

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SÜPER DÜZLEMİN Z_3 -DERECELİ
h-DEFORMASYONU VE GEOMETRİK YAPISI**

Matematikçi Erhan ÇENE

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Sultan A. ÇELİK (YTÜ)

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ.....	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ	1
2. Z_3 – DERECELİ YAPILAR	3
2.1 Giriş.....	3
2.2 Z_3 – Dereceli q - Süper Düzlem Üzerindeki Fonksiyonlar Cebiri	4
2.3 Z_3 – Dereceli h - Süper Düzlem.....	4
3. Z_3 – DERECELİ h - SÜPER DÜZLEM ÜZERİNE DİFERANSİYEL HESAP	7
3.1 Z_3 – Dereceli q -Süper Düzlem Üzerine Diferansiyel Hesaba Bir Bakış.....	7
3.2 Diferansiyel Cebir	8
3.3 Koordinat Fonksiyonları ve Onların Birinci Mertebe Diferansiyelleri Arasındaki Bağlıntılar	10
3.4 Koordinat Fonksiyonları ve İkinci Mertebe Diferansiyelleri Arasındaki Bağlıntılar	18
3.5 Birinci ve İkinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağlıntılar.....	21
3.6 Z_3 – Dereceli h - Süper Düzlem ve Bazı Bağlıntılar.....	21
4. KISMİ TÜREVLERİN CEBİRİ	23
4.1 Koordinat Fonksiyonları ile Kısmi Türevler Arasındaki Bağlıntılar	23
4.2 Kısmi Türevler ile Birinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağlıntılar	23
4.3 Kısmi Türevler Arasındaki Bağlıntılar.....	24
5. CARTAN - MAURER FORMLARI	26
5.1 Cartan - Maurer Formları ile Koordinat Fonksiyonları Arasındaki Bağlıntılar	26
5.2 Cartan - Maurer Formları ile Birinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağlıntılar	27
5.3 Cartan - Maurer Formları ile İkinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağlıntılar	27
6. SONUÇLAR	29
KAYNAKLAR.....	30

ÖZGEÇMİŞ.....	31
---------------	----

SİMGE LİSTESİ

$R_h(1/1)$	İki boyutlu h süper uzay
$grad(f)$	f fonksiyonunun derecesi
$[,]$	Lie Parantezi
d	Dış Diferansiyel Operatörü
∂	Kısmi Türev Operatörü

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında danışmanlığımı yapan ve tez konumu veren sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Sultan A. ÇELİK'e ve tez konum hakkında beni yönlendiren, yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca tezin hazırlanması sırasında, sıkıntıya düştüğüm noktalarda beni aydınlatan, yardımcı olan, Arş. Gör. Dr. Ergün YAŞAR'a ayrıca minnetlerimi sunarım.

ÖZET

Bu çalışmada, Z_3 - dereceli kuantum h -süper düzlem, uygun singüler bir g matrisi vasıtasıyla ortaya konmuş ve $R_h(11)$ ile gösterilen bu yeni h - süper düzlem üzerine Z_3 - dereceli bir diferansiyel hesap kurulmuştur. Bu diferansiyel hesap, kuantum düzlem üzerindeki koordinat fonksiyonlarını, onların birinci ve ikinci mertebe diferansiyellerini, Cartan - Maurer formlarını ve kısmi türevlerini içermektedir.

Anahtar kelimeler: q - süper düzlem, Z_3 - dereceli diferansiyel hesap, Z_3 - dereceli cebir, h - deformasyon

ABSTRACT

In this work, Z_3 - graded quantum h - superplane is introduced with a help of a singular g matrix and denoted by $R_h\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Z_3 - graded calculus is constructed on this new h - superplane. This calculus includes, the coordinate functions on this space and also their first and second order differentials, Cartan - Maurer forms and partial derivatives.

Keywords: q - superplane, Z_3 - graded differential calculus, Z_3 - graded algebra, h - deformation

1. GİRİŞ

20. yüzyılın sonlarında, matematik ve matematiksel fizikte önem kazanan konulardan biri de kuantum grupları olmuştur. Drinfeld, çok da uzak olmayan bir geçmişte 1986'da kuantum gruplarını tanımlamıştır. Ardından kuantum grupları, kuantum süper gruplarına genelleştirilerek yeni bir matematik konusu ortaya çıkmıştır. 1987'de ise Faddeev vd. bu konuyu Lie grubu ve Lie cebiri üzerine uygulamışlardır.

Drinfeld, kuantum grubunu $SL(2)$ özel lineer grubunun Lie cebirinden hareketle bir $q=e^{-\tau}$ deformasyon parametresi tanımlamış ve $SL(2)$ 'deki bir matrisin, matris elemanlarını birer koordinat fonksiyonu olarak düşünerek, matris elemanları arasında sağlanan bağıntıları q -deformasyon parametresine bağlı olarak elde etmiştir. Bu durumda matris elemanları ancak q nun özel değer(ler)i için değişmeli olabilmektedir.

Drinfeld ve Faddeev'den sonra ise Woronowicz (1987) ve Manin (1988) bu konuya yeni yaklaşımlar getirmiştir. Manin, Drinfeld'den farklı olarak, kuantum matris grubunu, grubun elemanlarını uygun uzaya etki ettirerek elde etmiştir.

Klasik grupların bir başka deformasyonu da h -deformasyonu ya da bir diğer adıyla Jordanian deformasyonudur. Aghamohammadi vd. (1995), düzlemin q -deformasyonundan hareketle singüler bir g dönüşüm matrisi kullanarak, h -deformasyona geçiş yapmıştır. Bu dönüşümle birlikte $q \rightarrow 1$ iken, yalnızca h -deformasyon parametresine bağlı yeni bağıntılar elde edilmiştir.

Kuantum grupları, klasik gruplardan daha farklı özelliklere sahip gruplardır. Daha açık bir şekilde söylemek gerekirse, kuantum grubu; grup kavramının genelleştirilmiş hali ya da bir grubun deforme edilmiş durumudur. Bu deforme durum ancak deformasyon parametresinin özel değerleri için klasik duruma dönmektedir.

Kuantum grubu bu farklı yapısı sebebiyle büyük ilgi çekmektedir. İlgi çekici konulardan biri de bu değişmeli olmayan geometrik yapıda diferansiyel hesabın nasıl yapılacağıdır. Bunun için, son zamanlarda kuantum (süper) uzay üzerindeki diferansiyel hesap konusunda hem matematikçiler hem de matematiksel fizikçiler oldukça yoğun bir biçimde çalışmışlardır ve hala da çalışılmaya devam etmektedirler.

Değişmeli olmayan geometriye yön veren temel yapı, bir birleşmeli cebir üzerine bir diferansiyel hesap kurmaktır. Kuantum gruplarının değişmeli olmayan geometrisi ilk kez Woronowicz (1989) tarafından ortaya konmuştur. Woronowicz bu yaklaşımında, kuantum

grubunu, temel değişmeli olmayan uzay olarak ele almış ve grubun diferansiyel hesabını, grup özelliklerinden faydalanarak ortaya koymuştur.

Manin'in kuantum uzaylarına vurgu yaptığı çalışmasını takip eden Wess ve Zumino (1990) ise, farklı bir yaklaşım sunmuştur. Bu yaklaşıma göre, diferansiyel formlar değişmeli olmayan kuantum koordinatlara göre tanımlanmış ve bu uzaylara etki eden kuantum gruplarının diferansiyel ve cebirsel özellikleri, uzayın özellikleri kullanılarak elde edilmiştir. Bu çalışmanın süper uzaya genişletilmesi ise Soni (1991) ve Chung (1994) tarafından yapılmıştır.

Yakın zamana kadar Z_2 -dereceli yapıları, Z_3 -dereceli uzaylara genelleştirebilmek için bazı çalışmalarda bulunulmuştur.[Chung (1994), Çelik (2002a), Çelik (2002b)]. Chung (1994); Wess ve Zumino'nun metotlarını kullanarak, Z_2 -dereceli uzayı, Z_3 -dereceli uzaya genişletmiştir. Çelik (2002a), Z_3 -dereceli q -süper düzleme yeni bir bakış açısı getirmiş ve onun komütatif olmayan geometrisini inşa etmiştir. Yapılan hesaplamalar, kuantum süper düzlemi üzerindeki Hopf Cebiri yapısı kullanılarak, kovaryant yöntemiyle elde edilmiştir.

