quad (4.12)$$

yazılabilir.

Burada $\sigma_j, \sigma_j', \tau, \tau'$ büyüklükleri 1-parametrelili düzlemsel hareketlere ait PFAFF formları denilen t ye göre lineer diferensiyel formlardır.

4.2 Hızlar

A düzlemi üzerinde alınan bir $X = (x_1, x_2)$ noktasının E ve E' düzlemlerindeki hızlarını bulalım:

$$\mathbf{BX} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$$

olmak üzere Şekil 4.1 den

$$\mathbf{x} = \mathbf{OX} = \mathbf{BX} + \mathbf{OB} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 - \mathbf{b} \quad (4.13)$$

ve

$$\mathbf{x}' = \mathbf{O}'\mathbf{X} = \mathbf{BX} + \mathbf{O}'\mathbf{B} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}' \quad (4.14)$$

olduğu görülür.

(4.11) türev denklemleri yardımıyla X in E düzlemine göre değişimi

$$d\mathbf{x} = dx_1\mathbf{a}_1 + x_1d\mathbf{a}_1 + dx_2\mathbf{a}_2 + x_2d\mathbf{a}_2 - d\mathbf{b}$$

veya

$$d\mathbf{x} = (dx_1 - \sigma_1 - x_2\tau)\mathbf{a}_1 + (dx_2 - \sigma_2 + x_1\tau)\mathbf{a}_2 \quad (4.15)$$

yazılabilir. Buradan X noktasının E düzlemine göre hızı bulunur.

$$\mathbf{V}_r = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

vektörüne X in relatif hız vektörü denir.

$\mathbf{V}_r = 0$ veya $d\mathbf{x} = 0$ için X noktası E de tespit edilmiş olur. O halde X in E düzleminde sabit olma şartları şunlardır:

$$\begin{cases} dx_1 = \sigma_1 + x_2 \tau \\ dx_2 = \sigma_2 - x_1 \tau \end{cases} \quad (4.16)$$

Benzer şekilde (4.14) eşitliğinden ve (4.12) türev denklemleri yardımıyla X noktasının E' düzlemine göre değişimi

$$d'\mathbf{x} = d'\mathbf{x} = (dx_1 - \sigma'_1 - x_2 \tau')\mathbf{a}_1 + (dx_2 - \sigma'_2 + x_1 \tau')\mathbf{a}_2 \quad (4.17)$$

bulunur. Buradan da yani X in E' ye göre değişimi yani X in mutlak hız vektörü

$$\mathbf{V}_a = \frac{d\mathbf{x}'}{dt}$$

elde edilir. Eğer $\mathbf{V}_a = 0$ veya $d\mathbf{x}' = 0$ ise X noktası E' düzleminde sabittir. O halde X noktasının E' düzleminde sabit olma şartları şunlardır:

$$\begin{cases} dx_1 = \sigma'_1 + x_2 \tau' \\ dx_2 = \sigma'_2 - x_1 \tau' \end{cases} \quad (4.18)$$

X noktası E de sabit tutulduğunda

$$\mathbf{V}_f = \frac{d_f \mathbf{x}}{dt}$$

sürüklenme hızı X noktasının E' düzlemine göre $d_f \mathbf{x}$ değişimine karşılık gelir. Buna göre (4.16) şartları (4.18) denkleminde yerine yazıldığında

$$d_f \mathbf{x} = (\sigma_1 - \sigma'_1) - x_2(\tau' - \tau) \mathbf{a}_1 + (\sigma_2 - \sigma'_2) + x_1(\tau' - \tau) \mathbf{a}_2 \quad (4.19)$$

bulunur. Böylece (4.15), (4.17) ve (4.19) formüllerinden

$$d'\mathbf{x} = d_f \mathbf{x} + d\mathbf{x}$$

olduğu görülür. Yani hızlar kanunu korunmuş olur.

Şimdi E ve E' düzlemleri sabit kabul edilerek A/E ve A/E' hareketlerine bakalım:

A/E hareketinde

$\mathbf{V}_a$: X noktasının E düzlemine göre hızı

$\mathbf{V}_f$: X sabit iken X in E ye göre hızı (yani A nın E ye göre hızı)

$\mathbf{V}_r$: X in kendi düzlemine yani A düzlemine göre hızı

olmak üzere (3.7), (3.8) ve (3.9) denklemlerinden

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_f + \mathbf{V}_r \quad (4.20)$$

yazılabilir.

Benzer şekilde A/E' hareketi için de

$$\mathbf{V}_a' = \mathbf{V}_f' + \mathbf{V}_r \quad (4.21)$$

elde edilir.

E/E' hareketi A/E nin ters hareketi ve A/E' hareketi ile karakterize edildiğinden E/E' hareketinde $d_f \mathbf{x}$ sürüklenme hızını, A/E' hareketindeki sürüklenme hızından A/E hareketindeki sürüklenme hızını çıkardığımızda elde ederiz.

Yani $\mathbf{V}_a = 0$ için (4.20) ve (4.21) eşitliklerinden

$$d_f \mathbf{x} = \mathbf{V}_f' - \mathbf{V}_f \quad (4.22)$$

olur. Buna göre (4.15) ve (4.17) denkleminde noktanın sabit olma koşulları göz önünde bulundurulduğunda A/E ve A/E' hareketlerinin sürüklenme hızları

$$\mathbf{V}_f = (-\sigma_1 - x_2 \tau) \mathbf{a}_1 + (-\sigma_2 + x_1 \tau) \mathbf{a}_2 \quad (4.23)$$

ve

$$\mathbf{V}_f' = (-\sigma_1' - x_2 \tau') \mathbf{a}_1 + (-\sigma_2' + x_1 \tau') \mathbf{a}_2 \quad (4.24)$$

elde edilir. Bu denklemlere göre E/E' hareketinin sürüklenme hız vektörü

$$d_f \mathbf{x} = \mathbf{V}_f' - \mathbf{V}_f = -\sigma_1' - x_2 \tau' + \sigma_1 + x_2 \tau \mathbf{a}_1 + -\sigma_2' + x_1 \tau' + \sigma_2 - x_1 \tau \mathbf{a}_2$$

bulunur. Son eşitliği düzenlersek

$$d_f \mathbf{x} = (\sigma_1 - \sigma_1') - x_2(\tau' - \tau) \mathbf{a}_1 + (\sigma_2 - \sigma_2') + x_1(\tau' - \tau) \mathbf{a}_2$$

(4.19) denklemini yeniden elde edilir.

4.3 Pol Noktaları

A, E, E' gibi birbirine göre hareket eden ve ikişer ikişer 1-parametrelili hareketler meydana getiren üç düzlem var. Belirli bir t anında (A, E) , (A, E') ve (E, E') düzlem çiftlerinin her biri belirli bir dönme polüne sahiptir ve ani dönme hareketleri birer açısal hız ile meydana gelir.

A/E hareketi için $d\varphi = \tau$ olmak üzere hareketin açısal hızı

$$\dot{\varphi} = \frac{\tau}{dt}$$

dir.

$\mathbf{V}_f = 0$ için A/E hareketinin $Q = (q_1, q_2)$ polünün koordinatları şu şekilde bulunur:

(4.23) denkleminde

$$\mathbf{V}_f = (-\sigma_1 - x_2\tau)\mathbf{a}_1 + (-\sigma_2 + x_1\tau)\mathbf{a}_2 = 0$$

ise

$$\begin{cases} -\sigma_1 - x_2\tau = 0 \\ -\sigma_2 + x_1\tau = 0 \end{cases}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{cases} 0x_1 - \tau x_2 = \sigma_1 \\ \tau x_1 + 0x_2 = \sigma_2 \end{cases}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem sisteminin katsayılar determinanı

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\tau \\ \tau & 0 \end{vmatrix} = \tau^2$$

elde edilir. Pure ötelemeden kaçınmak için $d\varphi = \tau \neq 0$ kabul edildiğinden $\Delta = \tau^2 \neq 0$ dir. O halde sistemin Cramer-metodu ile çözümü vardır ve tektir.

$$\begin{cases} q_1 = x_1 = \frac{\sigma_2}{\tau} \\ q_2 = x_2 = -\frac{\sigma_1}{\tau} \end{cases} \quad (4.25)$$

bulunur.

Benzer şekilde A/E' hareketi için $d'\varphi = \tau'$ olmak üzere hareketin açısal hızı

$$\dot{\varphi}' = \frac{\tau'}{dt}$$

dir.

$$\mathbf{V}_f' = 0 \quad \text{için} \quad A/E' \quad \text{hareketinin} \quad Q' = (q_1', q_2') \quad \text{polünün koordinatları,} \quad (4.24)$$

denkleminde

$$\mathbf{V}_f' = (-\sigma_1' - x_2\tau')\mathbf{a}_1 + (-\sigma_2' + x_1\tau')\mathbf{a}_2 = 0$$

olmak üzere $d\varphi' = \tau' \neq 0$ kabulü ile

$$\begin{cases} q_1' = \frac{\sigma_2'}{\tau'} \\ q_2' = -\frac{\sigma_1'}{\tau'} \end{cases} \quad (4.26)$$

bulunur.

E/E' hareketi için açısal hız

$$\dot{\theta} = \frac{\tau' - \tau}{dt}$$

dir.

P dönme polünü bulmak için $d_f \mathbf{x} = 0$ olmak üzere (4.19) denkleminde

$$d_f \mathbf{x} = (\sigma_1 - \sigma_1') - x_2(\tau' - \tau) \mathbf{a}_1 + (\sigma_2 - \sigma_2') + x_1(\tau' - \tau) \mathbf{a}_2 = 0$$

yani $\mathbf{V}_f = \mathbf{V}'_f$ ise

$$\begin{cases} (\sigma_1 - \sigma'_1) - x_2 (\tau' - \tau) = 0 \\ (\sigma_2 - \sigma'_2) + x_1 (\tau' - \tau) = 0 \end{cases}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{cases} 0 x_1 - (\tau' - \tau) x_2 = -\sigma_1 + \sigma'_1 \\ (\tau' - \tau) x_1 + 0 x_2 = -\sigma_2 + \sigma'_2 \end{cases}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem sisteminin katsayılar determinanı

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -(\tau' - \tau) \\ \tau' - \tau & 0 \end{vmatrix} = (\tau' - \tau)^2$$

bulunur. $\theta = (\tau' - \tau) \neq 0$ olduğundan dolayı sistemin Cramer-metodu ile çözümü vardır ve tektir. P dönme polünün koordinatları

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\sigma'_2 - \sigma_2}{\tau' - \tau} \\ p_2 = -\frac{\sigma'_1 - \sigma_1}{\tau' - \tau} \end{cases} \quad (4.27)$$

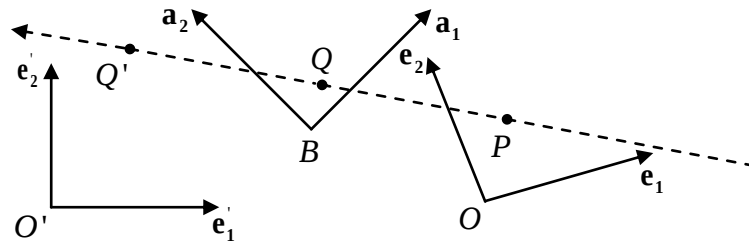
şeklinde bulunur. (4.25), (4.26) ve (4.27) bağıntıları kullanılarak

$$\begin{aligned} (\tau' - \tau)p_1 + \tau q_1 - \tau' q'_1 &= 0 \\ (\tau' - \tau)p_2 + \tau q_2 - \tau' q'_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

yazılabilir. Bu iki denklem P, Q, Q' noktalarının bir doğru üzerinde bulunduklarını ifade eder. Bu doğruya *pol doğrusu* denir (Şekil 4.2).

O halde (4.22) denkleminden E/E' hareketinin P dönme polü, A nın E ve E' düzlemlerine göre hareketinde hız vektörleri aynı olan bir noktadır. Ayrıca, A/E hareketinde A düzlemindeki noktalar Q polü etrafında ani dönme hareketi meydana getirirler (Teorem 3.3) ve bir X noktasının yörüngesine ait teğet QX pol ışınına diktir (Sonuç 3.1). Benzer şekilde A/E' hareketinde A düzlemi t anında Q' polü etrafında ani dönme hareketi yapar ve bir X noktasının yörünge teğeti $Q'X$ pol ışınına diktir.

Buradan $X = P$ alınırsa, P noktasının QQ' doğrusu üzerinde bulunması gerekir (Şekil 4.2).



Şekil 4. 2 Pol doğrusu

Ayrıca (4.25), (4.26) ve (4.27) bağıntıları kullanılarak üç dönme polünün koordinatlarına dair

$$\dot{q}_j - q_j : p_j - \dot{q}_j : p_j - q_j = (\tau' - \tau) : \tau : -\tau' \quad , \quad j = 1, 2$$

bağıntısı elde edilir. Bu orantı her iki koordinatın farkı için de yazılabileceğinden noktaların uzaklıkları için de bu bağıntı yazılabilir:

$$\overline{QQ'} : \overline{Q'P} : \overline{PQ} = (\tau' - \tau) : \tau : -\tau'$$

Yani, üç dönme polünün uzaklıkları oranları açısal hızların oranları gibidir.

Buradan şu teorem verilebilir:

Teorem 4.1

Üç düzlem ikişer ikişer birbirine göre 1-parametrelili hareketler meydana getirirlerse her t anında üç dönme polü, uzaklıkları açısal hızlarla orantılı olacak şekilde bir doğru üzerinde bulunurlar.

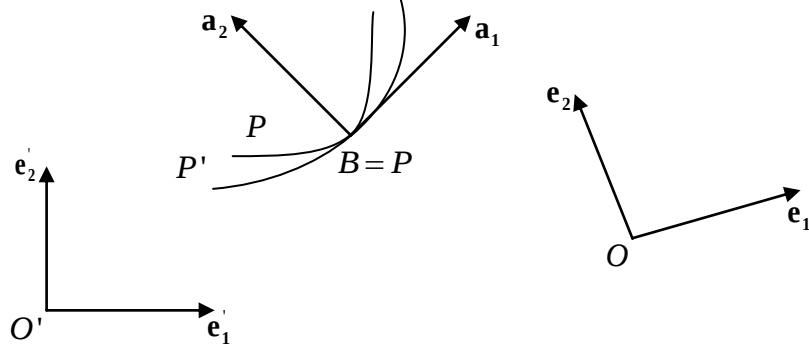
4.4 Kanonik İzafe Sistemi

E nin E' düzlemine göre 1-parametrelili bir hareketini; hareketli $B; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ koordinat sistemi ele alarak incelemiştik. Şimdi $B; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ izafe sistemini özel olarak seçerek E/E' hareketine bakalım:

Bu izafe sistemi için

i) Sistemin B başlangıcı P ani dönme polü ile çakışsın. Yani $B = P$ alalım.

ii) $B; \mathbf{a}_1$ eksenini pol teğeti ile, yani $(P), (P')$ pol eğrilerinin ortak teğeti ile çakışacak şekilde olsun (Şekil 4.2).



