

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$GL_h(1|1)$ KUANTUM SÜPER GRUBUNUN GAUSS AYRIŞIMI

Yüksek Lisans Öğrencisi Emrah YILDIRIM

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TezDanışmanı : Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iii
ÖNSÖZ.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. KUANTUM SÜPER DÜZLEMİ ve h -deforme KUANTUM SÜPER DÜZLEMİ.....	9
3.1 Kuantum Süper Düzlemi.....	9
3.2 h -deforme Kuantum Süper Düzlemi.....	10
4. $GL_h(1 1)$ KUANTUM SÜPER GRUBU ve HOPF CEBİR YAPISI.....	12
4.1 $GL_h(1 1)$ Kuantum Süper Grubu.....	12
4.2 $GL_h(1 1)$ Kuantum Süper Grubunun Hopf Cebir Yapısı.....	12
5. $GL_h(1 1)$ KUANTUM SÜPER GRUBUNUN GAUSS AYRIŞIMI.....	15
5.1 $T \in GL_h(1 1)$ Kuantum Süper Matrisinin Gauss Ayrışımı.....	15
5.2 $GL_h(1 1)$ Kuantum Süper Grubunun Gauss Ayrışımının Hopf Cebir Yapısı.....	19
5.3 T_L ve T_R Matrislerinin Elemanları Arasındaki Bağlılıklar ve Hopf Cebir Yapısı.....	23
6. T MATRİSİNİN ÜSTEL FORMU.....	24
6.1 T Matrisinin Üstel Matrisinin Yapısı.....	25
6.2 Üstel Matrisin Süper-Lie Cebiri Yapısı.....	26
6.3 Üstel Matrisin Süper-Hopf Yapısı.....	27
6.4 R Matris Yaklaşımı.....	30
7. Sonuçlar.....	32
KAYNAKÇALAR.....	33
ÖZGEÇMİŞ.....	34

SİMGE LİSTESİ

$GL_h(1 1)$	Kuantum süper grubu
$[,]$	Lie parantezi
$R_h(1 1)$	İki boyutlu kuantum süper düzlem üzerindeki polinomlar cebiri
$R_h^*(1 1)$	$R_h(1 1)$ cebirinin duali
$S_{\mathcal{A}}$	$\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki ko-ters operatörü
$\Delta_{\mathcal{A}}$	$\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki ko-çarpım operatörü
$\varepsilon_{\mathcal{A}}$	$\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki ko-birim operatörü
$\otimes$	Tensör çarpım
$\text{sdet}(T)$	T kuantum süper matrisinin süper determinantı

ÖNSÖZ

Matematiksel fizikte önemli bir rol oynayan değişmeli olmayan geometri, son yıllarda matematikçiler ve fizikçiler arasında son derece ilgi çekici bir konu haline gelmiştir. Bu çalışmada, kuantum süper düzlemi üzerinde tanımlanan $(2+2)$ boyutlu genel lineer süper grubun gauss ayrışımı, hopf cebir yapısı ve üstel matrisi verilmiştir.

Bu çalışmanın hazırlanmasında, tez konusunu bana veren, çalışmalarım esnasında bana her konuda yardımcı olan, gerekli uyarılarda bulunan ve beni yönlendiren çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK'e ve maddi-manevi yanımda olan aileme teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

ÖZET

Klasik grupların yeni bir genellemesi olan kuantum gruplar, çok zengin matematiksel yapılara sahiptir ve klasik grupların yeterli olmadığı durumlarda pek çok önemli rolleri vardır. Bu çalışmada, $(2+2)$ boyutlu $GL(1|1)$ kuantum süper grubundaki bir matrisin Gauss ayrışımı ele alınmıştır. Böylece, bir matrisin Gauss ayrışımı sırasıyla alt üçgensel, köşegen ve üst üçgensel matrislerin çarpımı şeklinde yazılmasıdır. İlk olarak, $GL_h(1|1)$ kuantum süper grubundaki bir matrisin Gauss ayrışımı yapılarak bu matrisin matris elemanları arasındaki bağıntılar elde edilmiştir. Daha sonra, bu yapının süper Hopf cebiri olduğu gösterilmiştir. Bu ayrışımı oluşturan matrisler sol ve sağ olarak iki kısma ayrılarak bunların matris elemanları arasındaki bağıntılar ve Hopf cebir yapıları gösterilmiştir. Sonrasında, $GL_h(1|1)$ kuantum süper grubundaki bir matrisin üstel matrisini bulmak için Gauss ayrışımı kullanılmıştır. Bu matrisin elemanları ile oluşturulmuş cebirin bir süper Lie cebiri ve aynı zamanda bir süper Hopf cebiri olduğu gösterilmiştir. Son olarak $GL_h(1|1)$ kuantum süper grubunun yapısını veren kuadratik bağıntılarını, daha kapalı bir formda yazmamıza imkan veren ve grubun asosyatifliğini garanti eden 4×4 -tipinde bir R matrisi bulunmuştur. Bu R matrisi şüphesiz ki Yang-Baxter denkleminin bir çözümüdür.

Anahtar Kelimeler: Kuantum h -süper düzlem, Gauss Ayrışımı, Kuantum süper gruplar, Hopf cebiri, Lie cebiri

ABSTRACT

The quantum groups, which are one of the new generalizations of the classical groups, have very rich mathematical structures and they also have lots of important roles in case the classical groups are not enough. In this study, the Gauss decomposition of the $(2+2)$ dimensional $GL(1|1)$ quantum super group has been discussed. The Gauss decomposition of a matrix is written in the form of the product of lower, diagonal and upper matrices, respectively. Firstly, the Gauss decomposition of a matrix at the quantum super group $GL_h(1|1)$ has been build, then the relations between matrix elements of these matrix have been obtained. After that, it has been shown that this structure is the super Hopf algebra. By separating the matrices which form this decomposition into two parts as left and right, it has been shown that the relations between their matrix elements and the Hopf algebra structures. Afterwards the Gauss decomposition has been used for finding the exponential matrix of a matrix at the $GL_h(1|1)$ quantum super group. It has been shown that algebra, which is produced by elements of exponential matrix, is a super Lie algebra and also a super Hopf algebra. Finally, in the form of 4×4 R matrix which gives possibility for writing the quadratic relations that gives the structure of the quantum super group $GL_h(1|1)$ in an implicit form and which guarantees the associability of the group has been found. Certainly this matrix R is a solution of the Yang-Baxter equation.

Keywords: Quantum h -super plane, Gauss decomposition, Quantum super groups, Hopf algebra, Lie algebra

1. GİRİŞ

Kuantum grupları, 20. yüzyılının sonlarında, matematiğin ve matematiksel fiziğin göze çarpan başarılarından biridir. Kuantum grupları bilinen anlamda bir grup değildir. Kuantum grupları grup kavramının bir genelleştirilmesidir. Daha genel olarak; entegre edilebilir sistemlerin ele alınmasıyla değişmeli olmayan Hopf cebirlerinin bir sınıfı elde edilir. Bu Hopf cebirleri, bilinen klasik grupların q -deforme fonksiyonlarının cebiridir. İşte klasik grupların bu q -deforme yapısına Kuantum Grubu denir. Diğer bir deyişle; Kuantum grubu bir grubun deformasyonudur öyle ki deformasyon parametresinin özel değer(ler)i için o grup ile özdeşleşir.

Kuantum grup terimini; ilk olarak Drinfeld (1985) tarafından kullanılmıştır. Drinfeld, iki ranklı bir kuantum grubunu oluştururken $SL(2)$ özel lineer grubunun Lie cebirinden hareketle, daha sonra deformasyon parametresi olarak adlandıracağı bir $q=e^{-\tau}$ kompleks sayısı ile $SL(2)$ 'deki bir matrisin matris elemanlarını birer koordinat fonksiyonu olarak düşünerek onlar arasında sağlanan bağıntıları örneğin $ab=q^{-1}ba$ vb. şeklinde ortaya koymuştur. Dolayısıyla matris elemanları ancak q un özel değer(ler)i için değişmeli olacaktır. Daha sonra Faddeev ve arkadaşları (1987) bu konuyu Lie grup ve Lie cebiri teorisine sistematik bir şekilde adapte etmiştir. Woronowicz (1987) ve Manin (1988) bu konuya farklı yorumlar getirmiştir.

Manin, bir kuantum matris grubunu elde ederken, grubun elemanlarını uygun bir uzaya etki ettirmiştir. Bu uzayın elemanları yine q parametresine bağlı bağıntıları sağlamaktadır. Manin bu şekildeki uzaylara kuantum (süper) uzayları demiştir.

Fronsdal ve Galindo (1993) kuantum grubunun Lie cebirinin bulunabilmesi için gereken üstel matris formu için bir teknik geliştirmişlerdir. Sokolov vd. (1995) kuantum (süper) gruplarının ve duallerinin Gauss ayrışımını ele almışlardır.

Bunların dışında, Jordanian deformasyonu olarak bilinen klasik grupların h -deformasyonu vardır. Aghamohammadi vd (1995) düzlemin q -deformasyonundan hareketle, bir singüler g matrisini kullanarak, benzerlik transformasyonu yardımı ile h -deformasyonuna geçiş yapmışlardır.

Bu çalışma, $(2+2)$ boyutlu $GL_h(1|1)$ kuantum süper grubunun Gauss ayrışımı üzerine olacaktır. Çalışmamızı, Dabrowski ve Parashar (1995) tarafından yapılan “ h -deformation of $GL(1|1)$ ” isimli makaledaki bazı yapıları kullanarak geliştireceğiz.

Çalışmamızı kısaca özetlemek gerekirse, aşağıdaki bölümlerden oluşmaktadır:

- İkinci bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilmiştir.
- Üçüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk olarak Manin (1988) tarafından bulunan kuantum süper düzlemi ve Çelik (2002) tarafından geliştirilen Hopf cebir yapısı verilecektir. Daha sonra Aghamohammadi vd. (1995) tarafından bulunan q -deforme süper düzlem üzerinden h -deforme süper düzleme geçiş bu düzlemin ve bu düzlemin dualini oluşturan koordinat fonksiyonlarının birbirleri arasındaki bağıntılar ve Hopf cebir yapısı anlatılacaktır.
- Dördüncü bölümde, Dabrowski (1995)'nin yaptığı çalışmada jeneratörleri a, β, γ, d olan $GL_h(1|1)$ kuantum süper grubunun matris elemanları arasındaki bağıntıları ve Hopf cebiri yapısına kısaca değinilecektir.
- Çalışmamızın esas kısmı iki bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm olan beşinci bölüm üç kısma ayrılmıştır. İlk olarak $GL_h(1|1)$ kuantum süper grubunun Gauss ayrışımı ele alındı. Yani $T \in GL_h(1|1)$ matrisi sırasıyla alt üçgen, köşegen ve üst üçgen matrislerinin çarpımı şeklinde yazıldı ve bu Gauss ayrışımını oluşturan matrislerin matris elemanları arasındaki komutasyon bağıntılarının hepsi elde edildi. İkinci kısımda bu bağıntıların dördüncü bölümde anlatılan Hopf cebiri operatörleri tarafından korunduğu gösterildi. Üçüncü kısımda Gauss ayrışımını oluşturan alt ve köşegen matrislerinin çarpımıyla elde edilen matris T_L , köşegen ve üst üçgen matrislerinin çarpımıyla oluşan yeni matris T_R ile gösterilerek bu matrislerin matris elemanları arasındaki bağıntılar ve Hopf cebir yapıları elde edildi.
- Çalışmamızın ikinci kısmını oluşturan altıncı bölüm, üç alt kısımdan oluşmaktadır. İlk olarak; Fronsdal ve Galindo (1993) tarafından üstel matrisi bulmak için geliştirilen yöntem kullanılarak T matrisinin üstel matrisi Gauss ayrışımı yardımıyla elde edilip bu üstel matrisin matris elemanları arasındaki bağıntılar elde edildi. Daha sonra bu üstel matrisin bir süper-Lie cebiri olduğu gösterildi son olarak da, bu matrisin Hopf cebiri yapısı ele alındı. Beşinci ve son kısımda da R -matris yaklaşımı işlendi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ilerleyen bölümlerde kullanacağımız bazı temel kavramlar verilecektir.

