

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ TAŞIMA PROBLEMİNE TAYLOR SERİSİ VE
ÜYELİK FONKSİYONLARI YARDIMIYLA BİR ÇÖZÜM ÖNERİSİ**

MUAMMER BERTUĞ BULUT

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. MUSTAFA SİVRİ**

İSTANBUL, 2011

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ TAŞIMA PROBLEMİNE TAYLOR SERİSİ VE
ÜYELİK FONKSİYONLARI YARDIMIYLA BİR ÇÖZÜM ÖNERİSİ**

MUAMMER BERTUĞ BULUT

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. MUSTAFA SİVRİ**

İSTANBUL, 2011

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ TAŞIMA PROBLEMİNE TAYLOR SERİSİ VE
ÜYELİK FONKSİYONLARI YARDIMIYLA BİR ÇÖZÜM ÖNERİSİ**

Muammer Bertuğ BULUT tarafından hazırlanan tez çalışması 12.04.2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr.Mustafa SİVRİ
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr.Mustafa SİVRİ
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr.Müfit GİRESUNLU
İstanbul Üniversitesi

Doç. Dr. Fatih TAŞÇI
Yıldız Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Son yıllarda önem kazanan ve üzerine bilimsel çalışmalar yapıp çeşitli çözüm yöntemleri geliştirilen Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemi ile ilgili olarak Yüksek Lisans Tezi yazma konusunda beni teşvik eden ve değerli fikirlerini benimle paylaşarak desteğini eksik etmeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mustafa SİVRİ'ye saygı ve şükranlarımı sunarım.

Nisan, 2011

Muammer Bertuğ BULUT

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	Vii
KISALTMA LİSTESİ.....	viii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
ÇİZELGE LİSTESİ	X
ÖZET	xii
ABSTRACT.....	xiv
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
TAŞIMA PROBLEMİ	3
2.1 Taşıma Problemi Matematiksel Modeli	3
2.2 Taşıma Problemi Modelinin Kurulması	4
2.3 Taşıma Probleminin Çözümü	7
2.3.1 Taşıma Probleminin Başlangıç Çözümünün Belirlenmesi	7
2.3.1.1 Kuzeybatı Köşesi (Northwest Corner) Yöntemi.....	7
2.3.1.2 En Düşük Maliyet (Minimum Cost) Yöntemi.....	11
2.3.1.3 Vogel Yaklaşım (Vogel's Approximation) Yöntemi.....	14
2.3.2 Optimal Çözümünün Belirlenmesi	18
2.3.2.1 Geliştirilmiş Dağıtım (Modified Distribution) Yöntemi.....	18

BÖLÜM 3

ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ TAŞIMA PROBLEMİ	26
3.1 Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemi Matematiksel Modeli	27
3.2 Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemi Modelinin Kurulması	28
3.3 Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin Çözümü.....	35
3.3.1 Taylor Serisi Tanımı	35
3.3.2 Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonlarının Taylor Serisine Açılması	35
3.3.3 Üyelik Fonksiyonları	81

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER	95
KAYNAKLAR	97
ÖZGEÇMİŞ	98

SİMGE LİSTESİ

a_i	i . kaynağının arz miktarı
b_j	j . hedefin talep miktarı
c_{ij}	i . kaynaktan j . hedefe yapılan taşımanın birim maliyeti
d_{ij}	i . kaynaktan j . hedefe yapılan taşımanın tercih derecesi
e_{ij}	i . kaynaktan j . hedefe yapılan taşımanın kaza riski
u_i	i . kaynakla ilgili kısıtın dual değişkeni
v_j	j . hedefle ilgili kısıtın dual değişkeni
m	Kaynakların sayısı
n	Hedeflerin sayısı
T	Taşıma Problemi tablosunda hücelere eklenen veya çıkarılan mal miktarı
$W(X)$	Taşıma Probleminde Amaç Fonksiyonu
$W_1(X)$	Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminde 1. Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonu
$W_2(X)$	Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminde 2. Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonu
X_{ij}	i . kaynaktan j . hedefe taşınan mal miktarı
$Z(X)$	Taşıma Probleminde Amaç Fonksiyonu
$Z_1(X)$	Malları Taşıma Maliyeti Katsayıları
$Z_2(X)$	Tercih Derecesi Katsayıları
$Z_3(X)$	Kaza Riski Katsayıları
$\mu(x)$	Taşıma Probleminde Amaç Fonksiyonu
$\mu_A(x)$	Üyelik Fonksiyonu
$\mu_1(W_1)$	Üyelik Fonksiyonu
$\mu_2(W_2)$	Üyelik Fonksiyonu

KISALTMA LİSTESİ

Max	Maksimum
Min	Minimum
pb	Para Birimi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3. 1	Çeşitli Üyelik Fonksiyonları 81
Şekil 3. 2	$\mu_1(W_1)$ Üyelik Fonksiyonu 83
Şekil 3. 3	$\mu_2(W_2)$ Üyelik Fonksiyonu 83

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2. 1	Taşıma Problemi Tablosu.....	6
Çizelge 2. 2	Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu.	8
Çizelge 2. 3	Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu.	8
Çizelge 2. 4	Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu.	9
Çizelge 2. 5	Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu.	9
Çizelge 2. 6	Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu.	10
Çizelge 2. 7	Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu.	10
Çizelge 2. 8	En Düşük Maliyetler Yöntemi Tablosu.....	11
Çizelge 2. 9	En Düşük Maliyetler Yöntemi Tablosu.....	12
Çizelge 2. 10	En Düşük Maliyetler Yöntemi Tablosu.	12
Çizelge 2. 11	En Düşük Maliyetler Yöntemi Tablosu.	13
Çizelge 2. 12	En Düşük Maliyetler Yöntemi Tablosu.	13
Çizelge 2. 13	En Düşük Maliyetler Yöntemi Tablosu.	14
Çizelge 2. 14	Vogel Yaklaşım Yöntemi Tablosu.....	15
Çizelge 2. 15	Vogel Yaklaşım Yöntemi Tablosu.....	16
Çizelge 2. 16	Vogel Yaklaşım Yöntemi Tablosu.....	16
Çizelge 2. 17	Vogel Yaklaşım Yöntemi Tablosu.....	17
Çizelge 2. 18	Vogel Yaklaşım Yöntemi Tablosu.....	17
Çizelge 2. 19	Vogel Yaklaşım Yöntemi Tablosu.....	18
Çizelge 2. 20	Başlangıç Çözümü Tablosu.	20
Çizelge 2. 21	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	21
Çizelge 2. 22	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	22
Çizelge 2. 23	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	23
Çizelge 2. 24	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	24
Çizelge 3. 1	Lineer Kesirli Taşıma Problemi Tablosu.	33
Çizelge 3. 2	Lineer Kesirli Taşıma Problemi Tablosu.	34
Çizelge 3. 3	Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu.	36
Çizelge 3. 4	Taşıma Problemi Tablosu.....	41
Çizelge 3. 5	Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu.	42
Çizelge 3. 6	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	44
Çizelge 3. 7	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	45
Çizelge 3. 8	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	46
Çizelge 3. 9	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	47
Çizelge 3. 10	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	48
Çizelge 3. 11	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	49
Çizelge 3. 12	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	50

Çizelge 3. 13	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	51
Çizelge 3. 14	Başlangıç Çözüm Yöntemi Tablosu.	54
Çizelge 3. 15	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	55
Çizelge 3. 16	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	56
Çizelge 3. 17	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	57
Çizelge 3. 18	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	58
Çizelge 3. 19	Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu.	60
Çizelge 3. 20	Taşıma Problemi Tablosu.	65
Çizelge 3. 21	Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu.	66
Çizelge 3. 22	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	68
Çizelge 3. 23	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	69
Çizelge 3. 24	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	70
Çizelge 3. 25	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	71
Çizelge 3. 26	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	72
Çizelge 3. 27	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	73
Çizelge 3. 28	Başlangıç Çözümü Tablosu.	75
Çizelge 3. 29	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	76
Çizelge 3. 30	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	77
Çizelge 3. 31	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	78
Çizelge 3. 32	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	79
Çizelge 3. 33	Taşıma Problemi Tablosu.	85
Çizelge 3. 34	Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu.	86
Çizelge 3. 35	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	88
Çizelge 3. 36	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	89
Çizelge 3. 37	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	90
Çizelge 3. 38	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	91
Çizelge 3. 39	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	92
Çizelge 3. 40	Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu.	93

**ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ TAŞIMA PROBLEMİNE
TAYLOR SERİSİ VE ÜYELİK FONKSİYONLARI YARDIMIYLA BİR ÇÖZÜM
ÖNERİSİ**

Muammer Bertuğ BULUT

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

Taşıma problemi, gerçek hayat problemi olup lineer (doğrusal) programlama probleminin özel bir halidir. Genel itibarıyla üretilen malların kaynaklardan (fabrika, büyük depo vb.) hedeflere (depo, mağaza vb.) taşınmasıyla ilgilenir ve kaynakların toplam arz miktarları ile hedeflerin toplam talep miktarları arasında denge sağlayarak her bir kaynaktan her bir hedefe yapılan taşımaların toplam maliyetini minimum kılacak taşıma miktarını belirlemeyi amaçlar.

İlk bölümde Taşıma Probleminin tanımı, modelinin kurulması, başlangıç çözümünün belirlenmesi ve optimal çözümün bulunması üzerinde durularak daha sonraki bölümde de Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin tanımı yapılarak modeli kurulmuş ve tezin asıl konusu olan Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin Taylor Serisi ve Üyelik Fonksiyonları Yardımıyla Çözümü incelenmiştir.

Ele alınan gerçek hayat probleminde şirket yöneticilerinin iki amacı olduğu görülmektedir. Birinci amaç minimum maliyetle malları mümkün olduğunca tercih derecesi yüksek güzergahlarda taşımak, ikinci amaç ise mümkün olduğunca sigorta şirketine göre kaza riski düşük ve şirket yöneticilerinin öncelikli tercih ettiği güzergahlarda malları taşımaktır. İki amacı bir arada bulundurup problemi Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemi olarak ele alıp problem çözüldüğünde, hem en düşük maliyetle hem de mümkün olduğunca tercih derecesi yüksek ve kaza riski az olan güzergahlarda mal taşınması suretiyle şirket yöneticilerinin daha sağlıklı bir karar vermeleri sağlanmıştır.

Tez çalışmasında verilen örneklerle ait bulunan sonuçların doğruluğu Lineer Programlama Problemlerinin bilgisayar çözümü konusunda en bilinen program olan WINQSB paket programı ile desteklenmiştir.

Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonlarının Taylor Serisine açılarak Lineer Amaç Fonksiyonu haline geldikten sonra Üyelik Fonsiyonları yardımıyla, Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin Tek Amaçlı Klasik Taşıma Problemine dönüştürülmesiyle elde edilen sonuçların istenilen hedeflere çok yakın olması, yöntemin doğruluğu ve güvenilirliği konusunda bilgi vermektedir.

Anahtar Kelimeler : Taşıma Problemi, Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemi, Taylor Serisi , Üyelik Fonksiyonları.

**A SOLUTION OFFER FOR MULTI OBJECTIVE LINEAR FRACTIONAL
TRANSPORTATION PROBLEM BY MAKING USE OF
TAYLOR SERIES AND MEMBERSHIP FUNCTIONS**

Muammer Bertuğ BULUT

Department of Mathematics Engineering
MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

Transportation problem is a specific aspect of linear programming problem which is a real life problem. It's generally concerned in the transportation of goods from sources (factory, large warehouse etc.) to the targets (warehouse, store etc.) and by balancing the total supply of the sources and total demand of the targets, it aims at determining the exact transported amount from each of the sources to each of the targets in order to minimize the total transportation costs.

Beginning with a section which includes the definition of the "Transportation Problem", construction of the model, determination of the initial values and finding the optimal solution, the study proceeds with the definition and model construction of " Multi Objective Linear Fractional Transportation Problem". This thesis examined the usage of "Taylor Series" and "Membership Functions" to find the solution of the "Multi Objective Linear Fractional Transportation Problem".

The executives of the company in the given real life problem have two objectives. The first one is to transport the goods with minimum costs in the most preferable routes. The second one is to transport the goods in the routes that have the minimum risk of accident and are the most preferred ones in the insurance company's executives' point of view. Considering both of these objectives, the problem is handled as a Multi Objective Linear Fractional Transportation Problem and the executives are aided in reasonable decision-making by proposing the least costly and the least risky transportation and the most preferable possible routes.

Accuracy of the results for the examples given in this study are validated with the WINQSB software package well-known with the computer aided solution of Linear Programming Problems.

Results achieved by expanding the "Linear Fractional Objective Functions" to the "Taylor Series" and , using Membership Functions, converting it to the "Classical Single Objective Transportation Problem" are found to be close to the objectives, which gives an idea about the accuracy and reliability of the method used.

Keywords : Transportation Problem, Multi Objective Linear Fractional Transportation Problem, Taylor Series, Membership Functions.

1.1 Literatür Özeti

Taşıma problemi gerçek hayat problemi olup lineer (doğrusal) programlama probleminin özel bir halidir. Gerçek hayat problemi olarak ifade edilmesinin sebebi gerçek hayatta karşılaşılmış ya da karşılaşılabilecek problem olmasıdır. Taşıma problemi çeşitli kaynaklarda “Ulaştırma Problemi” ya da “Transport Problemi” olarak da adlandırılmaktadır [1].

Taşıma problemi genel itibariyle üretilen malların kaynaklardan (fabrika, büyük depo vb.) hedeflere (depo, mağaza vb.) taşınmasıyla ilgilenir ve kaynakların toplam arz miktarları ile hedeflerin toplam talep miktarları arasında denge sağlayarak her bir kaynaktan her bir hedefe yapılan taşımaların toplam maliyetini minimum kılacak taşıma miktarını belirlemeyi amaçlar [1].

Taşıma problemi malların bir yerden bir yere taşınmasından başka, stok kontrolü, işgücü programlama, personel atama gibi alanlarda da kullanılabilmektedir [1].

Taşıma problemi ile ilgili olarak ilk çalışmalar 1939 yılında Leonid Kantorovich tarafından yapılmıştır [2]. Bu çalışmaları Frank Lauren Hitchcock sistematik olarak geliştirerek 1941 yılında petrol endüstrisinde nakliye ve dağıtım maliyetlerini minimize etmek için uygulamıştır [3]. 1947 yılında Tjalling Charles Koopmans [4] tarafından geliştirilen taşıma problemini 1951 yılında George Bernard Dantzig lineer programlama problemi olarak formüle etmiştir [5].

Taşıma probleminin başlangıç çözümü için “Kuzeybatı Köşesi (Northwest Corner)”, “En Düşük Maliyetler (Minimum Cost)” ve “Vogel Yaklaşım (Vogel’s Approximation)” yöntemleri geliştirilmiştir. Taşıma probleminin optimal çözümü için kullanılan en yaygın yöntem George Bernard Dantzig tarafından 1963 yılında bulunan “Geliştirilmiş Dağıtım - MODI (Modified Distribution)” yöntemidir [6].

Lineer Kesirli Taşıma Probleminin çözümüne ilişkin olarak son yıllarda yapılan en bilinen çalışmalar 2003 yılında Erik Bajalinov [7] ve 2007 yılında Dorina Moanta [8] tarafından gerçekleştirilmiştir.

Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin çözümüne ilişkin olarak son yıllarda ülkemizde yapılan en bilinen çalışmalar ise Fatma Tiryaki ve Nurdan Çetin tarafından gerçekleştirilmiştir [9].

1.2 Tezin Amacı

Yapılan tez çalışmasında öncelikli olarak Taşıma Probleminin tanımı, modelinin kurulması, başlangıç çözümünün belirlenmesi ve optimal çözümün bulunması üzerinde durularak daha sonraki bölümde de Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin tanımı yapılarak modeli kurulmuş ve tezin asıl konusu olan Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin Taylor Serisi ve Üyelik Fonksiyonları Yardımıyla Çözümü araştırılmıştır.

1.3 Hipotez

Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonlarının Taylor Serisine açılarak, Üyelik Fonksiyonları yardımıyla Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin Tek Amaçlı Klasik Taşıma Problemine dönüştürülmesiyle elde edilen sonuçların istenilen hedeflere çok yakın olması bize bu yöntemin doğruluğu ve güvenilirliği konusunda bilgi vermektedir.

BÖLÜM 2

TAŞIMA PROBLEMİ

Taşıma problemi genel itibariyle üretilen malların kaynaklardan (fabrika, büyük depo vb.) hedeflere (depo, mağaza vb.) taşınmasıyla ilgilenir ve kaynakların toplam arz miktarları ile hedeflerin toplam talep miktarları arasında denge sağlayarak her bir kaynaktan her bir hedefe yapılan taşımaların toplam maliyetini minimum kılacak taşıma miktarını belirlemeyi amaçlar [1].

2.1 Taşıma Problemi Matematiksel Modeli

$$\text{Min } Z(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} X_{ij} \quad (i=1,2,\dots,m), \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (2.3)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m), \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (2.4)$$

$$a_i \geq 0, \quad b_j \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m), \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (2.5)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (2.6)$$

m : Kaynakların sayısı,

n : Hedeflerin sayısı,

a_i : i . kaynaktaki arz miktarı ($i = 1, 2, \dots, m$),

b_j : j . hedefin talep miktarı ($j = 1, 2, \dots, n$),

c_{ij} : i . kaynaktan j . hedefe yapılan taşımanın birim maliyeti ($i = 1, 2, \dots, m$), ($j = 1, 2, \dots, n$),

X_{ij} : i . kaynaktan j . hedefe taşınan mal miktarı ($i = 1, 2, \dots, m$), ($j = 1, 2, \dots, n$)

olmak üzere (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) kısıtları altında (2.1) amaç fonksiyonunu sağlayan X_{ij} lerin çözümünün araştırılması “Taşıma Problemi” olarak adlandırılmaktadır.

$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ ise $b_{j+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ olacak şekilde probleme hayali hedef,

$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ ise $a_{i+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ olacak şekilde probleme hayali kaynak ilave edilir.

Probleme ilave edilen hayali kaynak ve hedeflerin amaç fonksiyonundaki katsayısı sıfırdır.

Taşıma probleminde $m + n - 1$ tane değişken çeşitli yöntemlerle başlangıç çözümü olarak belirlenir ve problemin çeşitli yöntemlerle çözümü sonucu $m + n - 1$ tane değişken optimal çözüm olarak bulunur.

2.2 Taşıma Problemi Modelinin Kurulması

Taşıma Problemi Modelinin kurulması, aşağıdaki gibi bir gerçek hayat problemi ele alınarak örnek üzerinden açıklayıcı şekilde gösterilebilir.

Güneşyolu Taşımacılık Şirketi üç silodan dört işletme merkezine kamyonlarla hububat taşımaktadır. Kamyon sayısı cinsinden Siloların hububat kapasitesi aşağıdaki gibidir;

Silo 1 : 15

Silo 2 : 25

Silo 3 : 10

Kamyon sayısı cinsinden İşletme Merkezlerinin hububat talepleri aşağıdaki gibidir;

İşletme Merkezi 1 : 5

İşletme Merkezi 2 : 15

İşletme Merkezi 3 : 15

İşletme Merkezi 4 : 15

Kamyon başına Silolardan İşletme Merkezlerine hububat taşıma maliyeti aşağıdaki gibidir;

Silo 1 – İşletme Merkezi 1 : 10 pb

Silo 1 – İşletme Merkezi 2 : 2 pb

Silo 1 – İşletme Merkezi 3 : 20 pb

Silo 1 – İşletme Merkezi 4 : 11 pb

Silo 2 – İşletme Merkezi 1 : 12 pb

Silo 2 – İşletme Merkezi 2 : 7 pb

Silo 2 – İşletme Merkezi 3 : 9 pb

Silo 2 – İşletme Merkezi 4 : 20 pb

Silo 3 – İşletme Merkezi 1 : 4 pb

Silo 3 – İşletme Merkezi 2 : 14 pb

Silo 3 – İşletme Merkezi 3 : 16 pb

Silo 3 – İşletme Merkezi 4 : 18 pb

Güneşyolu Taşımacılık Şirketinin amacı en düşük maliyetle silolardan işletme merkezlerine tüm talepleri karşılayacak şekilde hububatları taşımaktır [1].

