

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**POZİTİF OPERATÖR YARIGRUPLARININ İDEAL
ÜÇGENLEŞTİRİLEBİLİRLİĞİ**

Matematikçi Ulya ALĞAN

**FBE Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer GÖK (YTÜ)

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	ii
SİMGE LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT	vii
1.GİRİŞ.....	1
2.ÖN BİLGİLER	3
3.YARIGRUPLARIN İNDİRGENEBİLİRLİĞİ	10
4.SOYUT İNTEGRAL OPERATÖRLERİN İDEAL İNDİRGENEBİLİRLİĞİ	14
5.ATOMLAR VE İNDİRGENEBİLİRLİK.....	17
6.YEREL İDEAL-ÜÇGENLEŞTİRİLEBİLİRLİKTEN GLOBAL İNDİRGENEBİLİRLİĞE.....	21
7.YARIGRUPLARIN İDEAL ÜÇGENLEŞTİRİLEBİLİRLİĞİ.....	23
8.AL- ve AM- UZAYLARI ÜZERİNDEKİ OPERATÖRLERİN YARIGRUPLARI.....	27
9.SONUÇLAR.....	29
KAYNAKLAR.....	30
ÖZGEÇMİŞ.....	31

SİMGE LİSTESİ

A^d	A kümesinin ayrık tümleyeni
AL	Soyut L uzayı
AM	Soyut M uzayı
B_x	x ile üretilen band
$\cdot$	İdeal üçgenleştiren zinciri
clA	A' 'nin kapanışı
C_T	T' 'nin taşıyıcısı
E^*	E normlu Riesz uzayının dual uzayı
E^+	E normlu Riesz uzayının pozitif konisi
E_n^*	E^* dual normunun E^* içindeki alt bandı
$\mathcal{F}$	Operatör ailesi
$f \otimes \varphi$	Rankı bir olan operatör
$\{f\}^{dd}$	f' 'nin ikinci ayrık tümleyeni
L^p	p . kuvvetten integrallenebilen fonksiyonların uzayı
$\mathcal{L}(E)$	E üzerindeki tüm operatörlerin cebiri
$\mathcal{L}_r(E)$	E üzerindeki tüm düzenli operatörler uzayı
L^d	L' 'nin ayrık tümleyeni
$maks$	Maksimum
μ	Ölçüm
$N(T)$	T operatörünün mutlak çekirdeği
P_C	C üzerindeki izdüşüm bandı
$ T $	T' 'nin modülü
x^+	x elemanının pozitif kısmı
x^-	x elemanının negatif kısmı
$ x $	x elemanının mutlak değeri
(x_λ)	X' 'de bir net(ağ)
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\wedge$	İnfimum
$\vee$	Supremum
$\supseteq$	Kapsar veya eşittir
$\downarrow$	Aşağı yönlü

$\uparrow$	Yukarı yönlü
$\leq$	Küçük veya eşittir
$\geq$	Büyük veya eşittir
$\neq$	Eşit değildir
$\sqrt{}$	Karekök
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
$\Rightarrow$	İse
$\Leftrightarrow$	Ancak ve ancak
$\otimes$	Tensör çarpım
$\oplus$	Direkt toplam
$\subset$	Özalt küme
Π	Çarpım sembolü
Σ	Toplam sembolü

ÖNSÖZ

Çalışmalarımın her aşamasında benden desteğini esirgemeyen, öneri ve yönlendirmeleriyle bana her konuda yardımcı olan değerli hocam Prof. Dr. Ömer Gök'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca bütün eğitim hayatım boyunca gösterdikleri sabır, hoşgörü, maddi ve manevi destekleri için değerli aileme, eşime ve biricik kızıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu çalışmada pozitif operatör yarıgruplarının ideal üçgenleştirilebilirliği ile ilgilenilmiştir. Bir E Banach Latis' i üzerinde bulunan pozitif operatörlerin çarpımsal bir yarıgrubu $\mathcal{S}$ olsun öyle ki her $S \in \mathcal{S}$ ideal üçgenleştirilebilir demektir. Yani ideal üçgenleştirme, E' nin kapalı altuzaylarının, $\mathcal{S}$ altındaki kapalı değişmez ideallerinden oluşmuş maksimal bir zinciri var demektir.

Hangi durumlarda $\mathcal{S}$ yarı grubunun tümü ara sıra ideal – üçgenleştirilebilir olduğu sorusu göz önüne alınmıştır(Drnovšek ve Kandic, 2009). Özellikle burada daha önce G. Mc Donald ve H.Radjavi tarafından elde edilmiş sonuçların genişletmesi yapıldı. Aynı zamanda E' nin Dedekind Tam olduğu durumlarda ki bütün pozitif soyut integral operatörleri kapsayan pozitif operatörlerin bir sınıfı da sunulmuştur(Drnovšek ve Kandic, 2009).

Anahtar Kelimeler: Değişmez altuzaylar, Banach latisleri (kafes), kapalı idealler, pozitif operatörler, soyut integral operatörler, operatör yarıgrupları.

ABSTRACT

In this work; it was dealt with ideal triangularizability of semigroups of positive operators. Let $\mathcal{S}$ be a multiplicative semigroup of positive operators on a Banach lattice E such that every $S \in \mathcal{S}$ is ideal-triangularizable, i.e., there is a maximal chain of closed subspaces of E that consist of closed ideals invariant under S .

We consider the question under which conditions the whole semigroup $\mathcal{S}$ is simultaneously ideal-triangularizable (Drnovšek ve Kandic, 2009). In particular, we extend a recent result of G. MacDonald and H. Radjavi. We also introduce a class of positive operators that contains all positive abstract integral operators when E is Dedekind complete (Drnovšek ve Kandic, 2009).

Keywords: Invariant subspaces, Banach lattices, closed ideals, positive operators, abstract integral operators, semigroups of operators.

1. GİRİŞ

E bir normlu Riesz uzayı olsun ve E^+ , E ' nin pozitif konisini temsil etsin. Burada E üzerindeki bir operatör E' den kendi içine tanımları sınırlı bir lineer dönüşüm ifade eder. $\mathcal{L}(E)$, E üzerindeki tüm operatörlerin cebirini temsil etsin. Bir $T \in \mathcal{L}(E)$ operatörü her $x \in E^+$ için $Tx \in E^+$ olduğu durumlarda “pozitif” olarak adlandırılır.

Bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(E)$ ailesi, eğer E' ye ait, $\mathcal{F}$ 'nin her elemanı altında değişmez aşıkâr olmayan kapalı bir altuzayı mevcut ise ‘indirgenebilir’ olarak adlandırılır. Aksi durumda $\mathcal{F}$ indirgenmez olarak adlandırılır. Eğer bütün elemanları $\mathcal{F}$ 'in her elemanı altında değişmez bir maksimal altuzay zinciri oluştursa, bu durumda $\mathcal{F}$ ‘üçgenleştirilebilir’ adını alır.

Radjavi ve Rosenthal (2000), operatörlere ait ailelerin indirgenebilirliği ve üçgenleştirilebilirliği hakkındaki çalışmalarında birçok verinin yer aldığı genel bir bakış içermektedir. E üzerindeki pozitif operatörler için sorulması gereken doğal bir soruda basit bir geometrik formun yani, bir idealin veya herhangi bir bandın aşıkâr olmayan değişmez bir altuzayının var olup olmadığıdır. Bu nedenle aşağıdaki terminolojiye göz atmak uygun olacaktır.

Bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(E)$ ailesi, $\mathcal{F}$ altındaki herbir operatör için değişmez olan E' ye ait aşıkâr olmayan kapalı bir idealin (sırasıyla bandın) var olduğu durumlarda “ideal – indirgenebilir (sırasıyla band indirgenebilir)” olarak isimlendirilir. Bir $\mathcal{F}$ ailesi eğer E' nin kapalı ideallerinin bir zinciri gibi maksimal ve $\mathcal{F}$ ' nin bütün operatörleri altında tüm idealleri değişmez bir $\mathbb{C}$ zincirine sahipse ideal üçgenleştirilebilirdir. Bu tür kapalı idealler zinciri $\mathcal{F}$ ailesi için bir ideal – üçgenleştiren zinciri olarak adlandırılır.

Her bir ideal –üçgenleştiren zincirinin aynı zamanda kapalı altuzaylarının bir maksimal zinciri olduğu Drnovšek' in (2000), Önerme 1.2' sinde ispatlanmıştır. Bu nedenle, bir operatör ailesi ancak ve ancak kapalı ideallerden oluşan bir altuzay zincirine göre üçgenleştirilebilir ise ideal – üçgenleştirilebilirdir.

Bir $\mathbb{C}$ ideal – üçgenleştiren zincirinin her bir kapalı I ideali için;

$$I^- = cl(U(J: J \in \mathbb{C}, J \subset I, J \neq I)) \quad (1.1)$$

olduğu yerde I/I bölüm uzayı en fazla bir boyuttadır.

Bir $\mathbb{C}$ ideal-üçgenleştiren zinciri eğer her bir $I \in \mathbb{C}$ kapalı ideali için $I^- = I$ ise “sürekli” olarak isimlendirilir. İdeal- üçgenleştirilebilirliğin tanımlaması (Jahandideh, 1997) Banach Latis benzeri olarak yapılmıştır.

Bu konu ayrıca L^p - ($1 \leq p < \infty$) uzayları içerisinde bandların standart altuzay olarak isimlendirildiği ve tümüyle ayrıştırılabilir olarak tanımlandığı Radjavi ve Rosenthal' in(2000) kaynağındaki çalışmalarda da belirtilmiştir.

Bir operatör yarıgrubu çarpım altında kapalı bir operatör ailesidir. 1986' da B.de Pogter uzun bir süredir bir varsayım olarak var olan bir (en az iki boyutlu) Banach Latis üzerindeki her bir pozitif yarı nilpotent kompakt operatörün ideal indirgenebilir olduğu görüşünü ispatlamıştır. Bu bilgi ile beraber bu operatörün ideal- üçgenleştirilebilir olduğuda söylenebilmektedir (Drnovšek, 2001). Y.V.Turovskii' nin bir Banach uzayı üzerindeki her bir yarı nilpotent operatör yarıgrubunun ideal- üçgenleştirilebilir olduğu görüşünden çıkarılan sonuca dayanılarak oluşturulan bir uygulama ile bu sonuç Turovskii' nin(1999) kaynağındaki çalışmalarda yarı nilpotent kompakt operatörlerin yarıgruplarına doğru genişletilmiştir.

Ando-Kruger teoreminin bir genellemesi olarak, bir Dedekind Tam Banach Latis üzerindeki bir pozitif yarı nilpotent soyut integral operatör yarıgrubunun indirgenebilir olduğu çıkarılabilir(Drnovšek, 2001).

