

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜZEYLER, TEMEL GRUP VE DÜĞÜMLERİN
SINIFLANDIRILMASI ÜZERİNE BİR TEMEL ÇALIŞMA**

Matematikçi Gökay DEMİR

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bruno ZIMMERMANN
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ayşe KARA**

İSTANBUL, 2010

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜZEYLER, TEMEL GRUP VE DÜĞÜMLERİN
SINIFLANDIRILMASI ÜZERİNE BİR TEMEL ÇALIŞMA**

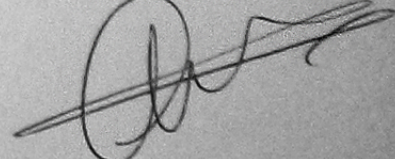
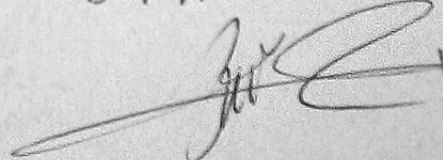
Matematikçi Gökay DEMİR

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bruno ZIMMERMANN
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ayşe KARA



Doc. Dr. Erhan ÇALIŞKAN Doc. Dr. Perihan KARAC


İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ŞEKİL LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ	1
2. DÜĞÜMLER VE İZOTOPI.....	2
2.1 Düğümler ve Düğüm Tipleri	2
2.2 Reidemeister Hareketleri ve İzotopi	4
3. YÜZEYLER	6
3.1 Kombinatoryal Yüzeyler	6
3.2 Bir Yüzeyin Normal Formu	8
3.3 Yüzeylerin Değişmezleri	20
3.4 Düğümler ve Yüzeyler	29
4. TEMEL GRUP	34
4.1 Homotopi ve Homotopi Tipi	34
4.2 Yollar, Yol Homotopisi ve Yolların Çarpımı	40
4.3 İlmekler, Temel Grup ve Yükseltgenmiş Homomorfizmalar	45
4.4 Çemberin Temel Grubu	49
5. GRUPLARIN TEMSİLİ.....	54
5.1 Serbest Gruplar	54
5.2 Temsiller ve Tietze Denklikleri	61
5.3 Düğüm Grupları	72
6. SEIFERT - VAN KAMPEN TEOREMİNİN UYGULAMALARI.....	77
6.1 Seifert - van Kampen Teoreminin İfadesi ve Sonuçları	77
6.2 Uygulamalar	82
6.3 Wirtinger Temsili.....	90
7. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	97
KAYNAKLAR	98
ÖZGEÇMİŞ	99

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1	Bazı düğümler	2
Şekil 2.2	Vahşi düğüm	3
Şekil 2.3-a	Düzenli konumdaki düğümün bir çaprazlama noktası	4
Şekil 2.3-b	Yasak bir çaprazlama noktası	4
Şekil 2.4	Reidemeister hareketleri	4
Şekil 2.5	R0 tipinden bir hareket	5
Şekil 3.1	Tor elde edilmesi	6
Şekil 3.2	Klein şişesinin düşünülmesi	6
Şekil 3.3	Klein şişesinin elde edilmesi	7
Şekil 3.4	Dikdörtgen olarak temsil edilen silindir	7
Şekil 3.5	Silindirin bir üçgenleştirmesi	7
Şekil 3.6	Torun bir üçgenleştirmesi	8
Şekil 3.7	Klein şişesinin bir üçgenleştirmesi	8
Şekil 3.8	Üçgen üzerinde bir yönlendirme seçilmesi	9
Şekil 3.9	Möbius şeridinin bir üçgenleştirmesi	9
Şekil 3.10	Üçgenlerin kesilmesi	10
Şekil 3.11	Elde edilen üçgenler	10
Şekil 3.12	Kesme ve yapıştırma işleminin gösterilmesi	10
Şekil 3.13	Kesme ve yapıştırma işleminin gösterilmesi	10
Şekil 3.14	Kesme ve yapıştırma işleminin gösterilmesi	10
Şekil 3.15	Kesme ve yapıştırma işleminin gösterilmesi	10
Şekil 3.16	Kesme ve yapıştırma işleminin gösterilmesi	11
Şekil 3.17	Kesme ve yapıştırma işleminin gösterilmesi	11
Şekil 3.18	Kesme ve yapıştırma işleminin gösterilmesi	11
Şekil 3.19	Tipik bir çokgen	11
Şekil 3.20	Birinci temel operasyon	12
Şekil 3.21	İkinci temel operasyon	13
Şekil 3.22	Üçüncü temel operasyon	13
Şekil 3.23	Altıncı operasyonun geçerliliği	14
Şekil 3.24	Yedinci operasyonun geçerliliği	14
Şekil 3.25	İzdüşümsel düzlemin düşünülmesi	15
Şekil 3.26	İzdüşümsel düzlemin çokgensel temsili	15
Şekil 3.27	Bir çaprazkepin gösterilmesi	15
Şekil 3.28	Torun dikdörtgensel temsili	16
Şekil 3.29	Bir kulpun gösterilmesi	16
Şekil 3.30	Kürenin çokgensel temsili	19
Şekil 3.31	Bir delikli kürenin elde edilmesi	19
Şekil 3.32	İki çaprazkep eşittir Klein şişesi	19
Şekil 3.33	Yönlendirilemez bir yüzeyin düşünülmesi	20
Şekil 3.34	Torun üçgenleştirmesinde bir yönlendirme seçilmesi	21
Şekil 3.35	Bir yüzeyi temsil eden çokgene bir üçgen eklenmesi	23
Şekil 3.36	Bir yüzeyi temsil eden çokgene bir üçgen eklenmesi	23
Şekil 3.37	Torların 2-bağlantılı toplamının elde edilmesi	26
Şekil 3.38	Bir çaprazlamada yönlü bir yay eklenmesi	29
Şekil 3.39	Üç Seifert çemberi	29
Şekil 3.40	Seifert çemberlerine ayrık diskler eklenmesi	30
Şekil 3.41	Eklenen diskler ve 8-Şeklin Seifert yüzeyinin yumuşatılmış bir formu	30

Şekil 3.42	Kıvrılmış şeritlerin uygun bir şekilde yönlendirilmesi.....	30
Şekil 3.43	İki diskin kıvrılmış bir şeritle bağlanması.....	31
Şekil 3.44	İki düğümün bağlantılı toplamı.....	32
Şekil 3.45	İki düğümün bağlantılı toplamı için bir Seifert yüzeyi.....	32
Şekil 3.46	Bir Seifert yüzeyinin iki Seifert yüzeyine bölünmesi.....	33
Şekil 4.1	Bir uzay ile $\mathbb{R}^n$ 'nin konveks bir alt uzayı arasında bir homotopi.....	35
Şekil 4.2	Halkanın bir çekilmiş bozunumu.....	38
Şekil 4.3	Delikli düzlemin bir çekilmiş bozunumu.....	39
Şekil 4.4	Çift delikli düzlemin bir çekilmiş bozunumu.....	39
Şekil 4.5	Dikey olarak delinmiş küpün bir çekilmiş bozunumu.....	40
Şekil 4.6	Bir yolun tersi.....	41
Şekil 4.7	Yol homotopisinin gösterilmesi.....	42
Şekil 4.8	Yolların çarpımının birleşme özelliğinin gösterilmesi.....	43
Şekil 4.9	Sabit yolun varlığının gösterilmesi.....	43
Şekil 4.10	Taban noktasının değiştirilmesi.....	45
Şekil 5.1	Cinquefoil düğümünün bir izdüşümü.....	73
Şekil 5.2	Bir çaprazlamadaki bağıntının okunması.....	73
Şekil 5.3	Bir çaprazlamadaki bağıntının okunması.....	74
Şekil 5.4	Bir düğüm grubunun birinci Reidemeister hareketi altındaki değişmezliği.....	75
Şekil 5.5	Bir düğüm grubunun ikinci Reidemeister hareketi altındaki değişmezliği.....	75
Şekil 5.6	Bir düğüm grubunun ikinci Reidemeister hareketi altındaki değişmezliği.....	76
Şekil 5.7	Bir düğüm grubunun üçüncü Reidemeister hareketi altındaki değişmezliği.....	76
Şekil 6.1	5-yapraklı gül.....	82
Şekil 6.2	2-yapraklı gül.....	82
Şekil 6.3	2-yapraklı gülde ortak noktanın açık bir komşuluğu.....	83
Şekil 6.4	$(n + 1)$ -yapraklı gülde ortak noktanın açık bir komşuluğu.....	83
Şekil 6.5	Torun dikdörtgensel temsili için açık bir ayrışım bulunması.....	84
Şekil 6.6	Kenarların özdeşleştirilmesinden sonra bir 2-yapraklı gül.....	85
Şekil 6.7	Klein şişesinin dikdörtgensel temsili için açık bir ayrışım bulunması.....	86
Şekil 6.8	Kenarların özdeşleştirilmesinden sonra bir 2-yapraklı gül.....	86
Şekil 6.9	Bir uzayın n -kenarlı çokgensel temsili için açık bir ayrışım bulunması.....	87
Şekil 6.10	İzdüşümsel düzlemlerin g -bağlantılı toplamı için açık bir ayrışım bulunması.....	88
Şekil 6.11	Bir düğümün her yayının etiketlenmesinden sonra tipik bir çaprazlama.....	91
Şekil 6.12	Bir çaprazlamada dikey parçaların kabul edilmesi.....	91
Şekil 6.13	Düğümün tünel komşuluğunun düşünülmesi.....	92
Şekil 6.14	Tünellerin birbirine paralel çekilmesi.....	92
Şekil 6.15	Tipik bir üretcin bir delik etrafında dolanma olarak düşünülmesi.....	93
Şekil 6.16	8-Şekil düğümünün grup temsilinin bulunması.....	94
Şekil 6.17	Trefoil düğümünün grup temsilinin bulunması.....	95

ÖNSÖZ

Bu çalışma boyunca bana rehberlik eden, tavsiyelerde bulunan ve eleştirilerini esirgemeyen saygıdeğer eş-danışmanım Prof. Dr. Bruno Zimmermann'a en derin minnetlerimi iletiyorum. Ayrıca, bu çalışma süresince bana yol gösteren saygıdeğer danışmanım Prof. Dr. Ayşe Kara'ya içten teşekkürlerimi sunuyorum.

Verdikleri manevi desteklerden dolayı aileme de çok teşekkür ediyorum. Son olarak, beni motive eden ve en sıkıntılı anlarımda daima yanımda olan değerli arkadaşım Merve Kırkıl'a sonsuz şükranlarımı iletiyor ve bu tezi kendisine adıyorum.

ÖZET

Kapalı yüzeyler homeomorfizma altında sınıflandırıldı. Bir yüzeyin normal formu elde edildi. Bir yüzeyin sınır eğrilerinin sayısı, Euler karakteristiği, cinsi, yönlendirilebilirliği ve yönlendirilemezliği çalışıldı. Bir yüzeyin çekilmiş bozunumunun bazı önemli örnekleri verildi ve birim çemberin temel grubu hesaplandı. Tietze teoremi ispatlandı ve Seifert - van Kampen teoremi ifade edildi. Torların ve izdüşümsel düzlemlerin bağlantılı toplamalarının temel grupları ve bu grupların temsilleri elde edildi. Bir düğüm grubunun Wirtinger temsili ispatlandı.

Anahtar Kelimeler: Düğüm, Wirtinger temsili, yüzey, değişmez, temel grup, serbest grup, Seifert - van Kampen teoremi.

ABSTRACT

The closed surfaces are classified up to homeomorphism. The normal form of a surface is obtained. The number of boundary curves, the Euler characteristic, the genus, the orientability and the non-orientability of a surface are studied. Some important examples of a deformation retract of a space are given and the fundamental group of the unit circle is calculated. The Tietze theorem is proven and the Seifert - van Kampen theorem is stated. The presentations of the fundamental groups of the connected sums of tori and projective planes are obtained. The Wirtinger presentation of a knot group is proven.

Keywords: Knot, Wirtinger presentation, surface, invariant, fundamental group, free group, theorem of Seifert - van Kampen.

1. GİRİŞ

(Topolojik) yüzey, her noktasında Öklid düzlemi $\mathbb{R}^2$ 'nin bir açık alt kümesine homeomorf olan bir açık komşuluğa sahip bir Hausdorff topolojik uzayıdır. Bu çalışmanın amacı, yüzeyleri homeomorfizma altında sınıflandırmaktır.

İlk bölümde, düğüm teorisindeki temel tanımlar verildi ve Reidemeister hareketlerinin konu üzerindeki teoremi ifade edildi.

İkinci bölümde, kombinatorial yüzey tanıtıldı. Ayrıca, bir yüzeyin normal formu elde edildi ve yüzeylerin yönlendirilebilirlik, Euler karakteristiği ve sınır eğrileri sayısı gibi değişmezleri gösterildi. Düğümler ve yüzeyler arasındaki ilişki de bu bölümde tartışıldı.

Üçüncü bölüm, bir topolojik uzayın bir taban noktasındaki temel grubuna ayrıldı. Birim çemberin temel grubunun, tamsayılar grubuna izomorf olduğu ispatlandı.

Dördüncü bölümde, serbest gruplar ve bir grubun temsili tanımlandı. Bir temsilden diğerine geçmeyi sağlayan Tietze denklikleri de tanıtıldı. Bu bölümün sonunda, düğüm grupları ve onların Reidemeister hareketleri altında değişmezliği tartışıldı.

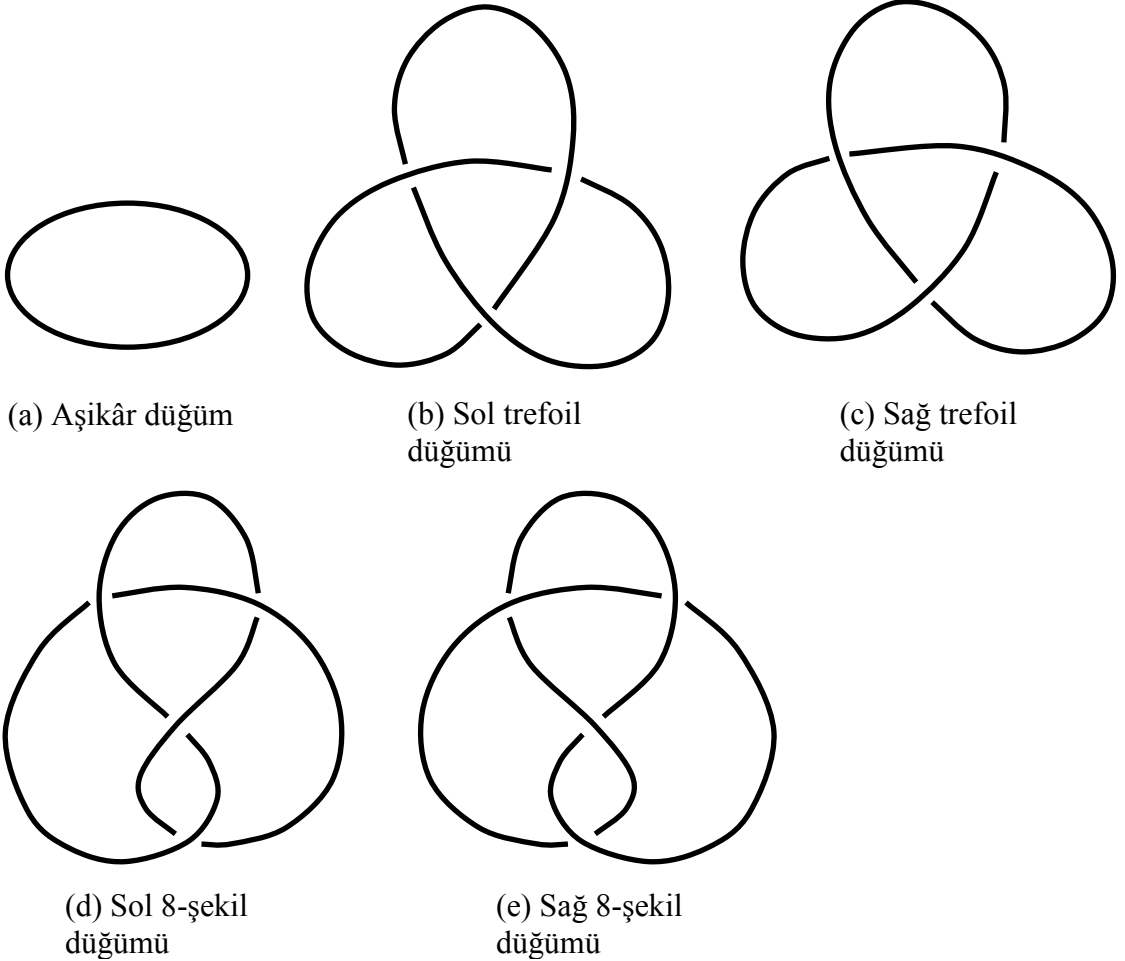
Son bölüm, Seifert - van Kampen teoreminin ifadesi ve onun bazı uygulamalarından oluşmaktadır. Bu bölümde, kapalı yüzeyler homeomorfizma altında sınıflandırıldı. Bölümün sonunda, düğüm grubunun Wirtinger temsilinin bir ispatı verildi ve trefoil düğümü, aşıkâr düğümden ayırt edildi.

2. DÜĞÜMLER VE İZOTOPİ

Bu bölümde, düğüm teorisindeki bazı temel tanımlara değinecek ve Reidemeister'ın konuyla ilgili çok önemli bir teoremini ispatsız olarak vereceğiz. Birim çember S^1 'i, $\mathbb{R}^2$ düzleminde $x^2 + y^2 = 1$ denklemini sağlayan (x, y) noktaları olarak alacağız.

2.1 Düğümler ve Düğüm Tipleri

2.1.1 Tanım: *Düğüm*, 3-boyutlu uzayın birim çembere homeomorf olan bir alt kümesidir. Daha açık olarak, eğer S^1 birim çemberinin $\mathbb{R}^3$ 3-boyutlu uzayı içine görüntüsü K olan bir homeomorfizması varsa, o zaman K alt kümesine bir *düğüm* denir. Şek.2.1 bazı düğüm örneklerini göstermektedir.



Şekil 2.1 Bazı düğümler

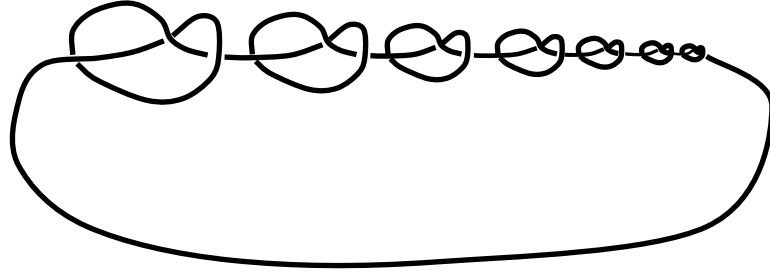
2.1.2 Tanım: K_1 düğümünü K_2 düğümüne resmeden $\mathbb{R}^3$ 'ün kendi üzerine bir homeomorfizması varsa, bu iki düğüm *denktir* denir. Açıkça, düğüm denkliği bir denklik bağıntısıdır. Eğer iki düğüm denkse, o zaman bunlar *aynı tiptendir* denir ve düğümlerin her

bir denklik sınıfı bir *düğüm tipidir*. Eğer bir düğüm, $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ düğümlememiş çemberine denkse, bu düğüm *aşıkâr düğüm* olarak adlandırılır (Şek.2.1-(a)).

2.1.3 Örnek: Şek.2.1'deki (b) ve (c) düğümleri denktir. Bunu görmek için bunlardan birinin ayna görüntüsünü alırız. Ayna görüntüsü ile bir K düğümünün $(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$ ile tanımlanan yansıma altındaki görüntüsünü kastetmekteyiz. Benzer olarak (d) ve (e)'deki düğümler de denktir.

2.1.4 Tanım: *Kenarlar* olarak adlandırılan kapalı düz doğru parçalarının sonlu sayıda birleşimleri *çokgensel düğüm* olarak adlandırılır. Kenarların bitim noktalarına düğümün *tepeleri* denir. Eğer bir düğüm çokgensel düğüme denkse, *uysal* düğüm adını alır ve eğer bir düğüm uysal değilse, o zaman buna *vahşi* düğüm denir (Şek.2.2).

Bu çalışmada düğümü, uysal düğüm anlamında kullanacağız. Fakat düğümleri Şek.2.1'deki gibi çizeceğiz.



Şekil 2.2 Vahşi düğüm

2.1.5 Tanım: K , $\mathbb{R}^3$ 'de bir düğüm olsun. p , $\mathbb{R}^3$ 'ün $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ düzlemine $p(x, y, z) = (x, y, 0)$ ile verilen paralel izdüşümünü gösterebilir. Eğer $p^{-1}(x) \cap K$ birden fazla noktadan oluşuyorsa, o zaman $x \in p(K)$ noktasına bir *çaprazlama noktası* denir. Eğer $p^{-1}(x) \cap K$ iki noktadan oluşuyorsa, o zaman x bir *çift kat çaprazlama noktası* olur.

2.1.6 Tanım: Eğer aşağıdakiler geçerli ise K düğümü *düzenli konumundadır* denir:

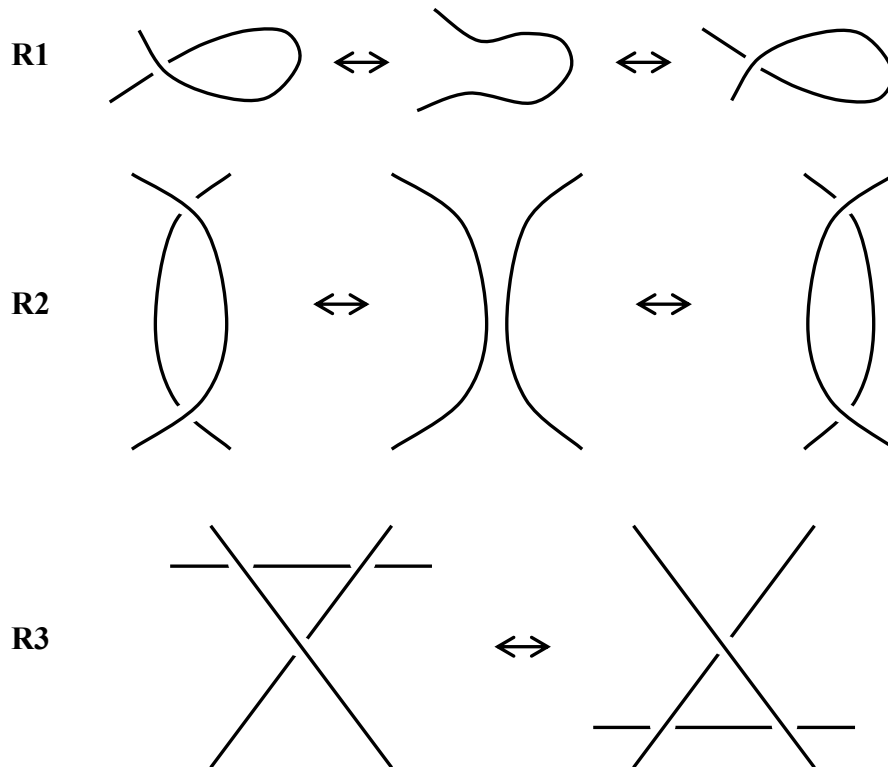
- i. K 'nın çaprazlama noktaları sadece çift kat çaprazlama noktalarıdır ve bunlardan sadece sonlu sayıda vardır,
- ii. Hiçbir çift kat çaprazlama noktası K 'nın herhangi bir tepesinin görüntüsü değildir (Şek.2.3).

Şekil 2.3

2.2 Reidemeister Hareketleri ve İzotopi

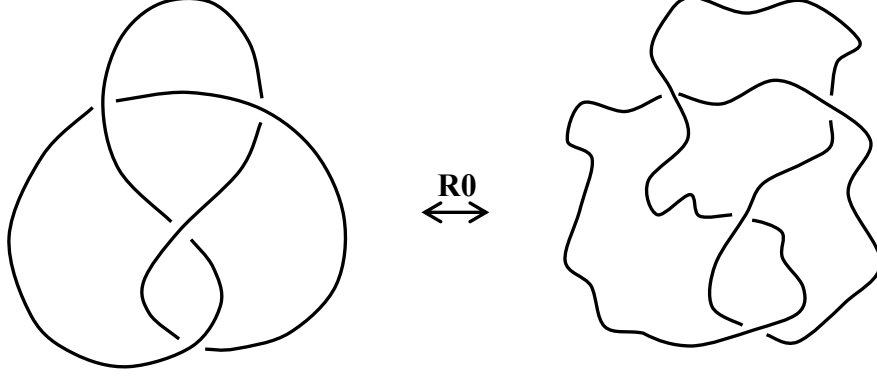
2.2.1 Tanım: Düzenli konumdaki bir düğümün izdüşüm görüntüsü bir *düğüm diyagramı* olarak adlandırılır.

2.2.2 Tanım: Diyagramları bağlamak için yapılan yerel değişikliklere *Reidemeister hareketleri* denir (Şek.2.4).



Şekil 2.4 Reidemeister hareketleri

R0 tipinden bir hareket de bunlara eklenebilir: D_1 ve D_2 iki düğüm diyagramı olmak üzere, eğer düzlemde, hiçbir çaprazlamayı değiştirmeden D_1 'i D_2 'ye taşıyan sürekli bir bozunum varsa, o zaman bu iki düğüm **R0** tipinden bir hareketle ayrılırlar (Şek.2.5). Bir X topolojik uzayının bir bozunumu $h_t: X \rightarrow X, 0 \leq t \leq 1$ tasvirlerinin bir ailesidir öyle ki, h_0 özdeşlik ve $H(x, t) = h_t(x)$ olarak tanımlanan H fonksiyonu aynı anda x ve t 'de sürekli.



Şekil 2.5 R0 tipinden bir hareket

2.2.3 Tanım: D_1 ve D_2 iki düğüm diyagramı olsun. Eğer D_1, D_2 'ye **R0, R1, R2** ve **R3** hareketleri kullanılarak dönüştürülebiliyorsa, o zaman bu iki diyagram *izotoptur* denir. Eğer bu dönüşüm R1 kullanılmadan yapılabiliyorsa, bu takdirde D_1 ve D_2 *düzenli izotoptur* denir.

Açıkça, izotopi ve düzenli izotopi bir denklik bağıntısıdır.

2.2.4 Tanım: Bu tanımda t parametresinin zamanı temsil ettiği düşünülürse, $\mathbb{R}^3$ 'de $t = 0$ anından $t = 1$ anına homeomorfizmaların sürekli bir ailesi elde edilir. K_1 ve K_2 iki düğüm olmak üzere eğer aşağıdakiler sağlanacak şekilde sürekli bir $H: \mathbb{R}^3 \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonu varsa, o zaman bu iki düğüm *kuşatan izotoptur* denir:

- i. $h_0 = H(-,0)$ özdeşlik tasviridir: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
- ii. Her $t \in [0,1]$ için $h_t = H(-, t)$ bir homeomorfizmadır: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
- iii. Eğer $h_1 = H(-,1)$, o zaman $h_1(K_1) = K_2$.

Açıkça, kuşatan izotop düğümler denktir.

Şimdi Reidemeister tarafından ispatlanan söz konusu teoremi veriyoruz:

2.2.5 Teorem (Reidemeister): İki düğümün kuşatan izotop olması için gerek ve yeter koşul bunların izotop diyagramlara ait olmasıdır.

3. YÜZEYLER

3.1 Kombinatorial Yüzeyler

3.1.1 Tanım: Bir S kombinatorial yüzeyi, aşağıdaki koşulları sağlayan sonlu sayıdaki (katı) üçgenlerin birleşimidir:

S.1: Herhangi iki üçgen bir kenarda ve bir tepede buluşurlar ya da hiç buluşmazlar.

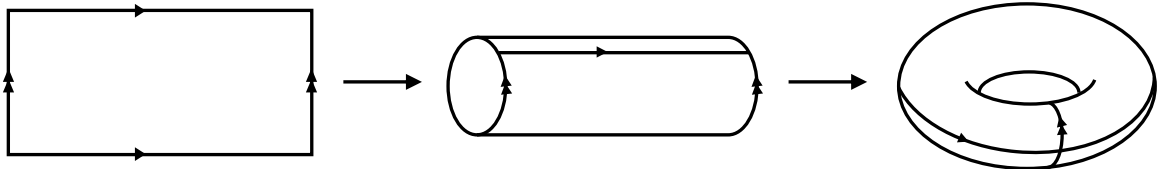
S.2: Herhangi bir kenar bir veya iki üçgenin kenarıdır.

S.3: Herhangi bir v tepesi için, tepesi v olan tüm üçgenlerin birleşimini $St\ v$ ile gösterirsek; o zaman $St\ v$ bir diske homeomorftur. $St\ v$ 'ye v 'nin *yıldızı* denir.

S.4: S 'de verilen herhangi iki tepe için, üçgenlerin kenarları boyunca bunları birleştiren bir yol vardır.

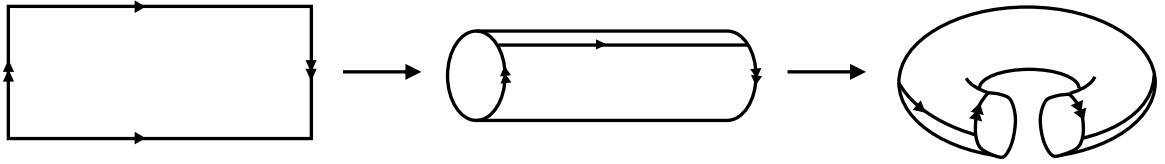
Kombinatorial bir yüzey elde etme işlemi, yüzeyin *üçgenleştirilmesi* bulma olarak adlandırılır ve bu üçgenleştirme tek olmayabilir. Bir yüzeyi onun üçgenleştirmesinden elde etmek için, aynı etiketli kenarları bunların yönlendirmelerine bağlı kalarak yapıştırırız.

3.1.2 Örnek: Bir an için aşağıdaki dikdörtgenin içindeki kenarları unutacak olursak, söz konusu yapıştırma yönergelerini $\mathbb{R}^3$ 'te canlandırabiliriz ve bir tor elde ederiz (Şek.3.1).



Şekil 3.1 Tor elde edilmesi

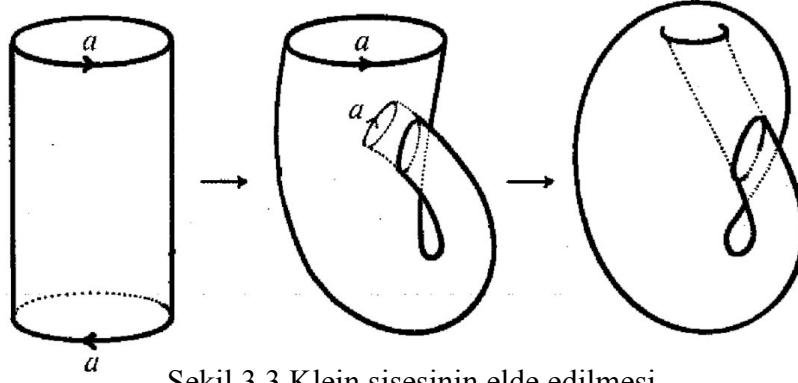
Bazen bu yönergeleri $\mathbb{R}^3$ 'te canlandıramayız (Şek.3.2).



Şekil 3.2 Klein şişesinin düşünülmesi

Burayı nasıl yapıştırabiliriz?

Bu durum genelde Şek.3.3'deki gibi bir iç-kesme yapılarak çizilir. Bu yüzey *Klein şişesi* olarak adlandırılır.

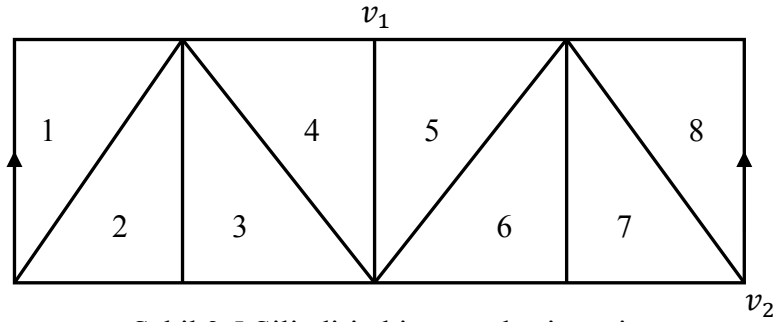


Şekil 3.3 Klein şişesinin elde edilmesi

3.1.3 Örnek: Şek.3.5'in, Şek.3.4'teki belirlemeyle dikdörtgen olarak temsil edilen bir silindirin üçgenleştirilmesi olduğunu gösterelim.



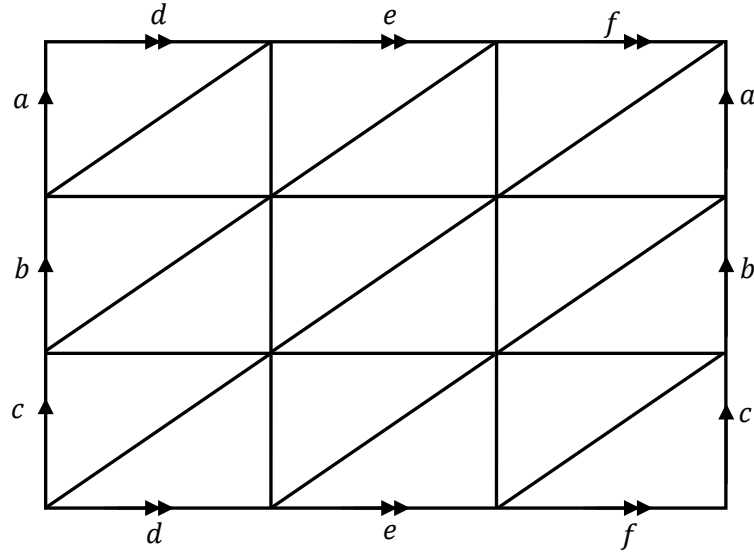
Şekil 3.4 Dikdörtgen olarak temsil edilen silindir



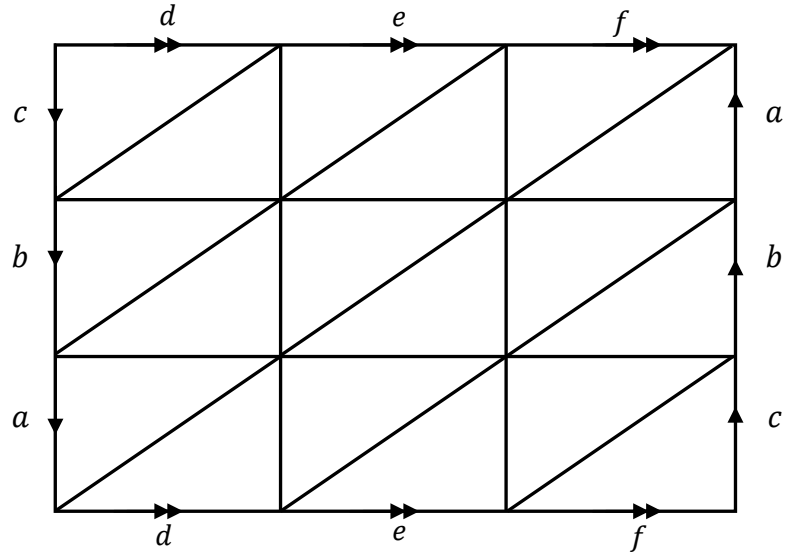
Şekil 3.5 Silindirin bir üçgenleştirilmesi

S.1 ve S.2 sağlanır. Yol bağlantılılık olan S.4 de açıktır. S.3'ü kontrol edelim. Şek.3.5'deki v_1 için, v_1 'i tepe olarak kabul eden üçgenlerin birleşimi 4 ve 5 numaralı üçgenlerden oluşmaktadır. Böylece $St v_1$ bir üçgendir ve dolayısıyla diske homeomorftur. v_2 için, $St v_2$ 1,2,7 ve 8 numaralı üçgenlerden oluşur. Böylece $St v_2$ bir dikdörtgendir ve dolayısıyla diske homeomorftur. Diğer altı tepe de benzer şekilde kontrol edilerek S.3'ün sağlandığı görülür.

3.1.4 Örnek: Torun ve Klein şişesinin üçgenleştirmeleri, sırasıyla Şek.3.6 ve Şek.3.7'de gösterilmiştir.



Şekil 3.6: Torun bir üçgenleştirmesi

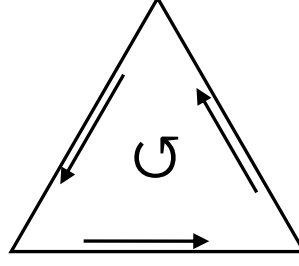


Şekil 3.7: Klein şişesinin bir üçgenleştirmesi

3.2 Bir Yüzeyin Normal Formu

Bu bölümde, yüzeyin bir üçgenleştirmesine sahip olduğumuzu kabul edecek ve yüzeyin *yönlendirilebilirlik*, *sınır eğrileri sayısı*, *Euler karakteristiği* ve *cins* gibi değişmezleri üzerinde çalışacağız.

Bir S yüzeyinin üçgenleştirmesine sahip olduğumuzu kabul edelim ve buradaki bir üçgeni düşünelim. Bu üçgen üzerinde bir yönlendirmeyi saat yönü veya saat yönünün tersi olarak seçebiliriz (Şek.3.8).

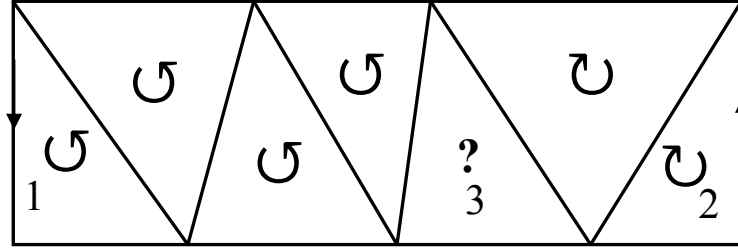


Şekil 3.8 Üçgen üzerinde bir yönlendirme

Eğer iki üçgen ortak bir kenara sahipse bunlara *komşu* üçgenler denir.

3.2.1 Tanım: Bir S yüzeyindeki tüm üçgenler için komşu üçgenler aynı yönlenecek şekilde bir yönlendirme seçilebiliyorsa S *yönlendirilebilirdir*. Aksi takdirde yüzey *yönlendirilemezdir*.

3.2.2 Örnek: Şek.3.9'daki Möbius şeridinin üçgenleştirmesini düşünelim.



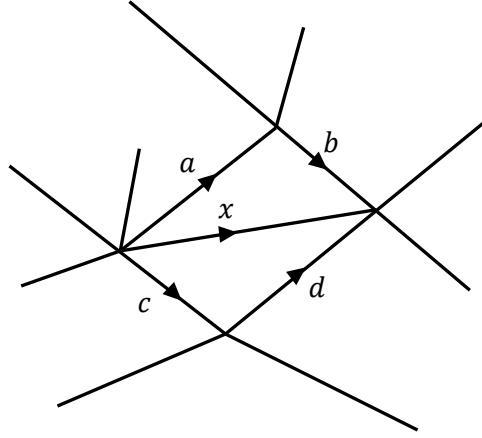
Şekil 3.9 Möbius şeridinin bir üçgenleştirmesi

Eğer 1'de saat yönünün tersi bir yönlendirmeye başlarsak, yapıştırma yönergelerinden dolayı 2'yi saat yönünde yönlendirmek zorunda kalırız. Fakat 3 için komşu üçgenlerle aynı olacak şekilde bir yönlendirme seçmek imkansız olur.

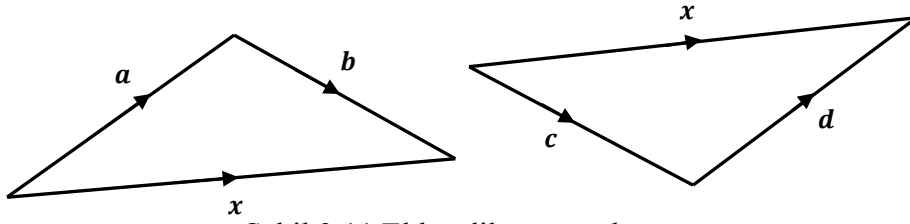
3.2.3 Kesme ve yapıştırma

Yapıştırma yönergelerine bağlı kalarak bir yüzeyin çokgensel temsilinin elde edilebileceğini iki adımda açıklayacağız. Kesme ve yapıştırma işlemini açıklamaktaki amaç harflerle çalışmaktır. İlk olarak, yüzeyi yeniden inşa edebilmek için tüm kenarları etiketleyeceğiz ve diğerlerinden farklı bir harfle etiketlendirilen yeni bir kenar boyunca keseceğiz. Şimdi adımları verelim:

Adım 1: S 'deki tüm üçgenlerin her bir kenarını, farklı kenarlara farklı harfler vererek etiketleyelim ve bir ok ile yönlendirelim. S 'deki etiketli tüm üçgenlerin kümesini $T(S)$ ile gösterelim. Örneğin Şek.3.10, Şek.3.11'i verir.