Bu çalışma, Z_3 -dereceli q -süper düzlem ve onun üzerine inşa edilen yapıları, bir büzölme tasviri vasıtasıyla, Z_3 -dereceli h -süper düzlem ve onun üzerine inşa edilecek yapıları ortaya koymayı amaçlamaktadır. Çalışmanın çıkış noktası, Çelik (2002a) tarafından yapılan "Differential Geometry of the Z_3 -graded quantum superplane" isimli makaledir. Bu makalede, $(1+1)$ boyutlu kuantum süper düzlemin Z_3 -dereceli yapısı elde edilmiştir. Biz bu makaleden yola çıkarak h -deformasyonda neler olacağını ortaya koyacağız.

Çalışmanın ikinci bölümünde, Z_3 -dereceli yapılar ile ilgili bilgilere yer verildi.

Üçüncü bölümde ise Z_3 -dereceli bir diferansiyel cebir oluşturmak için bir d dış diferansiyel operatörü tanımlandı. Bu dış diferansiyel operatörü, nilpotentlik ve Leibniz özelliklerinden faydalanılarak diferansiyel cebir oluşturuldu. Bu kısımda, cebiri oluşturan koordinat fonksiyonları ile bunların birinci ve ikinci mertebeden diferansiyelleri arasında sağlanan bağıntılar elde edildi.

Dördüncü bölümde, kısmi türevlerin cebiri oluşturuldu. Bu kısımda da kısmi türevler ile koordinat fonksiyonları arasında sağlanan bağıntılar elde edildi.

Beşinci bölümü ise Cartan-Maurer formlarına ayrıldı.

2. Z_3 -DERECELİ YAPILAR

2.1 Giriş

Burada Z_3 -dereceli cebirsel yapıya kısaca değinilecektir.

Eğer z , Z_3 -dereceli bir değişken ise, bu takdirde z nin,

$$z^3 = 0$$

bağıntısını sağladığı söylenir.

Eğer f , z değişkeninin keyfi bir fonksiyonu ise, f yi z ye göre derecesi 2 olan polinomal bir fonksiyon olarak

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$$

şeklinde yazılır.

Burada a_0 , a_1 ve a_2 ; sırasıyla dereceleri $\text{grad}(a_0) = 0$, $\text{grad}(a_2) = 1$ ve $\text{grad}(a_1) = 2$ olan sabit sayılardır.

Z_3 devirli grubu, kompleks düzlemde 1 sayısının küpkökleri kullanılarak temsil edilebilir:

Eğer, $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

alırsak,

$$j^3 = 1 \text{ ve } j^2 + j + 1 = 0 \text{ veya } (j+1)^2 = j$$

olduğu gösterilebilir.

Eğer A ve B , Z_3 -dereceli koordinat fonksiyonları ise, onların Z_3 -dereceli Lie Parantezi $[A, B]_{Z_3}$ ile gösterilir ve $\text{grad}(A) = a$ ve $\text{grad}(B) = b$ olmak üzere

$$[A, B]_{Z_3} = AB - j^{ab} BA$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $AB = j^{ab} BA$ ise, A ve B nin j -komütatif olduğu söylenir.

2.2 Z_3 -Dereceli q -Süper Düzlem Üzerindeki Fonksiyonlar Cebiri

Z_2 -dereceli q -süper düzlem ya da kuantum süper düzlem, çift koordinat x ve tek (Grassmann) koordinatı θ olan ve

$$x\theta = q\theta x, \quad \theta^2 = 0 \quad (2.1)$$

bağıntılarını sağlayan bir birleşmeli cebir olarak tanımlanır (Manin).

Burada q sıfırdan farklı kompleks deformasyon parametresidir. q -süper düzlemini genelleştirmenin yollarından birisi, uzayın tek jeneratörünün nilpotentlik derecesini arttırmaktır. Böylelikle, x ve θ ile oluşturulmuş ve

$$x\theta = q\theta x, \quad \theta^3 = 0 \quad (2.2)$$

bağıntılarını sağlayan, birimli, asosatif bir cebir tanımlanarak genelleştirme yapılabilir.

Burada x koordinatının Z_3 -derecelendirmesine göre derecesi 0 iken, θ koordinatının derecesi, Z_3 -derecelendirmesine göre 1 dir.

Kuantum süper düzlem, düzgün bir manifoldda $d^2 = 0$ şartını sağlayan bir d dış diferansiyel operatörü yardımıyla komütatif olmayan geometriyi tanımlar. Bu yüzden yukarıda sözü edilen süper düzlemin genelleştirilmesi, $d^3 = 0$ şartını sağlayacak bir d dış diferansiyel operatörünün varlığı sorusuna dönüşür. Cebirsel bir bakış açısıyla, diferansiyel hesabın temelini oluşturan yeterli bir cebirsel yapı, Z_3 -dereceli diferansiyel cebir kavramıdır.

2.3 Z_3 -Dereceli h -Süper Düzlem

Amacımız Aghamohammadi vd. (1995) tarafından kuantum düzlem için yapılaben bir singüler benzerlik transformasyonunu kullanarak, süper düzlemin h -deforme yapısını ortaya koymaktır. Ardından da ortaya koyduğumuz bu h -deforme yapının diferansiyel hesabını kuracağız.

O nedenle, (2.2) deki bağıntılar tekrardan ancak Z_3 -Dereceli kuantum süper düzleminin, x' ve θ' koordinat fonksiyonları ile,

$$x'\theta' = q\theta'x' \quad \theta'^3 = 0 \quad (2.3)$$

şeklinde yazalım. (h -deformasyonuna geçileceği için üslü harfler kullanılmıştır.).

Şimdi tersi mevcut olan bir g matrisini

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{h}{q-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

olarak alalım ve

$$\begin{pmatrix} x' \\ \theta' \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

diyelim. Bu takdirde yeni x ve θ koordinatları

$$x = x', \quad \theta = \theta' - \frac{h}{q-1} x' \quad (2.6)$$

şeklinde yazılır. Ortaya çıkan yeni x ve θ koordinatları arasındaki bağıntıları elde etmek için (2.3) deki bağıntıları kullanacağız. Eğer (2.6) daki ifadeleri, (2.3) deki ilk bağıntıda yerine yazarsak adım adım işlemlerle,

$$x(\theta + \frac{h}{q-1} x) - q(\theta + \frac{h}{q-1} x)x = 0$$

$$x\theta + \frac{h}{q-1} x^2 - q\theta x - q\frac{h}{q-1} x^2 = 0$$

$$x\theta - q\theta x + \frac{h}{q-1} (1-q)x^2 = 0$$

$$x\theta = q\theta x + hx^2 \quad (2.7)$$

elde edilir. Burada h parametresinin, x ile komutatif olduğu kabul edilmiştir. (2.6) da verilen ifadeleri, (2.3) deki ikinci bağıntıda kullanmak için önce

$$\theta h = qjh\theta \quad \text{ve} \quad h^3 = 0 \quad (2.8)$$

olduklarını kabul edelim. Bu durumda:

$$\begin{aligned}
\theta^3 = 0 &\Rightarrow \left(\theta + \frac{h}{q-1} x \right)^3 = 0 \Rightarrow \left(\theta + \frac{h}{q-1} x \right) \left(\theta + \frac{h}{q-1} x \right) \left(\theta + \frac{h}{q-1} x \right) = 0 \\
&\Rightarrow \left[\theta^2 + qj \frac{h}{q-1} \theta x + \frac{h}{q-1} x \theta + \left(\frac{h}{q-1} \right)^2 x^2 \right] \left(\theta + \frac{h}{q-1} x \right) = 0 \\
&\Rightarrow \theta^3 + q^2 j^2 \frac{h}{q-1} \theta \theta x + qj \frac{h}{q-1} \theta x \theta + q^2 j^2 \left(\frac{h}{q-1} \right)^2 \theta_{xx} + \frac{h}{q-1} x \theta \theta + qj \left(\frac{h}{q-1} \right)^2 x \theta x \\
&\quad + \left(\frac{h}{q-1} \right)^2 x x \theta + \left(\frac{h}{q-1} \right)^3 x x x = 0
\end{aligned}$$

olur.