2.1 Tanım G boş olmayan bir küme ve $\circ$, bu küme üzerinde tanımlanmış bir ikili işlem olsun. Eğer bu ikili işlem aşağıdaki üç aksiyomu sağlıyorsa, G kümesine $\circ$ işlemine göre bir grup denir ve $(G, \circ)$ ile gösterilir:

$$\circ : G \times G \rightarrow G$$

$$(x, y) \rightarrow x \circ y$$

(i) $\circ$ işlemi kapalıdır, yani

$\forall x, y \in G$ için; $x \circ y \in G$ dir.

(ii) $\circ$ birleşmelidir, yani

$$\forall x, y, z \in G \text{ için; } x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$$

(iii) $\forall x \in G$ için;

$$\forall x \in G \text{ için } e \circ x = x = x \circ e$$

olacak şekilde bir tek $e \in G$ elemanı vardır.

(iv) $\forall x \in G$ için;

$$x \circ x' = e = x' \circ x$$

olacak şekilde bir $x' \in G$ elemanı vardır.

Eğer (i) ve (ii) aksiyomları sağlanıyorsa, $(G, \circ)$ yapısına bir yarı grup denir. Eğer $\forall x, y \in G$ için $x \circ y = y \circ x$ ise $(G, \circ)$ grubuna abel grubu ya da değişmeli grup denir.

2.2 Tanım H , boş olmayan bir küme ve $\circ$ ile $*$ da H üzerinde tanımlanmış iki ikili işlem olsun. Ayrıca aşağıdaki aksiyomlar sağlansın:

(i) $(H, \circ)$ bir değişmeli grup,

(ii) $(H, *)$ bir yarı grup,

(iii) Bazı $x, y, z \in H$ elemanları için

$$a * (b \circ c) = a * b \circ a * c \quad \text{ve} \quad (a \circ b) * c = a * c \circ b * c$$

Bu takdirde, $(H, \circ, *)$ matematiksel sistemine bir halka denir. Eğer $*$ işlemi değişmeli ise, H 'ye bir değişmeli halka denir.

2.3 Tanım $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ yapısı bir halka ve $(\mathcal{F}, +)$ grubunun birim elemanı 0 olsun. Bir F cismi, her bir $a \neq 0$ elemanı için, $a^{-1} \cdot a = 1$ denklemini sağlayan bir a^{-1} ters elemanına ihtiva eden değişmeli bir halkadır.

Bu tanıma göre, $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ yapısının bir cisim olması için gerek ve yeter şart, aşağıdaki aksiyomların sağlanmasıdır:

- (i) $(\mathcal{F}, +)$ yapısı, değişmeli gruptur.
- (ii) $(\mathcal{F} - \{0\}, \cdot)$ yapısı, değişmeli gruptur.
- (iii) $\forall a, b, c \in \mathcal{F}$ için

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

2.4 Tanım $(H, +, \cdot)$ bir cisim ve $\emptyset \neq V \subseteq H$ olmak üzere; V kümesi aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa; V 'ye bir vektör uzayı denir.

- (i) $\forall x, y \in V$ için $x + y \in V$
- (ii) $\forall x, y, z \in V$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (iii) $\forall x \in V$ için $x + e = x = e + x$ olacak şekilde bir ve yalnız bir $e \in V$ vardır.
- (iv) $\forall x \in V$ için $x + (-x) = e = (-x) + x$ olacak şekilde bir ve yalnız bir $-x \in V$ vardır.
- (v) $\forall x, y \in V$ için $x + y = y + x$
- (vi) $a \in H$ ve $\forall x \in V$ için $a \cdot x \in V$
- (vii) $a \in H$ ve $\forall x, y \in V$ için $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$
- (viii) $a, b \in H$ ve $\forall x \in V$ için $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$
- (ix) $a, b \in H$ ve $\forall x \in V$ için $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$
- (x) $\forall x \in V$ için $\varepsilon \cdot x = x$ (ε , H 'deki $\cdot$ (çarpma) işlemine göre birim eleman)

2.5 Tanım V ve W bir $\mathcal{K}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı olmak üzere;

$T: V \rightarrow W$ tasviri $\forall v_1, v_2 \in V$ ve $\forall a, b \in \mathcal{K}$ için;

$$T(av_1 + bv_2) = aT(v_1) + bT(v_2)$$

şartını sağlıyorsa, T tasvirine lineer tasvir denir.

2.6 Tanım U, V ve W , bir $\mathcal{K}$ cismi üzerinde birer vektör uzayı olmak üzere; $u, u' \in U$, $v, v' \in V$ ve $\lambda, m \in \mathcal{K}$ için $\varphi: U \times V \rightarrow W$ aşağıdaki iki özelliği sağlıyor ise φ tasvirine iki linear (bilineer) tasvir denir:

$$(i) \quad \varphi(\lambda u + mu', v) = \lambda \varphi(u, v) + m \varphi(u', v),$$

$$(ii) \quad \varphi(u, \lambda v + mv') = \lambda \varphi(u, v) + m \varphi(u, v'),$$

2.7 Tanım $T_1: U_1 \rightarrow V_1$ ve $T_2: U_2 \rightarrow V_2$ lineer tasvirler olsun. O takdirde; $u_1 \in U_1$ ve $u_2 \in U_2$ için;

$$\Phi: U_1 \otimes U_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2, \quad \Phi(u_1 \otimes u_2) = T_1(u_1) \otimes T_2(u_2)$$

şeklinde tanımlanan Φ lineer tasvirine, T_1 ve T_2 tasvirlerinin tensör çarpımı denir ve

$$\Phi = T_1 \otimes T_2 \text{ ile gösterilir.}$$

2.8 Tanım L , bir $\mathcal{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere;

$[\cdot, \cdot]: L \times L \rightarrow L$ iki lineer tasviri aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa; L 'ye bir Lie cebiri denir.

$\forall x, y, z \in L$ ve $\forall a, b \in \mathcal{K}$ için;

$$(i) \quad [ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z] \text{ ve } [x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z] \quad (\text{bilineerlik})$$

$$(ii) \quad [x, y] = -[y, x] \quad (\text{anti-simetri})$$

$$(iii) \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad (\text{jacobi özdeşliği})$$

2.9 Tanım G bir grup ve $\mathcal{K}$ bir cisim olmak üzere; G 'den $\mathcal{K}$ ya olan tasvirlerin kümesini

$\mathcal{A} = \text{Map}(G, \mathcal{K}) = \{f \mid f: G \rightarrow \mathcal{K}\}$ ile gösterelim. Eğer $\mathcal{A}$ kümesi aşağıdaki aksiyomları sağlıyor ise, $\mathcal{A}$ 'ye bir $\mathcal{K}$ -cebiri (basitlik için ilerleyen bölümlerde sadece, cebir diyeceğiz.) denir:

$$(i) \quad \forall \alpha \in \mathcal{K} \text{ ve } \forall x \in G \text{ için } (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

$$(ii) \quad \forall f, g \in \mathcal{A} \text{ için } (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(iii) \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

Eğer bir lineer $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tasviri

$$T(f.g) = T(f).T(g)$$

eşitliğini de sağlarsa, T ' ye bir lineer homomorfizm veya cebir homomorfizmi denir.

Bir cebir, iki adet lineer tasvir ile birlikte bir $\mathcal{K}$ -vektör uzayı olarak düşünülür:

$$m: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \quad m(a \otimes b) = a.b \quad (2.1)$$

$$\eta: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A} \quad \eta(k) = k.I$$

Burada I , $\mathcal{A}$ ' nin birim elemanıdır. Bu tasvirler için

$$m \circ (\text{id} \otimes m) = m \circ (m \otimes \text{id}) \quad (\text{Ass})$$

$$m \circ (\text{id} \otimes \eta) = m \circ (\eta \otimes \text{id}) \quad (\text{Uni})$$

özellikleri geçerlidir. (Ass) aksiyomu, m çarpma tasvirinin asosyatifliğini ifade ederken, (Uni) aksiyomu, $\eta(1)$ ' in $\mathcal{A}$ ' nin hem sağ hem de sol birim elamanı olduğunu ifade etmektedir.

Böylece ortaya çıkan $(\mathcal{A}, m, \eta)$ üçlüsüne bir cebir denmektedir.

Eğer $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} = \text{Map}(G \times G, \mathcal{K})$ ve $\mathcal{A} = \text{Map}(G, \mathcal{K})$ olduğu kabul edilirse, G deki işlemi kullanarak aşağıdaki lineer homomorfizmleri tanımlayabiliriz:

$\forall x, y \in G$ için;

$$\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \Delta f(x \otimes y) = f(x, y),$$

$$\varepsilon: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{K}, \varepsilon(f) = f(e)$$

Burada e , G nin birim elemanıdır. Δ 'ya cebirin bir ko-çarpması ve ε tasvirine de cebirin ko-birimi denmektedir. Δ ve ε cebir homomorfizmleri, sırasıyla m ve η tasvirleri için verilen (Ass) ve (Uni) özelliklerine (denklem (2.1)) dual olan özelliklere sahiptir. Yani;

$$(\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta \quad (\text{coass})$$

$$m \circ (\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta = m \circ (\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta \quad (\text{counit}) \quad (2.2)$$

dır. Genel olarak, $\mathcal{K}$ üzerindeki bir lineer $\mathcal{A}$ uzayına, yukarıda tanımlanan m, η, Δ $\mathcal{K}$ -lineer

tasvirleriyle birlikte bir $\mathcal{K}$ -ko-cebir (kısaca ko-cebir) ve A lineer uzayına $m, \eta, \Delta, \varepsilon$ $\mathcal{K}$ -lineer

tasvirleriyle birlikte bir $\mathcal{K}$ -bicebir (kısaca bicebir) denir. Ek olarak, $f \in A, x \in G$ için;

$$S: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad Sf(x) = f(x^{-1})$$

şeklinde tanımlanan ve

$$m \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = m \circ (\text{id} \otimes S) \circ \Delta \quad (2.3)$$

özellikliğini sağlayan bir S cebir anti-homomorfizm ile $(\mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ altılısına bir Hopf

Cebiri denir (Abe, 1977). Bundan sonra, kısalığı bakımından bir Hopf Cebiri için,

$(\mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ altılısını değil sadece $\mathcal{A}$ kullanacaktır.