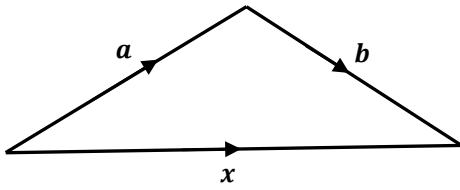
Şekil 3.10 Üçgenlerin kesilmesi



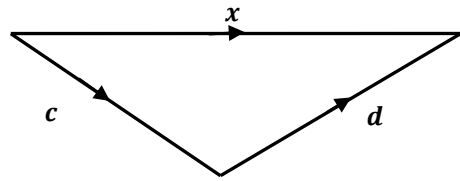
Şekil 3.11 Elde edilen üçgenler

Adım 2: Herhangi bir $T_0 \in T(S)$ üçgeni alalım. T_0 ile ortak bir kenar etiketine sahip bir $T_1 \in T(S)$ bulalım. Bir D_1 diski elde etmek için, ortak kenarın harf ve okuna uyarak T_0 ve T_1 'i yapıştıralım. D_1 'in sınırında komşu kenar etiketleriyle bir veya iki kenar etiketi ortak olan $T_2 \in T(S) \setminus \{T_0, T_1\}$ bulalım ve bir D_2 diski elde etmek için T_2 'yi D_1 'e yapıştıralım. Bu yolla $T(S)$ bitene kadar, bir D_{i+1} diski elde etmek için, D_i 'nin bir veya iki komşu kenarlarına uyarak $T_i \in T(S)$ bulmaya devam edelim.

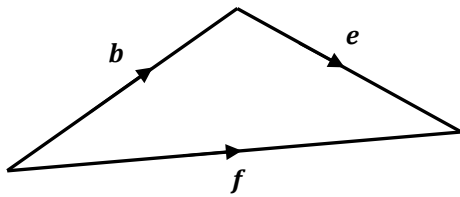
Son durum etiketlenmiş ve yönlendirilmiş bir çokgendir. Bu işlemler Şek.3.12 – 2.18 arasında gösterilmiştir.



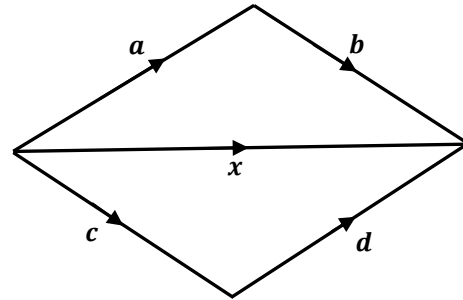
Şekil 3.12



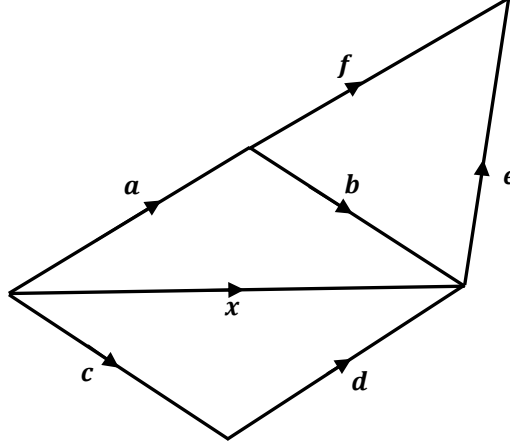
Şekil 3.13



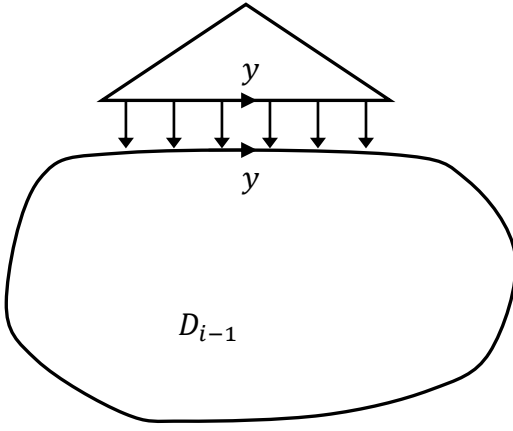
Şekil 3.14



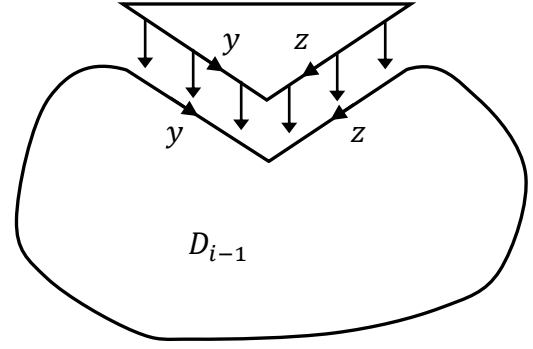
Şekil 3.15



Şekil 3.16

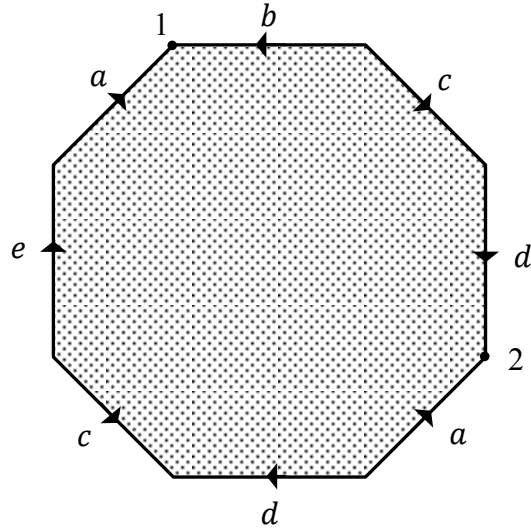


Şekil 3.17



Şekil 3.18

Tipik olarak Şek.3.19'daki gibi bir çokgen elde ederiz.



Şekil 3.19 Tipik bir çokgen

Her etiket yalnız bir veya iki üçgenin kenarına karşı geldiği için, her etiketin yalnız bir veya iki kez oluşabileceğine dikkat edelim.

Şimdi harflerle çalışmaya hazırız: herhangi bir tepe seçelim, eğer ok saat yönünü belirtiyorsa kenar etiketini olduğu gibi yazalım, saat yönünün tersini belirtiyorsa kenar etiketi üzeri eksi bir yazalım. Örneğin Şek.3.19'da eğer 1 ile başlarsak, o zaman

$$b^{-1}cda^{-1}dc^{-1}ea$$

elde ederiz. Eğer 2 ile başlarsak, o zaman

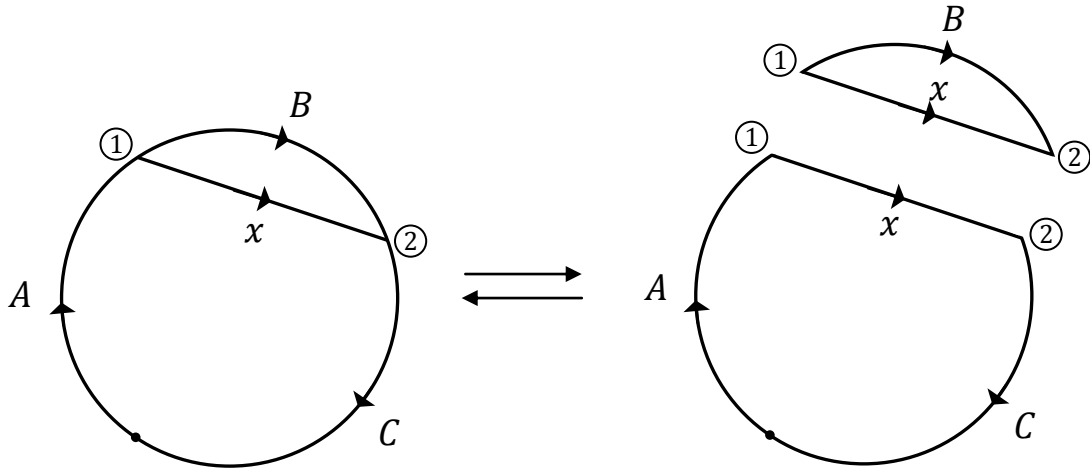
$$a^{-1}dc^{-1}eab^{-1}cd$$

elde ederiz. Böylece bu iki sembolü aynı olarak düşünüyoruz.

Bir çokgenin yüzey sembolü ile çalışmak için kesme ve yapıştırma içeren operasyonlar tanımlamalıyız. Üç tane *temel operasyon* vardır. Küçük harflerden oluşan kelimeler ve bunların tersleri için büyük harfleri kullanacağız:

Operasyon 1 (Şek.3.20):

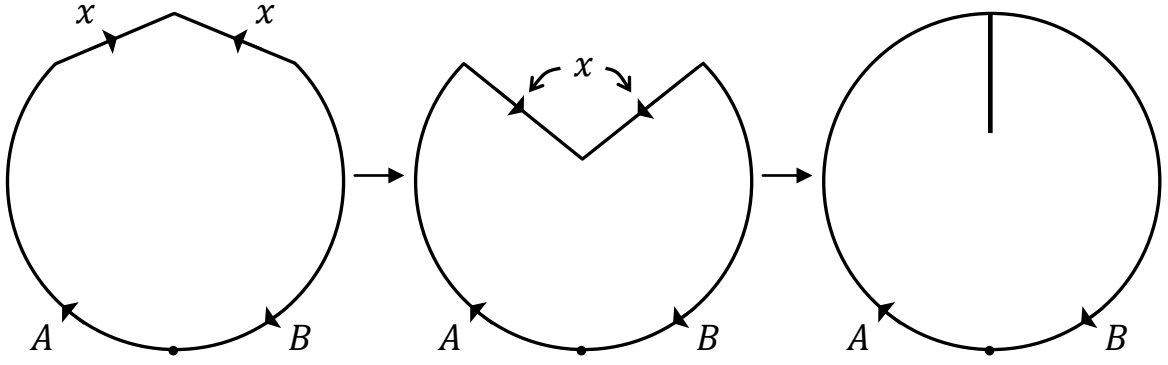
$$ABC \xrightleftharpoons[\text{Yapıştır}]{\text{Kes}} AxC \text{ ve } Bx^{-1}$$



Şekil 3.20 Birinci temel operasyon

Operasyon 2 (Şek.3.21):

$$Axx^{-1}B \xrightleftharpoons[\text{Yapıştır}]{\text{Kes}} AB$$



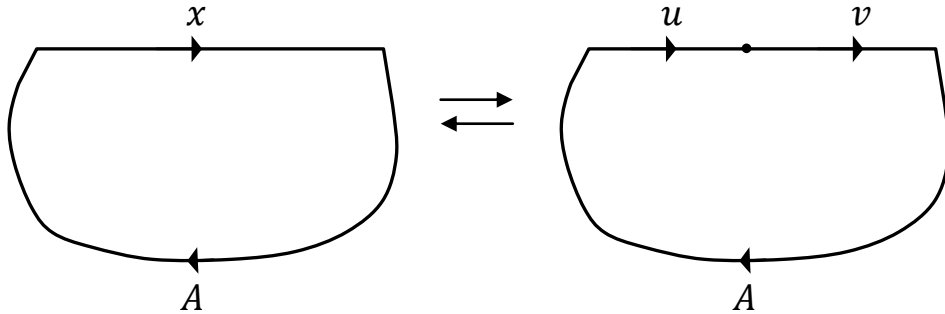
Şekil 3.21 İkinci temel operasyon

Operasyon 3: Bu operasyon bir kenarı ortadan ayırmamızı sağlar (Şek.3.22). Daha açık olarak, eğer u, v sembolde başka hiçbir yerde yer almazsa, o zaman x ile uv 'yi, x 'in olduğu her yerde değiştirebiliriz.

$$x \rightarrow uv$$

Tersine, eğer u ve v sembolde her zaman arka arkaya yer alırsa, o zaman sembolde olmayan x ile uv 'yi değiştirebiliriz.

$$uv \rightarrow x$$



Şekil 3.22 Üçüncü temel operasyon

Bu temel operasyonları kullanarak çok kullanışlı bazı birleşik operasyonlar elde edebiliriz.

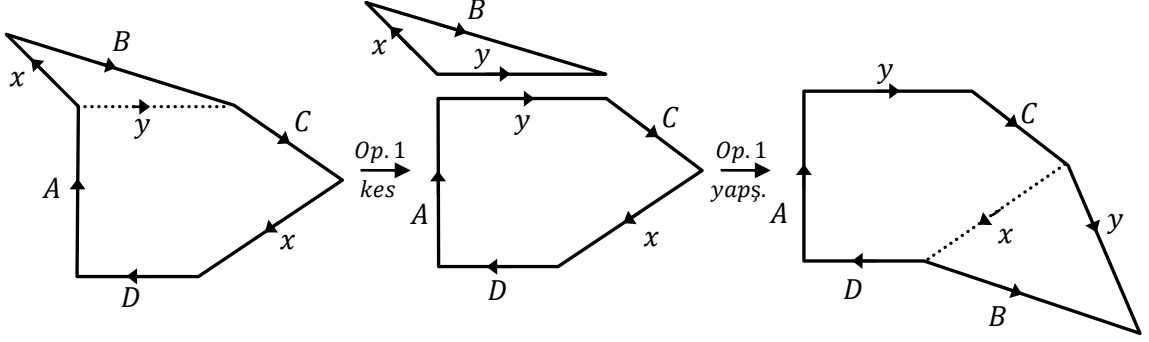
Operasyon 4: y, A, B, C veya D 'de olmayan yeni bir sembol olmak üzere $ABxCxD$ ile $AyCB^{-1}yD$ değişir.

Operasyon 5: y, A, B, C veya D 'de olmayan yeni bir sembol olmak üzere $ABxCx^{-1}D$ ile $AyCy^{-1}BD$ değişir.

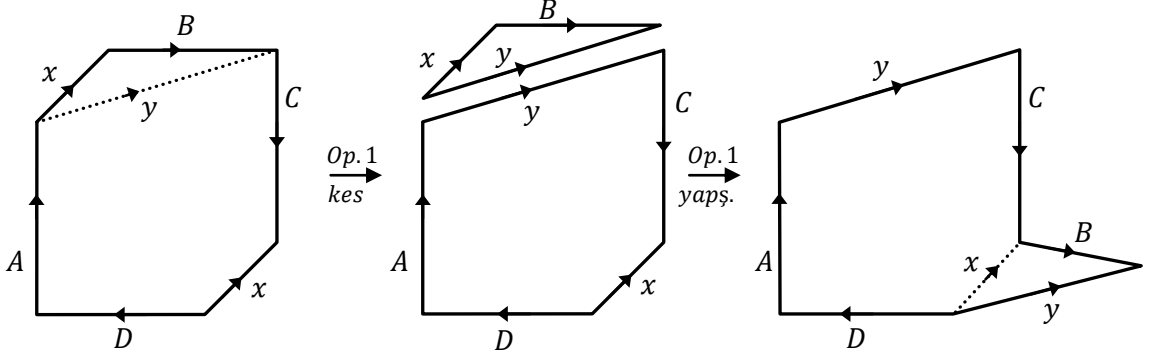
Operasyon 6: $AxBCxD$ ile $AyCyB^{-1}D$ değişir.

Operasyon 7: $AxBCx^{-1}D$ ile $AyCBy^{-1}D$ değişir.

Operasyon 6 ve 7'nin geçerliliğini, sırasıyla Şek.3.23 ve Şek.3.24'de kontrol edeceğiz. Diğerleri de benzer yolla yapılabilir.



Şekil 3.23: Operasyon 6'nın geçerliliği



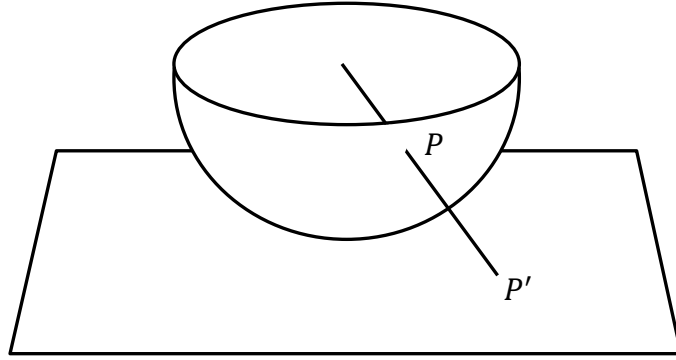
Şekil 3.24: Operasyon 7'nin geçerliliği

Şimdi, izdüşümsel düzlem ve tor gibi bazı önemli yüzeyleri araştıralım. Sonra birleşik operasyonları kullanarak, normal form olarak adlandırılan genel bir yüzey sembolü elde edeceğiz.

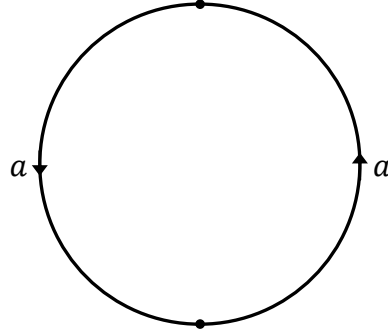
3.2.4 İzdüşümsel Düzlem

İzdüşümsel düzlem, olağan düzleme sonsuzda bir doğru eklenerek inşa edilir. Bu düzlemde her olağan doğrunun sonsuzdaki doğru üzerinde bir noktaya sahip olma özelliği vardır. Bu yüzeyi, düzleme bir yarıküre koyarak ve kürenin merkezinde izdüşümü düşünmek suretiyle topolojik olarak algılayabiliriz (Şek.3.25). Bu bize düzlemin P' sonlu noktaları ve yarıkürenin P iç noktaları arasında bire-bir ve sürekli bir eşleme verir. Düzlemdeki doğrular, yarıküredeki büyük yarı-çemberlere karşı gelir ve böylece her doğrunun sonsuzda tam olarak bir noktaya sahip olması gereksinimi, yarıkürenin sınırındaki çapa göre karşı durumlu noktaların (sonsuzdaki doğruyu temsil eden) belirlenmesiyle karşılanır. Eğer yarıküreyi düzlem üzerine dikey olarak iz düşürürsek, Şek.3.26'daki gibi belirlenen, sınırları iki yarıma bölünen disk formunda bir izdüşümsel düzlem elde ederiz. Bu, izdüşümsel düzlemin çokgensel temsidir.

Yüzeyde içerilen bir izdüşümsel düzlem *aprazkep* olarak adlandırılır ve onun sembolü olarak aa yazarız.



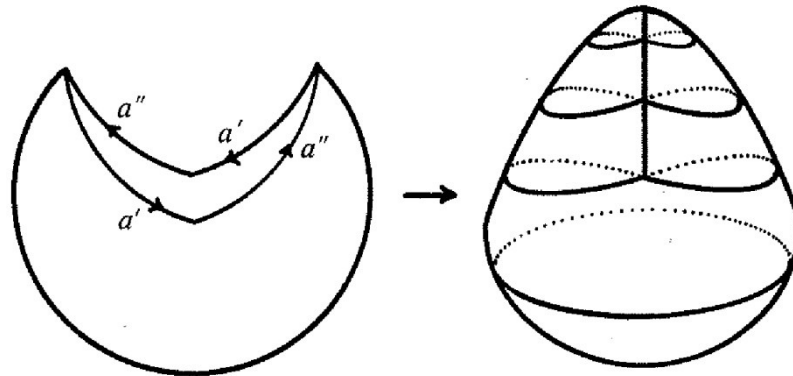
Şekil 3.25 İzdüşümsel düzlemin düşünülmesi



Şekil 3.26 İzdüşümsel düzlemin çokgensel temsili

Böylece, yüzeyde bir çaprazkep olup olmadığını anlamak için, yüzey sembolünde $\dots a \dots a \dots$ veya $\dots a^{-1} \dots a^{-1} \dots$ yer alıp almadığına bakarız.

İzdüşümsel düzlemi $\mathbb{R}^3$ 'te çizemeyiz, fakat çokgenin sınırını önce dört eş a', a'', a', a'' yaylarına bölerek, sonra belirlenen yayları kesişimin tek doğrusu boyunca birleştirerek hayal edebiliriz (Şek.3.27).



Şekil 3.27: Bu yüzeyin üst kısmı bir aprazkeptir

Şimdi yüzey sembolünde n çaprazkepe sahip olduğumuz düşünelim. Bunları bir araya getireceğiz ve yüzey sembolünün başlangıç noktasına koyacağız. Bunu yapmak için Operasyon 4 ve 6'yı uygun bir sırada kullanacağız. Örneğin, sembol olarak elimizde $AxBCxDyEyF$ varsa, o zaman operasyonları aşağıdaki gibi kullanacağız:

$$\begin{aligned}
 AxBCxDyEyF &\xrightarrow{Op.4} x'BCA^{-1}x'DyEyF \\
 &\xrightarrow{Op.6} aaAC^{-1}B^{-1}DyEyF \\
 &\xrightarrow{Op.4} aay'ED^{-1}BCA^{-1}y'F \\
 &\xrightarrow{Op.6} aabbAC^{-1}B^{-1}DE^{-1}F
 \end{aligned}$$

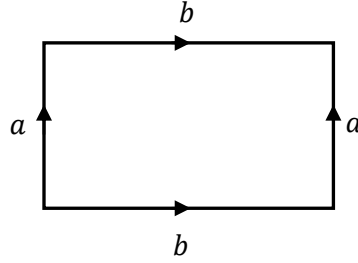
Buradan, yüzey sembolünde n çaprazkep olduğunda, B sadece bir defa geçen veya $\dots x \dots x^{-1} \dots$ gibi geçen kenarlardan oluşmak üzere,

$$a_1a_1a_2a_2 \dots a_na_nB$$

formundaki sembolün elde edilebileceği kolaylıkla görülebilir.

3.2.5 Tor

İlk bölümde de gördüğümüz gibi bir tor, karşılıklı kenarları belirlenmiş bir dikdörtgen gibi tarif edilir (Şek.3.28).

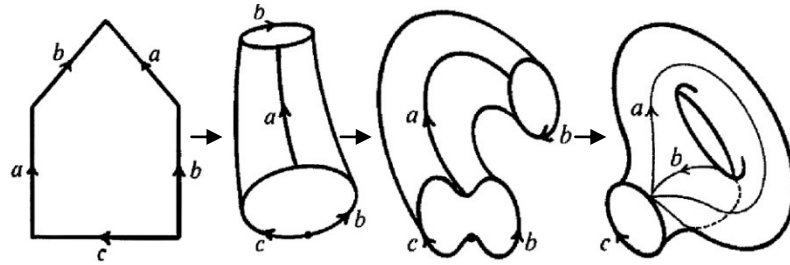


Şekil 3.28 Torun dikdörtgensel temsili

Böylece, torun yüzey sembolü $aba^{-1}b^{-1}$ olur. Eğer yüzey sembolü aşağıdaki dokuyu içerirse

$$\dots a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \dots ,$$

kulp görüntüsü verdiği için, yüzeyde bir *kulp* vardır deriz (Şek.3.29).



Şekil 3.29 Bir kulpun gösterilmesi

Şimdi yüzeyde m kulp olduğunu düşünelim. Onları bir araya getireceğiz ve çaprazkeplerin arkasına koyacağız. Bunu yapmak için operasyon 5 ve 7'yi kullanacağız. Örneğin, eğer yüzey sembolü olarak elimizde $ABaCbDa^{-1}Eb^{-1}F$ varsa, operasyonları şöyle kullanırız:

$$\begin{aligned} ABaCbDa^{-1}Eb^{-1}F &\xrightarrow{Op.5} AxCbDx^{-1}BEb^{-1}F \\ &\xrightarrow{Op.7} AxCyBEDx^{-1}y^{-1}F \\ &\xrightarrow{Op.7} AuBEDCy^{-1}y^{-1}F \\ &\xrightarrow{Op.5} Auvu^{-1}v^{-1}BEDCF \end{aligned}$$

Böylece, eğer A' 'yı çaprazkepler dizesi olarak alırsak,

$$Au_1v_1u_1^{-1}v_1^{-1} \dots u_mv_mu_m^{-1}v_m^{-1}B'$$

formundaki sembolü, gerektiğinde operasyon 5 ve 7'yi kullanarak elde edebiliriz. Bu aşamadayken, birleşik operasyonları kullanarak

$$\text{çaprazkep} + \text{kulp} = 3 \text{ çaprazkep}$$

olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} aabcb^{-1}c^{-1} &\xrightarrow{Op.5} amcm^{-1}ac^{-1} \xrightarrow{Op.6} nm^{-1}nc^{-1}m^{-1}c^{-1} \\ &\xrightarrow{Op.6} xxmc^{-1}m^{-1}c^{-1} \xrightarrow{Op.4} xxd^{-1}m^{-1}m^{-1}d^{-1} \\ &\xrightarrow{Op.4} xxp^{-1}dp^{-1}d^{-1} \xrightarrow{Op.5} xxqp^{-1}q^{-1}p^{-1} \\ &\xrightarrow{Op.6} xxqz^{-1}z^{-1}q \xrightarrow{Op.6} xxyyzz. \end{aligned}$$

Daha açık bir ifadeyle, $aabcb^{-1}c^{-1}$ sembolünü $xxyyzz$ sembolü ile değiştirebiliriz. Böylece, eğer sembolde herhangi bir $\dots a \dots a \dots$ dokusu olması halinde bunu

$$a_1a_1 \dots a_na_nH'$$

formunda, olmaması halinde ise

$$u_1v_1u_1^{-1}v_1^{-1} \dots u_mv_mu_m^{-1}v_m^{-1}H'$$

formunda yazabiliriz.

Her iki durumda da H' hiçbir çaprazkep ve kulp içermez. Eğer H' boşsa, o zaman incelenecek bir şey kalmayacağından dolayı dururuz. Eğer H' boştan farklı ise, o zaman $\dots x \dots x^{-1}$ (ya da $\dots x^{-1} \dots x$) gibi ve/veya sadece bir defa geçen harflerden oluşmak zorundadır. b , H' 'de sadece bir defa geçmek üzere, göreceğiz ki her iki durumda da bunlar $\dots bxb^{-1} \dots$ ile değiştirilebilir.

3.2.6 Manşet: b bir defa geçen harf olmak üzere, eğer bir yüzey sembolü $\dots xbx^{-1} \dots$ formunda bir doku içerirse, o zaman yüzeyde bir *manşet* vardır denir. A, B ve C bir defa geçen harflerden oluşan dizeler olmak üzere, H' 'nın

$$AxBx^{-1}C$$

formunda olduğunu kabul edelim. O zaman, Operasyon 3'ten B 'yi, diğer dizelerde olmayan bir harf ile değiştirebiliriz. Daha sonra, Operasyon 5 ve 3'ü kullanarak

$$AxBx^{-1}C \xrightarrow{\dots Op.3} Axbx^{-1}C \xrightarrow{Op.5} yby^{-1}AC \xrightarrow{\dots Op.3} yby^{-1}w$$

elde ederiz. Görüldüğü gibi, AC için kalan son ihtimal boş olması veya bir defa geçen bir harf olmasıdır. Genel olarak, H' şu formdadır:

$$y_1b_1y_1^{-1}y_2b_2y_2^{-1} \dots y_rb_ry_r^{-1}u^{-1}wu.$$

Bu da manşetlerin başka bir koleksiyonudur. Bunu görmek için, u 'yu sembolün başına koyduktan sonra (bu, herhangi bir tepe ile başlayabileceğimize karşı gelir) gerektiği kadar operasyon 5'i uygulayınız. Böylece, u 'yu tüm manşetler boyunca geçirebiliriz.

Şimdi aynısının çaprazkepler ve torlar için de doğru olduğunu gösterelim. Eğer aşağıdaki operasyonları tekrarlıyorsak

$$ua_1a_1 \xrightarrow{Op.4} a_1'u^{-1}a_1' \xrightarrow{Op.6} a_1''a_1''u,$$

o zaman u 'yu tüm çaprazkepler boyunca geçirebiliriz ve eğer aşağıdaki operasyonları tekrarlıyorsak

$$\begin{aligned} ubcb^{-1}c^{-1} &\xrightarrow{Op.5} dcd^{-1}uc^{-1} \xrightarrow{Op.7} deud^{-1}e^{-1} \xrightarrow{Op.5} fud^{-1}f^{-1}d \\ &\xrightarrow{Op.5} g^{-1}f^{-1}gfu \xrightarrow{Op.5} h^{-1}ghg^{-1}u \xrightarrow{Op.5} ihi^{-1}h^{-1}u, \end{aligned}$$

o zaman da u 'yu tüm kulplar boyunca geçirebiliriz. Böylece, eğer A tüm çaprazkepler veya kulplardan oluşuyorsa, o takdirde $uAH'wu^{-1}$ 'i $AH'uwu^{-1}$ ile değiştirebiliriz. Son olarak, $H'uwu^{-1} = H$ olsun. Bu durumda, yüzey sembolünün daha genel bir formunu elde ederiz. Aşağıdaki önermeyi ispatlamış oluyoruz.

3.2.7 Önerme: A çaprazkep veya kulpların dizesi, H de manşetlerin dizesi olmak üzere, bir yüzey sembolü, Operasyon 1, 2 ve 3 kullanılarak onun *normal formu* AH' 'ye dönüştürülebilir.

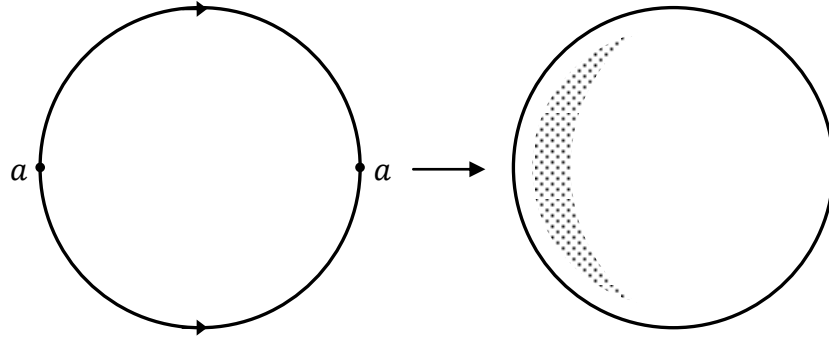
Şimdi, yüzeyler için sınıflandırma teoremini ifade ediyoruz. Daha sonra bunu, “yönlendirilebilirlik, sınır eğrileri ve cins” terimleriyle yeniden ifade edeceğiz.

3.2.8 Yüzeyler için sınıflandırma teoremi: İki yüzeyin homeomorf olması için gerek ve yeter koşul, onları temsil eden sembollerin normal formlarının aynı sayıda çaprazkep veya kulp ve hatta aynı sayıda manşete sahip olmasıdır (Gilbert ve Porter, 1994).

Bölüm 6'da, farklı normal formlara sahip sınır eğrisiz yüzeylerin homeomorf olmadığı, abelyenize edilmiş temel grup kullanılarak ispatlanacaktır. Şimdi bazı normal form örnekleri vereceğiz ve verilen bir sembolün normal formunu hesaplayacağız.

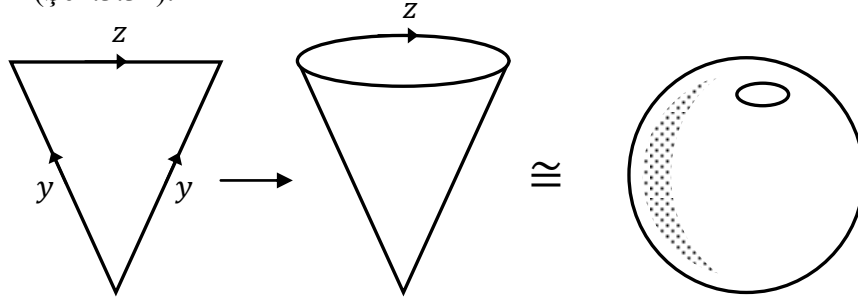
3.2.9 Normal form örnekleri ve hesaplamaları:

1. Boş normal form, $\emptyset$. Bu, Operasyon 2 kullanılarak aa^{-1} ile değiştirilebilir. Bu bir küredir ve iki farklı tepe ile ters yönlendirilmiş kenara sahip istisna bir formdur (Şek.3.30).



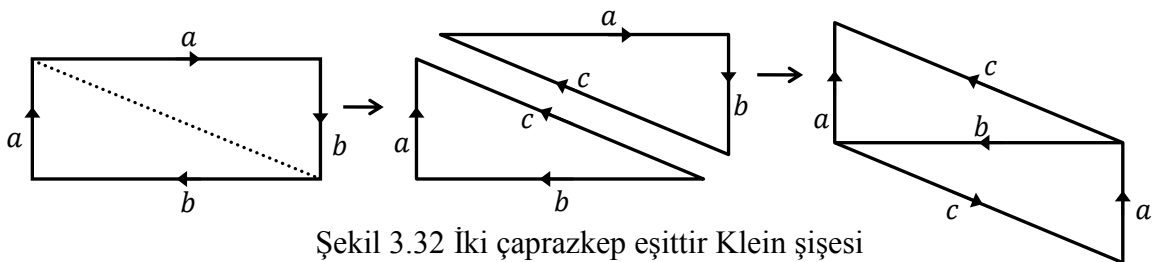
Şekil 3.30 Kürenin çokgensel temsili

2. zyz^{-1} (Şek.3.31).



Şekil 3.31 Bir delikli kürenin elde edilmesi

3. $aba^{-1}b^{-1}$: Tor.
4. aa : İzdüşümsel düzlem.
5. $aabb$: İki çaprazkep = Klein şişesi (Şek.3.32).



Şekil 3.32 İki çaprazkep eşittir Klein şişesi

6. Yüzey sembolü $abac$ ile ifade edilebilen Möbius şeridinin normal formu aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

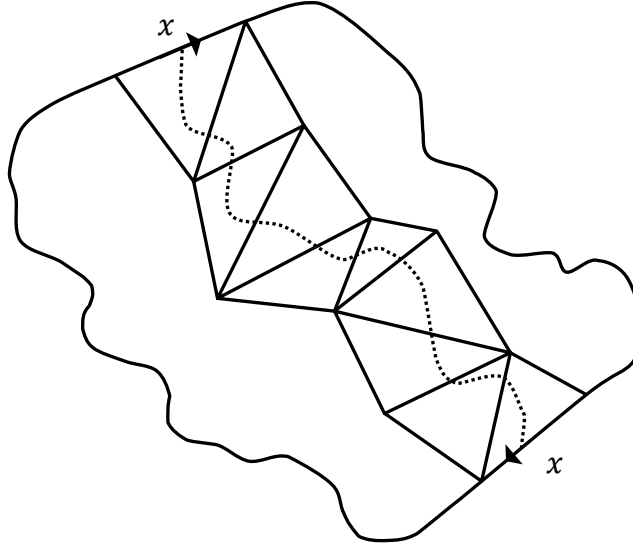
$$\begin{aligned} abac &\xrightarrow{Op.2} abacu^{-1}u \xrightarrow{Dön.Perm.} uabacu^{-1} \xrightarrow{Op.6} uxxb^{-1}cu^{-1} \\ &\xrightarrow{Op.4,6} zzub^{-1}cu^{-1} \xrightarrow{Op.3} zzuwu^{-1}. \end{aligned}$$

3.3 Yüzeylerin Değişmezleri

Bu bölümde yüzeylerin sınır eğrilerinin sayısı, Euler karakteristiği, cinsi, yönlendirilebilirliği ve yönlendirilemezliği gibi bazı değişmezleri üzerinde duracağız. Değişmez ile kastettiğimiz, homeomorfizma altında değişmeyen bir özellik veya bir sayıdır.

3.3.1 Önerme: Bir S yüzeyinin yönlendirilemez olması için gerek ve yeter koşul yüzey sembolünün normal formunun bir çaprazkep içermesidir.

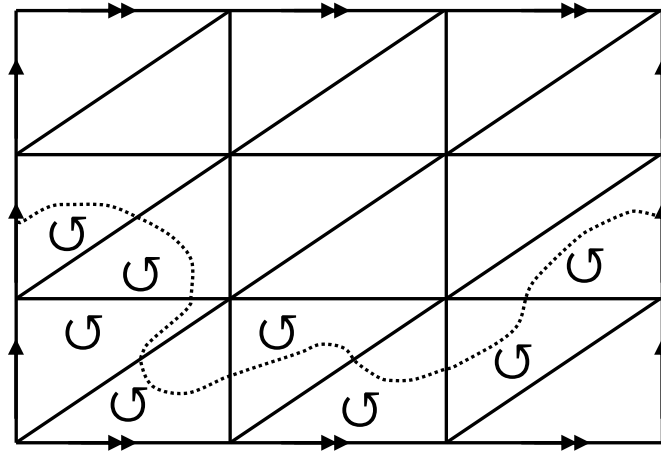
İspat: S 'nin normal formunda bir çaprazkep olduğunu kabul edelim. Bu, S 'nin yüzey sembolünde bir $\dots x \dots x \dots$ dokusu olduğu anlamında gelir. Aynı etiketli bu kenarlar arasında, üçgenlerin her birinin kenarları boyunca en fazla bir defa geçen bir yol seçelim. Eğer bu yolu komşu üçgenler boyunca benzer olarak yönlendirirsek, x kenarını paylaşan iki üçgenin zıt yönlendirildiğini görürüz (Şek.3.33). Dolayısıyla, yüzey yönlendirilemez olmalıdır.



Şekil 3.33 Yönlendirilemez bir yüzeyin düşünülmesi

Diğer taraftan, eğer yüzey sembolünde hiç $\dots x \dots x \dots$ dokusu yoksa, o zaman $zz \dots$ dokusu da yoktur, yani, normal formu elde etmek için kullandığımız operasyonlar bize yeni bir $\dots y \dots y \dots$ elde etmemize izin vermediğinden, normal formda hiç çaprazkep yoktur. Böylece,

normal formu sadece kulplar ve/veya manşetlerden oluşan herhangi bir yüzey için kolaylıkla bir yönlendirme kurabiliriz (Şek.3.34). ■



Şekil 3.34 Torun üçgenleştirmesinde bir yönlendirme seçilmesi

Şimdi sınır eğrilerini tanımlayacağız. Bir sınır eğrisinin ne olduğuna geçmeden önce, yüzey sembolü ile verilen bir yüzeyin çokgensel temsilinin sınırında kaç farklı tepe olduğunu belirleyen bir yöntem verelim. Başlamak için bir kenar etiketi seçelim: a . Eğer a yüzey sembolünde iki kez geçiyorsa, bir sonra gelen, örneğin b , kenarına etiket olarak Q yerleştirelim. Bu durumda b , Q ile başlar veya biter deriz.



Sonra b 'nin tekrar ettiği her yerde Q 'yu yerleştirelim. Sadece etiketsiz kenarlar kalana dek bu yolla devam edelim. Sonra, bunlardan birine R yerleştirelim ve aynı işlemleri tekrar edelim. Örneğin, elimizde $b^{-1}cda^{-1}dc^{-1}ea$ gibi bir yüzey sembolü olsun ve c ile başlayalım. O zaman

$$b^{-1} \underset{Q}{c} d a^{-1} \underset{Q}{d} c^{-1} e a$$

yazarız. d 'nin başlangıç ve bitiş tepesinin Q olduğunu görüyoruz. Bu yüzden, yeniden Q yerleştiriyoruz ve

$$b^{-1} \underset{Q}{c} \underset{Q}{d} \underset{Q}{a^{-1}} \underset{Q}{d} c^{-1} e a$$

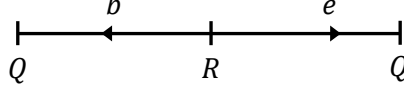
elde ediyoruz. Buradan da a 'nın başlangıç ve bitiş tepesinin Q olduğunu görüyoruz. Böylece, e 'nin bitiş tepesi ve b 'nin bitiş tepesi olarak Q yerleştiriyoruz (sembol aynı tepede başlamak ve bitmek zorunda olduğundan). Sonra

$$\underset{Q}{b^{-1}} \underset{Q}{c} \underset{Q}{d} \underset{Q}{a^{-1}} \underset{Q}{d} \underset{Q}{c^{-1}} \underset{Q}{e} \underset{Q}{a}$$

elde ediyoruz. Son olarak, c 'nin başlangıç tepesi olarak R yerleştiriyoruz:

$$Q \xrightarrow{b^{-1}} R \xrightarrow{c} Q \xrightarrow{d} Q \xrightarrow{a^{-1}} Q \xrightarrow{d} Q \xrightarrow{c^{-1}} R \xrightarrow{e} Q \xrightarrow{a} Q$$

Bir sembol içinde, etiketi yalnızca bir defa geçen kenara *sınır kenarı* denir. Yukarıdaki örnekte, b ve e sınır kenarlarıdır ve biz bunların R tepesini paylaştığını bulduk:



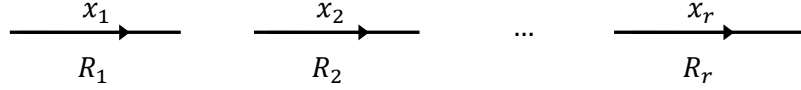
3.3.2 Tanım: Bir *sınır eğrisi* her sınır kenarları dizesini birleştirmekle elde edilir. Bir önceki örnekte, b ve e bir sınır eğrisi oluştururlar.