Burada,

$$x\theta = q\theta x + hx^2$$

olduğunu hatırlayarak işlemlere devam edersek,

$$\begin{aligned}
&\theta^3 + \left[q^2 j^2 \frac{h}{q-1} + q^2 j \frac{h}{q-1} + q^2 \frac{h}{q-1} \right] \theta \theta x + \left[q^2 j^2 h \frac{h}{q-1} + q^2 j h \frac{h}{q-1} + q^2 h \frac{h}{q-1} \right] \theta_{xx} \\
&\quad + \left[q^2 j^2 \left(\frac{h}{q-1} \right)^2 + q^2 j \left(\frac{h}{q-1} \right)^2 + q^2 \left(\frac{h}{q-1} \right)^2 \right] \theta_{xx} = 0 \\
&\Rightarrow \theta^3 + q^2 \frac{h}{q-1} (j^2 + j + 1) \theta \theta x + q^2 h \frac{h}{q-1} (j^2 + j + 1) \theta_{xx} + q^2 \left(\frac{h}{q-1} \right)^2 (j^2 + j + 1) \theta_{xx} = 0 \\
&\Rightarrow \theta^3 = 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

elde edilir. $q \rightarrow 1$ limitinde Z_3 -dereceli h -süper düzlemi tanımlayan

$$x\theta = \theta x + hx^2, \quad \theta^3 = 0 \quad \text{ve} \quad h^3 = 0 \tag{2.10}$$

bağıntılarına ulaşılır.

3. Z_3 -DERECELİ h -SÜPER DÜZLEM ÜZERİNE DİFERANSİYEL HESAP

Bu bölümde, Z_3 -dereceli h -süper düzlemi üzerine değişmeli olmayan bir diferansiyel hesap kuracağız. Bu hesap, süper düzlemdeki fonksiyonları, bunların diferansiyellerini ve diferansiyel formlarını içerecektir. Ancak, bunu yapmadan önce Z_3 -dereceli q -süper düzlemdeki diferansiyel hesabın bilinmesinde fayda vardır.

3.1 Z_3 -Dereceli q -Süper Düzlem Üzerine Diferansiyel Hesaba Bir Bakış

Z_3 -dereceli q -süper düzlemin diferansiyel hesabını oluşturabilmek için öncelikle süper düzlemin koordinat fonksiyonlarına etki eden bir d lineer operatörü tanımlamalıyız.

Bu lineer d operatörünün, x' koordinat fonksiyonuna uygulanmasıyla Z_3 -derecesi 1 olan bir 1-form elde ederiz. Benzer şekilde d nin θ' koordinat fonksiyonuna uygulanmasıyla da Z_3 -derecesi 2 olan bir 1-form elde edilir. Bu elde ettiğimiz 1-formları sırasıyla, dx' ve $d\theta'$ şeklinde gösterirsek, bu kez d lineer operatörümüzü, dx' e etki ettirirsek (ya da x' e iki kez etki ettirirsek), bu kez Z_3 -derecesi 2 olan 1-form elde ederiz. Bu 1-formu da d^2x' şeklinde göstereceğiz. Yine d nin $d\theta'$ ya uygulanmasıyla da Z_3 -derecesi 0 olan 1-form elde edilir. Elbette $d^3 = 0$ olması da varsayımlarımız arasında bulunmaktadır.

İlk önce d dış diferansiyel operatörümüzün özelliklerini belirtelim. d dış diferansiyel operatörü, Z_3 -dereceli kuantum süper düzlemin jeneratörlerinden, bunların diferansiyellerine tanımlı bir operatördür:

$$d : a \rightarrow da, \quad a \in \{x', \theta'\}.$$

d dış diferansiyel operatörünün aşağıdaki iki özelliği sağladığını kabul ediyoruz:

Nilpotentlik özelliği

$$d^3 = 0$$

Z_3 -dereceli Leibniz Kuralı

$$d(fg) = (df)g + j^{grad(f)}f(dg).$$

Klasik diferansiyel hesapta fonksiyonlar, diferansiyelleriyle değişme özelliğine sahiptir. Ancak kuantum düzlemde, bu değişmenin varlığı belli kurallara göre olmaktadır.

Z_3 -dereceli kuantum süper düzlemde değişmeli olmayan bir diferansiyel hesap oluşturmanın ilk adımı, koordinat fonksiyonları ve diferansiyelleri arasındaki bağıntıları bulmaktır. Onların arasında sağlanması muhtemel bağıntılar

$$\begin{aligned} x'dx' &= Xdx'x', \\ x'd\theta' &= Ad\theta'x' + Bdx'\theta', \\ \theta'dx' &= Cdx'\theta' + Dd\theta'x', \\ \theta'd\theta' &= Yd\theta'\theta' \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklindedir.

Burada amaç, ortaya çıkan, A, B, C, D, X ve Y katsayılarını belirlemektir. Bu katsayılar, deformasyon parametreleri olan q ve j ye bağlı çıkabilecektir.

Bu noktadan sonra biz bu katsayıları bulmayacağız. Çünkü bizim amacımız bu işlemleri, q -süper düzlem için değil, Z_3 -dereceli h -süper düzlem için yaparak yeni denklemler elde etmektir. Ama bu katsayıların nasıl bulunduğu, Celik (2002a) tarafından yapılan “Differential Geometry of the Z_3 -graded quantum superplane” isimli makaleden bakılabilir.

3.2 Diferansiyel Cebir

Z_3 -dereceli h -süper düzlemi üzerine değişmeli olmayan bir diferansiyel hesap oluşturabilmek için, yine yukarıdaki gibi, Z_3 -dereceli h -süper düzlemin jeneratörlerinden, bunların diferansiyellerine bir d dış diferansiyel operatörü tanımlayacağız:

$$d : a \rightarrow da, \quad a \in \{x, \theta\}.$$

Yine d dış diferansiyel operatörünün aşağıdaki iki özelliği sağladığını kabul edeceğiz.

Nilpotentlik özelliği

$$d^3 = 0$$

Z_3 -dereceli Leibniz Kuralı

$$d(fg) = (df)g + j^{grad(f)} f(dg). \tag{3.2}$$

İşlemlere başlamadan önce bir de, d operatörünün, Z_3 -dereceli h -süper düzlemin jeneratörleri olan x ve θ ya nasıl etki ettiğinden bahsetmek gerekir:

d operatörü, x koordinat fonksiyonuna etki ettiğinde Z_3 -derecesi 1 olan bir 1-form elde edilirken, θ koordinat fonksiyonuna etki ettiğinde ise Z_3 -derecesi 2 olan bir 1-form elde

edilmektedir. Elde edilen bu 1-formları sırasıyla dx ve $d\theta$ ile gösterirsek, d nin dx e etki etmesiyle oluşan d^2x 1-formunun Z_3 -derecesi 2 iken, d nin $d\theta$ ya etki etmesiyle oluşan $d^2\theta$ 1-formunun Z_3 -derecesi ise 0 olmaktadır. Yine burada $d^3 = 0$ olduğunu hatırlamalıyız.

Diferansiyel hesabı oluşturma'nın ilk adımı, koordinat fonksiyonları ile diferansiyelleri arasında sağlanması muhtemel bağıntıları belirlemektir. Bunu yaparken, Z_3 -dereceli q -süper düzlemin koordinat fonksiyonları ile Z_3 -dereceli h -süper düzlemin koordinat fonksiyonları arasındaki ilişkiden faydalanacağız.

Hatırlanacağı üzere,

$$x = x' , \quad \theta = \theta' - \frac{h}{q-1} x'$$

ya da başka bir ifadeyle,

$$x' = x , \quad \theta' = \theta + \frac{h}{q-1} x \quad (3.3)$$

idi.

Buradan yola çıkarak eşitliklerin her iki tarafına d dış diferansiyel operatörünü uygularsak ve Z_3 -dereceli Leibniz Kuralı'nı kullanırsak,

$$\begin{aligned} dx' &= dx, \\ d\theta' &= d\theta + j \frac{h}{q-1} dx \end{aligned} \quad (3.4)$$

yazarız.

Bulunan yeni eşitliklere bir kez daha d yi etki ettirirsek,

$$\begin{aligned} d^2x' &= d^2x, \\ d^2\theta' &= d^2\theta + j^2 \frac{h}{q-1} d^2x \end{aligned} \quad (3.5)$$

olur. Burada

$$xh = hx \quad \text{ve} \quad \theta h = qjh\theta \quad (3.6)$$

kabullerinin yanında,

$$dh = jhd \quad (3.7)$$

olduğunu da kabul ediyoruz.

Eğer, d dış diferansiyel operatörünü, (3.6) ve (3.7) deki denklemlerin her iki yanına da uygularsak,

$$\begin{aligned} dxh &= jhd x, \\ d\theta h &= qj^2 h d\theta \end{aligned} \quad (3.8)$$

elde ederiz.

Bulunan yeni eşitliklere bir kez daha d yi uygularsak bu kez,

$$\begin{aligned} d^2 x h &= j^2 h d^2 x, \\ d^2 \theta h &= q h d^2 \theta \end{aligned} \quad (3.9)$$

olacaktır.