2.10 Tanım Klasik süper düzlem, bir x çift koordinat fonksiyonu ve bir θ tek koordinat fonksiyonu olmak üzere;

$$x\theta = \theta x \quad \theta^2 = 0$$

şartlarını bağlayan bir birleşmeli cebir olarak tanımlanır. Bu tanımlanan cebir $\mathbb{R}(1|1)$ ile gösterilir. Buradaki çift eleman denmesindeki amaç; diğer tüm elemanlar ile değişmeli olmasıdır. Tek elemanın ise iki özelliği vardır:

1. Karesi sıfırdır. Yani;

$$\theta^2 = 0 \text{ dır ve}$$

2. Tek eleman, diğer tek elemanlar ile anti-komütatif, yani

$$\theta_1 \theta_2 = -\theta_2 \theta_1 \text{ ve } x\theta = \theta x \text{ şeklindedir.}$$

Bu cebirin duali de $\mathbb{R}^*(1|1)$ ile gösterilecek: φ tek ve y çift koordinat fonksiyonları olmak üzere;

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^*(1|1) \Leftrightarrow \varphi y = y\varphi \quad \varphi^2 = 0$$

2.11 Tanım Bir T lineer transformasyonu yukarıda tanımlanan süper düzleme ve dualine etki etsin. Bu takdirde;

$$T: \mathbb{R}(1|1) \rightarrow \mathbb{R}(1|1)$$

$$T: \mathbb{R}^*(1|1) \rightarrow \mathbb{R}^*(1|1)$$

olacaktır. Lineer cebir derslerinden bilindiği gibi her lineer dönüşümün bir matris temsili vardır. O halde; T , 2×2 tipinden bir matris olarak düşünülebilir. Böyle matrislerin

oluşturduğu gruba süper grup denir. Bu grup, matris elemanlarının ikisi çift ikisi tek olan 2×2 tipinden süper matrislerin grubudur ve $GL(1|1)$ ile gösterilir. Bir $T \in GL(1|1)$ matrisi;

$$T = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada; a ve d çift elemanları, β ve γ ise T matrisinin tek elemanlarını göstermektedir.

T matrisinin matris elemanları arasındaki bağıntılar:

$$a\beta = \beta a \quad d\beta = \beta d \quad a\gamma = \gamma a \quad d\gamma = \gamma d$$

$$\beta^2 = 0 \quad \gamma^2 = 0 \quad \beta\gamma + \gamma\beta = 0 \quad ad - da = 0$$

şeklindedir. Bu matrisin determinantı; Berezin(1987) tarafından;

$$\text{sdet}(T) = a(d - \gamma a^{-1} \beta)^{-1}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu matrisin tersi ise, gerekli işlemler yapıldığında

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} + a^{-1} \beta d^{-1} \gamma a^{-1} & -a^{-1} \beta d^{-1} \\ -d^{-1} \gamma a^{-1} & d^{-1} + d^{-1} \beta a^{-1} \gamma d^{-1} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Burada; a ve d matris elemanlarının terslerinin mevcut olduğu kabul edilmiştir.

3. KUANTUM SÜPER DÜZLEMİ ve h -Deforme KUANTUM SÜPER DÜZLEMİ

Bu bölümde; ilk olarak kuantum süper düzlemi ve Hopf cebiri yapısı anlatılacak ve bu düzlem üzerinden h -deforme kuantum süper düzleminin yapısı elde edilecektir.

3.1 Kuantum Süper Düzlemi

Manin (1988), kuantum süper düzlemi aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

3.1.1 Tanım Kuantum süper düzlem; x çift koordinat fonksiyonu ve θ tek koordinat fonksiyonu ve ayrıca q , sıfırdan farklı bir kompleks sayı olmak üzere;

$$x\theta = q\theta x \quad \theta^2 = 0$$

şartlarını sağlayan bir birleşmeli cebir olarak tanımlanır. Açıkça görülebilir ki; $q \rightarrow 1$ limitinde daha önceki bölümde tanımlanan klasik süper düzleme elde edilir. Eğer bu cebirin duali $R_q^*(1|1)$ ile gösterilirse;

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ y \end{pmatrix} \in R_q^*(1|1) \Leftrightarrow \varphi y = q^{-1}y\varphi \quad \varphi^2 = 0$$

şeklinde tanımlanır. $R_q(1|1)$ cebirine 1 birim eleman ve x^{-1} ters elemanı,

$$x.x^{-1} = 1 = x^{-1}.x$$

eşitliğini sağlayacak şekilde eklenerek, kuantum süper düzlemi genişletilmiş bir cebir olarak düşünülebilir. Bu genişletilmiş cebir $\mathcal{A} \equiv Fun(R_q(1|1))$ ile gösterilecek.

3.1.2 $\mathcal{A}$ Cebiri üzerinde Hopf Cebir Yapısı

Hopf cebir yapısı, Bölüm 2 de verilmişti. Burada $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde ko-çarpım, ko-birim ve ko-ters operatörleri ile Hopf cebiri yapısı ortaya konulacaktır.[S. Çelik (2002)]

1) Ko-çarpım operatörü $\Delta_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$,

$$\Delta_{\mathcal{A}}(x) = x \otimes x, \quad \Delta_{\mathcal{A}}(\theta) = x \otimes \theta + \theta \otimes x, \quad \Delta_{\mathcal{A}}(1) = 1 \otimes 1$$

ile tanımlı bir cebir homomorfizmidir.

2) Ko-birim operatörü $\varepsilon_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\varepsilon_{\mathcal{A}}(x) = 1, \quad \varepsilon_{\mathcal{A}}(\theta) = 0$$

ile tanımlı bir cebir homomorfizmidir.

3) Ko-ters operatörü $S_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

$$S_{\mathcal{A}}(x) = x^{-1},$$

$$S_{\mathcal{A}}(\theta) = -x^{-1}\theta x^{-1}$$

ile tanımlı bir cebir anti-homomorfizmidir.

$\mathcal{A}$ cebiri tanımlanan ko-çarpım, ko-birim ve ko-ters operatörleriyle bir Hopf Cebir yapısına sahiptir. Bu tanımlanan operatörlerin (2.2) ve (2.3) de verilen özdeşlikleri sağladıkları kolaylıkla görülebilir.

3.2 h -Deforme Kuantum Süper Düzlemi

Kuantum süper düzleminin koordinat fonksiyonları arasındaki bağıntılar Kısım 3.1 de verilmişti. Bu bağıntılar x' çift ve θ' tek koordinat fonksiyonunu göstermek üzere;

$$x'\theta' - q\theta'x' = 0 \quad \theta'^2 = 0 \quad (3.2.1)$$

şekline tanımlanmıştı.

Dabrowski ve Parashar (1995) yaptığı çalışmada, Aghamohammadi vd. (1995) de kuantum düzlem için yaptığına benzer bir singüler benzerlik transformasyonu kullanarak, süper düzlemin h -deforme yapısını ortaya koymuşlardır. Bunun için, tersi mevcut bir g matrisi

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{h}{q-1} & 1 \end{pmatrix}$$

olarak alınmış ve yeni koordinatlar x ve θ ile gösterilerek

$$\begin{pmatrix} x' \\ \theta' \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$$

eşitliğinden

$$x' = x, \quad \theta' = \theta + \frac{h}{q-1}x$$

şeklinde yazılmıştır. Burada dikkat edilmesi gereken bir yer olarak; h parametresinin sıradan bir sayı olmayışı vurgulanmış. Buna gerekçe olarak da, h parametresinin, hem x çift hem de θ tek koordinat fonksiyonları arasındaki bağıntıları tanımladığı, dolayısıyla h parametresinin Grassmann sayısı olması gerektiğini göstermişlerdir. Böylece h parametresi için;

$$h^2 = 0, \quad h\theta = -\theta h$$

bağıntılarını elde etmişlerdir.

(3.2.1) bağıntıları kullanılarak, $q \rightarrow 1$ limiti alınarak x ve θ koordinat fonksiyonları arasındaki bağıntılar;

$$x\theta = \theta x + hx^2, \quad \theta^2 = -h\theta x \quad (3.2.2)$$

olarak bulunmuştur. Benzer şekilde; y ve φ koordinat fonksiyonları tarafından üretilen Λ_h dual h -süper düzleminin koordinat fonksiyonları arasındaki bağıntıları aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\varphi y = -y\varphi, \quad \varphi^2 = 0 \quad (3.2.3)$$

4. $GL_h(1|1)$ KUANTUM SÜPER GRUBU ve HOPF CEBİR YAPISI

Bu bölümde $GL_h(1|1)$ kuantum süper grubunun matris elemanları arasındaki bağıntılar ve Hopf cebir yapısı verilecektir.

4.1 $GL_h(1|1)$ Kuantum Süper Grubu

Dabrowski ve Parashar (1995) yaptığı çalışmada; üreteçleri a, β, γ, d üreteçleri ile oluşturulmuş $GL_h(1|1)$ kuantum süper grubundaki matrisin matris elemanları arasındaki bağıntıların;

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \beta\alpha, & a\gamma &= \gamma a + h(a^2 + \gamma\beta - da), \\ d\beta &= \beta d, & \gamma d &= d\gamma + h(d^2 - \gamma\beta - da), \\ \beta^2 &= 0, & \gamma^2 &= h(d\gamma - \gamma a), \\ \beta\gamma &= -\gamma\beta - h(\beta a - d\beta), & ad &= da + h(\beta a - d\beta) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

şeklinde olduğu hem büzülme hem de R-matris yaklaşımı ile ortaya koymuşlardır. Burada $h \rightarrow 0$ limitine bakıldığında klasik genel lineer gruba dönüldüğü aşıkardır. Ayrıca tanım 2.11'den yola çıkarak benzer işlemler yapılarak da $T \in GL_h(1|1)$ matrisinin matris elemanları arasındaki (4.1.1) bağıntıları bulunabilir. T süper matrisinin determinantı, Tanım 2.11'de bahsedilen tanımıyla aynıdır. Yani;

$$D_h = a(d - \gamma a^{-1} \beta)^{-1} \quad (4.1.2)$$

olarak ifade edilmiştir.