L^p uzayları ($1 \leq p < \infty$) için bu durum Radjavive Rosenthal' in(2000) Teorem 9.4.9'unda gösterilmiştir. MacDonald ve Radjavi' nin (2005) çalışmalarında, G.McDonald ve H.Radjavi, L^p - uzayları üzerinde yer alan daha fazla genel operatörlerin yarıgrupları üzerinde çalışarak bu araştırmaya devam ettiler. Elde edilen asıl sonuç (Teorem 7.3) sadece MacDonald ve Radjavi' nin(2005) Teorem 3' ünün bir Banach Latis genellemesi değil bunun ayrıca L^p - uzaylarına genişletilmiş halinden oluşmaktadır. Bu bölümün kalan kısmında konu ile alakalı olarak bazı sonuçlara ve tanımlamalara değineceğiz. Burada terminolojisi açıklanmamış olan bölümler için (Aliprantis, 2006;Meyer-Neeberg,1991; Zaanen, 1983) kaynaklarına bakılabilir.

Bu çalışma yedi başlık altında ele alınmıştır. İlk başlıkta çalışmamızda kullanılan temel bilgilerin tanımları yer almaktadır. İkinci başlık altında, yarıgrupların indirgenebilirliği, üçüncü başlık altında, soyut integral operatörlerin ideal indirgenebilirliği, dördüncü başlık altında atomlar ve indirgenebilirliğe değinilmiştir ve daha sonraki başlıklarda da yerel ideal-üçgenleştirilebilirlikten global indirgenebilirliğe, yarıgrupların ideal üçgenleştirilebilirliği, AL- ve AM- uzayları üzerindeki operatörlerin yarıgruplarıyla ilgili önerme ve sonuçlar ele alınmıştır. Ayrıca bu çalışmada Roman Drnovšek ve Marko Kandić' in “Pozitif Operatör Yarıgruplarının İdeal Üçgenleştirilebilirliği” makalesi üzerinde durulmuştur.

2. ÖNBİLGİLER

Bu bölümde, tezde geçen bazı önemli terminolojiler, tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1

Bir E reel vektör uzayı, cebirsel yapısıyla uyumlu olan bir $\geq$ sıralama bağıntısı ile donatılmış ($\geq$ yansılmalı, anti simetrik, geçişmeli) ise ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyorsa E' ye sıralı vektör uzayı denir.

$$(1) \quad \text{Her } z \in E \text{ için } x \leq y \text{ ise } x + z \leq y + z \text{ ' dir.} \quad (2.1)$$

$$(2) \quad \text{Her } \alpha \geq 0 \text{ için } x \leq y \text{ ise } \alpha x \leq \alpha y \text{ ' dir.} \quad (2.2)$$

Tanım 2.2

E , sıralı vektör uzayı olmak üzere, E' nin bütün pozitif elemanlarının kümesi E^+ ile gösterilir. Yani, $E^+ := \{x \in E : x \geq 0\}$ ' dir ve E' nin konisi denir.

Tanım 2.3

E ve F sıralı vektör uzayları arasında bir $T: E \rightarrow F$ operatörü tanımlansın. Her $x \geq 0$ için $T(x) \geq 0$ oluyorsa T' ye pozitif operatör denir. $T \geq 0$ ile gösterilir.

Tanım 2.4

E , bir sıralı vektör uzayı olsun. $x, y \in E$ elemanlarının her sıralı ikilisi için E' de $\{x, y\}$ kümesinin supremumu ve infimumu mevcut ise E' ye Riesz Uzayı (veya vektör latis) denir.

$$x \vee y = \sup\{x, y\} \quad (2.3)$$

$$x \wedge y = \inf\{x, y\} \quad (2.4)$$

ile gösterilir.

Tanım 2.5

Bir Riesz uzayında $|x| \wedge |y| = 0$ şartını sağlayan x ve y elemanlarına ayrık denir ve $x \perp y$ ile gösterilir.

Tanım 2.6

Eğer A , bir E Riesz uzayının boş olmayan bir alt kümesi ise, A' nin A^d ayrık tümleyeni $A^d := \{x \in E : \text{her } y \in A \text{ için } x \perp y\}$ (2.5)

ile tanımlanır.

Tanım 2.7

X bir küme ve $\wedge$ yönlendirilmiş küme olmak üzere $\wedge$ üzerinde tanımlı her $f : \wedge \rightarrow X$ fonksiyonuna X ’de bir ağ veya net denir. $\lambda \in \wedge$ için $f(\lambda) = x_\lambda \in X$ şeklinde veya (x_λ) şeklinde gösterilir. $\alpha \geq \beta$ olduğunda $x_\alpha \leq x_\beta$ oluyorsa bir Riesz uzayındaki bir $\{x_\alpha\}$ ağına azalan denir ve $x_\alpha \downarrow$ ile gösterilir. $x_\alpha \downarrow x$ notasyonu $x_\alpha \downarrow$ ve $\inf\{x_\alpha\} = x$ anlamındadır.

Tanım 2.8

Arşimet özelliği, her $x > 0$ reel sayısı için $\{nx\}$ dizisinin $\mathbf{R}$ ’de yukarıdan sınırsızlığını ifade eder. Bu, her $x > 0$ için $\mathbf{R}$ ’de $n^{-1}x \downarrow$ olmasıyla eşdeğerdir. Her $x \in E^+$ için E ’de $n^{-1}x \downarrow$ oluyorsa E Riesz uzayına Arşimet denir.

Tanım 2.9

E ve F Riesz uzayları arasında tanımlı bir $T : E \rightarrow F$ operatörü için, $|T| := T \vee (-T)$ oluyorsa $|T|$ ’ye T ’nin modülü denir. ($|T| \in L(EF)$ ’de $\{T, -T\}$ kümesinin supremumudur).

Tanım 2.10

x ve y elemanları $x \leq y$ olacak şekilde bir E Riesz uzayının elemanları ise, $[x, y]$ sıralı aralığı $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ alt kümesiyle tanımlanır.

Her $y \in A$ için $y \leq x$ eşitsizliğini sağlayan bir x varsa bir Riesz uzayının A alt kümesine yukarıdan sınırlıdır denir. Benzer şekilde, her $y \in A$ için $x \leq y$ eşitsizliğini sağlayan bir x varsa bir Riesz uzayının A alt kümesine aşağıdan sınırlıdır denir. Bir A kümesi aşağıdan ve yukarıdan sınırlı (veya denk olarak, A bir sıralı aralıkta kapsanır) ise sıralı sınırlı olarak adlandırılır.

Bir $T : E \rightarrow F$ operatörü, E ’nin sıralı sınırlı alt kümelerini F ’nin sıralı sınırlı alt kümeleri üzerine gönderiyorsa sıralı sınırlı olarak adlandırılır.

Tanım 2.11

Yukarıdan sınırlı her boş olmayan alt kümesi için bir supremumu olan (veya denk olarak, aşağıdan sınırlı her boş olmayan alt kümesi için bir infimumu olan) bir Riesz uzayı Dedekind Tam olarak adlandırılır.

E ve F , Dedekind tam Riesz uzayları olduğunda her $x \in E^+$ için her sıralı sınırlı $T : E \rightarrow F$ operatörü için aşağıdakiler sağlanır:

$$|T|(x) = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\} \quad (2.6)$$

$$T^+(x) = \sup\{Ty : 0 \leq y \leq x\} \quad (2.7)$$

$$T^-(x) = \sup\{-Ty : 0 \leq y \leq x\} \quad (2.8)$$

Tanım 2.12

G , bir E Riesz uzayının vektör altuzayı olsun. Eğer G , E' nin latis işlemlerinin altında kapalı yani, E' de alınan $x, y \in G$ elemanlarının her ikilisi için $x \vee y$ G' ye ait olduğunda G' ye Riesz altuzayı denir.

Tanım 2.13

$|x| \leq |y|$ ve $y \in A$ olduğunda $x \in A$ oluyorsa bir Riesz uzayının bir A alt kümesine solid denir.

Bir Riesz uzayının bir solid vektör altuzayı sıralı ideal olarak adlandırılır.

Tanım 2.14

$x \leq y$ olmakla birlikte her $x \in E$ için bir $y \in G$ var olduğunda bir E Riesz uzayının bir G vektör altuzayına majorize E denir.

Tanım 2.15

Bir Riesz uzayında bir $\{x_\alpha\}$ ağı olsun. Her α için $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ olacak biçimde bir $\{y_\alpha\}$ ağı var ki, $y_\alpha \downarrow 0$ ise $\{x_\alpha\}$ ağı x' e sıralı yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ ile gösterilir (Kısaca, $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$).

Tanım 2.16

$\{x_\alpha\} \subseteq A$ ve $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ olduğunda $x \in A$ ise bir Riesz uzayının bir A alt kümesine sıralı kapalıdır denir. Sıralı kapalı bir ideal, bir band olarak adlandırılır.

Tanım 2.17

Genel olarak, $P^2 = P$ olduğunda bir vektör uzayında bir $P : E \rightarrow E$ operatörü izdüşüm (projeksiyon) olarak adlandırılır.

Eğer bir P izdüşümü bir Riesz uzayında tanımlı ve aynı zamanda pozitif operatör ise P' ye bir pozitif izdüşüm denir.

Tanım 2.18

Bir E Riesz uzayındaki bir B bandı $E = B \oplus B^d$ şartını sağlıyorsa bir izdüşüm bandı olarak adlandırılır.

Bir E Riesz uzayında tanımlı bir B izdüşüm bandı olsun. Bunun için, $E = B \oplus B^d$ olur ve böylece $x_1 \in B$ ve $x_2 \in B^d$ olacak şekilde her $x \in E$ elemanı bir $x = x_1 + x_2$ tek türlü yazılışına sahiptir.

Bir $P_B : E \rightarrow E$ izdüşümü $P_B(x) := x_1$ ile tanımlanır. Açıkça, P_B bir pozitif izdüşümdür. P_B formunun herhangi bir izdüşümü, bir band izdüşümü(sıralı izdüşümü) olarak adlandırılır.

Tanım 2.19

E ve F Riesz uzayları arasında bir $T : E \rightarrow F$ operatörü tanımlansın. E' de $x_\alpha \xrightarrow{0}$ olduğunda F' de $Tx_\alpha \xrightarrow{0}$ oluyorsa T' ye sıralı sürekli denir.

Tanım 2.20

F Dedekind tam olmakla birlikte E ve F Riesz uzayları arasında sıralı sınırlı bir $T : E \rightarrow F$ operatörünü düşünelim. T' nin sıfır ideali

$$N(T) : \{x \in E : T|x| = 0\} \quad (2.9)$$

şeklinde gösterilir.