(3.6), (3.7), (3.8) ve (3.9) bağıntıları ileri bölümlerde, x , θ , dx , $d\theta$, $d^2 x$, $d^2 \theta$ ve d nin h ile komutasyonu gerektiğinde kullanılacaktır.

3.3 Koordinat Fonksiyonları ve Onların Birinci Mertebe Diferansiyelleri Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, (3.1) ile verilen bağıntılardan faydalanarak Z_3 -dereceli h -süper düzlemin koordinat fonksiyonları ile bunların diferansiyelleri arasında sağlanması muhtemel bağıntıları elde edeceğiz. Ancak karşımıza çıkacak ilk bağıntılar (q, j, h) -parametrelili olacak ve biz $q \rightarrow 1$ limitine geçerek h -süper düzlemin koordinat fonksiyonları ile bunların diferansiyelleri arasında sağlanması muhtemel bağıntılara ulaşacağız.

Bunun için (3.4) deki bağıntıları (3.1) deki bağıntılarda sırasıyla yerine yazarsak,

$x' dx' = X dx' x'$ bağıntısı $xdx = X dx x$ haline dönüşür.

$x' d\theta' = A d\theta' x' + B dx' \theta'$ bağıntısını kullanırsak, bağıntının sol tarafı,

$$\begin{aligned} x' d\theta' &= x \left(d\theta + j \frac{h}{q-1} dx \right) \\ &= x d\theta + j \frac{h}{q-1} x dx \\ &= x d\theta + X j \frac{h}{q-1} dx x \end{aligned}$$

ve sağ tarafı,

$$\begin{aligned}
Ad\theta'x' + Bdx'\theta' &= A\left(d\theta + j\frac{h}{q-1}dx\right)x + Bdx\left(\theta + \frac{h}{q-1}x\right) \\
&= Ad\theta x + Aj\frac{h}{q-1}dxx + Bdx\theta + Bj\frac{h}{q-1}dxx \\
&= Ad\theta x + Aj\frac{h}{q-1}dxx + Bdx\theta + Bj\frac{h}{q-1}dxx
\end{aligned}$$

olup,

$$xd\theta = Ad\theta x + Bdx\theta + \frac{h}{q-1}(Aj + Bj - Xj)dxx$$

bağıntısını elde ederiz.

Benzer şekilde,

$$\theta'dx' = Cdx'\theta' + Dd\theta'x' \text{ için sol taraf,}$$

$$\begin{aligned}
\theta'dx' &= \left(\theta + \frac{h}{q-1}x\right)dx \\
&= \theta dx + \frac{h}{q-1}xdx \\
&= \theta dx + X\frac{h}{q-1}dxx
\end{aligned}$$

ve sağ taraf

$$\begin{aligned}
Cdx'\theta' + Dd\theta'x' &= Cdx\left(\theta + \frac{h}{q-1}x\right) + D\left(d\theta + j\frac{h}{q-1}dx\right)x \\
&= Cdx\theta + Cj\frac{h}{q-1}dxx + Dd\theta x + Dj\frac{h}{q-1}dxx \\
&= Cdx\theta + Dd\theta x + Cj\frac{h}{q-1}dxx + Dj\frac{h}{q-1}dxx
\end{aligned}$$

olup,

$$\theta dx = Cdx\theta + Dd\theta x + \frac{h}{q-1}(Cj + Dj - X)dxx$$

bağıntısı elde edilir.

Aynı işlemler (3.1) deki son bağıntı için de uygulanırsa,

$$K_1 = Yj^2q - Dj^2q - A,$$

$$K_2 = Yj - Cj^2q - B,$$

$$K_3 = Yj^2 - Cq - Dq + Xj^2q - Aj - Bj$$

olmak üzere,

$$\theta d\theta = Yd\theta\theta + \frac{h}{q-1}K_1d\theta x + \frac{h}{q-1}K_2dx\theta + \left(\frac{h}{q-1}\right)^2 K_3dxx$$

elde edilir.

Şimdi, beklediğimiz, h - deforme düzlemin koordinatları ve onların diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntıları, ortaya çıkan sabitler bulunmamış olmakla birlikte,

$$xdx = Xdxx,$$

$$xd\theta = Ad\theta x + Bdx\theta + \frac{h}{q-1}(Aj + Bj - Xj)dxx,$$

$$\theta dx = Cdx\theta + Dd\theta x + \frac{h}{q-1}(Cj + Dj - X)dxx, \quad (3.10)$$

$$\theta d\theta = Yd\theta\theta + \frac{h}{q-1}K_1d\theta x + \frac{h}{q-1}K_2dx\theta + \left(\frac{h}{q-1}\right)^2 K_3dxx$$

şekline dönüşür.

Öyleyse amacımız, $A, B, C, D, X, Y, K_1, K_2$ ve K_3 katsayılarını belirlemektir.

Bunun için ilk olarak, (2.7) ve (2.8) ile verilen

$$x\theta = q\theta x + hx^2 \quad \text{ve} \quad \theta^3 = 0$$

bağıntılarını kullanacağız.

Birinci denkleme d operatörünü etki ettirirsek, sol taraf

$$d(x\theta) = dx\theta + xd\theta$$

ve sağ taraf

$$\begin{aligned} d(q\theta x + hx^2) &= qd(\theta x) + hjd(xx) \\ &= qd\theta x + qj\theta dx + hjdxx + hjxdx \end{aligned}$$

olup, iki taraf birbirine eşitlenerek ve (3.10) bağıntıları yardımıyla gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$xd\theta = (q + qjD)d\theta x + (qjC - 1)dx\theta + \left[qj \frac{h}{q-1}(Cj + Dj - X) + hj(X + 1) \right] dxx \quad (3.11)$$

bulunur. Ancak aynı zamanda (3.10) da görünen,

$$xd\theta = Ad\theta x + Bdx\theta + \frac{h}{q-1}(Aj + Bj - Xj)dxx$$

bağıntısına da sahip idik. Dolayısıyla, onların karşılaştırılması neticesinde

$$\begin{aligned} A &= q(1 + jD), \\ B &= qjC - 1 \end{aligned} \tag{3.12}$$

ve

$$qj \frac{h}{q-1}(Cj + Dj - X) - hj(X + 1) = \frac{h}{q-1}(Aj + Bj - Xj)$$

olmaları gerektiğini anlıyoruz.

Gerçekten de son bağıntı da tutarlıdır çünkü,

$$\begin{aligned} & qj \frac{h}{q-1}(Cj + Dj - X) + hj(X + 1) - \frac{h}{q-1}(Aj + Bj - Xj) \\ &= qj \frac{h}{q-1}(Cj + Dj - X) - \frac{h}{q-1}[(q + qjD)j + (qjC - 1)j - Xj] + hj(X + 1) \\ &= j \frac{h}{q-1}(Cqj + Dqj - Xq - q - Dqj - Cqj + 1 + X) + hj(X + 1) \\ &= j \frac{h}{q-1}(q-1)(-X-1) + hj(X + 1) \\ &= -hj(X + 1) + hj(X + 1) = 0 \end{aligned}$$

dır.

Şimdi ise d operatörünü, $\theta^3 = 0$ denklemine etki ettirelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d(\theta^3) &= 0 \Rightarrow d(\theta\theta\theta) = 0 \Rightarrow d\theta\theta\theta + j\theta d(\theta\theta) = 0 \\ &\Rightarrow d\theta\theta\theta + j\theta(d\theta\theta + j\theta d\theta) = 0 \\ &\Rightarrow d\theta\theta\theta + j\theta d\theta\theta + j^2\theta\theta d\theta = 0 \end{aligned}$$

olur. Ortaya çıkan bu üç ifadeyi aynı yapmak gerekir. Bu yüzden 1. terim için bir şey yapmayıp, 2. terimden başlarsak,

$$j\theta d\theta\theta = j\left(Yd\theta\theta + \frac{h}{q-1}K_1d\theta x + \frac{h}{q-1}K_2dx\theta + \left(\frac{h}{q-1}\right)^2 K_3dxx\right)\theta \Rightarrow$$

$$j\theta d\theta\theta = jYd\theta\theta\theta + j\frac{h}{q-1}K_1d\theta x\theta + j\frac{h}{q-1}K_2dx\theta\theta + j\left(\frac{h}{q-1}\right)^2 K_3dxx\theta$$

bulunur. 3. terim için aynı işlemi yaparsak,

$$j^2\theta\theta d\theta = j^2\theta\left(Yd\theta\theta + \frac{h}{q-1}K_1d\theta x + \frac{h}{q-1}K_2dx\theta + \left(\frac{h}{q-1}\right)^2 K_3dxx\right)$$

$$= Yj^2\theta d\theta\theta + j^2\frac{h}{q-1}K_1\theta d\theta x + j^2\frac{h}{q-1}K_2\theta dx\theta + \left(\frac{h}{q-1}\right)^2 j^2K_3\theta dxx$$

bulunur. Burada görüldüğü gibi her bir terim için bir incelemeye daha ihtiyaç vardır.