Şekil 4. 3 Kanonik izafe sistemi

P başlangıç noktası alındığından $P = (p_1, p_2) = (0, 0)$ olmalıdır. (4.27) eşitliklerinden

$$\sigma_1 = \sigma'_1, \quad \sigma_2 = \sigma'_2$$

yazılır. Buradan

$$d\mathbf{b} = d\mathbf{p} = \sigma_1 \mathbf{a}_1 + \sigma_2 \mathbf{a}_2 = d'\mathbf{b} = d'\mathbf{p} \quad (4.29)$$

yazılabilir. Bu denklem ile pol teğeti verilmiş olur.

$d\mathbf{b} = d'\mathbf{b}$ olması $\mathbf{V}_r = \mathbf{V}_a$ demektir. Yani $\mathbf{V}_f = 0$ olur. Buradan (P) ve (P') pol eğrilerinin skalar yay elementleri için

$$ds' = \|\mathbf{V}_a\| dt = \|\mathbf{V}_r\| dt = ds$$

elde edilir. O halde (P) ve (P') pol eğrileri birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanmış olur.

(ii) den, yani pol teğeti $\mathbf{a}_1$ ile çakışmasından (4.29) denkleminde $\mathbf{a}_2$ nin katsayısı sıfır olmalıdır. Buradan

$$\sigma_2 = \sigma'_2 = 0$$

yazılır. $\sigma_1 = \sigma'_1 = \sigma$ denilirse $P; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ kanonik izafe sistemine ait türev denklemleri (4.11) ve (4.12) bağıntılarından şu şekilde elde edilmiş olur:

$$\begin{cases} d\mathbf{a}_1 = \tau \mathbf{a}_2 \\ d\mathbf{a}_2 = -\tau \mathbf{a}_1 \\ d\mathbf{p} = \sigma \mathbf{a}_1 \end{cases} \quad (4.30)$$

ve

$$\begin{cases} d'\mathbf{a}_1 = \tau' \mathbf{a}_2 \\ d'\mathbf{a}_2 = -\tau' \mathbf{a}_1 \\ d'\mathbf{p} = \sigma \mathbf{a}_1 \end{cases} \quad (4.31)$$

Buradaki σ, τ, τ' diferensiyel formları şu anlamları taşır:

$s = \int \|\mathbf{dp}\| dt$ olmak üzere $ds = \sigma$ olduğundan dolayı σ ; (P) ve (P') pol eğrilerinin skalar yay elementidir. τ ; kotengenz açısı, yani (P) nin komşu iki teğeti arasındaki açıdır. Dolayısıyla (P) nin P noktasındaki eğriliği için

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\tau}{\sigma}$$

ve (P) pol eğrisinin eğrilik yarıçapı için

$$r = \frac{\sigma}{\tau}$$

yazılabilir.

Aynı şekilde τ' ; kotengenz açısı, yani (P') nin komşu iki teğeti arasındaki açıdır. Buradan (P') nin P noktasındaki eğriliği için

$$\frac{d\varphi'}{ds} = \frac{\tau'}{\sigma}$$

ve (P') pol eğrisinin eğrilik yarıçapı için

$$r' = \frac{\sigma}{\tau'}$$

yazılabilir.

KOMPLEKS DÜZLEMDE 1-PARAMETRELİ HAREKETLER

Burada 3. Bölümde elde ettiğimiz düzlemsel hareketin hız ve pol denklemlerini kompleks sayılarla ifade edelim.

Hareketli E ve sabit E' düzlemlerinde $O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ve $O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ koordinat sistemleri olmak üzere bir X noktasının her iki düzlemdeki koordinatları sırasıyla,

$$\mathbf{x} = x_1 + ix_2, \quad \mathbf{x}' = x'_1 + ix'_2$$

kompleks sayıları ile verilsin. $\mathbf{O'O}$ vektörünü de sabit sistemde

$$\mathbf{u}' = u'_1 + iu'_2$$

kompleks sayısı ile gösterelim. $\mathbf{OO}' = \mathbf{u}$ olduğundan

$$-\mathbf{u} = -u_1 - iu_2$$

dir ve $+\mathbf{u}$, $\mathbf{O'O}$ vektörüne karşılık olan vektördür. (3.4) eşitliği ile ifade edilen hareketin kartezyen denklemlerinden x'_1 ve x'_2 ifadeleri $\mathbf{x}' = x'_1 + ix'_2$ de yerine yazılırsa

$$\mathbf{x}' = (x_1 + ix_2)(\cos \theta + i \sin \theta) - (u_1 + iu_2)(\cos \theta + i \sin \theta)$$

veya

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{x} - \mathbf{u})e^{i\theta} \quad (5.1)$$

elde edilir. $\mathbf{O}'\mathbf{O}=\mathbf{u}'$ ve hareketli sistemin sabit sisteme göre dönme açısı θ olduğundan

$$\mathbf{u}' = -\mathbf{u}e^{i\theta} \quad (5.2)$$

denilirse

$$\mathbf{x}' = \mathbf{u}' + \mathbf{x}e^{i\theta} \quad (5.3)$$

elde edilir. Böylelikle $\theta, \mathbf{u}, \mathbf{u}'$ büyüklükleri bir t (zaman) parametresine bağlı iseler (5.3) denklemi ile tanımlanan harekete *kompleks düzlemde 1-parametrelili hareket* denir ve $B = E / E'$ ile gösterilir.

5.1 Hızlar

E düzlemi E' sabit düzlemine göre 1-parametrelili hareket yaparken, bir X noktası da hareketli E düzlemindeki yerini t zamanı ile değiştirsin. *Böylece iki hareketi bir araya getirerek X noktasının hızlarını araştıralım:*

$X = (x_1, x_2) \in E$ noktasının hareketli sisteme göre $\mathbf{X}_r$ *relatif hızı*,

$$\mathbf{X}_r = \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (5.4)$$

ifadesiyle verilir. $\mathbf{X}_r$ vektörünün E' sabit düzlemindeki ifadesi

$$\mathbf{X}_r' = \mathbf{X}_r e^{i\theta} = \dot{\mathbf{x}} e^{i\theta} \quad (5.5)$$

olarak yazılır.

X noktasının E' düzleminde sahip olduğu $\mathbf{X}_a'$ *mutlak hızı*, sabit sisteme göre;

$$\mathbf{X}_a' = \dot{\mathbf{x}}' = \frac{d\mathbf{x}'}{dt}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca (5.3) ifadesinin türevi alınır

$$\mathbf{X}_a' = \dot{\mathbf{u}}' + i\dot{\theta}\mathbf{x}e^{i\theta} + \dot{\mathbf{x}} e^{i\theta}$$

veya

$$\mathbf{X}_a' = \dot{\mathbf{u}}' + i\dot{\theta}(\mathbf{x}' - \mathbf{u}') + \dot{\mathbf{x}} e^{i\theta} \quad (5.6)$$

elde edilir. Buna göre X noktasının $\mathbf{X}_f'$ sürüklenme hızı, sabit sisteme göre;

$$\mathbf{X}_f' = \dot{\mathbf{u}}' + i\dot{\theta}(\mathbf{x}' - \mathbf{u}') \quad (5.7)$$

şeklindedir.

Şimdi $X \in E$ noktasının E' düzleminde sahip olduğu $\mathbf{X}_a'$ ve $\mathbf{X}_f'$ hızlarının E hareketli düzlemindeki karşılıklarını ifade edelim:

X noktasının hareket esnasında E' düzleminde sahip olduğu mutlak hız vektörünün E düzlemindeki $\mathbf{X}_a$ ifadesi için

$$\mathbf{X}_a = \mathbf{X}_a' e^{-i\theta} = \dot{\mathbf{u}}' e^{-i\theta} + i\dot{\theta}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}$$

yazılabilir. (5.2) denkleminde $\dot{\mathbf{u}}' = -(\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\theta})e^{i\theta}$ olduğundan

$$\mathbf{X}_a = -(\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\theta}) + i\dot{\theta}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} \quad (5.8)$$

elde edilir. Benzer şekilde X noktasının E düzlemindeki $\mathbf{X}_f$ sürüklenme hız vektörü,

$$\mathbf{X}_f = \mathbf{X}_f' e^{-i\theta} = \dot{\mathbf{u}}' e^{-i\theta} + i\dot{\theta}\mathbf{x}$$

veya

$$\mathbf{X}_f = -\dot{\mathbf{u}} + i\dot{\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \quad (5.9)$$

olarak bulunur.

O halde bu son ifadeler yardımıyla aşağıdaki teorem ispatsız verilebilir:

Teorem 5.1

Kompleks düzlemde, $B = E / E'$ 1-parametrel düzlemsel hareket esnasında bir X noktasının mutlak hızı, sürüklenme hızı ile relatif hızının toplamına eşittir, yani hızlar kanunu korunur:

$$\begin{cases} \mathbf{X}'_a = \mathbf{X}'_f + \mathbf{X}'_r \\ \mathbf{X}'_a = \mathbf{X}'_f + \mathbf{X}'_r \end{cases} \quad (5.10)$$

5.2 Dönme Polü ve Pol eğrileri

B hareketinin her t anındaki pol noktalarını araştıralım. P dönme polü, sürüklenme hızının sıfır olmasıyla karakterize edilmişti. Sabit düzlemdeki pol noktaları için $\mathbf{X}'_f = 0$ olmak üzere (5.7) denkleminde

$$\mathbf{p}' = \mathbf{x}' = \mathbf{u}' + i \frac{\dot{\mathbf{u}}'}{\dot{\theta}} \quad (5.11)$$

elde edilir. Ayrıca bu son denklemden elde edilen

$$\dot{\mathbf{u}}' = i\dot{\theta}(\mathbf{u}' - \mathbf{p}')$$

ifadesi (5.7) denkleminde yerine yazılırsa sürüklenme hız vektörü pol noktası cinsinden

$$\mathbf{X}'_f = i\dot{\theta}(\mathbf{x}' - \mathbf{p}') \quad (5.12)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Şimdi X noktasının E hareketli düzleminde sahip olduğu pol noktalarını ifade edelim:

$\mathbf{X}_f = 0$ olmak üzere (5.9) denkleminde

$$\mathbf{p} = \mathbf{x} = \mathbf{u} - i \frac{\dot{\mathbf{u}}}{\dot{\theta}} \quad (5.13)$$

elde edilir. Buradan elde edilen

$$\dot{\mathbf{u}} = i\dot{\theta}(\mathbf{p} - \mathbf{u})$$

değeri (5.9) denkleminde yerine yazılırsa E düzlemindeki sürüklenme hız vektörünün pol noktası cinsinden ifadesi

$$\mathbf{X}_f = i\dot{\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \quad (5.14)$$

şeklinde yazılabilir.

X noktasının sürüklenme hızının (5.12) ve (5.14) ifadelerinden aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Sonuç 5.1

E' sabit düzleminde $\mathbf{X}'_f$ sürüklenme hız vektörü ve $\mathbf{P}'\mathbf{X}'$ pol ışını için

$\mathbf{X}'_f = -(x'_2 - p'_2)\dot{\theta} + i(x'_1 - p'_1)\dot{\theta}$ ve $\mathbf{P}'\mathbf{X}' = (x'_1 - p'_1) + i(x'_2 - p'_2)$ olmak üzere

$$\langle \mathbf{X}'_f, \mathbf{P}'\mathbf{X}' \rangle = \left[-(x'_2 - p'_2)(x'_1 - p'_1) + (x'_1 - p'_1)(x'_2 - p'_2) \right] \dot{\theta} = 0$$

elde edilir.

Benzer şekilde E hareketli düzleminde $\mathbf{X}_f$ sürüklenme hız vektörü ve $\mathbf{P}\mathbf{X}$ pol ışını için

$$\langle \mathbf{X}_f, \mathbf{P}\mathbf{X} \rangle = \langle (-(x_2 - p_2), x_1 - p_1), (x_1 - p_1, x_2 - p_2) \rangle \dot{\theta} = 0$$

elde edilir.

O halde pol ışını hareketin her t anında sürüklenme hızına diktir.

Sonuç 5.2

E' sabit düzleminde $\mathbf{X}'_f$ sürüklenme hız vektörünün uzunluğu için

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}'_f\| &= \sqrt{\langle \mathbf{X}'_f, \mathbf{X}'_f \rangle} \\ &= \sqrt{\langle i\dot{\theta}(\mathbf{x}' - \mathbf{p}'), i\dot{\theta}(\mathbf{x}' - \mathbf{p}') \rangle} \\ &= \sqrt{\dot{\theta}^2 \left[(x'_2 - p'_2)^2 + (x'_1 - p'_1)^2 \right]} \\ &= |\dot{\theta}| \|\mathbf{P}'\mathbf{X}'\| \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde E hareketli düzleminde $\mathbf{X}_f$ sürüklenme hız vektörünün uzunluğu için

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{X}_f\| &= \sqrt{\langle \mathbf{X}_f, \mathbf{X}_f \rangle} \\
&= \sqrt{\langle i\dot{\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{p}), i\dot{\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \rangle} \\
&= \sqrt{\dot{\theta}^2 [(x_2 - p_2)^2 + (x_1 - p_1)^2]} \\
&= |\dot{\theta}| \|\mathbf{PX}\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

(P) ve (P') pol eğrilerini çizen pol noktasının hızlarını araştıralım:

Pol noktası $\mathbf{X}_f' = 0$ ile tanımlandığından (5.10) eşitliğinden $X = P$ için

$$\mathbf{X}_a' = \mathbf{X}_r' = \dot{\mathbf{p}}e^{i\theta}$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki teoremleri ispatsız verebiliriz:

Teorem 5.2

Sabit ve hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen pol noktasının her t anındaki hızları birbirinin aynısıdır.