Burada $N(T)$, E' nin bir kapalı idealidir. E üzerinde tanımlı operatörlere ait bir $\mathcal{F}$ ailesi için $N(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}'$ de tanımlı tüm operatörlerin mutlak çekirdeklerinin kesişme noktasını temsil etsin, bu da

$$N(\mathcal{F}) = \bigcap_{T \in \mathcal{F}} N(T) \quad (2.10)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.21

N_T 'nin ayrık tümleyeni, T' nin taşıyıcısı olarak adlandırılır ve $C_T := N_T^d := \{x \in E : x \perp N_T\}$ ile gösterilir.

Tanım 2.22

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve R , reel veya kompleks sayılar cismi olsun. $f : X \rightarrow R$ lineer operatörüne lineer fonksiyonel denir.

E bir Riesz uzayı olsun. Her $x \in E^+$ için $f(x) \geq 0$ şartını sağlayan bir $f : X \rightarrow R$ lineer fonksiyoneli pozitifdir denir. Aynı zamanda; eğer f , E' nin sıralı sınırlı alt kümelerini R' nin sınırlı alt kümelerine gönderiyorsa f lineer fonksiyoneli sıralı sınırlı olarak adlandırılır.

Tanım 2.23

$f : X \rightarrow R$ lineer fonksiyoneli sürekli ise f' ye sürekli lineer fonksiyonel denir. X' de tanımlı sürekli lineer fonksiyonellerin uzayına X' in topolojik duali denir.

Tanım 2.24

E bir Riesz uzayı olsun. E' de bütün sıralı sınırlı lineer fonksiyonellerin $\tilde{E}$ vektör uzayı, E' nin sıralı duali olarak adlandırılır. Yani, $\tilde{E} = L_b(E, R)$ ' dir.

Tanım 2.25

İki Riesz uzayı arasında tanımlı $T : E \rightarrow F$ operatörüne, her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ veya $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$ oluyorsa, T bir latis homomorfizmasıdır denir.

Tanım 2.26

Riesz uzayı üzerinde tanımlı $\|\cdot\|$ norm; $|x| \leq |y|$ olduğunda $\|x\| \leq \|y\|$ oluyorsa latis norm denir. Latis normu içeren Riesz uzaya da Normlu Riesz Uzayı denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Tanım 2.27

Bir normlu Riesz uzayı aynı zamanda tam normlu ise Banach latis olarak adlandırılır.

Tanım 2.28

E ve F Dedekind tam olmak üzere iki Banach latis ve $T : E \rightarrow F$ bir sıralı sınırlı operatör olsun.

$L_b(E, F)$ ' de pozitif operatörlerin her dizisi $|T| \geq T_n \downarrow 0$ olmakla birlikte $\|T_n\| \downarrow 0$ şartını sağlıyorsa T operatörü sıralı sürekli norma sahiptir denir.

Tanım 2.29

E bir Banach latis olmak üzere, bir $1 \leq p \leq \infty$ değeri için E' nin normu p - toplanabilir ve $x \wedge y = 0$ olmakla beraber her $x, y \in E^+$ olduğunda $\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$ oluyorsa E' ye bir soyut L_p - uzayı denir ve L_I - uzayına AL uzayı denir.

Tanım 2.30

E bir Banach latis olmak üzere, E' nin normu bir M -norm yani, E' de $x \wedge y = 0$ olduğunda $\|x + y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ oluyorsa E' ye bir soyut M -uzayı denir ve AM uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.31

E bir Archimedean Riesz Uzayı olsun. U , E' nin bir altuzayı olmak üzere eğer tüm $x, y \in U$ için $x \vee y \in U$ ve $x \wedge y \in U$ ise U , E' nin bir alt latisidir denir.

Tanım 2.32

E bir birimli AM - uzayı olmak üzere; her $x \in E$ elemanı $M(y) = xy, y \in E$ formülü ile bir $M : E \rightarrow E$ çarpım operatörü tanımlar.

Tanım 2.33

$T : X \rightarrow Y$ X ve Y normlu uzayları arasında tanımlı bir operatör olsun. T, X' in kapalı birim küresini Y' nin bir göreceli norm kompakt alt kümesi üzerine gönderiyorsa T' ye kompakt operatör denir.

Tanım 2.34

(X, τ) topolojik uzay olsun. Her $p \in X$ ve p' yi ihtiva etmeyen bir F kapalı alt kümesi verilsin. $p \in U, F \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açıkları varsa bu uzaya regüler uzay denir.

Tanım 2.35

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere X' in verilen bir A alt kümesi için A' yi içeren tüm kapalı kümelerin arakesitlerine A' nin kapanışı denir. clA ile gösterilir.

Tanım 2.36

Normlu bir E uzayı cebir aksiyomlarını sağlasın. Her $x, y \in E$ için $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ ise E' ye normlu cebir denir. Tam normlu cebire bir Banach cebiri denir.

Bir E normlu Riesz uzayının, E^* dual uzayı için aşağıdaki Lemma' ya ihtiyaç duyulur.

LEMMA 2.1

I , E içerisinde kapalı bir ideal olsun. $I \neq E$ olduğu durumlarda I üzerinde sıfır olan sıfırdan farklı bir pozitif $\varphi \in E^*$ fonksiyoneli vardır.

İspat

$x \notin I$ olan herhangi bir vektör seçelim. O zaman x^+ ve x^- vektörlerinden en az biri I ideali içinde yer almaz. Bu durumda $x > 0$ diyebiliriz. Burada Zaanen (1996), Teorem 39. 3' üne göre, E/I bölümlü normlu Riesz uzayı üzerinde $\psi(x+I) = \|x+I\| > 0$ durumunu sağlayan bir pozitif lineer ψ fonksiyoneli vardır. " π ", E' nin E/I üzerindeki bölümlü izdüşümünü temsil etsin. O zaman $\varphi = \psi \circ \pi$, E üzerinde $\varphi(y) = \psi(x+I) = \|x+I\| > 0$ ve her $y \in I$ için $\varphi(y) = 0$ durumunu sağlayan bir pozitif lineer fonksiyoneli dir.

E , bir kompleks Dedekind tam Banach latisi olsun. $\text{Re}E'$ nin gerçek bir Dedekind tam Banach latisi olduğu yerde $E = \text{Re}E \oplus i\text{Re}E$ dir., E üzerindeki tüm düzenli operatörler uzayını temsil etsin. Bu operatörler pozitif operatörlerin lineer kombinasyonları olarak ifade edilebilirler. $\mathcal{L}(E)$ uzayının bu altuzayı $\|T\|_r := \|T\|$ olarak tanımlanan regüler norma göre kompleks bir Banach latis cebiridir. $\mathcal{Z}(E) := \{T \in \mathcal{L}_r(E) : |T| \leq \lambda I \text{ bazı } \lambda \geq 0\}$ ile tanımlanan $\mathcal{Z}(E)$ merkezi, $\mathcal{L}(E)$ uzayının değişmeli bir alt cebiridir.

Eğer $T \in \mathcal{Z}(E)$ ise, o zaman $\|T\| = \|T\|_r = \min \{\lambda \geq 0 : |T| \leq \lambda I\}$ dir.

$\mathcal{Z}(E)$ aynı zamanda $\mathcal{L}_r(E)$ içinde bir band olduğundan, $\mathcal{L}_r(E)$ nin ayrıştırılması, $\mathcal{L}_r(E) = \mathcal{Z}(E) \oplus \mathcal{Z}(E)^\perp$ bir band şeklinde ayrıştırılabilir. $\mathcal{L}_r(E)$ içinde, $\mathcal{Z}(E)$ ve $\mathcal{Z}(E)^\perp$ üzerine olan ilişkili izdüşüm bandları, ayrı ayrı olarak, $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{N}$ ile belirtilir. Voight'in (1988) bir sonuncuna göre, $\mathcal{D}$ köşegen dönüşüm operatör norma göre bir daraltmadır. Yani her $T \in \mathcal{L}_r(E)$ için $\|\mathcal{D}(T)\| \leq \|T\|$ dir.

3.YARIGRUPLARIN İNDİRGENEBİLİRLİĞİ

L^p - uzaylarının içerisinde ispatlanmış olan Radjavi ve Rosenthal (2000), Lemma 8.7.6'sının bir genellemesi ile başlayalım. Bir $\mathcal{S}$ yarigrubunun bir $\mathcal{I}$ altkümesi, eğer her $S \in \mathcal{S}$ ve $T \in \mathcal{I}$ için ST ve TS $\mathcal{I}$ 'ya ait ise, bir yarigrup ideali olarak tanımlanır.

Önerme 3. 1

E bir normlu Riesz uzayı olsun ve $\mathcal{S}'$ de E üzerinde tanımlı pozitif operatörlerin sıfır olmayan bir yarigrubu olsun. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

1. $\mathcal{S}$ ideal – indirgenbilirdir.
2. $\varphi(\mathcal{S}f) = \{0\}$ durumunu sağlayan bir sıfır olmayan pozitif $\varphi \in E^*$ fonksiyoneli ve bir sıfır olmayan pozitif $f \in E$ vektörü vardır.
3. E üzerinde $ASB = \{0\}$ durumunu sağlayan sıfır olmayan A ve B pozitif operatörleri mevcuttur.
4. $\mathcal{S}'$ nin bir sıfır olmayan yarigrup ideali ideal indirgenbilirdir.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (4) gerektirmesi hemen elde edilebilir. Bunu tersi ise (4) $\Rightarrow$ (1) Drnovsek' nin (2000), Lemma 1.3' ünde gösterilmiştir.

(1) $\Rightarrow$ (2)' yi göstermek için L , $\mathcal{S}$ yarigrubu altında aşikâr olmayan kapalı bir değişmez ideali olsun. Eğer $f \in L$ sıfır olmayan pozitif bir vektör ise, $\mathcal{S}f \subseteq L$ olur. Lemma 2.1' e göre L idealini sıfırlayan, sıfır olmayan bir pozitif $\varphi \in E^*$ fonksiyoneli vardır. Bu nedenle $\varphi(\mathcal{S}f) = \{0\}$ olur.