Yani,

$$d\theta\theta\theta + j\theta d\theta\theta + j^2\theta\theta d\theta = 0 \text{ denklemi,}$$

$$d\theta\theta\theta + j\theta d\theta\theta + Yj^2\theta d\theta\theta + j^2\frac{h}{q-1}K_1\theta d\theta x + j^2\frac{h}{q-1}K_2\theta dx\theta$$

$$+ \left(\frac{h}{q-1}\right)^2 j^2K_3\theta dxx = 0$$

haline dönüşmüştür. İlk 2 terimi zaten incelemiştik. O halde,

$$Yj^2\theta d\theta\theta = Yj^2\left(Yd\theta\theta + \frac{h}{q-1}K_1d\theta x + \frac{h}{q-1}K_2dx\theta + \left(\frac{h}{q-1}\right)^2 K_3dxx\right)\theta$$

$$= Y^2j^2d\theta\theta\theta + \frac{h}{q-1}Yj^2K_1d\theta x\theta + \frac{h}{q-1}Yj^2K_2dx\theta\theta + \left(\frac{h}{q-1}\right)^2 Yj^2K_3dxx\theta$$

ve

$$j^2\frac{h}{q-1}K_1\theta d\theta x = j^2\frac{h}{q-1}K_1\left(Yd\theta\theta + \frac{h}{q-1}K_1d\theta x + \frac{h}{q-1}K_2dx\theta + \left(\frac{h}{q-1}\right)^2 K_3dxx\right)x$$

$$= \frac{h}{q-1}j^2K_1Yd\theta\theta x + \left(\frac{h}{q-1}\right)^2 j^2(K_1)^2 d\theta xx + \left(\frac{h}{q-1}\right)^2 j^2K_1K_2dx\theta x$$

ve

$$\begin{aligned}
j^2 \frac{h}{q-1} K_2 \theta dx \theta &= j^2 \frac{h}{q-1} K_2 \left(C dx \theta + D d \theta x + \frac{h}{q-1} (Cj + Dj - X) dx x \right) \theta \\
&= \frac{h}{q-1} j^2 K_2 C dx \theta \theta + \frac{h}{q-1} j^2 K_2 D d \theta x \theta + \left(\frac{h}{q-1} \right)^2 j^2 K_2 (Cj + Dj - X) dx x \theta
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(\frac{h}{q-1} \right)^2 j^2 K_3 \theta dx x &= \left(\frac{h}{q-1} \right)^2 j^2 K_3 \left(C dx \theta + D d \theta x + \frac{h}{q-1} (Cj + Dj - X) dx x \right) x \\
&= \left(\frac{h}{q-1} \right)^2 j^2 K_3 C dx \theta x + \left(\frac{h}{q-1} \right)^2 j^2 K_3 D d \theta x x
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Bu durumda,

$$\begin{aligned}
d(\theta^3) &= 0 \\
\Rightarrow d\theta\theta\theta + jYd\theta\theta\theta + j\frac{h}{q-1}K_1d\theta x\theta + j\frac{h}{q-1}K_2dx\theta\theta + j\left(\frac{h}{q-1}\right)^2K_3dx x\theta \\
&+ Y^2j^2d\theta\theta\theta + \frac{h}{q-1}Yj^2K_1d\theta x\theta + \frac{h}{q-1}Yj^2K_2dx\theta\theta + \left(\frac{h}{q-1}\right)^2Yj^2K_3dx x\theta \\
&+ \frac{h}{q-1}j^2K_1Yd\theta\theta x + \left(\frac{h}{q-1}\right)^2j^2(K_1)^2d\theta x x + \left(\frac{h}{q-1}\right)^2j^2K_1K_2dx\theta x \\
&+ \frac{h}{q-1}j^2K_2Cdx\theta\theta + \frac{h}{q-1}j^2K_2Dd\theta x\theta + \left(\frac{h}{q-1}\right)^2j^2K_2(Cj + Dj - X)dx x\theta \\
&+ \left(\frac{h}{q-1}\right)^2j^2K_3Cdx\theta x + \left(\frac{h}{q-1}\right)^2j^2K_3Dd\theta x x = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan gerekli işlemler yapılırsa eşitlik,

$$\begin{aligned}
(1 + jY + j^2Y^2)d\theta\theta\theta + \frac{h}{q-1}(qjK_1 + qj^2YK_1 + j^2YK_1 + qj^2DK_2)d\theta\theta x \\
+ \left[\left(\frac{h^2q}{q-1} \right) (K_1 + jYK_1 + jK_2D) + \left(\frac{h}{q-1} \right)^2 (j^2(K_1)^2 + j^2K_3D) \right] d\theta x x \\
+ \frac{h}{q-1}(jK_2 + Yj^2K_2 + Cj^2K_2)dx\theta\theta \\
+ \left(\frac{h}{q-1} \right)^2 [qjK_3 + qYj^2K_3 + j^2K_1K_2 + qj^2K_2(Cj + Dj - X) + j^2K_3C] dx\theta x = 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

haline gelir.

Bu denklemin sağ tarafının 0 olabilmesi ancak sol taraftaki her bir terimin katsayısının sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Buradan hareketle, öncelikle

$1 + jY + j^2Y^2 = 0$ olması gerekmektedir. Bu ise,

$(Y - 1)(j^2Y - 1) = 0$ şeklinde yazılabilir ki, buradan

$Y = 1$ veya $Y = j$ elde edilir. Ancak $Y = 1$ olması, bizi herhangi bir neticeye götürmemektedir. Dolayısıyla, $Y = j$ alacağız.

Bu durumda,

$$A = q + qjD,$$

$$B = qjC - 1,$$

$$K_1 = Yj^2q - Dj^2q - A = q - Dj^2q - q - qjD = -qj^2D - qjD,$$

$$K_2 = Yj - Cj^2q - B = j^2 - Cj^2q - qjC + 1 = -qj^2C - qjC - j,$$

$$K_3 = Yj^2 - Cq - Dq + Xj^2q - Aj - Bj = 1 - qC - qD + Xqj^2 - qj - qj^2D - qj^2C + j.$$

olur. (3.13) deki dördüncü katsayı ise,

$$\begin{aligned} 0 &= jK_2 + Yj^2K_2 + Cj^2K_2 = (j + Yj^2 + Cj^2)K_2 \\ &= (j + 1 + Cj^2)(-qj^2C - qjC - j) \end{aligned}$$

şekline gelir ki, gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$(qj^2C - 1)(C - 1) = 0$$

$$C = jq^{-1} \text{ veya } C = 1$$

bulunur. Yine $C = 1$ hali, herhangi yeni bir şey vermez. O nedenle,

$C = jq^{-1}$ alalım. Bu takdirde katsayılar,

$$Y = j,$$

$$A = q + qjD,$$

$$B = j^2 - 1,$$

$$K_1 = -qj^2D - qjD,$$

$$K_2 = -qj^2(jq^{-1}) - qj(jq^{-1}) - j = -1 - j^2 - j = 0,$$

$$\begin{aligned} K_3 &= 1 - q(jq^{-1}) - qD + Xqj^2 - qj - qj^2D - qj^2(jq^{-1}) + j \\ &= 1 - j - qD + Xqj^2 - qj - qj^2D - 1 + j = -qD - qj^2D + qj^2X - qj. \end{aligned}$$

haline gelir. (3.13) deki ikinci katsayıya bakılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= qjK_1 + qj^2YK_1 + j^2YK_1 + qj^2DK_2 \\ &= (qj + qj^2j + j^2j)(-qj^2D - qjD) + qj^2D \cdot 0 \\ &= (qj + q + 1)(-qj^2D - qjD) \end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemelerle,

$$q(-qj^2 + 1)D = 0$$

dolayısıyla,

$$D = 0$$

elde edilir.