Yukarıdaki gerçek hayat probleminin Matematiksel Modeli aşağıdaki şekilde kurulabilir.

$$\begin{aligned} \text{Min } Z(x) = & 10X_{11} + 2X_{12} + 20X_{13} + 11X_{14} + 12X_{21} + 7X_{22} + 9X_{23} + 20X_{24} + 4X_{31} + 14X_{32} \\ & + 16X_{33} + 18X_{34} \end{aligned} \quad (\text{Amaç Fonksiyonu})$$

$$\sum_{j=1}^4 X_{1j} = 15$$

$$\sum_{j=1}^4 X_{2j} = 25$$

$$\sum_{j=1}^4 X_{3j} = 10$$

(Arz Kısıtları)

$$\sum_{i=1}^3 X_{i1} = 5$$

$$\sum_{i=1}^3 X_{i2} = 15$$

$$\sum_{i=1}^3 X_{i3} = 15$$

$$\sum_{i=1}^3 X_{i4} = 15$$

(Talep Kısıtları)

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

(Kamyon cinsinden taşınacak hububat miktarı)

Çizelge 2. 1 Taşıma Problemi Tablosu

İşletme Merkezleri	1	2	3	4	Arz Miktarları
Silolar					
1	X_{11} 10	X_{12} 2	X_{13} 20	X_{14} 11	15
2	X_{21} 12	X_{22} 7	X_{23} 9	X_{24} 20	25
3	X_{31} 4	X_{32} 14	X_{33} 16	X_{34} 18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

2.3 Taşıma Probleminin Çözümü

Taşıma problemini çözmek için öncelikle başlangıç çözümü belirlenir daha sonra da uygun çözüm yöntemlerinden biri uygulanarak optimal çözüm bulunur.

2.3.1 Taşıma Probleminin Başlangıç Çözümünün Belirlenmesi

Taşıma probleminin başlangıç çözümünü bulmak için geliştirilen yöntemlerden en bilinen üç tanesi “Kuzeybatı Köşesi (Northwest Corner)”, “En Düşük Maliyet (Minimum Cost)” ve “Vogel Yaklaşım (Vogel’s Approximation)” yöntemleridir.

2.3.1.1 Kuzeybatı Köşesi (Northwest Corner) Yöntemi

Kuzeybatı köşesi yönteminde X_{11} değişkeninin yer aldığı hücreden başlayarak aşağıdaki işlemler uygulanır.

X_{ij} değişkeninin yer aldığı hücreye bulunduğu satırdaki arz miktarı ve bulunduğu sütundaki talep miktarını geçmeyecek şekilde mümkün olan en fazla mal yerleştirilir. Yerleştirilen miktar ilgili satırdaki arz ve ilgili sütundaki talep miktarından çıkartılır. Eğer ilgili sütundaki talebin tamamı karşılanmışsa o sütun iptal edilir ve bir sütun yan hücreye (X_{ij} değişkeni için $X_{i(j+1)}$ değişkeninin bulunduğu hücre), ilgili satırdaki arzın tamamı tüketilmişse o satır iptal edilir ve bir satır alt hücreye geçilir. Eğer aynı anda hem ilgili satırdaki arzın tamamı tüketilmiş hem de ilgili sütundaki talebin tamamı karşılanmışsa bu durumda bir sütun yan hücreye veya bir satır alt hücreye geçmekten bir tanesi seçilir. Daha sonra aynı işlemler X_{mn} değişkeninin bulunduğu hücreye mal yerleştirilip toplam arzın tüketilip toplam talebin karşılanmasına kadar devam edilir.

Bu işlemler sonunda başlangıç çözümü $m+n-1$ tane temel değişken içermektedir. Dengeli taşıma probleminde (veya sonradan dengeli hale getirilmiş taşıma problemlerinde) bu $m+n-1$ tane temel değişkenin değerleri toplamı toplam arza ve toplam talebe eşit olmalıdır. Aksi durumda yanlışlık yapılması söz konusudur ve yapılan işlemler en baştan gözden geçirilmelidir [1].

Bölüm 2.2’de verilen gerçek hayat problemi için Kuzeybatı Köşesi Yöntemi uygulanırsa;

X_{11} değişkeninin olduğu hücreye 5 birim mal yerleştirilir.

Çizelge 2. 2 Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri	1	2	3	4	Arz Miktarları
Silolar					
1	5 10	2	20	11	15
2	12	7	9	20	25
3	4	14	16	18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

1. Sütunun talebi karşılandığı için 1. Sütun iptal edilir. 1. Satırın geriye kalan 10 birimlik arzı X_{12} değişkeninin olduğu hücreye yerleştirilir.

Çizelge 2. 3 Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri	1	2	3	4	Arz Miktarları
Silolar					
1	5 10	10 2	20	11	15
2	12	7	9	20	25
3	4	14	16	18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

1. Satırın arzı tükendiği için 1. Satır iptal edilir. 2. Sütunun geriye kalan 5 birimlik talebi X_{22} değişkeninin olduğu hücreye yerleştirilir.

Çizelge 2. 4 Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri	1	2	3	4	Arz Miktarları
Silolar					
1	5 10	10 2	20	11	15
2	12	5 7	9	20	25
3	4	14	16	18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

2. Sütunun talebi karşılandığı için 2. Sütun iptal edilir. 2. Satırda geriye 20 birim arz kalmasına rağmen 3. Sütunun talebi 15 birim olduğu için X_{23} değişkeninin olduğu hücreye 15 birim mal yerleştirilir.

Çizelge 2. 5 Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri	1	2	3	4	Arz Miktarları
Silolar					
1	5 10	10 2	20	11	15
2	12	5 7	15 9	20	25
3	4	14	16	18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

2. Satırda geriye 5 birim arz kaldığı için X_{24} değişkeninin olduğu hücreye 5 birim mal yerleştirilir.

Çizelge 2. 6 Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri Silolar	1	2	3	4	Arz Miktarları
1	5 10	10 2	20	11	15
2	12	5 7	15 9	5 20	25
3	4	14	16	18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

3. Sütunda geriye 10 birim arz kaldığı için X_{34} değişkeninin olduğu hücreye 10 birim mal yerleştirilir.

Çizelge 2. 7 Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri Silolar	1	2	3	4	Arz Miktarları
1	5 10	10 2	20	11	15
2	12	5 7	15 9	5 20	25
3	4	14	16	10 18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

Başlangıç çözümü olarak;

Çözüm Takımı $X_{11} = 5, X_{12} = 10, X_{22} = 5, X_{23} = 15, X_{24} = 5, X_{34} = 10$

Amaç Fonksiyonu Min $Z(x) = 10 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 5 + 9 \cdot 15 + 20 \cdot 5 + 18 \cdot 10 = 520$ pb bulunur.

2.3.1.2 En Düşük Maliyet (Minimum Cost) Yöntemi

En düşük maliyetler yönteminde amaç birim maliyeti en düşük hücrelere mümkün olan en fazla mal yerleştirmek suretiyle başlangıç çözümü oluşturmaktır.

En düşük maliyetler yöntemine birim maliyeti en düşük hücreye bulunduğu satırdaki arz miktarı ve bulunduğu sütundaki talep miktarını geçmeyecek şekilde mümkün olan en fazla mal yerleştirilerek başlanır (eşitlik durumunda rastgele tercih yapılır). Yerleştirilen miktar ilgili satırdaki arz ve ilgili sütundaki talep miktarından çıkartılır. Eğer aynı anda hem ilgili satırdaki arzın tamamı tükeltilmiş hem de ilgili sütundaki talebin tamamı karşılanmışsa bu durumda ilgili satır veya sütundan bir tanesi iptal edilir. Genellikle birim maliyeti yüksek hücrelerin bulunduğu satır veya sütunun iptal edilir. Daha sonra iptal edilmemiş hücreler içerisinde birim maliyeti en düşük hücreye bulunduğu satırdaki arz miktarı ve bulunduğu sütundaki talep miktarını geçmeyecek şekilde mümkün olan en fazla mal yerleştirilir ve bu işlemler iptal edilmeyen bir satır veya sütun kalıncaya kadar devam eder.

Bu işlemler sonunda başlangıç çözümü $m + n - 1$ tane temel değişken içermektedir. Bu $m + n - 1$ tane temel değişkenin değerleri toplamı toplam arza ve toplam talebe eşit olmalıdır. Aksi durumda yapılan işlemler en baştan gözden geçirilmelidir [1].

Bölüm 2.2’de verilen gerçek hayat problemi için ilgili yöntem uygulanmak istenirse; en düşük birim maliyete sahip X_{12} değişkeninin olduğu hücreye 15 birim mal yerleştirilir.

Çizelge 2. 8 En Düşük Maliyetler Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri Silolar	1	2	3	4	Arz Miktarları
1	10	15 2	20	11	15
2	12	7	9	20	25
3	4	14	16	18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

2. sütundaki talepler karşılandığından ve 1. satırdaki arzlar tükendiğinden keyfi olarak 2. sütun iptal edilir. Kalan satır ve sütunlar içinde en düşük birim maliyete sahip X_{31} değişkeninin olduğu hücreye 5 birim mal yerleştirilir.

Çizelge 2. 9 En Düşük Maliyetler Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri	1	2	3	4	Arz Miktarları
Silolar					
1	10	15 2	20	11	15
2	12	7	9	20	25
3	5 4	14	16	18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

1. sütundaki talepler karşılandığından 1. sütun iptal edilir. Kalan satır ve sütunlar içinde en düşük birim maliyete sahip X_{23} değişkeninin olduğu hücreye 15 birim mal yerleştirilir.

Çizelge 2. 10 En Düşük Maliyetler Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri	1	2	3	4	Arz Miktarları
Silolar					
1	10	15 2	20	11	15
2	12	7	15 9	20	25
3	5 4	14	16	18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

3. sütundaki talepler karşılandığından 3. sütun iptal edilir. 4. sütunda en düşük birim maliyete sahip X_{14} değişkeninin olduğu hücreye 1. satırdaki arzların tükenmesi sebebiyle 0 birim mal yerleştirilir.

Çizelge 2. 11 En Düşük Maliyetler Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri	1	2	3	4	Arz Miktarları
Silolar					
1	10	15 2	20	0 11	15
2	12	7	15 9	20	25
3	5 4	14	16	18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

En düşük birim maliyete sahip X_{34} değişkeninin olduğu hücreye 3. satırın 5 birim arzı kaldığı için 5 birim mal yerleştirilir.

Çizelge 2. 12 En Düşük Maliyetler Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri	1	2	3	4	Arz Miktarları
Silolar					
1	10	15 2	20	0 11	15
2	12	7	15 9	20	25
3	5 4	14	16	5 18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

En son X_{24} değişkeninin olduğu hücreye 10 birim mal yerleştirilir.

Çizelge 2. 13 En Düşük Maliyetler Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri	1	2	3	4	Arz Miktarları
Silolar					
1	10	15 2	20	0 11	15
2	12	7	15 9	10 20	25
3	5 4	14	16	5 18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

Başlangıç çözümü olarak;

Çözüm Takımı $X_{12} = 15$, $X_{14} = 0$, $X_{23} = 15$, $X_{24} = 10$, $X_{31} = 5$, $X_{34} = 5$

Amaç Fonksiyonu $\text{Min } Z(x) = 2*15 + 11*0 + 9*15 + 20*10 + 4*5 + 18*5 = 475$ pb bulunur.

2.3.1.3 Vogel Yaklaşım (Vogel's Approximation) Yöntemi

Vogel Yaklaşım Yöntemi, En düşük maliyetler yönteminin geliştirilmiş hali olup genelde en iyi başlangıç çözümünü vermektedir [1].

Vogel Yaklaşım Yöntemine her satır ve her sütundaki en düşük iki birim maliyeti birbirinden (büyük olanı küçükten) çıkartmak suretiyle satır ve sütun cezalarını belirleyerek başlanır. Satır ve sütun cezaları belirlendikten sonra en büyük cezaya sahip satır veya sütundaki en düşük birim maliyetli hücreye bulunduğu satırdaki arz miktarı ve bulunduğu sütundaki talep miktarını geçmeyecek şekilde mümkün olan en fazla mal yerleştirilir. Eğer en büyük cezaya sahip satır veya sütun varsa rastgele tercih yapılır (genellikle birim maliyeti en düşük hücrenin bulunduğu satır veya sütun tercih edilir). Yerleştirilen miktar ilgili satırdaki arz ve ilgili sütundaki talep miktarından çıkartılır. Eğer ilgili sütundaki talebin tamamı karşılanmışsa o sütun, ilgili satırdaki arzın tamamı tüketilmişse o satır iptal edilir. Daha sonra kalan satır ve sütunlar için cezalar yeniden belirlenir. En büyük cezaya sahip satır veya sütundaki birim maliyeti en düşük hücreye

bulunduğu satırdaki arz miktarı ve bulunduğu sütundaki talep miktarını geçmeyecek şekilde mümkün olan en fazla mal yerleştirilir.

Bu işlemler iptal edilmemiş bir satır veya sütun kalana kadar devam eder. İptal edilmemiş bir satır veya sütun kaldığında En Düşük Maliyetler yöntemiyle temel değişkenler belirlenir.

Bu işlemler sonunda başlangıç çözümü $m + n - 1$ tane temel değişken içermektedir. Bu $m + n - 1$ tane temel değişkenin değerleri toplamı toplam arza ve toplam talebe eşit olmalıdır. Aksi durumda yanlışlık yapılması söz konusudur ve yapılan işlemler en baştan gözden geçirilmelidir.

Bölüm 2.2’de verilen gerçek hayat problemi için En Düşük Maliyetler Yöntemi uygulanırsa;

Satır Cezaları : 1. Satır $10 - 2 = 8$, 2. Satır $9 - 7 = 2$, 3. Satır $14 - 4 = 10$

Sütun Cezaları : 1. Sütun $10 - 4 = 6$, 2. Sütun $7 - 2 = 5$, 3. Sütun $16 - 9 = 7$

4. Sütun $18 - 11 = 7$

Çizelge 2. 14 Vogel Yaklaşım Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri	1	2	3	4	Arz Miktarları
Silolar					
1	10	2	20	11	15
2	12	7	9	20	25
3	5 4	14	16	18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

1. sütundaki talepler karşılandığından 1. sütun iptal edilir. Kalan satır ve sütunlar için cezalar yeniden belirlenir.

Satır Cezaları : 1. Satır $20 - 11 = 9$, 2. Satır $9 - 7 = 2$, 3. Satır $16 - 14 = 2$

Sütun Cezaları : 2. Sütun $7 - 2 = 5$, 3. Sütun $16 - 9 = 7$, 4. Sütun $18 - 11 = 7$

En büyük ceza 1. satırda olup en düşük maliyetli hücreye 15 birim mal yüklenir.

Çizelge 2. 15 Vogel Yaklaşım Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri	1	2	3	4	Arz Miktarları
Silolar					
1	10	15 2	20	11	15
2	12	7	9	20	25
3	5 4	14	16	18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

2. sütundaki talepler karşılandığından 2. sütun iptal edilir.

Satır Cezaları : 1. Satır $20 - 11 = 9$, 2. Satır $20 - 9 = 11$, 3. Satır $18 - 16 = 2$

Sütun Cezaları : 3. Sütun $16 - 9 = 7$, 4. Sütun $18 - 11 = 7$

En büyük ceza 2. satırda olup en düşük maliyetli hücreye 15 birim mal yüklenir.

Çizelge 2. 16 Vogel Yaklaşım Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri	1	2	3	4	Arz Miktarları
Silolar					
1	10	15 2	20	11	15
2	12	7	15 9	20	25
3	5 4	14	16	18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

3. sütundaki talepler karşılandığından 3. sütun iptal edilir. Geriye sadece 4. sütun kaldığından En Düşük Maliyetler yöntemi uygulanır. 4. Sütunda en düşük birim maliyete sahip X_{14} değişkeninin olduğu hücreye arzların tükenmesi sebebiyle 0 birim mal yerleştirilir.

Çizelge 2. 17 Vogel Yaklaşım Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri Silolar	1	2	3	4	Arz Miktarları
1	10	15 2	20	0 11	15
2	12	7	15 9	20	25
3	5 4	14	16	18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

En düşük birim maliyete sahip X_{34} değişkeninin olduğu hücreye 3. Satırın 5 birim arzı kaldığı için 5 birim mal yerleştirilir.

Çizelge 2. 18 Vogel Yaklaşım Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri Silolar	1	2	3	4	Arz Miktarları
1	10	15 2	20	0 11	15
2	12	7	15 9	20	25
3	5 4	14	16	5 18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

En son X_{24} değişkeninin olduğu hücreye 10 birim mal yerleştirilir.

Çizelge 2. 19 Vogel Yaklaşım Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri					
Silolar	1	2	3	4	Arz Miktarları
1	10	15 2	20	0 11	15
2	12	7	15 9	10 20	25
3	5 4	14	16	5 18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

Başlangıç çözümü olarak;

Çözüm Takımı $X_{12} = 15$, $X_{14} = 0$, $X_{23} = 15$, $X_{24} = 10$, $X_{31} = 5$, $X_{34} = 5$

Amaç Fonksiyonu $\text{Min } Z(x) = 2*15 + 11*0 + 9*15 + 20*10 + 4*5 + 18*5 = 475$ pb bulunur.

Başlangıç çözümleri karşılaştırıldığında genellikle en kötü sonucu Kuzeybatı Köşesi yöntemi, en iyi sonucu ise Vogel Yaklaşım yöntemi vermektedir [1].

2.3.2 Optimal Çözümünün Belirlenmesi

Başlangıç çözümleri bulunduktan sonra optimal çözümü bulmak için kullanılan en bilinen ve en yaygın yöntem Geliştirilmiş Dağıtım (Modified Distribution) yöntemidir.

2.3.2.1 Geliştirilmiş Dağıtım (Modified Distribution) Yöntemi

Geliştirilmiş Dağıtım yöntemi, lineer programlama problemlerinin çözümünde kullanılan simpleks yöntemin dualite yardımıyla taşıma problemi için özel olarak geliştirilmiş bir halidir. Çeşitli kaynaklarda MODI Yöntemi olarak da geçmektedir [1].

m : Kaynakların sayısı,

n : Hedeflerin sayısı,

a_i : i . kaynaktaki arz miktarı ($i = 1, 2, \dots, m$),

b_j : j . hedefteki talep miktarı ($j = 1, 2, \dots, n$),

c_{ij} : i . kaynaktan j . hedefe yapılan taşımanın birim maliyeti ($i = 1, 2, \dots, m$), ($j = 1, 2, \dots, n$),

u_i : i . kaynakla ilgili kısıtın dual değişkeni ($i = 1, 2, \dots, m$),

v_j : j . hedefle ilgili kısıtın dual değişkeni ($j = 1, 2, \dots, n$)

olmak üzere;

$$\text{Max } Z(x) = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m), (j = 1, 2, \dots, n)$$

şeklinde gösterilir.

Başlangıç çözümlerinde elde edilen $m + n - 1$ tane temel değişken için $u_i + v_j = c_{ij}$ dir. $m + n - 1$ tane temel değişkene karşılık (u, v) cinsinden $m + n$ değişken ve $m + n - 1$ tane denklem söz konusu olduğundan keyfi olarak $u_1 = 0$ kabul edilerek denklemler çözülür.

(u, v) değerleri bulunduktan sonra temel olmayan değişkenler için $u_i + v_j - c_{ij}$ değerleri hesaplanır ve pozitif en büyük $u_i + v_j - c_{ij}$ değerine sahip değişken tabana girer. Tabana giren değişkenin olduğu hücreye T miktar mal yüklenir. Mevcut sistemde T kadar fazlalık olduğundan dolayı diğer temel değişkenlerin bazılarında T miktar azalma, bazılarında ise T miktar artma olur. Azalma olan temel değişkenler için $X_{ij} - T = 0$ eşitliğini minimum yapan T değeri hesaplanır ve hücrelere yüklenecek yeni miktarlar belli olmuş olur. $X_{ij} - T = 0$ eşitliğini sağlayan değişken otomatik olarak tabandan çıkacaktır. Eğer birden fazla değişken için $X_{ij} - T = 0$ oluyorsa bu durumda keyfi olarak sadece bir tanesi tabandan çıkar. Bu işlemler temel olmayan (tabanda bulunmayan) tüm değişkenlerin $u_i + v_j - c_{ij}$ değerleri negatif oluncaya kadar devam eder. Temel olmayan (tabanda bulunmayan) tüm değişkenlerin $u_i + v_j - c_{ij}$ değerleri negatif olduğunda problem optimuma ulaşmış olur.

Bölüm 2.2’de verilen gerçek hayat problemi, Kuzybatı Köşesi Yöntemi uygulanarak elde edilen başlangıç çözümlerinden yola çıkarak Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemiyle çözülmek istenirse;

Çizelge 2. 20 Başlangıç Çözümü Tablosu

İşletme Merkezleri	1	2	3	4	Arz Miktarları
Silolar					
1	5 10	10 2	20	11	15
2	12	5 7	15 9	5 20	25
3	4	14	16	10 18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

Başlangıç Çözümü olarak;

Çözüm Takımı $X_{11} = 5, X_{12} = 10, X_{22} = 5, X_{23} = 15, X_{24} = 5, X_{34} = 10$

Amaç Fonksiyonu $\text{Min } Z(x) = 10 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 5 + 9 \cdot 15 + 20 \cdot 5 + 18 \cdot 10 = 520$ pb dir.

Başlangıç temel (tabanda bulunan) değişkenleri için;

$$u_1 + v_1 = 10, \quad u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 10 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_2 = 2, \quad u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = 2 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = 7, \quad v_2 = 2 \Rightarrow u_2 = 5 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_3 = 9, \quad u_2 = 5 \Rightarrow v_3 = 4 \quad (X_{23} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_4 = 20, \quad u_2 = 5 \Rightarrow v_4 = 15 \quad (X_{24} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 = 18, \quad v_4 = 15 \Rightarrow u_3 = 3 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

bulunur.