T süper matrisinin tersi, h -deforme durumda da aynıdır:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} + a^{-1} \beta d^{-1} \gamma a^{-1} & -a^{-1} \beta d^{-1} \\ -d^{-1} \gamma a^{-1} & d^{-1} + d^{-1} \beta a^{-1} \gamma d^{-1} \end{pmatrix}$$

4.2 $GL_h(1|1)$ Kuantum Süper Grubunun Hopf Cebir Yapısı

Tanım 2.9'dan bilindiği gibi bir yapının Hopf cebiri olabilmesi için ko-çarpım, ko-birim ve ko-ters operatörleri olmalıdır. Bu kısımda Dabrowski ve Parashar (1995) nın yaptığı çalışmadaki $GL_h(1|1)$ kuantum süper grubunun Hopf cebiri yapısı anlatılacaktır. $T \in GL_h(1|1)$ olmak üzere;

$$T = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix} \text{ olsun.}$$

Ko-çarpım operatörü olan Δ operatörü;

$$\Delta: GL_h(1|1) \rightarrow GL_h(1|1) \otimes GL_h(1|1)$$

$$\Delta(T) = T \dot{\otimes} T$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $\dot{\otimes}$ sembolü, matris-tensörel çarpma işlemini göstermektedir. Yani, matrisler bilinen matris çarpımı şeklinde çarpılacak fakat araya tensör işareti konulacaktır. Δ ko-çarpımının T matrisinin elemanlarına etkisi;

$$\Delta(T_{ij}) = T_{ik} \otimes T_{kj} \quad i,j=1,2$$

$$\Delta(a) = a \otimes a + \beta \otimes \gamma, \quad \Delta(\beta) = a \otimes \beta + \beta \otimes d, \quad (4.2.1)$$

$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes a + d \otimes \gamma, \quad \Delta(d) = \gamma \otimes \beta + d \otimes d,$$

olarak bulunmuştur.

Ko-birim operatörü olan ε operatörü;

$$\varepsilon: GL_h(1|1) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\varepsilon(T) = I$$

şeklinde tanımlanmıştır. ε ko-birim operatörünün $T \in GL_h(1|1)$ matrisinin elemanlarına etkisi aşağıdaki gibidir:

$$\varepsilon(a) = 1, \quad \varepsilon(\beta) = 0, \quad \varepsilon(\gamma) = 0, \quad \varepsilon(d) = 1 \quad (4.2.2)$$

Ko-birim operatörü;

$$m \circ (\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta = m' \circ (\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta$$

olacak şekilde bir cebir homomorfizmaıdır. m ve m' tasvirleri kanonik olarak izomorf olup;

$$m: \mathbb{C} \otimes GL_h(1|1) \rightarrow GL_h(1|1),$$

$$m': GL_h(1|1) \otimes \mathbb{C} \rightarrow GL_h(1|1),$$

$$m(c \otimes a) = ca = m'(a \otimes c)$$

$$\forall a \in GL_h(1|1) \text{ ve } \forall c \in \mathbb{C}$$

şekildedir.

Ko-ters operatörü olan S operatörü;

$$S: GL_h(1|1) \rightarrow GL_h(1|1)$$

$$S(T) = T^{-1}$$

şeklinde tanımlanmıştır. S ko-ters operatörünün $T \in GL_h(1|1)$ matrisinin elemanlarına etkisi;

$$S(a) = a^{-1} + a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1} \quad S(\beta) = -a^{-1}\beta d^{-1} \quad (4.2.3)$$

$$S(\gamma) = -d^{-1}\gamma a^{-1} \quad S(d) = d^{-1} + d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}$$

şeklindedir. Böylece; S ko-ters operatörünün,

$$m \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta = \varepsilon = m \circ (\text{id} \otimes S) \circ \Delta$$

bağıntısını sağlayan bir cebir anti-homomorfizması olduğu görülmüştür.

5. $GL_h(1|1)$ KUANTUM SÜPER GRUBUNUN GAUSS AYRIŞIMI

Bu kesimde bir önceki bölümde tanımlanan $GL_h(1|1)$ kuantum süper grubunun $T \in GL_h(1|1)$ için alt üçgen matris T_A , köşegen matris T_D , üst üçgen matris T_U olmak üzere üç tane matrisin çarpımı şeklinde yazılarak bu matrislerin matris elemanları arasındaki bağıntılar ve süper Hopf cebiri yapısı elde edilecek. Daha sonra $T_L = T_A T_D$ ve $T_R = T_D T_U$ matrislerinin matris elemanları arasındaki bağıntılar elde edilip süper Hopf cebiri yapısı gösterilecektir. Sonrasında; Gauss ayrışımından yararlanılarak T matrisinin üstel matrisi elde edilip bu matrisin matris elemanları arasındaki komutasyon bağıntıları, süper-Lie cebiri ve süper Hopf cebiri yapıları verilecektir. En son bölümde ise R matris yaklaşımı işlenecektir.

5.1 T Kuantum Süper Matrisinin Gauss Ayrışımı

$T \in GL_h(1|1)$ için alt üçgen matris T_A , köşegen matris T_D , üst üçgen matris T_U olmak üzere;

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T_A T_D T_U$$

şeklinde yazılım. Bu durumda, T matrisinin matris elemanları, Gauss ayrışımı ile elde edilen elemanları aşağıdaki gibi:

$$a = D_1, \quad \beta = D_1 \mu, \quad \gamma = \nu D_1, \quad d = D_2 + \nu D_1 \mu \quad (5.1.1)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi amacımız, (4.1.1) bağıntıları yardımıyla, ortaya çıkan yeni matris elemanları arasında sağlanan komutasyon bağıntılarını bulmaktır. Örneğin,

$$a\beta = \beta a; \text{ bağıntısı}$$

$D_1 D_1 \mu = D_1 \mu D_1$ eşitliğini verir. $a = D_1$ ve a çift eleman olduğundan D_1 de çifttir. Dolayısıyla eşitliği soldan D_1 in tersi ile çarpabiliriz. O halde denklem;

$$D_1 \mu = \mu D_1 \quad (5.1.2)$$

şeklinde dir. (4.1.1) deki diğer bağıntılar kullanılarak benzer işlemler yapıldığında T matrisinin Gauss ayrışımının elemanları arasındaki komutasyon bağıntıları;

$$\begin{aligned} D_1 \mu &= \mu D_1 & \mu^2 &= 0 \\ [D_1, \nu] &= h(D_1 - D_2) & [\mu, \nu]_+ &= 0 \\ D_1 D_2 &= D_2 D_1 & D_2 \mu &= \mu D_2 \\ [\nu, D_2] &= h(D_2^2 D_1^{-1} - D_2) & \nu^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

olarak elde edilir.

5.2 $GL_h(1|1)$ Kuantum Süper Grubunun Gauss Ayrışımının Hopf Cebir Yapısı

Bu kısımda; Kısım 4.2’de verilen Hopf cebiri yapısının bir önceki bölümde verilen T matrisinin Gauss ayrışımının da Hopf cebir yapısını oluşturulduğu gösterilecektir. Bunun için; (5.1.1) bağıntıları (4.2.1) bağıntılarında yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\Delta(D_1) &= D_1 \otimes D_1 + D_1 \mu \otimes \nu D_1 \\ \Delta(D_1 \mu) &= D_1 \otimes D_1 \mu + D_1 \mu \otimes (D_2 + \nu D_1 \mu)\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

$$\Delta(\nu D_1) = \nu D_1 \otimes D_1 + (D_2 + \nu D_1 \mu) \otimes \nu D_1$$

$$\Delta(D_2 + \nu D_1 \mu) = \nu D_1 \otimes D_1 \mu + (D_2 + \nu D_1 \mu) \otimes (D_2 + \nu D_1 \mu)$$

elde edilir. Δ ’nın bir cebir homomorfizmi olması gerçeği kullanıldığında,

$$\Delta(D_1) = D_1 \otimes D_1 + D_1 \mu \otimes \nu D_1 = (D_1 \otimes 1)(1 \otimes 1 + \mu \otimes \nu)(1 \otimes D_1)$$

ve

$$\Delta(D_1 \mu) = \Delta(D_1) \Delta(\mu) = D_1 \otimes D_1 \mu + D_1 \mu \otimes (D_2 + \nu D_1 \mu) \text{ den}$$

$$\begin{aligned}\Delta(D_1) \Delta(\mu) &= D_1 \otimes D_1 \mu + D_1 \mu \otimes D_2 + D_1 \mu \otimes \nu D_1 \mu \\ &= (D_1 \otimes 1)(1 \otimes 1 + \mu \otimes \nu)(1 \otimes D_1)(1 \otimes \mu) + D_1 \mu \otimes D_2 \\ &= (D_1 \otimes 1)(1 \otimes 1 + \mu \otimes \nu)(1 \otimes D_1)[1 \otimes \mu + (1 \otimes D_1)^{-1}(1 \otimes 1 + \mu \otimes \nu)^{-1}(\mu \otimes D_2)] \\ &= \Delta(D_1)[1 \otimes \mu + (1 \otimes D_1)^{-1}(1 \otimes 1 + \mu \otimes \nu)^{-1}(\mu \otimes D_2)]\end{aligned}$$

elde ederiz. O halde

$$\Delta(\mu) = 1 \otimes \mu + (1 \otimes D_1)^{-1}(1 \otimes 1 + \mu \otimes \nu)^{-1}(\mu \otimes D_2)$$

dir. Biraz düzenleme ile,

$\mu^2 = 0$ ve $\nu^2 = 0$ olduğundan toplamdan sonraki ikinci parantez seriye açıldığında sadece ilk iki terim geleceğinden;

$$\begin{aligned}\Delta(\mu) &= 1 \otimes \mu + (1 \otimes D_1^{-1})(1 \otimes 1 - \mu \otimes \nu)(\mu \otimes D_2) \\ &= 1 \otimes \mu + \mu \otimes D_1^{-1} D_2 - \mu^2 \otimes D_1^{-1} \nu D_2\end{aligned}$$

den

$$\Delta(\mu) = 1 \otimes \mu + \mu \otimes D_1^{-1} D_2 \quad (5.2.2)$$

çıkar. Benzer şekilde;

$$\Delta(\nu) = \nu \otimes 1 + D_2 D_1^{-1} \otimes \nu \quad (5.2.3)$$

$$\Delta(D_2) = (D_2 \otimes 1)(1 \otimes 1 + \mu \otimes \nu)(1 \otimes D_2) \quad (5.2.4)$$

olduğu gösterilebilir. O halde; Δ ko-çarpımının Gauss ayrışımının elemanları üzerine etkisi;

$$\Delta(D_1) = (D_1 \otimes 1)(1 \otimes 1 + \mu \otimes \nu)(1 \otimes D_1)$$

$$\Delta(\mu) = 1 \otimes \mu + \mu \otimes D_1^{-1} D_2 \quad (5.2.5)$$

$$\Delta(\nu) = \nu \otimes 1 + D_2 D_1^{-1} \otimes \nu$$

$$\Delta(D_2) = (D_2 \otimes 1)(1 \otimes 1 + \mu \otimes \nu)(1 \otimes D_2)$$

olarak yazılabilir. Burada, Δ ko-çarpımının (5.1.3) bağıntılarını invaryant bıraktığını göstermek zor değildir. Örneğin;

$$\begin{aligned} \Delta(D_1 \mu) &= \Delta(D_1) \Delta(\mu) \\ &= (D_1 \otimes 1)(1 \otimes 1 + \mu \otimes \nu)(1 \otimes D_1)[1 \otimes \mu + \mu \otimes D_1^{-1} D_2] \\ &= D_1 \otimes D_1 \mu + D_1 \mu \otimes D_2 + D_1 \mu \otimes \nu D_1 \mu \\ &= D_1 \otimes \mu D_1 + \mu D_1 \otimes D_2 + D_1 \mu \otimes \nu \mu D_1 \\ &= D_1 \otimes \mu D_1 + \mu D_1 \otimes D_2 - D_1 \mu \otimes \mu \nu D_1 \\ &= \{1 \otimes \mu + \mu \otimes D_2 D_1^{-1}\} (D_1 \otimes 1)(1 \otimes 1 + \mu \otimes \nu)(1 \otimes D_1) \\ &= \Delta(\mu) \Delta(D_1) \end{aligned}$$

dir. Diğer bağıntılar da benzer şekilde gösterilebilir.