Teorem 5.3

Kompleks düzlemde, $B = E / E'$; 1-parametrelili düzlemsel hareket esnasında E düzleminin (P) hareketli pol eğrisi E' düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

2-PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HAREKETLER

Bu bölümde 1-parametrelili hareketler için elde ettiğimiz türev denklemleri, pol noktaları gibi bazı denklemleri 2-parametre ile inceleyeceğiz ve bunların geometrik anlamlarını ifade etmeye çalışacağız.

6.1 İki-Parametrelili Hareketler ve Onların Kutup Eksenleri

Müller [1] ve [2] de iki-parametrelili hareketler ile kutup eksenleri tanımlanmıştır.

Burada Bölüm 5’de ifade edildiği gibi $\mathbf{OO}' = \mathbf{u}$ konum vektörü

$$\mathbf{u} = u_1 + iu_2$$

kompleks büyüklüğü ile verilsin. Düzlemin bir X noktası için

$$\mathbf{x} = x_1 + ix_2$$

ve

$$\mathbf{x}' = x'_1 + ix'_2$$

olmak üzere B_t hareketi

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{x} - \mathbf{u})e^{i\theta} \tag{6.1}$$

denklemleri ile tanımlanmıştır.

Sabit bir X noktasının E' düzlemine göre değişimi (6.1) denklemlerinden

$$d\mathbf{x}' = -d\mathbf{u} + i(\mathbf{x} - \mathbf{u})d\theta e^{i\theta} \quad (6.2)$$

veya

$$d\mathbf{x}' = -d\mathbf{u}e^{i\theta} + i\mathbf{x}'d\theta \quad (6.3)$$

elde edilir. Hareketin dönme polü $d\mathbf{x}' = 0$ ile karakterize edildiğinden (6.2) denkleminin çözümü ile E düzlemine göre P dönme polü

$$\mathbf{p} = \mathbf{u} - i \frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \quad (6.4)$$

bulunur. E' düzleminin sahip olduğu dönme polü için de (6.3) denkleminin çözümünde

$$\mathbf{p}' = -ie^{i\theta} \frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \quad (6.5)$$

elde edilir.

Buradan itibaren u_1 ve u_2 'yi, dolayısıyla $\mathbf{u}$ kompleks büyüklüğü ile θ dönme açısını iki reel parametreye bağlı olarak alalım. Eğer $\frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \neq 0$ ise bu parametrelerden biri θ açısı olarak seçilebilir. Bu takdirde

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\theta, \lambda)$$

fonksiyonunun uygun diferensiyellenebilme şartı altında *2-parametrelili* veya *yüzey çizen B_{II} hareketi* tanımlanır.

Hareketin keyfi λ parametresi yerine bir $\lambda = \lambda(\theta)$ fonksiyonu seçildiği takdirde B_{II} 'den B_I hareketi elde edilir. Bu B_I hareketine karşılık gelen P dönme polünü inceleyeceğiz:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\theta, \lambda)$$

olmak üzere

$$d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{d\theta} d\theta$$

veya

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\theta} = \mathbf{u}_\theta + \mathbf{u}_\lambda \frac{d\lambda}{d\theta} \quad (6.6)$$

yazılabilir. Bu ifade (6.4) ve (6.5) bağıntılarında yerine yazılırsa

$$\mathbf{p} = \mathbf{u} - i\mathbf{u}_\theta - i\mathbf{u}_\lambda \frac{d\lambda}{d\theta} \quad (6.7)$$

ve

$$\mathbf{p}' = -ie^{i\theta}\mathbf{u}_\theta - ie^{i\theta}\mathbf{u}_\lambda \frac{d\lambda}{d\theta} \quad (6.8)$$

bulunur.

Belirli bir (θ, λ) konumu ile bir an için θ ve λ 'nın tespit edildiğini ve sadece $\frac{d\lambda}{d\theta} = \mu$ değiştiğini kabul edelim.

Kompleks sayı düzleminde bir doğrunun parametrik denklemi

$$\mathbf{x} = a + b\mu$$

(a, b : kompleks sabit sayılar, μ : reel parametre) ile tanımlandığından dolayı B_{II} 'den elde edilen bütün B_I hareketleri için şu teorem verilebilir:

Teorem 6.1

B_{II} hareketinin bir (θ, λ) konumunda bu hareketten elde edilen bütün B_I hareketlerinin P dönme polleri E hareketli düzleminde bir g doğrusu ve E' sabit düzleminde bir g' doğrusu meydana getirirler. (Bu doğrulara kutup eksenleri adı verilir [1], [2].)

Buradan (6.7) bağıntısına göre E düzleminde g doğrusu için

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{u} - i\mathbf{u}_\theta$$

noktasından geçtiği ve doğrultusunun

$$\mathbf{v} = -i\mathbf{u}_\lambda$$

olduğu söylenebilir.

Benzer şekilde (6.8) bağıntısından E' düzleminde g' doğrusu

$$\mathbf{p}'_0 = -ie^{i\theta}\mathbf{u}_\theta$$

noktasından geçer ve doğrultusu

$$\mathbf{v}' = -ie^{i\theta}\mathbf{u}_\lambda = \mathbf{v}e^{i\theta} \quad (6.9)$$

ile verilir.

g ve g' kutup eksenlerinin $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{v}'$ doğrultularının uzunlukları

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-i\mathbf{u}_\lambda)^2} = |\mathbf{u}_\lambda|$$

ve

$$\|\mathbf{v}'\| = \sqrt{(-ie^{i\theta}\mathbf{u}_\lambda)^2} = |\mathbf{u}_\lambda|$$

olduğundan

$$\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}'\| = |\mathbf{u}_\lambda| \quad (6.10)$$

yazılabilir.

O halde aşağıdaki teorem ispatsız verilebilir:

Teorem 6.2

B_{II} hareketinin bir (θ, λ) konumuna karşılık gelen g ve g' kutup eksenleri uzunlukları değişmeyecek şekilde birbirlerine tekabül ederler [1], [2].

Sonuç olarak şu teorem de verilebilir:

Teorem 6.3

B_{II} hareketinin $(\theta, \lambda) \rightarrow (\theta + d\theta, \lambda + d\lambda)$ gibi sonsuz küçük dönmelerine ait dönme pollerinin geometrik yeri, θ ve λ sabit değişkenleri ile $\frac{d\lambda}{d\theta}$ oranına ait E ve E' 'de sırasıyla birer g ve g' doğrularıdır. Bu doğrular sadece (θ, λ) konumuna bağlıdır. Böylece B_{II} hareketiyle kutup eksenlerinin bir $g(\theta, \lambda) \rightarrow g'(\theta, \lambda)$ doğru dönüşümü vardır [1], [2].

6.2 Hareketli Koordinat Sistemi

[1] de ifade edildiği gibi $O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ve $O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ koordinat sistemleri ile birlikte hareketli başka bir koordinat sistemi ele alarak B_{II} hareketini inceleyelim:

E düzleminde $B; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ve E' düzleminde $B'; \mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$ yeni hareketli koordinat sistemleri olsun. (4.11) ve (4.12) bağıntılarından E düzlemine göre türev denklemleri

$$\begin{cases} d\mathbf{a}_1 = \tau \mathbf{a}_2 \\ d\mathbf{a}_2 = -\tau \mathbf{a}_1 \\ d\mathbf{b} = \sigma_1 \mathbf{a}_1 + \sigma_2 \mathbf{a}_2 \end{cases} \quad (6.11)$$

ve E' düzlemine göre türev denklemleri

$$\begin{cases} d\mathbf{a}'_1 = \tau' \mathbf{a}'_2 \\ d\mathbf{a}'_2 = -\tau' \mathbf{a}'_1 \\ d\mathbf{b}' = \sigma'_1 \mathbf{a}'_1 + \sigma'_2 \mathbf{a}'_2 \end{cases} \quad (6.12)$$

bağıntıları ile tanımlanır.

B_{II} hareketinde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma'_1, \sigma'_2, \tau, \tau'$ büyüklükleri u ve v gibi bağımsız iki değişkene göre Pfaff formlarıdır. Yani genel olarak

$$\sigma_1 = A(u, v)du + B(u, v)dv$$

yazılabilir.

Ayrıca τ ve τ' büyüklükleri, sırasıyla, $\mathbf{e}_1$ ile $\mathbf{a}_1$ arasındaki açının ve $\mathbf{e}_1'$ ile $\mathbf{a}_1'$ arasındaki açının değişimi olduğundan $\psi = \psi(u, v)$ olmak üzere

$$\tau = d\psi = C(u, v)du + D(u, v)dv$$

yazılabilir.

Bir X noktasının E düzlemine göre konum vektörü Şekil 4.1 'den

$$\mathbf{x} = \mathbf{OX} = \mathbf{OB} + \mathbf{BX}$$

veya

$$\mathbf{x} = -\mathbf{b} + x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 \quad (6.13)$$

yazılabilir. Buradan X noktasının E düzlemine göre değişimi

$$d\mathbf{x} = -d\mathbf{b} + dx_1\mathbf{a}_1 + x_1d\mathbf{a}_1 + dx_2\mathbf{a}_2 + x_2d\mathbf{a}_2$$

bulunur. Son eşitlikte (6.11) türev denklemleri yerine yazılırsa

$$d\mathbf{x} = (dx_1 - \sigma_1 - x_2\tau)\mathbf{a}_1 + (dx_2 - \sigma_2 + x_1\tau)\mathbf{a}_2$$

elde edilir. X noktasının E düzleminde sabit olma koşulları $d\mathbf{x} = 0$ için

$$\begin{cases} dx_1 = \sigma_1 + x_2\tau \\ dx_2 = \sigma_2 - x_1\tau \end{cases} \quad (6.14)$$

elde edilir.

Benzer şekilde bir X' noktasının E' düzleminde sabit olma koşullarını şu şekilde elde edebiliriz.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{O}'\mathbf{X}' = \mathbf{O}'\mathbf{B}' + \mathbf{B}'\mathbf{X}'$$

veya

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{b}' + x'_1\mathbf{a}'_1 + x'_2\mathbf{a}'_2 \quad (6.15)$$

olmak üzere

$$\begin{cases} dx'_1 = \sigma'_1 + x'_2 \tau' \\ dx'_2 = \sigma'_2 - x'_1 \tau' \end{cases} \quad (6.16)$$

elde edilir.

Burada B_{II} hareketi tüm u, v değişkenlerine bağımlı olarak $B; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ eksen sisteminin E düzleminde ve $B'; \mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$ eksen sisteminin E' düzlemi üzerinde hareketi ile açıklanır.

B_{II} hareketi için $\sigma_i, \sigma'_i, \tau, \tau'$ Pfaff formları hareketin tespitinde keyfi kabul edilemezler, çok defa integrallenebilme şartlarını sağlamak mecburiyetindedirler. Bunun için (6.11) ve (6.12) türev denklemlerinin dış türevleri incelenir:

Bir tam diferensiyelin dış türevi sıfır olduğundan

$$d(d\mathbf{b}) = 0$$

yazılabilir. Buradan (2.9) bağıntısı kullanılarak

$$d(\sigma_1 \mathbf{a}_1 + \sigma_2 \mathbf{a}_2) = d\mathbf{a}_1 \wedge \sigma_1 + \mathbf{a}_1 d\sigma_1 + d\mathbf{a}_2 \wedge \sigma_2 + \mathbf{a}_2 d\sigma_2 = 0$$

bulunur. Son bağıntıda (6.11) türev denklemleri yerine yazılırsa

$$\mathbf{a}_1 d\sigma_1 + \mathbf{a}_2 d\sigma_2 = \mathbf{a}_1 \tau \wedge \sigma_2 - \mathbf{a}_2 \tau \wedge \sigma_1$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{cases} d\sigma_1 = -\sigma_2 \wedge \tau \\ d\sigma_2 = \sigma_1 \wedge \tau \end{cases} \quad (6.17)$$

elde edilir. Benzer sonuçlar, E' düzleminde türev denklemleri yardımıyla

$$\begin{cases} d\sigma'_1 = -\sigma'_2 \wedge \tau' \\ d\sigma'_2 = \sigma'_1 \wedge \tau' \end{cases} \quad (6.18)$$

olarak bulunur. Aynı zamanda,

$$d(d\mathbf{a}_j) = 0, \quad j = 1, 2$$

ve

$$d(da_j) = 0, \quad j = 1, 2$$

yazılabilir. Buradan

$$d(da_1) = d(\tau a_2) = 0$$

için (2.9) bağıntısı kullanılarak

$$da_2 \wedge \tau + a_2 d\tau = 0$$

veya

$$-a_1 \tau \wedge \tau + a_2 d\tau = 0$$

bulunur. $\tau \wedge \tau = 0$ olduğundan

$$d\tau = 0 \tag{6.19}$$

elde edilir. Bu ifade, bir dönme açısının değişimi olan τ büyüklüğünün bir tam diferansiyel olduğunu ifade eder. Benzer şekilde

$$d\tau' = 0 \tag{6.20}$$

bulunur ve τ' de bir tam diferansiyeldir.

(6.19) ve (6.20) sonuçları ile τ ve τ' ifadelerinin geometrik anlamı ifade edilmiş olur. Sonuç olarak, B_{II} hareketine ait Pfaff formları (6.17) ve (6.18) integrallenebilme şartlarını sağlamak mecburiyetindedirler. Burada τ ve τ' tam diferansiyeldir.

6.3 Bir Eğri elementini Çizen Noktalar

Burada [1] de ifade edildiği şekilde bir noktanın nokta yoğunluğunu inceleyeceğiz. Daha sonra [2] de belirtildiği gibi izafe sisteminde noktaların nokta yoğunluğu sıfır olan özel durum incelenecektir:

Hareketli koordinat sistemi ile açıklanan B_{II} hareketinde E ve E' düzlemlerinde her iki (u, v) konumu $B = B'$, $a_j = a'_j$ olmasına karşılık gelir. Buradan, X noktasının E' de

sabit olması ile E' düzleminde karşılık gelen $d_f \mathbf{x}$ sürüklenme hız vektörünü hesap edelim.