(2) $\Rightarrow$ (3) ü göstermek için, $\varphi(\mathcal{S}f) = \{0\}$ durumunu sağlayan sıfır olmayan bir pozitif $\varphi \in E^*$ fonksiyoneli ve bir sıfır olmayan pozitif $f \in E$ vektörü olduğunu varsayalım. Rankı 1 olan $A=B=f \otimes \varphi$ pozitif operatörleri tanımlayalım. Buradan $ASB = \{0\}$ elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) i göstermek için E üzerinde $ASB = \{0\}$ durumunu sağlayan sıfır olmayan A , B pozitif operatörlerin olduğunu varsayalım ve $f = Bg \neq 0$ durumunu sağlayan bir pozitif $g \in E$ vektörünü seçelim. Eğer $\mathcal{S}f = \{0\}$ ise, f tarafından oluşturulan kapalı ideal $\mathcal{S}$ altında değişmez ve aşikâr değildir. Bu nedenle genelliliği bozmaksızın $\mathcal{S}f \neq \{0\}$ kabul edilebilir. L , $\mathcal{S}f$ kümesi

tarafından üretilen bir ideal olsun. Bir $S \in \mathcal{S}$ operatörü altında L' nin değişmez olduğunu iddia ediyoruz. Bunu göstermek için h, L içerisinde herhangi bir pozitif vektör olsun. Bu durumda $n \in \mathbb{N}$ olan

$$0 \leq h \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i S_i f \quad (3.1)$$

ile

$$0 \leq Sh \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i SS_i f \quad (3.2)$$

durumlarını sağlayan $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ skalerler ve $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ mevcuttur. Bu durumda görüldüğü gibi $Sh \in L$ olur. Ayrıca herhangi bir $h \in L$ için, her $S \in \mathcal{S}$ için $ASf = 0$ olduğu durumlarda $Ah = 0$ sonucunu elde ederiz. Bu da $cl(L)'$ nin $\mathcal{S}$ altında değişmez bir özalt kapalı ideali olduğunu gösterir.

Band- indirgenebilirlikle ilgili yukarıdaki önermeye benzer bir önerme verelim.

Önerme 3. 2

E , izdüşüm özelliğine sahip bir normlu Riesz uzayı olsun ve $\mathcal{S}'$ de E üzerinde sıfır olmayan bir pozitif sıralı sürekli operatörlerin yarıgrubu olsun. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

1. $\mathcal{S}$ bir band indirgenebilirdir.

2. $\mathcal{S}f \subseteq \{g\}^d$ durumunu sağlayan sıfır olmayan $f, g \in E^+$ vektörleri vardır.

3. E üzerinde $ASB = \{0\}$ durumunu sağlayan sıfır olmayan A ve B pozitif sıralı sürekli operatörleri mevcuttur.

4. $\mathcal{S}$ içerisindeki sıfır olmayan bir yarıgrup ideali band indirgenebilirdir.

Bu koşullar (5) tarafından sağlanır.

5. $\varphi(\mathcal{S}f) = \{0\}$ durumunu sağlayan sıfır olmayan bir pozitif sıralı sürekli fonksiyoneli $\varphi \in E^*$ ve sıfır olmayan bir $f \in E^+$ vektörü vardır.

İspat

(1)' in (2)' yi gerektirdiğini görmek için $L, \mathcal{S}$ yarigrubu altında değişmez aşikâr olmayan bir band olsun. Sıfır olmayan herhangi bir $f \in L^+$ vektörü seçelim. O zaman $\mathcal{S}f$ kümesi L içerisinde yer alır. Eğer $g \in L^d$ sıfır olmayan herhangi bir pozitif vektör ise, $\mathcal{S}f \subseteq L \subseteq \{g\}^d$ dir.

(2)' nin (3)' ü gerektirdiğini göstermek için her bir üyesi sıralı sürekli olduğundan $\mathcal{S}f$ kümesi tarafından oluşturulan $\{\mathcal{S}f\}^{dd}$ bandı, $\mathcal{S}$ yarigrubu altında değişmezdir. $P, \{\mathcal{S}f\}^{dd}$ üzerinde izdüşüm bandı olsun. $\{\mathcal{S}f\}^{dd} \subseteq \{g\}^d$ ve g' nin sıfır olmadığı durumlarda P, I birim operatörüne eşit değildir ve $(I - P)\mathcal{S}P = \{0\}$ dir. Bu $P=0$ olmadığı durumlar için (3)' ü ispatlar. Bu noktada $\{f\}^{dd}$ bandı $\mathcal{S}$ yarigrubu altında değişmez ve $\mathcal{S} \neq \{0\}$ olduğu sürece aşikâr değildir. Eğer Q karşılık gelen izdüşüm bandı ise, $0 \neq Q \neq I$ ve $(I - Q)\mathcal{S}Q = \{0\}$ dir. Böylece (3)' ün doğru olduğunu gösterir.

(3)' ün (1)' i gerektirdiğini göstermek için $A\mathcal{S}B = \{0\}$ olacak şekilde $A, B: E \rightarrow E$ sıfırdan farklı pozitif sıralı sürekli operatörlerinin var olduğunu kabul edelim. $f = Bg \neq 0$ olacak şekilde bir keyfi $g \in E$ pozitif vektörü seçelim. $\mathcal{S}f = \{0\}$ ise, $\{f\}^{dd}$ bandı $\mathcal{S}$ altında aşikâr olmayan ve değişmezdir. $\mathcal{S}f \neq \{0\}$ olduğunu varsayalım ve L' de $\mathcal{S}f$ kümesi tarafından oluşturulmuş bir band olsun. Bu durumda $\mathcal{S}'$ nin her bir elemanının sıralı sürekli olduğu yerde $L, \mathcal{S}$ altında değişmezdir. $L \subseteq N(A) \neq E$ olduğu yerde L aynı zamanda aşikâr olmayandır. Bu durumda (1) sağlanmış olur.

Bunu (1)' in (4)' ü gerektirmesi takip eder. Ters ilişkiliği göstermek için $\mathcal{J}, \mathcal{S}'$ nin sıfır olmayan bir yarigrup ideali ve indirgenebilir band özelliğine sahip olsun. L' de $\mathcal{J}$ altında aşikâr olmayan bir değişmez band olsun. Drnovsek' nin (2000), Lemma 1.3' ünün ispatında olduğu gibi $\{\mathcal{S}f : \mathcal{S} \in \mathcal{J}, f \in L \cap E^+\}$ kümesi tarafından oluşturulan J sıralı ideali $\mathcal{S}$ altında değişmezdir. J tarafından üretilen L_I bandı da $\mathcal{S}$ altında $\mathcal{S}'$ nin her elemanının sıralı sürekli olduğu durumlarda değişmezdir. $J \subseteq L, L_I \subseteq L$ olduğu yerde, $L \neq E'$ dir. Eğer $L_I \neq \{0\}$ ise, ispat biter. Eğer $L_I = \{0\}$ ise, $L \subseteq N(\mathcal{S})$ olur. Bu nedenle $N(\mathcal{S})$ mutlak çekirdeği aşikâr olmayan bir değişmez banddır ve böylece (1) sağlanmış olur.

İspatı bitirmek için (5)' in doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda $A = B = f \otimes \phi$ sıralı sürekli. Bu durumda $A\mathcal{S}B = \{0\}$ olduğu kolaylıkla anlaşılabilir. Bu da (5)' in (3)' ü gerektirmesini ispatlar.

(5) numaralı durum (1)-(4) numaralı durumlardan hiç birisini gerektirmez. Çünkü üzerinde herhangi bir sıfır olmayan sıralı sürekli fonksiyoneli olmama olasılığı vardır. Örneğin, E için $C([0,1])$ Banach latisinin Dedekind bileşenini alalım. Aşağıdaki önermede E' nin bir Banach fonksiyon uzayı olması durumunda böyle bir şeyin olamayacağı öne sürülmektedir.

Bir ölçülebilir sonlu σ uzayı (X, μ) için $L^0(X, \mu)$ ile X üzerindeki gerçekte ölçülebilir μ fonksiyonlarının tüm denk sınıflarının vektör uzayları temsil edilsin.

Önerme 3.3

$E, L^0(X, \mu)$ içinde bir Banach fonksiyon uzayı olsun. Eğer $\mathcal{S}$, E üzerindeki pozitif sıralı sürekli operatör yarıgruplarının indirgenebilir bir bandı ise o zaman Önerme 3.2' deki (1)-(5) durumları birbirine denk olur.

İspat

(1) ise (5) gerekliliğini göstermeliyiz. B, E' nin aşıkâr olmayan, $\mathcal{S}$ altında değişmez olan bir bandı olsun. Bu durumda B, E' deki X' e ait olan bir ölçülebilir Y alt kümelerinde sıfır olan ve hem Y hemde Y^c nin pozitif ölçüm değerleri almasını sağlayan bütün fonksiyonları içerir. $L^0(X, \mu)$ uzay bandlarını açıklayan önermenin ispatıyla büyük oranda benzerlik gösterdiğinden son durumun ispatını atlayalım (Jonge ve Rooij, 1977, Örnek 4.1). g, Y^c üzerinde var olmayan ve E' nin E' ortak uzayı içerisinde sıfır olmayan herhangi bir pozitif fonksiyon olsun. Bu durumda $\varphi_g(f) = \int_X g f d\mu$ şeklinde belirtilen E üzerindeki Lineer $\varphi_g(f)$ fonksiyoneldir. Eğer $f \in B$ sıfır olmayan bir pozitif fonksiyon ise, $\varphi_g(f) = \{0\}$ olur ve böylece (5) sağlanmış olur.

4.SOYUT İNTEGRAL OPERATÖRLERİN İDEAL İNDİRGENEBİLİRLİĞİ

E Dedekind Tam olan bir Banach latisi olsun Drnovšek' nin (2001) kaynağında belirtildiği üzere $\mathcal{L}_r(E)$ içerisindeki bir operatör $\mathcal{L}_r(E)$ içerisindeki tüm sonlu rank operatörlerinin oluşturduğu $(E^* \otimes E)^{dd}$ bandına ait ise, bir soyut integral operatörü olarak isimlendirilir. Şuna da değinmek gerekir ki, integral operatörlerin genel tanımlanmasında tüm sıralı sürekli fonksiyonellerinin E^* dual normunun E^* içindeki E_n^* alt bandı ile yer değiştirilebilir (Zaanen, 1983, Bölüm 13).Bütün pozitif, sıralı sürekli, soyut integral operatörlerinin bir yarıgrup olduğu aşağıdaki sonuç ile gösterilmektedir.

Lemma 4.1

E bir Dedekind Tam Banach latis ve T, E üzerinde pozitif bir soyut integral operatörü olsun. S ve U' nun E üzerinde pozitif operatörler olduklarını varsayalım. Bu durumda TS ve UT operatörleri soyut integral operatörleridir.