3.3.3 Önerme: Sınır eğrilerinin sayısı, bir yüzey sembolünün normal formundaki manşet sayısı ile aynıdır. Dolayısıyla da yüzeyin bir değişmezidir.

İspat: Yüzey sembolünün normal formunun n çaprazkep ve r manşetten oluştuğunu kabul edelim. O takdirde, tepe etiketleri aşağıdaki gibi yerleştirilebilir:

$$Q \xrightarrow{a_1} Q \xrightarrow{a_1} Q \xrightarrow{a_2} Q \xrightarrow{a_2} Q \quad \dots \quad Q \xrightarrow{a_n} Q \xrightarrow{a_n} Q \xrightarrow{b_1} R_1 \xrightarrow{x_1} R_1 \xrightarrow{b_1^{-1}} \dots \xrightarrow{b_r} R_r \xrightarrow{x_r} R_r \xrightarrow{b_r^{-1}} Q$$

Açıkça, r sınır kenarı ve r sınır eğrisi vardır:



Normal formun n çaprazkep yerine m kulptan oluşması durumu da benzer şekilde gösterilebilir. Değişmezliği göstermek için her bir temel operasyona bakacağız. Operasyon 1 ve 2'de, yeni etiket iki kez oluşur. Dolayısıyla, bunlar sınır kenarlarına veya sınır eğrilerine etki etmezler. Operasyon 3'de, eğer x bir sınır kenarı değilse, o zaman hiçbir değişiklik oluşmaz. Eğer x bir sınır kenarı ise, o zaman, sınır kenarlarının sayısı bir artmasına rağmen sınır eğrilerinin sayısı aynı kalacaktır. ■



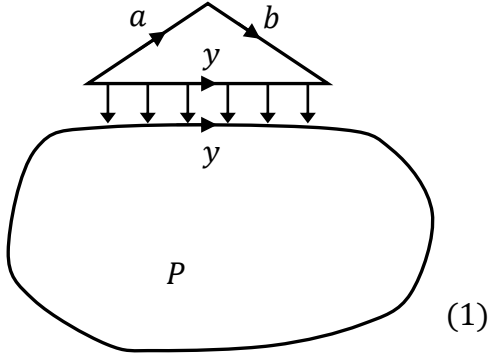
3.3.4 Tanım: S 'nin α_0 farklı tepe, α_1 farklı kenar ve α_2 üçgenden oluşan bir (kombinatoryal) yüzey olduğunu kabul edelim. *Euler karakteristiği* $\chi(S)$

$$\chi(S) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

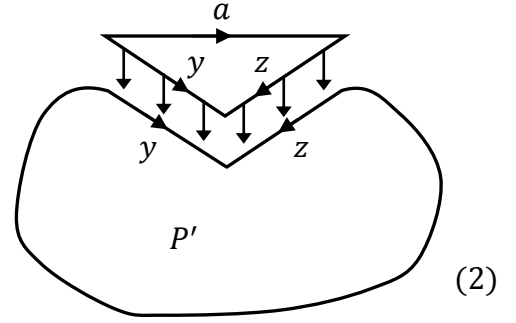
ile verilir. Örneğin, kürenin, torun ve izdüşümsel düzlemin Euler karakteristikleri, sırasıyla, 2,0 ve 1'dir.

3.3.5 Önerme: P , bir S yüzeyini temsil eden bir çokgen olsun. Yüzey sembolünün, P 'nin sınırındaki v farklı tepe ve e farklı kenarla verildiğini kabul edelim. O takdirde $\chi(S) = v - e + 1$.

İspat: P , k üçgenden oluşsun. Önermeyi, k üzerinde tümevarım uygulayarak ispatlayacağız. Eğer $k = 1$ ise, o zaman ya $S = P$ 'dir ya da bir tepe vardır. Her iki durumda da $\alpha_0 = v, \alpha_1 = e$ ve $\alpha_2 = 1$ olur. Şimdi $k - 1$ için eşitliğin sağlandığını kabul edelim ve k için göstereyim. Kesme ve yapıştırmadan hatırlayacağımız üzere P , üçgenlerin Şek.3.35 ve Şek.3.36'de gösterilen iki yoldan biriyle yapıştırılmasıyla elde edilir.



Şekil 3.35 Bir yüzeyi temsil eden çokgene bir üçgen eklenmesi



Şekil 3.36 Bir yüzeyi temsil eden çokgene bir üçgen eklenmesi

Bazı alt durumlar söz konusudur:

Alt durum 1.1: a ve b sembolde değil.

Alt durum 1.2: a sembolde fakat b değil.

Alt durum 1.3: b sembolde fakat a değil.

Alt durum 1.4: a ve b sembolde.

Alt durum 2.1: a sembolde.

Alt durum 2.2: a sembolde değil.

Biz 1.2 ve 1.4 alt durumlarını göstereceğiz, diğerleri de benzer şekilde yapılabilir.

Alt durum 1.2: a 'nın sembolde olduğunu fakat b 'nin olmadığını kabul edelim. O zaman, y boyunca kesmek y kenarına kaybetmeye fakat yeni bir b kenarını kazanmaya sebep olacaktır.

Buna ek olarak, a sembolde olduğundan, yeni bir tepe olmayacaktır. Böylece, $e = e', v = v'$. Buradan, $v - e + 1 = v' - e' + 1$ değişmeden kalır. Şimdi, P' bir S' yüzeyini temsil eder. Tümevarım hipotezinden,

$$\chi(S') = \alpha'_0 - \alpha'_1 + \alpha'_2 = v' - e' + 1$$

elde ederiz. S yüzeyinde bir yeni kenar ve bir yeni üçgen vardır. Dolayısıyla $\alpha_1 = \alpha'_1 + 1$, $\alpha_2 = \alpha'_2 + 1$. Fakat, yeni tepe yoktur, böylece $\alpha_0 = \alpha'_0$ 'dır. O zaman

$$\chi(S) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha'_0 - (\alpha'_1 + 1) + (\alpha'_2 + 1) = \alpha'_0 - \alpha'_1 + \alpha'_2 = \chi(S')$$

elde ederiz.

Alt durum 1.4: Eğer a ve b 'nin ikisi de P' 'nin sınırında geçiyorsa, o zaman, y 'yi sınırdan kaybettiğimizden $e = e' - 1$ ve a ile b 'nin ortak tepesini kaybettiğimizden $v = v' - 1$ elde ederiz. Böylece

$$v - e + 1 = (v' - 1) - (e' - 1) + 1 = v' - e' + 1$$

olur. Benzer şekilde, S yüzeyinde bir tepe kaybettik, bir üçgen kazandık ve farklı kenarların sayısı değişmeden kaldı. Böylece $\alpha_0 = \alpha'_0 - 1$, $\alpha_1 = \alpha'_1$ ve $\alpha_2 = \alpha'_2 + 1$ olur. Buradan

$$\chi(S) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = (\alpha'_0 - 1) - \alpha'_1 + (\alpha'_2 + 1) = \alpha'_0 - \alpha'_1 + \alpha'_2 = \chi(S')$$

elde edilir. ■

Şimdi, Euler karakteristiğinin temel operasyonlar altında değişmediğini görmek kolaydır. Daha açık olarak, Operasyon 1 ve 2'de yeni bir tepe ve yeni bir kenar olduğundan $v - e + 1$ değişmez. Operasyon 1, bir kenarı yeniden yapıştırma anlamına geldiğinden, tepe ve kenar etiketlerinin sayısı sabit kalır.

3.3.6 Tanım: Bir S yüzeyinin normal formundaki çaprazkep veya kulpların sayısı, yüzeyin *cinsi* olarak adlandırılır ve $g(S)$ olarak gösterilir. Örneğin, küre, tor ve izdüşümsel düzlemin cinsleri, sırasıyla 0, 1 ve 1'dir.

Bir sembolle verilen bir yüzeyin cinsini hesaplamak için, Euler karakteristiğinden yararlanacağız. İlk olarak, bir S yüzeyinin yönlendirilebilir olup olmamasına göre değişen iki mümkün normal formunu yazalım:

Eğer S yönlendirilemez, g çaprazkepe ve r manşete sahip ise, o zaman

$$\text{Normal form: } a_1 a_1 \dots a_g a_g y_1 z_1 y_1^{-1} \dots y_r z_r y_r^{-1}.$$

Bu normal formda $r + 1$ farklı manşet etiketine ve $2r + g$ farklı kenar etiketine sahibiz.

Böylece

$$\chi(S) = 2 - g - r.$$

Eğer S yönlendirilebilir, g kulpa ve r manşete sahip ise, o zaman

$$\text{Normal form: } a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} y_1 z_1 y_1^{-1} \dots y_r z_r y_r^{-1}.$$

Bu normal formda $r + 1$ farklı manşet etiketine ve $2r + 2g$ farklı kenar etiketine sahibiz. Böylece

$$\chi(S) = 2 - 2g - r.$$

Dolayısıyla, cinsi hesaplamak için aşağıdaki formülü kullanabiliriz:

$$\text{eğer } S \text{ yönlendirilemez ise, } g = 2 - r - \chi(S)$$

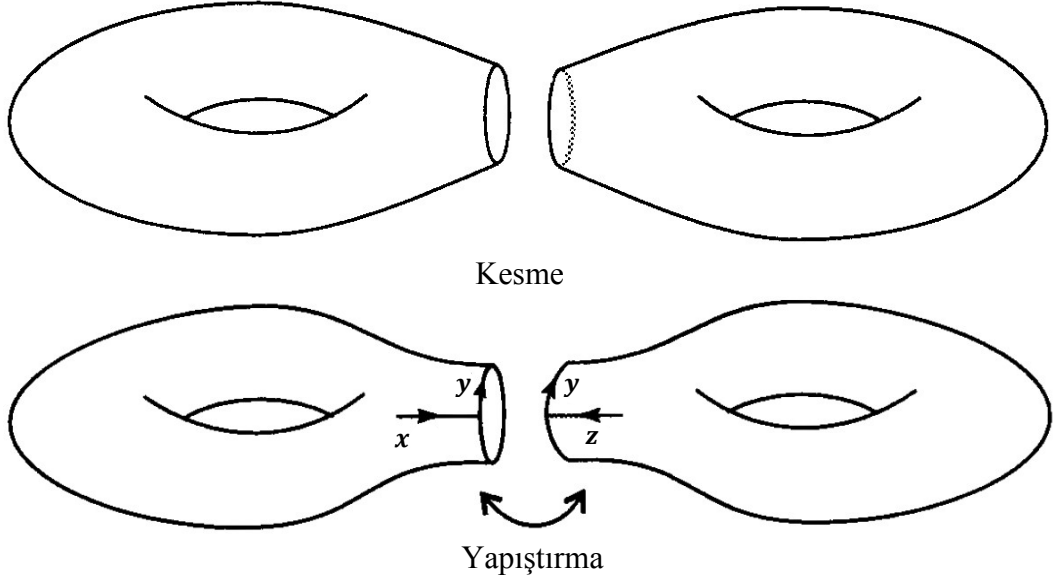
$$\text{eğer } S \text{ yönlendirilebilir ise, } g = \frac{1}{2}(2 - r - \chi(S)).$$

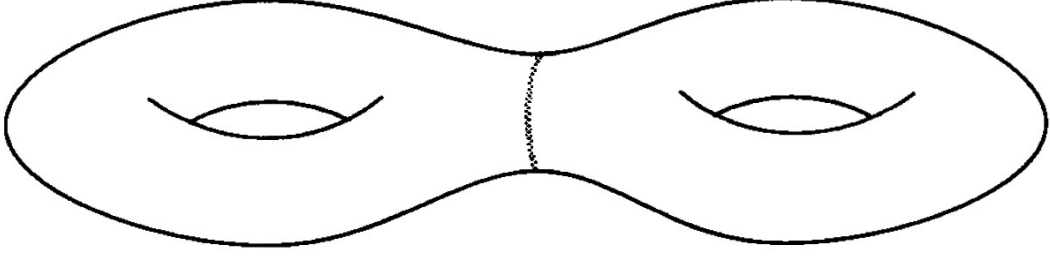
Şimdi, yüzeyler için sınıflandırma teoremini yeniden ifade ediyoruz.

3.3.7 Yüzeyler için sınıflandırma teoremi: İki yüzeyin homeomorf olması için gerek ve yeter koşul ikisinin de yönlendirilebilir veya yönlendirilemez, aynı sayıda sınır eğrileri sayısına ve aynı cinse sahip olmasıdır (Gilbert ve Porter, 1994).

Bölüm 6’te, yönlendirilebilir bir yüzeyin, yönlendirilemez bir yüzeye asla homeomorf olmadığını ispatlayacak ve yüzeyin sınırlı olması durumunu atlayacağız. Fakat *alanın değişmezi* olarak adlandırılan teorem, sınır eğrileri sayısının bir değişmez olmasını gerektirir.

3.3.8 Tanım: Verilen iki S_1 ve S_2 yüzeyinin *bağlantılı toplamı*, her iki yüzeyde dairesel bir delik açıldıktan sonra bu deliğin sınırı boyunca iki yüzeyin yapıştırılması olarak tanımlanır (Şek.3.37). Daha basit olarak, delikleri manşetlerle değiştiririz.





Şekil 3.37 Torların 2-bağlantılı toplamının elde edilmesi
Yüzeylerin n -bağlantılı toplamı da benzer şekilde tanımlanabilir.

3.3.9 Teorem: Herhangi S_1 ve S_2 yüzeyleri için,

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

İspat: S_1 'in yönlendirilemez, g_1 çaprazkep ve r_1 manşete sahip olduğunu; S_2 'nin yönlendirilebilir, g_2 kulpa ve r_2 manşete sahip olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\chi(S_1) = 2 - g_1 - r_1$$

$$\chi(S_2) = 2 - 2g_2 - r_2.$$

olur. $S_1 \# S_2$ 'nin normal formunu hesaplayacağız.

$$S_1 \text{ 'in normal formu: } a_1 a_1 \dots a_{g_1} a_{g_1} y_1 z_1 y_1^{-1} \dots y_{r_1} z_{r_1} y_{r_1}^{-1}$$

$$S_2 \text{ 'nin normal formu: } b_1 c_1 b_1^{-1} c_1^{-1} \dots b_{g_2} c_{g_2} b_{g_2}^{-1} c_{g_2}^{-1} u_1 v_1 u_1^{-1} \dots u_{r_2} v_{r_2} u_{r_2}^{-1}$$

Böylece, $S_1 \# S_2$ bağlantılı toplamının yüzey sembolünü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$a_1 a_1 \dots a_{g_1} a_{g_1} b_1 c_1 b_1^{-1} c_1^{-1} \dots b_{g_2} c_{g_2} b_{g_2}^{-1} c_{g_2}^{-1} y_1 z_1 y_1^{-1} \dots y_{r_1} z_{r_1} y_{r_1}^{-1} u_1 v_1 u_1^{-1} \dots u_{r_2} v_{r_2} u_{r_2}^{-1}$$

1 çaprazkep + 1 kulp = 3 çaprazkep olduğunu, yani, $aabc b^{-1} c^{-1}$ ile $xyyz z^{-1}$ 'yi değiştirebileceğimizi hatırlayalım. Genel olarak,

$$g_1 \text{ çaprazkep} + g_2 \text{ kulp} = g_1 + 2g_2 \text{ çaprazkep.}$$

Böylece, $S_1 \# S_2$ 'nin normal formunda $g_1 + 2g_2$ çaprazkep ve açıkça $r_1 + r_2$ manşet vardır. $S_1 \# S_2$ yönlendirilemez olduğundan,

$$\begin{aligned} \chi(S_1 \# S_2) &= 2 - (g_1 + 2g_2) - (r_1 + r_2) \\ &= (2 - g_1 - r_1) + (2 - 2g_2 - r_2) - 2 \\ &= \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2. \end{aligned}$$

elde ederiz. Aynı sonuç, yönlendirilebilir bir S_1 ve yönlendirilemez bir S_2 için de benzer şekilde gösterilebilir.

Eğer S_1 ve S_2 'nin her ikisi de yönlendirilebilir veya yönlendirilemez ise, $S_1 \# S_2$ 'nin normal formunda $g_1 + g_2$ kulp veya çaprazkep, $r_1 + r_2$ manşet vardır. Böylece, eğer $S_1 \# S_2$ yönlendirilemez ise

$$\begin{aligned}\chi(S_1 \# S_2) &= 2 - (g_1 + g_2) - (r_1 + r_2) \\ &= (2 - g_1 - r_1) + (2 - g_2 - r_2) - 2 \\ &= \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2,\end{aligned}$$

eğer $S_1 \# S_2$ yönlendirilebilir ise

$$\begin{aligned}\chi(S_1 \# S_2) &= 2 - 2(g_1 + g_2) - (r_1 + r_2) \\ &= (2 - 2g_1 - r_1) + (2 - 2g_2 - r_2) - 2 \\ &= \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2,\end{aligned}$$

elde ederiz.

Sonuç olarak, $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$. ■

3.3.10 Örnek: Şimdi, S_1 ve S_2 yüzeylerinin bağlantılı toplamının cinsi olan $g(S_1 \# S_2)$ 'yi, $g(S_1)$ ve $g(S_2)$ türünden bulalım. S_1 'in r_1 , S_2 'nin r_2 manşeti olduğunu kabul edelim. Eğer S_1 ve S_2 'nin ikisi de yönlendirilemez ise, o zaman

$$g(S_1 \# S_2) = 2 - (r_1 + r_2) - \chi(S_1 \# S_2)$$

elde ederiz ve Teorem 3.3.9'dan,

$$\begin{aligned}g(S_1 \# S_2) &= 2 - (r_1 + r_2) - (\chi(S_1) + \chi(S_2) - 2) \\ &= (2 - r_1 - \chi(S_1)) + (2 - r_2 - \chi(S_2)) \\ &= g(S_1) + g(S_2)\end{aligned}$$

yazarız. Aynı sonuç, yönlendirilebilir S_1 ve S_2 yüzeyleri için de gösterilebilir.

Eğer S_1 yönlendirilemez ve S_2 yönlendirilebilir ise, o takdirde $S_1 \# S_2$ yönlendirilemez olur ve

$$\begin{aligned}g(S_1 \# S_2) &= 2 - (r_1 + r_2) - \chi(S_1 \# S_2) \\ &= 2 - (r_1 + r_2) - (\chi(S_1) + \chi(S_2) - 2) \\ &= (2 - r_1 - \chi(S_1)) + \left((2 - r_2 - \chi(S_2)) \cdot \frac{1}{2} \right) 2 \\ &= g(S_1) + 2g(S_2)\end{aligned}$$

elde ederiz. Yönlendirilebilir S_1 ve yönlendirilemez S_2 için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$g(S_1 \# S_2) = 2g(S_1) + g(S_2)$$

3.3.11 Örnek: Toru T ile gösterelim ve sınıflandırma teoremi 3.3.7'yi kullanarak $\mathbb{P}^2 \# T \cong \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ olduğunu ispatlayalım.

İzdüşümsel düzlemin varlığından dolayı, her iki yüzey de yönlendirilemezdir. Ayrıca, $\mathbb{P}^2 \# T$ ve $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ sınır eğrilerine sahip değildir. Bu yüzden, bunların aynı cinse sahip olduklarını göstermek yeterlidir:

Örnek 3.3.10'dan,

$$\begin{aligned} g(\mathbb{P}^2 \# T) &= g(\mathbb{P}^2) + 2g(T) \\ &= 1 + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

elde ederiz ve

$$\begin{aligned} g(\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2) &= g(\mathbb{P}^2) + g(\mathbb{P}^2) + g(\mathbb{P}^2) \\ &= 3 \end{aligned}$$

olur. İkisi de yönlendirilemez, aynı sayıda sınır eğrilerine ve cinse sahip olduklarından, Teorem 3.3.7'den, homeomorfturlar.

3.3.12 Örnek: Aşağıdaki yüzeyi, cins, Euler karakteristiği, yönlendirilebilirlik vb. vererek sınıflandıralım

$$eabc^{-1}adbc^{-1}ef$$

Yönlendirilebilirlik: ... a ... a ... dokusunun varlığından dolayı yönlendirilemezdir.

Tepe Etiketleri:

$$\begin{array}{cccccccccccc} e & a & b & c^{-1} & a & d & b & c^{-1} & e & f \\ Q & Q & R & S & Q & R & R & S & Q & Q & Q \end{array}$$

Sınır kenarları: İki sınır kenarı d ve f , bize iki sınır eğrisi verir. Böylece, $r = 2$ 'dir.

$$\begin{array}{ccc} d & & f \\ \hline \begin{array}{cc} | & | \\ R & R \end{array} & \begin{array}{cc} | & | \\ Q & Q \end{array} \end{array}$$

Euler Karakteristiği: $\chi(S) = v - e + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$

Cins: $g(S) = 2 - r - \chi(S) = 2 - 2 - (-2) = 2$

Böylece, S aşağıdaki normal forma sahiptir:

$$a_1 a_1 a_2 a_2 x y x^{-1} z t z^{-1}.$$

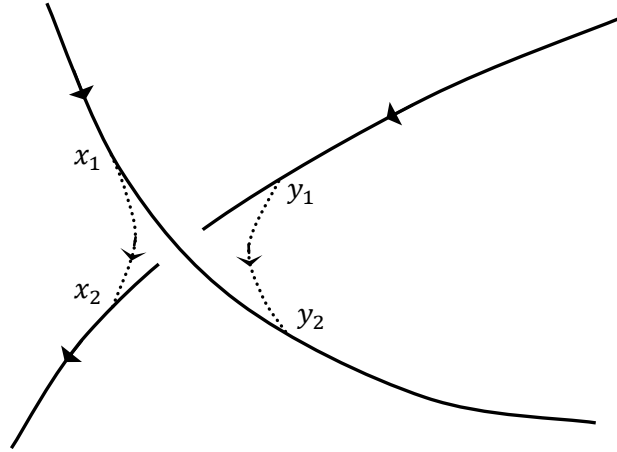
Toparlayacak olursak sınıflandırma teoremi, r manşetli g cinsten bir yüzey ya torların (yönlendirilebilirse) ya da izdüşümsel düzlemlerin (yönlendirilemezse), manşetlerle birlikte, g -bağlantılı toplamı türünden ifade edilebilir.

3.4 Düğümler ve Yüzeyler

3.4.1 Tanım: K , yönlendirilmiş bir düğüm olsun. K 'nın bir Seifert yüzeyi, $\mathbb{R}^3$ 'te gömülen, bir sınır eğrili ve sınır eğrisi K düğümü olan, yönlendirilebilir bir yüzeydir.

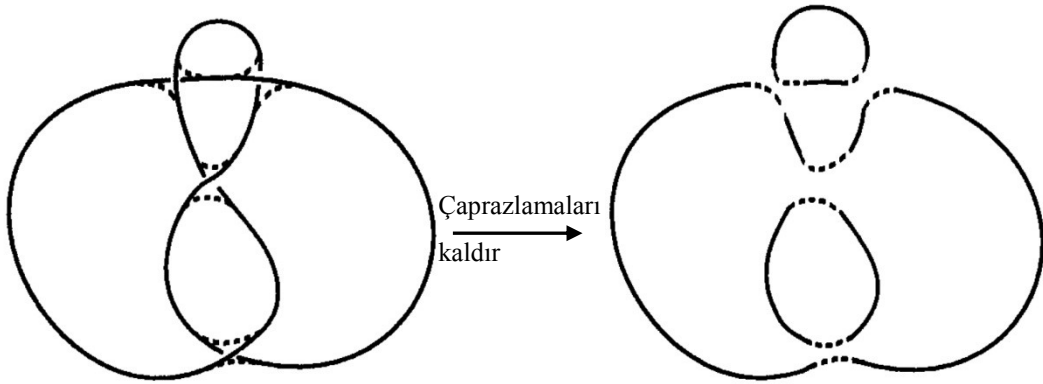
3.4.2 Teorem: $\mathbb{R}^3$ 'de, her bir K düğümünün bir Seifert yüzeyi vardır.

İspat: K düğümünün bir izdüşümünü alalım ve onu yönlendirelim. Sonra, her bir çaprazlamada, yönlendirmeye bağlı kalarak iki tane yönlü yay ekleyelim (Şek.3.38).



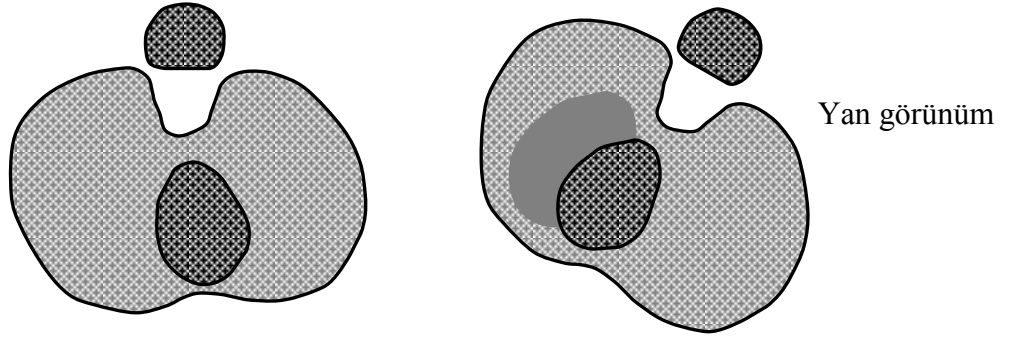
Şekil 3.38 Bir çaprazlamada yönlü bir yay eklenmesi

Eğer çaprazlamaları silersek, düzlemde yönlendirilmiş, kesişmeyen bir basit eğriler kümesi elde ederiz. Bu eğriler *Seifert çemberleri* olarak adlandırılır (Şek.3.39).



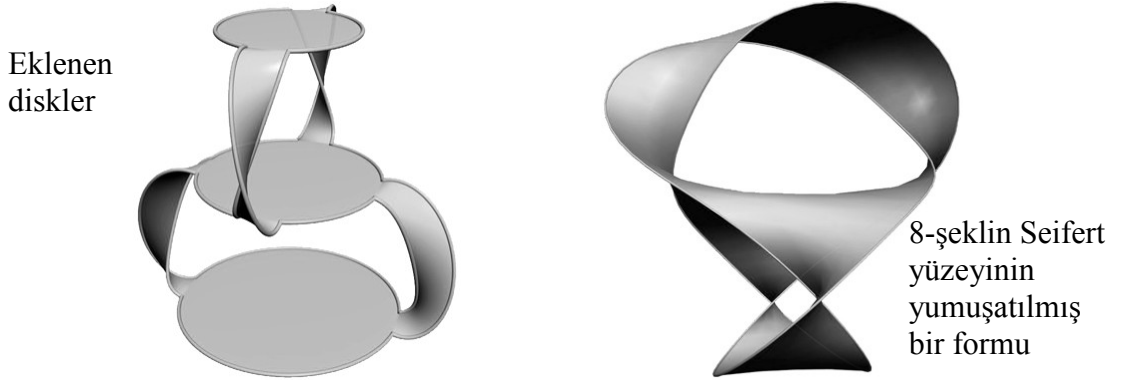
Şekil 3.39: Üç Seifert çemberi

Bu çemberlere ayrı diskler ekleyelim. Seifert çemberleri üst üste binebileceğinden dolayı, diskleri $\mathbb{R}^3$ 'de ekliyoruz (Şek.3.40).



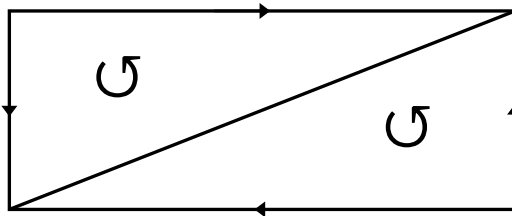
Şekil 3.40 Seifert çemberlerine ayrı diskler eklenmesi

Her çaprazlamanın komşuluğunda iki disk birbiriyle buluşur. Bu disklerin sınırları üzerinde iki kapalı aralık alalım ve bunları kıvrılmış bir şerit ile bağlayalım (Şek.3.41). Bu şeridin sınırları, Seifert çemberlerini elde etmek için sildiğimiz iki yaydır. Böylece, bağlantılı olmayabilen yüzeylere sahip oluruz. Bu yüzeylerin farklı bileşenlerini ince tüplerle bağlarsak, aynı sınıra sahip bağlantılı bir yüzey elde ederiz.



Şekil 3.41 3-Boyutlu görünüm

Her Seifert çemberine eklenen disk, düğümden gelen doğal bir yönlendirmeye sahiptir. Her kıvrılmış şerit bu yönlendirmelerle uyumlu olacak şekilde yönlendirilebileceğinden (Şek.3.42), kıvrılmış şeritlerin Seifert çemberleri üzerine yapıştırılmasıyla elde edilen yüzey de yönlendirilebilir olacaktır. ■



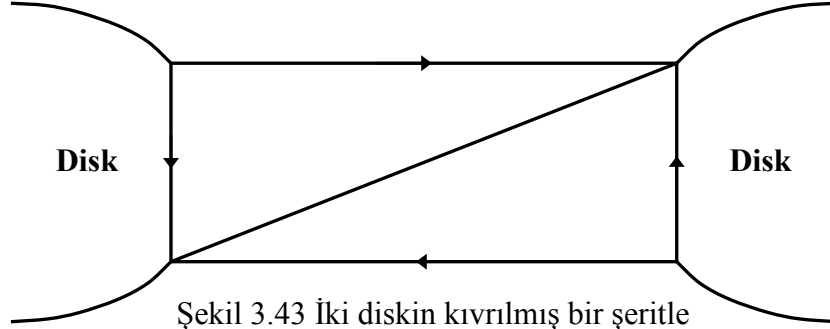
Şekil 3.42 Kıvrılmış şeritlerin yönlendirilmesi

3.4.3 Önerme: c , K düğümündeki çaprazlama sayısı ve s , Seifert çemberleri sayısı olmak üzere, bu algoritmayla elde edilen S yüzeyinin cinsi

$$g(S) = \frac{1}{2}(c - s + 1)$$

olur.

İspat: Bir diskin Euler karakteristiğinin 1 olduğunu biliyoruz. Eğer s diski düşünersek $\chi(S)$, s kadar artacaktır. Eğer iki diski kıvrılmış bir şeritle bağlarsak (Şek.3.43), o zaman, tepelerin sayısı α_0 , değişmez; kenarların sayısı α_1 , üç artar; ve üçgenlerin sayısı α_2 , iki artar.



Şekil 3.43 İki diskin kıvrılmış bir şeritle bağlanması

Bu yüzden, c kıvrılmış şerit $\chi(S)$ 'i, c kadar azaltır. Dolayısıyla, $\chi(S) = s - c$ 'dir. S yönlendirilebilir ve bir sınır eğrisine sahip olduğundan

$$g(S) = \frac{1}{2}(2 - 1 - \chi(S)) = \frac{1}{2}(c - s + 1). \blacksquare$$

olur. Düğümün farklı bir izdüşümü farklı bir yüzey verebilir. Bu sebepten dolayı, bu $g(S)$ cinsi bir düğüm değişmezi değildir.

3.4.4 Tanım: Bir K düğümünün cinsi $g(K)$,

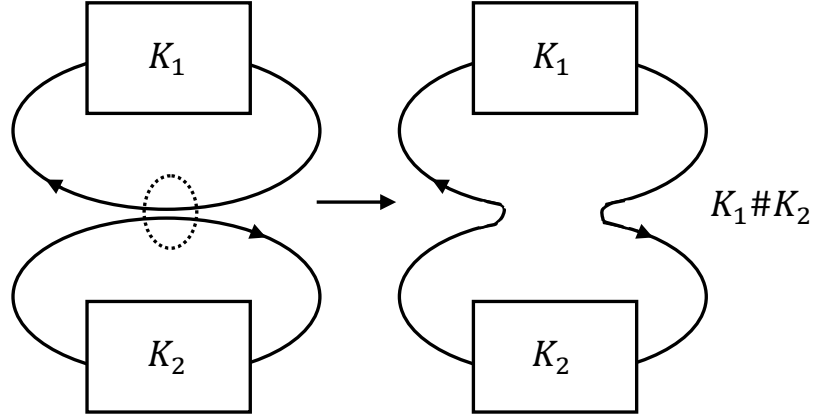
$$g(K) = \min\{g(F): F, K \text{ için bir Seifert yüzeyidir}\}$$

ile tanımlanır. Buradan, K 'nın aşıkâr düğüm olması için gerek ve yeter koşulun, onun 0 cinse sahip olmasıdır diyebiliriz. Hatta, eğer K 'nın 1 cinse sahip olduğu ve aşıkâr düğüm olmadığı biliniyorsa, o zaman, $g(K) = 1$ 'dir. Önerme 3.4.3'ten, tek söyleyebileceğimiz

$$g(K) \leq \frac{1}{2}(c - s + 1)$$

olduğudur. Çünkü Teorem 3.4.2 minimal cinse sahip bir yüzey vermeyi gerektirmez.

3.4.5 Tanım: K_1 ve K_2 düğümlerinin bağlantılı toplamı, her iki düğümün yönlendirmesine bağlı kalarak, K_1 'in K_2 'ye eklenmesiyle elde edilir ve $K_1 \# K_2$ ile gösterilir (Şek.3.44).



Şekil 3.44: K_1 ve K_2 düğümlerinin bağlantılı toplamı

3.4.6 Teorem: Herhangi K_1 ve K_2 düğümleri için aşağıdaki eşitlik geçerlidir (Adams, 2004) :

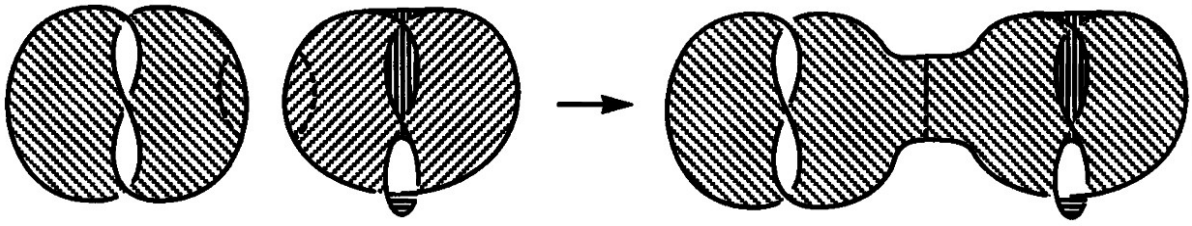
$$g(K_1) + g(K_2) = g(K_1 \# K_2).$$

İspat: İlk önce, $g(K_1 \# K_2) \leq g(K_1) + g(K_2)$ olduğunu gösterelim.

K_1 ve K_2 düğümlerinin minimal cinslere sahip S_1 ve S_2 Seifert yüzeylerini düşünelim.

Genelliği bozmadan, bu yüzeylerin birbirleriyle kesişmediğini kabul edebiliriz. Sonra, yönlendirmelerine bağlı kalarak bunları bir şeritle bağlarız. Böylece, $K_1 \# K_2$ düğümü için, $g(K_1) + g(K_2)$ cinse sahip bir Seifert yüzeyi elde ederiz (Şek.3.45). Buradan,

$$1) \quad g(K_1 \# K_2) \leq g(K_1) + g(K_2).$$



Şekil 3.45 İki düğümün bağlantılı toplamı için bir Seifert yüzeyi

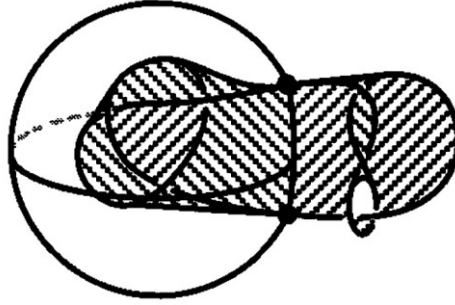
Şimdi, $g(K_1 \# K_2) \geq g(K_1) + g(K_2)$ olduğunu gösterelim. $K_1 \# K_2$ düğümü için, minimal cinse sahip bir S Seifert yüzeyi düşünelim. $K_1 \# K_2$ bağlantılı toplamında, K_1 ve K_2 düğümlerini bazı A, B noktalarında ayıran bir S^2 küresi vardır.

S^2 küresi, S yüzeyini birçok basit kapalı eğri boyunca keser ve bir eğri A, B noktalarında biter. Her çember S^2 küresini iki parçaya böler; bunlardan biri AB eğrisinin noktalarını içermez. Genelliği bozmadan, $S \cap S^2$ kesişiminin basit kapalı $a_1, \dots, a_k$ eğrilerinden ve A ile B 'yi bağlayan bir eğriden oluştuğunu kabul edebiliriz. Her a_i 'nin komşuluğu bir silindire benzer. Eğriyi içeren küçük bir silindirik parçayı silindirden silelim ve silindirin geri kalan parçalarını

küçük disklerle yapıştırılalım. Eğer elde edilen yüzey bağlantılı değilse, o zaman onun $K_1 \# K_2$ 'yi içeren parçasını alalım. Bu operasyonları her çembere uygulayarak $K_1 \# K_2$ düğümünü içeren ve S^2 ile sadece AB boyunca kesişen bir S' Seifert yüzeyi elde ederiz. Bu operasyonlar sadece kulpların sayısını arttırabilir. Böylece, $g(S') \leq g(S)$ olur. S minimal cinse sahip olduğundan

$$g(S') = g(S) = g(K_1 \# K_2)$$

yazarız. S^2 ve S' arasında sadece bir kesişim eğrisi kaldığından, S^2 küresi S' 'yü K_1 için bir Seifert yüzeyine ve K_2 için bir Seifert yüzeyine böler (Şek.3.46).



Şekil 3.46 Bir Seifert yüzeyinin iki Seifert yüzeyine bölünmesi

S'_1 ve S'_2 , K_1 ve K_2 için bu Seifert yüzeyleri olsunlar. $g(K_1) \leq g(S'_1)$ ve $g(K_2) \leq g(S'_2)$ eşitsizliklerine zaten sahip olduğumuzdan,

$$2) \quad g(K_1) + g(K_2) \leq g(S'_1) + g(S'_2) = g(S') = g(K_1 \# K_2)$$

elde ederiz. Sonuç olarak, 1 ve 2'den, istenen eşitlik elde edilir.

$$g(K_1) + g(K_2) = g(K_1 \# K_2). \blacksquare$$

4. TEMEL GRUP

4.1 Homotopi ve Homotopi Tipi

4.1.1 Tanım: İki sürekli $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ tasvirleri için, eğer

$$F(x, 0) = f_0(x) \text{ ve } F(x, 1) = f_1(x), \forall x \in X$$

olacak şekilde sürekli bir $F: X \times I \rightarrow Y$ tasviri varsa, o zaman f_0 ve f_1 *homotopiktir* denir. Burada $I, [0,1]$ birim aralığı ve X, Y topolojik uzaylardır. F tasviri, f_0 ile f_1 arasında bir homotopi olarak adlandırılır ve bu $F: f_0 \simeq f_1$ şeklinde yazılır. Eğer $f_0 \simeq f_1$ ve f_1 bir sabit tasvir ise, o zaman f_0 *sıfır-homotopiktir* denir.

4.1.2 Geçiş lemması: X, Y topolojik uzaylar olsun. A ve B , X 'in kapalı alt kümeleri olmak üzere $X = A \cup B$ olduğunu kabul edelim. Eğer $f: A \rightarrow Y$ ve $g: B \rightarrow Y$, her $x \in A \cap B$ için $f(x) = g(x)$ olacak şekilde sürekli tasvirler ise, o zaman

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{eğer } x \in A, \\ g(x), & \text{eğer } x \in B, \end{cases}$$

ile tanımlanan $h: X \rightarrow Y$ fonksiyonu süreklidir.