X noktasının E' düzlemine göre değişimi (6.15) denklemi yardımıyla

$$d\mathbf{x} = -d\mathbf{b}' + dx_1 \mathbf{a}_1' + x_1 d\mathbf{a}_1' + dx_2 \mathbf{a}_2' + x_2 d\mathbf{a}_2'$$

bulunur. Son eşitlikte (6.12) türev denklemleri yerine yazılırsa

$$d\mathbf{x} = (dx_1 - \sigma_1' - x_2 \tau') \mathbf{a}_1' + (dx_2 - \sigma_2' + x_1 \tau') \mathbf{a}_2'$$

elde edilir. Buradan X noktası E' 'de sabit alındığından (6.14) şartları altında sürüklenme hız vektörü

$$d_f \mathbf{x} = (\sigma_1 - \sigma_1') - x_2(\tau' - \tau) \mathbf{a}_1 + (\sigma_2 - \sigma_2') + x_1(\tau' - \tau) \mathbf{a}_2 \quad (6.21)$$

elde edilir. Son bağıntıda

$$\begin{cases} \eta_1 = (\sigma_1 - \sigma_1') - x_2(\tau' - \tau) \\ \eta_2 = (\sigma_2 - \sigma_2') + x_1(\tau' - \tau) \end{cases} \quad (6.22)$$

kabul edilirse

$$d_f \mathbf{x} = \eta_1 \mathbf{a}_1 + \eta_2 \mathbf{a}_2 \quad (6.23)$$

yazılabilir.

Tanım 6.1

Bir X noktasının E' düzlemindeki *yüzey elementi* veya *nokta yoğunluğu*

$$d_f x = \eta_1 \wedge \eta_2$$

alterne çarpımı ile tanımlanır.

B_{II} hareketinde E düzleminde alınan bir X noktası genel olarak E' sabit düzleminde bir yüzey elementi çizer ve bu noktaların E' düzlemindeki nokta yoğunlukları sıfırdan farklıdır. Şimdi bir t anında, yani belirli bir (u, v) konumunda E' düzlemindeki nokta yoğunlukları sıfır olan X noktalarını inceleyelim. Böyle noktalar B_{II} 'de t anında eğri

elementi (yay elementi veya yüzey elementi değil) çizerler. Yani 1-parametrelili hareketlerde olduğu gibi hareket ederler.

B_{II} 'den elde edilen bir B_I hareketinin P dönme polünün koordinatları $d_f \mathbf{x} = 0$ için (6.21) denkleminde

$$\begin{cases} x_1 = p_1 = \frac{\sigma_2' - \sigma_2}{\tau' - \tau} \\ x_2 = p_2 = -\frac{\sigma_1' - \sigma_1}{\tau' - \tau} \end{cases} \quad (6.24)$$

bulunur. Burada $\sigma_i, \sigma_i', \tau, \tau'$ Pfaff formları iki u, v değişkenlerine bağlı oldukları için genel olarak (6.24) bağıntısı

$$p_1 = \frac{A(u, v)du + B(u, v)dv}{C(u, v)du + D(u, v)dv}$$

şeklinde yazılabilir. B_{II} 'den elde edilen bir B_I hareketi için u, v sabitler ve $\frac{dv}{du} = \mu$ değişken kabul edildiğinden son eşitlik

$$p_1 = \frac{A + B\mu}{C + D\mu}$$

şeklinde düzenlenebilir. p_2 için de benzer bir ifade elde edilir.

p_1 ve p_2 'nin bu ifadelerinden bir P polünün E ve E' düzlemlerinde birer doğru, yani kutup eksenlerini çizdiği görülür. O halde tekrar Teorem 6.1 elde edebiliriz.

X noktasının E' düzlemindeki nokta yoğunluğu, Tanım 6.1 gereğince (6.22) ifadeleri kullanılarak

$$\eta_1 \wedge \eta_2 = \left[-(\sigma_1' - \sigma_1) - x_2(\tau' - \tau) \right] \wedge \left[-(\sigma_2' - \sigma_2) + x_1(\tau' - \tau) \right]$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \eta_1 \wedge \eta_2 = & -x_1(\sigma_1' - \sigma_1) \wedge (\tau' - \tau) + x_2(\tau' - \tau) \wedge (\sigma_2' - \sigma_2) \\ & + (\sigma_1' - \sigma_1) \wedge (\sigma_2' - \sigma_2) - x_1 x_2 (\tau' - \tau) \wedge (\tau' - \tau) \end{aligned}$$

elde edilir. Alterne çarpımın tanımından son eşitlik

$$\eta_1 \wedge \eta_2 = -x_1(\sigma'_1 - \sigma_1) \wedge (\tau' - \tau) - x_2(\sigma'_2 - \sigma_2) \wedge (\tau' - \tau) + (\sigma'_1 - \sigma_1) \wedge (\sigma'_2 - \sigma_2) \quad (6.25)$$

şeklinde düzenlenebilir.

Buradan, E' düzleminde nokta yoğunluğu sıfır olan X noktaları için $\eta_1 \wedge \eta_2 = 0$ olmak üzere

$$-x_1(\sigma'_1 - \sigma_1) \wedge (\tau' - \tau) - x_2(\sigma'_2 - \sigma_2) \wedge (\tau' - \tau) + (\sigma'_1 - \sigma_1) \wedge (\sigma'_2 - \sigma_2) = 0 \quad (6.26)$$

yazılabilir. Son eşitliğin sağlanabilmesi için $(\sigma'_1 - \sigma_1), (\sigma'_2 - \sigma_2), (\tau' - \tau)$ Pfaff formlarının lineer bağımlı veya $(\tau' - \tau) = 0$ olması gerekir.

i) $(\sigma'_1 - \sigma_1), (\sigma'_2 - \sigma_2), (\tau' - \tau)$ Pfaff formları lineer bağımlı ise (6.24) eşitliklerine göre aynı P polü B_{II} 'nin (u, v) konumlu bütün B_I 'lerine aittir. Yani bir kutup eksenini mevcut değildir.

ii) $(\tau' - \tau) = 0$ ise, genel olarak sonsuz uzak poler bulunur.

Bu iki durum gösteriyor ki (6.26) denklemi (u, v) konumu için B_{II} hareketinin kutup eksenleri ile ilişkilidir.

Özel Durum 6.1

Burada izafe sistemini özel olarak $B, \mathbf{a}_1$ eksenini kutup eksenini üzerinde olacak şekilde seçerek bir noktanın E' düzlemindeki nokta yoğunluğunu inceleyelim [2]:

$B, \mathbf{a}_1$ eksenini kutup eksenini üzerinde kabul edilmesi ile (6.24) eşitliklerinde $p_2 = 0$ olacağından

$$\sigma_1 = \sigma'_1 = \sigma \quad (6.27)$$

yazılabilir. Bu ifade (6.21) denkleminde yerine yazılırsa

$$d_f \mathbf{x} = -x_2(\tau' - \tau) \mathbf{a}_1 + (\sigma_2 - \sigma'_2) + x_1(\tau' - \tau) \mathbf{a}_2 \quad (6.28)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \eta_1 = -x_2 (\tau' - \tau) \\ \eta_2 = (\sigma_2' - \sigma_2) + x_1 (\tau' - \tau) \end{cases} \quad (6.29)$$

yazılabilir. Tanım 6.1'den X noktasının E' düzlemindeki nokta yoğunluğu

$$d_f X = \eta_1 \wedge \eta_2 = -x_2 (\sigma_2' - \sigma_2) \wedge (\tau' - \tau) \quad (6.30)$$

elde edilir. Eğer

$$(\sigma_2' - \sigma_2) \wedge (\tau' - \tau) \neq 0$$

ise $d_f X$ yüzey elementi yalnız $x_2 = 0$ olan X noktaları için sıfırdır. Bu noktalar B_{II} hareketinin kutup ekseninde bulunurlar.

Eğer

$$(\sigma_2' - \sigma_2) \wedge (\tau' - \tau) = 0$$

ise şu iki netice ortaya çıkar:

i) $(\sigma_2' - \sigma_2)$ ve $(\tau' - \tau)$ formları lineer bağımlı ise (6.24) eşitliklerine göre aynı P polü B_{II}' nin (u, v) konumlu bütün B_I' lerine aittir.

ii) $(\tau' - \tau) = 0$ ise, genel olarak sonsuz uzak poller bulunur.

O halde aşağıdaki teorem ispatsız verilebilir:

Teorem 6.4

Bir B_{II} hareketinde kutup eksenlerinin geometrik yeri *eğri çizici* noktalardır. Ayrıca her bir nokta (u, v) anında yüzey elementi değil, bir eğri elementi çizer [1], [2].

6.4 Kutup Eksenleri Dönüşümünün Yoğunluğu

Burada [1] de ifade edildiği gibi doğru yoğunluğunu inceleyeceğiz ve [1] ve [2] ye göre özel durumunu vereceğiz:

Bir B_{II} hareketinden elde edilen B_I hareketinin P, P' pol noktalarının dp, dp' değişimlerine bakalım.

(6.4) ve (6.5) eşitliklerinden

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\theta} = \frac{d\mathbf{u}}{d\theta} - i \frac{d^2\mathbf{u}}{d\theta^2} \quad (6.31)$$

ve

$$\frac{d\mathbf{p}'}{d\theta} = e^{i\theta} \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\theta} - i \frac{d^2\mathbf{u}}{d\theta^2} \right) = e^{i\theta} \frac{d\mathbf{p}}{d\theta} \quad (6.32)$$

elde edilir. Burada

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\theta} = \mathbf{u}_\theta + \mathbf{u}_\lambda \frac{d\lambda}{d\theta}$$

ve

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\theta^2} = \mathbf{u}_{\theta\theta} + 2\mathbf{u}_{\theta\lambda} \frac{d\lambda}{d\theta} + \mathbf{u}_{\lambda\lambda} \left(\frac{d\lambda}{d\theta} \right)^2 + \mathbf{u}_\lambda \frac{d^2\lambda}{d\theta^2}$$

değerleri (6.31) denkleminde yerlerine yazılırsa genel olarak

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\theta} = -i\mathbf{u}_\lambda r e^{i\alpha}$$

bulunur. $\mathbf{v} = -i\mathbf{u}_\lambda$ alınırsa

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\theta} = \mathbf{v} r e^{i\alpha} \quad (6.33)$$

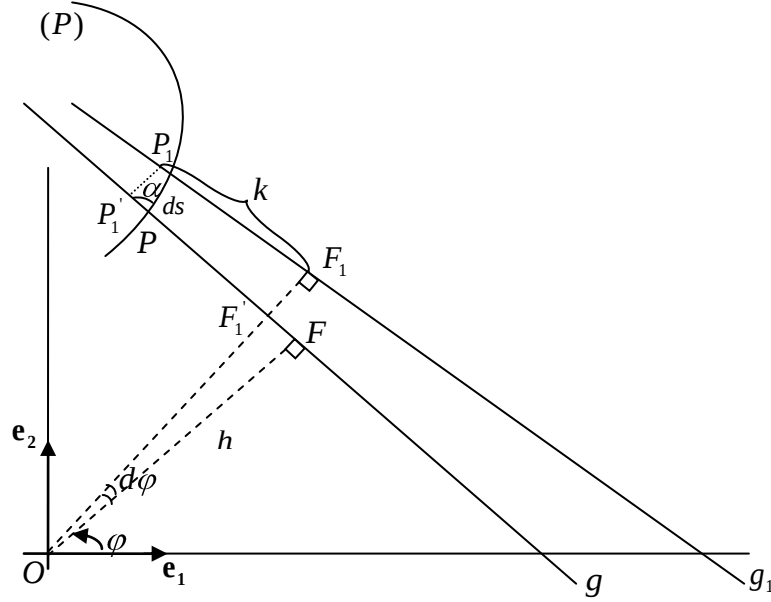
ve (6.32), (6.9) eşitliklerinden

$$\frac{d\mathbf{p}'}{d\theta} = \mathbf{v} e^{i\theta} r e^{i\alpha} = \mathbf{v}' r e^{i\alpha} \quad (6.34)$$

elde edilir.

Teorem 6.4 gereğince bir t anında kutup eksenleri üzerinde alınan noktalar, 1-parametrelili hareketlerde olduğu gibi hareket ederler. Dolayısıyla bu noktalar B_I

hareketinin P ve P' pol yörüngelerini çizerler. Buradan dp ve dp' vektörel yörünge elementleri ile ilgili olarak pol yörüngelerinin ds ve ds' yay uzunluklarının eşit ve g ve g' eksenleri ile yaptıkları açının aynı olduğu söylenebilir.



Şekil 6. 1 E düzleminde kutup eksenleri ve pol yörüngesi

B_{II} hareketi bir t anında g doğrusuna ve t_1 anında g_1 doğrusuna sahip olsun(Şekil 6.1). Buradan g doğrusunun denklemi için

$$x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi = h \quad (6.35)$$

yazılabilir. g doğrusunda F dikme ayağı ile P pol noktası arasındaki uzaklığı k ile gösterelim. Benzer şekilde, k değeri g_1 doğrusunda F_1 ile P_1 noktası arasındaki uzaklığa eşittir. Buradan, Şekil 6.1'e göre

$$\overline{F_1 P_1} = \overline{F_1 P_1'}$$

yazılabilir.

$$\overline{FF_1'} = h d\varphi \quad \text{ve} \quad \overline{PP_1'} = ds \cos \alpha$$

olmak üzere dikme ayakları ile pol noktaları arasındaki değişim için

$$dk = ds \cos \alpha - h d\varphi \quad (6.36)$$

yazılabilir.

Benzer şekilde E' düzleminde tespit edilen g' ve g_1' değerleri esas alınarak

$$dk' = ds' \cos \alpha' - h' d\varphi' \quad (6.37)$$

bulunur.

Hareketimiz kapalı hareket olduğu için bir $0, T$ anında

$$\oint dk = 0 \quad \text{ve} \quad \oint dk' = 0$$

yazılabilir. Buradan (6.36) ve (6.37) eşitlikleri için

$$\begin{cases} \oint ds \cos \alpha = \oint h d\varphi \\ \oint ds' \cos \alpha' = \oint h' d\varphi' \end{cases}$$

elde edilir. Burada $ds = ds'$ ve $\alpha = \alpha'$ olduğundan son ifadeden

$$\oint h d\varphi = \oint h' d\varphi' \quad (6.38)$$

bulunur. Bölüm 3'de ifade edildiği üzere Cauchy-çevre formülü (3.13) denkleminde

$$L = \oint h d\varphi$$

olduğundan (6.38) eşitliği; E ve E' düzlemlerinde g ve g' kutup eksenlerine ait zarf eğrilerinin çevre uzunluklarının aynı olduğunu ifade eder. (6.38) koşulu bütün kapalı B_I hareketleri için geçerlidir.