Temel olmayan (tabanda bulunmayan) değişkenler için $u_i + v_j - c_{ij}$ değerleri hesaplanırsa;

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 4 - 20 = -16 \quad (X_{13} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 15 - 11 = 4 \quad (X_{14} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = 5 + 10 - 12 = 3 \quad (X_{21} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = 3 + 10 - 4 = 9 \quad (X_{31} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 - c_{32} = 3 + 2 - 14 = -9 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 - c_{33} = 3 + 4 - 16 = -9 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

değerleri elde edilir.

Pozitif en büyük ($u_i + v_j - c_{ij}$) değerine X_{31} değişkeni sahip olduğu için X_{31} değişkeni yeni temel değişken olarak tabana girer. X_{31} değişkeninin olduğu hücreye T miktar mal yüklenir. Bazı değişkenlerin değerinde T miktar artma olurken bazı değişkenlerin değerinde T miktar azalma olacaktır. $X_{ij} - T = 0$ eşitliğini minimum yapan T değeri hesaplanır ve hücrelere yüklenecek yeni miktarlar belli olur.

Çizelge 2. 21 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri	1	2	3	4	Arz Miktarları
Silolar					
1	$5 - T$ 10	$10 + T$ 2	20	11	15
2	12	$5 - T$ 7	15 9	$5 + T$ 20	25
3	T 4	14	16	$10 - T$ 18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

$$5 - T = 0 \Rightarrow T = 5, 5 - T = 0 \Rightarrow T = 5, 10 - T = 0 \Rightarrow T = 10$$

Min (5,5,10) = 5 olduğundan $T = 5$ dir. X_{11} ve X_{22} değişkenleri için $X_{ij} - T = 0$ olduğundan X_{11} 'in birim maliyetinin X_{22} 'ye göre daha yüksek olması sebebiyle X_{11} tabandan çıkar.

Çizelge 2. 22 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri Silolar	1	2	3	4	Arz Miktarları
1	10	15 2	20	11	15
2	12	0 7	15 9	10 20	25
3	5 4	14	16	5 18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

Çözüm Takımı $X_{12} = 15$, $X_{22} = 0$, $X_{23} = 15$, $X_{24} = 10$, $X_{31} = 5$, $X_{34} = 5$

Amaç Fonksiyonu Min $Z(x) = 2*15 + 7*0 + 9*15 + 20*10 + 4*5 + 18*5 = 475$ pb bulunur.

Yeni temel (tabanda bulunan) değişkenleri için;

$$u_1 + v_2 = 2, \quad u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = 2 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = 7, \quad v_2 = 2 \Rightarrow u_2 = 5 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_3 = 9, \quad u_2 = 5 \Rightarrow v_3 = 4 \quad (X_{23} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_4 = 20, \quad u_2 = 5 \Rightarrow v_4 = 15 \quad (X_{24} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 = 18, \quad v_4 = 15 \Rightarrow u_3 = 3 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_1 = 4, \quad u_3 = 3 \Rightarrow v_1 = 1 \quad (X_{31} \text{ değişkeni için})$$

bulunur.

Temel olmayan (tabanda bulunmayan) değişkenler için $u_i + v_j - c_{ij}$ değerleri hesaplanırsa;

$$u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 1 - 10 = -9 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 4 - 20 = -16 \quad (X_{13} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 15 - 11 = 4 \quad (X_{14} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = 5 + 1 - 12 = -6 \quad (X_{21} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 - c_{32} = 3 + 2 - 14 = -9 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 - c_{33} = 3 + 4 - 16 = -9 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

değerleri elde edilir.

Pozitif en büyük ($u_i + v_j - c_{ij}$) değerine X_{14} değişkeni sahip olduğu için X_{14} değişkeni yeni temel değişken olarak tabana girer. X_{14} değişkeninin olduğu hücreye T miktar mal yüklenir. Bazı değişkenlerin değerinde T miktar artma olurken bazı değişkenlerin değerinde T miktar azalma olacaktır. $X_{ij} - T = 0$ eşitliğini minimum yapan T değeri hesaplanır ve hücrelere yüklenecek yeni miktarlar belli olur.

Çizelge 2. 23 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri	1	2	3	4	Arz Miktarları
Silolar					
1	10	$15 - T$ 2	20	T 11	15
2	12	$0 + T$ 7	15 9	$10 - T$ 20	25
3	5 4	14	16	5 18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

$$15 - T = 0 \Rightarrow T = 15, 10 - T = 0 \Rightarrow T = 10$$

Min (10,15) = 10 olduğundan $T = 10$ dur. X_{24} tabandan çıkar.

Çizelge 2. 24 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

İşletme Merkezleri Silolar	1	2	3	4	Arz Miktarları
1	10	5 2	20	10 11	15
2	12	10 7	15 9	20	25
3	5 4	14	16	5 18	10
Talep Miktarları	5	15	15	15	

Çözüm Takımı $X_{12} = 5$, $X_{14} = 10$, $X_{22} = 10$, $X_{23} = 15$, $X_{31} = 5$, $X_{34} = 5$

Amaç Fonksiyonu Min $Z(x) = 2*5 + 11*10 + 7*10 + 9*15 + 4*5 + 18*5 = 435$ pb

bulunur.

Yeni temel (tabanda bulunan) değişkenleri için;

$$u_1 + v_2 = 2, \quad u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = 2 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_4 = 11, \quad u_1 = 0 \Rightarrow v_4 = 11 \quad (X_{14} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = 7, \quad v_2 = 2 \Rightarrow u_2 = 5 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_3 = 9, \quad u_2 = 5 \Rightarrow v_3 = 4 \quad (X_{23} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 = 18, \quad v_4 = 11 \Rightarrow u_3 = 7 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_1 = 4, \quad u_3 = 7 \Rightarrow v_1 = -3 \quad (X_{31} \text{ değişkeni için})$$

Temel olmayan (tabanda bulunmayan) değişkenler için $u_i + v_j - c_{ij}$ değerleri hesaplanırsa;

$$u_1 + v_1 - c_{11} = 0 - 3 - 10 = -13 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 4 - 20 = -16 \quad (X_{13} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = 5 - 3 - 12 = -10 \quad (X_{21} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_4 - c_{24} = 5 + 11 - 20 = -4 \quad (X_{21} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 - c_{32} = 7 + 2 - 14 = -5 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 - c_{33} = 7 + 4 - 16 = -5 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

Görüldüğü gibi pozitif $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerleri tükendiğinden problem optimuma ulaşmıştır.

Optimal özüm olarak;

özüm Takımı $X_{12} = 5$, $X_{14} = 10$, $X_{22} = 10$, $X_{23} = 15$, $X_{31} = 5$, $X_{34} = 5$ ve

Amaç Fonksiyonu Min $Z(x) = 2*5 + 11*10 + 7*10 + 9*15 + 4*5 + 18*5 = 435$ pb

bulunur.

Buna göre;

Silo 1'den İşletme Merkezi 2'ye 5 Kamyon,

Silo 1'den İşletme Merkezi 4'e 10 Kamyon,

Silo 2'den İşletme Merkezi 2'ye 10 Kamyon,

Silo 2'den İşletme Merkezi 3'e 15 Kamyon,

Silo 3'den İşletme Merkezi 1'e 5 Kamyon,

Silo 3'den İşletme Merkezi 4'e 5 Kamyon Mal taşınmalıdır.

Verilen problem için Optimal Maliyet 435 pb'dir.

ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ TAŞIMA PROBLEMİ

Klasik Taşıma Problemi'nde Amaç Fonksiyonu lineer halde iken Lineer Kesirli Taşıma Problemi'nde ise Amaç Fonksiyonu lineer kesirli haldedir. Lineer Kesirli Taşıma Problemi'ni çözebilmek için öncelikli olarak çeşitli yöntemler yardımıyla Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonu, Lineer Amaç Fonksiyonu haline dönüştürülmelidir.

Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemi ise birden fazla Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonu'nun bulunduğu Taşıma Problemidir. Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemi'ni çözebilmek için öncelikli olarak çeşitli yöntemler yardımıyla Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonları lineer hale dönüştürülmeli daha sonra bu amaç fonksiyonları çeşitli yöntemler yardımıyla Lineer Tek Amaç Fonksiyonu haline getirilmelidir.

Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin çözümüne ilişkin olarak son yıllarda ülkemizde yapılan en bilinen çalışmalar Fatma Tiryaki ve Nurdan Çetin tarafından gerçekleştirilmiştir [9].

Üçüncü Bölümde Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin tanımı yapılarak modeli kurulmuş ve tezin asıl konusu olan Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin Taylor Serisi ve Üyelik Fonksiyonları Yardımıyla Çözümü araştırılmıştır.

3.1 Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemi Matematiksel Modeli

$$\text{Min } W_k = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} X_{ij}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} X_{ij}} \quad (i=1,2,\dots,m), (j=1,2,\dots,n), (k=1,2,\dots,l) \quad (3.1)$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (3.3)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m), (j=1,2,\dots,n) \quad (3.4)$$

$$a_i \geq 0, b_j \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m), (j=1,2,\dots,n) \quad (3.5)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (3.6)$$

m : Kaynakların sayısı,

n : Hedeflerin sayısı ,

l : Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonu Sayısı,

a_i : i . kaynaktaki arz miktarı $(i=1,2,\dots,m)$,

b_j : j . hedefteki talep miktarı $(j=1,2,\dots,n)$,

c_{ij}^k : k . Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonun pay kısmı katsayıları $(i=1,2,\dots,m), (j=1,2,\dots,n)$

d_{ij}^k : k . Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonun paydadaki katsayıları $(i=1,2,\dots,m), (j=1,2,\dots,n)$

X_{ij} : i . kaynaktan j . hedefe taşınan mal miktarı $(i=1,2,\dots,m), (j=1,2,\dots,n)$

olmak üzere (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) kısıtları altında (3.1) amaç fonksiyonlarını sağlayan X_{ij} lerin çözümünün araştırılması "Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemi" olarak adlandırılmaktadır.

$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ ise $b_{j+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ olacak şekilde probleme hayali hedef,

$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ ise $a_{i+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ olacak şekilde probleme hayali kaynak ilave edilir.

İlave edilen hayali kaynak ve hedeflerin amaç fonksiyonundaki katsayısı sıfırdır.

Taşıma probleminde $m + n - 1$ tane değişken çeşitli yöntemlerle başlangıç çözümü olarak belirlenir ve problemin çeşitli yöntemlerle çözümü sonucu $m + n - 1$ tane değişken optimal çözüm olarak bulunur.

3.2 Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemi Modelinin Kurulması

Bölüm 2.2'dekine benzer gerçek bir hayat problemi üzerinden konu açıklayıcı şekilde anlatılabilir.

Giyim sektöründe faaliyet gösteren Yıldız Tekstil Firmasının Ankara, Antalya, İstanbul ve İzmir şehirlerinde fabrikaları; Çanakkale, Gaziantep, Kayseri ve Trabzon şehirlerinde ise satış mağazaları vardır. Koli cinsinden Fabrikaların üretim kapasitesi aşağıdaki gibidir;

Ankara : 225

Antalya : 100

İstanbul : 500

İzmir : 175

Koli cinsinden Satış Mağazalarının ürün talepleri aşağıdaki gibidir;

Çanakkale : 120

Gaziantep : 400

Kayseri : 300

Trabzon : 180

Koli başına Fabrikalardan Satış Mağazalarına ürün taşıma maliyeti aşağıdaki gibidir;

Ankara – Çanakkale : 21 pb

Ankara – Gaziantep : 22 pb

Ankara – Kayseri : 10 pb
Ankara – Trabzon : 24 pb
Antalya – Çanakkale : 23 pb
Antalya – Gaziantep : 24 pb
Antalya – Kayseri : 20 pb
Antalya – Trabzon : 40 pb
İstanbul – Çanakkale : 10 pb
İstanbul – Gaziantep : 36 pb
İstanbul – Kayseri : 25 pb
İstanbul – Trabzon : 34 pb
İzmir – Çanakkale : 10 pb
İzmir – Gaziantep : 35 pb
İzmir – Kayseri : 27 pb
İzmir – Trabzon : 42 pb

Firma yöneticilerinin Fabrikalardan Satış Mağazalarına öncelikli ürün taşıma tercihleri aşağıdaki gibidir ; (3 : En Yüksek, 1 : En Düşük)

Ankara – Çanakkale : 2
Ankara – Gaziantep : 2
Ankara – Kayseri : 3
Ankara – Trabzon : 2
Antalya – Çanakkale : 2
Antalya – Gaziantep : 2
Antalya – Kayseri : 2
Antalya – Trabzon : 1
İstanbul – Çanakkale : 3

İstanbul – Gaziantep : 1

İstanbul – Kayseri : 2

İstanbul – Trabzon : 1

İzmir – Çanakkale : 3

İzmir – Gaziantep : 1

İzmir – Kayseri : 2

İzmir – Trabzon : 1

Firma yöneticilerinin araçlarını sigorta yaptırdıkları Sigorta Şirketine göre mal taşınacak güzergahlardaki kaza riski aşağıdaki gibidir ; (4 : En Yüksek, 1 : En Düşük)

Ankara – Çanakkale : 3

Ankara – Gaziantep : 3

Ankara – Kayseri : 1

Ankara – Trabzon : 4

Antalya – Çanakkale :

Antalya – Gaziantep : 2

Antalya – Kayseri : 3

Antalya – Trabzon : 4

İstanbul – Çanakkale : 2

İstanbul – Gaziantep : 3

İstanbul – Kayseri : 3

İstanbul – Trabzon : 4

İzmir – Çanakkale : 1

İzmir – Gaziantep : 3

İzmir – Kayseri : 3

İzmir – Trabzon : 4

Yıldız Tekstil Firmasının amacı en düşük maliyetle öncelikli olarak tercih ettiği ve kaza riski düşük güzergahlarda fabrikalardan satış mağazalarına tüm talepleri karşılayacak şekilde ürünleri taşımaktır.

Yukarıdaki gerçek hayat probleminin matematiksel modeli Bölüm 3.1'deki tanımdan faydalanılarak aşağıdaki şekilde kurulabilir.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^4 X_{1j} &= 225 \\ \sum_{j=1}^4 X_{2j} &= 100 \\ \sum_{j=1}^4 X_{3j} &= 500 \end{aligned} \right\} \quad (\text{Arz Kısıtları})$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 X_{4j} &= 175 \\ \\ \left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^4 X_{i1} &= 120 \\ \sum_{i=1}^4 X_{i2} &= 400 \\ \sum_{i=1}^4 X_{i3} &= 300 \end{aligned} \right\} \quad (\text{Talep Kısıtları}) \\ \\ \sum_{i=1}^4 X_{i4} &= 180 \end{aligned}$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,3, \quad j=1,2,3,4 \quad (\text{Koli cinsinden taşınacak ürün miktarı})$$

$$Z_1(x) = 21X_{11} + 22X_{12} + 10X_{13} + 24X_{14} + 23X_{21} + 24X_{22} + 20X_{23} + 40X_{24} + 10X_{31} + 36X_{32} + 25X_{33} + 34X_{34} + 10X_{41} + 35X_{42} + 27X_{43} + 42X_{44} \quad (\text{Ürün Taşıma Maliyeti Katsayıları})$$

$$Z_2(x) = 2X_{11} + 2X_{12} + 3X_{13} + 2X_{14} + 2X_{21} + 2X_{22} + 2X_{23} + 1X_{24} + 3X_{31} + 1X_{32} + 2X_{33} + 1X_{34} + 3X_{41} + 1X_{42} + 2X_{43} + 1X_{44} \quad (\text{Tercih Derecesi Katsayıları})$$

$$Z_3(x) = 3X_{11} + 3X_{12} + 1X_{13} + 4X_{14} + 4X_{21} + 2X_{22} + 3X_{23} + 4X_{24} + 2X_{31} + 3X_{32} + 3X_{33} + 4X_{34} + 1X_{41} + 3X_{42} + 3X_{43} + 4X_{44} \quad (\text{Kaza Riski Katsayıları})$$

Burada $\sum_{i=1}^4 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j = 1000$ olduğundan problem Dengeli Taşıma Problemidir.

Fabrika yöneticilerinin, ürünleri hem en düşük maliyetle öncelikli tercih edilen güzergahlarda hem de kaza riski en düşük ve önceliği yüksek güzergahlarda taşımak gibi iki ayrı amacı olduğu düşünülürse; Taşıma Probleminin modelinde iki farklı amaç fonksiyonu ortaya çıkacaktır. Bu iki amaç;

c_{ij} : i . kaynaktan j . hedefe yapılan taşımanın birim maliyeti ($i = 1, 2, 3, 4$), ($j = 1, 2, 3, 4$),

d_{ij} : i . kaynaktan j . hedefe yapılan taşımanın önem derecesi ($i = 1, 2, 3, 4$) ($j = 1, 2, 3, 4$)

e_{ij} : i . kaynaktan j . hedefe yapılan taşımanın kaza riski ($i = 1, 2, 3, 4$), ($j = 1, 2, 3, 4$),

olmak üzere;

$$\text{Min } W_1(X) = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} X_{ij}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} X_{ij}}, \text{ Min } W_1(X) = \frac{Z_1(X)}{Z_2(X)},$$

$$\text{Min } W_2(X) = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n e_{ij} X_{ij}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} X_{ij}}, \text{ Min } W_2(X) = \frac{Z_3(X)}{Z_2(X)} \text{ şeklinde ifade edebilir.}$$

Problem birden fazla lineer kesirli amaç fonksiyonuna sahip olduğu için bu taşıma problemi “Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemi” olarak adlandırılır.

Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemini çözmek için öncelikle 1. Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonu ve 2. Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonu Taylor Serisine açılmalıdır. Daha sonra elde edilen iki lineer amaç fonksiyonu Üyelik Fonksiyonları yardımıyla toplanır. Yeni oluşan tek amaca göre Taşıma Problemi çözülür ve böylece Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin optimal çözümü bulunmuş olur.

Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemi, 1. Lineer Kesirli Amaç (W_1) ve 2. Lineer Kesirli Amaç (W_2) için Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2'deki gibi ayrı ayrı iki tablo halinde gösterilebilir.

Çizelge 3.1 Lineer Kesirli Taşıma Problemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	2 X_{11} 21	2 X_{12} 22	3 X_{13} 10	2 X_{14} 24	225
2	2 X_{21} 23	2 X_{22} 24	2 X_{23} 20	1 X_{24} 40	100
3	3 X_{31} 10	1 X_{32} 36	2 X_{33} 25	1 X_{34} 34	500
4	3 X_{41} 10	1 X_{42} 35	2 X_{43} 27	1 X_{44} 42	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

Yukarıdaki tablodaki hücrelerde;

d_{ij}
X_{ij}
c_{ij}

X_{ij} : i . Fabrika'dan j . Satış Mağazası'na taşınacak mal miktarı,

c_{ij} : i . kaynaktan j . hedefe yapılan taşımanın birim maliyeti,

d_{ij} : i . kaynaktan j . hedefe yapılan taşımanın tercih derecesidir. Ayrıca tabloda;

Fabrika 1 : Ankara, Satış Mağazası 1 : Çanakkale,

Fabrika 2 : Antalya, Satış Mağazası 2 : Gaziantep,

Fabrika 3 : İstanbul, Satış Mağazası 3 : Kayseri,

Fabrika 4 : İzmir, Satış Mağazası 4 : Trabzon olarak gösterilmiştir.

Çizelge 3.2 Lineer Kesirli Taşıma Problemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	2 X_{11} 3	2 X_{12} 3	3 X_{13} 1	2 X_{14} 4	225
2	2 X_{21} 4	2 X_{22} 2	2 X_{23} 3	1 X_{24} 4	100
3	3 X_{31} 2	1 X_{32} 3	2 X_{33} 3	1 X_{34} 4	500
4	3 X_{41} 1	1 X_{42} 3	2 X_{43} 3	1 X_{44} 4	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

Yukarıdaki tablodaki hücrelerde;

d_{ij}
X_{ij}
e_{ij}

X_{ij} : i . Fabrika'dan j . Satış Mağazası'na taşınacak mal miktarı,

e_{ij} : i . kaynaktan j . hedefe yapılan taşımanın kaza riski,

d_{ij} : i . kaynaktan j . hedefe yapılan taşımanın tercih derecesidir. Ayrıca tabloda;

Fabrika 1 : Ankara, Satış Mağazası 1 : Çanakkale,

Fabrika 2 : Antalya, Satış Mağazası 2 : Gaziantep,

Fabrika 3 : İstanbul, Satış Mağazası 3 : Kayseri,

Fabrika 4 : İzmir, Satış Mağazası 4 : Trabzon olarak gösterilmiştir.