Böylelikle yeni katsayılar,

$$Y = j,$$

$$A = q,$$

$$B = j^2 - 1,$$

$$C = jq^{-1}$$

$$D = 0$$

$$K_1 = 0,$$

$$K_2 = 0,$$

$$K_3 = qj^2X - qj.$$

olur . Bu kez beşinci katsayı göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned} 0 &= qjK_3 + qYj^2K_3 + j^2K_1K_2 + qj^2K_2(Cj + Dj - X) + j^2K_3C \\ &= (qj + q + q^{-1})(qj^2X - qj) + j^2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \\ &= (qj + q + q^{-1})qj(jX - 1) \end{aligned}$$

olur. Yani,

$$X = j^2$$

olarak bulunur. Sonuç olarak tüm katsayılar,

$$\begin{aligned} X &= j^2 \\ Y &= j, \\ A &= q, \\ B &= j^2 - 1, \\ C &= jq^{-1} \\ D &= 0 \\ K_1 &= 0, \\ K_2 &= 0, \\ K_3 &= qj^2(j^2) - qj = qj - qj = 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

şeklindedir. Kontrol edilmeyen üçüncü katsayının da sıfır olduğu açıktır,

Şimdi, koordinat fonksiyonları ve onların diferansiyelleri arasında sağlanan (q, j, h) -deforme bağıntılar

$$\begin{aligned} xdx &= j^2 dx, \\ x d\theta &= q d\theta + (j^2 - 1) dx + h dx, \\ \theta dx &= jq^{-1} dx - q^{-1} h j^2 dx, \\ \theta d\theta &= j d\theta \end{aligned} \tag{3.15}$$

şeklindedir. Daha sonra $q \rightarrow 1$ limitine geçerek bu bağıntıları tekrar yazacağız.

3.4 Koordinat Fonksiyonları ve İkinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda ise, koordinat fonksiyonlarıyla, bunların ikinci dereceden diferansiyelleri arasında sağlanması muhtemel komutasyon bağıntılarını bulmak istiyoruz.

Ancak bunun için önce, dx ve $d\theta$ arasında sağlanan bağıntıyı bulmalıyız. Z_3 -dereceli q -süper düzlemde bu bağıntının

$$dx' d\theta' = F d\theta' dx'$$

şeklinde olduğunu biliyoruz.

Burada (3.4) ü kullanarak, sol taraf

$$\begin{aligned} dx' d\theta' &= dx \left(d\theta + j \frac{h}{q-1} dx \right) \\ &= dx d\theta + j^2 \frac{h}{q-1} (dx)^2 \end{aligned}$$

ve sağ taraf

$$\begin{aligned} F d\theta' dx' &= F \left(d\theta + j \frac{h}{q-1} dx \right) dx \\ &= F d\theta dx + F j \frac{h}{q-1} (dx)^2 \end{aligned}$$

olur. İki tarafın eşitliği ile

$$dx d\theta = F d\theta dx + \frac{h}{q-1} (Fj - j^2) (dx)^2$$

elde ederiz.

Artık koordinat fonksiyonları ile bunların ikinci dereceden diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntılarını bulmaya hazırız. (3.15) deki ilk bağıntının her iki tarafına d operatörünü uygularsak, sol taraf

$$d(xdx) = (dx)^2 + xd^2x$$

ve sağ taraf

$$j^2 d(dx) = j^2 d^2xx + j^2 j (dx)^2$$

olup, iki tarafın eşitliğinden

$$xd^2x = j^2 d^2xx$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.15) deki ikinci bağıntıya d operatörünü uygularsak, sol taraf

$$d(xd\theta) = dx d\theta + xd^2\theta$$

ve sağ taraf

$$\begin{aligned} d(qd\theta x + (j^2 - 1)dx\theta + hjdxx) &= qd(d\theta x) + (j^2 - 1)d(dx\theta) + jd(hxx) \\ &= qd^2\theta x + qj^2 d\theta dx + (j^2 - 1)d^2x\theta + (1 - j)dx d\theta + j^2 h d^2xx + h(dx)^2 \end{aligned}$$

olup, iki taraf eşitlenerek gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$xd^2\theta = qd^2\theta x + (j^2 - 1)d^2x\theta + j^2hd^2xx \\ + (-Fj + qj^2)d\theta dx + \left[\frac{h}{q-1}(1 - Fj^2) + h \right] (dx)^2$$

olarak bulunur. Burada koordinat fonksiyonları ile ikinci mertebe diferansiyeller arasındaki bağıntılar, birinci mertebe diferansiyelleri de içermektedir ve dolayısıyla homojenlik yoktur.

Bu bağıntının homojen olması için $d\theta dx$ ve $(dx)^2$ li terimlerin katsayıları sıfır olmalıdır. Bu ise, bize,

$$F = qj \text{ yi verir. Bu değerin aynı zamanda } (dx)^2 \text{ nin katsayısını da sıfır yaptığı açıktır.}$$

Böylelikle,

$$dx d\theta = qj d\theta dx + hj^2 (dx)^2$$

ve

$$xd^2\theta = qd^2\theta x + (j^2 - 1)d^2x\theta + j^2hd^2xx$$

olur. (3.15) deki son iki bağıntı için de benzer işlemler yapılırsa,

$$\theta d^2x = q^{-1}d^2x\theta - q^{-1}j^2hd^2xx$$

ve

$$\theta d^2\theta = d^2\theta\theta$$

olur.

Sonuç olarak koordinat fonksiyonları ile bunların ikinci dereceden diferansiyelleri arasındaki (q, j, h) - komutasyon bağıntıları

$$xd^2x = j^2d^2xx, \\ xd^2\theta = qd^2\theta x + (j^2 - 1)d^2x\theta + j^2hd^2xx, \\ \theta d^2x = q^{-1}d^2x\theta - q^{-1}j^2hd^2xx, \\ \theta d^2\theta = d^2\theta\theta \quad (3.16)$$

ve birinci mertebeden diferansiyeller arasındaki bağıntı

$$dx d\theta = qjd\theta dx + hj^2(dx)^2 \quad (3.17)$$

şeklindedir.

3.5 Birinci ve İkinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağlıntılar

Bu kısımda ise (3.16) da bulduğumuz bağıntılardan faydalanarak, koordinat fonksiyonlarının birinci dereceden diferansiyelleri ile, ikinci dereceden diferansiyelleri aralarındaki bağıntıları bulacağız. Bunun için yine d dış diferansiyel operatörünü, (3.16) daki bağıntılara uygulayacağız. Örneğin birinci denklem için, sol taraf

$$d(xd^2x) = dx d^2x$$

ve sağ taraf

$$j^2 d(d^2xx) = jd^2xdx$$

olup, iki tarafın eşitliğinden

$$dx d^2x = jd^2xdx$$

bulunur. Benzer şekilde diğer bağıntılar da elde edilirse,

$$\begin{aligned} dx d^2x &= jd^2xdx, \\ dx d^2\theta &= qd^2\theta dx + (j - j^2)d^2xd\theta + j^2hd^2xdx, \\ d\theta d^2x &= q^{-1}j^2d^2xd\theta - q^{-1}j^2hd^2xdx, \\ d\theta d^2\theta &= d^2\theta d\theta. \end{aligned} \quad (3.18)$$

olur.

(3.16) daki bağıntılardan ikincisi ya da üçüncüsüne d operatörünün uygulanmasıyla

$$d^2xd^2\theta = qj^2d^2\theta d^2x + jhd^2xd^2x \quad (3.19)$$

bulunur.

3.6 Z_3 -Dereceli h - Süper Düzlem ve Bazı Bağlıntılar

Bu kısımda, daha önce sözünü ettiğimiz gibi, bulduğumuz komutasyon bağıntılarında $q \rightarrow 1$ limitine giderek, Z_3 -dereceli h - süper düzlemdeki komutasyon bağıntılarına ulaşacağız.

(2.10) da Z_3 -dereceli h - süper düzlemdeki koordinat fonksiyonları arasındaki bağıntıların, $q \rightarrow 1$ limitinde,

$$x\theta = \theta x + hx^2, \quad \theta^3 = 0 \quad \text{ve} \quad h^3 = 0$$

olduğunu söylemiştik.