Tanım 6.2

Bir B_{II} hareketinin *doğru yoğunluğu*

$$dg = dh \wedge d\varphi \quad (6.39)$$

olarak tanımlanır. Bu bağıntı ile M.W.CROFTON (1826/1915) 1868'de doğru yoğunluğunun değişmezliğini ortaya atmıştır.

O halde (6.38) eşitliği dikkate alınarak B_{II} hareketinin yoğunluğu için

$$dh \wedge d\varphi = dh' \wedge d\varphi' \quad (6.40)$$

yazılabilir.

Buradan aşağıdaki teorem yazılabilir:

6.5 Teorem

Bir B_{II} hareketinde E düzlemindeki g kutup ekseninin yoğunluğu E' düzlemindeki g' kutup ekseninin yoğunluğuna eşittir [1].

Özel Durum 6.2

Şimdi özel olarak kutup eksenlerinin yoğunluk değişmezliğini izafe sistemi yardımıyla ispat edelim [1], [2]:

Keyfi alınan $B; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ izafe sistemi $B, \mathbf{a}_1$ eksenini daima kutup eksenini üzerinde bulunacak, yani $x_2 = 0$ olacak şekilde seçelim. O halde (6.24) bağıntılarına göre $p_2 = 0$ kabul edildiğinden

$$\sigma_1 = \sigma'_1 = \sigma \quad (6.41)$$

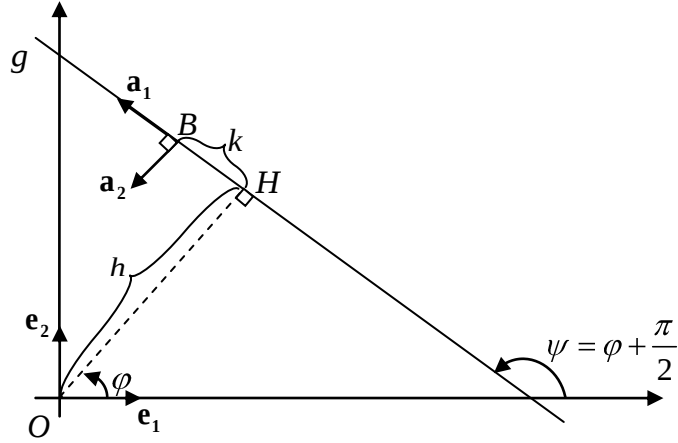
yazılabilir. Buradan

$$d\sigma_1 = d\sigma'_1 \quad (6.42)$$

olduğundan (6.17) ve (6.18) integrallenebilme şartlarından

$$\sigma_2 \wedge \tau = \sigma'_2 \wedge \tau' \quad (6.43)$$

elde edilir.



Şekil 6.2 E düzleminde g kutup ekseni ve izafe sistemi

g kutup ekseni E düzleminde bir doğru olduğundan $O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ koordinat sisteminde g 'nin denklemi

$$x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi = h$$

olarak yazılabilir.

Şekil 6.2'den

$$\mathbf{b} = \mathbf{BO} = \mathbf{BH} - \mathbf{OH}$$

veya

$$\mathbf{b} = -k\mathbf{a}_1 + h\mathbf{a}_2 \quad (6.44)$$

yazılabilir. Son eşitliğin değişimi alınarak (6.11) denklemlerine göre

$$d\mathbf{b} = \sigma_1 \mathbf{a}_1 + \sigma_2 \mathbf{a}_2 = (-dk - h\tau)\mathbf{a}_1 + (dh - k\tau)\mathbf{a}_2 \quad (6.45)$$

bulunur ve buradan

$$\begin{cases} \sigma_1 = -dk - h\tau \\ \sigma_2 = dh - k\tau \end{cases} \quad (6.46)$$

elde edilir.

Burada τ , $\mathbf{e}_1$ ile $\mathbf{a}_1$ arasındaki açının değişimi kabul edildiğinden $\tau = d\psi$ alınmıştı.

$$\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

olduğundan

$$\tau = d\varphi \quad (6.47)$$

yazılabilir.

Kutup eksenlerinin yoğunluğu Tanım 6.2'de

$$dg = dh \wedge d\varphi$$

denklemleri ile verildiğinden (6.46) eşitliği kullanılarak

$$dg = (\sigma_2 + k\tau) \wedge \tau$$

yazılabilir. Burada $\tau \wedge \tau = 0$ olduğundan

$$dg = \sigma_2 \wedge \tau \quad (6.48)$$

elde edilir.

Aynı şekilde E' düzleminde g' kutup ekseninin yoğunluğu için

$$dg' = dh' \wedge d\varphi'$$

yazılabilir ve benzer işlemler ile

$$dg' = \sigma_2' \wedge \tau' \quad (6.49)$$

bulunur.

(6.48) ve (6.49) bağıntıları (6.43) eşitliği ile karşılaştırılırsa

$$dg = dg' \quad (6.50)$$

elde edilir.

Böylelikle Teorem 6.5 izafe sistemi yardımıyla ispat edilmiş olur.

6.5 Kutup Eksenleri Yoğunluğu Sıfır Olan Hareketler

[1] ve [2] de ifade edildiği gibi bir B_{II} hareketine bağlı olarak yoğunluğu değiştirmeyen kutup eksenleri dönüşümünde E ve E' düzlemlerindeki g ve g' kutup eksenlerinin yoğunluklarının daima sıfırdan farklı olduğu kabul edilir.

Şimdi g ve g' kutup eksenlerinin yoğunluklarının sıfır olması durumunda B_{II} hareketini inceleyelim:

Tanım 6.2'den kutup eksenlerinin yoğunlukları

$$dg = dh \wedge d\varphi = 0$$

ve

$$dg' = dh' \wedge d\varphi' = 0$$

olsun. Buradan, Teorem 2.4 gereğince dh ve $d\varphi$ ile dh' ve $d\varphi'$ lineer bağımlıdır denir. Böylelikle

$$f(\varphi, h) dh + g(\varphi, h) d\varphi = 0$$

yazılabileceğinden h, φ 'nin bu diferensiyel denklemi sağlayan bir fonksiyonu olarak

$$h = h(\varphi)$$

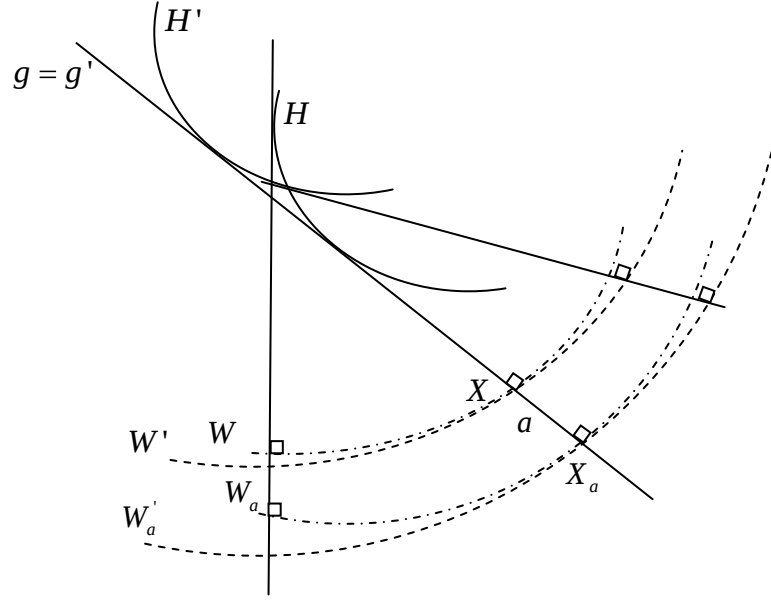
şeklinde ifade edilebilir. Benzer şekilde

$$h' = h'(\varphi')$$

yazılabilir.

Bu şekilde $h(\varphi)$ ve $h'(\varphi')$ fonksiyonları ile E ve E' düzlemlerinde g ve g' doğrularının birer 1-parametrelili ailesi tarif edilir. Bu doğruların zarflarını H ve H' ile gösterelim. E düzlemindeki doğru ailesine ortogonal bir eğri W olsun. Bu takdirde W eğrisine HUYGENS tarafından H nin evolventi denir. W nun g doğrusu ile kesim noktası X ile gösterilsin.

Buradan, B_{II} hareketinden 1-parametrel B_I hareketini seçelim. B_I hareketine ait P polü g kutup ekseninde bulunur (Teorem 6.1). Aynı zamanda B_I hareketinde E düzlemine ait W eğrisi, E' düzleminde bir W' zarfına sahiptir. P polünden W eğrisine çizilen normal, W ve W' eğrilerinin ani değme noktasından geçeceğinden, bu nokta X noktasıdır (Teorem 3.7).



Şekil 6.3 g, g' doğrularının zarf eğrileri ve evolventleri

E' sabit düzlemini ele alırsak g' kutup eksen W' zarf eğrisini dik keser. Böylelikle W' de E' düzleminde g' eksen ailesine ortogonal bir eğridir ve H' eğrisinin bir evolventidir. O halde W' zarf eğrisi B_{II} den elde edilen B_I hareketine bağlı değildir.

Buna bağlı olarak şu teorem verilebilir:

Teorem 6.6

Kutup eksen yoğunluğu sıfır olan bir B_{II} hareketi, E düzleminin bir W eğrisine daima E' düzleminin bir W' eğrisinin değmesi ile tarif edilir [1], [2].

Şimdi tersine, önceden verilmiş h, φ, h', φ' fonksiyonları ile B_{II} hareketini ve kutup eksen yoğunluğunun sıfır olmasını ifade edelim:

$h = h(\varphi)$ ve $h' = h'(\varphi')$ fonksiyonları ile E ve E' düzlemlerinde bir parametrelili birer doğru ailesi tespit edilir. Bu doğru aileleri genel olarak H ve H' zarflarına sahiptir. Bu eğrilerin herhangi iki W ve W' evolventi, yani bu iki doğru ailesinin herhangi iki ortogonal yörüngesi alınsın. W eğrisinin bulunduğu E düzlemi, W daima E' düzleminin W' eğrisine değecek şekilde hareket ettiriliyor. Bu şekilde W ve W' eğrilerinin noktaları birbirine tekabül etmeyip, sadece her iki eğrinin değme noktası W ve W' nun herhangi birer noktasıdır. Böylelikle elde edilen hareket 2-parametrelidir.

$h = h(\varphi)$ ve $h' = h'(\varphi')$ olduğundan dolayı

$$dh = \dot{h}d\varphi \quad \text{ve} \quad dh' = \dot{h}'d\varphi'$$

yazılabilir. Buradan dh ve $d\varphi$ ile dh' ve $d\varphi'$ lineer bağımlıdır. O takdirde

$$dg = dh \wedge d\varphi = 0 \quad \text{ve} \quad dg' = dh' \wedge d\varphi' = 0$$

elde edilir (Teorem 2.4).

Buradan elde edilen B_{II} hareketi için sıfır yoğunluklu önceden verilen eksen dönüşümüne sahiptir denir.

Ayrıca W, W' eğrileri yerine H, H' zarf eğrilerinin W ve W' den aynı a uzaklığında olan W_a, W'_a gibi farklı evolventleri alınırsa, yine aynı B_{II} hareketi elde edilir.

Aynı zamanda H zarfının bir W evolventi H' zarfının sonsuz tane farklı W' evolventi ile birlikte her defa B_{II} hareketi belirttiği için B_{II} nin 1-parametrelili bir ailesi $h = h(\varphi)$, $h' = h'(\varphi')$ fonksiyonlarına aittir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 6.7

E ve E' düzlemlerinde bir parametrelili iki doğru ailesi önceden verilmişse, bu ailelere B_{II} hareketinin 1-parametrelili bir ailesi aittir. Bu B_{II} hareketleri E düzleminin doğru

ailesinin ortogonal yörüngelerinin E' düzleminin doğru ailesinin ortogonal yörüngelerine değmesiyle karakterize edilir [1], [2].

Ayrıca B_{II} hareketi şu şekilde de açıklanabilir:

E hareketli düzleminde bir H eğrisi $g = g'$ kutup eksenini üzerinde kaymaksızın yuvarlanır. Benzer şekilde E' sabit düzleminde de bir H' eğrisi kutup eksenini üzerinde kaymaksızın yuvarlanır. Bu şekilde birbirinden bağımsız iki yuvarlanma hareketi görülür. B_{II} nin böyle iki harekete parçalanabilmesinden dolayı *parçalanabilen* B_{II} hareketinden bahsedilebilir. Dolayısıyla aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 6.8

Kutup eksen yoğunluğu sıfır olan bir B_{II} hareketi birbirinden bağımsız 1-parametrelili iki harekete parçalanabilir. Bu esnada $g = g'$ kutup eksenleri E düzleminde H zarfı ve E' düzleminde de H' zarfı üzerinde kaymaksızın yuvarlanır [1], [2].

6.6 Önceden Verilen Kutup Eksenleri Dönüşümü ve Hareket Arasındaki İlişki

[1] ve [2] de ifade edildiği gibi B_{II} hareketiyle kutup eksenlerinin $g \leftrightarrow g'$ gibi yoğunlukları değiştirmeyen bir doğru dönüşümüne bağlı olduğunu biliyoruz. O halde E ve E' düzlemleri bu yoğunluğu değiştirmeyen doğrular dönüşümü ile birbirine dönüşürler.

Şimdi tersine, E ve E' düzlemleri arasında böyle yoğunluğu değiştirmeyen doğrular dönüşümü kabulü altında B_{II} 2-parametrelili hareketin nasıl olduğunu inceleyelim:

E düzleminde $O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ koordinat sistemi ile g doğrusunun denklemi

$$x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi = h$$

yazılabilir ve buna uygun olarak E' düzleminde $O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ koordinat sistemi ile g' doğrusunun denklemi için

$$x'_1 \cos \varphi' + x'_2 \sin \varphi' = h'$$

yazılabilir.