3.3 Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin Çözümü

3.3.1 Taylor Serisi Tanımı

$F(X)$ fonksiyonunun $F^{(n-1)}(X)$ türevi $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli ve $F^{(n)}(X)$ türevi $a < x < b$ aralığında mevcut ise $c = a + \theta(X - a)$, $(0 < \theta < 1)$ olmak üzere;

$$F(X) = F(a) + \frac{F'(a)}{1!}(x-a) + \frac{F''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{F^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{F^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

$$\text{dir. } F(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{F^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n, \quad R_n(X) = \frac{F^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

$$F(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(X), \quad R_n(X) : n. \text{ terimden sonraki kalan}$$

Bu formüle $F(X)$ fonksiyonunun $X = a$ noktası civarındaki “Taylor Formülü” denir.

$F(X)$ fonksiyonunun $a \leq x \leq b$ aralığında her mertebeden türevi mevcut ve θ $(0 < \theta < 1)$ ya göre düzgün olarak, “Hata Terimi” olarak da adlandırılan $R_n(X)$ için, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(X) = 0$ ise $F(X)$ fonksiyonunun Taylor Formülünden $F(X)$ fonksiyonunun yakınsak bir seriye açılımı elde edilir.

$$F(X) = F(a) + \frac{F'(a)}{1!}(x-a) + \frac{F''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

$$F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad F(X) \text{ fonksiyonunu temsil eden bu seriye } F(X)$$

fonksiyonunun $X = a$ noktası civarındaki “Taylor Serisi” denir [10].

3.3.2 Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonlarının Taylor Serisine Açılması

Taylor Serisinden faydalanılarak Lineer Programlama Problemlerinin çözülmesine ilişkin yapılan en önemli çalışmalardan birisi Mustafa Sivri ve Nuran Güzel tarafından gerçekleştirilmiştir [11]. Sözü edilen çalışmada Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlama Probleminin uygun bölgesindeki her lineer kesirli amaç fonksiyonunu optimal yapan noktalarda lineer kesirli amaç fonksiyonları Taylor Serisine açılarak, Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlama Problemi, Çok Amaçlı Lineer Programlama Problemine dönüştürülmüştür. Daha sonra da Lineer Amaç fonksiyonlarının ağırlıkları dikkate

alınarak ağırlıklı toplamı bulunmuştur. Ardından Tek Amaçlı Lineer Programlama Problemi elde edilmiştir. Bu problemin çözümü Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlama Problemlerinin etkin hatta kuvvetli etkin çözümlerini içermektedir.

Yukarıda sözü edilen çalışmadan yola çıkarak Lineer Kesirli Taşıma Probleminde Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonu Taylor Serisi'ne açılırsa;

$$Z(X) \cong Z(X^*) + \frac{\partial Z(X^*)}{\partial X_{11}}(X_{11} - X_{11}^*) + \frac{\partial Z(X^*)}{\partial X_{12}}(X_{12} - X_{12}^*) + \dots + \frac{\partial Z(X^*)}{\partial X_{mn}}(X_{mn} - X_{mn}^*)$$

$$Z(X) \cong Z(X^*) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial Z(X^*)}{\partial X_{ij}}(X_{ij} - X_{ij}^*) \text{ elde edilir. } (X^* : \text{Optimal } X \text{ değerleri})$$

Bölüm 3.2'de verilen Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin 1. Amaç Fonksiyonunu (W_1) Taylor Serisine açmak için gerekli başlangıç çözümünü bulmak için Kuzeybatı Köşesi Yöntemi uygulanırsa;

Çizelge 3.3 Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	2 120 21	2 105 22	3 10	2 24	225
2	2 23	2 100 24	2 20	1 40	100
3	3 10	1 195 36	2 300 25	1 5 34	500
4	3 10	1 35	2 27	1 175 42	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

Başlangıç çözümü olarak;

$$X_{11} = 120, X_{12} = 105, X_{22} = 100, X_{32} = 195, X_{33} = 300, X_{34} = 5, X_{44} = 175 \text{ ve}$$

$$\text{Min } W_1(X) = \frac{21*120 + 22*105 + 24*100 + 36*195 + 25*300 + 34*5 + 42*175}{2*120 + 2*105 + 2*100 + 1*195 + 2*300 + 1*5 + 1*175} = \frac{29270}{1625} \quad (3.7)$$

bulunur. Görüldüğü gibi $Z_1(X) = 29270$, $Z_2(X) = 1625$ dir.

Bu başlangıç çözümünden yola çıkarak Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonunun Taylor Serisi'ne açılmış şekli aşağıdaki gibidir;

$$W_1(X) \cong W_1(X^*) + \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{11}}(X_{11} - X_{11}^*) + \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{12}}(X_{12} - X_{12}^*) + \dots + \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{mn}}(X_{mn} - X_{mn}^*)$$

$$W_1(X) \cong W_1(X^*) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{ij}}(X_{ij} - X_{ij}^*) \quad (X^* : \text{Optimal } X \text{ değerleri})$$

$$\begin{aligned} W_1(X) \cong & \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{11}}(X_{11} - 120) + \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{12}}(X_{12} - 105) + \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{13}}(X_{13} - 0) + \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{14}}(X_{14} - 0) \\ & + \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{21}}(X_{21} - 0) + \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{22}}(X_{22} - 100) + \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{23}}(X_{23} - 0) + \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{24}}(X_{24} - 0) \\ & + \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{31}}(X_{31} - 0) + \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{32}}(X_{32} - 195) + \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{33}}(X_{33} - 300) + \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{34}}(X_{34} - 5) \\ & + \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{41}}(X_{41} - 0) + \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{42}}(X_{42} - 0) + \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{43}}(X_{43} - 0) + \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{44}}(X_{44} - 175) + W_1(X^*) \end{aligned}$$

Türev kurallarından hatırlanacağı gibi $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$ dir.

$$W_1(X) = \frac{Z_1(X)}{Z_2(X)}, Z_1(X) = c_{11}X_{11} + c_{12}X_{12} + \dots + c_{mn}X_{mn},$$

$$Z_2(X) = d_{11}X_{11} + d_{12}X_{12} + \dots + d_{mn}X_{mn} \quad \text{olduğundan} \quad \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{11}} = \frac{c_{11}Z_2(X) - d_{11}Z_1(X)}{Z_2^2(X)},$$

$$\frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{12}} = \frac{c_{12}Z_2(X) - d_{12}Z_1(X)}{Z_2^2(X)} \text{ dir.}$$

$$\text{Genelleştirildiği vakit ise } \frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{ij}} = \frac{c_{ij}Z_2(X) - d_{ij}Z_1(X)}{Z_2^2(X)} \text{ olarak ifade edilir.}$$

Tüm değişkenler için kısmi türevler sırasıyla hesaplanırsa;

$$\frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{11}} = \frac{21*Z_2(X) - 2*Z_1(X)}{Z_2^2} = \frac{21*1625 - 2*29270}{1625^2} = -\frac{24415}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{12}} = \frac{22 * Z_2(X) - 2 * Z_1(X)}{Z_2^2} = \frac{22 * 1625 - 2 * 29270}{1625^2} = -\frac{22790}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{13}} = \frac{10 * Z_2(X) - 3 * Z_1(X)}{Z_2^2} = \frac{10 * 1625 - 3 * 29270}{1625^2} = -\frac{71560}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{14}} = \frac{24 * Z_2(X) - 2 * Z_1(X)}{Z_2^2} = \frac{24 * 1625 - 2 * 29270}{1625^2} = -\frac{19540}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{21}} = \frac{23 * Z_2(X) - 2 * Z_1(X)}{Z_2^2} = \frac{23 * 1625 - 2 * 29270}{1625^2} = -\frac{21165}{2640625}$$

$$\frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{22}} = \frac{24 * Z_2(X) - 2 * Z_1(X)}{Z_2^2} = \frac{24 * 1625 - 2 * 29270}{1625^2} = -\frac{19540}{2640625}$$

$$\frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{23}} = \frac{20 * Z_2(X) - 2 * Z_1(X)}{Z_2^2} = \frac{20 * 1625 - 2 * 29270}{1625^2} = -\frac{26040}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{24}} = \frac{40 * Z_2(X) - 1 * Z_1(X)}{Z_2^2} = \frac{40 * 1625 - 1 * 29270}{1625^2} = \frac{35730}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{31}} = \frac{10 * Z_2(X) - 3 * Z_1(X)}{Z_2^2} = \frac{10 * 1625 - 3 * 29270}{1625^2} = -\frac{71560}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{32}} = \frac{36 * Z_2(X) - 1 * Z_1(X)}{Z_2^2} = \frac{36 * 1625 - 1 * 29270}{1625^2} = \frac{29230}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{33}} = \frac{25 * Z_2(X) - 2 * Z_1(X)}{Z_2^2} = \frac{25 * 1625 - 2 * 29270}{1625^2} = -\frac{17915}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{34}} = \frac{34 * Z_2(X) - 1 * Z_1(X)}{Z_2^2} = \frac{34 * 1625 - 1 * 29270}{1625^2} = \frac{25980}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{41}} = \frac{10 * Z_2(X) - 3 * Z_1(X)}{Z_2^2} = \frac{10 * 1625 - 3 * 29270}{1625^2} = -\frac{71560}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{42}} = \frac{35 * Z_2(X) - 1 * Z_1(X)}{Z_2^2} = \frac{35 * 1625 - 1 * 29270}{1625^2} = \frac{27605}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{43}} = \frac{27 * Z_2(X) - 2 * Z_1(X)}{Z_2^2} = \frac{27 * 1625 - 2 * 29270}{1625^2} = -\frac{14665}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_1(X^*)}{\partial X_{44}} = \frac{42 * Z_2(X) - 1 * Z_1(X)}{Z_2^2} = \frac{42 * 1625 - 1 * 29270}{1625^2} = \frac{38980}{2640625}$$

değerleri bulunur. Bulunan bu değerler amaç fonksiyonunda yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} W_1(X) \cong & -\frac{24415}{2640625}(X_{11}-120) - \frac{22790}{2640625}(X_{12}-105) - \frac{71560}{2640625}(X_{13}-0) - \frac{19540}{2640625}(X_{14}-0) \\ & - \frac{21165}{2640625}(X_{21}-0) - \frac{19540}{2640625}(X_{22}-100) - \frac{26040}{2640625}(X_{23}-0) + \frac{35730}{2640625}(X_{24}-0) \\ & - \frac{71560}{2640625}(X_{31}-0) + \frac{29230}{2640625}(X_{32}-195) - \frac{17915}{2640625}(X_{33}-300) + \frac{25980}{2640625}(X_{34}-5) \\ & - \frac{71560}{2640625}(X_{41}-0) + \frac{27605}{2640625}(X_{42}-0) - \frac{14465}{2640625}(X_{43}-0) + \frac{38980}{2640625}(X_{44}-175) + \frac{29270}{1625} \end{aligned}$$

elde edilir.

Lineer Programlama Problemlerinde Amaç Fonksiyonunun payda kısmındaki, değişkenlerin katsayıları hariç, sabit terimlerin problemin optimal çözümüne etkisi olmadığından dolayı paydaları eşitleyip ihmal edersek;

$$\begin{aligned} W_1(X) \cong & -24415(X_{11}-120) - 22790(X_{12}-105) - 71560(X_{13}-0) - 19540(X_{14}-0) \\ & - 21165(X_{21}-0) - 19540(X_{22}-100) - 26040(X_{23}-0) + 35730(X_{24}-0) - 71560(X_{31}-0) \\ & + 29230(X_{32}-195) - 17915(X_{33}-300) + 25980(X_{34}-5) - 71560(X_{41}-0) \\ & + 27605(X_{42}-0) - 14465(X_{43}-0) + 38980(X_{44}-175) + 47563750 \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Lineer Programlama Problemlerinde Amaç Fonksiyonunun payda kısmında olduğu gibi pay kısmında da, değişkenlerin katsayıları hariç, sabit terimlerin problemin optimal çözümüne etkisi olmadığından dolayı sabit terimleri ihmal edersek;

$$\begin{aligned} W_1(X) \cong & -24415X_{11} - 22790X_{12} - 71560X_{13} - 19540X_{14} - 21165X_{21} - 19540X_{22} - 26040X_{23} \\ & + 35730X_{24} - 71560X_{31} + 29230X_{32} - 17915X_{33} + 25980X_{34} - 71560X_{41} + 27605X_{42} \\ & - 14465X_{43} + 38980X_{44} \text{ elde edilir ve Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonu, Lineer Amaç} \\ & \text{Fonksiyonuna dönüşmüş olur.} \end{aligned}$$

Bölüm 3.2’de verilen gerçek hayat problemini Üyelik Fonksiyonları yardımıyla çözebilmek için önce 1. Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonu (W_1) Taylor Serisi’ne açılıp Lineer Amaç Fonksiyonuna dönüştürülerek Minimum ve Maksimum değerleri bulunmalı, daha sonra 2. Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonu (W_2) Taylor Serisi’ne açılıp Lineer Amaç Fonksiyonuna dönüştürülerek Minimum ve Maksimum değerleri bulunmalıdır.

Yukarıdaki işlemler sonucunda Bölüm 2.2’deki gibi Taşıma Problemi elde edilmiş olur.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^4 X_{1j} &= 225 \\ \sum_{j=1}^4 X_{2j} &= 100 \\ \sum_{j=1}^4 X_{3j} &= 500 \\ \sum_{j=1}^4 X_{4j} &= 175 \end{aligned} \right\} \quad \text{(Arz Kısıtları)}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^4 X_{i1} &= 120 \\ \sum_{i=1}^4 X_{i2} &= 400 \\ \sum_{i=1}^4 X_{i3} &= 300 \\ \sum_{i=1}^4 X_{i4} &= 180 \end{aligned} \right\} \quad \text{(Talep Kısıtları)}$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad \text{(Koli cinsinden taşınacak ürün miktarı)}$$

$$\begin{aligned} \text{Min } W_1(X) &= -24415X_{11} - 22790X_{12} - 71560X_{13} - 19540X_{14} - 21165X_{21} - 19540X_{22} \\ &\quad - 26040X_{23} + 35730X_{24} - 71560X_{31} + 29230X_{32} - 17915X_{33} + 25980X_{34} - 71560X_{41} \\ &\quad + 27605X_{42} - 14665X_{43} + 38980X_{44} \end{aligned} \quad \text{(Amaç Fonksiyonu)}$$

Görüldüğü gibi $\sum_{i=1}^4 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j = 1000$ olduğundan problem Dengeli Taşıma Problemidir.

Problem Çizelge 3.4'deki gibi tablo halinde gösterilebilir.

Çizelge 3.4 Taşıma Problemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	X_{11} - 24415	X_{12} - 22790	X_{13} -71560	X_{14} - 19540	225
2	X_{21} - 21165	X_{22} - 19540	X_{23} -26040	X_{24} 35730	100
3	X_{31} - 71560	X_{32} 29230	X_{33} -17915	X_{34} 25980	500
4	X_{41} - 71560	X_{42} 27605	X_{43} -14665	X_{44} 38980	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

Bölüm 3.2'de verilen gerçek hayat probleminin matematiksel modelinin kurulmasıyla elde edilen Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemi'nin 1. Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonunu Taylor Serisi'ne açabilmek için Kuzeybatı köşesinden faydalanılarak başlangıç çözüm takımı bulunmuştu. Aynı şekilde bu problem için de Kuzeybatı köşesi yönteminden faydalanılarak başlangıç çözümleri bulunabilir.

Yukarıdaki Çizelge 3.4 üzerinde Kuzeybatı Köşesi yardımıyla mallar yerleştirilirse;

Çizelge 3.5 Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	120 - 24415	105 - 22790	-71560	- 19540	225
2	- 21165	100 - 19540	-26040	35730	100
3	- 71560	195 29230	300 -17915	5 25980	500
4	- 71560	27605	-14665	175 38980	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

Başlangıç çözümü olarak;

$$X_{11} = 120, X_{12} = 105, X_{22} = 100, X_{32} = 195, X_{33} = 300, X_{34} = 5, X_{44} = 175$$

Min $W_1(X) = 0$ bulunur.

Daha önce Bölüm 2.2’de verilen Taşıma Problemi için Bölüm 2.3.1’de bahsedilen Kuzeybatı Köşesi, En Düşük Maliyetler ve Vogel Yaklaşımı yöntemleri ile başlangıç çözümleri bulunmuş ve Kuzeybatı köşesi yöntemi uygulanarak elde edilen başlangıç çözümlerinden yola çıkarak Bölüm 2.3.2.1’de bahsedilen Geliştirilmiş Dağıtım yöntemiyle problem çözülmüştü.

Yine aynı şekilde bu problem için de Kuzeybatı Köşesi yöntemi uygulanarak elde edilen başlangıç çözümlerinden yola çıkılarak Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemiyle problem çözülmek istenirse;

Başlangıç temel (tabanda bulunan) değişkenleri için;

$$u_1 + v_1 = -24415, u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = -24415 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_2 = -22790, u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = -22790 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = -19540, v_2 = -22790 \Rightarrow u_2 = 3250 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 = 29230, v_2 = -22790 \Rightarrow u_3 = 52020 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 = -17915, u_3 = 52020 \Rightarrow v_3 = -69935 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 = 25980, u_3 = 52020 \Rightarrow v_4 = -26040 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_4 = 38980, v_4 = -26040 \Rightarrow u_4 = 65020 \quad (X_{44} \text{ değişkeni için})$$

bulunur.

Temel olmayan (tabanda bulunmayan) değişkenler için $u_i + v_j - c_{ij}$ değerleri hesaplanırsa;

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 69935 + 71560 = 1625 \quad (X_{13} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 - 26040 + 19540 = -6500 \quad (X_{14} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = 3250 - 24415 + 21165 = 0 \quad (X_{21} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_3 - c_{23} = 3250 - 69935 + 26040 = -40645 \quad (X_{23} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_4 - c_{24} = 3250 - 26040 - 35730 = -58520 \quad (X_{24} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = 52020 - 24415 + 71560 = 99165 \quad (X_{31} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_1 - c_{41} = 65020 - 24415 + 71560 = 112165 \quad (X_{41} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_2 - c_{42} = 65020 - 22790 - 27605 = 14625 \quad (X_{42} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_3 - c_{43} = 65020 - 69935 + 14665 = 9750 \quad (X_{43} \text{ değişkeni için})$$

değerleri elde edilir.

Pozitif en büyük $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerine X_{41} değişkeni sahip olduğu için X_{41} değişkeni yeni temel değişken olarak tabana girer. X_{41} değişkeninin olduğu hücreye T miktar mal yüklenir.

Bazı değişkenlerin değerinde T miktar artma olurken bazı değişkenlerin değerinde T miktar azalma olacaktır. $X_{ij} - T = 0$ eşitliğini minimum yapan T değeri hesaplanır ve hücrelere yüklenecek yeni miktarlar belli olur.

Çizelge 3.6 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	$120 - T$ - 24415	$105 + T$ - 22790	-71560	- 19540	225
2	- 21165	100 - 19540	-26040	35730	100
3	- 71560	$195 - T$ 29230	300 -17915	$5 + T$ 25980	500
4	T - 71560	27605	-14665	$175 - T$ 38980	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$120 - T = 0 \Rightarrow T = 120, 195 - T = 0 \Rightarrow T = 195, 175 - T = 0 \Rightarrow T = 175$$

Min (120,195,175) = 120 olduğundan $T = 120$ dir. X_{11} tabandan çıkar.

Çizelge 3.6'deki değerler T değeri yerine 120 konularak güncellenirse;

Çizelge 3.7 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	- 24415	225 - 22790	-71560	- 19540	225
2	- 21165	100 - 19540	-26040	35730	100
3	- 71560	75 29230	300 -17915	125 25980	500
4	120 - 71560	27605	-14665	55 38980	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$X_{12} = 225, X_{22} = 100, X_{32} = 75, X_{33} = 300, X_{34} = 125, X_{41} = 120, X_{44} = 55$$

Min $W_1(X) = -13459800$ bulunur.

Temel (tabanda bulunan) değişkenleri için;

$$u_1 + v_2 = -22790, u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = -22790 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = -19540, v_2 = -22790 \Rightarrow u_2 = 3250 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 = 29230, v_2 = -22790 \Rightarrow u_3 = 52020 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 = -17915, u_3 = 52020 \Rightarrow v_3 = -69935 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 = 25980, u_3 = 52020 \Rightarrow v_4 = -26040 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_4 = 38980, v_4 = -26040 \Rightarrow u_4 = 65020 \quad (X_{44} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_1 = -71560, u_4 = 65020 \Rightarrow v_1 = -136580 \quad (X_{41} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_1 - c_{11} = 0 - 136580 + 24415 = -112165 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 69935 + 71560 = 1625 \quad (X_{13} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 - 26040 + 19540 = -6500 \quad (X_{14} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = 3250 - 136580 + 21165 = -112165 \quad (X_{21} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_3 - c_{23} = 3250 - 69935 + 26040 = -40645 \quad (X_{23} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_4 - c_{24} = 3250 - 26040 - 35730 = -58520 \quad (X_{24} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = 52020 - 136580 + 71560 = -13000 \quad (X_{31} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_4 + v_2 - c_{42} = 65020 - 22790 - 27605 = 14625 \quad (X_{42} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_3 - c_{43} = 65020 - 69935 + 14665 = 9750 \quad (X_{43} \text{ değişkeni için})$$

Pozitif en byk $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerine X_{42} değişkeni sahip olduğu için X_{42} değişkeni yeni temel değişken olarak tabana girer. X_{42} değişkeninin olduğu hücreye T miktar mal yüklenir.