Benzer şekilde, (3.15), (3.16), (3.17), (3.18) ve (3.19) bağıntılarında $q \rightarrow 1$ limitine gidersek,

Koordinat fonksiyonları ile onların birinci mertebeden diferansiyelleri arasındaki bağıntılar:

$$\begin{aligned} xdx &= j^2 dx, \\ x d\theta &= d\theta x + (j^2 - 1) dx\theta + h j dx, \\ \theta dx &= j dx\theta - h j^2 dx, \\ \theta d\theta &= j d\theta\theta \end{aligned}$$

Koordinat fonksiyonları ile onların ikinci mertebeden diferansiyelleri arasındaki bağıntılar:

$$\begin{aligned} x d^2 x &= j^2 d^2 x, \\ x d^2 \theta &= d^2 \theta x + (j^2 - 1) d^2 x\theta + j^2 h d^2 x, \\ \theta d^2 x &= d^2 x\theta - j^2 h d^2 x, \\ \theta d^2 \theta &= d^2 \theta\theta \end{aligned}$$

Birinci mertebeden diferansiyeller arasındaki bağıntı:

$$dx d\theta = j d\theta dx + h j^2 (dx)^2$$

Birinci mertebeden diferansiyeller ile ikinci mertebeden diferansiyeller arasındaki bağıntılar:

$$\begin{aligned} dx d^2 x &= j d^2 x dx, \\ dx d^2 \theta &= d^2 \theta dx + (j - j^2) d^2 x d\theta + j^2 h d^2 x dx, \\ d\theta d^2 x &= j^2 d^2 x d\theta - j^2 h d^2 x dx, \\ d\theta d^2 \theta &= d^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

İkinci mertebeden diferansiyeller arasındaki bağıntı:

$$d^2 x d^2 \theta = j^2 d^2 \theta d^2 x + j h d^2 x d^2 x$$

olur.

4. KISMİ TÜREVLERİN CEBİRİ

Bu bölümde Z_3 -dereceli h -süper düzlemin koordinat fonksiyonları, birinci mertebeden diferansiyelleri ile bunların kısmi türevleri arasındaki bağıntıları bulacağız.

Eğer f , x ve θ nin türevlenebilen bir fonksiyonu ise, f nin birinci mertebeden diferansiyeli,

$$df = (dx\partial_x + d\theta\partial_\theta) f \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1 Koordinat Fonksiyonları ile Kısmi Türevler Arasındaki Bağıntılar

Burada, koordinatlarla kısmi türevler arasındaki komutasyon bağıntılarını elde edeceğiz. Bunu (4.1) deki denklemin her iki tarafında f yerine xf yazarak kolayca buluruz. Gerçekten, sol taraf

$$\begin{aligned} d(xf) &= dxf + xdf = dxf + x(dx\partial_x + d\theta\partial_\theta) f \\ &= \left[dx \left(1 + j^2 x \partial_x + (j^2 - 1) \theta \partial_\theta + hx \partial_\theta \right) d\theta \partial_\theta x \right] f \end{aligned}$$

ve sağ taraf

$$d(xf) = (dx\partial_x x + d\theta\partial_\theta x) f$$

olduğundan, iki tarafın eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \partial_x x &= 1 + j^2 x \partial_x + (j^2 - 1) \theta \partial_\theta + hx \partial_\theta, \\ \partial_\theta x &= qx \partial_\theta \end{aligned} \quad (4.2a)$$

bulunur. Benzer şekilde, (4.1) de bu kez f yerine θf yazılarak

$$\begin{aligned} \partial_x \theta &= j^2 q^{-1} (\theta - hx) \partial_x, \\ \partial_\theta \theta &= 1 + j^2 \theta \partial_\theta \end{aligned} \quad (4.2b)$$

elde edilir.

4.2 Kısmi Türevler ile Birinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda ise kısmi türevler ile birinci mertebe diferansiyeller arasındaki komutasyon bağıntılarını elde edeceğiz.

Öncelikle bu bağıntıların,

$$\begin{aligned}
\partial_x dx &= A_1 dx \partial_x + A_2 d\theta \partial_\theta + A_3 dx \partial_\theta + A_4 d\theta \partial_x, \\
\partial_x d\theta &= A_5 d\theta \partial_x + A_6 dx \partial_\theta + A_7 dx \partial_x + A_8 d\theta \partial_\theta, \\
\partial_\theta dx &= A_9 dx \partial_\theta + A_{10} d\theta \partial_x + A_{11} dx \partial_x + A_{12} d\theta \partial_\theta, \\
\partial_\theta d\theta &= A_{13} dx \partial_x + A_{14} d\theta \partial_\theta + A_{15} dx \partial_\theta + A_{16} d\theta \partial_x
\end{aligned} \tag{4.3}$$

şeklinde olduğunu kabul edelim.

Kısmi türev operatörünün tanımını gereğince,

$$\partial_i (x^j dx^k) = \delta_j^i \delta_l^k dx^k \quad ; \quad (x^1 = x, x^2 = \theta) \tag{4.4}$$

olduğunu biliyoruz.

Kısmi türevi (3.15) deki bağıntılara uygularsak, örneğin birinci bağıntı için,

$$\partial_x (x dx - j^2 dx x) = 0 \text{ olmalıdır. (4.4) kullanılırsa,}$$

$dx - j^2 \partial_x \cdot dx \cdot x = 0$ olur. Şimdi, (4.3) den uygun olan bağıntı yerine yazılırsa,

$$dx - j^2 [A_1 dx \partial_x + A_2 d\theta \partial_\theta + A_3 dx \partial_\theta + A_4 d\theta \partial_x] x = 0$$

$$dx - j^2 A_1 dx - j^2 A_4 d\theta = 0$$

$$(1 - j^2 A_1) dx - j^2 A_4 d\theta = 0$$

olduğundan, $A_1 = j$ ve $A_4 = 0$ bulunur.

Hem ∂_x hem de ∂_θ , (3.15) deki tüm bağıntılara uygulandığında bütün A_i katsayıları elde edilir ve (4.3) deki komutasyon bağıntıları

$$\begin{aligned}
\partial_x dx &= j dx \partial_x - j^2 h dx \partial_\theta, \\
\partial_x d\theta &= q^{-1} d\theta \partial_x + q^{-1} j h dx \partial_x, \\
\partial_\theta dx &= q j^2 dx \partial_\theta, \\
\partial_\theta d\theta &= (j^2 - j) dx \partial_x + j^2 d\theta \partial_\theta
\end{aligned} \tag{4.5}$$

haline dönüşür.

4.3 Kısmi Türevler Arasındaki Bağıntılar

Z_3 -dereceli uzayda $d^3 = 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}
d^2 f &= [(dx \partial_x + d\theta \partial_\theta)(dx \partial_x + d\theta \partial_\theta)] f \\
&= [dx \partial_x dx \partial_x + dx \partial_x d\theta \partial_\theta + d\theta \partial_\theta dx \partial_x + d\theta \partial_\theta d\theta \partial_\theta] f
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
0 &= d^3 f = \left[(dx\partial_x + d\theta\partial_\theta)(dx\partial_x + d\theta\partial_\theta)(dx\partial_x + d\theta\partial_\theta) \right] f \\
&= \left[(dx\partial_x dx\partial_x + dx\partial_x d\theta\partial_\theta + d\theta\partial_\theta dx\partial_x + d\theta\partial_\theta d\theta\partial_\theta)(dx\partial_x + d\theta\partial_\theta) \right] f \\
&= \left[dx\partial_x dx\partial_x dx\partial_x + dx\partial_x dx\partial_x d\theta\partial_\theta + dx\partial_x d\theta\partial_\theta dx\partial_x + dx\partial_x d\theta\partial_\theta d\theta\partial_\theta \right. \\
&\quad \left. + d\theta\partial_\theta dx\partial_x dx\partial_x + d\theta\partial_\theta dx\partial_x d\theta\partial_\theta + d\theta\partial_\theta d\theta\partial_\theta dx\partial_x + d\theta\partial_\theta d\theta\partial_\theta d\theta\partial_\theta \right] f
\end{aligned} \tag{4.6}$$

olduğundan, (4.6) da, (4.5) ve (3.8) bağıntıları uygulanırsa ve katsayıların sıfıra eşitliği göz önüne alınırsa,

$$(dx)^3 = 0 \text{ varsayımı altında,}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x \partial_\theta &= jq \partial_\theta \partial_x, \\
\partial_\theta^3 &= 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

komutasyon bağıntıları elde edilir.