Bölüm 6.4’de doğru yoğunlukları $\varphi(u, v), h(u, v); \varphi'(u, v), h'(u, v)$ fonksiyonlarıyla birlikte

$$dg = dh \wedge d\varphi = dh' \wedge d\varphi' = dg' \quad (6.51)$$

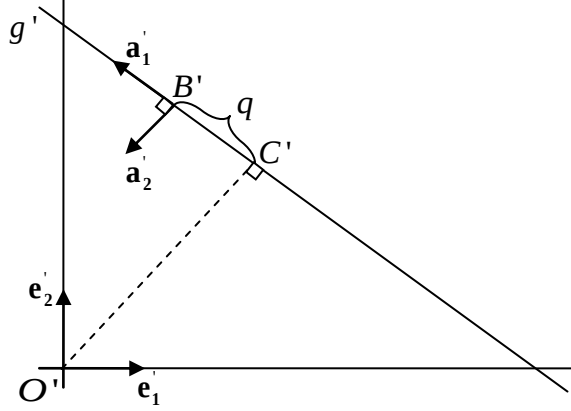
olarak tanımlanmıştı.

İzafe sisteminde E ve E' düzlemlerinde hareketli $B; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ve $B'; \mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$ koordinat sistemleri ele alalım. E düzleminde $B, \mathbf{a}_1$ eksenini g doğrusu üzerinde ve E' düzleminde $B', \mathbf{a}'_1$ eksenini g' doğrusu üzerinde seçilsin.

(6.11), (6.12) türev denklemleri ile (6.17), (6.18) integrallenebilme şartları hala mevcuttur. $dg = dg'$ alındığından (6.43) bağıntısı veya

$$d\sigma_1 = d\sigma'_1 \quad (6.52)$$

yazılabilir.



Şekil 6. 4 E' düzleminde izafe sistemiyle hareket

E' düzleminde g' doğrusu boyunca $B'; \mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$ koordinat sisteminin hareket etmesiyle bir C' noktasına ulaştığını varsayalım ve bu noktada $C'; \mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$ sistemini ele alalım. Şekil 6.4 'e göre

$$\mathbf{c}' = \mathbf{C}'\mathbf{O}' = \mathbf{B}'\mathbf{O}' + \mathbf{C}'\mathbf{B}'$$

veya

$$\mathbf{c}' = \mathbf{b}' + q\mathbf{a}_1' \quad (6.53)$$

yazılabilir.

g ve g' kutup eksenleri ile E nin E' düzlemine göre 2-parametrelili hareketi elde edilir. Bu hareket Bölüm 6.2'de belirtilen hareket sistemi ile açıklanır. Yani, E düzleminin E' düzlemindeki hareketi, her defa $B = C; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ve $C'; \mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2'$ eksen sistemlerinin $C = C'$, $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j'$ olmasıyla meydana gelir.

Buradan (6.12) türev denklemlerine benzer olarak C' noktasının E' düzlemine göre değişimi

$$d\mathbf{c}' = w_1'\mathbf{a}_1' + w_2'\mathbf{a}_2' \quad (6.54)$$

ile verilebilir. (6.53) eşitliğinde C' noktasının değişimi

$$d\mathbf{c}' = d\mathbf{b}' + dq\mathbf{a}_1' + qd\mathbf{a}_1' \quad (6.55)$$

elde edilir. Son eşitlikte (6.12) denklemleri yerlerine yazılırsa

$$d\mathbf{c}' = (\sigma_1' + dq)\mathbf{a}_1' + (\sigma_2' + q\tau')\mathbf{a}_2' \quad (6.56)$$

bulunur. (6.54) ve (6.56) eşitliklerinden

$$w_1'\mathbf{a}_1' + w_2'\mathbf{a}_2' = (\sigma_1' + dq)\mathbf{a}_1' + (\sigma_2' + q\tau')\mathbf{a}_2'$$

veya

$$\begin{cases} w_1' = \sigma_1' + dq \\ w_2' = \sigma_2' + q\tau' \end{cases} \quad (6.57)$$

elde edilir.

B_{II} hareketinde $g = B, \mathbf{a}_1$ ve $g' = C', \mathbf{a}_1'$ eksenleri alındığından (6.41) eşitliğine göre

$$\sigma_1 = w_1'$$

yazılabilir. Son ifade yardımıyla (6.57) bağıntısından

$$dq = \sigma_1 - \sigma_1' \quad (6.58)$$

elde edilir. Bu diferensiyel denkleminde q doğru parçasının tayini, integrallenebilme şartları sağlandığı için daima mümkündür. (6.58) denkleminde

$$d(dq) = d\sigma_1 - d\sigma_1'$$

yazılabilir. (6.52) eşitliğinden son ifade de

$$d(dq) = 0 \quad (6.59)$$

sonucu elde edilir. Böylece dq bir tam diferansiyeldir ve q integrasyonla bulunabilir:

(6.58) denkleminde

$$q = \int (\sigma_1 - \sigma_1') \quad (6.60)$$

yazılabilir. σ_i ve σ_i' iki değişkenli Pfaff formu olduğundan ikisinin farkı genel olarak

$$\sigma_1 - \sigma_1' = A(u, v)du + B(u, v)dv$$

yazılabilir. Bu son eşitlik (6.58) denkleminde yerine yazılırsa dq tam diferansiyeli

$$dq = A(u, v)du + B(u, v)dv$$

veya

$$\frac{\partial q}{\partial u} du + \frac{\partial q}{\partial v} dv = A(u, v)du + B(u, v)dv$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{\partial q(u, v)}{\partial u} = A(u, v)$$

ve

$$\frac{\partial q(u, v)}{\partial v} = B(u, v)$$

yazılabilir. Birinci eşitlikte v sabit tutulup u değişkenine göre integral alınırsa

$$q = \int^u A(u, v) du + c(v)$$

bulunur. Burada $c(v)$ integral sabitidir. O halde q doğru parçasının tayini daima keyfi bir parametre farkıyla mümkündür.

Buradan aşağıdaki teoremin ispatı elde edilmiş olur:

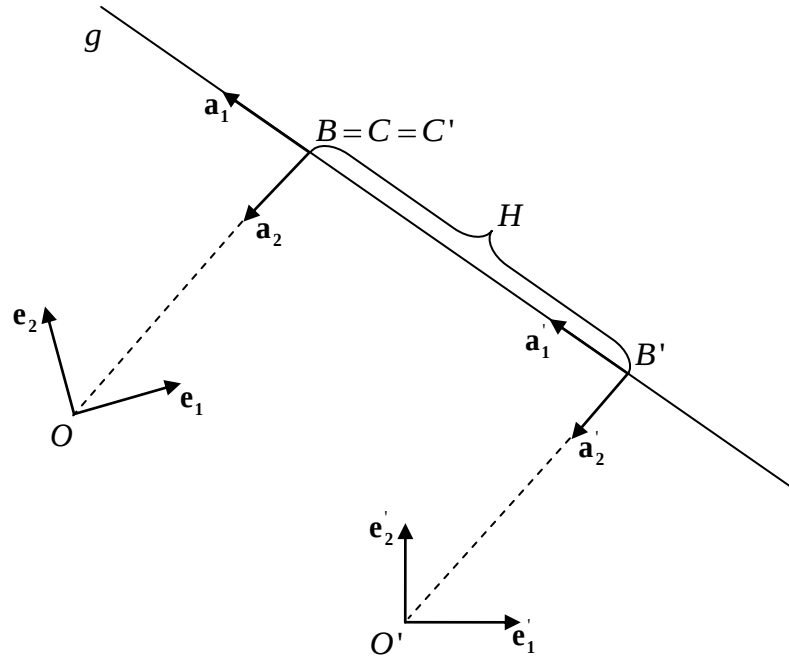
Teorem 6.9

E ve E' düzlemlerinin yoğunluğu değiştirmeyen bir $g \leftrightarrow g'$ doğru dönüşümü ile E düzleminin E' düzlemine göre (ve tersi) 2-parametrelili hareketlerinin 1-parametrelili bir ailesi belirtilir. Ortak eksen dönüşümlü iki hareket birbirine paraleldir denir [1], [2].

6.7 B_{II} Hareketinin Destek Fonksiyonu

[1] de ifade edildiği şekilde izafe sistemi yardımıyla bir B_{II} hareketinin destek fonksiyonunu tanımlayalım:

E düzleminde, O başlangıç noktasından g doğrusuna çizilen dikme $B=C$ noktası olsun. Benzer şekilde E' düzleminde, O' başlangıç noktasından g' doğrusuna çizilen dikme ayağı B' noktası olsun (Şekil 6.5).



Şekil 6. 5 B_{II} hareketinin destek fonksiyonu

Şekil 6.2'ye göre $k = 0$ olduğundan (6.44) denklemi

$$\mathbf{b} = \mathbf{BO} = h\mathbf{a}_2 \quad (6.61)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan (6.46) sistemi yerine de

$$\begin{cases} \sigma_1 = -h\tau \\ \sigma_2 = dh \end{cases} \quad (6.62)$$

yazılabilir. Buna bağlı olarak E' düzlemi için de

$$\begin{cases} \sigma'_1 = -h'\tau' \\ \sigma'_2 = dh' \end{cases} \quad (6.63)$$

elde edilir.

Burada Bölüm 6.6'da belirlenen q kayma rotasının özel bir durumu tanımlanır. Bunun için $B'; \mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$ eksen sistemi benzer şekilde $C'; \mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$ sistemine kaydırılır. $|BB'| = H$ olmak üzere (6.60) eşitliğinde (6.62) ve (6.63) değerleri yerlerine yazılırsa

$$H = \int(-h\tau + h'\tau') = \int(-hd\varphi + h'd\varphi') \quad (6.64)$$

yazılabilir.

Buradan itibaren

$$\tau \wedge \tau' \neq 0 \quad (6.65)$$

alınarak harekete bir sınırlama getirilir. Bu kabul ile $\tau = d\varphi$ ve $\tau' = d\varphi'$ için lineer bağımsızdır denir. O halde u ve v değişkenleri yerine φ ve φ' açıları bağımsız değişkenler olarak alınabilir. Böylelikle eksen düzlemimiz her iki $h(\varphi, \varphi')$ ve $h'(\varphi, \varphi')$ fonksiyonları ile gösterilebilir. Burada tek parametrelili doğru ailelerin $h(\varphi, \varphi')$ destek fonksiyonu, $\varphi' = \text{sabit}$ alınmasıyla tespit edilir. Benzer şekilde $h'(\varphi, \varphi')$ destek fonksiyonu da φ' 'nin sabit tutulmasıyla çizilir.

(6.64) denkleminde H' 'nin φ ve φ' değişkenlerine göre türetilmesiyle

$$dH = -hd\varphi + h'd\varphi' = H_\varphi d\varphi + H_{\varphi'} d\varphi' \quad (6.66)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} H_{\varphi} = -h \\ H_{\varphi'} = h' \end{cases} \quad (6.67)$$

yazılabilir.

Burada $H(\varphi, \varphi')$ fonksiyonu B_{II} hareketinin *destek fonksiyonu* olarak adlandırılır.

Hareketin $H(\varphi, \varphi')$ fonksiyonu yardımıyla $\mathbf{c}$ ve $\mathbf{c}'$ konum vektörleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

Şekil 6.5'e göre $\mathbf{BO} = \mathbf{CO} = \mathbf{c}$ konum vektörü için

$$\mathbf{c} = h\mathbf{a}_2 \quad (6.68)$$

yazılabilir. Buradan $\mathbf{c}$ vektörünün E düzlemine göre değişimi

$$d\mathbf{c} = dh\mathbf{a}_2 + h d\mathbf{a}_2$$

veya (6.67) ve (6.11) denklemleri yardımıyla

$$d\mathbf{c} = H_{\varphi}\tau\mathbf{a}_1 - dH_{\varphi}\mathbf{a}_2 \quad (6.69)$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\mathbf{c}' = \mathbf{C}'\mathbf{O}'$ olmak üzere

$$\mathbf{c}' = \mathbf{C}'\mathbf{B}' + \mathbf{B}'\mathbf{O}'$$

veya

$$\mathbf{c}' = -H\mathbf{a}_1' + h'\mathbf{a}_2' \quad (6.70)$$

yazılabilir. Son eşitliğin E' düzlemine göre değişimi alınır

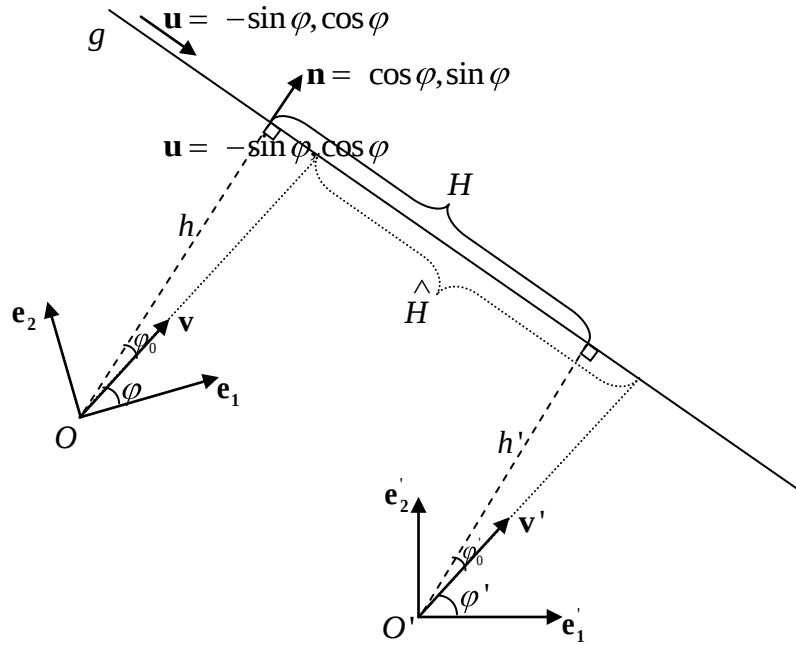
$$d\mathbf{c}' = -dH\mathbf{a}_1' - Hd\mathbf{a}_1' + dh'\mathbf{a}_2' + h'd\mathbf{a}_2'$$

bulunur. (6.64), (6.67) ve (6.12) bağıntıları yardımıyla son eşitlikten

$$d\mathbf{c}' = -(H_{\varphi}\tau + 2H_{\varphi'}\tau')\mathbf{a}_1' - (H\tau' - dH_{\varphi'})\mathbf{a}_2' \quad (6.71)$$

elde edilir.