ε ko-birim operatörünün T matrisinin Gauss ayrışımının elemanları üzerine etkisini (5.1.1) bağıntıları (4.2.2) bağıntılarında yerine yazılarak;

$$\varepsilon(D_1) = 1,$$

$$\varepsilon(D_1 \mu) = 0 \rightarrow \varepsilon(D_1) \varepsilon(\mu) = 0 \rightarrow \varepsilon(\mu) = 0$$

$$\varepsilon(\nu D_1) = 0 \rightarrow \varepsilon(\nu) \varepsilon(D_1) = 0 \rightarrow \varepsilon(\nu) = 0$$

$$\varepsilon(D_2 + \nu D_1 \mu) = 1 \rightarrow \varepsilon(D_2) + \varepsilon(\nu) \varepsilon(D_1) \varepsilon(\mu) = 1 \rightarrow \varepsilon(D_2) = 1$$

şeklinde bulunmuştur. Yani;

$$\varepsilon(D_1) = 1, \varepsilon(D_2) = 1, \varepsilon(\mu) = 0, \varepsilon(\nu) = 0 \quad (5.2.6)$$

dir ve ε (5.1.3) bağıntılarını korur. Bir örnek olarak;

$$\varepsilon(D_1 D_2) = \varepsilon(D_1) \varepsilon(D_2) = 1.1 = \varepsilon(D_2) \varepsilon(D_1) = \varepsilon(D_2 D_1)$$

dir.

S ko-ters operatörünün T matrisinin gauss ayrışımının matris elemanlarına etkisi aşağıdaki gibi olacaktır:

$$S(D_1) = D_1^{-1} + \mu D_2^{-1} \nu \quad S(D_1 \mu) = -\mu D_2^{-1}$$

$$S(\nu D_1) = -D_2^{-1} \nu \quad S(D_2 + \nu D_1 \mu) = D_2^{-1}$$

S ko-ters operatörünün, bir cebir anti-homomorfizmi olduğu göz önünde bulundurulursa;

$$S(D_1 \mu) = -\mu D_2^{-1} \quad \text{veya} \quad S(\mu) S(D_1) = S(\mu) (D_1 + \mu D_2^{-1} \nu) = -\mu D_2^{-1}$$

den

$$\begin{aligned} S(\mu) &= (-\mu D_2^{-1}) (D_1 + \mu D_2^{-1} \nu)^{-1} = (-\mu D_2^{-1}) (D_1^{-1} (1 + D_1 \mu D_2^{-1} \nu))^{-1} \\ &= (-\mu D_2^{-1}) (1 + D_1 \mu D_2^{-1} \nu)^{-1} D_1 = (-\mu D_2^{-1}) (1 - D_1 \mu D_2^{-1} \nu) D_1 \\ &= -\mu D_2^{-1} D_1 + \mu D_2^{-1} D_1 \mu D_2^{-1} \nu D_1 \end{aligned}$$

olup

$$S(\mu) = -\mu D_2^{-1} D_1$$

çıkar. Neticede; S ko-ters operatörünün T matrisinin gauss ayrışımının matris elemanlarına etkisi aşağıdaki gibidir:

$$S(D_1) = D_1^{-1} + \mu D_2^{-1} \nu \quad S(\mu) = -\mu D_2^{-1} D_1 \quad (5.2.7)$$

$$S(\nu) = -D_1 D_2^{-1} \nu \quad S(D_2) = D_2^{-1} + \mu D_2^{-2} D_1 \nu$$

Ko-ters operatörü olan S de (5.1.3) bağıntılarını korur. Bir örnek olması açısından;

$$S(D_1 \mu - \mu D_1) = S(\mu) S(D_1) - S(D_1) S(\mu) = (-\mu D_2^{-1} D_1) (D_1^{-1} + \mu D_2^{-1} \nu) - (D_1^{-1} + \mu D_2^{-1} \nu) (-\mu D_2^{-1} D_1)$$

$$= -\mu D_2^{-1} - \mu D_2^{-1} D_1 \mu D_2^{-1} \nu + D_1^{-1} \mu D_2^{-1} D_1 + \mu D_2^{-1} \nu \mu D_2^{-1} D_1$$

$$= -\mu D_2^{-1} + \mu D_2^{-1} = 0$$

gösterilebilir. Diğer bağıntılar da benzer şekilde kontrol edilebilir. Önceden bahsedildiği gibi; $GL_h(1|1)$ grubu bir Hopf cebir yapısına sahiptir. Şimdi T matrisinin Gauss ayrışımının matris elemanlarının (2.2) ve (2.3) eşitliklerini sağladıkları birer örnek ile gösterilecektir:

Aşağıda, $(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$ eşitliği D_1 için sağlatılmaktadır.

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta(D_1) &= (\Delta \otimes \text{id})(D_1 \otimes D_1 + D_1 \mu \otimes \nu D_1) \\ &= \Delta(D_1) \otimes \text{id}(D_1) + \Delta(D_1 \mu) \otimes \text{id}(\nu D_1) \\ &= (D_1 \otimes D_1 + D_1 \mu \otimes \nu D_1) \otimes D_1 + (D_1 \otimes D_1 \mu + D_1 \mu \otimes (D_2 + \nu D_1 \mu)) \otimes \nu D_1 \\ &= D_1 \otimes D_1 \otimes D_1 + D_1 \mu \otimes \nu D_1 \otimes D_1 + D_1 \otimes D_1 \mu \otimes \nu D_1 \\ &\quad + D_1 \mu \otimes D_2 \otimes \nu D_1 + D_1 \mu \otimes \nu D_1 \mu \otimes \nu D_1 \\ &= D_1 \otimes (D_1 \otimes D_1 + D_1 \mu \otimes \nu D_1) + D_1 \mu \otimes (\nu D_1 \otimes D_1 + D_2 \otimes \nu D_1 + \nu D_1 \mu \otimes \nu D_1) \\ &= \text{id}(D_1) \otimes \Delta(D_1) + \text{id}(D_1 \mu) \otimes \Delta(\nu D_1) \\ &= (\text{id} \otimes \Delta)(D_1 \otimes D_1 + D_1 \mu \otimes \nu D_1) = (\text{id} \otimes \Delta)\Delta(D_1) \end{aligned}$$

ortaya çıkar.

$m \circ (\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta = m \circ (\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta$ eşitliğinin D_2 matris elemanı tarafından sağlandığı

$$\begin{aligned} m \circ (\varepsilon \otimes \text{id}) \Delta(D_2) &= m \circ (\varepsilon \otimes \text{id})(D_2 \otimes D_2 + D_2 \mu \otimes \nu D_2) \\ &= m(\varepsilon(D_2) \otimes \text{id}(D_2) + \varepsilon(D_2 \mu) \otimes \text{id}(\nu D_2)) \\ &= m(1 \otimes D_2) = 1 D_2 = D_2 \end{aligned}$$

Diğer yandan;

$$\begin{aligned} m \circ (\text{id} \otimes \varepsilon) \Delta(D_2) &= m \circ (\text{id} \otimes \varepsilon)(D_2 \otimes D_2 + D_2 \mu \otimes \nu D_2) \\ &= m(\text{id}(D_2) \otimes \varepsilon(D_2) + \text{id}(D_2 \mu) \otimes \varepsilon(\nu D_2)) \\ &= m(D_2 \otimes 1) = D_2 \cdot 1 = D_2 \end{aligned}$$

şeklinde gösterilebilir. Son olarak;

$m \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = m \circ (\text{id} \otimes S) \circ \Delta$ eşitliği için μ alınırsa;

$$\begin{aligned}
 m \circ (S \otimes \text{id}) \Delta(\mu) &= m \circ (S \otimes \text{id})(1 \otimes \mu + \mu \otimes D_1^{-1} D_2) \\
 &= m(S(1) \otimes \text{id}(\mu) + S(\mu) \otimes \text{id}(D_1^{-1} D_2)) \\
 &= m(1 \otimes \mu + (-\mu D_2^{-1} D_1) \otimes D_1^{-1} D_2) \\
 &= \mu - \mu D_2^{-1} D_1 D_1^{-1} D_2 = \mu - \mu = 0 = \varepsilon(\mu)
 \end{aligned}$$

Diğer yandan;

$$\begin{aligned}
 m \circ (\text{id} \otimes S) \Delta(\mu) &= m \circ (\text{id} \otimes S)(1 \otimes \mu + \mu \otimes D_1^{-1} D_2) \\
 &= m(\text{id}(1) \otimes S(\mu) + \text{id}(\mu) \otimes S(D_1^{-1} D_2)) \\
 &= m(1 \otimes (-\mu D_2^{-1} D_1) + \mu \otimes S(D_2) S(D_1^{-1})) \\
 &= m(1 \otimes (-\mu D_2^{-1} D_1) + \mu \otimes (D_2^{-1} + \mu D_2^{-2} D_1 \nu)(D_1 - D_1 \mu D_2^{-1} \nu D_1)) \\
 &= m(-1 \otimes \mu D_2^{-1} D_1 + \mu \otimes (D_2^{-1} D_1 + \mu D_2^{-2} D_1 \nu D_1 - D_2^{-1} D_1 \mu D_2^{-1} \nu D_1 - \mu D_2^{-2} D_1 \nu D_1 \mu D_2^{-1} \nu D_1))
 \end{aligned}$$

(5.1.3) bağıntılarına göre μ çift elemanlarla komutatif ve $\mu^2=0$ olduğundan parantez içindeki son terim yok olur. Aynı şekilde; parantez içindeki ikinci ve üçüncü ifadeler birbirini götürceğinden;

$$\begin{aligned}
 &= m(-1 \otimes \mu D_2^{-1} D_1 + \mu \otimes D_2^{-1} D_1) \\
 &= -1 \mu D_2^{-1} D_1 + \mu D_2^{-1} D_1 = 0 = \varepsilon(\mu)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer matris elemanlarının bu bağıntıları sağladıkları benzer şekilde gösterilebilir.