Çizelge 3.8 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	- 24415	225 - 22790	-71560	- 19540	225
2	- 21165	100 - 19540	-26040	35730	100
3	- 71560	75 - T 29230	300 -17915	125 + T 25980	500
4	120 - 71560	T 27605	-14665	55 - T 38980	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$75 - T = 0 \Rightarrow T = 75, 55 - T = 0 \Rightarrow T = 55.$$

Min (75,55) = 55 olduğundan $T = 55$ dir. X_{44} tabandan çıkar.

Çizelge 3.9 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	- 24415	225 - 22790	-71560	- 19540	225
2	- 21165	100 - 19540	-26040	35730	100
3	- 71560	20 29230	300 -17915	180 25980	500
4	120 - 71560	55 27605	-14665	38980	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$X_{12} = 225, X_{22} = 100, X_{32} = 20, X_{33} = 300, X_{34} = 180, X_{41} = 120, X_{42} = 55$$

$$\text{Min } W_1(X) = -14264175$$

$$u_1 + v_2 = -22790, u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = -22790 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = -19540, v_2 = -22790 \Rightarrow u_2 = 3250 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 = 29230, v_2 = -22790 \Rightarrow u_3 = 52020 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 = -17915, u_3 = 52020 \Rightarrow v_3 = -69935 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 = 25980, u_3 = 52020 \Rightarrow v_4 = -26040 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_2 = 27605, v_2 = -22790 \Rightarrow u_4 = 50395 \quad (X_{42} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_1 = -71560, u_4 = 50395 \Rightarrow v_1 = -121955 \quad (X_{41} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_1 - c_{11} = 0 - 121955 + 24415 = -97540 \quad (X_{11} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 69935 + 71560 = 1625 \quad (X_{13} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 - 27665 + 19540 = -8125 \quad (X_{14} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = 3250 - 121955 + 21165 = -97540 \quad (X_{21} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_3 - c_{23} = 3250 - 69935 + 26040 = -40645 \quad (X_{23} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_4 - c_{24} = 3250 - 27665 - 35730 = -58520 \quad (X_{24} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = 52020 - 121955 + 71560 = 1625 \quad (X_{31} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_3 - c_{43} = 50395 - 69935 + 14665 = -4875 \quad (X_{43} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_4 - c_{44} = 50395 - 26040 - 38980 = -14625 \quad (X_{44} \text{ değişkeni için})$$

Pozitif en büyük $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerine X_{13} değişkeni sahip olduğu için X_{13} değişkeni yeni temel değişken olarak tabana girer. X_{13} değişkeninin olduğu hücreye T miktar mal yüklenir.

Çizelge 3.10 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları Fabrikalar	1	2	3	4	Arz Miktarları
1	- 24415	225 - T - 22790	T -71560	- 19540	225
2	- 21165	100 - 19540	-26040	35730	100
3	- 71560	20 + T 29230	300 - T -17915	180 25980	500
4	120 - 71560	55 27605	-14665	38980	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$225 - T = 0 \Rightarrow T = 225, 300 - T = 0 \Rightarrow T = 300.$$

Min (225,300) = 225 olduğundan $T = 225$ dir. X_{12} tabandan çıkar.

Çizelge 3.11 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	- 24415	- 22790	225 -71560	- 19540	225
2	- 21165	100 - 19540	-26040	35730	100
3	- 71560	245 29230	75 -17915	180 25980	500
4	120 - 71560	55 27605	-14665	38980	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$X_{13} = 225, X_{22} = 100, X_{32} = 245, X_{33} = 75, X_{34} = 180, X_{41} = 120, X_{42} = 55$$

Amaç Fonksiyonu $\text{Min } W_1(X) = -14629800$ bulunur.

$$u_1 + v_3 = -71560, u_1 = 0 \Rightarrow v_3 = -71560 \quad (X_{13} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 = -17915, v_3 = -71560 \Rightarrow u_3 = 53645 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 = 29230, u_3 = 53645 \Rightarrow v_2 = -24415 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = -19540, v_2 = -24415 \Rightarrow u_2 = 4875 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 = 25980, u_3 = 53645 \Rightarrow v_4 = -27665 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_2 = 27605, v_2 = -24415 \Rightarrow u_4 = 52020 \quad (X_{42} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_1 = -71560, u_4 = 52020 \Rightarrow v_1 = -123580 \quad (X_{41} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_1 - c_{11} = 0 - 123580 + 24415 = -99165 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_2 - c_{12} = 0 - 24415 + 22790 = -1625 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 - 26040 + 19540 = -6500 \quad (X_{14} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = 4875 - 123580 + 21165 = -97540 \quad (X_{21} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_3 - c_{23} = 4875 - 71560 + 26040 = -40645 \quad (X_{23} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_4 - c_{24} = 4875 - 26040 - 35730 = -56895 \quad (X_{24} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = 53645 - -123580 + 71560 = 1625 \quad (X_{31} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_3 - c_{43} = 52020 - 71560 + 14665 = -4875 \quad (X_{43} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_4 - c_{44} = 52020 - 26040 - 38980 = -13000 \quad (X_{44} \text{ değişkeni için})$$

Pozitif en byk $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerine X_{31} değişkeni sahip olduğu için X_{31} değişkeni yeni temel değişken olarak tabana girer. X_{31} değişkeninin olduğu hücreye T miktar mal yüklenir.

Çizelge 3.12 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	- 24415	- 22790	225 -71560	- 19540	225
2	- 21165	100 - 19540	-26040	35730	100
3	T - 71560	$245 - T$ 29230	75 -17915	180 25980	500
4	$120 - T$ - 71560	$55 + T$ 27605	-14665	38980	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$245 - T = 0 \Rightarrow T = 245, 120 - T = 0 \Rightarrow T = 120$$

Min (245,120) = 120 olduğundan $T = 120$ dir. X_{41} tabandan çıkar.

Çizelge 3.13 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	- 24415	- 22790	225 -71560	- 19540	225
2	- 21165	100 - 19540	-26040	35730	100
3	120 - 71560	125 29230	75 -17915	180 25980	500
4	- 71560	175 27605	-14665	38980	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$X_{13} = 225, X_{22} = 100, X_{31} = 120, X_{32} = 125, X_{33} = 75, X_{34} = 180, X_{42} = 175$$

Amaç Fonksiyonu Min $W_1(X) = -14824800$ bulunur.

$$u_1 + v_3 = -71560, u_1 = 0 \Rightarrow v_3 = -71560 \quad (X_{13} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 = -17915, v_3 = -71560 \Rightarrow u_3 = 53645 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 = 29230, u_3 = 53645 \Rightarrow v_2 = -24415 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_1 = -71560, u_3 = 53645 \Rightarrow v_1 = -125205 \quad (X_{31} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = -19540, v_2 = -24415 \Rightarrow u_2 = 4875 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 = 25980, u_3 = 53645 \Rightarrow v_4 = -27665 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_2 = 27605, v_2 = -24415 \Rightarrow u_4 = 52020 \quad (X_{42} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_1 - c_{11} = 0 - 125205 + 24415 = -100790 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_2 - c_{12} = 0 - 24415 + 22790 = -1625 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 - 27665 + 19540 = -8125 \quad (X_{14} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = 4875 - 123580 + 21165 = -97540 \quad (X_{21} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_3 - c_{23} = 4875 - 71560 + 26040 = -40645 \quad (X_{23} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_4 - c_{24} = 4875 - 27665 - 35730 = -58520 \quad (X_{24} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_1 - c_{41} = 52020 - 125205 + 71560 = -1625 \quad (X_{41} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_3 - c_{43} = 52020 - 71560 + 14665 = -4875 \quad (X_{43} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_4 - c_{44} = 52020 - 27665 - 38980 = -14625 \quad (X_{44} \text{ değişkeni için})$$

Pozitif $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerleri tükendiğinden problem optimuma ulaşmıştır.

Optimal özüm;

$$X_{13} = 225, X_{22} = 100, X_{31} = 120, X_{32} = 125, X_{33} = 75, X_{34} = 180, X_{42} = 175$$

$$\text{Min } W_1(X) = -14824800 \text{ olarak bulunur.} \quad (3.8)$$

Böylece Bölüm 3.2'deki 1. Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonu (W_1) Taylor Serisine açılarak Minimum değeri elde edilmiş olunur. Minimum değeri bulunan (W_1) Amaç Fonksiyonunun Maksimum değeri de bulunmalıdır.

Daha önce Bölüm 2.2'de verilen Taşıma Problemi için Bölüm 2.3.1'de bahsedilen Kuzeybatı Köşesi, En Düşük Maliyetler ve Vogel Yaklaşımı yöntemleri ile başlangıç çözümleri bulunmuş ve Kuzeybatı köşesi yöntemi uygulanarak elde edilen başlangıç özümlelerinden yola çıkarak Bölüm 2.3.2.1'de bahsedilen Geliştirilmiş Dağıtım yöntemiyle problem özölmüştür.

Yine aynı şekilde bu problem için de Kuzeybatı Köşesi yöntemi uygulanarak elde edilen başlangıç özümlelerinden yola çıkılarak Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemiyle problem özölmelidir. Ancak bu sefer problem Maksimizasyon Problemi olduğu için Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi biraz farklılık gösterecektir.

Bölüm 2.1’de (2.1-2.6) denklemleri ile verilen Taşıma Problemi’nin Amacı Minimizasyon yerine Maksimizasyon olursa bu problemin Duali;

m : Kaynakların sayısı,

n : Hedeflerin sayısı,

a_i : i . kaynaktaki arz miktarı ($i = 1, 2, \dots, m$),

b_j : j . hedefteki talep miktarı ($j = 1, 2, \dots, n$),

c_{ij} : i . kaynaktan j . hedefe yapılan taşımanın birim maliyeti ($i = 1, 2, \dots, m$), ($j = 1, 2, \dots, n$),

u_i : i . kaynakla ilgili kısıtın dual değişkeni ($i = 1, 2, \dots, m$),

v_j : j . hedefle ilgili kısıtın dual değişkeni ($j = 1, 2, \dots, n$)

olmak üzere;

$$\text{Min } Z(x) = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j$$

$$u_i + v_j \geq c_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m), (j = 1, 2, \dots, n)$$

şeklinde gösterilir.

Başlangıç çözümlerinde elde edilen $m + n - 1$ tane temel değişken için $u_i + v_j = c_{ij}$ dir.

$m + n - 1$ tane temel değişkene karşılık (u, v) cinsinden $m + n$ değişken ve $m + n - 1$ tane denklem söz konusu olduğundan keyfi olarak $u_1 = 0$ kabul edilir.

(u, v) değerleri bulunduktan sonra temel olmayan değişkenler için $u_i + v_j - c_{ij}$ değerleri hesaplanır ve negatif en küçük $u_i + v_j - c_{ij}$ değerine sahip değişken tabana girer. Tabana giren değişkenin olduğu hücreye T miktar mal yüklenir. Mevcut sistemde T kadar fazlalık olduğundan dolayı diğer temel değişkenlerin bazılarında T miktar azalma, bazılarında ise T miktar artma olur. Azalma olan temel değişkenler için $X_{ij} - T = 0$ eşitliğini minimum yapan T değeri hesaplanır ve hücrelere yüklenecek yeni miktarlar belli olmuş olur. $X_{ij} - T = 0$ eşitliğini sağlayan değişken otomatik olarak tabandan çıkacaktır. Eğer birden fazla değişken için $X_{ij} - T = 0$ oluyorsa bu durumda keyfi olarak sadece bir tanesi tabandan çıkar. Bu işlemler temel olmayan tüm

değişkenlerin $u_i + v_j - c_{ij}$ değerleri pozitif oluncaya kadar devam eder. Temel olmayan tüm değişkenlerin $u_i + v_j - c_{ij}$ değerleri pozitif olduğunda problem optimuma ulaşır.

Çizelge 3.14 Başlangıç Çözüm Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	120 - 24415	105 - 22790	-71560	- 19540	225
2	- 21165	100 - 19540	-26040	35730	100
3	- 71560	195 29230	300 -17915	5 25980	500
4	- 71560	27605	-14665	175 38980	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

Başlangıç çözümü olarak;

$$X_{11} = 120, X_{12} = 105, X_{22} = 100, X_{32} = 195, X_{33} = 300, X_{34} = 5, X_{44} = 175$$

Max $W_1(X) = 0$ bulunur.

$$u_1 + v_1 = -24415, u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = -24415 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_2 = -22790, u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = -22790 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = -19540, v_2 = -22790 \Rightarrow u_2 = 3250 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 = 29230, v_2 = -22790 \Rightarrow u_3 = 52020 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 = -17915, u_3 = 52020 \Rightarrow v_3 = -69935 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 = 25980, u_3 = 52020 \Rightarrow v_4 = -26040 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_4 = 38980, v_4 = -26040 \Rightarrow u_4 = 65020 \quad (X_{44} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 69935 + 71560 = 1625 \quad (X_{13} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 - 26040 + 19540 = -6500 \quad (X_{14} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = 3250 - 24415 + 21165 = 0 \quad (X_{21} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_3 - c_{23} = 3250 - 69935 + 26040 = -40645 \quad (X_{23} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_4 - c_{24} = 3250 - 26040 - 35730 = -58520 \quad (X_{24} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = 52020 - 24415 + 71560 = 99165 \quad (X_{31} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_1 - c_{41} = 65020 - 24415 + 71560 = 112165 \quad (X_{41} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_2 - c_{42} = 65020 - 22790 - 27605 = 14625 \quad (X_{42} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_3 - c_{43} = 65020 - 69935 + 14665 = 9750 \quad (X_{43} \text{ değişkeni için})$$

Negatif en kk ($u_i + v_j - c_{ij}$) değerine X_{24} değişkeni sahip olduğu için X_{24} değişkeni yeni temel değişken olarak tabana girer. X_{24} değişkeninin olduğu hücreye T miktar mal yüklenir.

Çizelge 3.15 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	120 - 24415	105 - 22790	-71560	- 19540	225
2	- 21165	100 - T - 19540	-26040	T 35730	100
3	- 71560	195 + T 29230	300 -17915	5 - T 25980	500
4	- 71560	27605	-14665	175 38980	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$5 - T = 0 \Rightarrow T = 5, 100 - T = 0 \Rightarrow T = 100$$

Min (5,100) = 5 olduğundan $T = 5$ dir. X_{34} tabandan çıkar.

Çizelge 3.16 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	120 - 24415	105 - 22790	-71560	- 19540	225
2	- 21165	95 - 19540	-26040	5 35730	100
3	- 71560	200 29230	300 -17915	25980	500
4	- 71560	27605	-14665	175 38980	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$X_{11} = 120, X_{12} = 105, X_{22} = 95, X_{24} = 5, X_{32} = 200, X_{33} = 300, X_{44} = 175$$

$$\text{Max } W_1(X) = 292600$$

$$u_1 + v_1 = -24415, u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = -24415 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_2 = -22790, u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = -22790 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = -19540, v_2 = -22790 \Rightarrow u_2 = 3250 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_4 = 35730, u_2 = 3250 \Rightarrow v_4 = 32480 \quad (X_{24} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 = 29230, v_2 = -22790 \Rightarrow u_3 = 52020 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 = -17915, u_3 = 52020 \Rightarrow v_3 = -69935 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_4 = 38980, v_4 = 32480 \Rightarrow u_4 = 6500 \quad (X_{44} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 69935 + 71560 = 1625 \quad (X_{13} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 32480 + 19540 = 52020 \quad (X_{14} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = 3250 - 24415 + 21165 = 0 \quad (X_{21} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_3 - c_{23} = 3250 - 69935 + 26040 = -40645 \quad (X_{23} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = 52020 - 24415 + 71560 = 99165 \quad (X_{31} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_3 + v_4 - c_{34} = 52020 + 32480 - 25980 = 58520 \quad (X_{34} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_4 + v_1 - c_{41} = 6500 - 24415 + 71560 = 53645 \quad (X_{41} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_4 + v_2 - c_{42} = 6500 - 22790 - 27605 = -43895 \quad (X_{42} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_3 - c_{43} = 6500 - 69935 + 14665 = -48770 \quad (X_{43} \text{ değişkeni için})$$

Negatif en kk ($u_i + v_j - c_{ij}$) değerine X_{43} değişkeni sahip olduğu için X_{43} değişkeni yeni temel değişken olarak tabana girer. X_{43} değişkeninin olduğu hücreye T miktar mal yüklenir.

Çizelge 3.17 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	120 - 24415	105 - 22790	-71560	- 19540	225
2	- 21165	95 - T - 19540	-26040	5 + T 35730	100
3	- 71560	200 + T 29230	300 - T -17915	25980	500
4	- 71560	27605	T -14665	175 - T 38980	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$95 - T = 0 \Rightarrow T = 95, 175 - T = 0 \Rightarrow T = 175, 300 - T = 0 \Rightarrow T = 300$$

Min (95,175,300) = 95 olduğundan $T = 95$ dir. X_{22} tabandan çıkar.

Çizelge 3.18 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	120 - 24415	105 - 22790	-71560	- 19540	225
2	- 21165	- 19540	-26040	100 35730	100
3	- 71560	295 29230	205 -17915	25980	500
4	- 71560	27605	95 -14665	80 38980	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$X_{11} = 120, X_{12} = 105, X_{24} = 100, X_{32} = 295, X_{33} = 205, X_{43} = 95, X_{44} = 80$$

$$\text{Max } W_1(X) = 4925750$$

$$u_1 + v_1 = -24415, u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = -24415 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_2 = -22790, u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = -22790 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 = 29230, v_2 = -22790 \Rightarrow u_3 = 52020 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 = -17915, u_3 = 52020 \Rightarrow v_3 = -69935 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_3 = -14665, v_3 = -69935 \Rightarrow u_4 = 55270 \quad (X_{43} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_4 = 38980, u_4 = 55270 \Rightarrow v_4 = -16290 \quad (X_{44} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_4 = 35730, v_4 = -16290 \Rightarrow u_2 = 52020 \quad (X_{24} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 69935 + 71560 = 1625 \quad (X_{13} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 - 16290 + 19540 = 3250 \quad (X_{14} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = 52020 - 24415 + 21165 = 48770 \quad (X_{21} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_2 - c_{22} = 52020 - 22790 + 19540 = 48770 \quad (X_{22} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_3 - c_{23} = 52020 - 69935 + 26040 = 8125 \quad (X_{23} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = 52020 - 24415 + 71560 = 99165 \quad (X_{31} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 - c_{34} = 52020 - 16290 - 25980 = 9750 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_1 - c_{41} = 55270 - 24415 + 71560 = 102415 \quad (X_{41} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_2 - c_{42} = 55270 - 22790 - 27605 = 4875 \quad (X_{42} \text{ değişkeni için})$$

Negatif $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerleri tükendiğinden problem optimuma ulaşmıştır.

Optimal özüm;

$$X_{11} = 120, X_{12} = 105, X_{24} = 100, X_{32} = 295, X_{33} = 205, X_{43} = 95, X_{44} = 80$$

$$\text{Max } W_1(X) = 4925750 \text{ olarak bulunur.} \quad (3.9)$$

Bölüm 3.2’de verilen çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin 1. Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonu (W_1) Taylor Serisine açılarak Minimum ve Maksimum değerleri bulunmuş oldu. Aynı işlemler Bölüm 3.2’de verilen çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin 2. Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonu (W_2) için de yapılarak Minimum ve Maksimum değerler bulunmalıdır. Daha sonra bu değerler kullanılarak Üyelik Fonksiyonları belirlenmelidir.

Bölüm 3.2’de verilen çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin 2. Amaç Fonksiyonunu (W_2) Taylor Serisine açmak için gerekli başlangıç çözümünü bulmak için Kuzeybatı Köşesi Yöntemi uygulanırsa;

Çizelge 3.19 Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	2 120 3	2 105 3	3 1	2 4	225
2	2 4	2 100 2	2 3	1 4	100
3	3 2	1 195 3	2 300 3	1 5 4	500
4	3 1	1 3	2 3	1 175 4	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

Başlangıç çözümü olarak;

$$X_{11} = 120, X_{12} = 105, X_{22} = 100, X_{32} = 195, X_{33} = 300, X_{34} = 5, X_{44} = 175$$

$$\text{Min } W_2(X) = \frac{3*120 + 3*105 + 2*100 + 3*195 + 3*300 + 4*5 + 4*175}{2*120 + 2*105 + 2*100 + 1*195 + 2*300 + 1*5 + 1*175} = \frac{3080}{1625} \quad (3.10)$$

bulunur. Görüldüğü gibi $Z_1(X) = 3080$, $Z_2(X) = 1625$ dir.