Şimdi, E ve E' düzlemlerine bağlı $O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ve $O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ koordinat sistemlerinde alınan $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2$ ve $\mathbf{v}' = v'_1 \mathbf{e}'_1 + v'_2 \mathbf{e}'_2$ vektörlerini φ_0 ve φ'_0 açısı kadar döndürelim. Bu takdirde H fonksiyonunun nasıl değiştiğini inceleyelim:



Şekil 6. 6 Vektörlerin dönmesi ile destek fonksiyonun değişimi

H nin ne kadar kaydığını bulmak için $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{v}'$ vektörlerinin doğru üzerindeki izdüşümlerini hesap edelim:

$\mathbf{v}$ vektörünün g doğrusundaki izdüşüm uzaklığı

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle v_1, v_2, -\sin \varphi, \cos \varphi \rangle = -v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi \quad (6.72)$$

ve benzer şekilde $\mathbf{v}'$ vektörünün doğru üzerindeki izdüşüm uzaklığı

$$\langle \mathbf{v}', \mathbf{u}' \rangle = \langle v'_1, v'_2, -\sin \varphi', \cos \varphi' \rangle = -v'_1 \sin \varphi' + v'_2 \cos \varphi' \quad (6.73)$$

bulunur. O halde $\hat{H}$ kayma rotası için Şekil 6.6'ya ve (6.72), (6.73) eşitliklerine göre

$$\hat{H} = H - (-v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi) + (-v'_1 \sin \varphi' + v'_2 \cos \varphi') \quad (6.74)$$

yazılabilir. Son eşitlikten $d\hat{H}$ değişimi için

$$d\hat{H} = dH + v_1 \cos \varphi d\varphi + v_2 \sin \varphi d\varphi - v_1' \cos \varphi' d\varphi' - v_2' \sin \varphi' d\varphi' \quad (6.75)$$

elde edilir. (6.64) denklemine göre

$$dH = -h d\varphi + h' d\varphi'$$

olduğundan bu değer (6.75) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$d\hat{H} = -h - v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi d\varphi + h' - v_1' \cos \varphi' - v_2' \sin \varphi' d\varphi'$$

bulunur. Burada

$$\hat{h} = h - v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi \quad (6.76)$$

ve

$$\hat{h}' = h' - v_1' \cos \varphi' - v_2' \sin \varphi' \quad (6.77)$$

alınırsa

$$d\hat{H} = -\hat{h} d\varphi + \hat{h}' d\varphi' \quad (6.78)$$

elde edilir. Buradan

$$\hat{H} = \int \left(-\hat{h} d\varphi + \hat{h}' d\varphi' \right) \quad (6.79)$$

yazılabilir.

Ayrıca (6.76) ve (6.77) eşitliklerine göre $\hat{h}$ ve $\hat{h}'$ ifadeleri, $v = v_1, v_2$ ve $v' = v_1', v_2'$ noktalarının g, g' doğrularına uzaklığını verir. Aynı zamanda hareketli ve sabit sistemlerdeki dönme

$$\hat{\varphi} = \varphi - \varphi_0 \quad \text{ve} \quad \hat{\varphi}' = \varphi' - \varphi_0' \quad (6.80)$$

açısı kadardır.

Böylelikle E ve E' düzlemlerinde vektörlerin döndürülmesi ile B_{II} hareketinin tekrar H_{φ}, φ' destek fonksiyonu belirlenmiş oldu.

6.8 Tekrar Kutup Eksen Yoğunluğunun Sıfır Olması ile Hareket

Bölüm 6.5 de ifade edildiği gibi kutup ekseni yoğunluğu sıfır olan bir B_{II} hareketi birbirinden bağımsız 1-parametrelili iki harekete parçalanabilir (Teorem 6.8).

Şimdi [1] e göre Bölüm 6.7 'de ifade edilen H_{φ}, φ' destek fonksiyonu ile g ve g' kutup eksenlerinin yoğunluklarının sıfır olması durumunda B_{II} hareketini tekrar inceleyelim:

(6.69) ve (6.71) denklemlerinden

$$d\mathbf{c} = H_{\varphi}\tau\mathbf{a}_1 - dH_{\varphi}\mathbf{a}_2$$

ve

$$d\mathbf{c}' = -(H_{\varphi}\tau + 2H_{\varphi'}\tau')\mathbf{a}_1' - (H\tau' - dH_{\varphi'})\mathbf{a}_2'$$

olduğunu biliyoruz. Burada $\mathbf{c}$ ve $\mathbf{c}'$ konum vektörlerinin değişimi için

$$d\mathbf{c} = \sigma_1\mathbf{a}_1 + \sigma_2\mathbf{a}_2$$

ve

$$d\mathbf{c}' = \sigma_1'\mathbf{a}_1' + \sigma_2'\mathbf{a}_2'$$

yazılabilir. O halde bu eşitliklerden

$$\begin{cases} \sigma_1 = H_{\varphi}\tau \\ \sigma_2 = -dH_{\varphi} = -(H_{\varphi\varphi}\tau + H_{\varphi\varphi'}\tau') \end{cases} \quad (6.81)$$

ve

$$\begin{cases} \sigma_1' = -H_{\varphi}\tau - 2H_{\varphi'}\tau' \\ \sigma_2' = -H\tau' + dH_{\varphi'} = -H\tau' + H_{\varphi\varphi'}\tau + H_{\varphi'\varphi'}\tau' \end{cases} \quad (6.82)$$

elde edilir.

Bu son eşitlikler kullanılarak (6.48) ve (6.49) ifadelerinden

$$dg = \sigma_2 \wedge \tau = H_{\varphi\varphi'} \tau \wedge \tau'$$

ve

$$dg' = \sigma_2' \wedge \tau' = H_{\varphi\varphi'} \tau \wedge \tau'$$

bulunur. Dolayısıyla Teorem 6.5'de ifade edildiği gibi $dg = dg'$ elde edilir:

$$dg = dg' = H_{\varphi\varphi'} \tau \wedge \tau' \quad (6.83)$$

Buradan,

$$\tau \wedge \tau' \neq 0 \quad (6.84)$$

ile harekete bir sınırlama getirildiğinden, eksen yoğunluğu sıfır olan B_{II} hareketi için

$$dg = H_{\varphi\varphi'} \tau \wedge \tau' = 0$$

olmak üzere

$$H_{\varphi\varphi'} = 0 \quad (6.85)$$

olmalıdır. O halde H fonksiyonu için genel olarak

$$H = -F(\varphi) + G(\varphi') \quad (6.86)$$

yazılabilir.

E düzleminde bulunan bir kutup eksenin denklemi

$$x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi = h \quad (6.87)$$

ve benzer olarak E' düzlemindeki bir kutup eksenin denklemi

$$x_1' \cos \varphi' + x_2' \sin \varphi' = h' \quad (6.88)$$

olarak yazılabilir. Buradan (6.67) ve (6.86) eşitliklerine göre

$$\begin{cases} x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi = -H_\varphi = \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} \\ x_1' \cos \varphi' + x_2' \sin \varphi' = H_{\varphi'} = \frac{dG(\varphi')}{d\varphi'} \end{cases} \quad (6.89)$$

elde edilir. Bu son bağıntı ile H fonksiyonunun E ve E' düzlemlerinde ait olduğu eksenler kesin olarak belirlenir. Buradan parçalanabilen B_{II} hareketi şu şekilde açıklanır:

(6.89) bağıntılarında her iki tarafın integrali alınması ile

$$\begin{cases} x_1 \sin \varphi - x_2 \cos \varphi = F(\varphi) \\ x_1' \sin \varphi' - x_2' \cos \varphi' = G(\varphi') \end{cases} \quad (6.90)$$

yazılabilir. Yani $F(\varphi)$ g doğrusunun zarfı ve $G(\varphi')$ de g' doğrusunun zarfıdır. Buradan (6.86) eşitliğine göre F ve G fonksiyonları, $F+c$ ve $G+c$ olmak üzere bir c sabiti ile değiştirilebilir.

O halde $F(\varphi)$ ve $G(\varphi')$ eğrileri g ve g' kutup eksenleri üzerinde kaymaksızın yuvarlanırlar. Bu şekilde B_{II} hareketinde iki yuvarlanma hareketi görülür.

6.9 Normlanmış Koordinat sistemi

Bu bölümde [1] de ifade edildiği gibi B_{II} hareketinden elde edilen özel bir B_I hareketini inceleyeceğiz:

B_{II} 'den elde edilen bir B_I hareketleri için P dönme polü Bölüm 6.3'de

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\sigma_2' - \sigma_2}{\tau' - \tau} \\ p_2 = -\frac{\sigma_1' - \sigma_1}{\tau' - \tau} \end{cases} \quad (6.91)$$

olarak bulunmuştu.

B_{II} hareketinin herhangi bir anına ait $Esas-B_I$ hareketi, ayna resimli (tespit edilen eksene göre simetrik) pol eğrilerinin simetrik yuvarlanmasıyla meydana gelir ve bu hareket

$$\tau + \tau' = 0 \quad (6.92)$$

eşitliği ile karakterize edilir. Esas- B_I hareketi ile meydana gelen Q dönme polüne B_{II} hareketinin *Esas-polü* denir.

Buradan,

$$\tau \wedge \tau' \neq 0 \quad (6.93)$$

kabulü altında Q Esas-polünün koordinatları Teorem 2.5'e göre şu şekilde bulunur:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\sigma'_2 - \sigma_2 \wedge \tau + \tau'}{\tau' - \tau \wedge \tau + \tau'} \\ q_2 = -\frac{\sigma'_1 - \sigma_1 \wedge \tau + \tau'}{\tau' - \tau \wedge \tau + \tau'} \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} q_1 = -\frac{\sigma'_2 - \sigma_2 \wedge \tau + \tau'}{2 \tau \wedge \tau'} \\ q_2 = \frac{\sigma'_1 - \sigma_1 \wedge \tau + \tau'}{2 \tau \wedge \tau'} \end{cases} \quad (6.94)$$

elde edilir.

(6.93) kabulü altında $B; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ve $B'; \mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$ eksen sistemleri normlanabilir:

i) B ve B' başlangıçları Esas-pol olarak

ii) $B, \mathbf{a}_1$ ve $B', \mathbf{a}'_1$ eksenleri B_{II} 'nin g ve g' kutup eksenleri üzerinde bulunacak şekilde seçilir [1], [2]. Buradan,

$$q_1 = q_2 = 0$$

yazılabilir. (6.94) bağıntılarından $q_2 = 0$ için

$$\sigma_1 = \sigma'_1 = \sigma \quad (6.95)$$

elde edilir. $q_1 = 0$ için

$$\sigma_2' - \sigma_2 \wedge \tau + \tau' = 0$$

olmalıdır. Son eşitlikten

$$\sigma_2' \wedge \tau + \sigma_2' \wedge \tau' - \sigma_2 \wedge \tau - \sigma_2 \wedge \tau' = 0$$

yazılabilir. Yoğunluğun değişmezliğini ifade eden

$$\sigma_2 \wedge \tau = \sigma_2' \wedge \tau' \quad (6.96)$$

bağıntısı ile son eşitlikten

$$\sigma_2 \wedge \tau' = \sigma_2' \wedge \tau \quad (6.97)$$

elde edilir.

Burada $\sigma, \sigma_2, \sigma_2'$ diferansiyel formları u ve v bağımsız değişkenleri ile genel olarak

$$\sigma_j = A(u, v)du + B(u, v)dv \quad (6.98)$$

şeklinde yazılabildiğini biliyoruz. (6.93) kabulü ile φ, φ' bağımsız değişkenler olarak seçilebileceğinden $\sigma, \sigma_2, \sigma_2'$ diferansiyel formları için (6.98) ifadesi yerine

$$\begin{cases} \sigma = A\tau - B\tau' \\ \sigma_2 = M\tau - N\tau' \\ \sigma_2' = M'\tau - N'\tau' \end{cases} \quad (6.99)$$

yazılabilir. Bu ifadeleri (6.96) ve (6.97) eşitliklerinde yerine yazarsak

$$(M\tau - N\tau') \wedge \tau = (M'\tau - N'\tau') \wedge \tau'$$

ve

$$(M\tau - N\tau') \wedge \tau' = (M'\tau - N'\tau') \wedge \tau$$

olmak üzere

$$M' = N, \quad M = N' \quad (6.100)$$

elde edilir.

$$\sigma = A\tau - B\tau'$$

için

$$d\sigma = d(A\tau) - d(B\tau')$$

bulunur. Teorem 2.1 'e göre

$$d\sigma = dA \wedge \tau + A d\tau - dB \wedge \tau' - B d\tau' \quad (6.101)$$

yazılabilir. Burada $A(\varphi, \varphi')$ ve $B(\varphi, \varphi')$ fonksiyonları için

$$dA = A_{\varphi} \tau + A_{\varphi'} \tau' \quad \text{ve} \quad dB = B_{\varphi} \tau + B_{\varphi'} \tau'$$

olduğundan (6.101) eşitliği (6.19) ve (6.20) ifadeleri de esas alınarak

$$d\sigma = -(A_{\varphi'} + B_{\varphi})(\tau \wedge \tau') \quad (6.102)$$

bulunur. (6.17) ifadesinden σ diferansiyel formun integrallenebilme şartı

$$d\sigma = -\sigma_2 \wedge \tau$$

olduğundan, bu eşitlikte $\sigma_2 = M\tau - N\tau'$ değeri yerine yazılırsa

$$d\sigma = -N(\tau \wedge \tau') \quad (6.103)$$

olur. Buradan (6.102) ve (6.103) eşitlikleri karşılaştırılırsa

$$N = A_{\varphi'} + B_{\varphi} \quad (6.104)$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\sigma_2 = M\tau - N\tau'$ için

$$d\sigma_2 = -(M_{\varphi'} + N_{\varphi})(\tau \wedge \tau')$$

ve (6.100) ifadeleri dikkate alınarak $\sigma_2' = N\tau - M\tau'$ için

$$d\sigma_2' = -(M_{\varphi} + N_{\varphi'})(\tau \wedge \tau')$$

elde edilir. Bu eşitlikler ile (6.17), (6.18) integrallenebilme şartlarının (6.99) bağıntılarına göre değerleri mukayese edilirse

$$B = -M_{\varphi'} - N_{\varphi} \quad (6.105)$$

ve

$$A = -M_{\varphi} - N_{\varphi'} \quad (6.106)$$

bulunur.