5.3 T_L ve T_R Matrislerinin Matris Elemanları Arasındaki Bağıntılar ve Hopf Cebir Yapıları

Bu bölümde T_L ve T_R matrislerinin matris elemanları arasındaki bağıntılar koordinat fonksiyonları yardımı ile elde edilip Hopf cebir yapıları gösterilecektir. Şimdi; alt üçgen ve köşegen matrislerinin çarpımını T_L ile gösterelim. T_L matrisinin açık şekli;

$$T_L = T_A T_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

dir. Matris elemanları arasındaki komutasyon bağıntılarını, Tanım 2.11'den yola çıkarak hesaplayalım. $X = (x \ \theta)^t$ ve $X' = (x' \ \theta')^t$ olmak üzere;

$$T_L X = X'$$

diyelim. Açık olarak;

$$\begin{pmatrix} x' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 x \\ \nu D_1 x + D_2 \theta \end{pmatrix}$$

şeklindedir. (3.2.2) bağıntıları kullanılarak;

$[D_1, \nu] = h(D_1 - D_2)$, $\nu^2 = 0$ ve $[D_1, D_2] = 0$ bağıntıları elde edilir. Benzer şekilde; X^* dual düzleminin bir elemanını göstermek üzere, (3.2.3) bağıntıları kullanılarak,

$[D_1, D_2] = 0$ elde edilir. O halde; T_L matrisinin matris elemanları arasındaki bağıntılar;

$$[D_1, D_2] = 0, \quad [D_1, \nu] = h(D_1 - D_2), \quad \nu^2 = 0, \quad [D_2, \nu] = 0 \quad (5.3.1)$$

dır. T_L matrisinin determinantı $s\text{Det}_L$ ile gösterilirse;

$$s\text{Det}_L(T_L) = D_2^{-1} D_1$$

olur. Şimdi süper Hopf cebir yapısını verelim.

Ko-çarpım operatörü olan Δ_L operatörü;

$$\Delta : GL_h(1|1) \rightarrow GL_h(1|1) \otimes GL_h(1|1)$$

$$\Delta(T_L) = T_L \otimes T_L$$

şeklinde tanımlanırsa, Δ operatörünün T_L süper matrisinin matris elemanlarına etkisi;

$$\Delta(D_1) = D_1 \otimes D_1 \quad \Delta(D_2) = D_2 \otimes D_2$$

$$\Delta(\nu) = \nu \otimes 1 + D_2 D_1^{-1} \otimes \nu \quad (5.3.2)$$

şeklindedir. Ko-birim operatörü olan ε operatörünün T_L süper matrisinin matris elemanlarına etkisi;

$$\varepsilon(D_1) = 1, \quad \varepsilon(D_2) = 1, \quad \varepsilon(\nu) = 0 \quad (5.3.3)$$

formunda olur. Ko-ters operatörü olan S operatörünün T_L süper matrisinin matris elemanlarına etkisi;

$$S(D_1) = D_1^{-1}, \quad S(\nu) = -D_1 D_2^{-1} \nu, \quad S(D_2) = D_2^{-1} \quad (5.3.4)$$

olarak elde edilir. Bu operatörlerin (5.3.1) bağıntıları kolaylıkla gösterilebilir.

T_R matrisinin açık şekli;

$$T_R = \begin{pmatrix} D_1 & D_1 \mu \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

Benzer şekilde işlemler T_R matrisi için yapıldığında; T_R matrisinin matris elemanları arasındaki komutasyon bağıntıları aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$[D_1, \mu] = 0, \quad [D_2, \mu] = 0, \quad [D_1, D_2] = 0, \quad \mu^2 = 0 \quad (5.3.5)$$

T_R matrisinin Hopf cebir yapısı ise;

Ko-çarpım operatörü Δ olmak üzere;

$$\Delta(D_1) = D_1 \otimes D_1$$

$$\Delta(\mu) = 1 \otimes \mu + \mu \otimes D_2 D_1^{-1} \quad (5.3.6)$$

$$\Delta(D_2) = D_2 \otimes D_2$$

T_R matrisinin matris elemanlarına etkisi yukarıdaki gibidir.

Ko-birim operatörü olan ε in T_R matris elemanlarına etkisi;

$$\varepsilon(D_1) = 1, \quad \varepsilon(D_2) = 1, \quad \varepsilon(\mu) = 0 \quad (5.3.7)$$

dir. S ko-ters operatörünün T_R matrisine etkisi ise;

$$S(D_1) = D_1^{-1}, \quad S(\mu) = -\mu D_1 D_2^{-1}, \quad S(D_2) = D_2^{-1} \quad (5.3.8)$$

olarak bulunmuştur. Bu operatörlerin (5.3.5) bağıntılarını koruduğunu göstermek basit olduğundan verilmeyecektir.

6 T Matrisinin Üstel Formu

Bu kısımda, T matrisinin Gauss ayrışımından yararlanarak Frosdal ve Galindo (1993) tarafından geliştirilen yöntem ile T matrisinin üstel matrisi bulunacaktır. Daha sonra, bu matrisin matris elemanları arasındaki bağıntılar hesaplanıp süper-Lie cebiri yapısı ve süper Hopf cebiri yapıları verilecektir.

6.1 T Matrisinin Üstel Matrisinin Yapısı

Kısım 5.1'de T matrisi

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde ayrılmıştı. Bu matrislerin çift jeneratörleri olan D_1 ve D_2 yi;

$$D_1 = e^x \quad D_2 = e^y \quad (6.1.1)$$

olarak alalım ve diğer matris elemanları olan ν ile μ ve ayrıca parametre olan h aynı kalsın. Bu şekilde seçmemizdeki amaç; alt üçgen ve üst üçgen matrislerinin üstel matrislerinin matris elemanlarının sadece tek elemanlarıyla oluşan 2x2 tipinden matrisler olmalarıdır. Örneğin; T_A matrisini ele alalım.

$T_A = e^M$ olarak yazılsın. Buradan;

$M = \ln T_A$ yazabiliriz. $\nu^2 = 0$ olduğu göz önünde bulundurularak $\ln T_A$ seriye açılırsa;

$$M = \ln T_A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (T_A - I)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nu & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nu & 0 \end{pmatrix}$$

elde ederiz. Aynı durum, T_U matrisi içinde söz konusudur.

Üstel matrisin matris elemanları arasındaki bağıntıları bulmadan önce bu bağıntıları bulmamızı sağlayacak olan bazı özellikler aşağıdaki lemma ile verilmiştir.

Lemma: Aşağıdaki önermeler doğrudur.

$$(i) D_1^n \nu = \nu D_1^n + nh D_1^{n-1} (D_1 - D_2)$$

$$(ii) [\nu, D_2] = nh D_2^{n-1} (D_2^2 D_1^{-1} - D_2)$$

İspat: Tümevarım yöntemiyle kolayca yapılabilir. (i) şıkkı için;

$n=1$ için $[D_1, \nu] = h(D_1 - D_2)$ (5.1.3) bağıntılarındakini verir.

$$n=k \text{ için; } D_1^k \nu = \nu D_1^k + kh D_1^{k-1} (D_1 - D_2)$$

doğru olduğunu kabul edip $n=k+1$ için doğru olduğunu gösterelim:

$$D_1^k v = v D_1^k + k h D_1^{k-1} (D_1 - D_2) \text{ eşitliğini sağdan } D_1 \text{ ile çarparsak;}$$

$D_1^{k+1} v = D_1 v D_1^k + k h D_1^k (D_1 - D_2)$ eşitliğin sağ tarafındaki ilk ifadedeki D_1 ve v elemanları (5.1.3) bağıntılarına göre yer değiştirilirse;

$$D_1^{k+1} v = (v D_1 + h(D_1 - D_2)) D_1^k + k h D_1^k (D_1 - D_2)$$

$$D_1^{k+1} v = v D_1^{k+1} + (k+1) h D_1^k (D_1 - D_2)$$

elde edilir ki önermenin doğru olduğunu gösterir. Diğer şıkta benzer şekilde yapılacağından bu şıkkın ispatı verilmeyecektir.

O halde; M matrisinin elemanları arasındaki bağıntılar;

$$\begin{aligned} [x, \mu] &= 0 & [x, v] &= h(1 - e^{y-x}) \\ [y, \mu] &= 0 & [y, v] &= h(1 - e^{y-x}) \\ [x, y] &= 0 & [v, \mu]_+ &= 0 \\ \mu^2 &= 0 & v^2 &= 0 \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

şeklindedir. Bu bağıntıların nasıl oluştuğunu anlamak açısından bir örnek vermek gerekirse;

$[x, v] = h(1 - e^{y-x})$ bağıntısını ele alalım. $D_1 = e^x$ olduğundan $x = \ln D_1$ olacaktır. O halde;

$$xv = \ln D_1 v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k D_1^{n-k} v$$

şeklinde yazılabilir. D_1 ve v yukarıdaki lemmaya göre yer değiştirirse;

$$\begin{aligned} xv &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \{v D_1^{n-k} + (n-k) h (D_1 - D_2) D_1^{n-k-1}\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k v D_1^{n-k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (n-k) h (D_1 - D_2) D_1^{n-k-1} \\ &= v \ln D_1 + h (D_1 - D_2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} (n-k) (-1)^k D_1^{n-k-1} \end{aligned}$$

Denklemin sağ tarafındaki son seriye bakıldığında, $k=n$ için ifade sıfır olacağı kolayca görülebilir. O halde; bu seriyi $k=n-1$ ' e kadar olan terimlerinin toplamını alabiliriz.

$$xv = v \ln D_1 + h(D_1 - D_2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} (-1)^k D_1^{n-k-1}$$

$$xv = v \ln D_1 + h(D_1 - D_2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} (D_1 - 1)^{n-1}$$

Bu seri D_1^{-1} in $D_1=1$ 'de Taylor seri açılımı olduğu göz önünde bulundurulduğunda eşitlik;

$$xv = v \ln D_1 + h(D_1 - D_2) D_1^{-1}$$

$$xv = vx + h(1 - e^{y-x})$$

$$[x, v] = h(1 - e^{y-x})$$

elde edilir. Diğer bağıntılar da benzer şekilde elde edilebilir.

6.2 Üstel Matrisin Süper-Lie Cebiri Yapısı

Bu kısımda, 2.8 tanımından yararlanarak üstel matrisin bir süper-Lie cebiri olduğu birer örnek verilerek gösterilecektir. Bunun için; (6.1.2) bağıntıları kullanılacaktır.