İspat

T' nin bir pozitif soyut operatör olduğu durumda T ile beraber T' nin bir supremumu olarak oluşan bir $\{T_\alpha\}$ artan neti vardır ve her bir α içinde, $0 \leq T_\alpha \leq K_\alpha$ olan, sonlu rank operatörlerine ait bir $\{K_\alpha\}$ neti vardır. Daha sonra $K_\alpha S$ ve UK_α sonlu rank operatörleri olmak üzere elimizde $0 \leq T_\alpha S \leq K_\alpha S$ ve $0 \leq UT_\alpha \leq UK_\alpha$ verileri bulunmaktadır. U operatörünün sıralı süreklilik özelliği sebebiyle önce $0 \leq T_\alpha S \uparrow TS$ ve takiben $0 \leq UT_\alpha \uparrow UT$ durumları izler.

Şimdi E Banach latisi üzerindeki pozitif operatörlerin aşağıdaki sınıfına göz atalım. $\mathcal{AI}(E)$ ile E üzerinde bulunan ve pozitif operatörlere ait bir $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ neti ile her $\alpha \in A$ için $0 \leq T_\alpha \leq T$ ve $0 \leq T_\alpha \leq K_\alpha$ özelliklerini taşıyan pozitif kompakt operatörlere ait bir $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ neti oluşumu ile $N(\{T_\alpha\}_\alpha) = N(T)$ durumunu sağlayan her pozitif T operatörleri ifade edilir. (Bu durum $Tx > 0$ özelliğine sahip her bir $x \in E$ vektörü için, $T_\alpha x > 0$ durumunu sağlayan bir α ' nın varolduğunu belirtmektedir).

E' nin bir Dedekind Tam Banach latis olduğu durumlarda $\mathcal{AI}(E)$, E üzerindeki her pozitif soyut integral operatörleri içerdiğine dikkat ediniz. Tanımlamadan şu da açık bir şekilde anlaşılabilir ki $T \in \mathcal{AI}(E)$ ve S, E üzerinde bir pozitif operatör ise $TS \in \mathcal{AI}(E)$ ' dir. Özet olarak kümesi pozitif operatörlerin bir yarıgrupudur.

Aşağıdaki Lemma Drnovšek' nin(2001), Lemma 2.2' sinin bir genişletmesidir.

Lemma 4.2

E bir Banach latisi ve $\mathcal{F}$ ' de $\mathcal{A}(E)$ içerisinde bir operatör ailesi olsun. $N(\mathcal{F}) = \{0\}$ ise, sıfır olmayan her bir $x_0 \in E$ vektörü için $\mathcal{F}$ içinde S, T ve U operatörleri ile E üzerinde $K \leq UTS$ ve $Kx_0 > 0$ durumlarını sağlayan bir pozitif kompakt K operatörü vardır.

İspat

Herhangi bir sıfır olmayan pozitif $x \in E$ vektörünü alalım. $N(\mathcal{F}) = \{0\}$ olduğu durumlarda $Sx_0 > 0$ durumunu sağlayan bir $S \in \mathcal{F}$ operatörü vardır. $S \in$ olduğu durumlarda ise pozitif operatörlere ait bir $\{S_\alpha\}$ neti ile her α için $0 \leq S_\alpha \leq S$ ve $0 \leq S_\alpha \leq K_\alpha$ durumlarını sağlayan, pozitif kompakt operatörlere ait bir $\{K_\alpha\}$ neti ve bunlarla birlikte $S_{\alpha_0}x_0 > 0$ durumunu sağlayan bir α_0 indeksi vardır. $N(\mathcal{F}) = \{0\}$ olduğu yerde $TS_{\alpha_0}x_0 > 0$ durumunu sağlayan bir $T \in \mathcal{F}$ operatörü vardır. $T \in$ olduğu zaman pozitif operatörlere ait bir $\{T_\beta\}$ neti vardır. Bunların her bir $0 \leq T_\beta \leq T$ durumunu sağlayan bir pozitif kompakt operatör tarafından domine edilir ve bununla beraber birde $T_{\beta_0}S_{\alpha_0}x_0 > 0$ durumunu sağlayan bir β_0 vardır. Bunu bir kez daha tekrarlayan $UT_{\beta_0}S_{\alpha_0}x_0 > 0$ özelliğine sahip bir $U \in \mathcal{F}$ pozitif operatör bulabiliriz ve ayrıca pozitif operatörlere ait bir $\{U_\gamma\}$ neti vardır ve öyle ki bunların her biri $0 \leq U_\gamma \leq U$ durumunu sağlayan bir pozitif kompakt operatör tarafından domine edilir ve $U_{\gamma_0}T_{\beta_0}S_{\alpha_0}x_0 > 0$ durumunu sağlayan bir γ_0 vardır.

Şimdi pozitif $K := U_{\gamma_0}T_{\beta_0}S_{\alpha_0}$ operatör (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006)' den dolayı kompakttır. $K \leq UTS$ ve $Kx_0 > 0$ 'dır.

Aşağıdaki sonuç soyut integral operatörler için ispatlanmış olan Drnovšek' nin (2001), Teorem 2.3' ünün bir genişletmesidir.

Teorem 4.3

$\mathcal{S} \subset$, bir E Banach latisi üzerinde bulunan yarı nilpotent operatörlere ait bir yarıgrup olsun. Bu durumda $\mathcal{S}$ ideal indirgenebilirdir.

İspat

$\mathcal{S} \neq \{0\}$ olduğunu varsayabiliriz. Eğer mutlak çekirdek $N(\mathcal{S}) \neq \{0\}$ ise, bu mutlak çekirdek $\mathcal{S}$ içerisindeki her operatörün altında değişmez ve aşıkâr olmayan bir kapalı idealdir. Şimdi de $N(\mathcal{S}) = \{0\}$ olduğunu varsayalım. Lemma 4.2' ye göre, sıfır olmayan bir pozitif kompakt

operatörünce domine bir UTS operatörü oluşumunu sağlayan ve U, T ve $S \in \mathcal{S}$ pozitif operatörleri vardır. Drnovšek' nin (2001), Teorem 2.1' ine göre de $\mathcal{S}$ ideal indirgenebilirdir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4

$\mathcal{S}$, bir Dedekind Tam Banach latis üzerinde bulunan yarı nilpotent pozitif sıralı sürekli operatörlerine ait bir yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki durumların herbiri $\mathcal{S}$ yarıgrupunun ideal indirgenebilirliğini gerektirir:

1. $\mathcal{S}$ içerisinde sıfır olmayan bir soyut S integral operatörü vardır.
2. E üzerinde, $\mathcal{S}'$ den bir sıfır olmayan operatörü domine eden bir pozitif soyut integral operatörü vardır.
3. E üzerinde $\mathcal{S}'$ deki sıfır olmayan bir operatör tarafından domine edilen bir pozitif soyut integral operatörü vardır.

İspat

1. Lemma 4.1' e göre $\mathcal{S}$ tarafından oluşturulan sıfır olmayan bir yarıgrup ideali pozitif yarı nilpotent soyut integral operatörleri içerir. Bu ideal Teorem 4.3' e göre ideal indirgenebilirdir. Bu durumda, $\mathcal{S}'$ nin ideal indirgenebilir olduğunu göstermek için Önerme 3.1' i uyguluyoruz.

2. Her soyut integral operatörlerinin uzayı $\mathcal{L}_r(E)$ içerisinde bir band olduğu durumda, durum 1' den devam eder.

3. $\mathcal{S}_0$, E üzerinde bulunan ve $\mathcal{S}$ içerisindeki bir operatör tarafından domine edilen her pozitif sıralı sürekli operatörlerin kümesi olsun. Bu durumda $\mathcal{S}_0$, E üzerinde bulunan ve sıfır olmayan bir soyut integral operatör içeren pozitif yarı nilpotent sıralı sürekli operatörlerin bir yarıgrupudur. (1)' den devam eder ve buna göre $\mathcal{S}_0$ ideal indirgenebilirdir ve $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_0$ olduğundan $\mathcal{S}'$ de ideal indirgenebilirdir.

Son iki teorem soyut integral operatörlerle herhangi bir ilişki kurulmadan sağlanmaz. Şöyle ki, (Drnovšek, Kokol-Bukovsek, Livshits, MacDonald, Omladic ve Radjavi, 2000) kaynakta $L^p[0,1]$ ($1 \leq p < \infty$) üzerinde elementlerin herhangi bir sonlu sayılı bir ideal üçgenleştiren yarıgrubu ürettiği, karesi sıfır pozitif operatörlerin indirgenemez bir yarıgrubu olduğu gösterilmiştir.

5.ATOMLAR ve İNDİRGENEBİLİRLİK

E bir normlu Riesz uzayı olsun. Sıfır olmayan bir $a \in E^+$ vektörü, her bir $0 \leq x \leq a$ vektörü için $x = \lambda a$ durumunu sağlayan bir $\lambda \geq 0$ varolduğu yerde ‘atom’ olarak adlandırılır. a tarafından üretilen tek boyutlu B_a altuzayı E ’nin bir bandıdır. Eğer E hiçbir atoma sahip değilse, ‘atomsuz’ olarak adlandırılır. Luxemburg ve Zaanen’ nin(1971), Teorem 26.4’üne göre B_a bir izdüşümdür ve buradan $E = B_a \oplus B_a^d$ sonucunu elde ederiz. Bu nedenle her $f \in E$ için $f = \lambda a + g$ durumunu sağlayan $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $g \in B_a^d$ vardır. Burada λ ve g ’nin ayrı ayrı belirtildiğine dikkat edin. φ_a , E üzerinde $\varphi_a(f) = \lambda$ şeklinde tanımlanan bir pozitif lineer fonksiyonel olsun. Bu durum sınırlı φ_a fonksiyoneli $|f| = |\lambda|a + |g| \geq |\lambda|a$ ile devam eder.

E üzerinde bulunan her bir pozitif T operatörü $\varphi_a(Ta) = 0$ veya duruma eşit olarak $Ta \wedge a = 0$ durumunu sağlayan her $a \in E$ atomlarının sıfır kümesini $Z(T)$ ’ye karşılık getiriyoruz.

LEMMA 5.1

E bir normlu Riesz uzayı olsun

1. S ve T , E üzerinde bulunan pozitif operatörler olsun. O zaman $Z(ST) \subseteq Z(S) \cup Z(T)$ dir. Eğer $\{S, T\}$ çifti aynı zamanda ideal-üçgenleştirilebilir ise, $Z(ST) = Z(S) \cup Z(T)$ dir.
2. $n \in \mathbb{N}$ ve T , E üzerinde bir pozitif operatör olsun. Bu durumda $Z(T^n) \subseteq Z(T)$ dir. Eğer T aynı zamanda ideal-üçgenleştirilebilir ise, $Z(T^n) = Z(T)$ olur.