Bu başlangıç çözümünden yola çıkarak 2. Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonunun (W_2)

Taylor Serisi'ne açılmış şekli aşağıdaki gibidir;

$$Z(X) \cong Z(X^*) + \frac{\partial Z(X^*)}{\partial X_{11}}(X_{11} - X_{11}^*) + \frac{\partial Z(X^*)}{\partial X_{12}}(X_{12} - X_{12}^*) + \dots + \frac{\partial Z(X^*)}{\partial X_{mn}}(X_{mn} - X_{mn}^*)$$

$$Z(X) \cong Z(X^*) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial Z(X^*)}{\partial X_{ij}}(X_{ij} - X_{ij}^*) \quad (X^* : \text{Optimal } X \text{ değerleri})$$

$$\begin{aligned}
W_2(X) \equiv & \frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{11}}(X_{11}-120) + \frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{12}}(X_{12}-105) + \frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{13}}(X_{13}-0) + \frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{14}}(X_{14}-0) \\
& + \frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{21}}(X_{21}-0) + \frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{22}}(X_{22}-100) + \frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{23}}(X_{23}-0) + \frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{24}}(X_{24}-0) \\
& + \frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{31}}(X_{31}-0) + \frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{32}}(X_{32}-195) + \frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{33}}(X_{33}-300) + \frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{34}}(X_{34}-5) \\
& + \frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{41}}(X_{41}-0) + \frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{42}}(X_{42}-0) + \frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{43}}(X_{43}-0) + \frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{44}}(X_{44}-175) + W_2(X^*)
\end{aligned}$$

Türev kurallarından hatırlanacağı gibi $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$ dir.

$$W_2(X) = \frac{Z_3(X)}{Z_2(X)}, \quad Z_3(X) = e_{11}X_{11} + e_{12}X_{12} + \dots + e_{mn}X_{mn} \quad Z_2(X) = d_{11}X_{11} + d_{12}X_{12} + \dots + d_{mn}X_{mn}$$

$$\text{olduğundan} \quad \frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{11}} = \frac{e_{11}Z_2(X) - d_{11}Z_3(X)}{Z_2^2(X)}, \quad \frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{12}} = \frac{e_{12}Z_2(X) - d_{12}Z_3(X)}{Z_2^2(X)} \text{ dir.}$$

$$\text{Genelleştirildiği vakit ise} \quad \frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{ij}} = \frac{e_{ij}Z_2(X) - d_{ij}Z_3(X)}{Z_2^2(X)} \text{ olarak ifade edilir.}$$

Tüm değişkenler için kısmi türevler sırasıyla hesaplanırsa;

$$\frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{11}} = \frac{3*Z_2(X) - 2*Z_3(X)}{Z_2^2} = \frac{3*1625 - 2*3080}{1625^2} = -\frac{1285}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{12}} = \frac{3*Z_2(X) - 2*Z_3(X)}{Z_2^2} = \frac{3*1625 - 2*3080}{1625^2} = -\frac{1285}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{13}} = \frac{1*Z_2(X) - 3*Z_3(X)}{Z_2^2} = \frac{1*1625 - 3*3080}{1625^2} = -\frac{7615}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{14}} = \frac{4*Z_2(X) - 2*Z_3(X)}{Z_2^2} = \frac{4*1625 - 2*3080}{1625^2} = \frac{340}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{21}} = \frac{4*Z_2(X) - 2*Z_3(X)}{Z_2^2} = \frac{4*1625 - 2*3080}{1625^2} = \frac{340}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{22}} = \frac{2*Z_2(X) - 2*Z_3(X)}{Z_2^2} = \frac{2*1625 - 2*3080}{1625^2} = -\frac{2910}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{23}} = \frac{3*Z_2(X) - 2*Z_3(X)}{Z_2^2} = \frac{3*1625 - 2*3080}{1625^2} = -\frac{1285}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{24}} = \frac{4*Z_2(X) - 1*Z_3(X)}{Z_2^2} = \frac{4*1625 - 1*3080}{1625^2} = \frac{3420}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{31}} = \frac{2*Z_2(X) - 3*Z_3(X)}{Z_2^2} = \frac{2*1625 - 3*3080}{1625^2} = -\frac{5990}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{32}} = \frac{3*Z_2(X) - 1*Z_3(X)}{Z_2^2} = \frac{3*1625 - 1*3080}{1625^2} = \frac{1795}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{33}} = \frac{3*Z_2(X) - 2*Z_3(X)}{Z_2^2} = \frac{3*1625 - 2*3080}{1625^2} = -\frac{1285}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{34}} = \frac{4*Z_2(X) - 1*Z_3(X)}{Z_2^2} = \frac{4*1625 - 1*3080}{1625^2} = \frac{3420}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{41}} = \frac{1*Z_2(X) - 3*Z_3(X)}{Z_2^2} = \frac{1*1625 - 3*3080}{1625^2} = -\frac{7615}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{42}} = \frac{3*Z_2(X) - 1*Z_3(X)}{Z_2^2} = \frac{3*1625 - 1*3080}{1625^2} = \frac{1795}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{43}} = \frac{3*Z_2(X) - 2*Z_3(X)}{Z_2^2} = \frac{3*1625 - 2*3080}{1625^2} = -\frac{1285}{2640625},$$

$$\frac{\partial W_2(X^*)}{\partial X_{44}} = \frac{4*Z_2(X) - 1*Z_3(X)}{Z_2^2} = \frac{4*1625 - 1*3080}{1625^2} = \frac{3420}{2640625}$$

değerleri bulunur. Bulunan bu değerler amaç fonksiyonunda yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} W_2(X) \cong & -\frac{1285}{2640625}(X_{11} - 120) - \frac{1285}{2640625}(X_{12} - 105) - \frac{7615}{2640625}(X_{13} - 0) + \frac{340}{2640625}(X_{14} - 0) \\ & + \frac{340}{2640625}(X_{21} - 0) - \frac{2910}{2640625}(X_{22} - 100) - \frac{1285}{2640625}(X_{23} - 0) + \frac{3420}{2640625}(X_{24} - 0) \\ & - \frac{5990}{2640625}(X_{31} - 0) + \frac{1795}{2640625}(X_{32} - 195) - \frac{1285}{2640625}(X_{33} - 300) + \frac{3420}{2640625}(X_{34} - 5) \\ & - \frac{7615}{2640625}(X_{41} - 0) + \frac{1795}{2640625}(X_{42} - 0) - \frac{1285}{2640625}(X_{43} - 0) + \frac{3420}{2640625}(X_{44} - 175) + \frac{3080}{1625} \end{aligned}$$

elde edilir.

Lineer Programlama Problemlerinde Amaç Fonksiyonunun payda kısmındaki, değişkenlerin katsayıları hariç, sabit terimlerin problemin optimal çözümüne etkisi olmadığından dolayı paydaları eşitleyip ihmal edersek;

$$\begin{aligned} W_2(X) &\cong -1285(X_{11} - 120) - 1285(X_{12} - 105) - 7615(X_{13} - 0) + 340(X_{14} - 0) + 340(X_{21} - 0) \\ &- 2910(X_{22} - 100) - 1285(X_{23} - 0) + 3420(X_{24} - 0) - 5990(X_{31} - 0) + 1795(X_{32} - 0) \\ &- 1285(X_{33} - 300) + 3420(X_{34} - 5) - 7615(X_{41} - 0) + 1795(X_{42} - 0) - 1285(X_{43} - 0) \\ &+ 3420(X_{44} - 175) + 5005000 \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Lineer Programlama Problemlerinde Amaç Fonksiyonunun payda kısmında olduğu gibi pay kısmında da, değişkenlerin katsayıları hariç, sabit terimlerin problemin optimal çözümüne etkisi olmadığından dolayı sabit terimleri ihmal edersek;

$$\begin{aligned} W_2(X) &\cong -1285X_{11} - 1285X_{12} - 7615X_{13} + 340X_{14} + 340X_{21} - 2910X_{22} - 1285X_{23} + 3420X_{24} \\ &- 5990X_{31} + 1795X_{32} - 1285X_{33} + 3420X_{34} - 7615X_{41} + 1795X_{42} - 1285X_{43} + 3420X_{44} \end{aligned}$$

elde edilir ve Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonu, Lineer Amaç Fonksiyonuna dönüşmüş olur.

Bulunan bu Lineer Amaç Fonksiyonu, Bölüm 3.2’de verilen problemin 2. Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonunun (W_2) Kuzeybatı köşesi yöntemi kullanılarak bulunan başlangıç çözümü değerlerinden faydalanılarak Taylor Serisine açılmasıyla elde edilmişti. Bu sebepten ötürü bu problem çözüldükten sonra elde edilen optimal çözümünden faydalanılarak Bölüm 3.2’de verilen Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonu Taylor Serisine tekrar açılmalı ve daha iyi sonuçları veren optimal çözüm takımlarının varlığı araştırılmalıdır.

Yukarıdaki işlemler sonucunda Bölüm 2.2’deki gibi Taşıma Problemi elde edilmiş olur.

$$\sum_{j=1}^4 X_{1j} = 225$$

$$\sum_{j=1}^4 X_{2j} = 100$$

$$\sum_{j=1}^4 X_{3j} = 500$$

$$\sum_{j=1}^4 X_{4j} = 175$$

(Arz Kısıtları)

$$\sum_{i=1}^4 X_{i1} = 120$$

$$\sum_{i=1}^4 X_{i2} = 400$$

$$\sum_{i=1}^4 X_{i3} = 300$$

$$\sum_{i=1}^4 X_{i4} = 180$$

(Talep Kısıtları)

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

(Koli cinsinden taşınacak ürün miktarı)

$$\text{Min } W_2(X) = -1285X_{11} - 1285X_{12} - 7615X_{13} + 340X_{14} + 340X_{21} - 2910X_{22} - 1285X_{23}$$

$$+ 3420X_{24} - 5990X_{31} + 1795X_{32} - 1285X_{33} + 3420X_{34} - 7615X_{41} + 1795X_{42} - 1285X_{43}$$

$$+ 3420X_{44}$$

(Amaç Fonksiyonu)

Görüldüğü gibi $\sum_{i=1}^4 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j = 1000$ olduğundan problem Dengeli Taşıma Problemidir.

Problem Çizelge 3.20'deki gibi tablo halinde gösterilebilir.

Çizelge 3.20 Taşıma Problemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	X_{11} - 1285	X_{12} - 1285	X_{13} -7615	X_{14} 340	225
2	X_{21} 340	X_{22} - 2910	X_{23} -1285	X_{24} 3420	100
3	X_{31} -5990	X_{32} 1795	X_{33} -1285	X_{34} 3420	500
4	X_{41} - 7615	X_{42} 1795	X_{43} -1285	X_{44} 3420	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

Bölüm 3.2’de verilen gerçek hayat probleminin matematiksel modelinin kurulmasıyla elde edilen Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemi’nin 2. Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonunu Taylor Serisi’ne açabilmek için Kuzeybatı köşesinden faydalanılarak başlangıç çözüm takımı bulunmuştu. Aynı şekilde bu problem için de Kuzeybatı köşesi yönteminden faydalanılarak başlangıç çözümleri bulunabilir.

Yukarıdaki Çizelge 3.20 üzerinde Kuzeybatı Köşesi yardımıyla mallar yerleştirilirse;

Çizelge 3.21 Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	120 - 1285	105 - 1285	-7615	340	225
2	340	100 - 2910	-1285	3420	100
3	-5990	195 1795	300 -1285	5 3420	500
4	- 7615	1795	-1285	175 3420	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

Başlangıç çözümü olarak;

$$X_{11} = 120, X_{12} = 105, X_{22} = 100, X_{32} = 195, X_{33} = 300, X_{34} = 5, X_{44} = 175$$

Min $W_2(X) = 0$ bulunur.

Daha önce Bölüm 2.2’de verilen Taşıma Problemi için Bölüm 2.3.1’de bahsedilen Kuzeybatı Köşesi, En Düşük Maliyetler ve Vogel Yaklaşımı yöntemleri ile başlangıç çözümleri bulunmuş ve Kuzeybatı köşesi yöntemi uygulanarak elde edilen başlangıç çözümlerinden yola çıkarak Bölüm 2.3.2.1’de bahsedilen Geliştirilmiş Dağıtım yöntemiyle problem çözülmüştü.

Yine aynı şekilde bu problem için de Kuzeybatı Köşesi yöntemi uygulanarak elde edilen başlangıç çözümlerinden yola çıkılarak Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemiyle problem çözülmek istenirse;

Başlangıç temel (tabanda bulunan) değişkenleri için;

$$u_1 + v_1 = -1285, u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = -1285 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_2 = -1285, u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = -1285 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = -2910, v_2 = -1285 \Rightarrow u_2 = -1625 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 = 1795, v_2 = -1285 \Rightarrow u_3 = 3080 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 = -1285, u_3 = 3080 \Rightarrow v_3 = -4365 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 = 3420, u_3 = 3080 \Rightarrow v_4 = 340 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_4 = 3420, v_4 = 340 \Rightarrow u_4 = 3080 \quad (X_{44} \text{ değişkeni için})$$

bulunur.

Temel olmayan (tabanda bulunmayan) değişkenler için $u_i + v_j - c_{ij}$ değerleri hesaplanırsa;

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 4365 + 7615 = 3250 \quad (X_{13} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 340 - 340 = 0 \quad (X_{14} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = -1625 - 1285 - 340 = -3250 \quad (X_{21} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_3 - c_{23} = -1625 - 4365 + 1285 = -4705 \quad (X_{23} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_4 - c_{24} = -1625 + 340 - 3420 = -4705 \quad (X_{24} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = 3080 - 1285 + 5990 = 7785 \quad (X_{31} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_1 - c_{41} = 3080 - 1285 + 7615 = 9410 \quad (X_{41} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_2 - c_{42} = 3080 - 1285 - 1795 = 0 \quad (X_{42} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_3 - c_{43} = 3080 - 4365 + 1285 = 0 \quad (X_{43} \text{ değişkeni için})$$

değerleri elde edilir.

Pozitif en büyük $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerine X_{41} değişkeni sahip olduğu için X_{41} değişkeni yeni temel değişken olarak tabana girer. X_{41} değişkeninin olduğu hücreye T miktar mal yüklenir.

Bazı değişkenlerin değerinde T miktar artma olurken bazı değişkenlerin değerinde T miktar azalma olacaktır. $X_{ij} - T = 0$ eşitliğini minimum yapan T değeri hesaplanır ve hücrelere yüklenecek yeni miktarlar belli olur.

Çizelge 3.22 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	$120 - T$ - 1285	$105 + T$ - 1285	-7615	340	225
2	340	100 - 2910	-1285	3420	100
3	-5990	$195 - T$ 1795	300 -1285	$5 + T$ 3420	500
4	T - 7615	1795	-1285	$175 - T$ 3420	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$120 - T = 0 \Rightarrow T = 120, 195 - T = 0 \Rightarrow T = 195, 175 - T = 0 \Rightarrow T = 175$$

Min (120,195,175) = 120 olduğundan $T = 120$ dir. X_{11} tabandan çıkar.

Çizelge 3.22'deki değerler T değeri yerine 120 konularak güncellenirse;

Çizelge 3.23 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	- 1285	225 - 1285	-7615	340	225
2	340	100 - 2910	-1285	3420	100
3	-5990	75 1795	300 -1285	125 3420	500
4	120 - 7615	1795	-1285	55 3420	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$X_{12} = 225, X_{22} = 100, X_{32} = 75, X_{33} = 300, X_{34} = 125, X_{41} = 120, X_{44} = 55$$

Min $W_2(X) = -1129200$ bulunur.

Temel (tabanda bulunan) değişkenleri için;

$$u_1 + v_2 = -1285, u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = -1285 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = -2910, v_2 = -1285 \Rightarrow u_2 = -1625 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 = 1795, v_2 = -1285 \Rightarrow u_3 = 3080 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 = -1285, u_3 = 3080 \Rightarrow v_3 = -4365 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 = 3420, u_3 = 3080 \Rightarrow v_4 = 340 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_4 = 3420, v_4 = 340 \Rightarrow u_4 = 3080 \quad (X_{44} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_1 = -7615, u_4 = 3080 \Rightarrow v_1 = -10695 \quad (X_{41} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_1 - c_{11} = 0 - 10695 + 1285 = -9410 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 4365 + 7615 = 3250 \quad (X_{13} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 340 - 340 = 0 \quad (X_{14} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = -1625 - 10695 - 340 = -12660 \quad (X_{21} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_3 - c_{23} = -1625 - 4365 + 1285 = -4705 \quad (X_{23} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_4 - c_{24} = -1625 + 340 - 3420 = -4705 \quad (X_{24} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = 3080 - 10695 + 5990 = -1625 \quad (X_{31} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_4 + v_2 - c_{42} = 3080 - 1285 - 1795 = 0 \quad (X_{42} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_3 - c_{43} = 3080 - 4365 + 1285 = 0 \quad (X_{43} \text{ değişkeni için})$$

Pozitif en buyk $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerine X_{13} değişkeni sahip olduğu için X_{13} değişkeni yeni temel değişken olarak tabana girer. X_{13} değişkeninin olduğu hucreye T miktar mal yuklenir.

Çizelge 3.24 Geliştirilmiş Dağıtım Yontemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	- 1285	225 - T - 1285	T -7615	340	225
2	340	100 - 2910	-1285	3420	100
3	-5990	75 + T 1795	300 - T -1285	125 3420	500
4	120 - 7615	1795	-1285	55 3420	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$225 - T = 0 \Rightarrow T = 225, 300 - T = 0 \Rightarrow T = 300$$

Min (225,300) = 225 olduğundan $T = 225$ dir. X_{12} tabandan çıkar.

Çizelge 3.25 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	- 1285	- 1285	225 -7615	340	225
2	340	100 - 2910	-1285	3420	100
3	-5990	300 1795	75 -1285	125 3420	500
4	120 - 7615	1795	-1285	55 3420	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$X_{13} = 225, X_{22} = 100, X_{32} = 300, X_{33} = 75, X_{34} = 125, X_{41} = 120, X_{42} = 55$$

$$\text{Min } W_2(X) = -1860450$$

$$u_1 + v_3 = -7615, u_1 = 0 \Rightarrow v_3 = -7615 \quad (X_{13} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 = -1285, v_3 = -7615 \Rightarrow u_3 = 6330 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 = 1795, u_3 = 6330 \Rightarrow v_2 = -4535 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = -2910, v_2 = -4535 \Rightarrow u_2 = 1625 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 = 3420, u_3 = 6330 \Rightarrow v_4 = -2910 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_4 = 3420, v_4 = -2910 \Rightarrow u_4 = 6330 \quad (X_{44} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_1 = -7615, u_4 = 6330 \Rightarrow v_1 = -13945 \quad (X_{41} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_1 - c_{11} = 0 - 13945 + 1285 = -12660 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_2 - c_{12} = 0 - 4535 + 1285 = -3250 \quad (X_{12} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 - 2910 - 340 = -3250 \quad (X_{14} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = 1625 - 13945 - 340 = -12660 \quad (X_{21} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_3 - c_{23} = 1625 - 7615 + 1285 = -4705 \quad (X_{23} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_4 - c_{24} = 1625 - 2910 - 3420 = -4705 \quad (X_{24} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = 6330 - 13945 + 5990 = -1625 \quad (X_{31} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_2 - c_{42} = 6330 - 4535 - 1795 = 0 \quad (X_{42} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_3 - c_{43} = 6330 - 7615 + 1285 = 0 \quad (X_{43} \text{ değişkeni için})$$

Pozitif en byk $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerine X_{42} değişkeni sahip olduğu için X_{42} değişkeni yeni temel değişken olarak tabana girer. X_{42} değişkeninin olduğu hücreye T miktar mal yüklenir.

Çizelge 3.26 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	- 1285	- 1285	225 -7615	340	225
2	340	100 - 2910	-1285	3420	100
3	-5990	300 - T 1795	75 -1285	125 + T 3420	500
4	120 - 7615	T 1795	-1285	55 - T 3420	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$55 - T = 0 \Rightarrow T = 55, 300 - T = 0 \Rightarrow T = 300.$$

Min (55,300) = 55 olduğundan $T = 55$ dir. X_{44} tabandan çıkar.