İspat: C , Y 'nin kapalı bir alt kümesi olsun. O zaman

$$\begin{aligned} h^{-1}(C) &= h^{-1}(C) \cap (A \cup B) \\ &= (h^{-1}(C) \cap A) \cup (h^{-1}(C) \cap B) \\ &= f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C). \end{aligned}$$

f sürekli olduğundan, $f^{-1}(C)$ A 'da ve dolayısıyla X 'de kapalıdır (A da X 'de kapalı olduğundan). Benzer şekilde $g^{-1}(C)$, X 'de kapalıdır. Buradan, $h^{-1}(C)$ X 'de kapalıdır ve böylece h süreklidir. ■

4.1.3 Lemma: $\simeq$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat:

- I) *Yansıma:* Verilen herhangi f için, $F(x, t) = f(x)$ tanımlarsak, açıkça $f \simeq f$.
- II) *Simetri:* $F: f \simeq g$ olsun. $G(x, t) = F(x, 1 - t)$ tanımlarsak, G sürekli olur ve g ile f arasında bir homotopi olur, $G: g \simeq f$.
- III) *Geçişme:* $F: f \simeq g$ ve $G: g \simeq h$ olsun. $H: X \times I \rightarrow Y$ fonksiyonunu

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ için,} \\ G(x, 2t - 1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ için,} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Eğer $t = \frac{1}{2}$ ise, $F(x, 1) = g(x) = G(x, 0)$ elde ederiz. Böylece, H iyi tanımlıdır. H , $X \times I$ 'nin iki kapalı $X \times [0, \frac{1}{2}]$ ve $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ alt kümelerinde sürekli olduğundan, geçiş lemmasından, $X \times I$ 'da da sürekli dir. Dolayısıyla, $H(x, 0) = f(x)$ ve $H(x, 1) = h(x)$ olduğuna dikkat ederek, H 'nin f ile h arasında istenen homotopi olduğu görülür. ■

4.1.4 Örnek: X, Y ve Z topolojik uzaylar, $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ ve $g_0, g_1: Y \rightarrow Z$ sürekli tasvirler olsun. Eğer $f_0 \simeq f_1$ ve $g_0 \simeq g_1$ ise, $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$ olduğunu gösterelim.

$F: f_0 \simeq f_1$ ve $G: g_0 \simeq g_1$ homotopiler olsun. Eğer $H: X \times I \rightarrow Z$ fonksiyonunu

$$H(x, t) = \begin{cases} g_0(F(x, 2t)), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ için,} \\ G(f_1(x), 2t - 1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ için,} \end{cases}$$

ile tanımlarsak, o zaman H sürekli olur ve

$$H(x, 0) = g_0(F(x, 0)) = g_0(f_0(x)) = (g_0 \circ f_0)(x),$$

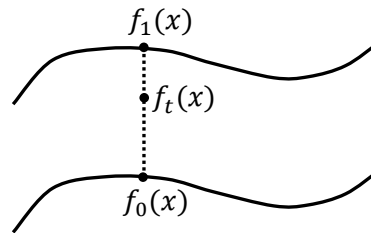
$$H(x, 1) = G(f_1(x), 1) = g_1(f_1(x)) = (g_1 \circ f_1)(x),$$

olur. Böylece H , $g_0 \circ f_0$ ile $g_1 \circ f_1$ arasında bir homotopidir.

4.1.5 Örnek: Herhangi iki $a, b \in A$ noktaları için, eğer a ve b 'yi birleştiren düz doğru parçası A 'da yer alıyorsa, o zaman $A \subset \mathbb{R}^n$ alt uzayı *konveks* olarak adlandırılır. f_0 ve f_1 bir X uzayından $\mathbb{R}^n$ 'nin konveks bir Y alt uzayı içine iki tasvir olsun. O takdirde

$$F(x, t) = tf_1(x) + (1 - t)f_0(x), \forall (x, t) \in X \times I$$

ile tanımlanan $F: X \times I \rightarrow Y$ tasviri f_0 ile f_1 arasında bir homotopidir (Şek.4.1).



Şekil 4.1 Bir uzay ile $\mathbb{R}^n$ 'nin konveks bir alt uzayı arasında bir homotopi

Böylece, $\mathbb{R}^n$ 'nin konveks bir alt uzayı içine tanımlanan herhangi sürekli tasvir sıfır-homotopiktir.

4.1.6 Tanım: Bir X uzayı için eğer özdeşlik tasviri $id_X: X \rightarrow X$ sıfır-homotopik ise X *büzülebilir* olarak adlandırılır.

Böylece, $\mathbb{R}^n$ 'nin herhangi konveks alt uzayının büzülebilir olduğunu söyleyebiliriz.

4.1.7 Lemma: Eğer X keyfi bir topolojik uzay ve Y bir büzülebilir uzay ise, o zaman herhangi iki sürekli $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ tasvirleri homotopiktir.

İspat: $F: Y \times I \rightarrow Y$, $id_Y: Y \rightarrow Y$ ile y_0 değerini alan bir $c: Y \rightarrow Y$ sabit tasviri arasında bir homotopi olsun. O takdirde

$$F(y, 0) = y \text{ ve } F(y, 1) = y_0, \forall y \in Y.$$

$\simeq$ bir denklik bağıntısı olduğundan, herhangi $f: X \rightarrow Y$ tasvirinin, X 'den Y içine y_0 değerini alan sabit tasvire homotopik olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer $G: X \times I \rightarrow Y$ tasvirini

$$G(x, t) = F(f(x), t)$$

ile tanımlarsak, o zaman G sürekli olur ve istenen elde edilir:

$$G(x, 0) = F(f(x), 0) = f(x),$$

$$G(x, 1) = F(f(x), 1) = y_0, \forall x \in X. \blacksquare$$

4.1.8 Örnek: X , $\mathbb{R}^n$ 'nin konveks bir alt uzayı ve Y keyfi bir topolojik uzay ise, o zaman herhangi sürekli $f: X \rightarrow Y$ tasvirinin sıfır-homotopik olduğunu gösterelim. $x_0 \in X$ seçelim ve $F: X \times I \rightarrow Y$ fonksiyonunu

$$F(x, t) = f(tx_0 + (1 - t)x)$$

ile tanımlayalım. F süreklidir ve $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = f(x_0), \forall x \in X$ olur. Böylece f , X 'den Y içine $f(x_0)$ değerini alan sabit tasvire homotopiktir.

4.1.9 Tanım: Eğer

$$g \circ f \simeq id_X: X \rightarrow X$$

$$f \circ g \simeq id_Y: Y \rightarrow Y$$

olacak şekilde $f: X \rightarrow Y$ ve $g: Y \rightarrow X$ sürekli tasvirleri varsa X ve Y uzayları *aynı homotopi tipindedir* denir. Bu durumda f ve g tasvirleri *homotopi denklikleri* olarak adlandırılır ve biri diğerinin *homotopi tersidir* denir. Ayrıca X ve Y *homotopi denktir* de denir ve bu $X \simeq Y$ ile gösterilir.

$\simeq$ bağıntısının yansımali ($X \simeq X$) ve simetrik ($X \simeq Y \Rightarrow Y \simeq X$) olduğu açıktır. Geçişme özelliği ise homotopik tasvirlerin bileşkelerinin de homotopik olduğu kullanılarak kolayca gösterilebilir (Örnek 4.1.4). Dolayısıyla, $\simeq$ bir denklik bağıntısıdır.

4.1.10 Lemma: Bir Y topolojik uzayının büzülebilir olması için gerek ve yeter koşul onun tek nokta uzayı ile aynı homotopi tipine sahip olmasıdır.

İspat: Y büzülebilir olsun. y_0 değerini alan $Y \rightarrow Y$ sabit tasviri ile id_Y homotopik olacak şekilde $y_0 \in Y$ seçelim. $\iota: \{y_0\} \hookrightarrow Y$ ve $c: Y \rightarrow \{y_0\}$ sırasıyla kapsama tasviri ve sabit tasvir olsun. O zaman, $c \circ \iota = id_{\{y_0\}}$ olur. $\iota \circ c: Y \rightarrow Y$ ve $id_Y: Y \rightarrow Y$ tasvirlerinin Y 'den büzülebilir bir uzaya olduklarına dikkat ediyoruz. Lemma 4.1.7'den bunlar homotopiktir ve $\iota \circ c \simeq id_Y$ 'dir. Böylece, $Y \simeq \{y_0\}$ olur.

Tersine, $Y \simeq \{y_0\}$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $g \circ f \simeq id_Y$ olacak şekilde $f: Y \rightarrow \{y_0\}$ ve $g: \{y_0\} \rightarrow Y$ vardır. Diğer taraftan, $(g \circ f)(y) = g(f(y)) = g(y_0)$, Y 'den Y 'ye sabit bir tasvirdir. Dolayısıyla, Y büzülebilirdir. ■

Açıkça, homeomorf uzaylar aynı homotopi tipindendir, fakat tersi doğru değildir. Örneğin, eğer $n > 0$ ise $D^n \subseteq \mathbb{R}^n$ n -diski $\{y\} \subseteq D^n$ tek noktasına homeomorf değildir. Fakat, biliyoruz ki D^n , $\mathbb{R}^n$ 'nin konveks bir alt uzayı ve bu yüzden büzülebilir. Bu ise D^n 'nin tek nokta ile aynı homotopi tipine sahip olmasını gerektirir.

4.1.11 Lemma: Eğer Y büzülebilir ise, herhangi bir X topolojik uzayı için $X \times Y \simeq X$ 'dir.

İspat: Y büzülebilir olsun ve $y_0 \in Y$ seçelim. O zaman $F: Y \times I \rightarrow Y$, id_Y ile y_0 değerini alan sabit tasvir arasında bir homotopidir:

$$F(y, 0) = y, F(y, 1) = y_0, \forall y \in Y.$$

$f(x, y) = (x, y_0)$ ile $f: X \times Y \rightarrow X \times \{y_0\}$ ve $\iota(x, y_0) = (x, y_0)$ ile $\iota: X \times \{y_0\} \hookrightarrow X \times Y$ tanımlayalım. Açıkça, $f \circ \iota = id_{X \times \{y_0\}}$ 'dir. Eğer $G: (X \times Y) \times I \rightarrow X \times Y$ fonksiyonunu, $G((x, y), t) = (x, F(y, t))$ ile tanımlarsak, G sürekli olur ve aşağıdakilere sahip oluruz:

$$G((x, y), 0) = (x, F(y, 0)) = (x, y) = id_{X \times Y}(x, y),$$

$$G((x, y), 1) = (x, F(y, 1)) = (x, y_0) = (\iota \circ f)(x, y).$$

Buradan, $\iota \circ f \simeq id_{X \times Y}$ olur. Dolayısıyla, $X \times Y \simeq X \times \{y_0\} \cong X$. ■

4.1.12 Örnek: Silindir: $S^1 \times [0, 1] \simeq S^1$; katı tor: $S^1 \times D^2 \simeq S^1$.

4.1.13 Tanım: A, X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. $\iota: A \hookrightarrow X$ kapsama tasviri olmak üzere, eğer $r \circ \iota = id_A: A \rightarrow A$ olacak şekilde sürekli bir $r: X \rightarrow A$ tasviri varsa, A 'ya X 'in bir *geri çekilmiş*i denir. r tasvirine X 'in A üzerine bir *geri çekilmesi* denir.

4.1.14 Örnek: $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \simeq S^1$.

İspat: $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ ile tanımlanan $r: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow S^1$ tasviri bir geri çekilmedir. Her $x \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ için x ve $r(x)$ 'i birleştiren doğru parçası $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 'da yer aldığından,

$$F(x, t) = t((\iota \circ r)(x)) + (1 - t)x$$

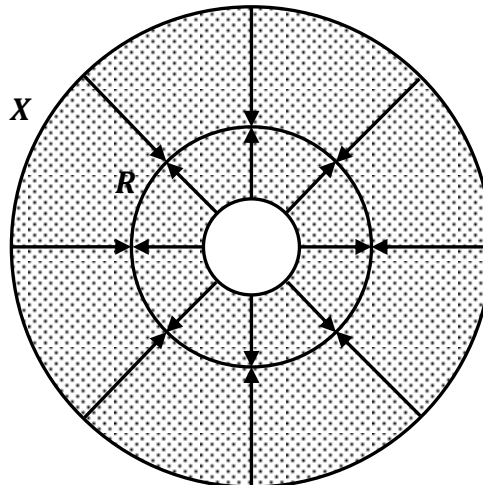
fonksiyonu, $id_{\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}}$ ile $\iota \circ r$ arasından bir homotopidir. Burada $\iota: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ kapsama tasvirini göstermektedir. Buradan $\iota \circ r \simeq id_{\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}}$ olur. $r \circ \iota = id_{S^1}$ olduğu da açıktır. Dolayısıyla, $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \simeq S^1$. ■

4.1.15 Tanım: A, X 'in bir alt uzayı olsun. Eğer her $x \in X$ için $F(x, 0) = x, F(x, 1) \in A$ ve her $a \in A$ için $F(a, t) = a$ olacak şekilde sürekli bir $F: X \times I \rightarrow X$ varsa, A 'ya X 'in *çekilmiş bozunumu* denir. F homotopisi X 'in A üzerine bir *çekilme bozunması* olarak adlandırılır. $r(x) = F(x, 1)$ ile tanımlanan $r: X \rightarrow A$ tasviri X 'in A üzerine bir geri çekilmesidir ve F, id_X ile $\iota \circ r$ arasında bir homotopidir ($\iota: A \hookrightarrow X$ kapsama tasviri).

4.1.16 Teorem: Eğer A, X 'in çekilmiş bozunumu ise, o zaman A ile X aynı homotopi tipindedir (Munkres, 2000).

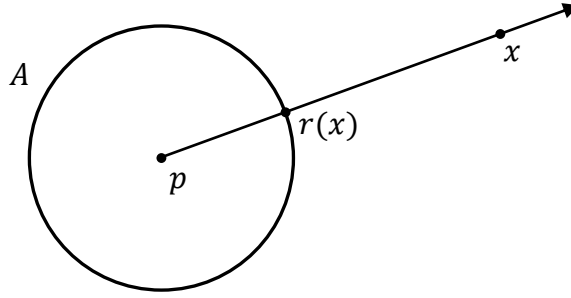
İspat: A, X 'in çekilmiş bozunumu olsun. Tanımdan, r, X 'in A üzerine bir geri çekilmesi ve $\iota: A \hookrightarrow X$ kapsama tasviri olmak üzere, $\iota \circ r \simeq id_X$ 'dir. Açıkça, $r \circ \iota = id_A$ 'dır ve $A \simeq X$. ■

4.1.17 Örnek: Şek.4.2'de halka şeklindeki X 'in bir çekilmiş bozunumunun R çemberi olduğu gösterilmiştir.



Şekil 4.2 Halkanın bir çekilmiş bozunumu

4.1.18 Örnek: Belli bir p noktası hariç $\mathbb{R}^2$ 'deki tüm noktalardan oluşan $\mathbb{R}^2 - p$ delikli düzlemini düşünelim. A , p 'yi merkez kabul eden bir çember olsun (Şek.4.3).



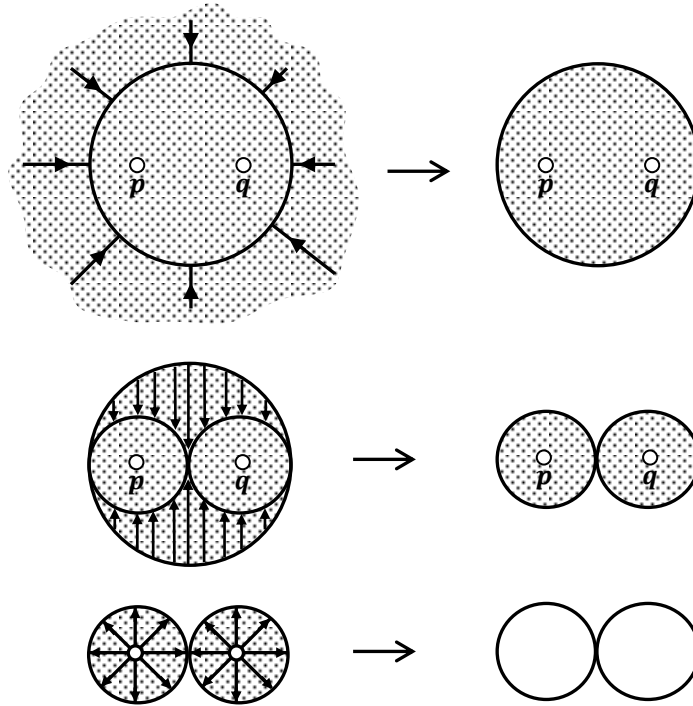
Şekil 4.3 Delikli düzlemin bir çekilmiş bozunumu

$x \in \mathbb{R}^2 - p$ için, p 'den x 'e yarı doğrusu, A çemberini bir $r(x)$ noktasında keser. Açıkça, r fonksiyonu, $\mathbb{R}^2 - p$ 'nin A üzerine bir geri çekilmesidir. Eğer F homotopisini

$$F(x, t) = tr(x) + (1 - t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2 - p, \quad t \in I,$$

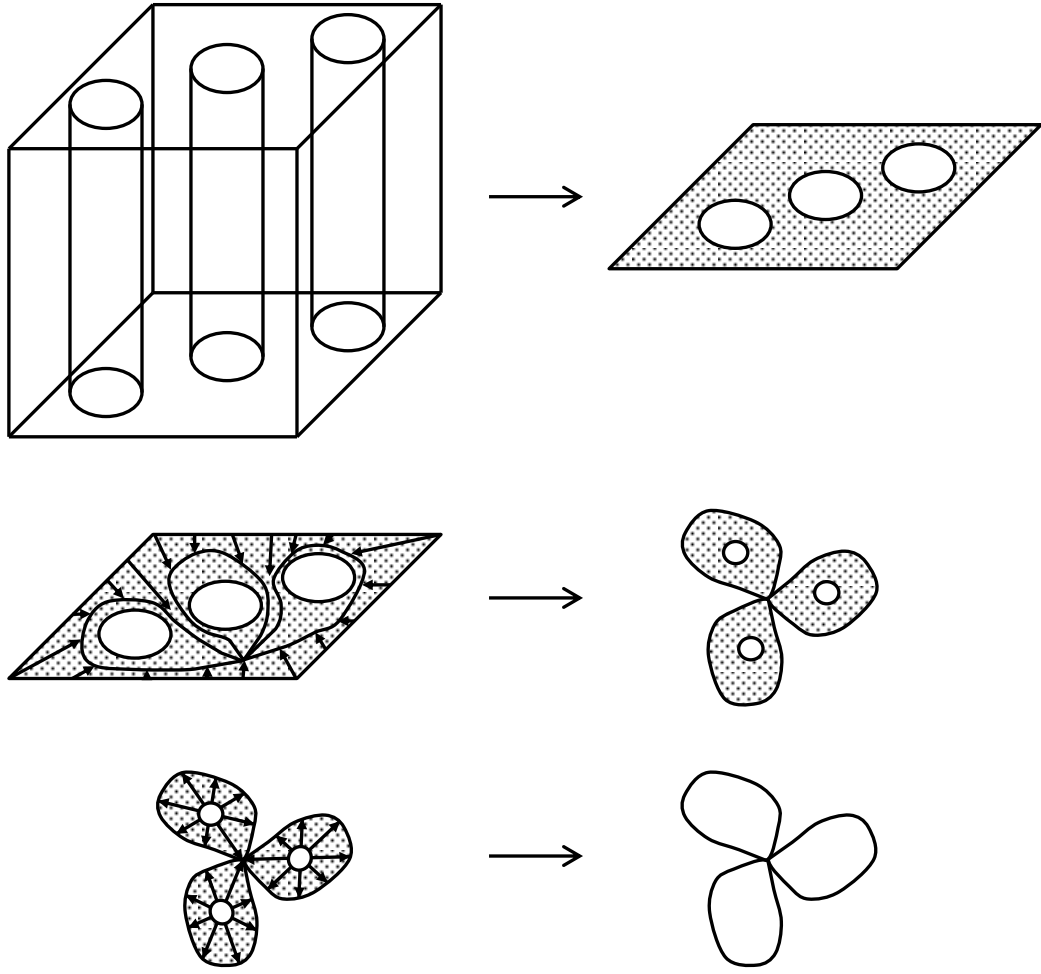
ile tanımlarsak, o zaman F 'nin bir çekilme bozunması olduğu da açıktır. Böylece A , $\mathbb{R}^2 - p$ 'nin bir çekilmiş bozunumudur.

4.1.19 Örnek: $\mathbb{R}^2 - p - q$ çift delikli düzlemini düşünelim. Bu düzlemin bir çekilmiş bozunumunun “sekiz-şekli” uzayı (yani, bir noktada birleşen iki çember) olduğu Şek.4.4’de gösterilmiştir.



Şekil 4.4 Çift delikli düzlemin bir çekilmiş bozunumu

4.1.20 Örnek: Dikey olarak delinmiş küpün bir çekilmiş bozunumunun 3-yapraklı gül (bkz.5.2.1 n -yapraklı gül) olduğu Şek.4.5’de gösterilmiştir.



Şekil 4.5 Dikey olarak delinmiş
küpün bir çekilmiş bozunumu

4.2 Yollar, Yol Homotopisi ve Yolların Çarpımı

4.2.1 Tanım: $f: [0,1] \rightarrow X$ sürekli tasvirine X 'de bir *yol* denir. $f(0) = x_0 \in X$ ve $f(1) = x_1 \in X$ noktaları f yolunun, sırasıyla *başlangıç noktası* ve *bitiş noktası* olarak adlandırılır ve f , x_0 'dan x_1 'e bir yoldur denir.

4.2.2 Tanım: Bir X uzayında, eğer herhangi iki $x_0, x_1 \in X$ noktası için x_0 'dan x_1 'e bir yol varsa, X 'e *yol bağlantılıdır* denir.

4.2.3 Tanım: İki $f_0, f_1: I = [0,1] \rightarrow X$ yolu aynı x_0 başlangıç noktasına ve aynı x_1 bitiş noktasına sahipse ve her bir $s \in I, t \in I$ için

$$F(s, 0) = f_0(s) \text{ ve } F(s, 1) = f_1(s),$$

$$F(0, t) = x_0 \text{ ve } F(1, t) = x_1,$$

olacak şekilde sürekli bir $F: I \times I \rightarrow X$ fonksiyonu varsa, f_0 ve f_1 *yol homotopiktir* denir. F , f_0 ile f_1 arasında *yol homotopisi* olarak adlandırılır ve bu $F: f_0 \simeq_p f_1$ ile gösterilir.

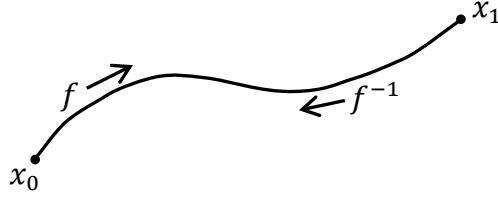
$\simeq_p$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğu Lemma 4.1.13'e benzer şekilde gösterilebilir. Bir f yolunun yol homotopi denklik sınıfını $[f]$ ile göstereceğiz.

4.2.4 Tanım: f ve g , $f(1) = g(0)$ olacak şekilde X 'de iki yol olsun. f ve g 'nin *çarpımını*

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(2s), & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ için,} \\ g(2s - 1), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ için,} \end{cases}$$

ile verilen $f * g$ yolu olarak tanımlarız. $f * g$ iyi tanımlıdır ve geçiş lemmasından dolayı süreklidir. Ayrıca $f * g$, X 'de $f(0)$ 'dan $g(1)$ 'e bir yoldur. Bunu ilk yarısı f yolu, ikinci yarısı da g yolu olan bir yol olarak düşünebiliriz.

4.2.5 Tanım: f , X 'de x_0 'dan x_1 'e bir yol olsun. f 'nin *tersi*, $f^{-1}(s) = f(1 - s)$ ile tanımlanır. Dolayısıyla, f^{-1} 'in başlangıç noktası x_1 olurken bitiş noktası da x_0 olur (Şek.4.6).



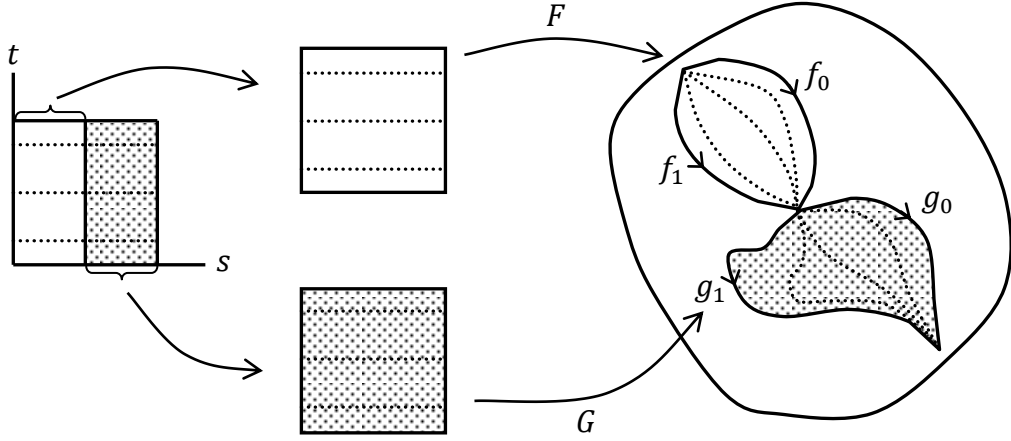
Şekil 4.6 Bir yolun tersi

4.2.6 Lemma: f_0, f_1, g_0 ve g_1 , $f_0(1) = g_0(0)$ ve $f_1(1) = g_1(0)$ olacak şekilde X 'de yollar olsun. Eğer $f_0 \simeq_p f_1$ ve $g_0 \simeq_p g_1$ ise, o zaman $f_0 * g_0 \simeq_p f_1 * g_1$ 'dir.

İspat: $F: f_0 \simeq_p f_1$, $G: g_0 \simeq_p g_1$ yol homotopileri olsunlar. Eğer $H: I \times I \rightarrow X$ fonksiyonunu

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t), & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ için,} \\ G(2s - 1, t), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ için,} \end{cases}$$

ile tanımlarsak, geçiş lemmasından H sürekli olur. $F(1, t) = f_0(1) = g_0(0) = G(0, t)$ olduğuna dikkat edelim. H 'nin istenen yol homotopisi olduğu Şek.4.7'den kolayca görülebilir. ■



Şekil 4.7 Yol homotopisinin gösterilmesi

4.2.7 Lemma: f, g ve h , $f(1) = g(0)$ ve $g(1) = h(0)$ olacak şekilde X 'de üç yol olsun. O zaman $(f * g) * h \simeq_p f * (g * h)$ 'dir.

İspat: Bu üç yolun üçlü çarpımının aşağıdaki gibi tanımlandığına dikkat edelim:

$$((f * g) * h)(s) = \begin{cases} f(4s), & s \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \text{ için,} \\ g(4s - 1), & s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \text{ için,} \\ h(2s - 1), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ için,} \end{cases}$$

ve

$$(f * (g * h))(s) = \begin{cases} f(2s), & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ için,} \\ g(4s - 2), & s \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \text{ için,} \\ h(4s - 3), & s \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \text{ için.} \end{cases}$$

Şimdi, eğer $F: I \times I \rightarrow X$ fonksiyonunu

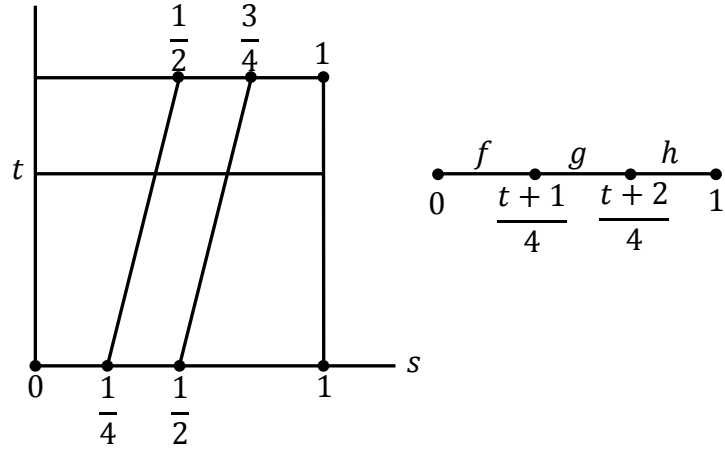
$$F(s, t) = \begin{cases} f\left(\frac{4s}{1+t}\right), & s \in \left[0, \frac{t+1}{4}\right] \text{ için,} \\ g(4s - t - 1), & s \in \left[\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}\right] \text{ için,} \\ h\left(\frac{4s - t - 2}{2-t}\right), & s \in \left[\frac{t+2}{4}, 1\right] \text{ için,} \end{cases}$$

ile tanımlarsak F sürekli olur ve

$$F(s, 0) = ((f * g) * h)(s), F(s, 1) = (f * (g * h))(s),$$

$$F(0, t) = f(0), F(1, t) = h(1).$$

Böylece F , $(f * g) * h$ ile $f * (g * h)$ arasında istenen yol homotopisidir (Şek.4.8). ■



Şekil 4.8 Yolların çarpımının birleşme özelliğinin gösterilmesi

4.2.8 Tanım: $x \in X$ 'deki $e_x: I \rightarrow X$ sabit yolu, $e_x(t) = x, \forall t \in I$ ile tanımlanır.

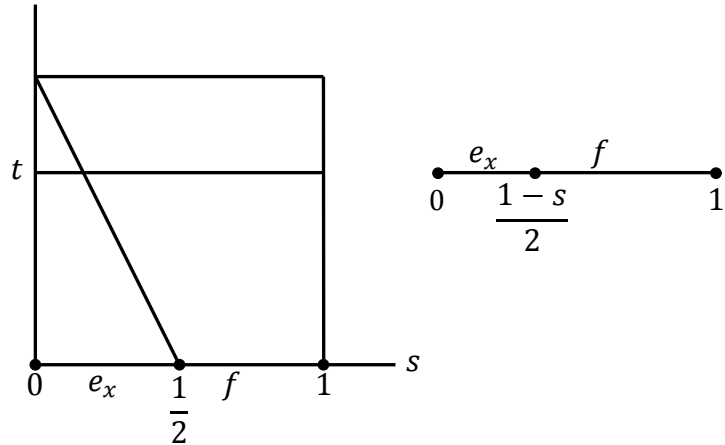
4.2.9 Lemma: Eğer f , X 'de x ile başlayıp y ile biten bir yol ise, o zaman

$$e_x * f \simeq_p f \text{ ve } f * e_y \simeq_p f.$$

İspat: Biz $e_x * f \simeq_p f$ olduğunu göstereceğiz, diğeri de benzer şekilde gösterilebilir.

Şek.4.9'u düşünelim ve $F: I \times I \rightarrow X$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$F(s, t) = \begin{cases} x, & s \in \left[0, \frac{1-t}{2}\right] \text{ için,} \\ f\left(\frac{2s-1+t}{1+t}\right), & s \in \left[\frac{1-t}{2}, 1\right] \text{ için.} \end{cases}$$



Şekil 4.9 Sabit yolun varlığının gösterilmesi

O takdirde,

$$F(s, 0) = e_x * f, F(s, 1) = f(s),$$

$$F(0, t) = x, F(1, t) = f(1) = y,$$

olur. Böylece F , $e_x * f$ ile f arasında istenen yol homotopisidir. ■

4.2.10 Lemma: Eğer f , X 'de x ile başlayıp y ile biten bir yol ise, o zaman

$$f * f^{-1} \simeq_p e_x \text{ ve } f^{-1} * f \simeq_p e_y.$$

İspat: Biz $f * f^{-1} \simeq_p e_x$ olduğunu göstereceğiz, diğeri de benzer şekilde gösterilebilir.

$$(f * f^{-1})(s) = \begin{cases} f(2s), & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ için,} \\ f(2-2s), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ için,} \end{cases}$$

olduğuna dikkat edelim. Şimdi, eğer $F: I \times I \rightarrow X$ fonksiyonunu

$$F(s, t) = \begin{cases} f(2s), & s \in \left[0, \frac{1-t}{2}\right] \text{ için,} \\ f(1-t), & s \in \left[\frac{1-t}{2}, \frac{1+t}{2}\right] \text{ için,} \\ f(2-2s), & s \in \left[\frac{1+t}{2}, 1\right] \text{ için,} \end{cases}$$

ile tanımlarsak, F sürekli olur ve

$$F(s, 0) = (f * f^{-1})(s), \quad F(s, 1) = f(0) = x = e_x(s),$$

$$F(0, t) = f(0) = x = (f * f^{-1})(0), \quad F(1, t) = f(0) = x = (f * f^{-1})(0)$$

olur. Dolayısıyla F , $f * f^{-1}$ ile e_x arasında istenen yol homotopisidir. ■

Yollar üzerindeki $*$ çarpma işlemi, yol homotopileri üzerinde aşağıdaki eşitlikle tanımlanan bir işleme yol açar:

$$[f][g] = [f * g].$$

Bundan sonra iki f ve g yolunun $f * g$ çarpımını fg ile göstereceğiz. Lemma 4.2.6 ile Lemma 4.2.10 arasında, yukarıdaki işlemin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu gösterilmiştir:

- i. *İyi tanımlılık*
- ii. *Birleşme özelliği:* $([f][g])[h] = [f]([g][h])$.
- iii. *Sağ ve sol birimler:* $[e_x][f] = [f] = [f][e_y]$.
- iv. *Ters eleman:* $[f][f^{-1}] = [e_x], [f^{-1}][f] = [e_y]$.

Yolların denklik sınıfları kümesinin bu çarpma işlemi altında bir grup oluşturmadığına dikkat edelim. Çünkü $[f][g]$ her sınıf çifti için tanımlı değil, sadece $f(1) = g(0)$ olan $[f], [g]$ çiftleri için tanımlıdır.

4.3 İlmekler, Temel Grup ve Yükseltgenmiş Homomorfizmalar

4.3.1 Tanım: X bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. X 'de x_0 ile başlayan ve biten bir yola, x_0 tabanlı bir *ilmek* (veya *kapalı yol*) denir. İlk olarak, x_0 tabanlı verilen herhangi iki f ve g ilmeği için, fg çarpımının her zaman tanımlı olduğuna ve bunun x_0 tabanlı bir ilmek olduğuna dikkat edelim. Bir önceki kısımdan, x_0 tabanlı ilmeklerin yol homotopi denklik sınıfları kümesi, çarpma işlemi altında bir grup oluşturur. Bu grup, X 'in x_0 taban noktasına bağlı *temel grubu* olarak adlandırılır ve $\pi_1(X, x_0)$ ile gösterilir. Birim elemanı $[e_{x_0}]$ 'dir, ters elemanlar $[f]^{-1} = [f^{-1}]$ ile verilir ve birleşme özelliği sağlanır.

4.3.2 Teorem: α , X 'de x_0 'dan x_1 'e bir yol olsun. Eğer

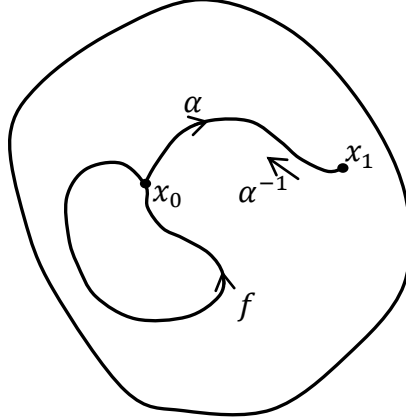
$$\hat{\alpha}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

tasvirini

$$\hat{\alpha}([f]) = [\alpha^{-1}][f][\alpha]$$

ile tanımlarsak, o zaman $\hat{\alpha}$ bir izomorfizma olur (Munkres, 2000).

İspat: Çarpma işlemi iyi tanımlı olduğundan, $\hat{\alpha}$ iyi tanımlıdır. Eğer f , x_0 tabanlı bir ilmek ise, o zaman $\alpha^{-1}(f\alpha)$, x_1 tabanlı bir ilmektir (Şekil.4.10). Buradan $\hat{\alpha}$, $\pi_1(X, x_0)$ 'ı $\pi_1(X, x_1)$ 'e resmeder.



Şekil 4.10 Taban noktasının değiştirilmesi

$\hat{\alpha}$ bir homomorfizmadır. Çünkü

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}([f])\hat{\alpha}([g]) &= ([\alpha^{-1}][f][\alpha])([\alpha^{-1}][g][\alpha]) \\ &= [\alpha^{-1}][f][g][\alpha] \\ &= \hat{\alpha}([f][g]). \end{aligned}$$

α 'nın tersi olan α^{-1} yolunu β ile gösterelim. $\hat{\alpha}$ 'nın bir izomorfizma olduğunu göstermek için, $\hat{\beta}$ 'nin $\hat{\alpha}$ 'nın tersi olduğunu gösteririz: $\pi_1(X, x_1)$ 'in her bir $[h]$ elemanı için,

$$\begin{aligned}\hat{\beta}([h]) &= [\beta^{-1}][h][\beta] = [\alpha][h][\alpha^{-1}], \\ \hat{\alpha}(\hat{\beta}([h])) &= [\alpha^{-1}]([\alpha][h][\alpha^{-1}])[\alpha] = [h]\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde, $\hat{\beta}(\hat{\alpha}([f])) = [f]$, $\forall [f] \in \pi_1(X, x_0)$. ■

4.3.3 Sonuç: Eğer X yol bağlantılı ve x_0, x_1 X 'in iki noktası ise, o zaman $\pi_1(X, x_0)$ ile $\pi_1(X, x_1)$ izomorftur. x_0 'dan x_1 'e farklı yolların farklı izomorfizmalar verebileceğine dikkat edelim.

4.3.4 Tanım: X, Y iki topolojik uzay ve $x_0 \in X, y_0 \in Y$ olsun. $h(x_0) = y_0$ olacak şekilde $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ sürekli bir tasvir olsun. Eğer f , X 'de x_0 tabanlı bir ilmek ise, o zaman $h \circ f$ de Y 'de y_0 tabanlı bir ilmektir.

$$h_*([f]) = [h \circ f]$$

ile tanımlanan

$$h_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

tasvirini düşünelim. Bu tasvir iyi tanımlıdır ve $F: f_0 \simeq_p f_1$ ise, $h \circ F: h \circ f_0 \simeq_p h \circ f_1$ 'dir. h_* tasviri bir homomorfizmadır:

$$h_*([f][g]) = h_*([fg]) = [h \circ (fg)] = [(h \circ f)(h \circ g)] = [h \circ f][h \circ g] = h_*([f])h_*([g]).$$

h_* tasviri, x_0 taban noktasına bağlı h tarafından *yükseltgenmiş homomorfizma* olarak adlandırılır.

4.3.5 Teorem: Yükseltgenmiş homomorfizmalar, onların *izleç özellikleri* adı verilen aşağıdaki özelliklere sahiptirler:

- i. Eğer $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ve $k: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ sürekli ise, $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$ 'dir.
- ii. Eğer $id_X: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ birim tasvir ise, $(id_X)_*$ birim homomorfizmadır.

İspat:

$$\begin{aligned}\text{i. } (k \circ h)_*([f]) &= [(k \circ h) \circ f] = [k \circ (h \circ f)] \\ &= k_*([h \circ f]) = k_*(h_*([f])) \\ &= (k_* \circ h_*)([f]).\end{aligned}$$

$$\text{ii. } (id_X)_*([f]) = [id_X \circ f] = [f]. \blacksquare$$

4.3.6 Sonuç: Eğer $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ bir homeomorfizma ise, h_* bir izomorfizmadır.

İspat: $k: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$, h 'nin tersi olsun. O zaman, $k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = (id_X)_*$ ve $h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = (id_Y)_*$ olur. $(id_X)_*$ ve $(id_Y)_*$, sırasıyla $\pi_1(X, x_0)$ ve $\pi_1(Y, y_0)$ gruplarının birim homomorfizmaları olduğundan, k_* , h_* 'in tersidir. ■

4.3.7 Lemma: $h, k: X \rightarrow Y$ topolojik uzaylar arasında sürekli tasvirler ve $F: h \simeq k$ bir homotopi olsun. Eğer $\alpha: I \rightarrow Y$, $h(x_0) = y_0$ 'dan $k(x_0) = y_1$ 'e, $\alpha(t) = F(x_0, t)$ ile verilen bir yolsa, o zaman, α yolu ile belirlenen izomorfizma $\hat{\alpha}$ olmak üzere, aşağıdaki diyagram değişmelidir (Kosniowski, 1980).