İspat

(2) nolu iddia (1)’e dayandırılarak uygulandığından sadece (1) nolu iddiayı ispatlamamız gerekmektedir. $a, a \notin Z(S) \cup Z(T)$ durumunu sağlayan E ’ye ait bir atom olsun. Bu durumda bir $s > 0$ için $Sa \geq sa$ ve bir $t > 0$ için $Ta \geq ta$ dir. Bu durumu $STa \geq sta$ takip eder ve bu nedenle $a \notin Z(TS)$ dir. Bu da $Z(ST) \subseteq Z(S) \cup Z(T)$ olduğunu gösterir. $\mathbb{C}$ ’nin $\{S, T\}$ çifti için bir ideal-üçgenleştirilen zinciri olduğunu varsayalım ve $a \in Z(S) \cup Z(T)$ olsun. Bu durumda $\mathbb{C}$ içinde $I = J \oplus B_a$ durumunu sağlayan I ve J kapalı idealleri vardır(Gerçekte $J = I^-$ dir). Eğer $a \in Z(T)$ ise, $Ta \in J$ ’dir ve bu nedenle $STa \in J$ olur ve bu da $a \in Z(ST)$ manasına gelir. Şimdi de bir $a \in Z(S)$ düşünelim. Bu durumda $Sa \in J$ dir.

$Ta \in I$ olduğundan $f \in J$ ve $t \geq 0$ bir t için $Ta = ta + f$ dir. Bu durum $STa = Sf + tSa \in J$ şeklinde devam eder. Böylece $a \in Z(ST)$ olur ve böylelikle (1) nolu iddianın ispatı tamamlanmış olur.

LEMMA 5.2

Bir E normlu Riesz uzayı üzerindeki bir pozitif yarı nilpotent T operatörüne ait $Z(T)$ sıfır kümesi, E' ye ait tüm atomların oluşturduğu kümeye eşittir.

İspat

a , E' nin bir atomu olsun. Eğer $\lambda = \varphi_a(Ta)$ ise, o zaman $Ta \geq \lambda a$ dir. Kolay bir tümevarım argümanı ile her $n \in \mathbb{N}$ için $T^n a \geq \lambda^n a$ sonucunu elde ederiz. Bu durum T nin yarı nilpotent olduğu durumlarda $\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T^n a\|^{1/n} = 0$ şeklinde devam eder. Bu da $a \in Z(T)$ olduğunu gösterir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki önerme, Önerme 3.1 ve Önerme 3.2' nin basit bir sonucu olup ispatı aynı zamanda Drnovšek' nin (2000), Teorem 2.1'inde yapılmıştır.

Önerme 5. 3

a , bir E normlu Riesz uzayına ait bir atom, $\mathcal{S}'$ de her $S \in \mathcal{S}$ durumları için $a \in Z(S)$ durumunu sağlayan E üzerindeki pozitif operatörlerin bir yarıgrubu olsun. Bu durumda $\mathcal{S}$ ideal indirgenebilir. Eğer $\mathcal{S}'$ nin her bir elemanı sıralı sürekli ise, $\mathcal{S}$ band indirgenebilir.

İspat

$\varphi_a, \mathcal{S}_a$ kümesini sıfırlayan sıfır olmayan bir pozitif fonksiyonel olduğundan, Önerme 3.1'e göre $\mathcal{S}$ yarıgrubu bir ideal indirgenebilir. Bu durumda son durum (iddia) $\mathcal{S}a \subseteq \{a\}^d$ olduğundan Önerme 3.2' den devam eder.

Mac Donald ve Radjavi' nin (2005), Lemma 1' inin aşağıdaki genişletmesi için daha basit bir ispat sunacağız (L^p - uzayları içerisinde olmasına rağmen).

Önerme 5.4

$\mathcal{S}$ bir E normlu Riesz uzayı üzerinde, $\mathcal{S}'$ ye ait her operatörün ideal- üçgenleştirilebilir olduğu, pozitif operatörlerin bir yarıgrubu olsun. Eğer herhangi bir sıfır olmayan $S \in \mathcal{S}$ operatörü için $a \notin Z(S)$ durumunu sağlayan bir $a \in E$ atomu varsa $\mathcal{S}$ yarıgrubu ideal indirgenebilir.

İspat

Eğer a her $S \in \mathcal{S}$ operatörünün bir özvektörü ise, bu durumda a tarafından üretilen B_a ana bandı aşıkâr olmayan ve her $S \in \mathcal{S}$ altında değişmez bir kapalı idealdir.

a 'nın S için özvektör olmadığı bir $S \in \mathcal{S}$ operatörü olduğu varsayalım. Herhangi bir $T \in \mathcal{S}$ operatörü seçelim. Varsayımımıza göre $TS \in \mathcal{S}$ ideal-üçgenleştirilebilir. Bu nedenle ST için bir $\mathbb{C}$ ideal-üçgenleştiren zinciri mevcuttur. Bu durumda $\mathbb{C}$ içinde $I = J \oplus B_a$ durumunu sağlayan I ve J kapalı idealleri vardır. $a \in I$ olduğu durumlarda $STa \in I'$ dir. $Ta \geq \varphi_a(Ta)a \geq 0$ durumu ile devamında $STa \geq \varphi_a(Ta)Sa \geq 0$ durumu, $\varphi_a(Ta) > 0$ olduğu durumlarda $Sa \in I$ olduğunu gösterir. Buradan $f = Sa - \varphi_a(Sa)a$ 'nın J içerisinde sıfır olmayan bir pozitif vektör olduğu sonucuna varırız. $STf \in J$ ve $Tf \geq \varphi_a(Tf)a \geq 0$ olduğunda

$$0 = \varphi_a(STf) \geq \varphi_a(Tf)\varphi_a(Sa) \geq 0 \quad (5.1)$$

sonucu elde edilir.

$\varphi_a(Sa) > 0$ olduğunda her $T \in \mathcal{S}$ 'ler için $\varphi_a(Tf) = 0$ sonucuna varırız. Bu nedenle $\mathcal{S}$ yarığırbu Önerme 3.1' e göre ideal indirgenebilir.

Aşağıdaki önermeye ihtiyaç olunacaktır.

Önerme 5. 5

E , sıralı sürekli normlu atomsuz bir Banach latis ve K' da E üzerinde bir ideal-üçgenleştirilebilir pozitif kompakt operatör olsun. Bu durumda K yarı nilpotenttir.

İspat

Norm, bir sıralı sürekli olduğundan K' 'nın her bir ideal-üçgenleştiren zinciri izdüşüm bandları içerir. E hiç atom içermediğinden bu zincirin sürekli olması gerekir. Bu nedenle K , Ringrose' nin teoremine göre yarı nilpotenttir (Radjavi ve Rosenthal, 2000, sonuç 7.2.4).

Aşağıdaki örnek atomsuz bir Banach latis içinde bulunan bir ideal-üçgenleştiren zincirinin sürekli olmasının gerekli olmadığını gösterilmiştir.

Örnek: $T, E=C([0,1])$ üzerinde

$$(Tf)(x) = f(1)(f \in E, x \in [0,1]) \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanan rankı bir olan bir operatör olsun. Bu durumda $J = \{f \in E : f(1) = 0\}$ maksimal ideali T altında değişmezdir. Eğer $\mathbb{C}$, J içindeki kapalı

ideallerin herhangi bir maksimal zinciri ise, $C \cup E$ zinciri T' nin bir ideal- üçgenleştiren zinciridir. E , hiçbir atoma sahip olmamasına rağmen $E^- = J$ iken bu zincir sürekli değildir.

6.YEREL İDEAL-ÜÇGENLEŞTİREBİLİRLİKTEN GLOBAL İNDİRGENEBİLİRLİĞE

Aşağıdaki iki teoremden ideal-üçgenleştirilebilir operatörlerin bir yarıgrubu altında bir ideal indirgenebilir olmasını gerektiren koşullar ele alınır.

Teorem 6.1

E , bir a atomuna sahip bir normlu Riesz uzayı olsun. $\mathcal{S}'$ de

1. $\mathcal{S}'$ nin her bir elemanı ideal üçgenleştirilebilirdir.

2. Her $S, T \in \mathcal{S}$ durumları için $Z(S) \cup Z(T) \subseteq Z(ST)$ 'dir.

durumlarını sağlayan E üzerindeki pozitif operatörlerin bir yarıgrubu olsun. Bu durumda $\mathcal{S}$ yarıgrubu ideal indirgenebilirdir.

İspat

Eğer sıfır olmayan her bir $S \in \mathcal{S}$ operatörü için $a \notin Z(S)$ ise, Önerme 5.4' e göre $\mathcal{S}$ yarıgrubu ideal indirgenebilirdir. Diğer türlü $a \in Z(S)$ durumunu sağlayan sıfır olmayan bir $S \in \mathcal{S}$ operatörü vardır. $I, \mathcal{S}'$ nin S tarafından üretilen yarıgrup ideali olsun. Bu durum (2) nolu varsayıma göre her $T \in I$ için $a \in Z(T)$ şeklinde devam eder. Daha sonra I yarıgrup ideali, Önerme 5.3'e göre ideal indirgenebilirdir ve bu nedenle Önerme 3.1'e göre ideal indirgenebilir olur.

Teorem 6.2

E , normlu sıralı sürekli atomsuz bir Banach latisi ve $\mathcal{S}'$ de E üzerindeki pozitif soyut integral operatörlerin bir yarıgrubu olsun. Eğer $\mathcal{S}'$ nin her bir üyesi ideal-üçgenleştirilebilir ise, $\mathcal{S}$ ideal indirgenebilirdir.

İspat

Teorem 4.3' ün ispatında olduğu gibi, $N(\mathcal{S})=0$ olduğunu ve $\mathcal{S}'$ nin, sıfır olmayan bir pozitif kompakt K operatörünü etkisi altında tutan bir S operatörü içerdiğini varsayalım. S ideal-üçgenleştirilebilir iken aynı zamanda K' da ideal üçgenleştirilebilirdir. Bu nedenle Önerme 5.5'e göre K yarı nilpotenttir. Aynı argümanlar K tarafından üretilen $\mathcal{S}'$ ye ait I yarıgrup ideali kompakt yarı nilpotent operatörler içerir. Teorem 4.3'e göre I ideal indirgenebilirdir ve bu nedenle Önerme 3.1'e göre $\mathcal{S}$ yarıgrubu da ideal indirgenebilirdir.

Önceki teoremleride içinde barındıran tek bir teorem vereceğiz. İlk olarak Dedekind Tam bir E Banach latisi iki bölüme ayırarak başlayalım. A , E' nin bütün atomları tarafından üretilen bir band olsun. E Dedekind Tam olduğundan A bir izdüşüm bandıdır. C ile A' nin E içindeki ayrık tümleyenlerini belirtmiş olursak, bir $E = A \oplus C$ ayrıştırmasını elde ederiz. A ve C bandları sırasıyla E' nin atomik ve sürekli(veya atomik olmayan) bölümleri olarak adlandırılır. P_C , C üzerinde ki izdüşüm bandını temsil etsin.