Çizelge 3.27 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	- 1285	- 1285	225 -7615	340	225
2	340	100 - 2910	-1285	3420	100
3	-5990	245 1795	75 -1285	180 3420	500
4	120 - 7615	55 1795	-1285	3420	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$X_{13} = 225, X_{22} = 100, X_{32} = 245, X_{33} = 75, X_{34} = 180, X_{41} = 120, X_{42} = 55$$

Amaç Fonksiyonu $\text{Min } W_2(X) = -1860450$ bulunur.

$$u_1 + v_3 = -7615, u_1 = 0 \Rightarrow v_3 = -7615 \quad (X_{13} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 = -1285, v_3 = -7615 \Rightarrow u_3 = 6330 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 = 1795, u_3 = 6330 \Rightarrow v_2 = -4535 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = -2910, v_2 = -4535 \Rightarrow u_2 = 1625 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 = 3420, u_3 = 6330 \Rightarrow v_4 = -2910 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_2 = 1795, v_2 = -4535 \Rightarrow u_4 = 6330 \quad (X_{42} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_1 = -7615, u_4 = 6330 \Rightarrow v_1 = -13945 \quad (X_{41} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_1 - c_{11} = 0 - 13945 + 1285 = -12660 \quad (X_{11} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_1 + v_2 - c_{12} = 0 - 4535 + 1285 = -3250 \quad (X_{12} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 - 2910 - 340 = -3250 \quad (X_{14} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = 1625 - 13945 - 340 = -12660 \quad (X_{21} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_3 - c_{23} = 1625 - 7615 + 1285 = -4705 \quad (X_{23} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_4 - c_{24} = 1625 - 2910 - 3420 = -4705 \quad (X_{24} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = 6330 - 13945 + 5990 = -1625 \quad (X_{31} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_3 - c_{43} = 6330 - 7615 + 1285 = 0 \quad (X_{43} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_4 - c_{44} = 6330 - 2910 - 3420 = 0 \quad (X_{44} \text{ değişkeni için})$$

Göröldüğü gibi pozitif en büyük $(u_i + v_j - c_{ij})$ değeri sıfır olup $(u_i + v_j - c_{ij})$ değeri sıfır olan değişkenler tabana alınarak alternatif çözümler bulmak mümkündür.

Problem burada sonlandırılırsa Optimal çözüm;

$$X_{13} = 225, X_{22} = 100, X_{32} = 245, X_{33} = 75, X_{34} = 180, X_{41} = 120, X_{42} = 55$$

$$\text{Min } W_2(X) = -1860450 \text{ olarak bulunur.} \quad (3.11)$$

Böylece Bölüm 3.2'deki 2. Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonu (W_2) Taylor Serisine açılarak Minimum değeri elde edilmiş olunur. Minimum değeri bulunan (W_2) Amaç Fonksiyonunun Maksimum değeri de bulunmalıdır.

Yine aynı şekilde bu problem için de, Kuzeybatı Köşesi yöntemi uygulanarak elde edilen başlangıç çözümlerinden yola çıkılarak Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemiyle problem çözülmek istenirse;

Çizelge 3.28 Başlangıç Çözümü Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	120 - 1285	105 - 1285	-7615	340	225
2	340	100 - 2910	-1285	3420	100
3	-5990	195 1795	300 -1285	5 3420	500
4	- 7615	1795	-1285	175 3420	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

Başlangıç Çözümü olarak;

$$X_{13} = 225, X_{22} = 100, X_{32} = 245, X_{33} = 75, X_{34} = 180, X_{41} = 120, X_{42} = 55$$

$$\text{Max } W_2(X) = 0 \text{ elde edilir.} \quad (3.12)$$

$$u_1 + v_1 = -1285, u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = -1285 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_2 = -1285, u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = -1285 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = -2910, v_2 = -1285 \Rightarrow u_2 = -1625 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 = 1795, v_2 = -1285 \Rightarrow u_3 = 3080 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 = -1285, u_3 = 3080 \Rightarrow v_3 = -4365 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 = 3420, u_3 = 3080 \Rightarrow v_4 = 340 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_4 = 3420, v_4 = 340 \Rightarrow u_4 = 3080 \quad (X_{44} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 4365 + 7615 = 3250 \quad (X_{13} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 340 - 340 = 0 \quad (X_{14} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = -1625 - 1285 - 340 = -3250 \quad (X_{21} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_3 - c_{23} = -1625 - 4365 + 1285 = -4705 \quad (X_{23} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_4 - c_{24} = -1625 + 340 - 3420 = -4705 \quad (X_{24} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = 3080 - 1285 + 5990 = 7785 \quad (X_{31} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 - c_{34} = 3080 - 1285 + 7615 = 9410 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_2 - c_{42} = 3080 - 1285 - 1795 = 0 \quad (X_{42} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_3 - c_{43} = 3080 - 4365 + 1285 = 0 \quad (X_{43} \text{ değişkeni için})$$

Negatif en kk $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerine sahip X_{23} ve X_{24} değişkenlerinden X_{24} değişkeni temel değişken olarak tabana girer. X_{24} değişkeninin olduğu hücreye T miktar mal yüklenir.

Çizelge 3.29 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	120 - 1285	105 - 1285	-7615	340	225
2	340	100 - T - 2910	-1285	T 3420	100
3	-5990	195 + T 1795	300 -1285	5 - T 3420	500
4	- 7615	1795	-1285	175 3420	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$100 - T = 0 \Rightarrow T = 100, 5 - T = 0 \Rightarrow T = 5.$$

Min (5,100) = 5 olduğundan $T = 5$ dir. X_{34} tabandan çıkar.

Çizelge 3.30 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	120 - 1285	105 - 1285	-7615	340	225
2	340	95 - 2910	-1285	5 3420	100
3	-5990	200 1795	300 -1285	3420	500
4	- 7615	1795	-1285	175 3420	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$X_{11} = 120, X_{12} = 105, X_{22} = 95, X_{24} = 5, X_{32} = 200, X_{33} = 300, X_{44} = 175$$

$$\text{Max } W_2(X) = 23525$$

$$u_1 + v_1 = -1285, u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = -1285 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_2 = -1285, u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = -1285 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = -2910, v_2 = -1285 \Rightarrow u_2 = -1625 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_4 = 3420, u_2 = -1625 \Rightarrow v_4 = 5045 \quad (X_{24} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 = 1795, v_2 = -1285 \Rightarrow u_3 = 3080 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 = -1285, u_3 = 3080 \Rightarrow v_3 = -4365 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_4 = 3420, v_4 = 5045 \Rightarrow u_4 = -1625 \quad (X_{44} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 4365 + 7615 = 3250 \quad (X_{13} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 5045 - 340 = 4705 \quad (X_{14} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = -1625 - 1285 - 340 = -3250 \quad (X_{21} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_3 - c_{23} = -1625 - 4365 + 1285 = -4705 \quad (X_{23} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = 3080 - 1285 + 5990 = 7785 \quad (X_{31} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 - c_{34} = 3080 + 5045 - 3420 = -1455 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_1 - c_{41} = -1625 - 1285 + 7615 = 4705 \quad (X_{41} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_2 - c_{42} = -1625 - 1285 - 1795 = -4705 \quad (X_{42} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_3 - c_{43} = -1625 - 4365 + 1285 = -4705 \quad (X_{43} \text{ değişkeni için})$$

Negatif en kk($u_i + v_j - c_{ij}$) değerine sahip X_{23} , X_{42} ve X_{43} değişkenlerinden X_{42} değişkeni temel değişken olarak tabana girer. X_{42} değişkeninin olduğu hücreye T miktar mal yüklenir.

Çizelge 3.31 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	120 - 1285	105 - 1285	-7615	340	225
2	340	95 - T - 2910	-1285	5 + T 3420	100
3	-5990	200 1795	300 -1285	3420	500
4	- 7615	T 1795	-1285	175 - T 3420	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$95 - T = 0 \Rightarrow T = 95, 175 - T = 0 \Rightarrow T = 175.$$

Min (95,175) = 5 olduğundan $T = 95$ dir. X_{22} tabandan çıkar.

Çizelge 3.32 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	120 - 1285	105 - 1285	-7615	340	225
2	340	- 2910	-1285	100 3420	100
3	-5990	200 1795	300 -1285	3420	500
4	- 7615	95 1795	-1285	80 3420	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$X_{11} = 120, X_{12} = 105, X_{24} = 100, X_{32} = 200, X_{33} = 300, X_{42} = 95, X_{44} = 80$$

$$\text{Max } W_2(X) = 470500$$

$$u_1 + v_1 = -1285, u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = -1285 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_2 = -1285, u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = -1285 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 = 1795, v_2 = -1285 \Rightarrow u_3 = 3080 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 = -1285, u_3 = 3080 \Rightarrow v_3 = -4365 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_2 = 1795, v_2 = -1285 \Rightarrow u_4 = 3080 \quad (X_{42} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_4 = 3420, u_4 = 3080 \Rightarrow v_4 = 340 \quad (X_{44} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_4 = 3420, v_4 = 340 \Rightarrow u_2 = 3080 \quad (X_{24} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 4365 + 7615 = 3250 \quad (X_{13} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 340 - 340 = 0 \quad (X_{14} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = 3080 - 1285 - 340 = 1455 \quad (X_{21} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_2 - c_{22} = 3080 - 1285 + 2910 = 4705 \quad (X_{22} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_3 - c_{23} = 3080 - 4365 + 1285 = 0 \quad (X_{23} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = 3080 - 1285 + 5990 = 7785 \quad (X_{31} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_3 + v_4 - c_{34} = 3080 + 340 - 3420 = 0 \quad (X_{34} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_4 + v_1 - c_{41} = 3080 - 1285 + 7615 = 9410 \quad (X_{41} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_3 - c_{43} = 3080 - 4365 + 1285 = 0 \quad (X_{43} \text{ değişkeni için})$$

Göröldüğü gibi negatif $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerleri tükendiğinden problem optimuma ulaşmıştır. $(u_i + v_j - c_{ij})$ değeri sıfır olan değişkenleri tabana alıp alternatif özömler bulmak mümkündür ancak problemin maksimum değeri değişmeyecektir.

Optimal özöüm;

$$X_{11} = 120, X_{12} = 105, X_{24} = 100, X_{32} = 200, X_{33} = 300, X_{43} = 95, X_{44} = 80$$

$$\text{Max } W_2(X) = 470500 \text{ olarak bulunur.} \quad (3.13)$$

Bölüm 3.2’de verilen problemin 1. Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonu $W_1(X)$ ve 2. Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonu $W_2(X)$ için Minimum ve Maksimum değerleri bulunmuştır. Bu değerler kullanılarak Üyelik Fonksiyonları yardımıyla Bölüm 3.2’de verilen gerçek hayat probleminin özöümü araştırılacaktır.

3.3.3 Üyelik Fonksiyonları

1965 yılında L. A. Zadeh belirsizliğin temsili için araç olarak, Bulanık Kümeler teorisini geliştirmiştir. Bulanık terimi, “Olasılık dağılımları cinsinden tanımlanabilen belirsiz niceliklerin matematiği” anlamındadır. Bulanık kümeler kuramının amacı, belirsizlik ifade eden, tanımlanması güç veya anlamı güç kavramlara üyelik derecesi atayarak onlara belirlilik getirmek istemidir. Bulanık Küme yine 0 ile 1 arasında yer alan ancak, rastgele seçilmiş sonsuz tane elemanı içeren bir küme olarak tanımlanır [12].

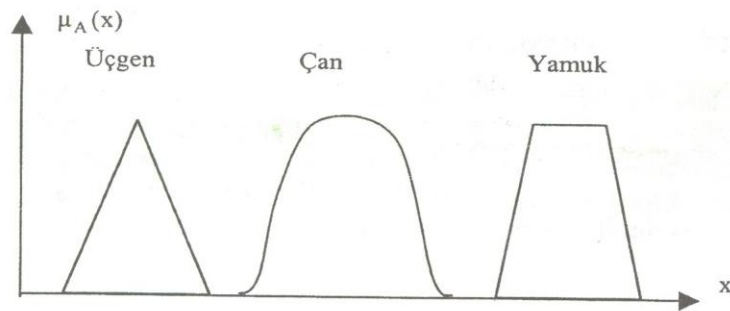
Klasik küme kuramına göre bir sayı bir kümenin ya elemanıdır ya da değildir. Başka bir deyişle nesne kümeye tam üyedir üyelik derecesi 1’dir veya nesne kümeye üye değildir bu nedenle üyelik derecesi 0’dır. Klasik kümelerde bir x değerinin A kümesine üye olup olmadığını gösteren bağıntı “Karakteristik Fonksiyon” olarak adlandırılır [13].

Herhangi bir x değerinin X evreni üstündeki A klasik alt kümesine üyelik ifadesi $(X_A : X \rightarrow \{0,1\})$ matematiksel olarak aşağıdaki biçimde gösterilir.

$$X_A(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin A \\ 1 & ; x \in A \end{cases}$$

Zadeh, sadece iki üyelik derecesi alan bu ifadeyi, 0 ile 1 arasında çeşitli üyelik dereceleri alabilen bir başka gösterim şekline genişletmiştir ve bu yeni üyelik fonksiyonunu $\mu(x)$ ile temsil etmiştir $(\mu(x) : X \rightarrow [0,1])$.

Bulanık Kümeler için fonksiyonlar Üyelik Fonksiyonu olarak tanımlanır. $\mu(x)$ üyelik fonksiyonunun x ’e bağlı olarak aldığı sayısal değerlere Üyelik Derecesi denir. Üyelik aralığı, belirli bir değer bir bulanık küme içinde yer almasının güvenilirliğinin işaretidir.



Şekil 3. 1 Çeşitli Üyelik Fonksiyonları

Literatürde rastlanan bazı Üyelik Fonksiyonları yukarıdaki Şekil 3.1’de verilmiştir.

Burada $\mu_A(x)$; üyelik derecesini verir. $\mu_A(x)$ 1’e yaklaştıkça x elemanının üyeliği artar.

Tanım 3.1 : X evreninde $\mu_A(x) > 0$ noktalarının oluşturduğu kümeye, A Bulanık Kümesinin Desteği denir ve $SuppA = \{x \mid \mu_A(x) > 0, x \in X\}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2 : A Bulanık Kümesinin yüksekliği, $\mu_A(x)$ in aldığı en üst (yüksek) değerdir. A bulanık kümesinin çapraz geçiş noktası ise A’daki üyeliği 0.5 olan $x \in X$ noktasıdır.

Tanım 3.3 : A Bulanık Kümesinin yüksekliği 1’e eşitse A bulanık kümesine Normal Bulanık Küme, 1’e eşit değilse Normal Olmayan Bulanık Küme adı verilir.

Bölüm 3.2’de verilen gerçek hayat problemi için Üyelik Fonksiyonları oluşturulmak istenirse;

$W_1^{\min}$: W_1 Amaç Fonksiyonunun Minimum Değeri,

$W_1^{\max}$: W_1 Amaç Fonksiyonunun Maksimum Değeri,

$W_2^{\min}$: W_2 Amaç Fonksiyonunun Minimum Değeri,

$W_2^{\max}$: W_2 Amaç Fonksiyonunun Maksimum Değeri

olmak üzere W_1 ve W_2 Amaç Fonksiyonlarının Üyelik Fonksiyonları;

$$\mu_1(W_1) = \begin{cases} 0 & ; W_1 \geq W_1^{\max} \\ \frac{W_1 - W_1^{\max}}{W_1^{\min} - W_1^{\max}} & ; W_1^{\min} < W_1 < W_1^{\max} \\ 1 & ; W_1 \leq W_1^{\min} \end{cases} \quad \text{ve}$$

$$\mu_2(W_2) = \begin{cases} 0 & ; W_2 \geq W_2^{\max} \\ \frac{W_2 - W_2^{\max}}{W_2^{\min} - W_2^{\max}} & ; W_2^{\min} < W_2 < W_2^{\max} \\ 1 & ; W_2 \leq W_2^{\min} \end{cases} \quad \text{ile gösterilir.}$$

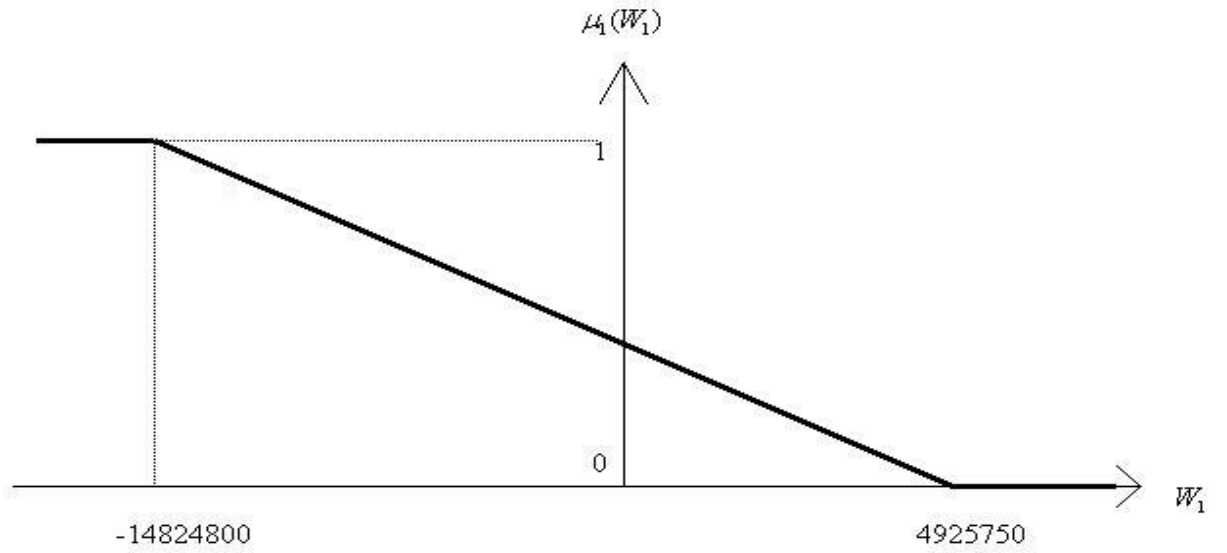
W_1 ve W_2 Amaç Fonksiyonları için hesaplanan Minimum ve Maksimum değerler

$$W_1^{\min} = -14824800 \quad , \quad W_1^{\max} = 4925750, \quad W_2^{\min} = -1860450 \quad , \quad W_2^{\max} = 470500$$

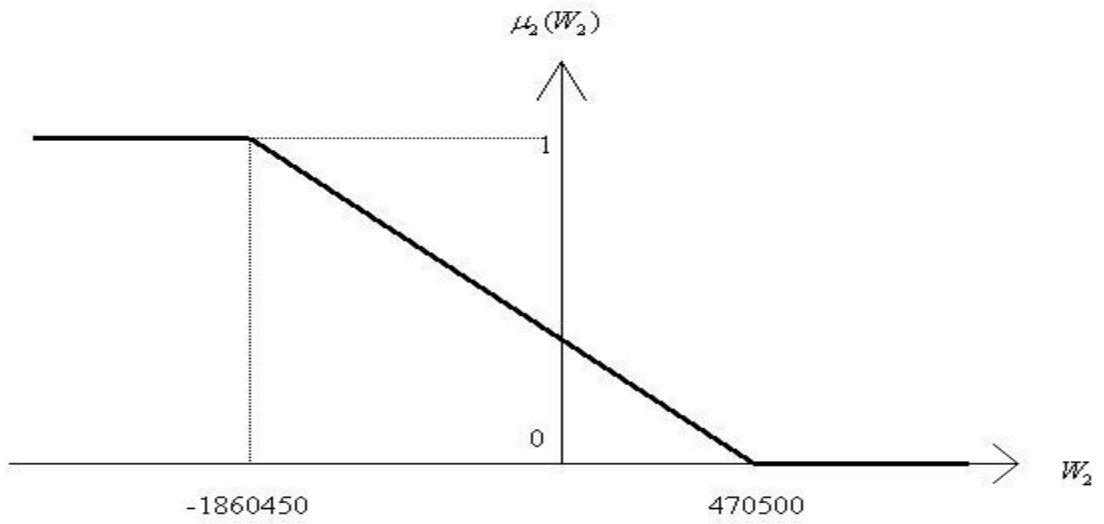
olduğundan $\mu_1(W_1)$ ve $\mu_2(W_2)$ Üyelik Fonksiyonlarının açık şekli;

$$\mu_1(W_1) = \begin{cases} 0 & ; W_1 \geq 4925750 \\ \frac{W_1 - 4925750}{-14824800 - 4925750} & ; -14824800 < W_1 < 4925750 \\ 1 & ; W_1 \leq -14824800 \end{cases}$$

$$\mu_2(W_2) = \begin{cases} 0 & ; W_2 \geq 470500 \\ \frac{W_2 - 470500}{-1860450 - 470500} & ; -1860450 < W_2 < 470500 \\ 1 & ; W_2 \leq -1860450 \end{cases} \quad \text{ile gösterilir.}$$



Şekil 3. 2 $\mu_1(W_1)$ Üyelik Fonksiyonu



Şekil 3. 3 $\mu_2(W_2)$ Üyelik Fonksiyonu

Böylece $\mu_1(W_1) = \frac{4925750 - W_1}{19750550}$ ve $\mu_2(W_2) = \frac{470500 - W_2}{2330950}$ elde edilir.

$\mu_1(W_1)$ ve $\mu_2(W_2)$ Üyelik Dereceleri W_1 ve W_2 Amaç Fonksiyonlarının tatmin değerlerine karşılık geldiğinden, Bölüm 3.2'deki Taşıma Problemi için amaç Minimizasyon (Üyelik Derecelerini Maksimum yapmak yani 1'e yaklaştırmak) olduğundan Amaç Fonksiyonu;

$\text{Max } \mu(X) = \mu_1(W_1) + \mu_2(W_2)$ şeklinde oluşturulur. Böylece her bir amaç için en yüksek üyelik derecesi elde edilmeye çalışılacaktır.