(i) iki lineer tasvir:

$$\begin{aligned} [x, ay + bv] &= x(ay + bv) - (ay + bv)x = xay + xbv - ayx - bvx \\ &= axy - ayx + bxv - bvx = a(xy - yx) + b(xv - vx) = a[x, y] + b[x, v] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [ax + by, \mu] &= (ax + by)\mu - \mu(ax + by) = ax\mu + by\mu - \mu ax - \mu by \\ &= ax\mu - a\mu x + by\mu - b\mu y = a[x, \mu] + b[y, \mu] \end{aligned}$$

(ii) anti-simetri:

$$[y, v] = yv - vy = h(1 - e^{y-x}) = -h(e^{y-x} - 1) = -(vy - yv) = -[v, y]$$

(iii) Jacobi özdeşliği:

$$\begin{aligned} [x, [y, v]] + [y, [v, x]] + [v, [x, y]] &= [x, h(1 - e^{y-x})] + [y, h(e^{y-x} - 1)] + [v, 0] \\ &= xh(1 - e^{y-x}) - h(1 - e^{y-x})x + yh(e^{y-x} - 1) \\ &\quad - h(1 - e^{y-x})y + v0 - 0v \end{aligned}$$

x ve y çift elemanlar olduğundan h ile değişmelidir. Ayrıca x ve y elemanları (6.1.2) bağıntılarından kendi aralarında değişmeli oldukları bilinmektedir. Bu yüzden; e^{x-y} ifadesi seriye açıldığı takdirde;

$$\begin{aligned}
&= hx(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-y)^n}{n!}) - h(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-y)^n}{n!})x + hy(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-y)^n}{n!}) - h(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-y)^n}{n!})y \\
&= hx(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{n-k} y^k) - h(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{n-k} y^k)x \\
&\quad + hy(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{n-k} y^k) - h(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{n-k} y^k)y \\
&= h(1 - (1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{n-k} y^k)x - h(1 - (1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{n-k} y^k)x \\
&\quad + h(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{n-k} y^k)y - h(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{n-k} y^k)y \\
&= 0
\end{aligned}$$

çıkar. Bu takdirde; $\mathcal{GL}_h(1|1)$ bir süper Lie cebiridir.

6.3 Üstel Formun Hopf Cebir Yapısı

Bu kısımda Hopf cebiri yapısının üstel matrisinin matris elemanları üzerindeki etkileri gösterilecektir. Bilindiği gibi Hopf cebir yapısı ko-çarpım, ko-birim ve ko-ters operatörlerinden oluşmaktadır. Bu operatörlerin üstel matrisinin matris elemanları üzerindeki etkisini bulabilinmesi yardımcı olması için aşağıdaki lemma verilmiştir:

Lemma: Aşağıdaki önermeler doğudur.

$$(i) \quad \Delta(D_1^n) = \left(1 \otimes 1 + n\mu \otimes \nu + \frac{(n-1)^2 + n-1}{2} \mu \otimes h(1 - D_2 D_1^{-1}) \right) (D_1 \otimes D_1)^n$$

$$(ii) \quad \Delta(D_2^n) = (1 \otimes 1 + n\mu \otimes \nu + \mu \otimes h(1 - D_2 D_1^{-1})) (D_2 \otimes D_2)^n$$

$$(iii) \quad S(D_1^n) = D_1^{-n} + n D_1^{1-n} \mu D_2^{-1} \nu - \frac{(n-1)n}{2} h\mu D_2^{-1} (D_1 - D_2) D_1^{-n}$$

$$(iv) \quad S(D_2^n) = D_2^{-1} + n\mu D_2^{-(n+1)} D_1 \nu + \frac{(n-1)n}{2} h\mu D_2^{-n} D_1 (D_1^{-1} - D_2^{-1})$$

İspat: (iii) şikkını tümevarım yöntemi ile ispatlanacaktır. Diğerleri de aynı şekilde ispatlanacağından onların ispatları verilmeyecektir.

$n=1$ için $S(D_1) = D_1 + \mu D_2^{-1} \nu$ olup (5.2.7) bağıntılarını sağlar. Şimdi $n=k$ için

$$S(D_1^k) = D_1^{-1} + k D_1^{1-k} \mu D_2^{-1} \nu - \frac{(k-1)k}{2} h \mu D_2^{-1} (D_1 - D_2) D_1^{-k}$$

doğru olduğunu kabul edip $n=k+1$ için doğruluğu gösterelim:

$$S(D_1^{k+1}) = S(D_1^k D_1) = S(D_1) S(D_1^k)$$

$$= (D_1^{-1} + \mu D_2^{-1} \nu) \left(D_1^{-k} + k D_1^{1-k} \mu D_2^{-1} \nu - \frac{(k-1)k}{2} h \mu D_2^{-1} (D_1 - D_2) D_1^{-k} \right)$$

$$= D_1^{-1-k} + k D_1^{-k} \mu D_2^{-1} \nu - \frac{(k-1)k}{2} h D_1^{-1} \mu D_2^{-1} (D_1 - D_2) D_1^{-k} + \mu D_2^{-1} \nu D_1^{-k} + \mu D_2^{-1} \nu D_1^{1-k} \mu D_2^{-1} \nu - \frac{(k-1)k}{2} h \mu D_2^{-1} \nu \mu D_2^{-1} (D_1 - D_2) D_1^{-k}$$

Eşitliğindeki son iki ifade (5.1.3) bağıntılarındaki $\mu^2=0$ olduğundan yok olur. Eşitliğin üçüncü terimi için kısım 6.1' de verilen lemmadaki;

$$D_1^n \nu = \nu D_1^n + n h D_1^{n-1} (D_1 - D_2)$$

eşitliğin her iki tarafı D_1^{-n} ile sağdan ve soldan çarpılırsa;

$$\nu D_1^{-n} = D_1^{-n} \nu + n h D_1^{-n-1} (D_1 - D_2)$$

yazılabilir. Bu bağıntıyı, eşitliğin sağ tarafında dördüncü terimde kullanırsak;

$$\begin{aligned} &= D_1^{-(k+1)} + k D_1^{-k} \mu D_2^{-1} \nu - \frac{(k-1)k}{2} h D_1^{-1} \mu D_2^{-1} (D_1 - D_2) D_1^{-k} + \mu D_2^{-1} (D_1^{-k} \nu + k h D_1^{-k-1} (D_1 - D_2)) \\ &= D_1^{-(k+1)} + k D_1^{-k} \mu D_2^{-1} \nu - \frac{(k-1)k}{2} h \mu D_2^{-1} (D_1 - D_2) D_1^{-(k+1)} + \mu D_2^{-1} D_1^{-k} \nu - k h \mu D_2^{-1} D_1^{-k-1} (D_1 - D_2) \\ &= D_1^{-(k+1)} + (k+1) D_1^{-k} \mu D_2^{-1} \nu - \frac{(k-1)k + 2k}{2} h \mu D_2^{-1} (D_1 - D_2) D_1^{-(k+1)} \\ &= D_1^{-(k+1)} + (k+1) D_1^{-k} \mu D_2^{-1} \nu - \frac{(k+1)k}{2} h \mu D_2^{-1} (D_1 - D_2) D_1^{-(k+1)} \end{aligned}$$

elde ederiz ki bu da (iii) şikkının doğruluğunu gösterir.

Bu lemmanın sonucunda; Hopf cebir operatörlerinin üstel matrisinin matris elemanlarına etkisi aşağıda verilmiştir.

Ko-çarpım operatörü olan Δ operatörünün;

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= x \otimes 1 + 1 \otimes x + \mu \otimes \nu + \frac{1}{2} \mu \otimes h(1 - e^{y-x}) \\ \Delta(y) &= y \otimes 1 + 1 \otimes y + \mu \otimes \nu + \frac{1}{2} \mu \otimes h(1 - e^{y-x}) \\ \Delta(\mu) &= 1 \otimes \mu + \mu \otimes e^{y-x} \\ \Delta(\nu) &= \nu \otimes 1 + e^{y-x} \otimes \nu\end{aligned}\tag{6.3.1}$$

Ko-birim operatörü olan ε operatörünün;

$$\varepsilon(x) = 0, \quad \varepsilon(y) = 0, \quad \varepsilon(\mu) = 0, \quad \varepsilon(\nu) = 0\tag{6.3.2}$$

Ko-ters operatörü olan S operatörünün;

$$\begin{aligned}S(x) &= -x + e^{y-x} \mu \nu + \frac{1}{2} h \mu (e^{y-x} - 1) & S(y) &= -y + e^{y-x} \mu \nu + \frac{1}{2} h \mu (1 - e^{y-x}) \\ S(\mu) &= -\mu e^{x-y} & S(\nu) &= -e^{x-y} \nu\end{aligned}\tag{6.3.3}$$

şeklindedir ve bu operatörler (6.1.2) bağıntılarını korur. Bunu her bir operatör için birer örnek ile gösterelim:

$$\begin{aligned}\Delta(x\mu - \mu x) &= \Delta(x)\Delta(\mu) - \Delta(\mu)\Delta(x) \\ &= (x \otimes 1 + 1 \otimes x + \mu \otimes \nu + \frac{1}{2} \mu \otimes h(1 - e^{y-x}))(1 \otimes \mu + \mu \otimes e^{y-x}) \\ &\quad - (1 \otimes \mu + \mu \otimes e^{y-x})(x \otimes 1 + 1 \otimes x + \mu \otimes \nu + \frac{1}{2} \mu \otimes h(1 - e^{y-x})) \\ &= x \otimes \mu + 1 \otimes x\mu + \mu \otimes \nu\mu + \frac{1}{2} \mu \otimes h(1 - e^{y-x})\mu + x\mu \otimes e^{y-x} + \mu \otimes xe^{y-x} \\ &\quad - x \otimes \mu - 1 \otimes \mu x + \mu \otimes \mu\nu + \frac{1}{2} \mu \otimes \mu h(1 - e^{y-x}) - \mu x \otimes e^{y-x} - \mu \otimes e^{y-x}x = 0\end{aligned}$$

$$\varepsilon(xy - yx) = \varepsilon(x)\varepsilon(y) - \varepsilon(y)\varepsilon(x) = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$S(y\mu - \mu y) = S(\mu)S(y) - S(y)S(\mu)$$

$$\begin{aligned}&= (-\mu e^{x-y})(-y + e^{y-x} \mu \nu + \frac{1}{2} h \mu (1 - e^{y-x})) - (-y + e^{y-x} \mu \nu + \frac{1}{2} h \mu (1 - e^{y-x}))(-\mu e^{x-y}) \\ &= \mu e^{x-y}y - \mu e^{x-y}e^{y-x} \mu \nu + \frac{1}{2} h \mu e^{x-y} \mu (1 - e^{y-x}) - y \mu e^{x-y} + e^{y-x} \mu \nu \mu e^{x-y} + \frac{1}{2} h \mu (1 - e^{y-x}) \mu e^{x-y}\end{aligned}$$