Teorem 6.3

E , sıralı sürekli normuna sahip bir C sürekli bölümü içeren Dedekind Tam bir Banach latisi olsun. S' de E üzerindeki pozitif operatörlerin bir yarıgrubu olsun. Öyle ki;

1. S' nin her bir elemanı ideal-üçgenleştirilebilirdir.

2. Her $S, T \in S$ için' dir.

3. Her bir $S \in S$ için S' nin C' ye olan $S_C = P_C S /_C$ sıkıştırması, $\mathcal{M}(S_C)$ 'nin bir

soyut integral operatör olması özelliğine sahiptir.

Bu durumda S indirgenebilir idealdir.

İspat

Teorem 6.1'in ışığında sadece sıralı sürekli normuna sahip atomsuz bir Banach latis durumunu göz önünde bulundurmalıyız. S_N , $\{ \mathcal{M}(S_C) : S \in S \}$ kümesi tarafından üretilen bir yarıgrup olsun. Lemma 4.1' e göre S_N ' nin her bir elemanı bir soyut integral operatördür. Her $S \in S$ için $0 \leq \mathcal{M}(S) \leq S$ olduğu ve S' nin bir yarıgrup olduğu bilindiğine göre S_N ' nin her bir elemanın aynı zamanda ideal-üçgenleştirilebilir olduğu sonucunu elde ederiz. Bu nedenle Teorem 6.2' ye göre S_N indirgenebilir idealdir. S_N altında değişmez, aşikâr olmayan herhangi bir kapalı ideal aynı zamanda S altında değişmez olduğundan ispat tamamlanmış olur.

7.YARIGRUPLARIN İDEAL ÜÇGENLEŞTİRİLEBİLİRLİĞİ

Bu bölümde elde edilen son sonuçtaki ideal indirgenebilirlik durumlarından hangilerinin verilen operatör ailelerine ait ideal-üçgenleştirme ile ilişik olduğunu gösteren durumlara göz atacağız. Bu bağlamda ilk olarak Drnovšek' in (2001)kaynağında belirtilen Banach latisleri için üçgenleştirme lemmasına değinilecektir.

$\mathcal{F}$, bir E Banach latis üzerindeki bir operatör ailesi olsun I ve J' de, $\mathcal{F}$ ' nin her bir elemanı altında değişmez olan, E' ye ait kapalı idealler ve $J \subseteq I$ olsun. Bu durumda $\mathcal{F}$ aşağıda anlatıldığı gibi I/J bölümlü Banach latisi üzerindeki operatörlere ait bir $\tilde{\mathcal{F}}$ ailesi indükler. Her bir $T \in \mathcal{F}$ için $\tilde{T}$ operatörü, I/J üzerinde

$$\tilde{T}(x + J) = Tx + J \quad (7.1)$$

şeklinde tanımlanır. I ve J' nin değişmezliği sebebiyle $\tilde{T}$ operatörü I/J üzerinde iyi tanımlı bir operatördür. Bu tür $\tilde{\mathcal{F}}$ ' ler, $\mathcal{F}$ ailesine ait ideal bölümlerin birleşimi olarak adlandırılır. Bir P özellikler kümesi bir operatör ailesine ait her bir ideal bölümler ailesi, P içerisindeki özellikleri destekleyip aynı zamanda o özellikleri gösteriyorsa ' ideal bölümler tarafından oluşturulmuş küme' olarak isimlendirilir.

LEMMA 7.1 (İdeal-Üçgenleştirme Lemması)

P , ideal bölümlerden gelen bir özelliklerin kümesi olsun. Eğer P' yi sağlayan birden daha büyük boyutlu bir Banach latis üzerindeki operatörlerin her ailesi ideal indirgenebilirse, o zaman böyle olan her aile ideal üçgenleştirilebilirdir.

Bu lemmanın ilk uygulaması olarak aşağıdaki teoremin ispatını yapalım.

Teorem 7.2

E , sıralı sürekli normlu atomik bir Banach latisi olsun ve $\mathcal{S}'$ de E üzerindeki pozitif yarı nilpotent operatörlerin bir yarıgrubu olsun. Bu durumda $\mathcal{S}$ ideal- üçgenleştirilebilirdir.

İspat

Lemma 5.2' ye göre, her bir $S \in \mathcal{S}$ için $Z(S)$ sıfır kümesi E' nin tüm atomlarının kümesine eşittir. Devamında Önerme 5.3' e göre $\mathcal{S}$ ideal indirgenebilirdir. Bu durumda $\mathcal{S}$ İdeal-Üçgenleştirme Lemmasına göre de ideal-üçgenleştirilebilirdir.

Aşağıdaki sonuç, Teorem 6.3 içerisindeki yarıgrupların ideal- üçgenleştirilebilir olanlar dahil, Banach latis normu sağlayanların sıralı sürekli olduğunu iddia etmektedir.

Teorem 7.3

E , sıralı sürekli norm özelliğine sahip bir Banach latisi olsun ve $\mathcal{S}$ de E üzerindeki pozitif operatörlerin bir yarıgrubu olsun öyle ki;

1. $\mathcal{S}$ 'nin her bir elemanı ideal- üçgenleştirilebilirdir.
2. Her $T, S \in \mathcal{S}$ için $Z(S) \cup Z(T) \subseteq Z(ST)$ ' dir.
3. Her bir $S \in \mathcal{S}$ için S 'nin C ' ye olan $S_C = P_C S / C$ sıkıştırması, $\mathcal{N}(\mathcal{S}_C)$ 'nin bir soyut integral operatör olması özelliğine sahiptir.

Bu durumda $\mathcal{S}$ yarıgrubu ideal- üçgenleştirilebilirdir.

İspat

Teorem 6.3 ve ideal üçgenleştirme lemması ışığında (1),(2) ve (3) nolu şartların ideal-bölümler sayesinde oluştuğunu göstermeliyiz.

$\mathbb{C}$, verilen $S \in \mathcal{S}$ operatörü için bir ideal-üçgenleştirme zinciri olsun. E' ye ait normlu sıralı sürekli olduğundan, E' nin her bir kapalı ideali aslında bir izdüşüm bandıdır.

Bundan başka, B_1 ve B_2 , E' nin $B_2 \subseteq B_1$ durumunu sağlayan bandları ise, bu durumda B_1/B_2 bölümlü Banach latisi $B := B_1 \cap B_2^d$ bandına izometrik olarak izomorfik bir latistir. Bu nedenle, eğer S bandı değişmez B_1 ve B_2 bandlarını bırakırsa B_1/B_2 üzerindeki indüklenmiş $\tilde{S}$ operatörü, $P_B S / B$ sıkıştırması ile açıklanabilir. Burada ki P_B , B üzerindeki izdüşüm bandını temsil etmektedir. Şimdi aynı izdüşüm bandlarını kullanarak $B \cap \mathbb{C}$ 'nin $P_B S / B$ sıkıştırması için bir ideal-üçgenleştiren zinciri olduğu sonucuna kolaylıkla ulaşabiliriz. Bu nedenle (1) nolu şart yarı nilpotentler tarafından oluşturulmuştur.

Aynı durumun (2) nolu şartıda sağladığı açıktır. (3) nolu şartın yarı nilpotentlerin kalıntısı olduğunu göstermek için önceki paragraftan B bandı ile $S \in \mathcal{S}$ operatörünü ele alalım. Bu durumda B 'nin atomik olmayan kısmı $B \cap \mathbb{C}$ ' ye eşittir. $\mathcal{N}(\mathcal{S}_C)$, $\mathbb{C}$ üzerinde bir soyut integral operatörü ve $P_{B \cap C} S / C \leq S_C$ olduğundan, $\mathcal{N}(P_{B \cap C} S /_{B \cap C})$, $B \cap \mathbb{C}$, üzerinde bir soyut integral operatördür.

Lemma 5.1 ve Teorem 7.3 aşağıdaki doğal sonucu içermektedir.

Sonuç 7.4

E , normlu sıralı sürekli bir Banach latisi $\mathcal{S}'$ de, her bir $S \in \mathcal{S}$ için, $\mathcal{N}(\mathcal{S}_C)$ ' nin bir soyut integral operatör olduğu $\mathcal{S}'$ nin C' ye olan $\mathcal{S}_C = P_C \mathcal{S} / C$ sıkıştırmasını sağlayan pozitif operatörlerin bir yarıgrubu olsun. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

1. $\mathcal{S}$ ideal-üçgenleştirilebilirdir.

2. Her bir $\{S, T\} \subseteq \mathcal{S}$ çifti ideal-üçgenleştirilebilirdir.

3. $\mathcal{S}'$ nin her bir operatörü ideal üçgenleştirilebilirdir ve her $T, S \in \mathcal{S}$ için $Z(S) \cup Z(T) \subseteq Z(ST)$ ' dir.

Sonuç 7.5

E normlu sıralı sürekli atomsuz bir Banach latisi olsun ve $\mathcal{S}'$ de E üzerindeki pozitif soyut integral operatörlerin $\mathcal{S}'$ den gelen her bir operatörün ideal-üçgenleştirilebilir olması koşulunu sağlayan bir yarıgrubu olsun. Bu durumda $\mathcal{S}$ ideal üçgenleştirilebilirdir.

Sonuç 7.6

E normlu sıralı sürekli atomik bir Banach latisi olsun ve $\mathcal{S}$ pozitif ideal üçgenleştirilebilir operatörlerin bir yarıgrubu olsun öyle ki her $T, S \in \mathcal{S}$ için $Z(S) \cup Z(T) \subseteq Z(ST)$ ' dir. O zaman, $\mathcal{S}$ ideal üçgenleştirilebilirdir.

Kompakt operatörlere ait yarıgruplar için aşağıdaki teoremin ispatını yapabiliriz.

Teorem 7.7

Sıralı sürekli norma sahip bir E Banach latis üzerindeki pozitif kompakt operatörlerin bir $\mathcal{S}$ yarıgrubunun ideal üçgenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{S}$ içerisindeki operatörlerin her $\{S, T\}$ çifti için ideal üçgenleştirilebilir olmasıdır.

İspat

Bütün $\{S, T\} \subseteq \mathcal{S}$ çiftlerinin ideal-üçgenleştirilebilir olduğunu varsayalım. Eğer, E atomsuz bir Banach latis ise, Önerme 5.5'e göre $\mathcal{S}'$ nin her bir operatörü yarı nilpotenttir ve bu durumda (Drnovšek, 2001, Teorem 4.5)' e göre $\mathcal{S}$ ideal üçgenleştirilebilirdir.