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow k_* & \downarrow \hat{\alpha} \\ & & \pi_1(Y, y_1) \end{array} \quad k_* = \hat{\alpha} \circ h_*$$

İspat: Eğer $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ ise, $[k \circ f] = [\alpha^{-1}(h \circ f)\alpha]$ olduğunu göstermeliyiz. Başka bir deyişle, $(\alpha^{-1}(h \circ f))\alpha$ ile $k \circ f$ 'nin yol homotopik olduğunu göstermeliyiz. İlk olarak

$$((\alpha^{-1}(h \circ f))\alpha)(s) = \begin{cases} \alpha(1 - 4s), & s \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \text{ için,} \\ (h \circ f)(4s - 1), & s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \text{ için,} \\ \alpha(2s - 1), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ için.} \end{cases}$$

olduğunu görelim. Bunu aşağıdaki gibi yazarız:

$$((\alpha^{-1}(h \circ f))\alpha)(s) = \begin{cases} F(x_0, 1 - 4s), & s \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \text{ için,} \\ F(f(4s - 1), 0), & s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \text{ için,} \\ F(x_0, 2s - 1), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ için.} \end{cases}$$

Benzer şekilde, $(k \circ f)(s) = F(f(s), 1)$ olur. Sonra, $k \circ f$ 'nin $(e_{y_0}(k \circ f))e_{y_0}$ 'a denk olduğuna dikkat edelim. Bu yol aşağıdaki forma sahiptir

$$(e_{y_0}(k \circ f))e_{y_0}(s) = \begin{cases} F(x_0, 1), & s \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \text{ için,} \\ F(f(4s - 1), 1), & s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \text{ için,} \\ F(x_0, 1), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ için.} \end{cases}$$

Dolayısıyla, eğer $G: I \times I \rightarrow Y$ fonksiyonunu

$$G(s, t) = \begin{cases} F(x_0, 1 - 4s(1 - t)), & s \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \text{ için,} \\ F(f(4s - 1), t), & s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \text{ için,} \\ F(x_0, 1 + 2(s - 1)(1 - t)), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ için,} \end{cases}$$

ile tanımlarsak, G sürekli olur ve

$$G(s, 0) = \left((\alpha^{-1}(h \circ f))\alpha \right)(s), \quad G(s, 1) = \left((e_{y_0}(k \circ f))e_{y_0} \right)(s),$$

$$G(0, t) = F(x_0, 1) = k(x_0) = y_1, \quad G(1, t) = F(x_0, 1) = k(x_0) = y_1.$$

olur. Buradan,

$$(\alpha^{-1}(h \circ f))\alpha \simeq_p (e_{y_0}(k \circ f))e_{y_0} \simeq_p k \circ f,$$

elde ederiz. Bu da $\hat{\alpha} \circ h_* = k_*$ olduğunu gösterir. ■

4.3.8 Sonuç: $\hat{\alpha}$ 'nın bir izomorfizma olduğunu bildiğimizden, h_* 'ın izomorfizma olması için gerek ve yeter koşul, k_* 'nın izomorfizma olmasıdır. Bunu aşağıdaki önermede yeniden ifade ediyoruz.

4.3.9 Önerme: X, Y topolojik uzaylar ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $h, k: X \rightarrow Y$ homotopik tasvirler ise, o zaman $h_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, h(x_0))$ bir izomorfizmadır ancak ve ancak $k_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, k(x_0))$ bir izomorfizmadır.

4.3.10 Tanım: Yol bağlantılı bir X uzayına, eğer bazı $x_0 \in X$ için (ve dolayısıyla her $x_0 \in X$ için) $\pi_1(X, x_0)$ aşikâr grup ise, basit bağlantılıdır denir.

4.3.11 Teorem: $\pi_1(X, x_0)$ bir homotopi değişmezidir. Başka bir deyişle, eğer $f: X \rightarrow Y$ bir homotopi denkliği ise, o zaman her $x_0 \in X$ için

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$

bir izomorfizmadır (Naber, 2009).

İspat: f 'nin homotopi tersi $g: Y \rightarrow X$ olsun. Yani, $g \circ f \simeq id_X$ ve $f \circ g \simeq id_Y$ olsun. $x_0 \in X$ seçelim. O takdirde

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*,$$

$$(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$$

olur. $(id_X)_*$ bir izomorfizma ve $g \circ f \simeq id_X$ olduğundan, Önerme 4.3.9, $g_* \circ f_*$ 'ın bir izomorfizma olmasını gerektirir. Benzer şekilde, $f_* \circ g_*$ bir izomorfizmadır.

Birincisi f_* 'in birebir olmasını, ikincisi f_* 'in örten olmasını gerektirir. Dolayısıyla, f_* bir izomorfizmadır. ■

4.3.12 Sonuç: Eğer X büzülebilir uzay ise X basit bağlantılıdır.

4.3.13 Örnek: $\mathbb{R}^n, D^n$ ve $\mathbb{R}^n$ 'nin herhangi konveks alt uzayı aşikâr temel gruba sahiptirler.

4.4 Çemberin Temel Grubu

Bu kısımda, S^1 'in temel grubunun sonsuz devirli olduğunu, yani $\mathbb{Z}$ 'e izomorf olduğunu ispatlayacağız: $\pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$. Burada $S^1 = \{e^{i\theta}\}$, modülü 1 olan karmaşık sayılar kümesi ve $p = 1 \in S^1$ olarak alacağız.

4.4.1 Tanım: $\exp: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ üstel tasviri, $\exp(t) = e^{2\pi it}$ ile tanımlanır. Üstel tasvirin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu açıktır:

- i. $\exp$ süreklidir.
- ii. $\exp(t_1 + t_2) = \exp(t_1)\exp(t_2)$.
- iii. $\exp(t_1) = \exp(t_2)$ ancak ve ancak $t_1 - t_2 \in \mathbb{Z}$.

Buradan $\exp|_{(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})}$, $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ açık aralığından $S^1 - \{-1\}$ üzerine bir homeomorfizma olur.

$\exp|_{(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})}$ tasvirinin tersi $\omega: S^1 - \{-1\} \rightarrow (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ olsun.

4.4.2 Tanım: $\mathbb{R}^n$ 'nin bir X alt kümesi için, $x \in X$ olduğunda, eğer x_0 'dan x 'e doğru parçası $[x_0, x]$ X 'de yer alıyorsa, $x_0 \in X$ 'den yıldızlımsıdır denir.

4.4.3 Lemma: X kompakt ve $x_0 \in X$ 'den yıldızlımsı olsun. $\exp(t_0) = f(x_0)$ olacak şekilde verilen herhangi $f: X \rightarrow S^1$ sürekli tasviri ve $t_0 \in \mathbb{R}$ için, $(\exp \circ \tilde{f})(x) = f(x), \forall x \in X$ ve $\tilde{f}(x_0) = t_0$ olacak şekilde $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli tasviri vardır.

İspat: Açıkça, orijinden yıldızlımsı olacak şekilde X 'i döndürebiliriz. Bu sebepten, $x_0 = 0$ seçebiliriz. X kompakt olduğundan, f düzgün süreklidir ve $\delta > 0$ vardır öyle ki eğer $\|x - x'\| < \delta$ ise, o zaman $\|f(x) - f(x')\| < 1$ 'dir. Böylece, $f(x)$ ve $f(x')$, S^1 'de antipodal noktalar değildir. X sınırlı olduğundan, her $x \in X$ için $\frac{\|x\|}{n} < \delta$ olacak şekilde pozitif bir n tamsayısı vardır. O zaman, her bir $0 \leq j < n$ ve her $x \in X$ için

$$\left\| \frac{(j+1)x}{n} - \frac{jx}{n} \right\| = \frac{\|x\|}{n} < \delta,$$

olur ve böylece

$$\left\| f\left(\frac{(j+1)x}{n}\right) - f\left(\frac{jx}{n}\right) \right\| < 1.$$

Dolayısıyla $\frac{f\left(\frac{(j+1)x}{n}\right)}{f\left(\frac{jx}{n}\right)}, S^1 - \{-1\}$ 'in bir noktasıdır. Eğer $g_j: X \rightarrow S^1 - \{-1\}$ tasvirini

$$g_j(x) = \frac{f\left(\frac{(j+1)x}{n}\right)}{f\left(\frac{jx}{n}\right)}, 0 \leq j < n$$

ile tanımlarsak, o zaman her $x \in X$ için

$$f(x) = f(0) \prod_{j=1}^{n-1} g_j(x)$$

olur. Şimdi, $\exp|_{\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$ tasvirinin tersi ω olmak üzere, $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$\tilde{f}(x) = t_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (\omega \circ g_j)(x)$$

ile tanımlarsak, o zaman, X 'den $\mathbb{R}$ 'ye $n+1$ tane sürekli fonksiyonun toplamı olduğundan dolayı $\tilde{f}$ da süreklidir, ve açıkça

$$\tilde{f}(0) = t_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (\omega(g_j(0))) = t_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \omega(1) = t_0$$

olur. Ayrıca ω ve $\exp|_{\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$ birbirinin tersi olduklarından:

$$\begin{aligned} (\exp \circ \tilde{f})(x) &= \exp\left(t_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (\omega \circ g_j)(x)\right) \\ &= \exp(t_0) \prod_{j=1}^{n-1} ((\exp \circ \omega) \circ g_j)(x) \\ &= f(x_0) \prod_{j=1}^{n-1} g_j(x) \\ &= f(x). \blacksquare \end{aligned}$$

4.4.4 Lemma: X bağlantılı bir uzay ve bazı $x_0 \in X$ için $\exp \circ \tilde{f} = \exp \circ \tilde{g}$ ve $\tilde{f}(x_0) = \tilde{g}(x_0)$ olacak şekilde $\tilde{f}, \tilde{g}: X \rightarrow \mathbb{R}$ tasvirler olsun. O zaman $\tilde{f} = \tilde{g}$ olur.

İspat: $\tilde{h} = \tilde{f} - \tilde{g}: X \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. O zaman $p = 1$ değeri ile $\exp \circ \tilde{h}$ sabit tasvirini elde ederiz. Dolayısıyla $\tilde{h}$, sadece tamsayı değerler alan sürekli bir tasvirdir. X bağlantılı olduğundan, $\tilde{h}$ sabit olmalıdır ve $\tilde{h}(x_0) = 0$ olduğundan, her $x \in X$ için $\tilde{h}(x) = 0$ elde edilir. ■

4.4.5 Tanım: $\alpha: I \rightarrow S^1$, $p = 1$ tabanlı bir ilmek olsun. I , 0 'dan yıldızlımsı ve $\alpha(0) = p = \exp(0)$ olduğundan, önceki lemmalardan, $\tilde{\alpha}(0) = 0$ ve $\exp \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ olacak şekilde yalnız bir $\tilde{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R}$ vardır. $\exp(\tilde{\alpha}(1)) = p$ olduğundan, $\tilde{\alpha}(1)$ bir tamsayıdır. α 'nın derecesini, $\deg(\alpha) = \tilde{\alpha}(1)$ olarak tanımlarız.

4.4.6 Lemma: α ve β , S^1 'de p tabanlı ilmekler olsun. O zaman, $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$ 'dir.

İspat: $F: I \times I \rightarrow S^1$, α ile β arasında bir yol homotopisi olsun. $I \times I$, $\mathbb{R}^2$ 'nin $(0,0)$ 'dan yıldızlımsı bir alt kümesi olduğundan, Lemma 4.4.3'den, $\tilde{F}(0,0) = 0$ ve $\exp \circ \tilde{F} = F$ olacak şekilde bir $\tilde{F}: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ tasviri vardır. $F(0,t) = F(1,t) = p$, $\forall t \in I$ olduğundan $\tilde{F}(0,t)$ ve $\tilde{F}(1,t)$ sadece tamsayı değerler alır. Buradan, $\tilde{F}(0,t)$ ve $\tilde{F}(1,t)$ sabit olmalıdır. $\tilde{F}(0,0) = 0$ olduğundan, $\tilde{F}(0,t) = 0$, $\forall t \in I$ olur. Eğer $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}: I \rightarrow \mathbb{R}$ tasvirlerini

$$\tilde{\alpha}(t) = \tilde{F}(t, 0) \text{ ve } \tilde{\beta}(t) = \tilde{F}(t, 1)$$

ile tanımlarsak, o zaman $\tilde{\alpha}(0) = 0$ ve $\exp \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ olur. Böylece $\deg(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{F}(1,0)$ elde edilir. Benzer şekilde, $\tilde{\beta}(0) = 0$ ve $\exp \circ \tilde{\beta} = \beta$ olur. Böylece $\deg(\beta) = \tilde{\beta}(1) = \tilde{F}(1,1)$ elde edilir. Son olarak, $\tilde{F}(1,t)$ sabit olduğundan, $\tilde{F}(1,0) = \tilde{F}(1,1)$ olduğu ve buradan da $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$ sonucuna ulaşılır. ■

4.4.7 Sonuç: α , S^1 'de p tabanlı bir ilmek olmak üzere, $\deg([\alpha]) = \deg(\alpha)$ ile tanımlanan

$$\deg: \pi_1(S^1, p) \rightarrow \mathbb{Z}$$

fonksiyonu iyi tanımlıdır.

4.4.8 Teorem: $\deg$ fonksiyonu bir izomorfizmadır (Spanier, 1966).

İspat:

- i. *Homomorfizma:* $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(S^1, p)$ ve $\tilde{\alpha}(1) = m$, $\tilde{\beta}(1) = n$ olsun. O zaman,

$$\deg([\alpha]) + \deg([\beta]) = m + n$$

olur. $\deg([\alpha][\beta]) = \deg([\alpha\beta])$ olduğundan, $\widetilde{\alpha\beta}(1)$ 'yi bulmalıyız. $\tilde{\gamma}(s)$, $\mathbb{R}$ 'de m 'den $m + n$ 'ye, $\tilde{\gamma}(s) = \tilde{\beta}(s) + m$ ile verilen bir yol olsun. O zaman

$$(\exp \circ \tilde{\gamma})(s) = \exp(\tilde{\beta}(s) + m) = e^{2\pi i(\tilde{\beta}(s) + m)}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{2\pi\tilde{\beta}(s)i} e^{2\pi mi} = e^{2\pi\tilde{\beta}(s)i} \\
&= \exp(\tilde{\beta}(s)) = (\exp \circ \tilde{\beta})(s) \\
&= \beta(s),
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned}
(\exp \circ \tilde{\alpha}\tilde{\gamma})(s) &= \begin{cases} \exp(\tilde{\alpha}(2s)), & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ için,} \\ \exp(\tilde{\gamma}(2s-1)), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ için,} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \alpha(2s), & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ için,} \\ \beta(2s-1), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ için,} \end{cases} \\
&= (\alpha\beta)(s)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca, $(\tilde{\alpha}\tilde{\gamma})(0) = \tilde{\alpha}(0) = 0$ 'dır. Dolayısıyla, $\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} = \widetilde{\alpha\beta}$ 'dir. Buradan,

$$\widetilde{\alpha\beta}(1) = (\tilde{\alpha}\tilde{\gamma})(1) = \tilde{\gamma}(1) = m + n.$$

- ii. *Örtenlik:* Eğer $n \in \mathbb{Z}$ ise, o zaman $\mathbb{R}$ 'de $\tilde{\alpha}_n(s) = ns$ ile tanımlanan bir $\tilde{\alpha}_n$ yolu vardır. $\alpha_n = \exp \circ \tilde{\alpha}_n$ olsun. O takdirde, $\deg([\alpha_n]) = \tilde{\alpha}_n(1) = n$ olduğu açıktır.
- iii. *Birebirlik:* $[\alpha] \in \text{Ker}(\deg)$ olsun. O zaman, $\deg[\alpha] = \tilde{\alpha}(1) = 0$ 'dır ve $\exp \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ olacak şekilde $\mathbb{R}$ 'de 0 tabanlı bir $\tilde{\alpha}$ ilmeği vardır. $\mathbb{R}$ büzülebilirdir ve böylece, Sonuç 3.3.12'den basit bağlantılıdır. Buradan $\tilde{\alpha}$, 0 tabanlı sabit ilmeğe yol homotopiktir. Başka bir deyişle, $F(0, t) = \tilde{\alpha}(t)$, $F(1, t) = 0$ ve $F(s, 0) = F(s, 1) = 0$ olacak şekilde bir $F: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ tasviri vardır. Diğer taraftan, $\exp \circ F: I \times I \rightarrow S^1$ için elimizde

$$\begin{aligned}
(\exp \circ F)(0, t) &= \alpha(t), & (\exp \circ F)(1, t) &= 1, \\
(\exp \circ F)(s, 0) &= (\exp \circ F)(s, 1) = 1
\end{aligned}$$

vardır ve böylece $\exp \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, $p = 1$ tabanlı sabit ilmeğe yol homotopiktir, yani $[\alpha]$, $\pi_1(S^1, p)$ 'nin birim elemanıdır. ■

4.4.9 Örnek: Halka şeklindeki X 'in çekilmiş bozunumunun bir R çemberi olduğunu hatırlayalım (bkz. Örnek 3.1.17). Teorem 3.1.16'dan X ile R aynı homotopi tipindendir ve Teorem 3.3.11'den, izomorf temel gruplara sahiptirler. Böylece $\pi_1(X, p) \cong \mathbb{Z}$ olur. Benzer şekilde, delikli düzlemin temel grubu $\mathbb{Z}$ 'e izomorftur. Çünkü delikli düzlem, çekilmiş bozunum olarak bir çembere sahiptir.

4.4.10 Teorem: X, Y yol bağlantılı iki topolojik uzay olsun. $X \times Y$ çarpımının temel grubu, X 'in ve Y 'nin temel gruplarının çarpımına izomorftur (Kosniowski, 1980).

İspat: $p: X \times Y \rightarrow X$ ve $q: X \times Y \rightarrow Y$ izdüşüm tasvirleri olsun. p_* ve q_* yükseltgenmiş homomorfizmalar olmak üzere

$$\varphi: \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

fonksiyonunu

$$\varphi([f]) = (p_*([f]), q_*([f])) = (p \circ f, q \circ f),$$

ile tanımlayalım.

Önce φ 'nin iyi tanımlılığını kontrol edelim. (x_0, y_0) tabanlı f ilmeğinin g 'ye denk, yani $f \sim g$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $F(s, 0) = f(s), F(s, 1) = g(s)$ ve $F(0, t) = F(1, t) = (x_0, y_0)$ olacak şekilde sürekli bir $F: I \times I \rightarrow X \times Y$ tasviri vardır. $p \circ F: I \times I \rightarrow X$ ve $q \circ F: I \times I \rightarrow Y$ sürekli tasvirleri bize $p \circ f \sim p \circ g$ ve $q \circ f \sim q \circ g$ verdiğinden, $\varphi([f]) = \varphi([g])$ elde ederiz. Böylece φ iyi tanımlıdır.

φ 'nin bir homomorfizma olduğunu görmek için, eğer $f, g: I \rightarrow X \times Y, f(1) = g(0)$ olacak şekilde yollar ise, o zaman $p \circ (fg) = (p \circ f)(p \circ g)$ ve $q \circ (fg) = (q \circ f)(q \circ g)$ olduğuna dikkat edelim.

φ 'nin birebir olduğunu göstermek için $\varphi([f]) = \varphi([g])$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$F_1: p \circ f \simeq_p p \circ g \text{ ve } F_2: q \circ f \simeq_p q \circ g.$$

elde ederiz. Eğer $F: I \times I \rightarrow X \times Y$ tasvirini $F(s, t) = (F_1(s, t), F_2(s, t))$ ile tanımlarsak, o zaman $F: f \simeq_p g$ ve böylece $[f] = [g]$ olduğu görülür.

Son olarak, φ 'nin örtenliğini görmek için, $([f_1], [f_2])$ 'nin $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ 'a ait olduğunu kabul edelim. Eğer $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ ile verilen $f: I \rightarrow X \times Y$ fonksiyonunu düşünersek, o zaman açıkça $\varphi([f]) = ([f_1], [f_2])$ olur. ■

4.4.11 Sonuç: $T = S^1 \times S^1$ torunun temel grubu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 'e izomorftur.

5. GRUPLARIN TEMSİLİ

5.1 Serbest Gruplar

İlk olarak, X kümesini *alfabe* olarak adlandıracağız; X 'in elemanları *harfler* olacak. n bir tamsayı olmak üzere, bir a^n sembolünü bir *hece* olarak tanımlarız. Böylece a^2, b^0, c^{-1} vb. tümü hecedir. Hecelerin sonlu sıralı bir dizisi *kelime* olur. Örneğin, $a, b, c \in X$ olmak üzere, $a^3 c^2 b^{-3} c^5 c^{-5} a^0 b^1$ bir kelimedir.

Hiç hece içermeyen *boş kelimeyi* 1 ile gösteririz.

X alfabeti üzerinde mümkün olan tüm kelimelerin kümesini $W(X)$ göstereceğiz. X 'i $a \mapsto a^1$ tasviriyle $W(X)$ 'e resmedebiliriz. Kelimelerin *çarpımı*, onları arka arkaya yazarak tanımlanır. Örneğin,

$$a^3 b^{-2} c^1 \text{ ve } a^{-2} b^5 c^{-1} \in W(X)$$

için,

$$(a^3 b^{-2} c^1) \cdot (a^{-2} b^5 c^{-1}) = a^3 b^{-2} c^1 a^{-2} b^5 c^{-1} \in W(X)$$

yazarız. Aşağıdakilere dikkat edelim:

- i. Kelimelerin çarpımı kapalıdır: $w_1, w_2 \in W(X)$ ise $w_1 \cdot w_2 \in W(X)$
- ii. Çarpma işlemi birleşmelidir: $w_1, w_2, w_3 \in W(X)$ ise $(w_1 w_2) w_3 = w_1 (w_2 w_3)$
- iii. Herhangi $w \in W(X)$ için, $1 \cdot w = w \cdot 1 = w$

Fakat, bu çarpma ile $W(X)$ bir grup değildir. $a^1 \cdot a^{-1} \sim 1$, $a^{-1} \cdot a^1 \sim 1$ bağıntılarını içeren ve çarpma ile uyumlu olan $W(X)$ üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlayacağız.

5.1.1 $W(X)$ üzerindeki denklik bağıntısının tanımı

- I. $w_1, w_2 \in W(X)$ ve $a \in X$ olmak üzere, eğer $w = w_1 a^0 w_2$, $w' = w_1 w_2$ ise, o zaman w 'dan w' 'ne değişimin, *I tipinden temel daralma* olduğunu söyleriz. Tersine, w' 'den w 'ya değişimin, *I tipinden temel genişleme* olduğunu söyleriz.
- II. Eğer $w = w_1 a^p a^q w_2$, $w'' = w_1 a^{p+q} w_2$ ise, o zaman w 'dan w'' 'ne değişimin, *II tipinden temel daralma* olduğunu söyleriz. Tersine, w'' 'den w 'ya değişimin, *II tipinden temel genişleme* olduğunu söyleriz.
- III. $u, v \in W(X)$ için, eğer biri diğerinden yukarıdaki temel operasyonların sonlu sayıdaki bir dizisi kullanılarak elde edilebiliyorsa, o zaman $u \sim v$ yazacağız.

$\sim$ 'nin bir denklik bağıntısı olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $v \in W(X)$ 'i içeren denklik sınıfını $[v]$ ile göstereceğiz.

5.1.2 Lemma: Eğer $u, v, w \in W(X)$ ve $u \sim v$ ise o zaman $uw \sim vw$ ve $wu \sim wv$ 'dir.

İspat: İlk olarak, $u = u_1 a^0 u_2$, $v = u_1 u_2$ olduğunu kabul edelim. u ve v , I tipinden temel bir operasyon ile bağlandığından, uw ve vw de öyledir. Aynısı wu ve wv için de doğrudur. İkinci olarak, eğer $u = u_1 a^p a^q u_2$, $v = u_1 a^{p+q} u_2$ ise, o zaman uw ve vw II tipinden temel bir operasyon ile bağlıdır. Aynısı wu ve wv için de geçerlidir. Son olarak, bazı n için $u_2, \dots, u_n$ vardır, $u = u_1$, $v = u_n$ ve her bir u_i , u_{i+1} 'e temel operasyonlarla bağlıdır. Böylece, $u_1 w, \dots, u_n w$ 'yi uw ve vw 'yi bağlamak için aynı yolla kullanabiliriz. Benzer şekilde wu ve wv bağlanabilir. ■

$a_i \in X$, $p_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, herhangi bir $u \in W(X)$ kelimesi, hecelerin sonlu bir dizesi olarak yazılabilir, $u = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}$.

Şimdi u 'nun *tersini* tanımlayalım:

$$u^{(r)} = a_n^{-p_n} \dots a_2^{-p_2} a_1^{-p_1}.$$

Önceki lemmanın sonucu olarak, aşağıdaki işlemin iyi tanımlı olduğunu elde ederiz:

$$[u][v] = [uv]$$

Eğer denklik sınıflarının kümesi olarak $F(X)$ yazarsak, bu işlemin aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu görebiliriz:

- i. Her $u \in W(X)$ için, $[1][u] \cdot [u][1] = [u]$, çünkü $1 \cdot u = u \cdot 1 = u$.
- ii. Her $u, v, w \in W(X)$ için, $u(vw) = (uv)w$ 'dir ve eğer $[u], [v], [w] \in F(X)$ ise, o zaman $[u]([v][w]) = [u]([vw]) = [u(vw)] = [(uv)w] = ([uv])[w] = ([u][v])[w]$ olur.
- iii. Herhangi bir a^p hecesi için, elimizde $a^{-p} \in W(X)$ vardır. O zaman

$$[a^p][a^{-p}] = [a^{p+(-p)}] = [a^0] = [1]$$

olur. Böylece i., ii. ve iii.'den, sırasıyla, birim eleman, birleşme ve $F(X)$ 'in her elemanının tersi olması, özelliklerine sahip oluruz. Üçüncü özellik, $u^{(r)} = a_n^{-p_n} \dots a_2^{-p_2} a_1^{-p_1}$ için n üzerinde tümevarımla gösterilebileceği üzere,

$$u^{(r)}u \sim 1 \text{ ve } uu^{(r)} \sim 1$$

bağıntılarından gelmektedir.

Böylece, $[u^{(r)}][u] = 1$ ve $[u][u^{(r)}] = 1$ olur. Ayrıca, $[u^{(r)}]$ 'nin, $[u]$ denklik sınıfı seçiminden bağımsız olduğunu da göstermeliyiz. $u \sim v$ kabul edersek, $[u] = [v]$ olur. O zaman

$$\begin{aligned} [u^{(r)}] &= [u^{(r)}][1] = [u^{(r)}]([v][v^{(r)}]) \\ &= ([u^{(r)}][u])[v^{(r)}] = [1][v^{(r)}] = [v^{(r)}] \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $F(X)$ 'in bir grup olduğunu görüyoruz.

5.1.3 Tanım: Eğer bir kelimeye herhangi bir temel operasyon uygulama imkânı kalmamışsa, o zaman buna *indirgenmiş kelime* denir. Yani, bir kelimenin indirgenmiş olması için gerek ve yeter koşul, üssü 0 olan hiçbir hecenin bulunmaması ve aynı harflerin ardı ardına gelmemesidir. Temel operasyonlar hece sayısını azalttığından, kelimelerin her denklik sınıfı en az bir indirgenmiş kelime içerir. Daha sonra, bunun yalnız bir tane olduğunu göstereceğiz.

Herhangi $w \in W(X)$ kelimesi için, $\rho(w)$ kelimesini aşağıdaki gibi tanımlarız:

Eğer w indirgenmiş ise, o zaman $\rho(w) = w$ 'dir. Eğer w indirgenmemiş ise, o zaman $\rho(w)$, $k < j$ için k . hecede hiçbir temel operasyon mümkün olmayacak şekilde w 'nın j . hecesinde bir temel operasyon uygulanarak elde edilen kelimedir. w 'nın j . hecesine her iki tipten temel bir operasyon uygulanışını bir örnekle görelim: ua^p , $j - 1$ hece içeren indirgenmiş bir kelime olmak üzere, eğer $w = ua^p a^0 v$ ise, o zaman $\rho(w) = ua^p v$ olur. Böylece,

1. w indirgenmiştir ancak ve ancak $\rho(w) = w$.
2. Eğer u indirgenmemiş ise, o zaman $\rho(uv) = \rho(u)v$.

Bir w kelimesinin *standart indirgenmesi*,

$$w = \rho^0(w), \rho(w), \rho^2(w), \dots,$$

dizisiyle tanımlanır. w 'nun standart indirgenmesinde, $\rho^\ell(w) = \rho^{\ell+1}(w)$ olacak şekilde negatif olmayan en küçük bir $\ell = \ell(w)$ tamsayısı vardır. Bu ℓ sayısına, w 'nun *indirgenme uzunluğu* denir ve $w_* = \rho^\ell(w)$ tanımlarız. Böylece,

$$\rho^i(w) = w_*, \text{ her } i \geq \ell(w) \text{ için,}$$

olur. $\rho(w) \sim w$ olduğundan,

3. w_* indirgenmiştir ve $w \sim w_*$.
4. w indirgenmiştir ancak ve ancak $w = w_*$.

Şimdi, indirgenmiş bir kelimenin, onun denklik sınıfında tekliğini ispatlayacağız:

5. $u \sim v$ ancak ve ancak $u_* = v_*$.

İspat: Eğer $u_* = v_*$ ise, o zaman

$$u \sim u_* = v_* \sim v$$

ve böylece $u \sim v$ olur. Tersini ispatlamak için, v 'nin u 'dan temel daralma operasyonu ile elde edildiğini kabul edelim.

Durum I: $u = wa^0w'$, $v = ww'$.

$\ell(w) = k$ olsun.

$$\rho^{k+1}(u) = \rho^k(v)$$

olduğunu iddia edelim. İspatı k üzerinde tümevarımla yaparız. Önce $k = 0$, yani, w 'nin indirgenmiş olduğunu kabul edelim. O zaman,

$$\rho(u) = ww' = v$$

olur. Sonra, $k > 0$ olsun. 2'den, elimizde

$$\rho(u) = \rho(w)a^0w', \rho(v) = \rho(w)w'$$

vardır. $\ell(\rho(w)) = k - 1$ olduğundan,

$$\rho^k \rho(u) = \rho^{k-1} \rho(v),$$

elde ederiz ve iddiamız ispatlanmış olur. Böylece $u_* = v_*$ 'dir. Çünkü u ve v 'nin standart indirgenmelerindeki kelimeler, giderek aynı olacaktır.

Durum II: $u = wa^p a^q w'$, $v = wa^{p+q} w'$.

$\ell(w) = k$ olsun.

$$\rho^{k+2}(u) = \rho^{k+1}(v)$$

olduğunu iddia edelim. Önce $k = 0$ olduğunu kabul edersek, o zaman iki ihtimal söz konusudur:

i. w 'nin son hecesi a değildir. Bu durumda,

$$\rho(u) = wa^{p+q}w' = v,$$

$$\rho^2(u) = \rho(v).$$

ii. $w = w''a^r$ 'dir. Bu durumda, w'' indirgenmiştir ve w'' 'nin son hecesi a değildir. Böylece,

$$\rho(u) = w''a^{r+p}a^q w',$$

$$\rho^2(u) = w''a^{r+p+q}w' = \rho(v),$$

$$\rho^2(u) = \rho(v).$$

Sonra, $k > 0$ olsun. 2'den, elimizde

$$\rho(u) = \rho(w)a^p a^q w', \rho(v) = \rho(w)a^{p+q} w'$$

vardır. $\ell(\rho(w)) = k - 1$ olduğundan,

$$\rho^{k+1}\rho(u) = \rho^k\rho(v),$$

$$\rho^{k+2}(u) = \rho^{k+1}(v),$$

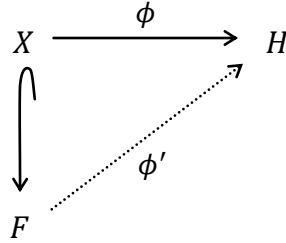
elde ederiz. Böylece, iddiamız ispatlanmış olur. İspatı Durum I'de olduğu gibi $u_* = v_*$ ile tamamlarız. ■

3, 1 ve 5 önermelerinden şunu söyleyebiliriz:

6. Kelimelerin her denklik sınıfı bir ve yalnız bir indirgenmiş kelime içerir. Ayrıca, u 'ya temel daralma operasyonlarının herhangi bir dizisinin uygulanması, aynı indirgenmiş u_* kelimesine yol açar.

Böylece, u ve v 'nin $F(X)$ 'in aynı elemanını temsil edip etmediğini belirlemek için sonlu bir algoritmaya sahibiz; tek yapılması gereken u_* 'ı ve v_* 'ı bulup, onları hece hece karşılaştırmak.

5.1.4 Serbest grup tanımı: Herhangi bir H grubu için, eğer herhangi $\phi: X \rightarrow H$ tasviri bir $\phi': F \rightarrow H$ grup homomorfizmasına genişleyebiliyorsa, o zaman F grubu $X \subseteq F$ tabanı ile *serbesttir* denir. Yani, aşağıdaki diyagram değişmelidir.



Bu, serbest grupların *evrensel özelliği* olarak adlandırılır. Şimdi, $F(X)$ 'in X tabanı ile serbest olduğunu göstereceğiz. X 'i $F(X)$ 'de $a \mapsto [a^1]$ tasviriyle içerilmiş olarak düşünebiliriz. Bir H grubuna ve X 'den H 'ye bir ϕ tasvirine sahip olduğumuzu kabul edelim.

Herhangi bir $w = a_1^{n_1} \dots a_r^{n_r} \in W(X)$ kelimesi için, $\phi_1(w) = \phi(a_1)^{n_1} \dots \phi(a_r)^{n_r}$ ile bir $\phi_1: W(X) \rightarrow H$ tasviri tanımlayalım ve $\phi_1(1)$ 'i H 'nin birimi olarak alalım. $W(X)$ kümesi üzerinde bir çarpma işlemine sahip olduğumuzdan, herhangi $w_1, w_2 \in W(X)$ için $\phi_1(w_1 w_2) = \phi_1(w_1) \phi_1(w_2)$ olduğu açıktır. Ayrıca ϕ_1 , $W(X)$ üzerindeki denklik bağıntısı ile de uyumludur.

5.1.5 Lemma:

- i. Eğer $w = w_1 a^0 w_2$ ve $w' = w_1 w_2$ ise $\phi_1(w) = \phi_1(w')$.

ii. Eğer $w = w_1 a^p a^q w_2$ ve $w' = w_1 a^{p+q} w_2$ ise $\phi_1(w) = \phi_1(w')$.

İspat:

- i. $\phi_1(w) = \phi_1(w_1 a^0 w_2) = \phi(w_1) \phi(a^0) \phi(w_2)$
 $= \phi(w_1) \phi(1) \phi(w_2) = \phi(w_1) \phi(w_2) = \phi_1(w').$
- ii. $\phi_1(w) = \phi_1(w_1 a^p a^q w_2) = \phi(w_1) (\phi(a)^p \phi(a)^q) \phi(w_2)$
 $= \phi(w_1) \phi(a)^{p+q} \phi(w_2) = \phi_1(w'). \blacksquare$

Bu lemmadan, herhangi $u, v \in W(X)$ için, eğer $u \sim v$ ise $\phi_1(u) = \phi_1(v)$ elde ederiz. Böylece, $\phi'([u]) = \phi_1(u)$ tanımlayabiliriz.

İyi tanımlılık açıktır. Her $[u], [v] \in F(X)$ için

$$\phi'([u][v]) = \phi'([uv]) = \phi_1(uv) = \phi_1(u) \phi_1(v) = \phi'([u]) \phi'([v])$$

olur. Buradan da ϕ' 'nin bir ϕ' homomorfizmasına genişlediğinin gösterilmesi tamamlanmış olur. Ayrıca, eğer $w = a_1^{n_1} \dots a_r^{n_r}$ ise, o zaman $\phi'([w]) = (\phi(a_1))^{n_1} \dots (\phi(a_r))^{n_r}$ olduğu da görülür. Tekliği göstermek için, ϕ' 'nin $\psi: F(X) \rightarrow H$ tasvirine genişlediğini kabul edelim. Yani, $\psi([a]) = \phi(a)$ olsun. Eğer $[w] \in F(X)$ ve $w = a_1^{n_1} \dots a_r^{n_r}$ ise, $[w] = [a_1]^{n_1} \dots [a_n]^{n_r}$ olur ve ψ bir homomorfizma olduğundan,

$$\psi([w]) = \psi([a_1]^{n_1} \dots [a_n]^{n_r}) = \psi([a_1])^{n_1} \dots \psi([a_r])^{n_r} = \phi(a_1)^{n_1} \dots \phi(a_r)^{n_r} = \phi'([w])$$

ve böylece $\psi = \phi'$ elde ederiz.

$F(X)$ 'in X tabanıyla serbest olduğunu ispatladık. Fakat X 'den $F(X)$ 'e $a \mapsto [a]$ tasvirinin birebirliğini kontrol etmedik. Bunu görmek için, $a_1, a_2 \in X$ için, $a_1 \neq a_2$ olacak şekilde $[a_1] = [a_2]$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $H = \mathbb{Z}_2$, 2. mertebeden devirli grup olarak ve $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$ olacak şekilde $\phi: X \rightarrow H$ tasvirini alabiliriz. $\phi': F(X) \rightarrow H$ tek türlü genişlemesini düşünelim. $[a_1] = [a_2]$ olduğundan, $\phi'([a_1]) = \phi'([a_2])$ olur, fakat $\phi'([a_1]) = \phi(a_1)$ ve $\phi'([a_2]) = \phi(a_2)$ olduğundan çelişki elde edilir. Böylece $a_1 = a_2$ olur.

Hatırlatma: F keyfî bir grup, $X \subseteq F$ ve H herhangi bir grup olsun. $\text{Hom}(F, H)$ ile F 'den H 'ye homomorfizmaların kümesini, $\text{Map}(X, H)$ ile X 'den H 'ye tasvirlerin kümesini gösterelim. Eğer

$$\begin{aligned} \rho: \text{Hom}(F, H) &\rightarrow \text{Map}(X, H) \\ (F \xrightarrow{\theta} H) &\mapsto (X \hookrightarrow F \xrightarrow{\theta} H) \end{aligned}$$

ise, o zaman

$$\rho \text{ örtendir} \Leftrightarrow \forall \phi, \exists \phi' \text{ Tanım 5.1.4'deki gibi.}$$

ρ birebirdir $\Leftrightarrow \phi'$ varsa tektir.

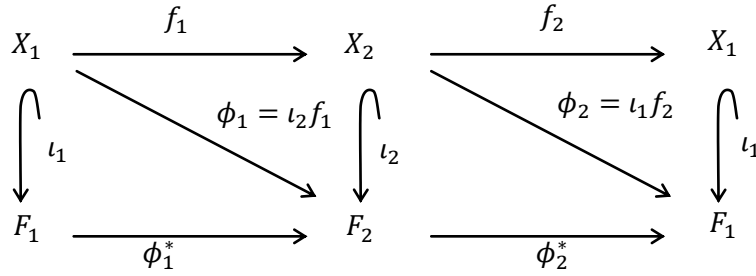
Böylece, F 'nin X üzerinde serbest olması için gerek ve yeter koşul ρ tasvirinin herhangi bir H grubu için birebir-örten olmasıdır.

5.1.6 Önerme: Eğer F_1, F_2 , sırasıyla X_1, X_2 üzerinde serbest ve F_1 ile F_2 izomorf ise, o zaman X_1 ile X_2 'nin kardinalitesi aynıdır (Bunu $|X_1| = |X_2|$ ile gösteririz).

İspat: $H = \mathbb{Z}_2$ alalım. $F_1 \cong F_2$ olduğundan $|Map(X_1, \mathbb{Z}_2)| = |Map(X_2, \mathbb{Z}_2)|$ olur. Kardinaliteleri sırasıyla b ve c olan herhangi B ve C kümeleri için, $|Map(B, C)| = c^b$ 'dir. Bu durumda $2^{|X_1|} = 2^{|X_2|}$ olur. Buradan, $|X_1| = |X_2|$. ■

5.1.7 Önerme: Eğer F_1, F_2 sırasıyla X_1, X_2 üzerinde serbest ve $|X_1| = |X_2|$ ise $F_1 \cong F_2$ 'dir.