Burada $W_1(X)$ ve $W_2(X)$ Amaç Fonksiyonları yerine koyulduğunda;

$$\begin{aligned} \text{Max } \mu(X) = & 0,00179X_{11} + 0,00171X_{12} + 0,00689X_{13} + 0,00084X_{14} + 0,00093X_{21} \\ & + 0,00224X_{22} + 0,00187X_{23} - 0,00328X_{24} + 0,00619X_{31} - 0,00225X_{32} + 0,00146X_{33} \\ & - 0,00278X_{34} + 0,00689X_{41} - 0,00217X_{42} + 0,00129X_{43} - 0,00344X_{44} \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Amaç Fonksiyonundaki katsayıların aynı sayı ile çarpılmaları, problemin optimal çözümünü etkilemeyeceği için işlemlerde kolaylık sağlaması açısından tüm katsayılar 100000 ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} \text{Max } \mu(X) = & 179X_{11} + 171X_{12} + 689X_{13} + 84X_{14} + 93X_{21} + 224X_{22} + 187X_{23} - 328X_{24} \\ & + 619X_{31} - 225X_{32} + 146X_{33} - 278X_{34} + 689X_{41} - 217X_{42} + 129X_{43} - 344X_{44} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bölüm 3.2'de verilen Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemi ise Bölüm 2.2'deki gibi Tek (Linear) Amaçlı Taşıma Problemi'ne dönüşmüş olur.

$$\begin{aligned} \text{Max } \mu(X) = & 179X_{11} + 171X_{12} + 689X_{13} + 84X_{14} + 93X_{21} + 224X_{22} + 187X_{23} - 328X_{24} \\ & + 619X_{31} - 225X_{32} + 146X_{33} - 278X_{34} + 689X_{41} - 217X_{42} + 129X_{43} - 344X_{44} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^4 X_{1j} = 225 \\
& \sum_{j=1}^4 X_{2j} = 100 \\
& \sum_{j=1}^4 X_{3j} = 500 \\
& \sum_{j=1}^4 X_{4j} = 175 \\
& \sum_{i=1}^4 X_{i1} = 120 \\
& \sum_{i=1}^4 X_{i2} = 400 \\
& \sum_{i=1}^4 X_{i3} = 300 \\
& \sum_{i=1}^4 X_{i4} = 180 \\
& X_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,3, \quad j=1,2,3,4
\end{aligned}$$

(Arz Kısıtları)

(Talep Kısıtları)

(Koli cinsinden taşınacak ürün miktarı)

Çizelge 3.33 Taşıma Problemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	X_{11} 179	X_{12} 171	X_{13} 689	X_{14} 84	225
2	X_{21} 93	X_{22} 224	X_{23} 187	X_{24} -328	100
3	X_{31} 619	X_{32} -225	X_{33} 146	X_{34} -278	500
4	X_{41} 689	X_{42} -217	X_{43} 129	X_{44} -344	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

Çizelge 3.34 Kuzeybatı Köşesi Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	120 179	105 171	689	84	225
2	93	100 224	187	-328	100
3	619	195 -225	300 146	5 -278	500
4	689	-217	129	175 -344	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

Başlangıç çözümü olarak;

$$X_{11} = 120, X_{12} = 105, X_{22} = 100, X_{32} = 195, X_{33} = 300, X_{34} = 5, X_{44} = 175$$

Max $\mu(X) = 170$ bulunur.

Daha önce Bölüm 2.2’de verilen Taşıma Problemi için Bölüm 2.3.1’de bahsedilen Kuzeybatı Köşesi, En Düşük Maliyetler ve Vogel Yaklaşımı yöntemleri ile başlangıç çözümleri bulunmuş ve Kuzeybatı köşesi yöntemi uygulanarak elde edilen başlangıç çözümlerinden yola çıkarak Bölüm 2.3.2.1’de bahsedilen Geliştirilmiş Dağıtım yöntemiyle problem çözülmüştü.

Yine aynı şekilde bu problem için de Kuzeybatı Köşesi yöntemi uygulanarak elde edilen başlangıç çözümlerinden yola çıkılarak Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemiyle problem çözülmek istenirse;

Başlangıç temel (tabanda bulunan) değişkenleri için;

$$u_1 + v_1 = 179, u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 179 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_2 = 171, u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = 171 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = 224, v_2 = 171 \Rightarrow u_2 = 53 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 = -225, v_2 = 171 \Rightarrow u_3 = -396 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 = 146, u_3 = -396 \Rightarrow v_3 = 542 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 = -278, u_3 = -396 \Rightarrow v_4 = 118 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_4 = -344, v_4 = 118 \Rightarrow u_4 = -462 \quad (X_{44} \text{ değişkeni için})$$

bulunur.

Temel olmayan (tabanda bulunmayan) değişkenler için $u_i + v_j - c_{ij}$ değerleri hesaplanırsa;

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 542 - 689 = -147 \quad (X_{13} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 118 - 84 = 34 \quad (X_{14} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = 53 + 179 - 93 = 139 \quad (X_{21} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_3 - c_{23} = 53 + 542 - 187 = 408 \quad (X_{23} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_4 - c_{24} = 53 + 118 + 328 = 499 \quad (X_{24} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = -396 + 179 - 619 = -836 \quad (X_{31} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_1 - c_{41} = -462 + 179 - 689 = -972 \quad (X_{41} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_2 - c_{42} = -462 + 171 + 217 = -74 \quad (X_{42} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_3 - c_{43} = -462 + 542 - 129 = -49 \quad (X_{43} \text{ değişkeni için})$$

değerleri elde edilir.

Negatif en küçük ($u_i + v_j - c_{ij}$) değerine X_{41} değişkeni sahip olduğu için X_{41} değişkeni yeni temel değişken olarak tabana girer. X_{41} değişkeninin olduğu hücreye T miktar mal yüklenir.

Bazı değişkenlerin değerinde T miktar artma olurken bazı değişkenlerin değerinde T miktar azalma olacaktır. $X_{ij} - T = 0$ eşitliğini minimum yapan T değeri hesaplanır ve hücrelere yüklenecek yeni miktarlar belli olur.

Çizelge 3.35 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	$120 - T$ 179	$105 + T$ 171	689	84	225
2	93	100 224	187	-328	100
3	619	$195 - T$ -225	300 146	$5 + T$ -278	500
4	T 689	-217	129	$175 - T$ -344	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$120 - T = 0 \Rightarrow T = 120, 195 - T = 0 \Rightarrow T = 195, 175 - T = 0 \Rightarrow T = 175$$

Min (120,195,175) = 120 olduğundan $T = 120$ dir. X_{11} tabandan çıkar.

Çizelge 3.35'deki değerler T değeri yerine 120 konularak güncellenirse;

Çizelge 3.36 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	179	225 171	689	84	225
2	93	100 224	187	-328	100
3	619	75 -225	300 146	125 -278	500
4	120 689	-217	129	55 -344	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$X_{12} = 225, X_{22} = 100, X_{32} = 75, X_{33} = 300, X_{34} = 125, X_{41} = 120, X_{44} = 55$$

Max $\mu(X) = 116810$ bulunur.

Temel (tabanda bulunan) değişkenleri için;

$$u_1 + v_2 = 171, u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = 171 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = 224, v_2 = 171 \Rightarrow u_2 = 53 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 = -225, v_2 = 171 \Rightarrow u_3 = -396 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 = 146, u_3 = -396 \Rightarrow v_3 = 542 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 = -278, u_3 = -396 \Rightarrow v_4 = 118 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_4 = -344, v_4 = 118 \Rightarrow u_4 = -462 \quad (X_{44} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_1 = 689, u_4 = -462 \Rightarrow v_1 = 1151 \quad (X_{41} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 1151 - 179 = 972 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 542 - 689 = -147 \quad (X_{13} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 118 - 84 = 34 \quad (X_{14} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = 53 + 1151 - 93 = 1111 \quad (X_{21} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_3 - c_{23} = 53 + 542 - 187 = 408 \quad (X_{23} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_4 - c_{24} = 53 + 118 + 328 = 499 \quad (X_{24} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = -396 + 1151 - 619 = 136 \quad (X_{31} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_2 - c_{42} = -462 + 171 + 217 = -74 \quad (X_{42} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_3 - c_{43} = -462 + 542 - 129 = -49 \quad (X_{43} \text{ değişkeni için})$$

Negatif en kk $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerine X_{13} değişkeni sahip olduğu için X_{13} değişkeni yeni temel değişken olarak tabana girer. X_{13} değişkeninin olduğu hücreye T miktar mal yüklenir.

Çizelge 3.37 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	179	225 - T 171	T 689	84	225
2	93	100 224	187	-328	100
3	619	75 + T -225	300 - T 146	125 -278	500
4	120 689	-217	129	55 -344	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$225 - T = 0 \Rightarrow T = 225, 300 - T = 0 \Rightarrow T = 300.$$

Min (225,300) = 225 olduğundan $T = 225$ dir. X_{12} tabandan çıkar.

Çizelge 3.38 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	179	171	225 689	84	225
2	93	100 224	187	-328	100
3	619	300 -225	75 146	125 -278	500
4	120 689	-217	129	55 -344	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$X_{13} = 225, X_{22} = 100, X_{32} = 300, X_{33} = 75, X_{34} = 125, X_{41} = 120, X_{44} = 55$$

$$\text{Max } \mu(X) = 149885$$

$$u_1 + v_3 = 689, u_1 = 0 \Rightarrow v_3 = 689 \quad (X_{13} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 = 146, v_3 = 689 \Rightarrow u_3 = -543 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 = -225, u_3 = -543 \Rightarrow v_2 = 318 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = 224, v_2 = 318 \Rightarrow u_2 = -94 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 = -278, u_3 = -543 \Rightarrow v_4 = 265 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_4 = -344, v_4 = 265 \Rightarrow u_4 = -609 \quad (X_{44} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_1 = 689, u_4 = -609 \Rightarrow v_1 = 1298 \quad (X_{41} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 1298 - 179 = 1119 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 318 - 171 = 147 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 265 - 84 = 181 \quad (X_{14} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = -94 + 1298 - 93 = 1111 \quad (X_{21} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_3 - c_{23} = -94 + 689 - 187 = 408 \quad (X_{23} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_4 - c_{24} = -94 + 265 + 328 = 499 \quad (X_{24} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = -543 + 1298 - 619 = 136 \quad (X_{31} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_2 - c_{42} = -609 + 318 + 217 = -74 \quad (X_{42} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_3 - c_{43} = -609 + 689 - 129 = -49 \quad (X_{43} \text{ değişkeni için})$$

Negatif en kk ($u_i + v_j - c_{ij}$) değerine X_{42} değişkeni sahip olduğu için X_{42} değişkeni yeni temel değişken olarak tabana girer. X_{42} değişkeninin olduğu hücreye T miktar mal yüklenir.

Çizelge 3.39 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	179	171	225 689	84	225
2	93	100 224	187	-328	100
3	619	300 - T -225	75 146	125 + T -278	500
4	120 689	T -217	129	55 - T -344	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$55 - T = 0 \Rightarrow T = 55, 300 - T = 0 \Rightarrow T = 300.$$

Min (55,300) = 55 olduğundan $T = 55$ dir. X_{44} tabandan çıkar.

Çizelge 3.40 Geliştirilmiş Dağıtım Yöntemi Tablosu

Satış Mağazaları	1	2	3	4	Arz Miktarları
Fabrikalar					
1	179	171	225 689	84	225
2	93	100 224	187	-328	100
3	619	245 -225	75 146	180 -278	500
4	120 689	55 -217	129	-344	175
Talep Miktarları	120	400	300	180	

$$X_{13} = 225, X_{22} = 100, X_{32} = 245, X_{33} = 75, X_{34} = 180, X_{41} = 120, X_{42} = 55$$

Amaç Fonksiyonu $\text{Max } \mu(X) = 153955$ bulunur.

$$u_1 + v_3 = 689, u_1 = 0 \Rightarrow v_3 = 689 \quad (X_{13} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_3 = 146, v_3 = 689 \Rightarrow u_3 = -543 \quad (X_{33} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_2 = -225, u_3 = -543 \Rightarrow v_2 = 318 \quad (X_{32} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_2 = 224, v_2 = 318 \Rightarrow u_2 = -94 \quad (X_{22} \text{ değişkeni için})$$

$$u_3 + v_4 = -278, u_3 = -543 \Rightarrow v_4 = 265 \quad (X_{34} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_2 = -217, v_2 = 318 \Rightarrow u_4 = -535 \quad (X_{42} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_1 = 689, u_4 = -535 \Rightarrow v_1 = 1224 \quad (X_{41} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 1224 - 179 = 1045 \quad (X_{11} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 318 - 171 = 147 \quad (X_{12} \text{ değişkeni için})$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 265 - 84 = 181 \quad (X_{14} \text{ değişkeni için})$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = -94 + 1224 - 93 = 1037 \quad (X_{21} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_3 - c_{23} = -94 + 689 - 187 = 408 \quad (X_{23} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_2 + v_4 - c_{24} = -94 + 265 + 328 = 499 \quad (X_{24} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = -543 + 1224 - 619 = 62 \quad (X_{31} \text{ değişkeni iin})$$

$$u_4 + v_3 - c_{43} = -535 + 689 - 129 = 25 \quad (X_{43} \text{ değişkeni için})$$

$$u_4 + v_4 - c_{44} = -535 + 265 + 344 = 74 \quad (X_{44} \text{ değişkeni için})$$

Negatif $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerleri tükendiğinden problem optimuma ulaşmıştır.

Optimal özüm;

$$X_{13} = 225, X_{22} = 100, X_{32} = 245, X_{33} = 75, X_{34} = 180, X_{41} = 120, X_{42} = 55$$

$$\text{Amaç Fonksiyonu Max } \mu(X) = 153955 \quad (3.14)$$

(3.14) optimal özümü Bölüm 3.2’de verilen gerçek hayat probleminde Min W_1 ve Min W_2 amaç fonksiyonlarında yerine konursa;

$$\text{Min } W_1(X) = \frac{24590}{1865} = 13.184, \text{ Min } W_2(X) = \frac{2390}{1865} = 1.281 \text{ değerleri elde edilir.}$$

Bu optimal değerlere göre;

Ankara’dan Kayseri’ye 225 Koli,

Antalya’dan Gaziantep’e 100 Koli,

İstanbul’dan Gaziantep’e 245 Koli,

İstanbul’dan Kayseri’ye 75 Koli,

İstanbul’dan Trabzon’a 180 Koli,

İzmir’den anakaleye 120 Koli,

İzmir’den Gaziantep’e 55 Koli Mal Taşınmalıdır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bölüm 3.2’de verilen gerçek hayat probleminde şirket yöneticilerinin iki amacı olduğu görülmektedir. Birinci amaç ürünleri en düşük maliyetle öncelikli tercih edilen güzergahlarda taşımak, ikinci amaç ise kaza riski en düşük ve önceliği yüksek güzergahlarda taşımaktır. Eğer her bir amaç için iki ayrı taşıma problemi modeli kurularak problemler çözülürse ortaya şu sonuçlar çıkacaktır.

1. Amaç : Minimum Maliyetle Tercih Derecesi Yüksek Güzergahlarda Malları Taşımak

Ankara’dan Kayseri’ye 225 Koli,
Antalya’dan Gaziantep’e 100 Koli,
İstanbul’dan Çanakkale’ye 120 Koli,
İstanbul’dan Gaziantep’e 125 Koli,
İstanbul’dan Kayseri’ye 75 Koli,
İstanbul’dan Trabzon’a 180 Koli,
İzmir’den Gaziantep’e 175 Koli Mal Taşınmalı.

$$\text{Min } W_1(X) = \frac{24470}{1865} = 13.120$$

2. Amaç : Kaza Riski Az Olan ve Tercih Derecesi Yüksek Güzergahlarda Malları Taşımak

Ankara’dan Kayseri’ye 225 Koli,
Antalya’dan Gaziantep’e 100 Koli,
İstanbul’dan Gaziantep’e 245 Koli,
İstanbul’dan Kayseri’ye 75 Koli,
İstanbul’dan Trabzon’a 180 Koli,
İzmir’den Çanakkale’ye 120 Koli,
İzmir’den Gaziantep’e 55 Koli Mal Taşınmalı.

$$\text{Min } W_2(X) = \frac{2390}{1865} = 1.281$$

Görüldüğü gibi her iki amaç için farklı sonuçlar ortaya çıkmıştır. Bu durumda şirket yöneticilerinin birinci veya ikinci amacı seçmek konusunda yani bulunan farklı sonuçları tercih etmek konusunda tereddütleri olacaktır.

Ancak iki amacı bir arada bulundurup, problemi Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemi olarak ele alıp, Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonları Taylor Serisine açılarak, Üyelik Fonksiyonları yardımıyla problem çözüldüğünde;

Optimal Çözüm :

Ankara'dan Kayseri'ye 225 Koli,
Antalya'dan Gaziantep'e 100 Koli,
İstanbul'dan Gaziantep'e 245 Koli,
İstanbul'dan Kayseri'ye 75 Koli,
İstanbul'dan Trabzon'a 180 Koli,
İzmir'den Çanakkaleye 120 Koli,
İzmir'den Gaziantep'e 55 Koli Mal Taşınmalı.

$$\text{Min } W_1(X) = \frac{24590}{1865} = 13.184, \text{ Min } W_2(X) = \frac{2390}{1865} = 1.281 \text{ olarak bulunur.}$$

Dikkat edilirse W_1 amacı için istenilene çok yakın bir değer bulunurken, W_2 amacı için ise istenilen tam değer bulunmuştur.

Bu sayede hem en düşük maliyetle hem de mümkün olduğunca tercih derecesi yüksek ve kaza riski az olan güzergahlarda mal taşınması suretiyle şirket yöneticilerinin daha sağlıklı bir karar vermeleri sağlanmıştır.

Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonlarının Taylor Serisine açılarak, Üyelik Fonksiyonları yardımıyla Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin Tek Amaçlı Klasik Taşıma Problemine dönüştürülmesiyle elde edilen sonuçların istenilen hedeflere çok yakın olması bize bu yöntemin doğruluğu ve güvenilirliği konusunda bilgi vermektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Taha, Hamdy A., (2003). Yöneylem Araştırması, (Çev. Baray Alp Ş. ve Esnaf S.), Literatür Yayıncılık, İstanbul.
- [2] Kantorovich, L., (1939). The Mathematical Method of Production Planning and Organization and The Best Uses of Economic Resources.
- [3] Hitchcock, Frank. L., (1941). "The distribution of a product from several sources to numerous localities", J. Math. Phys., 20:224-30.
- [4] Koopmans, Tjalling C., (1947). "Optimum Utilization of the Transportation System." Proceedings of the International Statistical Conferences, Reprinted in Supplement to Econometrica 17, 5:136-146.
- [5] Dantzig, G.B., (1951). Application of the Simplex Method to a Transportation Problem, Ch. XXIII. Cowles Commission Monograph, New York, 13.
- [6] Dantzig, George B., (1963). "Linear Programming and Extensions," Princeton University Press, Princeton.
- [7] Bajalinov, E.B., (2003). Linear Fractional Programming: Theory, Methods, Applications and Software, Kluwer Academic Publishers, London.
- [8] Moanta, D., (2007). "Some Aspects on Solving a Linear Fractional Transportation Problem", Journal of Applied Quantative Methods, 2(3):343-345.
- [9] Tiryaki, F. ve Cetin, N., (2005). "Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemine (ÇALKTP) Bulanık Matematik Programlama Yaklaşımı", YA/EM 2005 25. Ulusal Kongresi, 04-06 Temmuz, Koç Üniversitesi Rumeli Feneri Kampüsü, İstanbul.
- [10] Özdeğer, A. ve Özdeğer, N., (1996). Çözümlü Analiz Problemleri Cilt 1, İstanbul.
- [11] Sivri, M. ve Güzel, N., (2005). "Çok Amaçlı Doğrusal Kesirli Programlama Probleminin Taylor Serisiyle Çözümü", Trakya Üniversitesi, Fen Bilimleri Dergisi, 6(2):80-87.
- [12] Aksoy, Y. ve Özkan, M., (2003). Bulanık Mantığa Giriş, Yıldız Teknik Üniversitesi Vakfı Yayınları, İstanbul.
- [13] Yılmaz, S., (2007). Bulanık Mantık ve Mühendislik Uygulamaları, Kocaeli Üniversitesi Yayınları, Kocaeli.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Muammer Bertuğ BULUT
Doğum Tarihi ve Yeri : 13 Ocak 1980 – Adana
Yabancı Dili : İngilizce, İtalyanca
E-posta : bertugbulut@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik Müh.	Yıldız Teknik	2011
Lisans	Matematik Müh.	Yıldız Teknik	2002
Lise	Matematik	Kurtuluş Süper Lisesi	1998

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2006-2010	Onur Hava Yolları	Performans Mühendisi