Eğer E atom içeriyorsa, bu durumda $\mathcal{S}'$ nin ideal- indirgenebilirliği Lemma 5.1 ve Teorem 6.1' e bakılarak sağlanabilir ve sonrasında da ideal-üçgenleştirme lemması uygulanır.

8. AL- ve AM- UZAYLARI ÜZERİNDEKİ OPERATÖRLERİN YARIGRUPLARI

Bir E Banach latis uzayı eğer her bir ayrık pozitif $f, g \in E$ vektör çifti $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$ (sırasıyla $\|f + g\| = \max\{\|f\|, \|g\|\}$) durumunu sağlıyorsa bir AL- (sırasıyla AM-) uzayıdır.

X uzayı içindeki her bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi zayıf bir şekilde sıfıra ve X^* dualinde ki her bir $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi de zayıf bir şekilde sıfıra yakınsarken $\{x_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisininde sıfıra yakınsaması durumunda X Banach uzayında Dunford-Pettis özelliği vardır denir. Örneğin, Grothendieck Teoremi AL- ve AM- uzayları Dunford-Pettis özelliğine sahiptir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006, Teorem 5.85). Aşağıdaki sonuç Jahandideh'in (1997) AL- uzayı üzerindeki bütün pozitif zayıf kompakt yarı nilpotent operatörlerin indirgenebilir ideal olduğunu öne sürdüğü, Sonuç 2.4' ten elde edilen bir sonucun genişletmesidir.

Önerme 8.1

E , Dunford-Pettis özelliğine sahip bir Banach latis olsun. Bu durumda E üzerindeki pozitif yarı nilpotent zayıf kompakt operatörlerin tüm yarıgrupları indirgenebilir idealdir.

İspat

Aliprantis ve Burkinsaw' nın (2006) Sonuç 5.87' ine göre E üzerindeki zayıf kompakt operatörlerin her bir çarpımı bir kompakt operatördür. Eğer $ST \neq 0$ durumunu sağlayan bir S ve $T \in \mathcal{S}$ var ise bu durumda ST operatörü tarafından üretilen yarıgrup ideali pozitif yarı nilpotent kompakt operatörlerin sıfır olmayan bir idealidir. Bu ideal Drnovšek' nin (2001) Teorem 4.5'ine göre indirgenebilir idealdir. Önerme 3.1'e göre $\mathcal{S}$ yarıgrubu indirgenebilir idealdir.

Şimdi her bir S ve $T \in \mathcal{S}$ için $ST = 0$ olduğunu varsayalım. Devamında her bir A, B ve $S \in \mathcal{S}$ için $ASB = 0$ olur. Tekrardan Önerme 3.1'e göre $\mathcal{S}$ yarıgrubu indirgenebilir idealdir.

Teorem 8.2

Eğer E bir AL- veya AM- uzayı ise, bu durumda E üzerindeki pozitif yarı nilpotent zayıf kompakt operatörlerin tüm yarıgrupları ideal üçgenleştirilebilirdir

İspat

AM- uzayları için yapılan ispat benzer olduğundan sadece AL- uzayını göz önünde bulunduralım. Zayıf kompaktlık, pozitiflik ve yarı nilpotentlik operatörlerin ideal-bölümler tarafından oluştuğunu gösteren özelliklerdir.

Aliprantis' in (2006) Alıştırma 4.1.13' üne göre E' nin herhangi bir I ideali için E/I bölümü Banach latisi yine bir AL-uzayıdır. $\mathcal{S}$ yarıgrubu Önerme 8.1' e göre indirgenebilir ideal olduğundan, $\mathcal{S}'$ nin ideal-üçgenleştirilebilirliği, ideal üçgenleştirme lemmasına göre sağlanır.

Atomsuz AL- uzayları durumunda, aşağıdaki teoremde iddia edildiği gibi tek operatörlerin ideal-üçgenleştirilebilirliği ile operatörlerin yarı nilpotentliği hakkındaki varsayım değiştirilebilir.

Teorem 8.3

Atomsuz bir E AL- uzayı üzerindeki pozitif zayıf kompakt ideal üçgenleştirilebilir operatörlerin bir $\mathcal{S}$ yarıgrubu ideal-üçgenleştirilebilirdir.

İspat

İlk olarak $S \in \mathcal{S}'$ nin yarı nilpotent olduğunu gösterelim. Genellemeden herhangi bir şey atlamadan $S^2 \neq 0$ olduğunu varsayabiliriz. Dunford-Pettis (Aliprantis, 2006, Sonuç 5.88) teoremine göre S^2 sıfır olmayan bir kompakt operatördür. Öngörüldüğü üzere S^2 aynı zamanda ideal üçgenleştirilebilir olduğundan Önerme 5.5' e göre S bir yarı nilpotent operatördür. Sonrasında $\mathcal{S}'$ nin ideal- üçgenleştirilebilirliği Teorem 8.2 takip edilerek sağlanır.

9. SONUÇLAR

Bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(E)$ ailesi, eğer E' ye ait, $\mathcal{F}$ ' nin her elemanı altında değişmez aşıkâr olmayan kapalı bir altuzayı mevcut ise 'indirgenebilir' olarak adlandırılır. Aksi durumda $\mathcal{F}$ indirgenmez olarak adlandırılır. Eğer bütün elemanları $\mathcal{F}$ ' in her elemanı altında değişmez bir maksimal altuzay zinciri oluşturursa, bu durumda $\mathcal{F}$ 'üçgenleştirilebilir' adını alır.

Bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(E)$ ailesi, $\mathcal{F}$ altındaki her bir operatör için değişmez olan E' ye ait aşıkâr olmayan kapalı bir idealin(sırasıyla bandın) var olduğu durumlarda "ideal – indirgenebilir(sırasıyla band indirgenebilir)" olarak isimlendirilir. Bir $\mathcal{F}$ ailesi eğer E' nin kapalı ideallerinin bir zinciri gibi maksimal ve $\mathcal{F}$ ' nin bütün operatörleri altında tüm idealleri değişmez bir $\mathbb{C}$ zincirine sahipse ideal üçgenleştirilebilirdir. Bu tür kapalı idealler zinciri $\mathcal{F}$ ailesi için bir ideal – üçgenleştiren zinciri olarak adlandırılır.

Bir operatör ailesi ancak ve ancak kapalı ideallerden oluşan bir altuzay zincirine göre üçgenleştirilebilir ise ideal – üçgenleştirilebilirdir.

Bütün pozitif, sıralı sürekli, soyut integral operatörlerinin bir yarıgrup olduğu gösterilmektedir.

İdeal indirgenebilirlik durumlarından hangilerinin verilen operatör ailelerine ait ideal-üçgenleştirme ile ilişik olduğunu gösteren durumlara göz atıldı.

P , ideal bölümlerden gelen bir özelliklerin kümesi olsun. Eğer P' yi sağlayan birden daha büyük boyutlu bir Banach latis üzerindeki operatörlerin her ailesi ideal indirgenebilirse, o zaman böyle olan her aile ideal üçgenleştirilebilirdir.

Son olarak AL- ve AM- uzayları üzerindeki operatörlerin yarı gruplarına değinildi.

Bu tezimizde üçgenleştirilebilirlik ve üçgenleştirilebilirlikle ilgili genişletmelere yer verilmiştir. Üçgenleştirilebilirlikle ilgili genişletmeler üzerindeki çalışmalar devam etmektedir. Kaynaklar bölümünde verilen kaynaklar ve makaleler üzerinde durulmalıdır.

KAYNAKLAR

- Aliprantis, C.D. ve Burkinshaw, O., (2006), Positive Operators, reprint of the 1985 original, Springer, Dordrecht.
- Drnovšek, R., (2001), "A Generalization of the Ando-Krieger Theorem", Pub. Math. Debrecen 58, 515-521.
- Drnovšek, R., (2001), "Common Invariant Subspaces for Collections of Operators", Integral Equations and Operator Theory 39, 253-266.
- Drnovšek, R., (2000), "Triangularizing Semigroups of Positive Operators on an Atomic Normed Riesz Spaces", Proc. Edinb. Math. Soc. 43, 43-55.
- Drnovšek, R., Kokol-Bukovsek, D., Livshits, L., MacDonald, G., Omladic, M. ve Radjavi, H., (2002), "An Irreducible Semigroup of Non- Negative Square-Zero Operators", Integral Equations and Operator Theory 42, no.4, 449-460.
- Drnovšek, R. ve Kandić, M., (2009), "Ideal Triangularizability of Semigroups of Positive Operators", Integral Equations and Operator Theory 64, 539-552.
- Jahandideh M. T., (1997), "On the Ideal- Triangularizability of Positive Operators on Banach Lattices", Proc. Amer. Math. Soc. 125, 2661-2670.
- Jonge E.D. ve Rooij, A.C.M.V., (1977), Introduction to Riesz Spaces, Mathematical centre tracts 78, Amsterdam.
- Luxemburg, W.A.J. ve Zaanen, A.C., (1971), Riesz Spaces I, North- Holland, Amsterdam.
- MacDonald, G. ve Radjavi, H., (2005), "Standard Triangularization of Semigroups of Non-Negative Operators", J. Funct. Anal. 219, 161-176.
- Meyer-Nieberg, P., (1991), Banach Lattices, Springer-Verlag, Berlin.
- de Pagter, B., (1986), "Irreducible Compact Operators", Math. Z. 192, 149-153.
- Radjavi, H. ve Rosenthal, P., (2000), Simultaneous Triangularization, Universitext, Springer-Verlag, New York.
- Turovskii, Y. V., (1999), "Volterra Semigroups have Invariant Subspaces", J. Funct. Anal. 162, 313-322.
- Voigt, J., (1988), "The Projection onto the Center of Operators in a Banach Lattice", Math. Z. 199, no. 1, 115-117.
- Zaanen A.C., (1996), Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces, Springer, Berlin-Heidelberg- New York.
- Zaanen, A. C., (1983), Riesz Spaces II, North Holland, Amsterdam.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	06.12.1983
Doğum yeri	Mardin / Nusaybin
İlköğretim	1990-1998 Demirtaşpaşa İlköğretim Okulu
Lise	1998-2002 Bağcılar YDA Lisesi
Lisans	2005-2010 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. İstatistik Bölümü
2003-2007	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen- Edebiyat Fak. Matematik Bölümü

Çalıştığı Kurumlar

2007-2008 Birikim Dershanesi /Matematik Öğretmeni

2005-2007 Modern Akademi Dershaneleri /Matematik Öğretmeni