İspat: f_1, X_1 'den X_2 'ye birebir-örten ve $f_2 = f_1^{-1}$ olsun. f_1 ve f_2 , $\phi_1: X_1 \rightarrow F_2$ ve $\phi_2: X_2 \rightarrow F_1$ tasvirlerini belirlerler (bkz. aşağıdaki diyagram). Bu tasvirlerin $\phi_1^*: F_1 \rightarrow F_2$ ve $\phi_2^*: F_2 \rightarrow F_1$ homomorfizmalarına genişlemeleri vardır.



ϕ_1, ϕ_2 sırasıyla ϕ_1^*, ϕ_2^* homomorfizmalarına tek türlü genişlerler. Ayrıca, $\phi_2^* \phi_1^*$ fonksiyonu da $\iota_1: X_1 \hookrightarrow F_1$ kapsama tasvirinin bir genişlemesidir. Aynı kapsama tasviri, $id_{F_1}: F_1 \rightarrow F_1$ birim tasvirine de genişlediğinden, teklikten dolayı $\phi_2^* \phi_1^* = id_{F_1}$ elde edilir. Benzer şekilde, $\phi_1^* \phi_2^* = id_{F_2}$ olur. Böylece, ϕ_1^* 'in F_1 'den F_2 'ye bir izomorfizma olduğu elde edilir. ■

5.1.8 Tanım: F, X tabanı üzerinde bir serbest grup olmak üzere, X 'in kardinalitesi F 'in *rangı* olarak adlandırılır.

Sonuç olarak, iki serbest grubun izomorf olması için gerek ve yeter koşulun onların aynı ranga sahip olmasıdır diyebiliriz.

5.2 Temsiller ve Tietze Denklikleri

G bir grup ve $X \subseteq G$ olsun. G 'nin X 'i kapsayan en küçük alt grubu anlamına gelen G 'nin X ile üretilen alt grubunu $\langle X \rangle$ ile göstereceğiz. Buradan,

$$\langle X \rangle = \{x_1^{\varepsilon_1} \dots x_r^{\varepsilon_r} \mid x_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1\}$$

yazarız. G 'nin X 'i kapsayan en küçük normal alt grubunu $\langle\langle X \rangle\rangle$ ile göstereceğiz. Buna genellikle X 'in G 'deki *normal kapanışı* denir. Buradan,

$$\langle\langle X \rangle\rangle = \langle \{g^{-1}xg \mid g \in G, x \in X\} \rangle$$

yazarız. Daha açık olarak, eğer $x^g = g^{-1}xg$ yazarsak, o zaman

$$\langle\langle X \rangle\rangle = \{(x_1^{g_1})^{\varepsilon_1} \dots (x_r^{g_r})^{\varepsilon_r} \mid g_i \in G, x_i \in X, \varepsilon_i \in \pm 1\}$$

olur. $\langle\langle X \rangle\rangle$ 'in elemanları, X 'in G 'deki *konsekansları* olarak adlandırılır.

Şimdi, G bir grup, $F(X)$, X üzerinde bir serbest grup ve θ , X 'den G 'ye $G = \langle \theta(X) \rangle$ olacak şekilde bir tasvir olsun. O zaman, θ 'nın ϕ genişlemesi $F(X)$ 'i G üzerine resmeder. $F(X)$ 'in bir R alt kümesi için,

$$\text{Ker}(\phi: F(X) \rightarrow G) = \langle\langle R \rangle\rangle$$

olduğunu kabul edelim. $w \in \text{Ker}\phi$ elemanına bir *bağıntı* ve $\text{Ker}\phi$ 'ye de *bağıntı alt grubu* denir.

5.2.1 Tanım:

- i. Verilen bir G grubu, bir X üreteçler kümesi ve $F(X)$ 'in bir R alt kümesi için, eğer $\langle\langle R \rangle\rangle = \text{Ker}(\phi: F(X) \rightarrow G)$ ise, o zaman R , G için bir *bağıntılar tanımlayan* küme olarak adlandırılır.
- ii. Bir G grubunun bir temsili, $F(X)/\langle\langle R \rangle\rangle$, G 'ye izomorf olacak şekilde bir X kümesi ve $F(X)$ 'in bir R alt kümesinden oluşur ve bu $(X:R)$ ile gösterilir.

Böyle bir temsilin, $F(X)$ serbest grubuna genişlemesi $\langle\langle R \rangle\rangle$ çekirdeğine sahip bir ϕ homomorfizmasına yol açacak şekilde bir $\theta: X \rightarrow G$ tasviriyle geldiğine dikkat edelim.

Tersine, G 'nin herhangi bir temsili böyle bir homomorfizma belirler. Yani, değişmeli diyagramda $F(X)$ 'den $F(X)/\langle\langle R \rangle\rangle$ 'ye doğal homomorfizmayı γ ile gösterirsek, o zaman ϕ ve ι 'dan biri diğerini tek türlü olarak belirler.

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\phi} & G \\ \gamma \downarrow & \nearrow \iota & \\ F(X)/\langle\langle R \rangle\rangle & & \end{array}$$

G grubunun bir $(X:R)$ temsilindeki ϕ homomorfizmasını işaret etmek için $(X:R)_\phi$ yazacağız. Eğer X 'i onun G 'deki görüntüsüyle belirlersek, o zaman $(X:R)$, X 'in G 'yi ürettiği anlamına gelir ve G hakkındaki her şey, her $r \in R$ için G 'de $r = 1$ olduğu gerçeğinden çıkarılabilir.

5.2.2 Tanım: Eğer bir grup sonlu bir temsile sahipse, o grup *sonlu temsil edilmiştir* denir. Yani, hem üreteçlerin kümesi X hem de $F(X)$ 'in alt kümesi R sonludur.

5.2.3 Örnek: $X = \{a, b\}$ ve $R = \{a^{-1}bab^{-2}, b^{-1}aba^{-2}\}$ olsun. O zaman G grubu aşağıdaki temsile sahiptir.

$$(a, b: a^{-1}bab^{-2} = b^{-1}aba^{-2} = 1).$$

Eğer $a^{-1}bab^{-2} = 1$ ve $b^{-1}aba^{-2} = 1$ ise

$$a^{-1}ba = b^2 \text{ ve } b^{-1}ab = a^2 \Rightarrow a^{-1}b = b^2a^{-1} \text{ ve } b^{-1}a = a^2b^{-1}$$

olduğuna dikkat ediyoruz. $(a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a$ olduğundan,

$$ab^{-2} = a^2b^{-1} \Rightarrow b^{-1} = a$$

elde ederiz. Böylece, $a^{-1}bab^{-2} = 1$ bağıntısı $a^{-1}a^{-1}aa^2 = a = 1$ bağıntısına, $b^{-1}aba^{-2} = 1$ bağıntısı da $a^{-1}a^{-2} = a^{-1} = b = 1$ bağıntısına dönüşür. Başka bir deyişle, $G = \{1\}$ aşıkâr gruptur.

5.2.4 Örnek: $X = \{x, y\}$, $R = \{x^3, y^2, (xy)^2\}$ olsun. O zaman $(X:R)$, 3. mertebeden dihedral grup D_3 'ün temsidir:

$$(x, y: x^3 = y^2 = (xy)^2 = 1)$$

veya $(xy)(xy) = 1$ bağıntısı ile $xy = y^{-1}x^{-1}$ bağıntısının aynı olduğunu kullanarak:

$$(x, y: x^3 = y^2 = 1, xy = y^{-1}x^{-1}).$$

5.2.5 Tanım: Bir $f: (X:R) \rightarrow (Y:S)$ temsiller tasviri, iki $(X:R)$ ve $(Y:S)$ temsilinden ve R 'nin f altındaki görüntüsünün S 'nin konsekanlarında kapsanması koşulunu sağlayan bir $f: F(X) \rightarrow F(Y)$ homomorfizmasından oluşur. Yani,

$$f(R) \subseteq \ll S \gg.$$

Her temsil tasviri $f: (X:R) \rightarrow (Y:S)$, $f_*\gamma = \gamma f$ koşulunu sağlayan bir

$$f_*: F(X)/\ll R \gg \rightarrow F(Y)/\ll S \gg$$

grup homomorfizmasını tek türlü belirler (Burada her iki doğal homomorfizma da γ ile gösterilmiştir). Yani, aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc}
F(X) & \xrightarrow{f} & F(Y) \\
\downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\
F(X)/\ll R \gg & \xrightarrow{f_*} & F(Y)/\ll S \gg
\end{array}$$

Eğer $f: (X:R) \rightarrow (Y:S)$ ve $g: (Y:S) \rightarrow (Z:T)$ tasvirleri verilmişse, o zaman gf bileşkesi $(X:R)$, $(Z:T)$ ve $gf: F(X) \rightarrow F(Z)$ homomorfizmasından oluşur. Birleşme özelliği geçerlidir ve birim tasvirler vardır. Birim tasvirler için 1 yazacağız. Bu durumda $1_* = 1$ ve $(gf)_* = g_*f_*$ olur.

5.2.6 Tanım: $f_1, f_2: (X:R) \rightarrow (Y:S)$ iki temsil tasviri olsun. Eğer her $x \in X$ için $f_1(x)f_2(x^{-1}) \in \ll S \gg$ ise, f_1 ve f_2 *homotopiktir* denir ve bu durum $f_1 \simeq f_2$ ile gösterilir.

5.2.7 Önerme: $f_1, f_2: (X:R) \rightarrow (Y:S)$ iki temsil tasvirinin homotopik olması için gerek ve yeter koşul f_{1*} ve f_{2*} yükseltgenmiş homomorfizmalarının eşit olmasıdır.

İspat: f_{1*} ve f_{2*} 'in tanımından, eğer $f_{1*} = f_{2*}$ ise, o zaman her $x \in X$ için $f_{1*}\gamma(x) = \gamma f_1(x) = f_{2*}\gamma(x) = \gamma f_2(x)$ olur. Buradan, $f_1 \simeq f_2$ olduğu açıktır.

Şimdi, $f_1 \simeq f_2$ olduğunu kabul edelim. Tanım 5.2.6'dan, $f_1(x)f_2(x^{-1}) \in \ll S \gg$ olur. $\ll S \gg, F(Y)$ 'nin çekirdeği olduğundan, bu $\gamma(f_1(x)f_2(x^{-1})) = 1$ olacağı anlamına gelir. Buradan, $\gamma(f_1(x)) \cdot \gamma(f_2(x^{-1})) = 1$ ve $\gamma(f_1(x)) \cdot \gamma(f_2(x))^{-1} = 1$ olur. Diyagram değişmeli olduğundan, $f_{1*}(\gamma(x)) \cdot f_{2*}(\gamma(x))^{-1} = 1$ yazarız. Böylece, her $x \in X$ için $f_{1*}\gamma(x) = f_{2*}\gamma(x)$ elde edilir. Dolayısıyla, $f_{1*} = f_{2*}$ olur. ■

Buradan anlaşılacağı üzere, Tanım 5.2.6'daki koşul aşağıdaki gibi de verilebilir:

$$\text{Her } u \in F(X) \text{ için, } \gamma f_1(u) = \gamma f_2(u).$$

$f_1 \simeq f_2$ ve $g_1 \simeq g_2$ olduğu zaman $g_1f_1 \simeq g_2f_2$ olduğunu görmek kolaydır.

Bir temsil tasviri f 'nin, f_* homomorfizmasını belirlediğini söylemiştik. Bunu tersi de doğrudur:

5.2.8 Önerme: Her

$$\theta: F(X)/\ll R \gg \rightarrow F(Y)/\ll S \gg$$

homomorfizması için, $f_* = \theta$ olacak şekilde bir

$$f: (X: R) \rightarrow (Y: S)$$

temsil tasviri vardır. Ayrıca, böyle herhangi iki temsil tasviri homotopiktir.

İspat: Aşağıdaki diyagramı düşünelim.

$$\begin{array}{ccc} F(X) & & F(Y) \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\ F(X)/\ll R \gg & \xrightarrow{\theta} & F(Y)/\ll S \gg \end{array}$$

γ örten olduğundan, her $x \in X$ elemanını $\gamma f(x) = \theta \gamma(x)$ olacak şekilde bir $f(x) \in F(Y)$ elemanına atayabiliriz. $F(X)$, X tabanıyla bir serbest grup olduğundan bu atama, $\gamma f = \theta \gamma$ olacak şekilde bir $f: F(X) \rightarrow F(Y)$ homomorfizmasına genişletilebilir (serbest grupların evrensel özelliği kullanılarak). O zaman $\gamma f(R) = \theta \gamma(R) = \ll S \gg$ ve $f(R) \subseteq \ll S \gg$ olur.

Dolayısıyla f bir temsil tasviridir ve $f_* = \theta$ 'dır. f 'nin homotopiye göre tekliği ise Önerme 5.2.7'nin doğrudan bir sonucudur. ■

5.2.9 Tanım: Eğer $gf \simeq 1$ ve $fg \simeq 1$ olacak şekilde $(X: R) \xrightleftharpoons[g]{f} (Y: S)$ tasvirleri varsa, bu durumda $(X: R)$ ve $(Y: S)$ temsilleri *aynı tiptendir* denir. f, g tasvirleri (veya sadece biri) *temsil* (veya *homotopi*) *denkliği* olarak adlandırılır.

5.2.10 Lemma: İki temsilin aynı tipten olması için gerek ve yeter koşul onların gruplarının izomorf olmasıdır (Crowell ve Fox, 1963).

İspat: Eğer f, g bir temsil denkliği ise, o zaman

$$g_* f_* = (gf)_* = 1_* = 1,$$

$$f_* g_* = (fg)_* = 1_* = 1.$$

Böylece, $g_* = f_*^{-1}$ olur ve f_* , $F(X)/\ll R \gg$ 'yi izomorf olarak $F(Y)/\ll S \gg$ 'ye resmeder.

Tersine, eğer θ , $F(X)/\ll R \gg$ 'yi izomorf olarak $F(Y)/\ll S \gg$ 'ye resmeder ve

$f_* = \theta$, $g_* = \theta^{-1}$ ise, o zaman

$$(gf)_* = g_* f_* = \theta^{-1} \theta = 1 = (1)_* \text{ olup } gf \simeq 1,$$

$$(fg)_* = f_* g_* = \theta \theta^{-1} = 1 = (1)_* \text{ olup } fg \simeq 1. \blacksquare$$

5.2.11 Tietze denklikleri

$(X:R)$ bir temsil ve $s \in \ll R \gg$ olsun. Yani s , X' 'de R 'nin bir konsekansı olsun. $Y = X$ ve $S = R \cup \{s\}$ ile oluşturulan temsili düşünelim. Bu durumda $\ll R \gg = \ll S \gg$ olur. Dolayısıyla, $(X:R)$, $(Y:S)$ ve $1: F(X) \rightarrow F(Y)$ birim otomorfizması bir $\mathbf{T}_1: (X:R) \rightarrow (Y:S)$ temsil tasviri tanımlar. Benzer şekilde, $(Y:S)$, $(X:R)$ ve 1 , bir $\mathbf{T}'_1: (Y:S) \rightarrow (X:R)$ temsil tasviri tanımlar. Açıkça, $T_1 \simeq T'_1$ olur.

$(X:R)$ yine bir temsil olsun. y , X' 'de içerilmeyen bir üreteç ve $\xi \in F(X)$ olsun. $Y = X \cup \{y\}$ ve $S = R \cup y\xi^{-1}$ ile oluşturulan $(Y:S)$ temsili düşünelim. Herhangi $x \in X$ için $T_2(x) = x$ kuralı ile tanımlanan $T_2: F(X) \rightarrow F(Y)$ homomorfizması, R 'yi $\ll S \gg$ 'ye resmeder ve böylece $(X:R)$, $(Y:S)$ ve $T_2: F(X) \rightarrow F(Y)$ bir $\mathbf{T}_2: (X:R) \rightarrow (Y:S)$ temsil tasviri tanımlar. Herhangi $x \in X$ için $T'_2(x) = x$ ve $T'_2(y) = \xi$ kuralı ile tanımlanan $T'_2: F(Y) \rightarrow F(X)$ homomorfizması, S 'yi $R \cup \{1\}$ üzerine ve dolayısıyla $\ll R \gg$ 'ye resmeder. Buradan $(Y:S) \rightarrow (X:R)$ ve $T'_2: F(Y) \rightarrow F(X)$ bir $\mathbf{T}'_2: (Y:S) \rightarrow (X:R)$ bir temsil tasviri tanımlar. Açıkça, $T'_2 T_2$ bileşkesi birimdir. Ayrıca her $x \in X$ için, $T_2 T'_2(x) \cdot x^{-1} = 1$ ve $T_2 T'_2(y) \cdot y^{-1} = T_2(\xi) \cdot y^{-1} = \xi y^{-1} = (y\xi^{-1})^{-1}$ olur ki bu da $\ll S \gg$ 'nin bir elemanıdır. Böylece, $T_2 T'_2 \simeq 1$ olur. Dolayısıyla, T_2, T'_2 çifti bir temsil denkliğidir ($T_2: F(X) \rightarrow F(Y)$ ve $T'_2: F(Y) \rightarrow F(X)$ tasvirlerinin sırasıyla, kapsama ve geri çekilme olduklarına dikkat edelim).

Bu dört denklik; $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}'_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}'_2$, *Tietze denklikleri* olarak adlandırılır (Crowell ve Fox, 1963).

5.2.12 Lemma: X ve Y üreteçlerin ayrık kümeleri, θ , $F(X \cup Y)$ 'nin $F(X)$ üzerine bir geri çekilmesi ve $(X:R)_\phi$ bir G grubunun bir temsili olsun. O zaman, $\phi\theta: F(X \cup Y) \rightarrow G$ homomorfizmasının çekirdeği $\ll R \cup \{y\theta(y)^{-1}: y \in Y\} \gg$ kümesidir.

İspat: $C = \ll R \cup \{y\theta(y)^{-1}: y \in Y\} \gg$ yazalım. Herhangi $r \in R$ için, $\phi\theta(r) = \phi(r) = 1$ olduğu açıktır. θ bir geri çekilme olduğundan, $\theta^2 = \theta$ ve buradan

$$\phi\theta(y \cdot \theta(y)^{-1}) = \phi(\theta(y) \cdot \theta(y)^{-1}) = \phi(1) = 1$$

olur. Böylece elimizde

$$(1) \quad C \subseteq \text{Ker} \phi\theta$$

vardır. Şimdi, $F(X \cup Y)$ 'nin $F(X \cup Y)/C$ üzerine γ doğal homomorfizmasını ve onun $\gamma' = \gamma|_{F(X)}$ kısıtlanışını düşünelim.

$$\begin{array}{ccccc}
 F(X \cup Y) & \xrightarrow{\theta} & F(X) & \xrightarrow{\phi} & G \\
 & \searrow \gamma & \swarrow \gamma' & & \\
 & & F(X \cup Y)/C & &
 \end{array}$$

İlk olarak, $\gamma'\theta = \gamma$ olduğunu gösterelim. Açıkça, $x \in X$ için $\gamma'\theta(x) = \gamma'(x) = \gamma(x)$ olur. Ayrıca, $y \in Y$ için $\gamma(y) \cdot \gamma'\theta(y)^{-1} = \gamma(y) \cdot \gamma\theta(y)^{-1} = \gamma(y \cdot \theta(y)^{-1}) = 1$, yani $\gamma'\theta(y) = \gamma(y)$ olur. Bu $\gamma'\theta = \gamma$ olduğunu gösterir. Şimdi, $\text{Ker}\phi\theta$ 'nin bir elemanını alalım: $u \in \text{Ker}\phi\theta$ alırsak $\phi\theta(u) = 1$ olur. Buradan

$$\gamma(u \cdot \theta(u)^{-1}) = \gamma'\theta(u \cdot \theta(u)^{-1}) = \gamma'(\theta(u) \cdot \theta(u)^{-1}) = \gamma'(1) = 1$$

ve böylece $u \cdot \theta(u)^{-1} \in C$ olur. Diğer taraftan, $\phi\theta(u) = 1$ olması $\theta(u) \in \ll R \gg$ ve dolayısıyla $\theta(u) \in C$ olmasını gerektirir. Böylece, $u = u \cdot \theta(u)^{-1} \cdot \theta(u)$, C 'nin bir elemanı olmalıdır. Buradan da elimizde

$$(2) \quad \text{Ker}\phi\theta \subseteq C$$

olur. (1) ve (2)'den, $C = \ll R \cup \{y\theta(y)^{-1} : y \in Y\} \gg = \text{Ker}\phi\theta$. ■

5.2.13 Teorem (Tietze): $(X:R) \xrightleftharpoons[g]{f} (Y:S)$ bir temsil denkliği, $(X:R)$ ve $(Y:S)$ temsillerinin ikisi de sonlu olsun. O zaman, $f = T_1 \dots T_l$ ve $g = T_l' \dots T_1'$ olacak şekilde $T_1, T_1'; \dots; T_l, T_l'$ Tietze denkliklerinin sonlu bir dizisi vardır.

İspat: İspat iki durumdan oluşur.

Durum I : X ve Y üreteç kümelerinin ayrık olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki diyagramı düşünelim:

$$\begin{array}{ccc}
 & F(X \cup Y) & \\
 \rho \swarrow & & \nwarrow \sigma \\
 F(X) & \xrightleftharpoons[f]{g} & F(Y) \\
 \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\
 F(X)/\ll R \gg & \xrightleftharpoons[g_*]{f_*} & F(Y)/\ll S \gg
 \end{array}$$

Burada ι ve o kapsama tasvirleri, ρ ve σ , $y \in Y$ için $\rho(y) = g(y)$ ve $x \in X$ için $\sigma(x) = f(x)$ olacak şekilde tanımlanmış geri çekilmelerdir.

$B = \{y \cdot \rho(y)^{-1}\}$ olmak üzere

$$(X:R) \xrightleftharpoons[\rho]{\iota} (X \cup Y : R \cup B)$$

temsil denkliği, Y kümesinin eleman sayısı m olmak üzere, $T_1, T'_1; \dots; T_m, T'_m$ Tietze T_2 denkliklerine ayrılabilir öyle ki $\iota = T_1 \dots T_m$, $\rho = T'_m \dots T'_1$.

Benzer şekilde, $A = \{x \cdot \sigma(x)^{-1}\}$ olmak üzere

$$(Y:S) \xrightleftharpoons[\sigma]{o} (X \cup Y : S \cup A)$$

temsil denkliği, X kümesinin eleman sayısı n olmak üzere, $S_1, S'_1; \dots; S_n, S'_n$ Tietze T_2 denkliklerine ayrılabilir öyle ki $o = S_1 \dots S_n$, $\sigma = S'_n \dots S'_1$.

Lemma 5.2.12'den $\text{Ker } \gamma\rho = \ll R \cup B \gg$ 'dir. Diğer taraftan, $\gamma\rho = g_*\gamma\sigma$ ve $\gamma\sigma(S \cup A) = 1$; dolayısıyla, $S \cup A \subseteq \ll R \cup B \gg$ 'dir. Benzer şekilde, $R \cup B \subseteq \ll S \cup A \gg$ 'dir. Böylece, $F(X \cup Y)$ 'nin birim otomorfizmasıyla taşınan

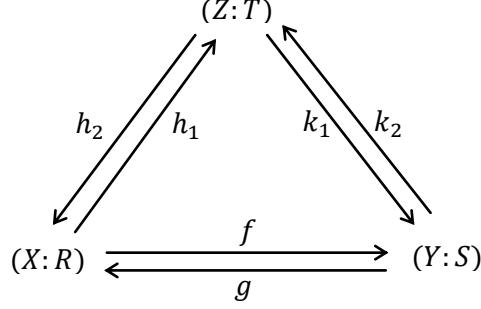
$$(X \cup Y : R \cup B) \xrightleftharpoons[\alpha']{\alpha} (X \cup Y : R \cup S \cup A \cup B) \xrightleftharpoons[\beta]{\beta'} (X \cup Y : S \cup A)$$

temsil denklikleri, p , R kümesinin; q , S kümesinin eleman sayıları olmak üzere, sırasıyla, $U_1, U'_1; \dots; U_{q+n}, U'_{q+n}$ ve $V_1, V'_1; \dots; V_{p+m}, V'_{p+m}$ Tietze T_1 denkliklerine ayrılabilirler. Bu durumda, $\alpha = U_1 \dots U_{q+n}$, $\alpha' = U'_{q+n} \dots U'_1$, $\beta = V_1 \dots V_{p+m}$, $\beta' = V'_{p+m} \dots V'_1$, elde edilir ve böylece

$$f = \sigma\beta'\alpha\iota = S'_n \dots S'_1 V'_{p+m} \dots V'_1 U_1 \dots U_{q+n} T_1 \dots T_m,$$

$$g = \rho\alpha'\beta o = T'_m \dots T'_1 U'_{q+n} \dots U'_1 V_1 \dots V_{p+m} S_1 \dots S_n.$$

Durum II: Eğer X ve Y ayrık değilse, $X \cup Y$ 'den ayrık ve X ile birebir eşlenebilen bir Z üreteçler kümesi seçeriz. Bu eşleme, $F(X)$ 'in $F(Z)$ üzerine bir h_1 izomorfizmasına ve $F(Z)$ 'in $F(X)$ üzerine bir $h_2 = h_1^{-1}$ ters izomorfizmasına yükseltgenir. $T = h_1(R)$, $k_1 = fh_2$, ve $k_2 = h_1g$ olsun öyle ki $f = k_1h_1$ ve $g = h_2k_2$.



Açıkça h_1 , h_2 temsil denklikleridirler. k_1 , k_2 'nin de birer temsil denklikleri olduklarını iddia ediyoruz. $k_1(T) = fh_2(T) = f(R) \subseteq \langle\langle S \rangle\rangle$ ve $k_2(S) = h_1g(S) \subseteq h_1(R) = \langle\langle T \rangle\rangle$ 'dir. Böylece, k_1 ve k_2 temsil tasvirleridirler; ayrıca $k_2k_1 = h_1gh_2 \simeq h_11h_2 = 1$ ve $k_1k_2 = fh_2h_1g = fg \simeq 1$ olur. Şimdi Durum I iki kez uygulanırsa ispat tamamlanır. ■

5.2.14 Örnek: Tietze denkliklerini kullanarak $(x, y, z: xyz = yzx)$ ve $(x, y, a: xa = ax)$ ile temsil edilen grupların izomorf olduklarını gösterelim.

$$\begin{aligned}
 & (x, y, z: xyz(yzx)^{-1}) \\
 & \quad \downarrow T_2 \\
 & (x, y, z, a: xyz(yzx)^{-1}, a(yz)^{-1}) \\
 & \quad \downarrow T_1 \\
 & (x, y, z, a: xyz(yzx)^{-1}, a(yz)^{-1}, xa(ax)^{-1}) \\
 & \quad \downarrow T'_1 \\
 & (x, y, z, a: a(yz)^{-1}, xa(ax)^{-1}) \\
 & \quad \downarrow T_1 \\
 & (x, y, z, a: a(yz)^{-1}, xa(ax)^{-1}, z(y^{-1}a)^{-1}) \\
 & \quad \downarrow T'_1 \\
 & (x, y, z, a: xa(ax)^{-1}, z(y^{-1}a)^{-1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow T'_2 \\ (x, y, a: xa(ax)^{-1}). \end{array}$$

5.2.15 Örnek: $(x, y: xyx = yxy)$ ile temsil edilen grubun, $(a, b: a^3 = b^2)$ ile temsil edilen gruba izomorf olduğunu gösterelim. Bu kez, esnek bir tarzda yazacağız. Önce, $xyx = yxy$ bağıntısının her iki tarafını soldan xyx ile çarparsak $(xyx)(xyx) = (xy)(xy)(xy)$ elde edeceğimize dikkat edelim. Böylece $a = xy$ ve $b = xyx$ bağıntılarını ekleyeceğiz, sonra Tietze denkliklerini kullanarak grubun diğer temsilini elde etmeye çalışacağız:

$$\begin{array}{c} (x, y: xyx = yxy) \\ \downarrow T_2 \text{ (iki kez)} \\ (x, y, a, b: xyx = yxy, a = xy, b = xyx) \\ \downarrow T_1 \text{ (üç kez)} \\ (x, y, a, b: xyx = yxy, a = xy, b = xyx, a^3 = b^2, x = a^{-1}b, y = b^{-1}a^2) \\ \downarrow T'_1 \text{ (üç kez)} \\ (x, y, a, b: a^3 = b^2, x = a^{-1}b, y = b^{-1}a^2) \\ \downarrow T'_2 \text{ (iki kez)} \\ (a, b: a^3 = b^2). \end{array}$$

5.2.16 Tanım: G bir grup olsun. G 'de bir *komütatör*, bazı $x, y \in G$ için $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ formundaki bir elemandır. G 'deki tüm komütatörlerle üretilen alt gruba G 'nin *komütatör alt grubu* denir ve $[G, G]$ ile gösterilir. $[G, G]$ 'nin, G 'nin bir normal alt grubu olduğuna dikkat edelim. $G/[G, G]$ bölüm grubu, *komütatör bölüm grubu* ya da *abelyenize edilmiş grup* ve $G \rightarrow G/[G, G]$ doğal homomorfizması da *abelyenizer* olarak adlandırılır. Açıkça, $G/[G, G]$ komütatör bölüm grubu abelyen bir gruptur ve bunu G_{ab} ile gösteririz.

5.2.17 Önerme: Herhangi bir G grubunun abelyenize edilmiş G_{ab} grubu, G 'nin homomorfik görüntüsü olan en büyük abelyen gruptur.

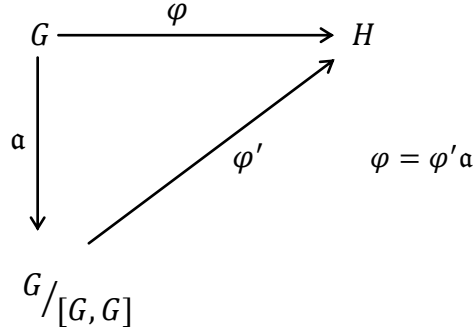
İspat: φ 'nin, G 'den abelyen bir H grubuna herhangi bir homomorfizma olduğunu kabul edelim. Açıkça, komütatör alt grubu, G 'nin komütatörlerinin konseksansında kapsanır. Tersine, eğer herhangi bir keyfi $[g_1, g_2] = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$, $g_1, g_2 \in G$, komütatörünü alırsak, o zaman

$$\varphi([g_1, g_2]) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)\varphi(g_1)^{-1}\varphi(g_2)^{-1} = (\varphi(g_1)\varphi(g_1)^{-1})(\varphi(g_2)\varphi(g_2)^{-1}) = 1,$$

elde edilir (H abelyen olduğundan). Dolayısıyla, G 'nin komütatörlerinin konsekanısı, φ 'nin çekirdeğinde kapsanır. Böylece, eğer G 'nin abelyenizerini α ile gösterirsek, o zaman

$$\varphi' \alpha(g) = \varphi(g), \quad g \in G,$$

ile tanımlanan φ' homomorfizması iyi tanımlıdır ve açıkça tektir. ■



Buradan, bir gruptan abelyen bir gruba herhangi bir homomorfizmanın, abelyenize edilmiş grup ile ayrıştırılabileceğini söyleyebiliriz.

5.2.18 Önerme: Eğer bir G grubu $g_1, g_2, \dots$, ile üretilmiş ise, o zaman onun komütatör alt grubu $[G, G]$, $[g_i, g_j]$, $i, j = 1, 2, \dots$, komütatörlerinin konsekanısıdır.

İspat: $[g_i, g_j]$ komütatörlerinin konsekanısını $\ll K \gg$ ile gösterelim. Açıkça $\ll K \gg$, G 'nin $\{[g_i, g_j]\}$ 'yi içeren her normal alt grubunda kapsanır. Buradan $\ll K \gg \subset [G, G]$ olur. Tersini ispatlamak için, G 'nin herhangi iki elemanının $[u, v]$ komütatörünün $\ll K \gg$ 'da yer aldığını göstermeliyiz. Bunu da u ve v 'nin uzunlukları üzerinde tümevarımla ispatlarız.

Her $g \in G$ elemanı için, $g = \prod_{k=1}^n g_k^{\varepsilon_k}$ olacak şekilde var olan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n = \mp 1$ için, negatif olmayan en küçük n tamsayısını $l(g)$ ile gösterelim. Açıkça, $l(g) = 0$ ancak ve ancak $g = 1$.

Eğer $l(u) = 0$ (veya $l(v) = 0$) ise, o zaman $u = 1$ ($v = 1$), böylece $[u, v] = 1 \in \ll K \gg$.

Eğer $l(u) = l(v) = 1$ ise, o zaman $[u, v]$ aşağıdakilerden biridir:

$$[g_i, g_j],$$

$$[g_i^{-1}, g_j] = g_i^{-1} [g_j, g_i] g_i,$$

$$[g_i, g_j^{-1}] = g_j^{-1} [g_j, g_i] g_j,$$

$$[g_i^{-1}, g_j^{-1}] = g_i^{-1} g_j^{-1} [g_i, g_j] g_j g_i,$$

ve bunların her biri $\ll K \gg$ 'ya ait olmalıdır. Herhangi $a, b, c \in G$ için,

$$\begin{aligned}
[a, b] &= [b, a], \\
[ab, c] &= a[b, c]a^{-1}[a, c], \\
[a, bc] &= [a, b]b[a, c]b^{-1},
\end{aligned}$$

olduğunu hatırlayalım. Şimdi, $l(u) = n - 1$ için (veya $l(v) = n - 1$), $[u, v]$ 'nin, komütatörlerin konjügasyonunun bir çarpımı olarak yazılabileceğini kabul edelim ve $l(u) = n$ (veya $l(v) = n$) için $[u, v] \in \ll K \gg$ olduğunu gösterelim. Eğer $l(u) = n$ ise, o zaman, $l(u_1), l(u_2) < n$ olmak üzere $u = u_1 u_2$ 'dir. Tümevarım hipotezinden,

$$[u, v] = [u_1 u_2, v] = u_1 [u_2, v] u_1^{-1} [u_1, v] \in \ll K \gg,$$

elde ederiz. Benzer şekilde, eğer $l(v) = n$ ise, o zaman, $l(v_1), l(v_2) < n$ olmak üzere $v = v_1 v_2$ 'dir ve

$$[u, v] = [u, v_1 v_2] = [u, v_1] v_1 [u, v_2] v_1^{-1} \in \ll K \gg. \blacksquare$$

5.2.19 Önerme: $g_1, g_2, \dots$, bir G grubunun elemanlarının bir kümesi ve ϕ , G 'nin bir H grubu üzerine bir homomorfizması olsun. O zaman $\phi, g_1, g_2, \dots$, elemanlarının konsekansını, H 'nin $\phi(g_1), \phi(g_2), \dots$, elemanlarının konsekansına resmeder.

İspat: $g_1, g_2, \dots$, elemanlarının konsekansını $\ll K_G \gg$ ile ve $h_1 = \phi(g_1), h_2 = \phi(g_2), \dots$, elemanlarının konsekansını $\ll K_H \gg$ ile gösterelim. $\phi(\ll K_G \gg)$ normal olduğundan ve tüm $h_1, h_2, \dots$, elemanlarını içerdiğinden,

$$\ll K_H \gg \subset \phi(\ll K_G \gg)$$

olur. ϕ örten olduğundan, her $h \in \phi(\ll K_G \gg)$ elemanı için, $\phi(g) = h$ olacak şekilde bir $g \in \ll K_G \gg$ elemanı vardır. Eğer ψ , her bir $h_1, h_2, \dots$, elemanını 1'e resmeden H 'nin bir homomorfizması ise, o zaman $\psi\phi$, her $g_1, g_2, \dots$, elemanını 1'e resmetmelidir. $g \in \ll K_G \gg$ olduğundan, $\psi\phi(g) = \psi(h) = 1$ elde ederiz. Yani h , böyle her homomorfizma tarafından 1'e resmedilir. Böylece, $h \in \ll K_H \gg$ olur. Dolayısıyla,

$$\phi(\ll K_G \gg) \subset \ll K_H \gg. \blacksquare$$

5.2.20 Teorem: Eğer G bir $(X: R)$ temsiline sahipse, o zaman G_{ab} aşağıdaki temsile sahiptir:

$$(X: R \cup \{[x_i, x_j]: x_i, x_j \in X, i, j = 1, 2, \dots\}).$$

İspat: γ ile $F(X)$ 'in $G = F(X)/\ll R \gg$ bölüm grubu üzerine doğal homomorfizmasını ve α ile G 'nin abelyenizerini gösterelim:

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) & \xrightarrow{\gamma} & G \\
 & & \downarrow \alpha \\
 & & G_{ab}
 \end{array}$$

$\text{Ker } \alpha\gamma = \langle\langle R \cup \{[x_i, x_j]: x_i, x_j \in X, i, j = 1, 2, \dots\} \rangle\rangle$ olduğunu göstermeliyiz.

$\alpha\gamma(R) = 1$ olduğunu biliyoruz. G_{ab} abelyen olduğundan, $\alpha\gamma(\{[x_i, x_j]\}) = 1$ olur ve buradan $\langle\langle R \cup \{[x_i, x_j]: x_i, x_j \in X, i, j = 1, 2, \dots\} \rangle\rangle \subset \text{Ker } \alpha\gamma$ olduğu açıktır.

Ters kapsamayı göstermek için bir $u \in \text{Ker } \alpha\gamma$ elemanı alalım. Bu durumda, $\alpha\gamma(u) = 1$ ve Önerme 5.2.18'den, $\gamma(u) \in \langle\langle \{\gamma(x_i), \gamma(x_j)\} \rangle\rangle = \langle\langle \{\gamma([x_i, x_j])\} \rangle\rangle$ olur.

Diğer taraftan, Önerme 5.2.19'dan, bu $\langle\langle \{[x_i, x_j]\} \rangle\rangle$ 'nin γ altındaki görüntüsüdür. Böylece, bazı $v \in \langle\langle \{[x_i, x_j]\} \rangle\rangle$ için, $\gamma(u) = \gamma(v)$ olur. Dolayısıyla, bazı $w \in \langle\langle R \rangle\rangle$ için $u = vw$ ve buradan $u \in \langle\langle R \cup \{[x_i, x_j]: x_i, x_j \in X, i, j = 1, 2, \dots\} \rangle\rangle$ elde edilir. ■

5.2.21 Tanım: Rangı n olan *serbest abelyen grup*, rangı n olan bir serbest grubun abelyenize edilmiş grubuna izomorf olan bir gruptur.

Serbest abelyen grubun, şu iki durum dışında bir serbest grup olmadığına dikkat edelim: boş tabana sahip bir serbest abelyen grup (rank 0, aşikâr grubu veren) olması veya tabanda sadece bir eleman (rank 1, sonsuz devirli grubu veren) olması.

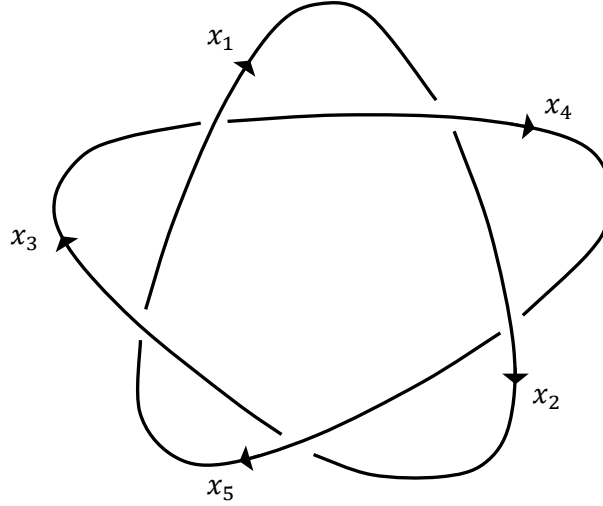
5.2.22 Örnek: $(x, y: xy = yx)$ ve $(x, y, z: xy = yx, yz = zy, xz = zx)$ sırasıyla, rangı 2 ve 3 olan serbest abelyen gruplardır.

5.3 Düğüm Grupları

Düğüm gruplarını hesaplamak için ilk yöntem, 1904 civarında Wirtinger tarafından geliştirilmiştir. Bu kısımda, bu yöntemin sezgisel bir açıklamasıyla başlayacağız. İspatı 6. bölümde verilecektir.

5.3.1 Düğüm gruplarının Wirtinger temsili

Bir düğüm grubunun Wirtinger temsilini hesaplamak için, düğümün bir iz düşümünü alırsak, yönlendiririz ve her bir yayı etiketleriz (Şek.5.1).