$$= \mu e^{x-y} y - y \mu e^{x-y} = 0$$

Şimdi tanım 2.9da verilen (2.2) ve (2.3) bağıntılarının üstel matrisin matris elemanları tarafından korunduğunu birer örnek üzerinde gösterelim:

x elemanı için $(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$ eşitliği aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes \text{id})\Delta(x) &= (\Delta \otimes \text{id})(x \otimes 1 + 1 \otimes x + \mu \otimes v + \frac{1}{2} \mu \otimes h(1 - e^{v-x})) \\
&= \Delta(x) \otimes \text{id}(1) + \Delta(1) \otimes \Delta(x) + \Delta(\mu) \otimes \text{id}(v) + \Delta(\frac{1}{2} \mu) \otimes \text{id}(h(1 - e^{v-x})) \\
&= (x \otimes 1 + 1 \otimes x + \mu \otimes v + \frac{1}{2} \mu \otimes h(1 - e^{v-x})) \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x + (1 \otimes \mu + \mu \otimes e^{v-x}) \otimes v \\
&\quad + \frac{1}{2} (1 \otimes \mu + \mu \otimes e^{v-x}) \otimes h(1 - e^{v-x}) \\
&= x \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes x + \mu \otimes v \otimes 1 + \frac{1}{2} \mu \otimes h(1 - e^{v-x}) \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x + 1 \otimes \mu \otimes v + \mu \otimes e^{v-x} \otimes v \\
&\quad + \frac{1}{2} \mu \otimes h(1 - e^{v-x}) + \frac{1}{2} \mu \otimes e^{v-x} \otimes h(1 - e^{v-x}) \\
&= x \otimes (1 \otimes 1) + 1 \otimes (x \otimes 1 + 1 \otimes x + \mu \otimes v + \frac{1}{2} \mu \otimes h(1 - e^{v-x})) + \mu \otimes (v \otimes 1 + e^{v-x} \otimes v) \\
&\quad + \frac{1}{2} \mu \otimes (h(1 - e^{v-x}) \otimes 1 + e^{v-x} \otimes h(1 - e^{v-x})) \\
&= x \otimes (1 \otimes 1) + 1 \otimes (x \otimes 1 + 1 \otimes x + \mu \otimes v + \frac{1}{2} \mu \otimes h(1 - e^{v-x})) + \mu \otimes (v \otimes 1 + e^{v-x} \otimes v) \\
&\quad + \frac{1}{2} \mu \otimes [h(1 \otimes 1 - e^{v-x} \otimes e^{v-x})] \\
&= \text{id}(x) \otimes \Delta(1) + \text{id}(1) \otimes \Delta(x) + \text{id}(\mu) \otimes \Delta(v) + \text{id}(\frac{1}{2} \mu) \otimes \Delta(h(1 - e^{v-x})) \\
&= (\text{id} \otimes \Delta)(x \otimes 1 + 1 \otimes x + \mu \otimes v + \frac{1}{2} \mu \otimes h(1 - e^{v-x})) = (\text{id} \otimes \Delta)\Delta(x)
\end{aligned}$$

$m \circ (\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta = m \circ (\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta$ eşitliğinin y matris elemanı tarafından

$$\begin{aligned}
m \circ (\varepsilon \otimes \text{id})\Delta(y) &= m \circ (\varepsilon \otimes \text{id})(y \otimes 1 + 1 \otimes y + \mu \otimes v + \frac{1}{2} \mu \otimes h(1 - e^{v-x})) \\
&= m(\varepsilon(y) \otimes \text{id}(1) + \varepsilon(1) \otimes \text{id}(y) + \varepsilon(\mu) \otimes \text{id}(v) + \varepsilon(\frac{1}{2} \mu) \otimes \text{id}(h(1 - e^{v-x}))) \\
&= m(1 \otimes y) = y
\end{aligned}$$

Diğer taraftan;

$$m \circ (\text{id} \otimes \varepsilon)\Delta(y) = m \circ (\text{id} \otimes \varepsilon)(y \otimes 1 + 1 \otimes y + \mu \otimes v + \frac{1}{2} \mu \otimes h(1 - e^{v-x}))$$

$$\begin{aligned}
&= m(\text{id}(y) \otimes \varepsilon(1) + \text{id}(1) \otimes \varepsilon(y) + \text{id}(\mu) \otimes \varepsilon(v) + \text{id}(\frac{1}{2}\mu) \otimes \varepsilon(h(1-e^{y-x}))) \\
&= m(y \otimes 1) = y
\end{aligned}$$

şeklinde sağlanır.

$m \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = m \circ (\text{id} \otimes S) \circ \Delta$ eşitliği için μ alınırsa;

$$\begin{aligned}
m \circ (S \otimes \text{id}) \Delta(\mu) &= m \circ (S \otimes \text{id})(1 \otimes \mu + \mu \otimes e^{y-x}) \\
&= m(S(1) \otimes \text{id}(\mu) + S(\mu) \otimes \text{id}(e^{y-x})) \\
&= m(1 \otimes \mu + (-\mu e^{x-y}) \otimes e^{y-x}) = \mu - \mu e^{x-y} e^{y-x} = 0
\end{aligned}$$

Diğer yandan;

$$\begin{aligned}
m \circ (\text{id} \otimes S) \Delta(\mu) &= m \circ (\text{id} \otimes S)(1 \otimes \mu + \mu \otimes e^{y-x}) \\
&= m(\text{id}(1) \otimes S(\mu) + \text{id}(\mu) \otimes S(e^{y-x})) \\
&= m(1 \otimes (-\mu e^{x-y}) + \mu \otimes (e^x - e^{x-y} \mu v e^x)(e^{-y} + \mu e^{x-2y} v)) \\
&= m(-1 \otimes \mu e^{x-y} + \mu \otimes e^{x-y} - \mu \otimes e^{x-y} \mu v e^{x-y} + \mu \otimes \mu e^{2x-2y} v) \\
&= -\mu e^{x-y} + \mu e^{x-y} - \mu e^{x-y} \mu v e^{x-y} + \mu \mu e^{2x-2y} v = 0
\end{aligned}$$

olur.

6.4 R-Matris Yaklaşımı

Bu kısımda; önce süper matrislerin süper tensör çarpımı tanımlanacak daha sonra R-matris yaklaşımı ile (5.1.3) bağıntıları elde edilecektir.

Eğer $A=(A^i_j)$ ve $B=(B^j_i)$ iki süper matris ise, bunların süper tensör-matris çarpımı aşağıdaki gibidir:

$$(A \otimes B)^{ij}_{kl} = (-1)^{k(j+1)} A^i_k B^j_l \quad (6.4.1)$$

Burada $(-1)^{k(j+1)}$, B matrisinin tek elemanları için dikkate alınır.

$$T_1 = T \dot{\otimes} I \quad \text{ve} \quad T_2 = I \dot{\otimes} T$$

olsun. T_1 ve T_2 matrisin matris elemanları;

$$(T_1)^{ij}_{kl} = (-1)^{k(j+1)} T^i_k \delta^j_l \quad (T_2)^{ij}_{kl} = (-1)^{i(j+1)} T^j_l \delta^i_k$$

olarak tanımlanır. O halde; T_1 ve T_2 matrislerinin açık şekli;

$$T_1 = T \otimes I = \begin{pmatrix} a & 0 & \beta & 0 \\ 0 & a & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & d & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & d \end{pmatrix}$$

$$T_2 = I \otimes T = \begin{pmatrix} a & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & d \end{pmatrix}$$

olarak yazılabilir. Gauss ayrışımına göre yazılırsa;

$$T_1 = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & D_1\mu & 0 \\ 0 & D_1 & 0 & D_1\mu \\ \nu D_1 & 0 & D_2 + \nu D_1\mu & 0 \\ 0 & \nu D_1 & 0 & D_2 + \nu D_1\mu \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} D_1 & D_1\mu & 0 & 0 \\ \nu D_1 & D_2 + \nu D_1\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 & -D_1\mu \\ 0 & 0 & \nu D_1 & D_2 + \nu D_1\mu \end{pmatrix}$$

Dabrowski Parashar (1995), yaptığı çalışmada kullandığı R_h matrisinin açık hali aşağıdaki gibidir:

$$R_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -h & 1 & 0 & 0 \\ h & 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & -h & 1 \end{pmatrix}$$

Bu R_h matrisi T matrisinin Gauss ayrışımına göre oluşturulan yukarıdaki T_1 ve T_2 matrisleri ile Yang-Baxter denklemini sağlar.Yani;

$$R_h T_1 T_2 = T_2 T_1 R_h \quad (6.4.2)$$

denklemini sağlar. Bu denklem ile de (5.1.3) bağıntıları bulunabilir.

7. SONUÇLAR

Bu tezde; iki boyutlu $R(1|1)$ kuantum süper uzayına etki eden matrislerin oluşturduğu $GL_h(1|1)$ kuantum süper grubu üzerine bir çalışma, Gauss ayrışımı kullanılarak yapıldı. Bu ayrışımı oluşturan matrislerin matris elemanları arasındaki bağıntıları, Hopf cebir yapıları ile, ardından bu ayrışımından oluşan sağ ve sol matrislerin matris elemanları arasındaki komutasyon bağıntıları ve Hopf cebir yapıları elde edildi. Sonra, $GL_h(1|1)$ kuantum süper grubundaki bir matrisin üstel temsili elde edilirken Fronsda-Galindo yaklaşımı kullanıldı. Bu üstel matrisin matris elemanları arasındaki bağıntılar bulunup bu bağıntılarla oluşturulmuş cebirin bir süper-Lie cebiri ve süper Hopf cebiri olduğu gösterildi. Son olarak; Gauss ayrışımının elemanları arasındaki bağıntılarını veren R matrisi bulundu.

KAYNAKLAR

Abe E.,(1977), Hopf Algebras, Cambridge University Press, Cambridge.

Berezin, F.A., (1987), Introduction to Superalgebra, D. Reidel Pub. Comp., Dordrecht-Holland.

Drinfeld, V. G., (1986), “Quantum groups”, Proc. ICM, Berkeley, 798-820.

Fronsdal C. ve Galindo A., (1993), “The Dual of a Quantum Group”, Letters in Mathematical Physics 27:59-71.

Damaskinsky E.V., Kulish P.P., Lyakhovsky V.D., Sokolov M.A., (1995), “Gauss Decomposition For Quantum Groups and Duality”, q-alg/9511004.

Çelik S. (2002), “Differential Geometry Of Z_3 -Graded Quantum Superplane ”, J.Phys.A:Math.Gen. 35,4257-4268.

Aghomohammadi A., Khorrami M. Ve Shariati A. (1995), “ $\hbar$ -Deformation As A Contraction Of q-Deformation” J. Phys. A: Math. Gen. 28, L225

Dabrowski L., Parashar P., “ $\hbar$ -Deformation Of $GL(1|1)$ ” Letters In Mathematical Physics 10.1007/BF00398357