Bir önceki bölümde yaptığımız gibi, burada da (4.2a), (4.2b), (4.5) ve (4.7) bağıntılarında $q \rightarrow 1$ limitine gidersek,

Kısmi türevlerle koordinat fonksiyonları arasındaki bağıntılar,

$$\begin{aligned}
\partial_x x &= 1 + j^2 x \partial_x + (j^2 - 1) \theta \partial_\theta + hx \partial_\theta, \\
\partial_\theta x &= x \partial_\theta, \\
\partial_x \theta &= j^2 (\theta - hx) \partial_x, \\
\partial_\theta \theta &= 1 + j^2 \theta \partial_\theta
\end{aligned}$$

Kısmi türevlerle koordinat fonksiyonlarının birinci mertebeden diferansiyelleri arasındaki bağıntılar,

$$\begin{aligned}
\partial_x dx &= j dx \partial_x - j^2 h dx \partial_\theta, \\
\partial_x d\theta &= d\theta \partial_x + j h dx \partial_x, \\
\partial_\theta dx &= j^2 dx \partial_\theta, \\
\partial_\theta d\theta &= (j^2 - j) dx \partial_x + j^2 d\theta \partial_\theta
\end{aligned}$$

Kısmi türevlerin kendi arasındaki bağıntılar,

$$\begin{aligned}
\partial_x \partial_\theta &= j \partial_\theta \partial_x, \\
\partial_\theta^3 &= 0
\end{aligned}$$

olur.

5. CARTAN-MAURER FORMLARI

Bu bölümde Cartan-Maurer formlarını tanımlayıp gerekli komutasyon bağıntılarını elde edeceğiz. Z_3 -dereceli q -deformasyonda, bir $\mathcal{A}$ cebirinin jeneratörlerinden yararlanılarak,

$$w' = dx'(x')^{-1} \text{ ve}$$

$$u' = d\theta'(x')^{-1} - dx'(x')^{-1} \theta'(x')^{-1}$$

şeklinde iki formlar tanımlanmıştı (Çelik 2002a).

Z_3 -dereceli h - süper düzlemde, u ve w nun, h ile

$$\begin{aligned} uh &= qj^2 hu, \\ wh &= jhw \end{aligned} \tag{5.1}$$

komutasyon bağıntılarını sağladığı varsayımı altında,

(3.3) ve (3.4) den yararlanılarak,

$$w' = dxx^{-1} = w \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} u' &= \left(d\theta + j \frac{h}{q-1} dx \right) x^{-1} - dxx^{-1} \left(\theta + \frac{h}{q-1} x \right) x^{-1} \\ &= d\theta x^{-1} - dxx^{-1} \theta x^{-1} = u \end{aligned}$$

elde edilir.

Z_3 -dereceli h -deformasyonda Cartan – Maurer formları,

$$\begin{aligned} w &= dxx^{-1} \\ u &= d\theta x^{-1} - dxx^{-1} \theta x^{-1} \end{aligned} \tag{5.2}$$

olur.

5.1 Cartan – Maurer Formları ile Koordinat Fonksiyonu Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, x ve θ koordinat fonksiyonları ile Cartan-Maurer formları arasındaki bağıntıları elde edeceğiz.

Bunun için, (5.2) bağıntısından faydalanırsak,

$$xw = xdxx^{-1}$$

Yukarıdaki denkleme, (3.15) deki bağıntılardan uygun olanını kullanırsak,

$$xw = j^2 wx$$

bulunur. Diğer komutasyonlar için de, (3.15) deki bağıntılardan faydalanılır ve uygun dönüşümler yapılırsa tüm komutasyonlar,

$$\begin{aligned} xw &= j^2 wx \\ xu &= qux \\ \theta w &= jw\theta \\ \theta u &= qju\theta + qhux \end{aligned} \quad (5.3)$$

olur.

5.2 Cartan – Maurer Formları ile Birinci Mertebe Diferansiyelleri Arasındaki Bağıntılar

Cartan – Maurer formları ile birinci mertebe diferansiyeller arasındaki bağıntıları bulmak için, (5.1), (5.2), (3.15) ve (3.16) bağıntıları kullanılarak ve gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$\begin{aligned} wdx &= jdxw, \\ udx &= q^{-1}dxu, \\ wd\theta &= jd\theta w + (1-j)jw\theta w, \\ ud\theta &= q^{-1}d\theta u - q^{-1}hdxu + q^{-1}(j^2 - 1)w\theta u \end{aligned} \quad (5.4)$$

komutasyon bağıntıları elde edilir.

5.3 Cartan – Maurer Formları ile İkinci Mertebe Diferansiyelleri Arasındaki Bağıntılar

Cartan – Maurer formları ile ikinci mertebe diferansiyeller arasındaki bağıntıları bulmak için, (5.1), (5.2), (3.15), (3.16) ve (3.17) bağıntılarından faydalanırsak,

$$\begin{aligned} wd^2x &= j^2d^2xw, \\ ud^2x &= q^{-1}d^2xu, \\ wd^2\theta &= (1-j)jq^{-1}d^2xu + d^2\theta w \\ ud^2\theta &= q^{-1}d^2\theta u + \left[(j - j^2)x^{-1}\theta - q^{-1}j^2h \right] d^2xu \end{aligned} \quad (5.5)$$

komutasyon bağıntılarına ulaşırız.

Önceki bölümlerde olduğu gibi, (5.3), (5.4) ve (5.5) bağıntılarında $q \rightarrow 1$ için limit alırsak,

Cartan-Maurer formları ile koordinat fonksiyonları arasındaki bağıntılar,

$$xw = j^2wx$$

$$xu = ux$$

$$\theta w = jw\theta$$

$$\theta u = ju\theta + hux$$

Cartan – Maurer formları ile birinci merteye diferansiyeller arasındaki bağıntılar,

$$wdx = jdxw,$$

$$udx = dxu,$$

$$wd\theta = jd\theta w + (1-j)jw\theta w,$$

$$ud\theta = d\theta u - hdxu + (j^2-1)w\theta u.$$

Cartan – Maurer formları ile ikinci merteye diferansiyeller arasındaki bağıntılar,

$$wd^2x = j^2d^2xw,$$

$$ud^2x = d^2xu,$$

$$wd^2\theta = (1-j)jd^2xu + d^2\theta w$$

$$ud^2\theta = d^2\theta u + \left[(j-j^2)x^{-1}\theta - j^2h \right] d^2xu$$

olur.

6. SONUÇ

Bu çalışma, iki boyutlu $R_h\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ kuantum süper uzayının Z_3 -dereceli diferansiyel geometrisi üzerine yapılmıştır. Çalışmada, $R_q\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ süper uzaydan, $R_h\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ süper uzayına geçilerek, yeni bir diferansiyel yapı inşa edilmiştir. Bu diferansiyel yapı oluşturulurken, koordinat fonksiyonları, onların diferansiyelleri v.b. arasındaki komutasyon bağıntıları elde edilmekle kalınmamış aynı zamanda, kısmi türev operatörleri arasında sağlanan komutasyon bağıntıları da elde edilmiştir. Çalışmanın son kısmında ise, Cartan-Maurer formları ve bu formlarla, koordinat fonksiyonları ile diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntıları bulunmuştur.

KAYNAKLAR

- Aghamohammadi, A., Khorrami, M. ve Shariati, A., (1994), “h-Deformation as a Contraction of q-Deformation”, Journal of Physics A, 28: L225.
- Celik, S., (2002a), “ Differential geometry of the Z_3 -graded quantum superplane”, Journal of Physics A: Mathematical and General, 35: 4257-4268.
- Celik, S., (2002b), “ Z_3 -graded differential geometry of the quantum plane”, Journal of Physics A: Mathematical and General, 35: 6307-6318.
- Chung, W.S., (1994), “Quantum Z_3 -graded space”, Journal of Mathematical Physics, 35: 2497-2504.
- Drinfeld, V. G., (1986), “Quantum groups”, Proc. ICM, Berkeley, 798-820.
- Faddeev, L., Reshetikhin, N. ve Takhtajan, L., (1987), “Quantisation of Lie groups and Lie algebras”, Preprint LOMI.
- Manin, Yu I., (1988), “Quantum groups and noncommutative geometry”, Montreal University Preprint CRM-1561.
- Soni, S.K., (1991), “Differential calculus on the quantum superplane”, Journal of Physics A: Mathematical and General, 24: 619-624.
- Wess, J., ve Zumino, B., (1990), “Covariant differential calculus on the quantum hyperplane”, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl., 18: 302-312.
- Woronowicz, S.L., (1987), “Compact matrix pseudogroups”, Communications in Mathematical Physics, 111: 613-665.
- Yasar, E. (2010), “ Z_3 – dereceli $GL_{q,j} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right)$ süper grubu üzerine diferansiyel hesap” Yüksek Lisans Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	26.02.1986
Doğum yeri	İstanbul
Lise	2001-2004 Nişantaşı Anadolu Lisesi
Lisans	2004-2008 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 2006-2010 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

2010- halen Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
İstatistik Bölümü Araştırma Görevlisi