Şekil 5.1 Cinquefoil düğümünün bir izdüşümü

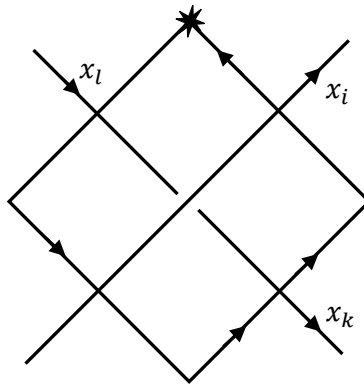
Bu etiketler, düğüm grubunun üreteçleri olacak. Bağıntılarını bulmak için, aşağıda açıklanan kuralı izleriz. O zaman düğüm grubu, n yayların ve m çaprazlamaların sayısı olmak üzere, bir

$$G(K) = (x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_m)$$

temsiline sahip olacak.

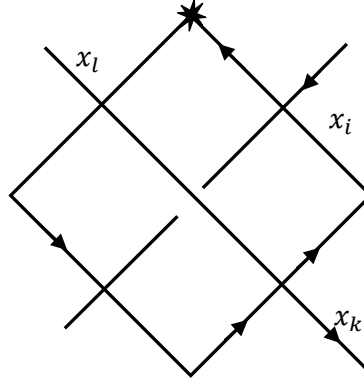
Kural: çaprazlama civarında bir noktadan başlayarak, saat yönünün tersine küçük bir dikdörtgen boyunca hareket edelim; her yayda, eğer yay çaprazlamaya giriyorsa, karşı gelen üretecin üzerine $+1$ koyarak, eğer çaprazlamayı terk ediyorsa -1 koyarak yazalım. Açıkça, başka bir noktadan başlamak, bağıntının bir konjugasyonunu verir.

Eğer elimizde Şek.5.2’de gösterilen formda bir çaprazlama varsa, buna karşı gelen bağıntı $x_l x_i x_k^{-1} x_i^{-1} = 1$ olur.



Şekil 5.2 Bir çaprazlamadaki bağıntının okunması

Eğer elimizde Şek.5.3’de gösterilen formda bir çaprazlama varsa, buna karşı gelen bağıntı $x_l x_i^{-1} x_k^{-1} x_i = 1$ olur.



Şekil 5.3 Bir çaprazlamadaki bağıntının okunması

Örneğin, Şek.5.1’de gösterilen cinquefoil düğümünü düşünelim. Elimizde beş üreteç ve aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$\begin{aligned} r_1 &= x_5 x_1 x_4^{-1} x_1^{-1} = 1 \text{ veya } x_4 = x_1^{-1} x_5 x_1, \\ r_2 &= x_1 x_4 x_2^{-1} x_4^{-1} = 1 \text{ veya } x_2 = x_4^{-1} x_1 x_4, \\ r_3 &= x_4 x_2 x_3^{-1} x_2^{-1} = 1 \text{ veya } x_3 = x_2^{-1} x_4 x_2, \\ r_4 &= x_2 x_3 x_5^{-1} x_3^{-1} = 1 \text{ veya } x_5 = x_3^{-1} x_2 x_3, \\ r_5 &= x_3 x_5 x_1^{-1} x_5^{-1} = 1 \text{ veya } x_1 = x_5^{-1} x_3 x_5. \end{aligned}$$

Böylece temsil

$$G(K) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5: x_1 = x_5^{-1} x_3 x_5, x_2 = x_4^{-1} x_1 x_4, x_3 = x_2^{-1} x_4 x_2, x_4 = x_1^{-1} x_5 x_1, x_5 = x_3^{-1} x_2 x_3)$$

olur. Wirtinger temsilini sadeleştirmek için Tietze denkliklerinin kullanacağız. $x_3^{-1} x_2 x_3$ gördüğümüz yere x_5 yazıp x_5 üretecini silerseniz:

$$x_1 = x_5^{-1} x_3 x_5 \text{ bağıntısı } x_1 = x_3^{-1} x_2^{-1} x_3 x_2 x_3 \text{ olur,}$$

$$x_2 = x_4^{-1} x_1 x_4 \text{ değişmez,}$$

$$x_3 = x_2^{-1} x_4 x_2 \text{ değişmez,}$$

$$x_4 = x_1^{-1} x_5 x_1 \text{ bağıntısı } x_4 = x_1^{-1} x_3^{-1} x_2 x_3 x_1 \text{ olur.}$$

Sonra, sadeleştirmek için x_3 üretecini seçelim:

$$G(K) \cong (x_1, x_2, x_4: x_1 = x_2^{-1} x_4^{-1} x_2 x_4 x_2^{-1} x_4 x_2, x_2 = x_4^{-1} x_1 x_4, x_4 = x_1^{-1} x_2^{-1} x_4^{-1} x_2 x_4 x_2 x_1).$$

Son olarak x_2 ’yi kullanırsak:

$$G(K) \cong (x_1, x_4: x_1 = x_4^{-1} x_1^{-1} x_4^{-1} x_1^{-1} x_4 x_1 x_4 x_1 x_4, x_4 = x_1^{-1} x_4^{-1} x_1^{-1} x_4^{-1} x_1 x_4 x_1 x_4 x_1)$$

elde ederiz. Aşağıdaki iki bağıntının aynı olduğuna dikkat edelim;

$$x_1 x_4 x_1 x_4 x_1 = x_4 x_1 x_4 x_1 x_4,$$

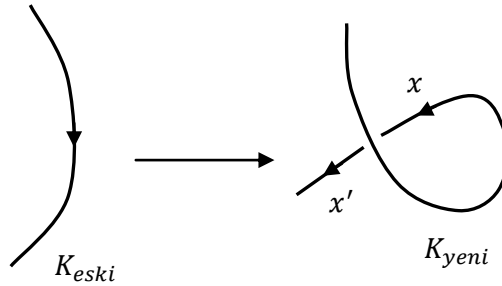
ve eğer $a = x_1 x_4$, $b = x_1 x_4 x_1 x_4 x_1$ dersek, o zaman aşağıdaki basit temsil elde edilir:

$$G(K) \cong (a, b: a^5 = b^2).$$

5.3.2 Wirtinger temsiliinin değişmezliği

Düğüm grubu $G(K)$ 'nin değişmez olduğunu göstermek için Reidemeister hareketlerine bakacağız (Gilbert ve Porter, 1994).

Hareket I (Şek.5.4)



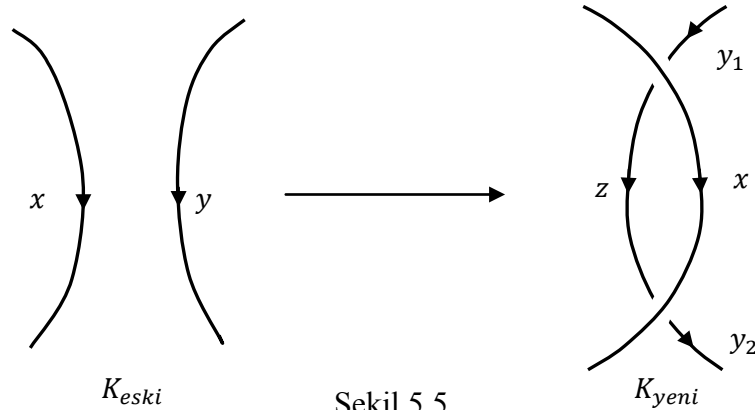
Şekil 5.4

K_{yeni} için, temsilde fazladan bir x' üretici olacak ve $G(K_{eshi})$ 'de x 'i içeren bağıntılardan bazıları, x' 'yü içeren bağıntılarla değiştirilecek. Ayrıca, yeni çaprazlama için aşağıdaki bağıntıya sahip olacağız:

$$x x x^{-1} x'^{-1} = 1.$$

Buradan $x = x'$ olur. Böylece, tüm bağıntılarda x' 'yü x ile sadeleştirip $G(K_{eshi}) \cong G(K_{yeni})$ elde ederiz.

Hareket II (Şek.5.5)



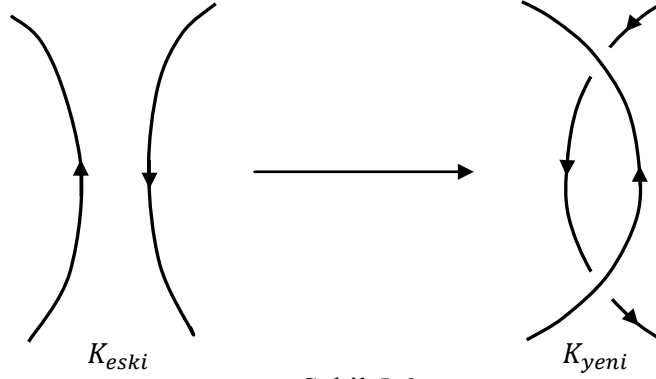
Şekil 5.5

Bu durumda, üç yeni üretici ve yeni çaprazlama için iki bağıntıya sahibiz:

$$z^{-1} x^{-1} y_1 x = 1 \text{ ve } y_2^{-1} x z x^{-1} = 1.$$

$z = x^{-1}y_1x$ 'i diğer bağıntıdan silebiliriz. Eğer diğer bağıntıdan z 'yi sadeleştirirsek, $y_2 = y_1$ elde ederiz ve böylece eski temsile dönebiliriz.

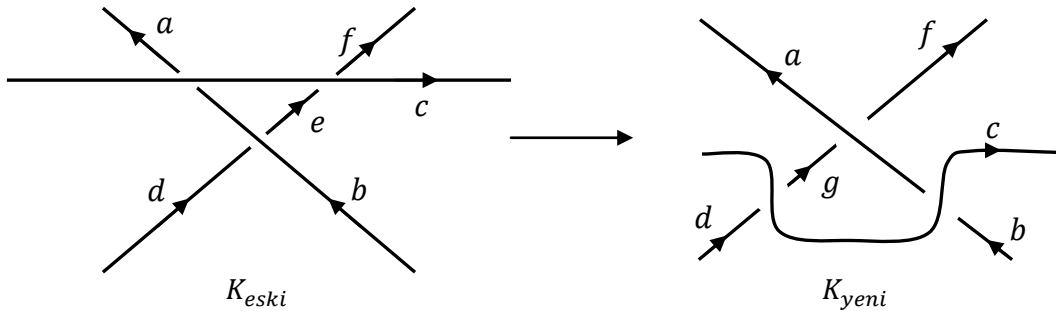
Yaylardan birinin yönlendirmesinin değiştirilmesi durumu da (Şek.5.6) benzer şekilde gösterilebilir.



Şekil 5.6

Hareket III (Şek.5.7)

Burada, yayların pozisyonlarına ve yönlendirmelerine bağlı olarak birden fazla alt durum söz konusudur. Biz bunlardan birini ele alacağız, diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.



Şekil 5.7

K_{eshi} 'de bağıntılar $a^{-1}cbc^{-1}$, $cec^{-1}f^{-1}$ ve $b^{-1}dbe^{-1}$ iken, K_{yeni} 'deki bağıntılar $a^{-1}gaf^{-1}$, $dc^{-1}g^{-1}c$ ve $c^{-1}a^{-1}cb$ 'dir. Eğer eski temsili, e 'yi silerek sadeleştirirsek,

$$a^{-1}cdc^{-1}af^{-1}$$

elde ederiz. Eğer yeni temsili, g 'yi silerek sadeleştirirsek,

$$dc^{-1}af^{-1}a^{-1}c$$

elde ederiz. Açıkça, iki temsil denktir ve böylece $G(K_{eshi})$ ve $G(K_{yeni})$ düğüm grupları izomorftur.

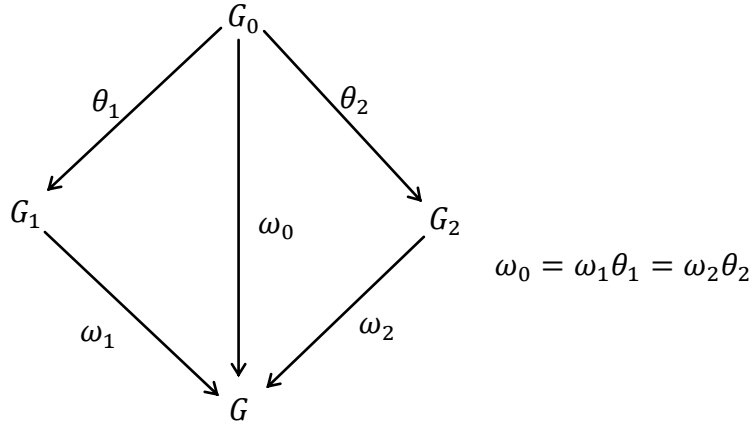
6. SEIFERT - VAN KAMPEN TEOREMİNİN UYGULAMALARI

Bu bölümde, cebirsel topolojideki önemli teoremlerden birini ispatsız olarak vereceğiz ve onun uygulamalarıyla ilgileneceğiz. Bu teorem ve onun sonuçları, n -yapraklı gül, tor, izdüşümsel düzlem gibi önemli topolojik uzayların temel gruplarını hesaplamamıza olanak sağlar.

6.1 Seifert - van Kampen Teoreminin İfadesi ve Sonuçları

Bir X topolojik uzayının boştan farklı iki açık alt kümesi X_1 ve X_2 için, $X = X_1 \cup X_2$ ve X_1, X_2 ve $X_0 = X_1 \cap X_2$ yol bağlantılı olsun. Bir $q \in X_0$ taban noktası seçelim ve $G = \pi_1(X, q)$, $G_i = \pi_1(X_i, q)$, $i = 0, 1, 2$ olarak atayalım.

Aşağıdaki diyagramı düşünelim:



Buradaki homomorfizmalar, kapsama tasvirleriyle yükseltgenmiş homomorfizmalardır.

6.1.1 Teorem (Seifert - van Kampen): $\omega_i G_i$, $i = 0, 1, 2$ görüntü grupları, G 'yi üretir. Ayrıca, eğer H keyfî bir grup ve $\psi_i: G_i \rightarrow H$, $i = 0, 1, 2$; $\psi_0 = \psi_1 \theta_1 = \psi_2 \theta_2$ koşulunu sağlayan homomorfizmalar ise, o zaman $\psi_i = \lambda \omega_i$, $i = 0, 1, 2$ olacak şekilde yalnız bir $\lambda: G \rightarrow H$ homomorfizması vardır.

Bu teoremin doğrudan bir sonucu olarak aşağıdaki aşikârdır:

6.1.2 Sonuç: Eğer X_1 ve X_2 basit bağlantılı ise, o zaman $X = X_1 \cup X_2$ de basit bağlantılıdır.

6.1.3 Sonuç: Eğer G_0 aşikâr, G_1 ve G_2 , sırasıyla, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ ve $\{\beta_1, \beta_2, \dots\}$ tabanlarıyla serbest gruplar ise, o zaman G , $\{\omega_1(\alpha_1), \omega_1(\alpha_2), \dots, \omega_2(\beta_1), \omega_2(\beta_2), \dots\}$ tabanıyla bir serbest gruptur (Crowell ve Fox, 1963).

İspat: H , $\{x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots\}$ tabanıyla bir serbest grup olsun öyle ki

$$\psi_1 \alpha_j = x_j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\psi_2 \beta_k = y_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

ile tanımlanan ψ_1 ve ψ_2 fonksiyonları, sırasıyla, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ ile $\{x_1, x_2, \dots\}$ ve $\{\beta_1, \beta_2, \dots\}$ ile $\{y_1, y_2, \dots\}$ arasında birebir eşlemelerdir. G_1 ve G_2 serbest olduklarından, bu eşlemeler

$$\psi_i: G_i \rightarrow H, \quad i = 1, 2$$

homomorfizmalarına genişlerler. G_0 aşikâr grup olduğundan, buna karşılık gelen bir $\psi_0: G_0 \rightarrow H$ aşikâr homomorfizması vardır ve ek olarak, $\psi_0 = \psi_1\theta_1 = \psi_2\theta_2$ 'dir. Teorem 6.1.1'den, $\psi_i = \lambda\omega_i, i = 0, 1, 2$ olacak şekilde bir $\lambda: G \rightarrow H$ homomorfizması vardır. Yani,

$$\lambda\omega_1(\alpha_j) = \psi_1(\alpha_j) = x_j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\lambda\omega_2(\beta_k) = \psi_2(\beta_k) = y_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

H serbest olduğundan,

$$\mu(x_j) = \omega_1(\alpha_j), \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\mu(y_k) = \omega_2(\beta_k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

ile tanımlanan bir $\mu: H \rightarrow G$ homomorfizması vardır. Her iki $\lambda\mu$ ve $\mu\lambda$ bileşkesi de açıkça birim tasvirdir. Buradan λ ve μ birbirinin tersidir ve homomorfizmadır. ■

6.1.4 Sonuç: Eğer X_2 basit bağlantılı ise, o zaman ω_1 homomorfizması örtendir. Ayrıca, eğer $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$, G_0 'ı üretiyorsa, ω_1 'in çekirdeği $\{\theta_1(\alpha_1), \theta_1(\alpha_2), \dots\}$ 'nin normal kapanışıdır.

İspat: G_2 aşikâr olduğundan, $\omega_1 G_1$ görüntü grubu G 'yi üretir ve hiçbir grup bir öz alt grup tarafından üretilemez. Buradan, $\omega_1(G_1) = G$ olur.

Söz konusu konseansı $\langle\langle C \rangle\rangle = \langle\langle \{\theta_1(\alpha_1), \theta_1(\alpha_2), \dots\} \rangle\rangle$ ile gösterelim. G_2 aşikâr olduğundan, $\omega_2\theta_2(\alpha_j) = 1, j = 1, 2, \dots$, olur. Diyagramdaki değişmelilikten

$$\omega_2\theta_2(\alpha_j) = \omega_1\theta_1(\alpha_j) = 1, \quad j = 1, 2, \dots,$$

elde ederiz. Buradan,

$$(1) \quad \langle\langle C \rangle\rangle \subseteq \text{Ker } \omega_1$$

olur. Tersine, bir $\beta \in \text{Ker } \omega_1$ elemanı alalım. Bu durumda $\omega_1(\beta) = 1$ olur. $H = G_1 / \langle\langle C \rangle\rangle$

olsun ve $\psi_1: G_1 \rightarrow H$ doğal homomorfizmasını düşünelim. Açıkça, $\psi_1\theta_1$ bileşkesi aşikârdır. Buna karşılık gelen G_2 'den H 'ye aşikâr homomorfizmayı ψ_2 ile gösterirsek,

$$\psi_0 = \psi_1\theta_1 = \psi_2\theta_2$$

elde ederiz. O zaman, Teorem 6.1.1'den, $\psi_1 = \lambda\omega_1$ olacak şekilde bir $\lambda: G \rightarrow H$ homomorfizması vardır. Dolayısıyla,

$$\psi_1(\beta) = \lambda\omega_1(\beta) = 1$$

olur ve buradan $\beta, \ll C \gg$ 'nin bir elemanı olur:

$$(2) \quad Ker \omega_1 \subseteq \ll C \gg.$$

(1) ve (2)'den, sonucu elde ederiz:

$$Ker \omega_1 = \ll \{\theta_1(\alpha_1), \theta_1(\alpha_2), \dots\} \gg. \blacksquare$$

6.1.5 Seifert - van Kampen teoreminin ikinci formu: Teorem 6.1.1'in hipotezini ve notasyonunu kabul edelim. Ek olarak, G_0, G_1 ve G_2 gruplarının, sırasıyla, $(Z:T)_{\phi_0}, (X:R)_{\phi_1}$ ve $(Y:S)_{\phi_2}$ temsillerine sahip olduğunu kabul edelim. O zaman G grubu

$$(X \cup Y: R \cup S \cup \{\overline{\theta_1}(z_k)\overline{\theta_2}(z_k)^{-1}: z_k \in Z, k = 1, 2, \dots\})_{\phi}$$

temsiline sahiptir. Burada $\overline{\theta_1}(z_k), \theta_1(z_k)$ 'yı temsil eden $F(X)$ 'de bir kelimedir ve $\overline{\theta_2}(z_k), \theta_2(z_k)$ 'yı temsil eden $F(Y)$ 'de bir kelimedir.

İspat: $R \cup S \cup \{\overline{\theta_1}(z_k)\overline{\theta_2}(z_k)^{-1}: z_k \in Z, k = 1, 2, \dots\}$ kümesinin konsekansını

$$\ll C \gg = \ll R \cup S \cup \{\overline{\theta_1}(z_k)\overline{\theta_2}(z_k)^{-1}: z_k \in Z, k = 1, 2, \dots\} \gg$$

ile ve ϕ_0, ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonlarının tanım kümeleri olan serbest grupları, sırasıyla, $F(Z), F(X)$ ve $F(Y)$ ile gösterelim.

X ve Y 'nin ayrık olduğunu ve birleşimlerinin, $F(X \cup Y)$ serbest grubunun tabanı olduğunu kabul etmek uygun olur. Böylece $F(X)$ ve $F(Y)$, $F(X \cup Y)$ 'nin alt gruplarıdır. Serbest grupların evrensel özelliğinden,

$$\phi(F(X)) = \omega_1\phi_1(F(X)),$$

$$\phi(F(Y)) = \omega_2\phi_2(F(Y)),$$

olacak şekilde yalnız bir

$$\phi: F(X \cup Y) \rightarrow G$$

homomorfizması vardır. ϕ 'nin çekirdeğinin $\ll C \gg$ 'ye eşit olduğunu göstermeliyiz.

$$\phi(R) = \omega_1\phi_1(R) = 1,$$

$$\phi(S) = \omega_2\phi_2(S) = 1,$$

olduğuna dikkat edelim. Dolayısıyla, birinci kapsama için $\phi(\overline{\theta_1}(z_k)\overline{\theta_2}(z_k)^{-1}) = 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. $F(Z)$ de serbest olduğundan, θ_1 ve θ_2 tasvirleri, serbest gruplara kalkabilirler. Başka bir deyişle,

$$\bar{\theta}_1: F(Z) \rightarrow F(X),$$

$$\bar{\theta}_2: F(Z) \rightarrow F(Y),$$

homomorfizmaları vardır öyle ki aşağıdaki diyagram değişmelidir:

$$\begin{array}{ccccc}
 F(X) & \xleftarrow{\bar{\theta}_1} & F(Z) & \xrightarrow{\bar{\theta}_2} & F(Y) \\
 \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi_2 \\
 G_1 & \xleftarrow{\theta_1} & G_0 & \xrightarrow{\theta_2} & G_2
 \end{array}$$

Bu durumda, herhangi $z_k \in Z, k = 1, 2, \dots$, için

$$\begin{aligned}
 \phi(\bar{\theta}_1(z_k)\bar{\theta}_2(z_k)^{-1}) &= (\phi\bar{\theta}_1(z_k))(\phi\bar{\theta}_2(z_k)^{-1}) \\
 &= (\omega_1\phi_1\bar{\theta}_1(z_k))(\omega_2\phi_2\bar{\theta}_2(z_k)^{-1}) \\
 &= (\omega_1\theta_1\phi_0(z_k))(\omega_2\theta_2\phi_0(z_k)^{-1}) \\
 &= (\omega_0\phi_0(z_k))(\omega_0\phi_0(z_k)^{-1}) \\
 &= \omega_0\phi_0(z_k z_k^{-1}) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

olur. Böylece,

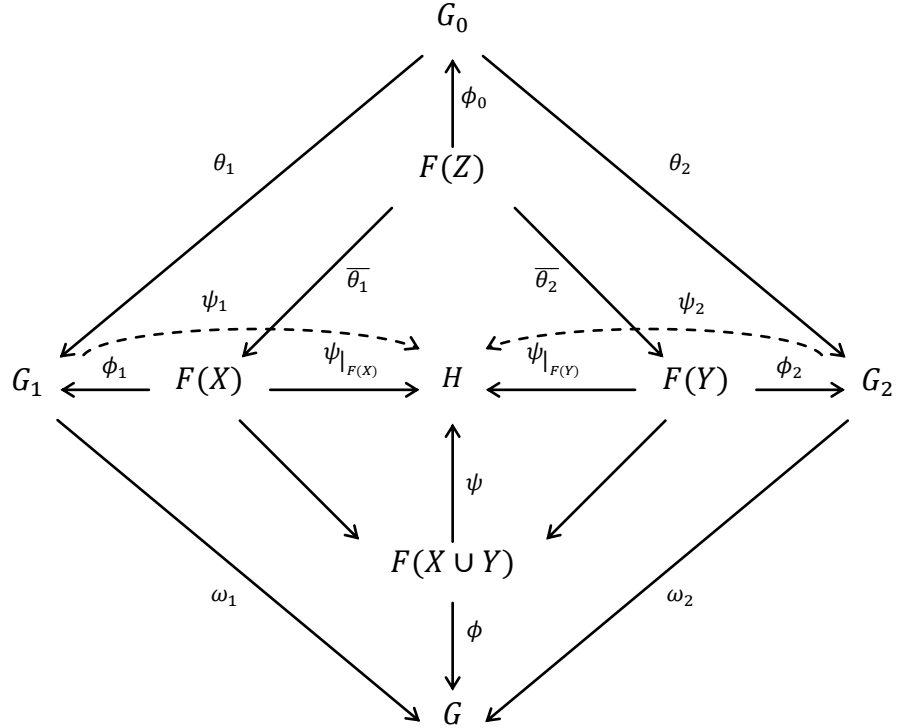
$$(1) \quad \ll C \gg \subseteq \text{Ker } \phi$$

elde edilir. Ters kapsamayı ispatlamak için, C çekirdeğine sahip keyfi bir $\psi: F(X \cup Y) \rightarrow H$ homomorfizmasını düşünelim. O zaman, aşağıdaki diyagramlar değişmeli olacak şekilde $\psi_1: G_1 \rightarrow H$ ve $\psi_2: G_2 \rightarrow H$ homomorfizmalarının var olduğu açıktır.

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) & \xrightarrow{\psi|_{F(X)}} & H \\
 \downarrow \phi_1 & \nearrow \psi_1 & \\
 G_1 & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 F(Y) & \xrightarrow{\psi|_{F(Y)}} & H \\
 \downarrow \phi_2 & \nearrow \psi_2 & \\
 G_2 & &
 \end{array}$$

$\psi\bar{\theta}_1(z_k) = \psi\bar{\theta}_2(z_k), k = 1, 2, \dots$, olduğundan, değişmelilikten (bkz. aşağıdaki diyagram),

$$\psi_1\theta_1\phi_0(z_k) = \psi_2\theta_2\phi_0(z_k), k = 1, 2, \dots$$



Z , G_0 'ın bir üreteç kümesi olduğundan, yani, $\phi_0(z_1), \phi_0(z_2), \dots$ elemanları G_0 'ı ürettiğinden, ψ_0 homomorfizması

$$\psi_0 = \psi_1 \theta_1 = \psi_2 \theta_2$$

ile iyi tanımlıdır. Şimdi, Teorem 6.1.1'den, bir

$$\lambda: G \rightarrow H$$

homomorfizması vardır öyle ki

$$\psi_i = \lambda \omega_i, i = 0, 1, 2.$$

Eğer $u \in F(X)$ ise, o zaman

$$\psi(u) = \psi_1 \phi_1(u) = \lambda \omega_1 \phi_1(u) = \lambda \phi(u),$$

elde ederiz. Eğer $u \in F(Y)$ ise, o zaman yine

$$\psi(u) = \psi_2 \phi_2(u) = \lambda \omega_2 \phi_2(u) = \lambda \phi(u)$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$\psi = \lambda \phi$$

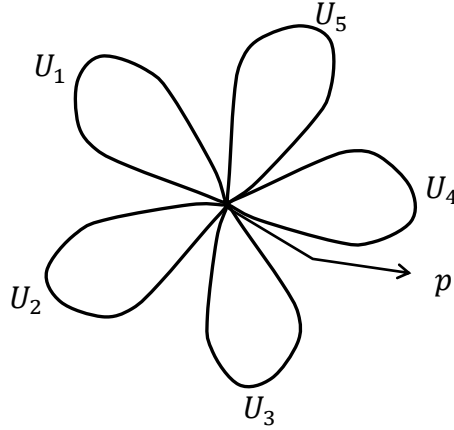
olduğu görülür. Buradan, herhangi $m \in \text{Ker } \phi$ elemanı için, $\psi(m) = \lambda \phi(m) = 1$ olur. Böylece $m \in \text{Ker } \psi = C \subseteq \ll C \gg$ 'dir. Yani,

$$(2) \quad \text{Ker } \phi \subseteq \ll C \gg.$$

(1) ve (2)'den, $\text{Ker } \phi = \langle\langle C \rangle\rangle$ elde edilir.

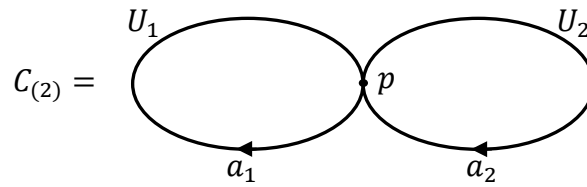
6.2 Uygulamalar

6.2.1 n -yapraklı gül: Bu uzay, bir p noktasında birleşen ve diğer durumlarda ayırık olan n tane $U_1, U_2, \dots, U_n$ topolojik çemberin birleşimidir (Şek.6.1).



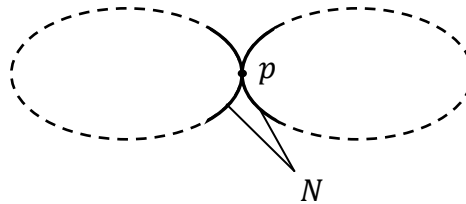
Şekil 6.1: 5-yapraklı gül

Bu uzayı $C_{(p)}$ ile göstereceğiz ve onun temel grubunu hesaplayacağız. İlk olarak, $C_{(1)}$ bir çember olduğundan, $\pi_1(C_{(1)}, p)$ 'nin bir üreteç üzerinde serbest olduğunu biliyoruz. Bu yüzden, $\pi_1(C_{(2)}, p)$ 'nin iki üreteç üzerinde serbest olduğunu gösterelim.



Şekil 6.2 2-yapraklı gül

Şek.6.2'de görüldüğü gibi U_1, U_2 ve $U_1 \cap U_2 = \{p\}$ yol bağlantılıdır ve $C_{(2)} = U_1 \cup U_2$ 'dir. Fakat U_1 ve U_2 , $C_{(2)}$ 'nin açık alt kümeleri değildir. Bu sebepten Seifert - van Kampen teoremini doğrudan uygulayamayız. $C_{(2)}$ 'de p 'nin açık bir komşuluğu Şek.6.3'deki gibi N olsun.



Şekil 6.3 2-yapraklı gülde ortak noktanın açık bir komşuluğu

Eğer $X_1 = U_1 \cup N$ ve $X_2 = U_2 \cup N$ dersek, o zaman X_1 ve X_2 açık, yol bağlantılı ve $C_{(2)} = X_1 \cup X_2$, $N = X_1 \cap X_2$ olur. U_1 ve U_2 'nin, sırasıyla, X_1 ve X_2 'nin çekilmiş bozunumları olduklarına dikkat edelim. Böylece,

$$\pi_1(X_1, p) \cong \pi_1(U_1, p),$$

$$\pi_1(X_2, p) \cong \pi_1(U_2, p),$$

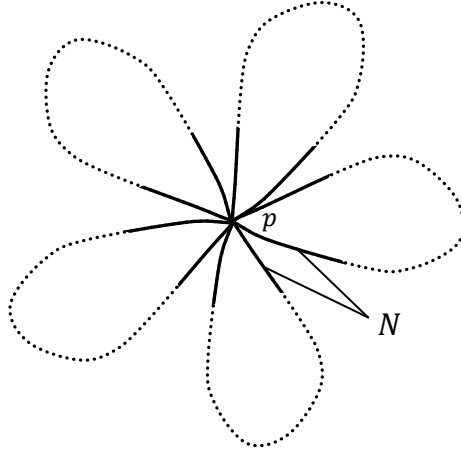
olur ve bu gruplar, sırasıyla a_1 ve a_2 kapalı yollarının sınıfı tarafından serbest olacak şekilde üretilmişlerdir. Bu durumda, $\pi_1(X_1, p)$ ve $\pi_1(X_2, p)$, sırasıyla $([a_1]: \emptyset)$ ve $([a_2]: \emptyset)$ temsillerine sahiptirler. N 'nin kendisi $\{p\}$ 'yi çekilmiş bozunum olarak içerdiğinden, $\pi_1(X_1 \cap X_2, p)$ 'nin aşikâr grup olduğu açıktır. O zaman $\pi_1(X_1 \cap X_2, p)$, $(\emptyset: \emptyset)$ temsiline sahiptir. Şimdi, Seifert - van Kampen teoreminden $\pi_1(C_{(2)}, p)$, $([a_1], [a_2]: \emptyset)$ temsiline sahiptir, yani, iki çember etrafındaki kapalı yollara karşılık gelen iki üreteç üzerinde bir serbest gruptur.

n -yapraklı gülün n üreteç üzerinde serbest olduğu, n üzerinde tümevarım uygulanarak ispatlanabilir:

$$C_{(n+1)} = C_{(n)} \cup U_{(n+1)},$$

$$\{p\} = C_{(n)} \cap U_{(n+1)}.$$

$C_{(n+1)}$ 'de p 'nin açık bir N komşuluğu, Şek.6.4'deki gibi p 'den ve her birinin bitim noktası p olan ayrık, açık, $2(n+1)$ yayın birleşiminden oluşsun.



Şekil 6.4 Açık komşuluk

Eğer $X_1 = C_{(n)} \cup N$ ve $X_2 = U_{n+1} \cup N$ dersek, o zaman $C_{(n)}$, U_{n+1} ve $\{p\}$, sırasıyla X_1 , X_2 ve $X_1 \cap X_2$ 'nin çekilmiş bozunumlarıdır. Buradan,

- 1) $\pi_1(X_1, p) \cong \pi_1(C_{(n)}, p)$ olur ve bu da tümevarım hipotezinden, n üreteç üzerinde bir serbest gruptur.

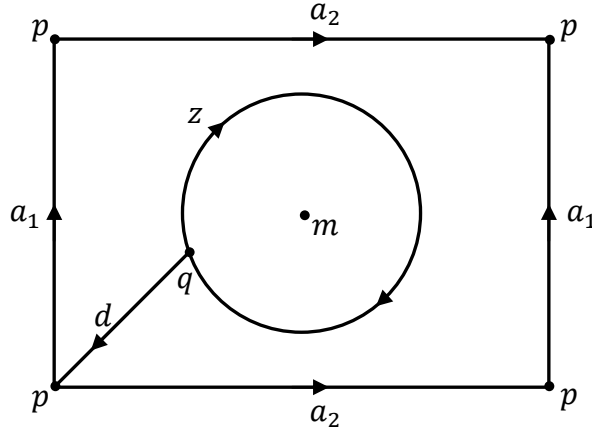
- 2) $\pi_1(X_2, p) \cong \pi_1(U_{n+1}, p)$ olur ve U_{n+1} bir çember olduğundan bu da bir üreteç üzerinde bir serbest gruptur.
- 3) $\pi_1(X_1 \cap X_2, p)$ açıkça aşikâr gruptur.

$C_{(n+1)} = X_1 \cup X_2$ olduğuna ve X_1, X_2 ve $N = X_1 \cap X_2$ 'nin, $C_{(n+1)}$ 'in açık, yol bağlantılı ve boştan farklı alt kümeleri olduklarına dikkat ederek, Seifert - van Kampen teoremini uygular ve $\pi_1(C_{(n+1)}, p)$ 'nin $(n + 1)$ üreteç üzerinde serbest olduğunu elde ederiz. Başka bir deyişle, eğer $\pi_1(X_1, p), \pi_1(X_2, p)$ ve $\pi_1(X_1 \cap X_2, p)$ sırasıyla, $([a_1], [a_2], \dots, [a_n]: \emptyset)$, $([a_{n+1}]: \emptyset)$ ve $(\emptyset: \emptyset)$ temsillerine sahipse, o zaman $\pi_1(X_1 \cup X_2)$ 'nin $([a_1], [a_2], \dots, [a_{n+1}]: \emptyset)$ temsiline sahip olduğunu elde ederiz.

6.2.2 Tor: Bölüm 4'ten T torunun, $S^1 \times S^1$ çarpımı olarak yazılabileceğini biliyoruz. Buradan da torun temel grubunun

$$\pi_1(T, p) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

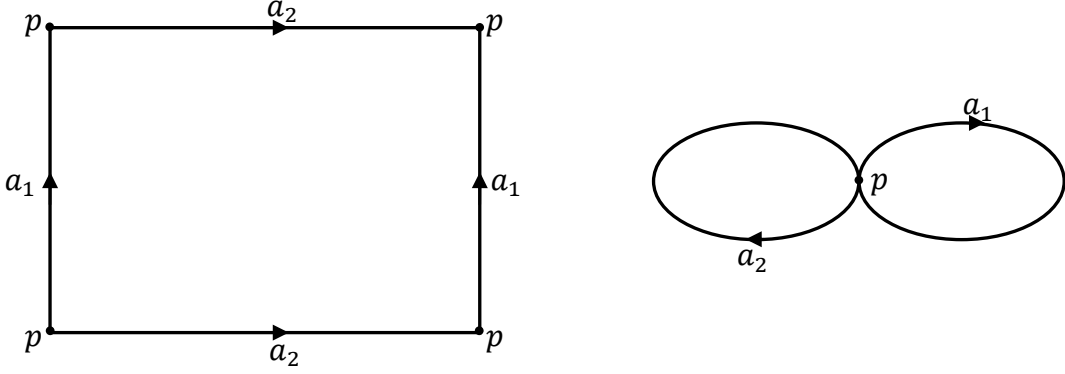
yani, iki üreteç üzerinde bir serbest abelyen grup olduğu görülür. Şimdi bunu bir de Seifert - van Kampen teoremini kullanarak hesaplayalım. Bölüm 3'te gördüğümüz gibi torun, bir dikdörtgenin kenarlarını yapıştırarak elde edilebileceğini hatırlayalım. Uygun bir açık ayrışım bulmalıyız.



Şekil 6.5 Torun dikdörtgensel temsili için açık bir ayrışım

m , dikdörtgenin merkez noktası olsun. Eğer $X_1 = T - \{m\}$ dersek ve X_2 'yi, dikdörtgenin içinin özdeşleştirme altındaki görüntüsü olarak alırsak, o zaman X_1, X_2 ve $X_1 \cap X_2$ boştan farklı, yol bağlantılı ve açık alt kümeler olurlar.

a_1 ve a_2 kenarlarının özdeşleştirilmelerinden sonra dikdörtgenin sınırları, ortak p noktası ile bir $C_{(2)}$ 2-yapraklı gülüne döner ve bu da X_1 'in bir çekilmiş bozunumudur (Şek.6.6).



Şekil 6.6 Kenarların özdeşleştirilmesinden sonra bir 2-yapraklı gül

Dolayısıyla, eğer Şek.6.5’de gösterilen yönde sırasıyla a_1 ve a_2 boyunca bir kez geçen p tabanlı α_1 ve α_2 ilmeklerinin denklik sınıflarını $[\alpha_1]$ ve $[\alpha_2]$ ile gösterirsek, o zaman $\pi_1(X_1, p)$, $[\alpha_1]$ ve $[\alpha_2]$ üreteçleri üzerinde serbest gruptur, bu yüzden

$$([\alpha_1], [\alpha_2] : \emptyset)$$

temsiline sahiptir. Şek.6.5’de d ’ye karşılık gelen q ’dan p ’ye X_1 ’deki bir δ yolunun denklik sınıfını $[\delta]$ ile gösterirsek, o zaman $A_1 = [\delta\alpha_1\delta^{-1}]$ ve $A_2 = [\delta\alpha_2\delta^{-1}]$ olmak üzere $\pi_1(X_1, q)$ için bir

$$([A_1], [A_2] : \emptyset)$$

temsili elde ederiz.

X_2 , açık diske homeomorf olduğundan $\pi_1(X_2, q)$ ’nun aşikâr grup olduğu açıktır.

$X_1 \cap X_2$ bir açık halka olduğundan, Şek.6.5’de m noktası etrafından belirtilen yönde bir kez geçen z çemberine karşılık gelen bir γ ilmeğinin denklik sınıfını $[\gamma]$ ile gösterirsek, o zaman $\pi_1(X_1 \cap X_2, q)$, $[\gamma]$ ile üretilen sonsuz devirli gruptur.