Şimdiye kadar elde edilen sonuçlar için aşağıdaki teoremleri verebiliriz:

Teorem 6.10

Bir B_{II} hareketinin her (u, v) konumuyla, ayna resimli pol eğrilerinin simetrik yuvarlanmasıyla meydana gelen bir $Esas-B_I$ hareketi elde edilir. Bu hareketin Q dönme polü B_{II} hareketinin incelenen durumdaki Esas-polüdür [2].

Teorem 6.11

Bir B_{II} hareketinde $Q; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ kanonik izafe sistemi, Q Esas-polünde bir başlangıç noktasına sahiptir. Dolayısıyla B_{II} hareketinde $Q; \mathbf{a}_1$ eksenini $g = g'$ kutup eksenidir [2].

Bu normlanmış izafe sistemi için (6.11) ve (6.12) denklemlerine göre

$$\begin{cases} d\mathbf{a}_1 = \tau \mathbf{a}_2, & d\mathbf{a}_2 = -\tau \mathbf{a}_1; & d\mathbf{q} = \sigma \mathbf{a}_1 + \sigma_2 \mathbf{a}_2 \\ d\mathbf{a}_1' = \tau' \mathbf{a}_2', & d\mathbf{a}_2' = -\tau' \mathbf{a}_1'; & d\mathbf{q}' = \sigma \mathbf{a}_1' + \sigma_2' \mathbf{a}_2' \end{cases} \quad (6.107)$$

türev denklemlerinin sistemi mevcuttur.

Ayrıca $\sigma = A\tau - B\tau'$ eşitliğinde (6.105) ve (6.106) değerleri yerine yazılırsa

$$\sigma = -(M_{\varphi} + N_{\varphi'})\tau + (M_{\varphi'} + N_{\varphi})\tau' \quad (6.108)$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\begin{cases} \sigma_2 = M\tau - N\tau' \\ \sigma_2' = N\tau - M\tau' \end{cases} \quad (6.109)$$

yazılabilir.

M ve N fonksiyonları için (6.105) ve (6.106) eşitliklerine göre (6.104) denkleminde

$$N + 2M_{\varphi\varphi'} + N_{\varphi\varphi} + N_{\varphi'\varphi'} = 0 \quad (6.110)$$

bulunur. M ve N ; (6.110) integrallenebilme şartını sağlamak zorundadır.

6.10 M ve N İnvaryantlarının Geometrik Önemi

[1] de ifade edildiği gibi normlanmış koordinat sisteminde verilen M ve N invaryantlarının Esas- B_I hareketindeki geometrik önemini inceleyeceğiz:

Normlanmış izafe sistemi ile E ve E' düzlemlerinin g ve g' kutup eksenlerinin üzerinde $Q; \mathbf{a}_1$, $Q; \mathbf{a}_1'$ eksenlerini almıştık. Kutup eksenlerinin yoğunlu için (6.58) ve (6.59) eşitliklerine göre

$$dg = dg' = \sigma_2 \wedge \tau = \sigma_2' \wedge \tau'$$

yazılabilir. Burada (6.109) eşitlikleri kullanılarak

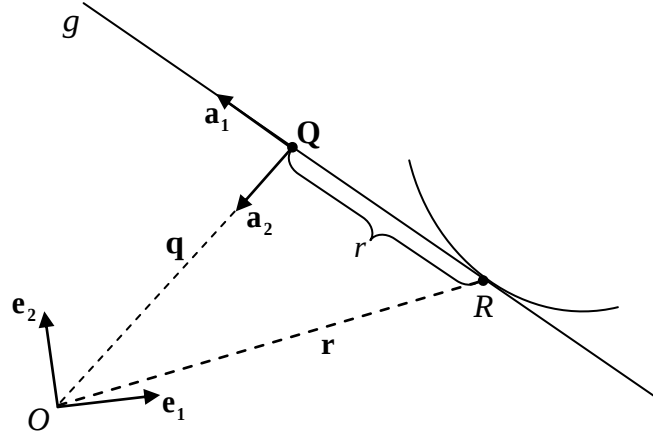
$$dg = dg' = N(\tau \wedge \tau') = N(d\varphi \wedge d\varphi') \quad (6.111)$$

elde edilir.

Bu bağıntı ile aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 6.12

B_{II} hareketi esnasında, N invaryantı E ve E' düzlemlerindeki g ve g' kutup eksenlerinin ortak yoğunluğudur [2].



Şekil 6. 7 Normlanmış izafe sistemi ile g doğrusunun zarf eğrisi

$\varphi' = \text{sabit}$ eksen ailesinde g doğrusunun zarf eğrisinin R teğet noktası ile $\varphi = \text{sabit}$ eksen ailesinin g' doğrusunda R' teğet noktası için Şekil 6.7 'a göre

$$\mathbf{OR} = \mathbf{r} = -\mathbf{q} + r\mathbf{a}_1 \quad (6.112)$$

ve benzer şekilde

$$\mathbf{O'R'} = \mathbf{r'} = -\mathbf{q'} + r'\mathbf{a'_1} \quad (6.113)$$

yazılabilir. Buradan

$$d\mathbf{r} = -d\mathbf{q} - dr\mathbf{a}_1 - r d\mathbf{a}_1$$

ve

$$d\mathbf{r'} = -d\mathbf{q'} - dr'\mathbf{a'_1} - r' d\mathbf{a'_1}$$

olmak üzere (6.107) türev denklemleri yardımıyla

$$d\mathbf{r} = -(\sigma + dr)\mathbf{a}_1 - (\sigma_2 + r\tau)\mathbf{a}_2 \quad (6.114)$$

ve

$$d\mathbf{r'} = -(\sigma + dr')\mathbf{a'_1} - (\sigma'_2 + r'\tau')\mathbf{a'_2} \quad (6.115)$$

elde edilir.

$d\mathbf{r}$ vektörü g eksenini boyunca bulunduğundan için (6.114) eşitliğinde $\mathbf{a}_2$ 'nin katsayısı sıfır olmalıdır. Yani

$$\sigma_2 + r\tau = 0 \quad (6.116)$$

yazılabilir. $\varphi' = \text{sabit}$ olduğundan $\tau' = d\varphi' = 0$ olur ve son eşitlik $\sigma_2 = M\tau - N\tau'$ değeri için

$$M\tau + r\tau = 0$$

olur. Buradan

$$r = -M \quad (6.117)$$

elde edilir.

Benzer yöntemle dr' vektörü için $\tau = 0$ olmak üzere

$$\sigma_2' + r'\tau' = 0 \quad (6.118)$$

yazılabilir. Burada (6.109) bağıntısında σ_2' değeri yerine yazılırsa

$$r' = M \quad (6.119)$$

bulunur.

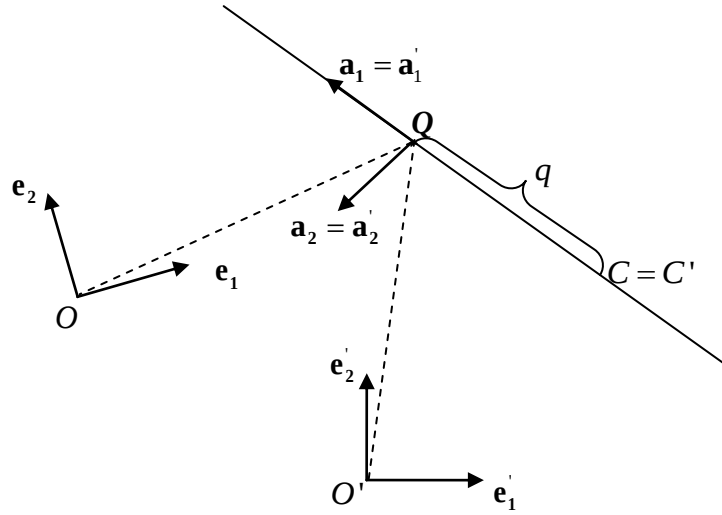
O halde aşağıdaki teorem ispatsız verilebilir:

Teorem 6.13

M invaryantı normlanmış izafe sisteminde Q Esas-polünün kutup eksenlerinin R ve R' teğet noktalarına uzaklığıdır.

6.11 M ve N İnvaryantlarının H Destek Fonksiyonu ile İfadeleri

[1] de ifade edildiği gibi normlanmış koordinat sistemi yardımıyla Q Esas-polünü ve M ve N invaryantlarını destek fonksiyonu yardımıyla tekrar inceleyelim:



Şekil 6. 8 Normlanmış izafe sisteminde Q Esas-polü

$$\mathbf{q} = \mathbf{QO} \quad , \quad \mathbf{c} = \mathbf{CO} \quad \text{ve} \quad \mathbf{c}' = \mathbf{C'O'} \quad , \quad \mathbf{q}' = \mathbf{QO'}$$

olmak üzere

$$\mathbf{q} = \mathbf{c} - q\mathbf{a}_1 \tag{6.120}$$

ve

$$\mathbf{q}' = \mathbf{c}' - q'\mathbf{a}'_1 \tag{6.121}$$

yazılabilir. Buradan $d\mathbf{q}$ için (6.69) eşitliği dikkate alınarak

$$d\mathbf{q} = (H_\varphi\tau - dq)\mathbf{a}_1 + (-q\tau - dH_\varphi)\mathbf{a}_2 \tag{6.122}$$

bulunur. Son eşitlik (6.107) denklemindeki

$$d\mathbf{q} = \sigma\mathbf{a}_1 + \sigma_2\mathbf{a}_2$$

eşitliği ile karşılaştırılırsa

$$\sigma_2 = -q\tau - dH_\varphi = -(q + H_{\varphi\varphi})\tau - H_{\varphi'\varphi}\tau' \tag{6.123}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (6.121) denkleminden dq' için (6.71) eşitliği kullanılarak

$$d\mathbf{q}' = (-H_\varphi\tau - 2H_{\varphi'}\tau' - dq)\mathbf{a}'_1 + (-q\tau' - H\tau' + dH_{\varphi'})\mathbf{a}'_2 \tag{6.124}$$

bulunur. Burada (6.107) denkleminde

$$d\mathbf{q}' = \sigma \mathbf{a}_1' + \sigma_2 \mathbf{a}_2'$$

olduğundan (6.124) denkleminde

$$\sigma \mathbf{a}_1' + \sigma_2 \mathbf{a}_2' = (-H_{\varphi} \tau - 2H_{\varphi'} \tau' - dq) \mathbf{a}_1' + (-q \tau' - H \tau' + dH_{\varphi'}) \mathbf{a}_2' \quad (6.125)$$

yazılabilir. Son eşitlikten

$$\sigma_2' = -q \tau' - H \tau' + dH_{\varphi'} = H_{\varphi\varphi'} \tau - (q + H - H_{\varphi'\varphi'}) \tau' \quad (6.126)$$

elde edilir.

(6.123) ve (6.126) eşitlikleri (6.109) ifadeleri ile karşılaştırıldığında

$$M = -q + H_{\varphi\varphi} = q + H - H_{\varphi'\varphi'} \quad (6.127)$$

ve

$$N = H_{\varphi'\varphi} = H_{\varphi\varphi'} \quad (6.128)$$

bulunur.

Buradan (6.127) eşitliğine göre

$$q = -\frac{1}{2}(H + H_{\varphi\varphi} - H_{\varphi'\varphi'}) \quad (6.129)$$

yazılabilir. Bu son ifade (6.127) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{cases} M = -\frac{1}{2}(H - H_{\varphi\varphi} + H_{\varphi'\varphi'}) \\ N = H_{\varphi\varphi'} \end{cases} \quad (6.130)$$

bulunur.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, 2-parametrelili hareketlerle ilgili olarak H.R.Müller'in "Ebene Kinematik" [1] kitabında yer alan ama "Kinematik Dersleri" [2] kitabında olmayan konulardan bir kaçı incelenerek Türkçe literatüre kazandırılmıştır. Bundan sonraki çalışmalarımızda ilk olarak "Ebene Kinematik" kitabında yer alan diğer konuları Türkçe literatüre kazandırmak planlanmaktadır. Daha sonra elde edilen tüm sonuçların Lorentz düzlemindeki karşılıkları araştırılacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Blaschke, W. ve Müller, H.R., (1956). Ebene Kinematik, Verlag von R. Oldenbourg, München.
- [2] Müller, H.R., (1963). Kinematik Dersleri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara.
- [3] Özer, F., (1992). İki-Parametrelili Hareketlerin Kinematik Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [4] Kale, M., (2000). 2-Parametrelili Hareketlerin Lorentz Uzayında Karşılıkları, Yüksek Lisans Tezi, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Çanakkale.
- [5] Bottema, O. ve Roth, B., (1979). Theoretical Kinematics, North Holland Publishing Company, New York.
- [6] Karacan, M.K., (2004). Kinematic Applications of Two-Parameter Motion, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- [7] Karacan, M.K. ve Yaylı, Y. (2005). "General Two Parameter Motion", Algebras Groups Geom., 1:137-144.
- [8] Karacan, M.K. ve Yaylı, Y. (2005). "Special Two Parameter Motion", Mathematical and Computational Applications, 1:27-34.
- [9] Karacan, M.K. ve Yaylı, Y. (2004). "Special Two Parameter Motion in Lorentzian Plane", Thai Journal of Mathematics, 2.
- [10] Karacan, M.K. ve Yaylı, Y. (2007). "On the Instantaneous Screw axes of Two Parameter Motions", Mechanics, Automatic Control and Robotics, 1:81-88.
- [11] Karacan, M.K. ve Kula, L., (2009). "On the Instantaneous Screw axes of Two Parameter Motions in Lorentzian Space", Scientia Magna, 1:64-71.
- [12] Hacısalihoğlu, H.H., (1980). Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometrilere, İnönü Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Yayınları, Malatya.
- [13] Bayram, M., (2006). Diferensiyel Denklemler, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, İstanbul.

- [14] Hacısalihoğlu, H.H., (1983). Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen Fakültesi Yayını, Malatya.
- [15] Flanders, H., (1963). Differential Forms With Applications to the Physical Sciences, Academic Press, New York.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ferdane YEŞİLTAS
Doğum Tarihi ve Yeri : 08.07.1986 / İSTANBUL
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : ozenferdane@yahoo.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2009
Lise	Sayısal	Şehremini Anadolu Lisesi	2003

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2010	Yıldız Teknik Üniversitesi	Öğrenci asistanlığı