Şimdi, X_1 ’de

$$[\overline{\theta}_1(\gamma)] = [\delta\alpha_1\alpha_2\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}\delta^{-1}] = [\delta\alpha_1\delta^{-1}][\delta\alpha_2\delta^{-1}][\delta\alpha_1^{-1}\delta^{-1}][\delta\alpha_2^{-1}\delta^{-1}]$$

olur ve böylece $\theta_1([\gamma]) = A_1A_2A_1^{-1}A_2^{-1}$ olur. Diğer taraftan, $\pi_1(X_2, q)$ aşikâr olduğundan, $\theta_2([\gamma]) = 1$ ’dir. Seifert - van Kampen teoreminden, $\pi_1(T, q)$ bir

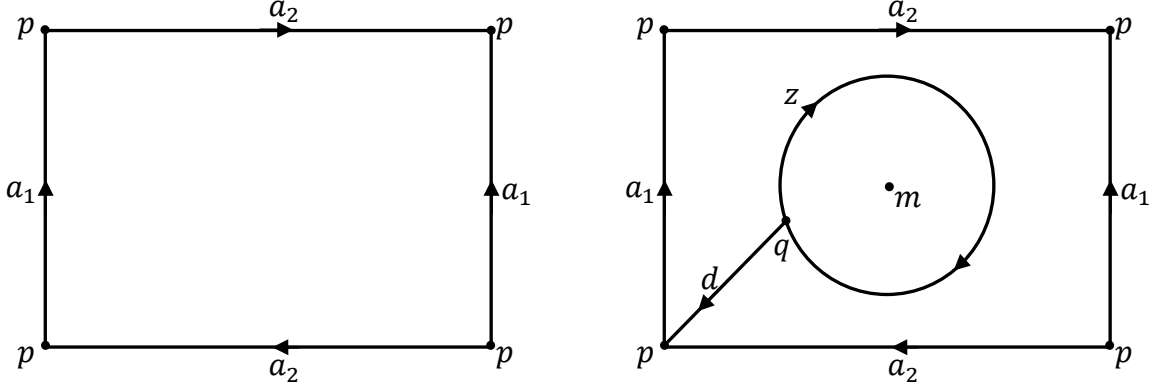
$$([A_1], [A_2] : A_1A_2A_1^{-1}A_2^{-1})$$

temsiline sahiptir. Bunu daha uygun olması açısından

$$(A_1, A_2 : [A_1, A_2])$$

şeklinde de yazarız. A_1 ve A_2 üreteçlerinin değişmeli, yani, $A_1A_2 = A_2A_1$ olduğunu görüyoruz. Böylece torun temel grubu, rangı 2 olan bir serbest abelyen gruptur.

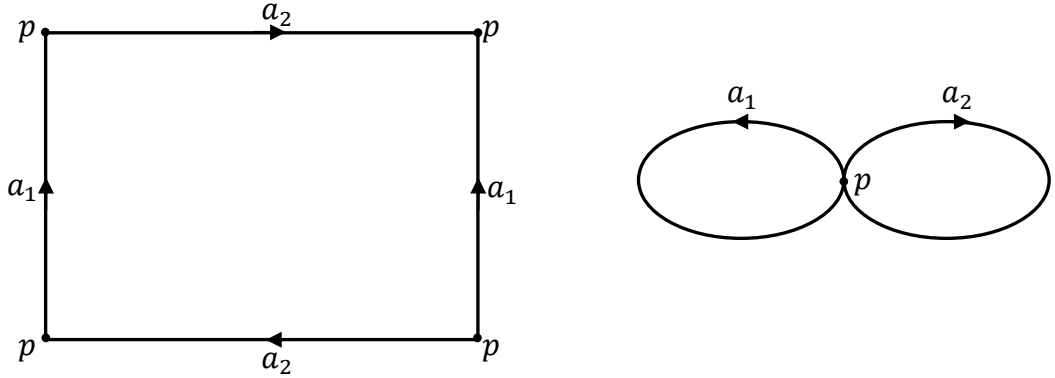
6.2.3 Klein şişesi: Klein şişesinin temel grubunun hesaplanması, torunkiyle benzerdir. Klein şişesini K ile göstereceğiz ve Şek.6.7’de gösterilen notasyonu kullanacağız.



Şekil 6.7 Klein şişesinin dikdörtgenel temsili için açık bir ayrışım

$X_1 = K - \{m\}$ ve $X_2 = K - \{a_1 \cup a_2\}$ olsun. Yani X_2 , dikdörtgenin içi olsun. O zaman, X_1, X_2 ve $X_1 \cap X_2$ Seifert - van Kampen teoreminde istenen koşulları sağlarlar.

Kenarların özdeşleştirilmesinden sonra, dikdörtgenin sınırları ortak p noktasına sahip bir 2-yapraklı gül, $C_{(2)}$, halini alır ve bu da X_1 ’in bir çekilmiş bozunumudur (Şek.6.8).



Şekil 6.8 Kenarların özdeşleştirilmesinden sonra bir 2-yapraklı gül

Böylece $\pi_1(X_1, p)$, α_1 ve α_2 , sırasıyla, a_1 ve a_2 ’ye karşılık gelen kapalı yollar olmak üzere, $[\alpha_1]$ ve $[\alpha_2]$ ile üretilmiş bir serbest gruptur. δ ile d ’ye karşılık gelen yolu gösterirsek, o zaman $\pi_1(X_1, q)$, $A_1 = [\delta\alpha_1\delta^{-1}]$ ve $A_2 = [\delta\alpha_2\delta^{-1}]$ ile üretilmiş serbest gruptur.

Tor örneğinde olduğu gibi, $\pi_1(X_2, q)$ aşikâr gruptur.

Son olarak, z çemberi, $X_1 \cap X_2$ ’nin bir çekilmiş bozunumudur. $X_1 \cap X_2$ ’de z ’ye karşılık gelen, yani belirtilen yönde z etrafından bir kez geçen bir γ yolunun denklik sınıfını $[\gamma]$ ile gösterirsek, o zaman $\pi_1(X_1 \cap X_2, q)$, $[\gamma]$ ile üretilmiş bir serbest gruptur.

Şimdi, X_1 ’de

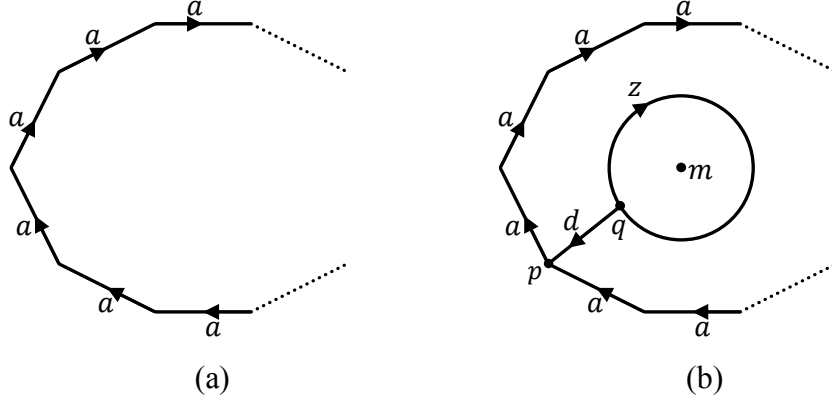
$$\begin{aligned} [\overline{\theta}_1(\gamma)] &= [\delta\alpha_1\alpha_2\alpha_1^{-1}\alpha_2\delta^{-1}] \\ &= [\delta\alpha_1\delta^{-1}][\delta\alpha_2\delta^{-1}][\delta\alpha_1^{-1}\delta^{-1}][\delta\alpha_2\delta^{-1}], \end{aligned}$$

ve böylece $\theta_1([\gamma]) = A_1 A_2 A_1^{-1} A_2$ olur. Ayrıca $\theta_2([\gamma]) = 1$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, Seifert - van Kampen teoreminden, Klein şişesinin temel grubu $\pi_1(K, q)$,

$$([A_1], [A_2] : A_1 A_2 A_1^{-1} A_2)$$

temsiline sahiptir.

6.2.4 Sonlu devirli temel gruba sahip uzaylar: X uzayının n -kenarlı çokgensel temsili Şek.6.9-(a)'daki gibi olsun ve p, q, z, m ve d ile Şek.6.9-(b)'de belirtildiği gibi noktaları, çemberi ve doğruyu gösterelim.



Şekil 6.9 Bir uzayın n -kenarlı çokgensel temsili için açık bir ayrışım

$X_1 = X - \{m\}$ ve $X_2 = X - \{a\}$ olsun. Bu durumda X_1, X_2 ve $X_1 \cap X_2$ boştan farklı, yol bağlantılı ve $X = X_1 \cup X_2$ olur. Çokgenin kenarları X 'de bir a çemberi oluşturur ve bu da X_1 'in bir çekilmiş bozunumudur. Böylece α, a 'ya karşılık gelen p tabanlı kapalı bir yol olmak üzere, $\pi_1(X_1, p), [\alpha]$ ile üretilen bir serbest gruptur. Eğer δ, d 'ye karşılık gelen q 'dan p 'ye yol ise o zaman $\pi_1(X_1, q), [\delta \alpha \delta^{-1}] = A$ ile üretilen serbest bir gruptur.

X_2 açık bir diske homeomorf olduğundan, $\pi_1(X_2, q)$ 'nin aşikâr grup olduğu açıktır.

Son olarak, z çemberi $X_1 \cap X_2$ 'nin bir çekilmiş bozunumu olduğundan, $X_1 \cap X_2$ 'de z 'ye karşılık gelen kapalı bir yol γ olmak üzere, $\pi_1(X_1 \cap X_2, q), [\gamma]$ ile üretilmiş bir serbest gruptur.

Şimdi,

$$\begin{aligned} [\overline{\theta_1}(\gamma)] &= [\delta \underbrace{\alpha \alpha \dots \alpha}_{n \text{ defa}} \delta^{-1}] \\ &= [\delta \alpha \delta^{-1}] [\delta \alpha \delta^{-1}] \dots [\delta \alpha \delta^{-1}], \end{aligned}$$

ve böylece $\theta_1([\gamma]) = A^n$ olur. $\theta_2([\gamma]) = 1$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, Seifert - van Kampen teoreminden, $\pi_1(X, q)$ aşağıdaki gibi bir temsile sahiptir:

$$(A: A^n).$$

Başka bir deyişle bu, n . mertebeden devirli grup $\mathbb{Z}_n$ 'e izomorftur. $n = 2$ olduğunda, $\mathbb{P}^2$ izdüşümsel düzleminin temsili elde edeceğimize dikkat edelim: $(A: A^2)$. Buradan izdüşümsel düzlem, 2. mertebeden devirli gruba izomorftur: $\mathbb{P}^2 \cong \mathbb{Z}_2$.

6.2.5 Bağlantılı toplamların temel grupları:

Torların $T \# T \# \dots \# T$ g -bağlantılı toplamının normal formunun

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

olduğunu ve izdüşümsel düzlemlerin $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2$ g -bağlantılı toplamının normal formunun

$$a_1 a_1 \dots a_g a_g$$

olduğunu hatırlayalım. İlk yüzeyi T_g ile, ikinci yüzeyi P_g ile gösterelim. Biz bu örnekte P_g 'nin temel grubunun

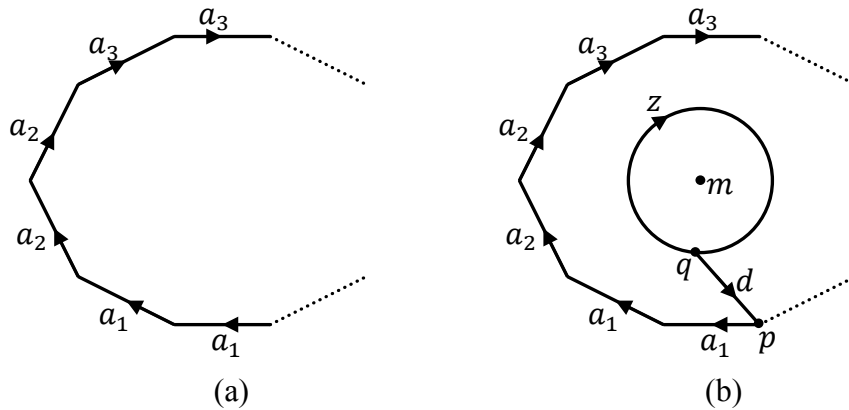
$$(A_1, A_2, \dots, A_g: A_1^2 A_2^2 \dots A_g^2)$$

temsiline sahip olduğunu göstereceğiz. Benzer şekilde, $[A_i, B_i] = A_i B_i A_i^{-1} B_i^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, g$ olmak üzere, T_g 'nin temel grubunun

$$(A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_g, B_g: [A_1, B_1][A_2, B_2] \dots [A_g, B_g])$$

temsiline sahip olduğu gösterilebilir.

P_g 'yi Şek.6.10-(a)'daki gibi belirledikten sonra Şek.6.10-(b)'deki notasyonu kullanarak, $X_1 = P_g - \{m\}$ ve $X_2 = P_g - \{a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_g\}$ diyelim.



Şekil 6.10 İzdüşümsel düzlemlerin g -bağlantılı toplamı için açık bir ayrışım

Kenarların özdeşleştirilmesinden sonra, sınırlar bir g -yapraklı gül halini alır ve bu da X_1 'in bir çekilmiş bozunumudur. Böylece, $i = 1, 2, \dots, g$ için, her a_i , a_i 'ye karşılık gelmek üzere

$\pi_1(X_1, p)$, $[\alpha_1], [\alpha_2], \dots, [\alpha_g]$ üreteçleri üzerinde bir serbest gruptur. d 'ye karşılık gelen bir yolu δ ile gösterirsek, o zaman $\pi_1(X_1, q)$

$$A_1 = [\delta\alpha_1\delta^{-1}], A_2 = [\delta\alpha_2\delta^{-1}], \dots, A_g = [\delta\alpha_g\delta^{-1}]$$

üreteçleri üzerinde bir serbest grup olur. Yukarıdaki örneklerde de olduğu gibi, m merkez noktası etrafından belirtilen yönde bir kez geçen z çemberine karşılık gelen kapalı bir yol γ olmak üzere, $\pi_1(X_2, q)$ ve $\pi_1(X_1 \cap X_2, q)$ sırasıyla, $(\emptyset: \emptyset)$ ve $([\gamma]: \emptyset)$ temsillerine sahiptir.

Şimdi, X_1 'de

$$\begin{aligned} [\overline{\theta_1}(\gamma)] &= [\delta\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_2 \dots \alpha_g\alpha_g\delta^{-1}] \\ &= [\delta\alpha_1\delta^{-1}][\delta\alpha_1\delta^{-1}] \dots [\delta\alpha_g\delta^{-1}][\delta\alpha_g\delta^{-1}], \end{aligned}$$

olur ve böylece $\theta_1([\gamma]) = A_1^2 A_2^2 \dots A_g^2$ 'dir. $\pi_1(X_2, q)$ aşikâr grup olduğundan $\theta_2([\gamma]) = 1$ 'dir. O zaman, Seifert - van Kampen teoreminden, $\pi_1(P_g, q)$ aşağıdaki temsile sahiptir:

$$(A_1, A_2, \dots, A_g: A_1^2 A_2^2 \dots A_g^2).$$

6.2.6 Yüzey Grupları: Bölüm 3'den hatırlayacağımız üzere, kombinatoryal bir S yüzeyi (sınırları olmayan) ya T_g 'ye (yönlendirilebilir ise) ya da P_g 'ye (yönlendirilemez ise) homeomorftur. Fakat, T_g ve P_g 'nin homeomorf olmadığını göstermedik. Bunu ispatlamak için, onların abelyenize edilmiş temel gruplarını buluruz.

Teorem 4.2.23'den, $(\pi_1(T_g, q))_{ab}$ 'nin aşağıdaki temsile sahip olduğu elde edilir:

$$(A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_g, B_g: [A_1, B_1][A_2, B_2] \dots [A_g, B_g], |[A_i, A_j]: i, j = 1, 2, \dots, g|).$$

$[A_1, B_1][A_2, B_2] \dots [A_g, B_g]$ komütatörler çarpımının, diğer bağıntıların bir konsekanısı olduğuna dikkat edelim. Bu yüzden onu söylebiliriz. Dolayısıyla, bu temsili şöyle yazarız:

$$(A_1, B_1, \dots, A_g, B_g: [A_1, B_1], [A_2, B_2], \dots, [A_g, B_g]).$$

Buradan, üreteçlerin değişmeli olduğunu:

$$A_1 B_1 = B_1 A_1, \dots, A_g B_g = B_g A_g,$$

ve böylece T_g 'nin abelyenize edilmiş temel grubu, rangı $2g$ olan bir serbest abelyen grup olur.

Benzer şekilde, $(\pi_1(P_g, q))_{ab}$ aşağıdaki temsile sahiptir:

$$(A_1, A_2, \dots, A_g: A_1^2 A_2^2 \dots A_g^2, |[A_i, A_j]: i, j = 1, 2, \dots, g|).$$

Daha uygun bir temsil elde etmek için aşağıdaki Tietze denkliklerini kullanırız:

$$\begin{aligned}
& (A_1, A_2, \dots, A_g: A_1^2 A_2^2 \dots A_g^2, |[A_i, A_j]: i, j = 1, 2, \dots, g|) \\
& \quad \downarrow \\
& (A_1, A_2, \dots, A_g: (A_1 A_2 \dots A_g)^2, |[A_i, A_j]: i, j = 1, 2, \dots, g|) \\
& \quad \downarrow T_2 \\
& (A_1, A_2, \dots, A_g, B: B^2, B = A_1 A_2 \dots A_g, |[A_i, A_j]: i, j = 1, 2, \dots, g|) \\
& \quad \downarrow T'_2 \\
& (A_1, A_2, \dots, A_{g-1}, B: B^2, |[A_i, A_j]: i, j = 1, 2, \dots, g-1|).
\end{aligned}$$

Buradan, $g - 1$ üreticinin değişmeli olduğunu:

$$A_i A_j = A_j A_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, g - 1,$$

ve bir üreticinin mertebesinin 2 olduğunu görüyoruz. Böylece, P_g 'nin abelyenize edilmiş temel grubu, rangı $g - 1$ olan serbest abelyen grup ile 2. mertebeden devirli grubun direk çarpımıdır (Stillwell, 1980).

6.2.7 Sonuç: g cinse sahip bir yüzeyin abelyenize edilmiş temel grubu, eğer yüzey

- i. yönlendirilebilir ise, $\mathbb{Z}^{2g}$ 'dir,
- ii. yönlendirilemez ise, $\mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$ 'dir.

Bu sonucu ve kapalı yüzeylerin sınıflandırma teoremini (bölüm 3) kullanarak, aşağıdaki sonucu elde edebiliriz:

6.2.8 Sonuç: İki yüzeyin homeomorf olması için gerek ve yeter koşul onların abelyenize edilmiş temel gruplarının izomorf olmasıdır.

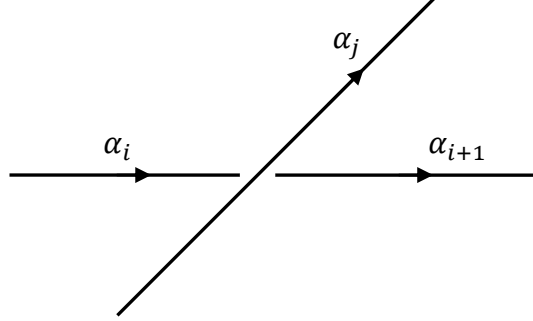
Sonuç 6.2.7 bir uzayın bir yüzey olup olmadığını anlamak için kullanılabilir:

6.2.9 Sonuç: X bir uzay ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $(\pi_1(X, x_0))_{ab}$, $\mathbb{Z}^{2g}$ veya $\mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$ formunda değilse, o zaman X bir yüzey değildir.

6.3 Wirtinger Temsili

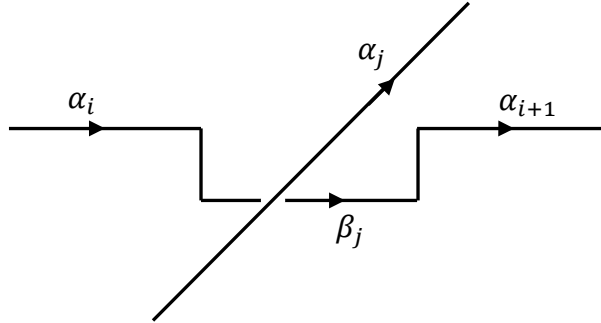
Bu kısımda, Seifert - van Kampen teoremini kullanarak $G(K)$ düğüm grubunun, aslında K 'nın tümleyeninin temel grubu, yani, $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K, p)$ olduğunu ispatlayacağız. Bir ilmek ve onun belirlediği sınıf için aynı harfi kullanacağız ve taban noktası olarak $p = (0,0,1)$ alacağız.

6.3.1 Wirtinger temsiliinin ispatı: K düğümünü yönlendirelim ve düğümün her yayını etiketleyelim. Düğümü yönlendirme boyunca takip eden etiketler olarak $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ kullanacağız. Böylece tipik bir çaprazlama, bazı n için, $\alpha_{n+1} = \alpha_1$ olacak şekilde Şek.6.11'deki gibi görünür.



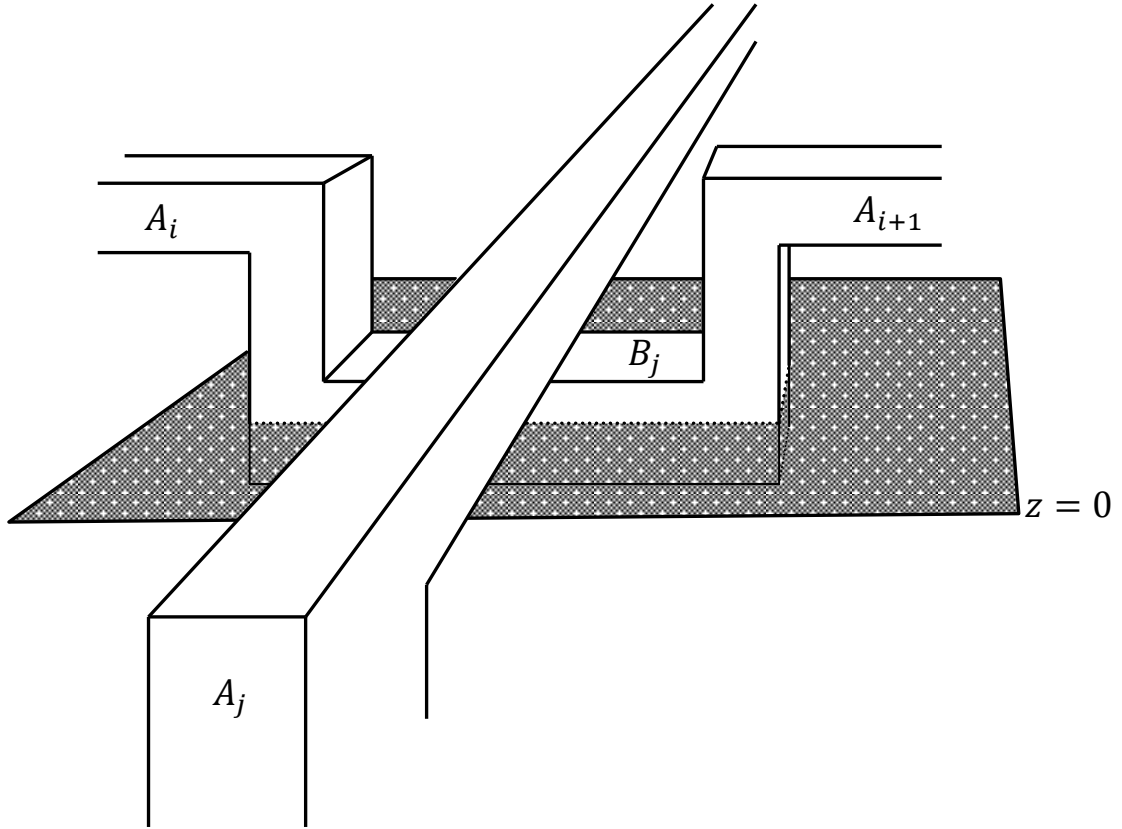
Şekil 6.11 Bir düğümün her yayının etiketlenmesinden sonra tipik bir çaprazlama

K düğümünün her α_i yayının, her son noktada $z = 0$ 'a inen dikey bir parça haricinde, $z = 1$ düzleminde yattığını kabul edebiliriz. Bu durumda, α_i 'nin bitim noktası ve α_{i+1} 'in başlangıç noktası, düğümü tamamlamak için $z = 0$ düzlemindeki bir β_j parçasıyla birleştirilebilir. Burada β_j , çaprazlamanın üstteki α_j yayının altından geçmektedir (Şek.6.12).



Şekil 6.12 Bir çaprazlamada dikey parçaların kabul edilmesi

Sonra, $\mathbb{R}^3$ 'den K 'nın tünel komşuluğu N 'yi çıkarıyoruz. Bu şöyle açıklanabilir: K üzerinde merkez noktasıyla hareket eden, düğüme sabitlenmiş, ε kenarlı kapalı bir küp düşünelim. Bu küp yukarıdaki gibi bir çaprazlamaya geldiğinde, küpün yüzleri $\mathbb{R}^3$ 'deki eksenlere paralel olacak şekilde birinci dikey parçadan inecek, sonra β_j boyunca ilerleyecek ve α_{i+1} 'in $z = 1$ parçasına geri dönecek. Tünelin α_i ve β_j 'yi içeren parçalarını, sırasıyla A_i ve B_j olarak etiketleyeceğiz (Şek.6.13).

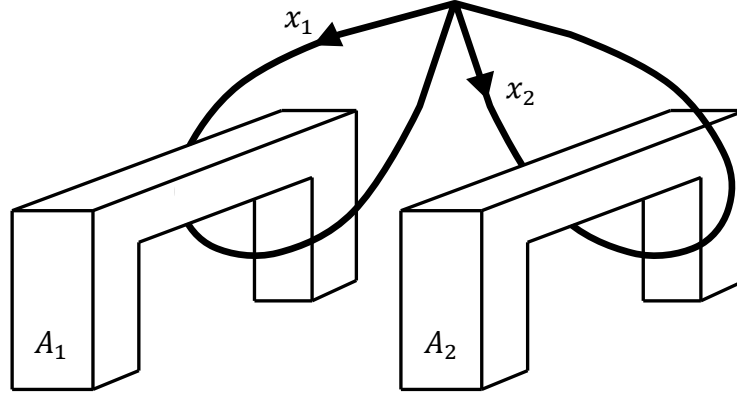


Şekil 6.13 Düğümün tünel komşuluğu

ε 'u yeteri kadar küçük alırsak, $\mathbb{R}^3 - N$, $\mathbb{R}^3 - K$ 'nin bir çekilmiş bozunumu olur ve böylece $\pi_1(\mathbb{R}^3 - N, p) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 - K, p)$ olur. Şimdi, iki açık kümenin birleşimi olarak $\mathbb{R}^3 - N$ 'nin bir ayrışımını veriyoruz:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{z > 0\} - N, \\ X_2 &= \{z < \varepsilon/2\} - N. \end{aligned}$$

x_i , α_i 'yi içeren A_i tünelinin altından geçen bir ilmek olmak üzere, X_1 'in bir çekilmiş bozunumu, $x_1, x_2, \dots, x_n$ ilmekleriyle bir n -yapraklı güldür. Bunu görmek için, önce β_j 'yi içeren B_j çukurları $z = 0$ 'a bastırılacak şekilde X_1 'i bozacağız. Sonra, A_i tünellerini Şek.6.14'deki gibi birbirlerine paralel olacak şekilde içeri çekeriz (bkz. Örnek 4.1.20'deki delikli küp).



Şekil 6.14 Tünellerin birbirine paralel çekilmesi

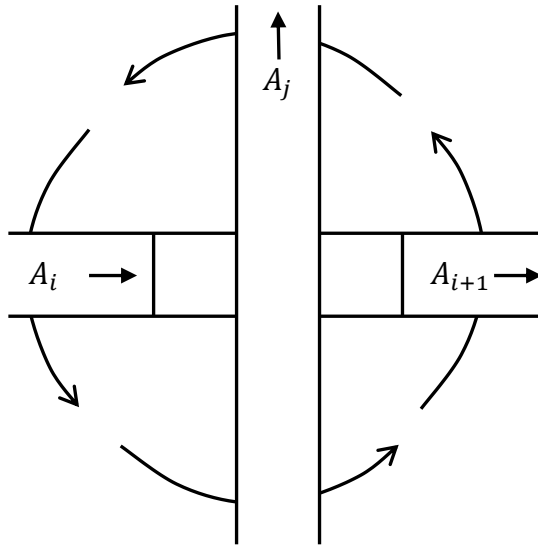
Böylece, $\pi_1(X_1, p)$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n: \emptyset)$$

temsiline sahip olur. X_2 , içinden hendekler kesilmiş açık bir yarı-uzay olduğundan, basit bağlantılıdır ve böylece $\pi_1(X_2, p)$ aşıkâr gruptur. $X_1 \cap X_2 = \{0 < z < \varepsilon/2\} - N$ içinde n delik (hendeklerin üst yarıları) bulunan sonsuz bir tabakadır. Böylece $\pi_1(X_1 \cap X_2, p)$, rangı n olan bir serbest gruptur. $\pi_1(X_1 \cap X_2, p)$ 'nin tipik bir üretici, bir delik etrafında dolanmaya karşılık gelir (Şek.6.15). Böylece bunun $\pi_1(X_1, p)$ 'deki görüntüsü $x_i x_j x_{i+1}^{-1} x_j^{-1}$ şeklindedir (veya ikinci tip çaprazlama için $x_i x_j^{-1} x_{i+1}^{-1} x_j$ şeklindedir). Açıkça, $\pi_1(X_2, p)$ 'deki görüntüsü 1'dir. Böylece, Seifert - van Kampen teoreminden, tipik bir r_k yukarıdaki gibi olmak üzere, $\pi_1(X_1 \cup X_2, p) = \pi_1(\mathbb{R}^3 - N, p) = \pi_1(\mathbb{R}^3 - K, p)$ için

$$(x_1, x_2, \dots, x_n: r_1, r_2, \dots, r_n)$$

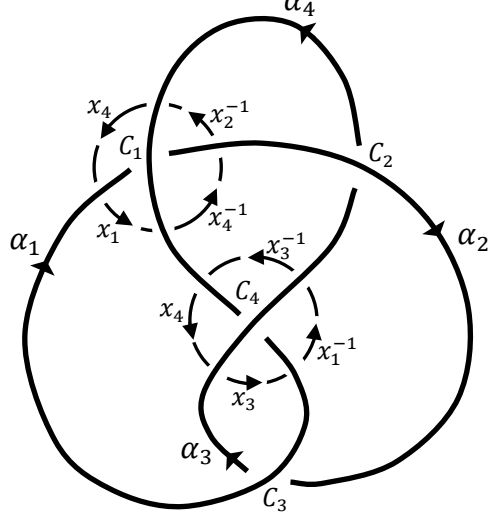
temsiline buluruz. Bu, bir düğüm grubu $G(K)$ 'nin Wirtinger temsidir (Stillwell, 1980).



Şekil 6.15 Tipik bir üretcin bir delik etrafında dolanması

6.3.2 Örnek: Aşıkâr düğümün grubu, $(x: \emptyset)$ temsiline sahiptir ve böylece sonsuz devirlidir.

6.3.3 Örnek: 8-şekil düğümünün grubunun temsilini bulalım (Şek.6.16).



Şekil 6.16 8-Şekil düğümünün grup temsilinin bulunması

C_1 'de, r_1 bağıntısının $x_4x_1x_4^{-1}x_2$ olduğunu ve C_4 'de, r_4 bağıntısının $x_4x_3x_1^{-1}x_3^{-1}$ olduğunu görüyoruz. Benzer şekilde, her çaprazlamada dört bağıntıya sahibiz:

$$\begin{aligned} r_1: x_4x_1x_4^{-1}x_2^{-1} &= 1 \text{ veya } x_2 = x_4x_1x_4^{-1}, \\ r_2: x_2x_3x_2^{-1}x_4^{-1} &= 1 \text{ veya } x_4 = x_2x_3x_2^{-1}, \\ r_3: x_2x_1x_3^{-1}x_1^{-1} &= 1 \text{ veya } x_3 = x_1^{-1}x_2x_1, \\ r_4: x_4x_3x_1^{-1}x_3^{-1} &= 1 \text{ veya } x_1 = x_3^{-1}x_4x_3. \end{aligned}$$

Buradan, düğüm grubu

$$(x_1, x_2, x_3, x_4: x_1 = x_3^{-1}x_4x_3, x_2 = x_4x_1x_4^{-1}, x_3 = x_1^{-1}x_2x_1, x_4 = x_2x_3x_2^{-1})$$

temsiline sahip olur. Diğer bağıntılarda x_4 'ü sadeleştirirsek,

$$(x_1, x_2, x_3: x_1 = x_3^{-1}x_2x_3x_2^{-1}x_3, x_2 = x_3x_2^{-1}x_1x_2x_3^{-1}, x_3 = x_1^{-1}x_2x_1)$$

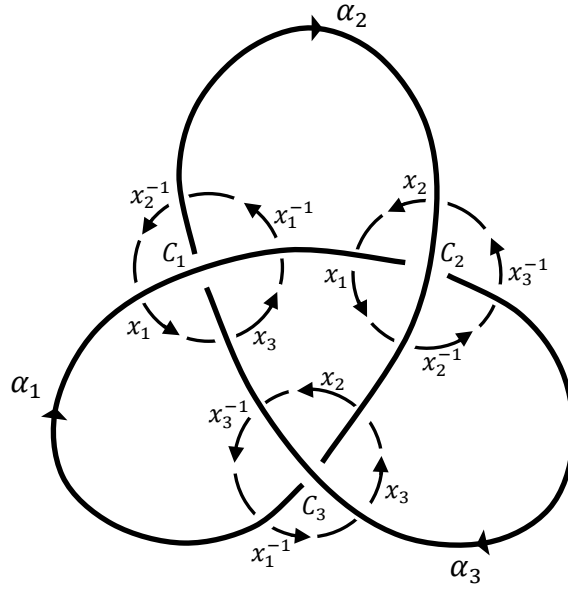
elde ederiz. Şimdi, diğer iki bağıntıda x_3 'ü sadeleştirirsek,

$$(x_1, x_2: x_1 = x_2^{-1}x_1x_2x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2, x_2 = x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1}x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1)$$

elde ederiz. Bu iki bağıntının aynı olduğuna ve $x_2x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1} = x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1}x_1$ bağıntısını verdiğine dikkat edelim. Böylece, 8-şekil düğümünün grubu aşağıdaki temsile sahip olur:

$$(x_1, x_2: x_2x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1} = x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1}x_1).$$

6.3.4 Örnek: Trefoil düğümünü K ile gösterelim ve bunun düğüm grubu $G(K)$ 'nin temsilini bulalım (Şek.6.17).



Şekil 6.17 Trefoil düğümünün grup temsilinin bulunması

C_1, C_2 ve C_3 çaprazlamalarında, sırasıyla r_1, r_2 ve r_3 bağıntılarının aşağıdaki gibi olduğunu görüyoruz:

$$r_1: x_1 x_3 x_1^{-1} x_2^{-1} \text{ veya } x_2 = x_1 x_3 x_1^{-1},$$

$$r_2: x_2 x_1 x_2^{-1} x_3^{-1} \text{ veya } x_3 = x_2 x_1 x_2^{-1},$$

$$r_3: x_3 x_2 x_3^{-1} x_1^{-1} \text{ veya } x_1 = x_3 x_2 x_3^{-1}.$$

Buradan, düğüm grubu

$$(x_1, x_2, x_3: x_1 = x_3 x_2 x_3^{-1}, x_2 = x_1 x_3 x_1^{-1}, x_3 = x_2 x_1 x_2^{-1})$$

temsiline sahip olur. Diğer iki bağıntıda x_3 'ü sadeleştirirsek,

$$(x_1, x_2: x_1 = x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}, x_2 = x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1})$$

elde ederiz. Bu iki bağıntının aynı olduğuna ve $x_1 x_2 x_1 = x_2 x_1 x_2$ bağıntısını verdiğine dikkat edelim. Böylece $G(K)$,

$$(x_1, x_2: x_1 x_2 x_1 = x_2 x_1 x_2)$$

temsiline sahip olur. $(x_2 x_1 x_2)^2 = (x_1 x_2 x_1)(x_2 x_1 x_2) = (x_1 x_2)(x_1 x_2)(x_1 x_2)$ olduğuna dikkat edelim. Eğer $a = x_2 x_1 x_2$, $b = x_1 x_2$ dersek, o zaman $x_1 = b^2 a^{-1}$, $x_2 = a b^{-1}$ olur. Böylece a ve b üreteç olurlar ve temsildeki bağıntı, $a^2 = b^3$ bağıntısının bir konsekansıdır. Buradan, trefoil düğümünün grubu,

$$(a, b: a^2 = b^3)$$

temsiline sahip olur.

Şimdi, trefoil düğümünün çözülemeyeceğini, yani onun aşıkâr düğüm tipinden olmadığını göstereceğiz. Eğer iki K_1 ve K_2 düğümü aynı tipten ise, o zaman $\mathbb{R}^3 - K_1$ ve $\mathbb{R}^3 - K_2$ tümleyen uzaylarının homeomorf olduklarına ve dolayısıyla izomorf temel gruplara sahip olduklarına dikkat edelim. Trefoil düğümünün aşıkâr olmadığını göstermek için, onun grubunun sonsuz devirli olmadığını ispatlayacağız.

3. dereceden simetrik grup S_3 'ü düşünelim. $a = (12)$ ve $b = (123)$ devrelerini aldığımızda, S_3 de aynı bağıntıya bir model oluşturur. Böylece, a, b 'nin bu atamasıyla, $G(K)$ 'daki herhangi bir bağıntı, S_3 'de de geçerli olur. S_3 'ün abelyen olmadığını, yani $ab \neq ba$ 'nın, $G(K)$ 'nın bir bağıntısı olmadığını biliyoruz. Sonsuz devirli grupta tüm elemanlar değişmeli olduğundan, $G(K)$ sonsuz devirli değildir.

7. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Yüzeylerin homeomorfizma altında sınıflandırmasını yaparken temel grup ve onun abelyenize edilmiş grubunu kullandık. Bu grupların temsillerinden yararlanarak izomorf olmadıklarını, dolayısıyla da söz konusu yüzeylerin homeomorf olmadığını gösterdik. 6. Bölümün 2. kısmında, verilen bir uzayın bir yüzey belirtip belirtmediğini anlamaya yarayan sonuçlar elde ettik. Son olarak da düğüm gruplarının temsillerini kullanarak düğümleri birbirinden ayırt ettik. Bu konularda daha derin bilgiler elde etmek isteyen araştırmacıların homoloji grupları ve bunların yüzeylerle olan ilişkileri üzerine yoğunlaşmalarını öneririm.

KAYNAKLAR

- Adams, C. C., (2004), The Knot Book, An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots, American Mathematical Society, Rhode Island.
- Croom, F. H., (1978), Basic Concepts of Algebraic Topology, Springer-Verlag, New York.
- Crowell, R.H. ve Fox, R.H., (1963), Introduction to Knot Theory, Springer-Verlag, New York
- Gilbert, N.D. ve Porter, T., (1994), Knots and Surfaces, Oxford University Press, Oxford.
- Johnson, D.L., (1997), Presentations of Groups (2nd Edition), Cambridge University Press, Cambridge.
- Kosniowski, C., (1980), A First Course in Algebraic Topology, Cambridge University Press, London.
- Manturov, V.O., (2004), Knot Theory, Chapman & Hall/CRC CRC Press LLC, London.
- Massey, W.S., (1967), Algebraic Topology: An Introduction, Springer-Verlag, New York.
- Munkres, J.R., (2000), Topology (2nd Edition), Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- Naber, G. L., (2009), "Lecture Notes on Algebraic Geometry".
- Nakahara, M., (2003), Geometry, Topology and Physics (2nd Edition), Taylor & Francis Group, LLC, Florida.
- Raymond Lickorish, W.B., (1997), An Introduction to Knot Theory, Springer-Verlag, New York.
- Spanier, E.H., (1966), Algebraic Topology, McGraw-Hill, New York.
- Stillwell, J., (1980), Classical Topology and Combinatorial Group Theory, Springer-Verlag, New York.

İNTERNET KAYNAKLARI

- [1]<http://www.pages.drexel.edu/~gln22/LECTURE%20NOTES%20ON%20ALGEBRAIC%20TOPOLOGY.pdf>, Son erişim tarihi 23 Aralık, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	19.09.1986	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	2000-2004	Bahçelievler Anadolu Lisesi
Lisans	2004-2008	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2008-2010	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı