

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Z_3 – DERECELİ $R_q(2/1)$ KUANTUM SÜPER UZAYININ
DİFERANSİYEL GEOMETRİSİ**

Matematikçi Burcu CESUR

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK (YTÜ)

İSTANBUL, 2010

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Z_3 – DERECELİ $R_q(2/1)$ KUANTUM SÜPER UZAYININ
DİFERANSİYEL GEOMETRİSİ**

Matematikçi Burcu CESUR

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK (YTÜ)

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER.....	3
3. Z_3 – DERECELİ KUANTUM 3d SÜPER UZAY ÜZERİNE DİFERANSİYEL HESAP .	8
3.1 Z_3 – Dereceli Kuantum 3d Süper Uzay Üzerindeki Polinomların Cebiri.....	8
3.2 Dış Diferansiyel Operatörü	9
3.3 Z_3 – Dereceli Diferansiyel Cebir	9
3.4 Wess-Zumino Yaklaşımı	10
4. KİSMİ TÜREVLERİN CEBİRİ	19
4.1 Koordinat Fonksiyonları ile Kısmi Türevler Arasındaki Bağlıntılar.....	19
4.2 Kısmi Türevler ile Birinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağlıntılar	21
4.3 Kısmi Türevler ile d Dış Diferansiyel Operatörü Arasındaki Bağlıntılar	23
5. CARTAN – MAURER FORMLARI	25
5.1 Cartan - Maurer Formları ile Koordinat Fonksiyonları Arasındaki Bağlıntılar	26
5.2 Cartan - Maurer Formları ile Birinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağlıntılar	27
5.3 Cartan - Maurer Formları ile İkinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağlıntılar	28
5.4 Cartan - Maurer Formları Arasındaki Bağlıntılar.....	29
5.5 Cartan - Maurer Formları ile d Dış Diferansiyel Operatörü Arasındaki Bağlıntılar	29

6. Z_3 – DERECELİ KUANTUM SÜPER LİE CEBİRİ	30
6.1 Süper Lie Cebir Jeneratörleri ile Koordinat Fonksiyonları Arasındaki Bağıntılar	30
6.2 Süper Lie Cebir Yapısı	31
7. SONUÇLAR	33
KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ.....	35

SİMGE LİSTESİ

$\otimes$	Tensör Çarpım
$\deg(f)$	f fonksiyonunun derecesi
$R_q(2/1)$	Üç boyutlu kuantum süper uzay
$[,]$	Lie Parantezi
d	Dış Diferansiyel Operatörü
∂	Kısmi Türev Operatörü
Δ_A	A cebiri üzerindeki ko-çarpım operatörü
ε_A	A cebiri üzerindeki ko-birim operatörü
S_A	A cebiri üzerindeki ko-ters operatörü

ÖNSÖZ

Tez konumu bana veren, konu hakkında beni yönlendiren ve bu çalışmanın hazırlanmasında emeği geçen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK' e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, konu hakkındaki yardımlarından dolayı Sayın Arş. Gör. Dr. Ergün YAŞAR' a şükranlarımı sunarım.

ÖZET

Bu çalışmada, $R_q(2/1)$ genişletilmiş kuantum üç boyutlu süper uzay üzerine değişmeli olmayan Z_3 -dereceli bir diferansiyel hesap kurulmuştur. Bu diferansiyel hesap, uzay üzerindeki koordinat fonksiyonlarını, onların diferansiyellerini, diferansiyel formları ve onların türevlerini içermektedir.

Önce, Z_3 -dereceli kuantum uzay tanıtılmış ve ardından Z_3 -dereceli diferansiyel cebir kurulmuştur.

Sonra, Z_3 -dereceli kuantum süper cebiri üzerinde yapılan hesaplamalarla koordinat fonksiyonlarının kısmi türevleri ve aralarındaki bağıntılar bulunmuştur.

Bu süper uzay üzerindeki Cartan - Maurer formları tanımlanmış ve aralarındaki bağıntılar elde edilmiştir. Son olarak, vektör alanlarının Lie cebiri yapısı elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Kuantum süper uzay, Z_3 -dereceli diferansiyel hesap, Hopf cebiri, Lie süper cebiri.

ABSTRACT

In this work, a non-commutative Z_3 -graded differential calculus on the 3d quantum super space $R_q(2/1)$ is constructed. This calculus includes the coordinate functions on this space and their differentials, the differential forms and their derivatives.

At first, the Z_3 -graded quantum super space is defined, then the Z_3 -graded differential algebra is constructed.

After that, the partial derivatives of the coordinate functions and the relations between them are found out by using some calculations on the Z_3 -graded quantum super algebra.

Cartan - Maurer forms on this super space are introduced and the relations between them are obtained. Finally, the Lie algebra structure of the vector fields is obtained.

Keywords: Quantum super space, Z_3 -graded differential calculus, Hopf algebra, Lie super algebra.

1. GİRİŞ

Drinfeld (1986), adına kuantum grubu dediği ve sonra kuantum süper gruba genelleştirilen yeni bir matematiksel konu inşa etmiştir. Sonra, Faddeev vd. (1987) bu konuyu Lie grup ve Lie cebiri teorisine adapte etmişlerdir.

Esas itibariyle Drinfeld, iki ranklı bir kuantum grubunu oluştururken $SL(2)$ özel lineer grubunun Lie cebirinden yola çıkmış, deformasyon parametresi olarak adlandıracağı bir $q = e^{-\tau}$ kompleks sayısı ile $SL(2)$ 'deki bir matrisin matris elemanlarını birer koordinat fonksiyonu olarak düşünerek onlar arasında sağlanan bağıntıların $ab = q^{-1}ba$ vb. şeklinde olduğunu ortaya koymuştur. Dolayısıyla matris elemanları ancak q 'nin özel değer(ler)i için değişmeli olabilmektedir.

Kuantum grupları bilinen manada bir grup değildir. Bir kuantum grubu, bir grubun deformasyonu olarak düşünülmüştür. Deformasyon parametresinin özel değer(ler)i için klasik duruma dönüşmektedir.

Daha sonra, Woronowicz (1987) ve Manin (1988) bu konuya değişik yorumlar getirmişlerdir. Manin, bir kuantum matris grubunu elde ederken, grubun elemanlarını uygun uzaya etki ettirmiştir. Bu uzayın elemanları yine q parametresine bağlı bağıntılar sağlamaktadır. Manin bu şekildeki uzayları kuantum (süper) uzaylar olarak isimlendirmiştir.

Son zamanlarda, hem matematikçiler hem de matematiksel fizikçiler, kuantum (süper) uzay üzerindeki diferansiyel hesap üzerine çalışmış ve bu konu üzerinde çalışılmaya devam edilmektedir. Kuantum gruplarının diferansiyel geometrisi de söz konusu olmuş ve bu konuda birçok çalışma yapılmıştır. Woronowicz (1989), Schmidke vd. (1990), Wess-Zumino (1990), Soni (1991), Brzezinski vd. (1992), Celik ve Celik (2000) bu çalışmalardan bazılarını gerçekleştiren yazarlardır.

Chung (1994), süper düzlem olarak isimlendirilen Z_2 -dereceli düzlemi, Z_3 -dereceli kuantum düzleme genelleştirirken Wess-Zumino' nun metodlarını kullanmıştır. Biz de kısmen öyle yapacağız.

Bu tezde, Z_3 -dereceli kuantum super uzay üzerine bir diferansiyel hesap verilmiştir. Bu yapılırken Celik (2002a)' in "Differential geometry of the Z_3 -graded quantum superplane" ve Celik (2002b)' in " Z_3 -graded differential geometry of quantum plane" isimli makalelerinden yararlanılmıştır.

Çalışmamızın başlangıç kısmında Z_3 -dereceli bir diferansiyel cebir oluşturmak için bir dış

diferansiyel operatörü tanımladık. Bu dış diferansiyel operatörünün nilpotentlik ve Leibniz özelliklerinden yararlanarak Wess-Zumino' nun yaklaşımını kullandık.

Böylece; cebirimizi oluşturan jeneratörler arasında sağlanan bağıntıları ortaya koyan sabit katsayıları bularak koordinat fonksiyonları ve diferansiyelleri ile olan bağıntıları elde ettik.

Sonrasında, Z_3 -dereceli kuantum süper Lie cebirini oluşturmak için koordinat fonksiyonlarının kısmi türevleri ile ilgili olan bağıntıları bulduk.

Sonra da, Cartan - Maurer formlarını tanımlayıp ilgili bağıntıları elde ederek kuantum uzayın süper Lie cebir yapısını kurarak çalışmamızı sonlandırdık.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, tezde kullanılacak bazı kavramlar tanıtılacaktır.

2.1. Tanım: H boş olmayan bir küme olsun. H kümesi üzerinde tanımlı toplama ve çarpma işlemlerine göre aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa H kümesine bir **halka** denir:

1) $(H, +)$ bir değişmeli grup.

2) $\forall a, b, c \in H$ için $a.(b+c) = a.b + a.c$ ve $(a+b).c = a.c + b.c$.

3) $\forall a, b, c \in H$ için $a.(b.c) = (a.b).c$.

Eğer $\forall a, b \in H$ için $a.b = b.a$ oluyorsa H ' ye bir **değişmeli halka** denir.

Eğer her $a \in H$ için $a.e = a = e.a$ olacak şekilde bir $e \in H$ (birim) elemanı mevcut ise H ' ye **birimli halka** denir.

2.2. Tanım: H birimli bir halka ve $(M, +)$ değişmeli bir grup olsun. Eğer

$$\varphi: H \times M \rightarrow M, (a, x) \mapsto a.x \quad (\varphi: M \times H \rightarrow M, (x, a) \mapsto x.a)$$

tasviri aşağıdaki şartları sağlıyorsa, M ' ye **birimli sol (sağ) H - modül** denir :

$\forall a, b, 1 \in H$ ve $\forall x, y \in M$ için

$$1) a(x+y) = ax + ay, \quad ((x+y)a = xa + ya)$$

$$2) (a+b)x = ax + bx, \quad (x(a+b) = xa + xb)$$

$$3) (a.b)x = a(bx), \quad (x(a.b) = (xa)b)$$

$$4) 1.x = x \quad (x.1 = x)$$

Eğer M hem sağ hem sol H - modül ise M ' ye **modül** denir. Eğer, H bölüm halkası ise M modülüne **vektör uzayı** veya **lineer uzay** denir.

2.3. Tanım: Bir K cismi üzerinde tanımlı iki vektör uzayı X ve Y olmak üzere,

$T: X \rightarrow Y$ tasviri aşağıdaki iki özelliği sağlıyorsa T ' ye bir **lineer tasvir** denir :

$\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

$$1) T(x+y) = T(x) + T(y)$$

$$2) T(\alpha x) = \alpha T(x) .$$

2.4. Tanım: U, V ve W , K cismi üzerinde birer vektör uzayı olmak üzere $\varphi: U \times V \rightarrow W$ tasviri aşağıdaki iki şartı sağlıyorsa φ ' ye bir **bi-lineer tasvir** denir:

$x_1, x_2 \in U$, $y_1, y_2 \in V$ ve $\lambda, \mu \in K$ olmak üzere

$$1) \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y_1) = \lambda \varphi(x_1, y_1) + \mu \varphi(x_2, y_1)$$

$$2) \varphi(x_1, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda \varphi(x_1, y_1) + \mu \varphi(x_1, y_2)$$

U, V ve W vektör uzayları olmak üzere $HOM(U, V)$ ile U ' dan V ' ye lineer dönüşümlerin uzayını, $HOM(U, V; W)$ ile de $U \times V$ dan W ' ye bilinear dönüşümlerin uzayını gösterelim.

U ve V vektör uzayları verildiğinde $U \otimes V$ vektör uzayı ve $\varphi: U \times V \rightarrow U \otimes V$ bilinear dönüşümü vardır öyle ki her W vektör uzayı için

$$HOM(U \otimes V, W) \rightarrow HOM(U, V; W) \quad , \quad (f \mapsto f \circ \varphi_0)$$

lineer dönüşümü bir izomorfizmdir.

Buradaki $U \otimes V$ vektör uzayına U ve V ' nin **tensör çarpımı** denir ve

$$\forall u, u' \in U, \forall v, v' \in V \text{ ve } \lambda \in K \quad \text{ için}$$

$$(u + u') \otimes v = u \otimes v + u' \otimes v$$

$$u \otimes (v + v') = u \otimes v + u \otimes v'$$

$$\lambda(u \otimes v) = (\lambda u) \otimes v = u \otimes \lambda v$$

özellikleri gerçekleşir.

2.5. Tanım: $T_1: U_1 \rightarrow V_1$, $T_2: U_2 \rightarrow V_2$ birer lineer tasvir olsun.

Bu takdirde, $u_1 \in U_1$ ve $u_2 \in U_2$ için

$$\Phi: U_1 \otimes U_2 \mapsto V_1 \otimes V_2, \quad \Phi(u_1 \otimes u_2) = T_1(u_1) \otimes T_2(u_2)$$

şeklinde tanımlanan bir lineer tasvir vardır. Buradaki Φ ' ye T_1 ve T_2 ' nin **tensör çarpımı** denir ve $\Phi = T_1 \otimes T_2$ ile gösterilir.

2.6. Tanım: g , bir K cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı olsun.

$$[,] : g \times g \rightarrow g, ((X, Y) \rightarrow [X, Y], \quad X, Y, [X, Y] \in g)$$

tasviri aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa g vektör uzayına bir **Lie Cebiri** denir:

$$\forall X, Y, Z \in g, a, b \in K \text{ için}$$

$$1) [X, Y] = -[Y, X]$$

$$[X, X] = 0$$

$$2) [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

2.7. Tanım: A , K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve K cisminin elemanları arasında bir

$f: A \times A \rightarrow A$, $((u, v) \mapsto u.v)$ çarpım tasviri tanımlanmış olsun. Eğer, f tasviri aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, A 'ya bir **K - cebir** denir:

$$\forall u, v, w \in A \text{ ve } \alpha \in K \text{ için}$$

$$1) \alpha(u.v) = (\alpha u).v = u(\alpha v)$$

$$2) (u+v).w = u.w + v.w \text{ ve } w.(u+v) = w.u + w.v.$$

Eğer, bir $T: A \rightarrow A$ lineer tasviri $T(f.g) = T(f).T(g)$ eşitliğini de sağlarsa T 'ye bir **lineer homomorfizm** veya **cebir homomorfizmi** denir.

Bir K -ceberi (bundan sonra sadece cebir diyeceğiz), genel olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Bir cebir, iki adet lineer tasvir ile birlikte bir K - vektör uzayı olarak düşünülür:

$$\mu: A \otimes A \rightarrow A, \mu(a \otimes b) = a.b$$

$$\eta: K \rightarrow A, \eta(k) = k.I.$$

Burada I , A 'nın birim elemanıdır. Bu tasvirler için

$$\mu \circ (\text{id} \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes \text{id}) \quad (\text{Ass})$$

$$\mu \circ (\text{id} \otimes \eta) = \mu \circ (\eta \otimes \text{id}) \quad (\text{Uni})$$

(2.1)

özellikleri geçerlidir. (Ass) aksiyomu, μ çarpma tasvirinin asosyatifliğini, (Uni) aksiyomu ise $\eta(1)$ 'in A 'nın hem sağ hem de sol birim elemanı olduğunu ifade etmektedir.

Böylece ortaya çıkan (A, μ, η) üçlüsüne bir **cebir** denir.

G , bir grup ve K bir cisim olsun. Eğer $A \otimes A = \text{Map}(G \times G, K)$ ve $A = \text{Map}(G, K)$ olduğu kabul edilirse, G 'deki işlemi kullanarak aşağıdaki lineer homomorfizmler tanımlanabilir:

$\forall x, y \in G$ için

$$\Delta: A \rightarrow A \otimes A, \Delta f(x \otimes y) = f(x.y)$$

$$\varepsilon: A \rightarrow K, \varepsilon(f) = f(e).$$

Burada e , G 'nin birim elamanıdır. Δ 'ya cebirin bir **ko-çarpması** ve ε tasvirine de cebirin **ko-birimi** denir. Δ ve ε cebir homomorfizmleri, sırasıyla μ ve η tasvirleri için (2.1) de verilen (Ass) ve (Uni) özelliklerinin dual olan özelliklerine sahiptir. Yani,

$$\begin{aligned} (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta &= (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta & (\text{coass}) \\ \mu \circ (\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta &= \text{id} = \mu \circ (\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta & (\text{counit}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

dır.

Genel olarak, K cismi üzerindeki bir lineer A uzayına, yukarıda tanımlanan μ, η, Δ K -lineer tasvirleriyle birlikte bir **K-kocebir** (kısaca **kocebir**) ve A lineer uzayına $\mu, \eta, \Delta, \varepsilon$ K -lineer tasvirleriyle birlikte bir **K-bicebir** (kısaca **bicebir**) denir.

Ek olarak, $f \in A, x \in G$ için $S: A \rightarrow A, Sf(x) = f(x^{-1})$ şeklinde tanımlanan ve

$$\mu \circ (\text{id} \otimes S) \Delta = \eta \circ \varepsilon = \mu \circ (S \otimes \text{id}) \Delta \quad (2.3)$$

özellikliğini sağlayan S cebir antihomomorfizmine **ko-ters** denir. Böylece, $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ altılısına bir **Hopf cebiri** denir (Abe, 1977). Bundan sonra, kısalığı bakımından, bir Hopf cebiri için, $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ altılısı yerine A kullanılacaktır.

Eğer; A bir Hopf cebiri ise $A \otimes A$ 'daki çarpma

$$(X \otimes Y)(Z \otimes W) = (-1)^{\deg(Y)\deg(Z)}(XZ \otimes YW) \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\deg(f) = \begin{cases} 0, & f \text{ çift dereceden} \\ 1, & f \text{ tek dereceden} \end{cases} \quad (2.5)$$

şeklindedir. Bununla ilgili detaylı açıklamaları bölüm 3.1 de vereceğiz.

2.8. Tanım: C , bir kocebir olsun. Eğer, bir lineer M uzayı ve bir lineer

$$\Psi: M \rightarrow M \otimes C$$

tasviri için aşağıdaki diyagramlar komütatif ise (M, Ψ) ikilisine bir **sağ C -komodül** denir.

Bir sol C -komodül de benzer şekilde tanımlanabilir.

$$\begin{array}{ccc}
 M \otimes K & \xleftarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} & M \otimes C \\
 & \searrow \cong & \uparrow \psi \\
 & & M
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 M \otimes C \otimes C & \xleftarrow{\psi \otimes \text{id}} & M \otimes C \\
 \uparrow \text{id} \otimes \Delta & & \uparrow \psi \\
 M \otimes C & \xleftarrow{\psi} & M
 \end{array}$$

Bir bimodülün tanımı için aşağıdaki açıklamalara ihtiyaç vardır:

B , bir bicebir ve M de

$$\varphi_M : M \otimes B \rightarrow M, \quad \varphi_M(m \otimes x) = mx$$

şeklinde tanımlanan yapı dönüşümüyle birlikte bir sağ B -modül olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
 \varphi_{M \otimes B} : (M \otimes B) \otimes B &\rightarrow M \otimes B, \\
 \varphi_{M \otimes B}(m \otimes x \otimes y) &= \sum_{(y)} my_{(1)} \otimes xy_{(2)}, \quad m \otimes x \in M \otimes B
 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan yapı dönüşümüyle birlikte, $M \otimes B$ de bir sağ B -modül olur. Burada Sweetler' in $\Delta(u) = \sum_u u_{(1)} \otimes u_{(2)}$ tanımından yararlanılmıştır. Buna ek olarak,

$$\Psi_M : M \rightarrow M \otimes B$$

K - lineer yapı dönüşümü ile birlikte M bir B - komodül ise,

$$\begin{aligned}
 \Psi_{M \otimes B} : M \otimes B &\rightarrow (M \otimes B) \otimes B, \\
 \Psi_{M \otimes B}(m \otimes x) &= \sum_{(m)(x)} m_{(0)} \otimes x_{(1)} \otimes m_{(1)}x_{(2)}, \quad m \otimes x \in M \otimes B
 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan K - lineer yapı dönüşümüyle birlikte $M \otimes B$ bir B - komodül olur.

Bu durumda bir bimodülün tanımı şu şekilde verilebilir:

2.9. Tanım: Eğer M , hem sağ B -modül ve hem de B -komodül olmak üzere aşağıdaki koşul sağlanırsa M 'ye bir B - **bimodül** denir:

- φ_M 'nin bir sağ B -komodül homomorfizmi olması için gerek ve yeter şart Ψ_M 'nin bir sağ B -modül homomorfizmi olmasıdır.

3. Z_3 – DERECELİ KUANTUM 3d SÜPER UZAY ÜZERİNE DİFERANSİYEL HESAP

Bu bölümde, Z_3 -dereceli kuantum 3d süper uzay üzerindeki polinomların cebirini göz önüne alarak bu cebir üzerinde bir dış diferansiyel operatör tanımlayıp Z_3 -dereceli diferansiyel bir cebir elde edeceğiz.

3.1 Z_3 – Dereceli Kuantum 3d Süper Uzay Üzerindeki Polinomların Cebiri

Çalışmamıza başlamadan önce Z_3 -dereceli yapı hakkında bilgi verelim.

t , Z_3 - dereceli bir değişken olsun. t değişkeninin $t^3=0$ bağıntısını sağladığını söyleyebiliriz.

a_0, a_1, a_2 dereceleri sırasıyla 0,2,1 olan sabitler olmak üzere $f(t)$ polinomunu

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

şeklinde yazarız.

Z_3 devirli grubu, 1 sayısının küp köklerinin oluşturduğu kompleks düzlemi ile temsil edilebilir.

$$j = e^{\frac{2\pi i}{3}}, (j^2 = -1) \text{ olsun. Bu durumda}$$

$$j^3 = 1 \text{ ve } j^2 + j + 1 = 0 \text{ ya da } (j+1)^2 = j \text{ dir.}$$

Z_3 -dereceli koordinat fonksiyonları A ve B olmak üzere

$$[A, B]_{Z_3} = AB - j^{\deg(A), \deg(B)} BA \text{ dır.}$$

Eğer A ve B j - komütatif ise

$$AB = j^{\deg(A), \deg(B)} BA \text{ dır.}$$

Z_3 -dereceli kuantum süper uzayının elemanları olarak x, y ve θ koordinat fonksiyonlarını alalım. Burada x ve y çift, θ tek koordinat fonksiyonudur. Bir elemanın çift olması ile kastetmek istediğimiz; diğer bütün elemanlar ile komütatif olmasıdır. Tek eleman ise diğer tek olan bir eleman ile j - komütatif olmaktadır.

İlerleyen bölümlerde tanımlayacağımız d dış diferansiyel operatörünü x ve θ ' ya etki ettirdiğimizde sırasıyla Z_3 -dereceleri 1 ve 2 olan dx ve $d\theta$ 1-formları elde edilir. dx ve $d\theta$ ifadelerine de d lineer operatörü etki ettirildiğinde sırasıyla Z_3 -dereceleri 2 ve 0 olan d^2x ve

$d^2\theta$ 1-formları elde edilir.

Kuantum 3d süper uzay, ilk defa Manin (1988) tarafından ortaya atılmıştır ve

$$x y = q y x, \quad x \theta = q \theta x, \quad y \theta = q \theta y, \quad \theta^2 = 0$$

bağıntılarını sağlayan, birbiriyle q - komütatif olan sıfırıncı dereceden x, y ve birinci

dereceden θ koordinatlarıyla oluşturulmuş bir birleşmeli cebir olarak tanımlanmıştır. Burada q sıfırdan farklı bir kompleks sayıdır.

Celik (2002a) da yaptığı çalışmada, Manin' in vurgusundan yola çıkarak Z_3 -dereceli süper düzlemi incelemiş ve bu düzlemin diferansiyel geometrisini inşa etmiştir. Bunu yaparken, Z_2 -dereceli kuantum süper düzlemi genelleştirmek için onun tek olan jeneratörünün nilpotentlik derecesini artırmıştır. Biz de

$$x y = q y x, \quad x \theta = q \theta x, \quad y \theta = q \theta y, \quad \theta^3 = 0 \quad (3.1)$$

şartlarını sağlayan birleşmeli, birimli bir cebir tanımlayıp çalışmamızı bu yönde ilerleteceğiz.

3.2 Dış Diferansiyel Operatörü

Dış diferansiyel d , A 'nın jeneratörlerini diferansiyellerine dönüştüren bir operatördür:

$$d : A \rightarrow dA$$

$$a \mapsto da, \quad a \in \{x, y, \theta\}.$$

Bu d dış diferansiyel operatörü,

$$d^3 = 0 \text{ (nilpotentlik) ve} \quad (3.2)$$

$$d(f.g) = df.g + j^{\deg(f). \deg(g)} f.dg \quad (3.3)$$

Leibniz kuralına sahiptir.

3.3 Z_3 – Dereceli Diferansiyel Cebir

Z_3 -dereceli kuantum süper uzay üzerindeki bir diferansiyel hesabı oluşturmak için ilk olarak koordinat fonksiyonları ve onların diferansiyellerini göz önüne alırız ve aralarındaki komutasyon bağıntılarının

$$x dx = A dx x$$

$$x dy = B_{11} dy x + B_{12} dx y$$

$$y \, dx = B_{21} \, dx \, y + B_{22} \, dy \, x$$

$$y \, dy = B \, dy \, y$$

$$\theta \, dx = C_{21} \, dx \, \theta + C_{22} \, d\theta \, x \quad (3.4)$$

$$\theta \, dy = F_{21} \, dy \, \theta + F_{22} \, d\theta \, y$$

$$x \, d\theta = C_{11} \, d\theta \, x + C_{12} \, dx \, \theta$$

$$y \, d\theta = F_{11} \, d\theta \, y + F_{12} \, dy \, \theta$$

$$\theta \, d\theta = C \, d\theta \, \theta$$

şeklinde olduğunu düşünerek ortaya çıkan $A, B, C, B_{ij}, C_{ij}, F_{ij}$ katsayılarını buluruz. Bu katsayıları bulurken koordinat fonksiyonlarının diferansiyelleri arasında sağlanan komutasyon bağıntılarına da ihtiyacımız olacağından K, L, M sabitler olmak üzere birinci mertebe diferansiyeller arasında

$$dx \wedge dx \wedge dx = 0$$

$$dy \wedge dy \wedge dy = 0$$

$$dx \wedge dy = K \, dy \wedge dx \quad (3.5)$$

$$dx \wedge d\theta = L \, d\theta \wedge dx$$

$$dy \wedge d\theta = M \, d\theta \wedge dy$$

bağıntılarının sağlandığını kabul ederiz.

Burada $A, B, C, B_{ij}, C_{ij}, F_{ij}, K, L, M$ ($1 \leq i, j \leq 2$), q veya j deformasyon parametrelerine bağlı olması muhtemel katsayılardır. Bu katsayıları bulmak için Wess-Zumino tarafından ortaya atılan yaklaşımı kullanacağız.

3.4 Wess-Zumino Yaklaşımı

Wess-Zumino' nun ortaya attığı yaklaşıma göre, biz (3.1) ile verilen komutasyon bağıntılarına soldan d dış diferansiyel operatörünü etki ettireceğiz ve uygun olan bağıntılara sağdan dx , dy ve $d\theta$ ifadelerini vuracağız.

Başlangıçta (3.1) ile verilen komutasyon bağıntılarına, (3.4) teki bağıntılardan da yararlanarak Wess-Zumino yaklaşımını uygulayalım:

$$d(x y - q y x) = 0 \text{ dan}$$

$$dx y + x dy - q dy x - q y dx = 0 \text{ elde edilir.}$$

Şimdi (3.4) teki ikinci ve üçüncü bağıntıları yukarıdaki denklemde kullanırsak

$$dx y + B_{11} dy x + B_{12} dx y - q dy x - q (B_{21} dx y + B_{22} dy x) = 0$$

veya

$$(1 + B_{12} - q B_{21}) dx y + (B_{11} - q - q B_{22}) dy x = 0$$

elde ederiz. Burada $dx y$ ve $dy x$ sıfır olamayacağından, ortaya çıkan katsayılar sıfır, yani,

$$1 + B_{12} - q B_{21} = 0 \quad \text{ve} \quad B_{11} - q - q B_{22} = 0 \quad (3.6a)$$

olmalıdır.

Benzer şekilde,

$$d(y \theta - q \theta y) = 0 \text{ dan}$$

$$dy \theta + y d\theta - q d\theta y - q j \theta dy = 0$$

elde edilir. Bu denklemde de (3.4) teki altıncı ve sekizinci bağıntıları kullanır ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$1 + F_{12} - q j F_{21} = 0 \quad \text{ve} \quad F_{11} - q - q j F_{22} = 0 \quad (3.6b)$$

elde ederiz.

Aynı şekilde,

$$d(x \theta - q \theta x) = 0 \text{ dan}$$

$$dx \theta + x d\theta - q d\theta x - q j \theta dx = 0$$

olup bu denklemde de (3.4) teki beşinci ve yedinci bağıntıları kullanır ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$1 + C_{12} - q j C_{21} = 0 \quad \text{ve} \quad C_{11} - q - q j C_{22} = 0 \quad (3.6c)$$

elde ederiz.

Son olarak, $d(\theta^3) = 0$ dan

$$(1 + j C + j^2 C^2) d\theta \theta^2 = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$1 + j C + j^2 C^2 = 0$$

olduğu görülür.

Buraya kadar olan kısımda, (3.1) deki bağıntılara d operatörünü uygulayarak bazı denklemler elde ettik. Şimdi de (3.1) deki bağıntıları sağdan, onların diferansiyelleri ile işleme tabii tutarak başka bazı denklemler elde edeceğiz.

İlk olarak $(x y - q y x) dx = 0$ dan

$$x y dx - q y x dx = 0$$

olup burada (3.4) teki birinci ve üçüncü bağıntıları kullandığımızda

$$x(B_{21} dx y + B_{22} dy x) - q A y dx x = 0$$

yazarız. Burada (3.4) teki birinci, ikinci ve üçüncü bağıntıları kullandığımızda

$$B_{21} x dx y + B_{22} x dy x - q A(B_{21} dx y + B_{22} dy x) x = 0$$

elde ederiz. Elde edilen bu denklemde (3.4) teki birinci ve ikinci bağıntıları kullandığımızda

$$A B_{21} dx x y + B_{22} (B_{11} dy x + B_{12} dx y) x - q A B_{21} dx y x - q A B_{22} dy x x = 0$$

veya

$$q A B_{21} dx y x + B_{22} B_{11} dy x x + B_{22} B_{12} dx y x - q A B_{21} dx y x - q A B_{22} dy x x = 0$$

elde ederiz. Netice itibariyle,

$$B_{22} B_{11} - q A B_{22} = 0 \quad \text{ve} \quad B_{22} B_{12} = 0 \quad (3.6d)$$

denklemlerine sahip oluruz.

İkinci olarak,

$$(x y - q y x) dy = 0 \quad \text{dan}$$

$$x y dy - q y x dy = 0$$

elde ederiz. (3.4) teki ikinci ve dördüncü bağıntıları kullanarak

$$B x dy y - q y (B_{11} dy x + B_{12} dx y) = 0$$

olup (3.4) teki ikinci bağıntıyı tekrar kullandığımızda

$$B(B_{11} dy x + B_{12} dx y) y - q B_{11} y dy x - q B_{12} y dx y = 0$$

veya

$$B B_{11} dy x y + B B_{12} dx y y - q B_{11} B dy y x - q B_{12} (B_{21} dx y + B_{22} dy x) y = 0$$

elde ederiz. Buradan

$$B B_{12} - q B_{12} B_{21} = 0 \quad \text{ve} \quad B_{22} B_{12} = 0 \quad (3.6e)$$

denklemlerine sahip oluruz. Benzer şekilde

$$(y \theta - q \theta y) dy = 0 \quad \text{ve} \quad (y \theta - q \theta y) d\theta = 0 \quad \text{dan sırasıyla}$$

$$F_{22} F_{11} - q B F_{22} = 0 \quad \text{ve} \quad F_{22} F_{12} = 0 \quad (3.6f)$$

$$C F_{12} - q F_{12} F_{21} = 0 \quad \text{ve} \quad F_{22} F_{12} = 0$$

denklemlerini

$$(x \theta - q \theta x) dx = 0 \quad \text{ve} \quad (x \theta - q \theta x) d\theta = 0 \quad \text{dan da sırasıyla}$$

$$C_{22} C_{11} - q A C_{22} = 0 \quad \text{ve} \quad C_{22} C_{12} = 0 \quad (3.6g)$$

$$C C_{12} - q C_{12} C_{21} = 0 \quad \text{ve} \quad C_{22} C_{12} = 0$$

denklemlerini elde ederiz.

Şimdi (3.4) bağıntılarında (3.3) te verilen Leibniz kuralını kullandığımızda ve gerekli düzenlemeleri yaptığımızda

$$x d^2 x = A d^2 x x + (j A - 1) dx dx$$

$$x d^2 y = B_{11} d^2 y x + B_{12} d^2 x y + (j B_{11} + j K B_{12} - K) dy dx$$

$$y d^2 x = B_{21} d^2 x y + B_{22} d^2 y x + (j B_{22} + j K B_{21} - 1) dy dx$$

$$y d^2 y = B d^2 y y + (j B - 1) dy dy$$

$$\theta d^2 x = j^2 C_{21} d^2 x \theta + j^2 C_{22} d^2 \theta x + (j C_{22} + L C_{21} - j^2) d\theta dx \quad (3.7)$$

$$\theta d^2 y = j^2 F_{21} d^2 y \theta + j^2 F_{22} d^2 \theta y + (j F_{22} + M F_{21} - j^2) d\theta dy$$

$$x d^2\theta = C_{11} d^2\theta x + C_{12} d^2x \theta + (j^2 C_{11} + j L C_{12} - L) d\theta dx$$

$$y d^2\theta = F_{11} d^2\theta y + F_{12} d^2y \theta + (j^2 F_{11} + j M F_{12} - M) d\theta dy$$

$$\theta d^2\theta = j^2 C d^2\theta \theta + (j C - j^2) d\theta d\theta$$

bağıntılarına ulaşırız.

Koordinat fonksiyonları ile ikinci mertebe diferansiyeller arasındaki (3.7) komutasyon bağıntıları, birinci mertebe diferansiyelleri de içermektedir ve dolayısıyla homojenlik yoktur. Onları homojen hale getirmek için birinci mertebe diferansiyellerin katsayılarını sıfıra eşitliyoruz.

Böylelikle aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$j A - 1 = 0 \quad \text{den} \quad A = j^2$$

$$j B_{11} + j K B_{12} - K = 0$$

$$j B_{22} + j K B_{21} - 1 = 0$$

$$j B - 1 = 0 \quad \text{veya} \quad B = j^2$$

$$j C_{22} + L C_{21} - j^2 = 0 \tag{3.8}$$

$$j F_{22} + M F_{21} - j^2 = 0$$

$$j^2 C_{11} + j L C_{12} - L = 0$$

$$j^2 F_{11} + j M F_{12} - M = 0$$

$$j C - j^2 = 0 \quad \text{veya} \quad C = j.$$

Şimdi (3.5) teki bağıntılara (3.3) te verilen Leibniz kuralını uygulayarak

$$dx \wedge dy = K dy \wedge dx \quad \text{den} \quad d^2x \wedge dy + j dx \wedge d^2y = K d^2y \wedge dx + j K dy \wedge d^2x$$

$$dx \wedge d\theta = L d\theta \wedge dx \quad \text{den} \quad d^2x \wedge d\theta + j dx \wedge d^2\theta = L d^2\theta \wedge dx + j^2 L d\theta \wedge d^2x \tag{3.9}$$

$$dy \wedge d\theta = M d\theta \wedge dy \quad \text{den} \quad d^2y \wedge d\theta + j dy \wedge d^2\theta = M d^2\theta \wedge dy + j^2 M d\theta \wedge d^2y$$

denklemlerini elde ederiz.

(3.6a) daki birinci ve ikinci denklemleri ve (3.8) deki ikinci ve üçüncü denklemleri kullanarak

$$j q + j B_{22} + j - j^2 B_{22} - j K - K = 0$$

denklemini elde ederiz.

Şimdi (3.6) denklemleri üzerine bazı yorumlar getireceğiz. (3.6d) deki ikinci denklemi, yani $B_{22} B_{12} = 0$ denklemi şöyle düşünülebilir:

- 1) $B_{12} = 0$ olabilir. Hal böyle iken $B_{21} = q^{-1}$, $B_{22} = j^2 - 1$, $B_{11} = q j^2$, $K = q$ dur.
- 2) $B_{22} = 0$ olabilir. Hal böyle iken $B_{21} = q^{-1} j^2$, $B_{12} = j^2 - 1$, $B_{11} = q$, $K = q$ dur.
- 3) $B_{12} = B_{22} = 0$ olabilir. Hal böyle iken $B_{21} = q^{-1}$, $B_{11} = q$ buluruz ki bu durumda (3.8) deki ikinci denklemden $K = q j$ ve üçüncü denklemden $K = q j^2$ elde ederiz. Bu da B_{12} ve B_{22} 'nin aynı anda sıfır olamayacağını gösterir.

(3.6c) deki birinci ve ikinci denklemleri ve (3.8) deki beşinci ve yedinci denklemleri kullanarak $L = q j$ buluruz.

(3.6g) deki ikinci denklemi yani $C_{22} C_{12} = 0$ denklemi şöyle düşünülebilir:

- 1) $C_{12} = 0$ olabilir. Hal böyle iken $C_{21} = q^{-1} j^2$, $C_{22} = j - j^2$, $C_{11} = q j^2$, $L = q j$ dir.
- 2) $C_{22} = 0$ olabilir. Hal böyle iken $C_{21} = q^{-1} j$, $C_{12} = j^2 - 1$, $C_{11} = q$, $L = q j$ dir.
- 3) $C_{12} = C_{22} = 0$ olabilir. Hal böyle iken $C_{21} = q^{-1} j^2$, $C_{11} = q$ buluruz ki bu durumda (3.8) daki beşinci denklemden $L = q$ ve yedinci denklemden $L = q j^2$ elde ederiz. Bu da C_{12} ve C_{22} 'nin aynı anda sıfır olamayacağını gösterir.

(3.6b) deki birinci ve ikinci denklemleri ve (3.8) deki altıncı ve sekizinci denklemleri kullanarak $M = q j$ buluruz.

(3.6f) teki ikinci denklem yani $F_{22} F_{12} = 0$ denklemi de şöyle düşünülebilir:

- 1) $F_{12} = 0$ olabilir. Hal böyle iken $F_{21} = q^{-1} j^2$, $F_{22} = j - j^2$, $F_{11} = q j^2$, $M = q j$ dir.
- 2) $F_{22} = 0$ olabilir. Hal böyle iken $F_{21} = q^{-1} j$, $F_{12} = j^2 - 1$, $F_{11} = q$, $M = q j$ dir.
- 3) $F_{12} = F_{22} = 0$ olabilir. Hal böyle iken $F_{21} = q^{-1} j^2$, $F_{11} = q$ buluruz ki bu durumda (3.8) deki altıncı denklemden $M = q$ ve sekizinci denklemden $M = q j^2$ elde ederiz. Bu da F_{12} ve F_{22} 'nin aynı anda sıfır olamayacağını gösterir.

Dolayısıyla $B_{22} B_{12} = 0$, $C_{22} C_{12} = 0$, $F_{22} F_{12} = 0$ denklemlerini birlikte düşündüğümüzde 8 farklı seçeneğimiz ortaya çıkmaktadır.

Biz bunlardan $B_{12} = 0$, $C_{12} = 0$, $F_{12} = 0$ olması halini ele alarak devam edeceğiz. Yani, katsayıların

$$\begin{aligned} A &= j^2, B = j^2, C = j, B_{21} = q^{-1}, B_{22} = j^2 - 1, B_{11} = q j^2, C_{21} = q^{-1} j^2, \\ C_{22} &= j - j^2, C_{11} = q j^2, F_{21} = q^{-1} j^2, F_{22} = j - j^2, F_{11} = q j^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

şeklinde olduğu durumu devam ettireceğiz.

Koordinat Fonksiyonları ve Onların Birinci Mertebe Diferansiyelleri Arasındaki Bağlıntılar

Koordinat fonksiyonları ve onların birinci mertebe diferansiyelleri arasındaki bağlantılar, (3.4) te yukarıda elde edilen katsayıların yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} x dx &= j^2 dx x \\ x dy &= q j^2 dy x \\ y dx &= q^{-1} dx y + (j^2 - 1) dy x \\ y dy &= j^2 dy y \\ \theta dx &= q^{-1} j^2 dx \theta + (j - j^2) d\theta x \\ \theta dy &= q^{-1} j^2 dy \theta + (j - j^2) d\theta y \\ x d\theta &= q j^2 d\theta x \\ y d\theta &= q j^2 d\theta y \\ \theta d\theta &= j d\theta \theta \end{aligned} \quad (3.11)$$

şekline gelir.

Birinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağlıntılar

Birinci mertebe diferansiyeller arasında ise

$$dx \wedge dx \wedge dx = 0$$

$$dy \wedge dy \wedge dy = 0$$

$$dx \wedge dy = q dy \wedge dx$$

$$dx \wedge d\theta = q j d\theta \wedge dx \quad (3.12)$$

$$dy \wedge d\theta = q j d\theta \wedge dy$$

şeklindeki bağıntılar sağlanır.

Koordinat Fonksiyonları ve İkinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağıntılar

(3.7) bağıntılarının homojen olmasından yola çıkarak koordinat fonksiyonları ve ikinci mertebe diferansiyelleri arasındaki bağıntıları

$$x d^2 x = j^2 d^2 x x$$

$$x d^2 y = q j^2 d^2 y x$$

$$y d^2 x = q^{-1} d^2 x y + (j^2 - 1) d^2 y x$$

$$y d^2 y = j^2 d^2 y y$$

$$\theta d^2 x = q^{-1} j d^2 x \theta + (1 - j) d^2 \theta x \quad (3.13)$$

$$\theta d^2 y = q^{-1} j d^2 y \theta + (1 - j) d^2 \theta y$$

$$x d^2 \theta = q j^2 d^2 \theta x$$

$$y d^2 \theta = q j^2 d^2 \theta y$$

$$\theta d^2 \theta = d^2 \theta \theta$$

şeklinde elde etmiş oluruz.

Birinci ve İkinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağıntılar

(3.13) bağıntılarında (3.3) te verilen Leibniz kuralını kullandığımızda birinci ve ikinci mertebe diferansiyeller arasındaki bağıntıları

$$dx \wedge d^2 x = j d^2 x \wedge dx$$

$$dx \wedge d^2 y = q j d^2 y \wedge dx$$

$$dy \wedge d^2 x = q^{-1} j^2 d^2 x \wedge dy + (j - j^2) d^2 y \wedge dx$$

$$dy \wedge d^2 y = j d^2 y \wedge dy$$

$$d\theta \wedge d^2x = q^{-1} d^2x \wedge d\theta + (1-j)d^2\theta \wedge dx \quad (3.14)$$

$$d\theta \wedge d^2y = q^{-1} d^2y \wedge d\theta + (1-j)d^2\theta \wedge dy$$

$$dx \wedge d^2\theta = q j^2 d^2\theta \wedge dx$$

$$dy \wedge d^2\theta = q j^2 d^2\theta \wedge dy$$

$$d\theta \wedge d^2\theta = d^2\theta \wedge d\theta$$

şeklinde elde ederiz.

İkinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağıntılar

(3.14) bağıntılarında (3.3) te verilen Leibniz kuralını kullandığımızda ikinci mertebe diferansiyeller arasındaki bağıntılar

$$d^2x \wedge d^2y = q d^2y \wedge d^2x$$

$$d^2x \wedge d^2\theta = q j^2 d^2\theta \wedge d^2x \quad (3.15)$$

$$d^2y \wedge d^2\theta = q j^2 d^2\theta \wedge d^2y$$

şeklinde elde ederiz.

4. KİSMİ TÜREVLERİN CEBİRİ

Eğer f , x, y ve θ 'nin türevlenebilen bir fonksiyonu ise f 'in birinci mertebe diferansiyeli

$$df = (dx \partial_x + dy \partial_y + d\theta \partial_\theta) f \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır. f 'in ikinci mertebe diferansiyeli

$$d^2 f = d(dx \partial_x + dy \partial_y + d\theta \partial_\theta) f$$

$$\begin{aligned} d^2 f = & (d^2 x \partial_x + j dx dx \partial_x \partial_x + j dx dy \partial_y \partial_x + j dx d\theta \partial_\theta \partial_x + d^2 y \partial_y + j dy dx \partial_x \partial_y \\ & + j dy dy \partial_y \partial_y + j dy d\theta \partial_\theta \partial_y + d^2 \theta \partial_\theta + j^2 d\theta dx \partial_x \partial_\theta + j^2 d\theta dy \partial_y \partial_\theta \\ & + j^2 d\theta d\theta \partial_\theta \partial_\theta) f \end{aligned}$$

olup üçüncü mertebe diferansiyeli sıfır olacağından

$$\begin{aligned} d^3 f = & d^2 x dy \{ j^2 \partial_y \partial_x + j \partial_y \partial_x + j B_{12} \partial_y \partial_x + j B_{21} \partial_x \partial_y \} \\ & + d^2 y dx \{ j^2 \partial_x \partial_y + j \partial_x \partial_y + j B_{11} \partial_y \partial_x + j B_{22} \partial_x \partial_y \} + \dots \\ & \equiv 0 \end{aligned}$$

denkleminde (3.10) daki katsayıları kullandığımızda kısmi türevler arasındaki bağıntıları

$$\partial_x \partial_y = q j^2 \partial_y \partial_x$$

$$\partial_x \partial_\theta = q j^2 \partial_\theta \partial_x \quad (4.2)$$

$$\partial_y \partial_\theta = q j^2 \partial_\theta \partial_y$$

şeklinde elde ederiz.

4.1 Koordinat Fonksiyonları ile Kısmi Türevler Arasındaki Bağıntılar

Eğer, (4.1) in sol tarafında f yerine $(x f)$ yazar ve (3.11) deki birinci, ikinci ve yedinci bağıntılarını kullanırsak

$$\begin{aligned} d(x f) &= dx f + x df \\ &= dx f + x(dx \partial_x + dy \partial_y + d\theta \partial_\theta) f \\ &= dx f + (x dx \partial_x + x dy \partial_y + x d\theta \partial_\theta) f \\ &= dx f + (j^{-1} dx x \partial_x + q j^2 dy x \partial_y + q j^2 d\theta x \partial_\theta) f \end{aligned} \quad (4.3)$$

elde ederiz.

Şimdi (4.1) in sağ tarafında x yerine $(x f)$ yazarsak

$$\begin{aligned} d(x f) &= (dx \partial_x + dy \partial_y + d\theta \partial_\theta)(x f) \\ &= (dx \partial_x x + dy \partial_y x + d\theta \partial_\theta x) f \end{aligned} \quad (4.4)$$

elde ederiz. Sonuçta, (4.3) ve (4.4) teki dx, dy ve $d\theta$ 'nın karşılaştırılması

$$\begin{aligned} \partial_x x &= 1 + j^{-1} x \partial_x \\ \partial_y x &= q j^2 x \partial_y \\ \partial_\theta x &= q j^2 x \partial_\theta \end{aligned} \quad (4.5)$$

bağıntılarını verir.

Benzer şekilde (4.1) in sol ve sağ taraflarında f yerine $(y f)$ ve (θf) yazılarak diğer tüm bağıntıları elde ederiz.

Böylece; koordinat fonksiyonları ve kısmi türevler arasındaki bağıntıları

$$\begin{aligned} \partial_x x &= 1 + j^{-1} x \partial_x \\ \partial_y x &= q j^2 x \partial_y \\ \partial_\theta x &= q j^2 x \partial_\theta \\ \partial_y y &= 1 + (j^2 - 1)x \partial_x + j^{-1} y \partial_y \\ \partial_x y &= q^{-1} y \partial_x \\ \partial_\theta y &= q j^2 y \partial_\theta \\ \partial_\theta \theta &= 1 + j^{-1} \theta \partial_\theta + (j^2 - 1)x \partial_x + (j^2 - 1)y \partial_y \\ \partial_x \theta &= q^{-1} \theta \partial_x \\ \partial_y \theta &= q^{-1} \theta \partial_y \end{aligned} \quad (4.6)$$

şeklinde bulmuş oluruz.

4.2 Kısmi Türevler ile Birinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağlılıklar

Bu kısımda amacımız, (koordinat fonksiyonlarının) kısmi türev operatörleriyle diferansiyelleri arasındaki komutasyon ilişkilerini bulmaktır. O nedenle, Z_3 -dereceli 3d uzayında, elemanların kısmi türev operatörleri ve birinci mertebe diferansiyelleri arasındaki ilişkilerin

$$\begin{aligned}
 \partial_x dx &= A_1 dx \partial_x + A_2 dy \partial_y + A_3 d\theta \partial_\theta \\
 \partial_x dy &= A_4 dy \partial_x + A_5 dx \partial_y \\
 \partial_y dx &= B_1 dx \partial_y + B_2 dy \partial_x \\
 \partial_y dy &= B_3 dx \partial_x + B_4 dy \partial_y + B_5 d\theta \partial_\theta \\
 \partial_\theta dx &= C_1 dx \partial_\theta + C_2 d\theta \partial_x \\
 \partial_\theta dy &= C_3 dy \partial_\theta + C_4 d\theta \partial_y \\
 \partial_x d\theta &= A_6 d\theta \partial_x + A_7 dx \partial_\theta \\
 \partial_y d\theta &= B_6 d\theta \partial_y + B_7 dy \partial_\theta \\
 \partial_\theta d\theta &= C_5 dx \partial_x + C_6 dy \partial_y + C_7 d\theta \partial_\theta
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

şeklinde olduğunu kabul edelim.

Ayrıca kısmi türev operatörünün tanımından

$$\partial_i (x^j dx^k) = \delta_j^i \delta_l^k dx^k \tag{4.8}$$

bağıntısına sahibiz.

(3.11) deki birinci bağıntıyı kullanarak (4.8) deki formülü kullandığımızda

$$\partial_x (x dx - j^2 dx x) = 0$$

$$dx - j^2 \partial_x dx x = 0$$

bağıntısını elde ederiz.

(4.7) deki birinci bağıntıyı yukarıdaki denklemde kullanarak

$$dx - j^2 (A_1 dx \partial_x + A_2 dy \partial_y + A_3 d\theta \partial_\theta) x = 0$$

$$dx - j^2 A_1 dx = 0 \quad \text{olup} \quad (1 - j^2 A_1) = 0 \quad \text{veya} \quad A_1 = j$$

katsayısını buluruz.

Benzer şekilde (4.8) ile (3.11) deki ikinci bağıntıya ∂_x operatörünü uyguladığımızda

$$\partial_x (x dy - q j^2 dy x) = 0 \quad \text{den} \quad dy - q j^2 \partial_x dy x = 0$$

elde ederiz. Bu denklemde de (4.7) deki ikinci bağıntıyı kullanırsak

$$dy - q j^2 (A_4 dy \partial_x + A_5 dx \partial_y) x = 0$$

$$dy - q j^2 A_4 dy = 0 \quad \text{olup} \quad (1 - q j^2 A_4) = 0 \quad \text{veya} \quad A_4 = q^{-1} j$$

katsayısını buluruz.

Şimdi (3.11) deki üçüncü bağıntıya benzer işlemleri yaparsak

$$\partial_x [y dx - q^{-1} dx y - (j^2 - 1) dy x] = 0 \quad \text{den} \quad 0 - q^{-1} \partial_x dx y - (j^2 - 1) \partial_x dy x = 0$$

elde ederiz. Bu denklemde de (4.7) deki birinci ve ikinci bağıntıları kullanırsak

$$-q^{-1} (A_1 dx \partial_x + A_2 dy \partial_y + A_3 d\theta \partial_\theta) y - (j^2 - 1) (A_4 dy \partial_x + A_5 dx \partial_y) x = 0$$

$$q^{-1} A_2 + (j^2 - 1) A_4 = 0$$

buluruz. Bu denklemden, $A_4 = q^{-1} j$ olduğundan $A_2 = j - 1$

katsayısını buluruz.

(3.11) deki yedinci bağıntıya benzer işlemleri yaparsak

$$\partial_x (x d\theta - q j^2 d\theta x) = 0 \quad \text{den} \quad d\theta - q j^2 \partial_x d\theta x = 0$$

elde ederiz. Bu denklemde (4.7) deki yedinci bağıntıyı kullanırsak

$$d\theta - q j^2 (A_6 d\theta \partial_x + A_7 dx \partial_\theta) x = 0$$

$$d\theta - q j^2 A_6 d\theta = 0 \quad \text{olup} \quad (1 - q j^2 A_6) = 0 \quad \text{veya} \quad A_6 = q^{-1} j$$

katsayısını buluruz.

Son olarak, (3.11) deki beşinci bağıntıya benzer işlemleri uyguladığımızda

$$\partial_x (\theta dx - q^{-1} j^2 dx \theta - (j - j^2) d\theta x) = 0$$

$$-q^{-1} j^{-1} \partial_x dx \theta - (j - j^2) \partial_x d\theta x = 0$$

elde ederiz. Bu denklemde (4.7) deki birinci ve yedinci bağıntıları kullanırsak

$$q^{-1}j^{-1}A_3 d\theta + (j - j^2)A_6 d\theta = 0 \quad \text{den} \quad q^{-1}j^{-1}A_3 + (j - j^2)A_6 = 0$$

elde ederiz. Bu bağıntıdan, $A_6 = q^{-1}j$ olduğundan $A_3 = j - 1$ bulunur.

Benzer şekilde (3.11) deki tüm bağıntılara ∂_x , ∂_y , ∂_θ kısmi türevlerini soldan vurursak (4.7) bağıntılarındaki tüm katsayılar bulunmuş olur. Katsayıların bulunmuş haliyle (4.7) bağıntıları

$$\partial_x dx = j dx \partial_x + (j - 1) dy \partial_y + (j - 1) d\theta \partial_\theta$$

$$\partial_x dy = q^{-1}j dy \partial_x$$

$$\partial_y dx = q dx \partial_y$$

$$\partial_y dy = j dy \partial_y + (j - 1) d\theta \partial_\theta$$

$$\partial_\theta dx = q j dx \partial_\theta \tag{4.9}$$

$$\partial_\theta dy = q j dy \partial_\theta$$

$$\partial_x d\theta = q^{-1}j d\theta \partial_x$$

$$\partial_y d\theta = q^{-1}j d\theta \partial_y$$

$$\partial_\theta d\theta = j^2 d\theta \partial_\theta$$

şeklinde yazılır.

4.3 Kısmi Türevler ile d Dış Diferansiyel Operatörü Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, d dış diferansiyel operatörü ile kısmi türev operatörleri arasındaki bağıntıları elde edeceğiz. İlk olarak, ∂_y kısmi türevi ile d arasındaki bağıntıyı bulalım. Bunun için d dış diferansiyel operatörünün (4.1) tanımını kullanarak

$$\begin{aligned} \partial_y df &= [\partial_y(dx \partial_x + dy \partial_y + d\theta \partial_\theta)] f \\ &= (\partial_y dx \partial_x + \partial_y dy \partial_y + \partial_y d\theta \partial_\theta) f \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu bağıntıda (4.9) daki üçüncü, dördüncü ve sekizinci bağıntıları kullanırsak

$$\partial_y df = (q dx \partial_y \partial_x + j dy \partial_y \partial_y + (j - 1) d\theta \partial_\theta \partial_y + q^{-1}j d\theta \partial_y \partial_\theta) f$$

elde ederiz. (4.2) deki birinci ve üçüncü bağıntılardan yararlanarak

$$\partial_y df = (j dx \partial_x \partial_y + j dy \partial_y \partial_y + (j-1) d\theta \partial_\theta \partial_y + d\theta \partial_\theta \partial_y) f$$

den

$$\partial_y d = j d \partial_y$$

elde ederiz.

Benzer şekilde ∂_x ve ∂_θ kısmi türevlerinin d ile olan bağıntıları bulunur ve bunlar

$$\partial_x d = j d \partial_x$$

$$\partial_y d = j d \partial_y \tag{4.10}$$

$$\partial_\theta d = j^2 d \partial_\theta$$

şeklindedir.

5. CARTAN – MAURER FORMLARI

Bu bölümde Cartan - Maurer formlarını tanımlayıp gerekli komutasyon bağıntılarını elde edeceğiz.

İlk önce A cebiri üzerine süper Hopf cebir yapısından bahsedelim. Bu kısım, İnekci (2007) den alınmıştır.

x ' in tersinin mevcut olduğunu kabul edelim. Yani,

$$x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$$

şartı sağlansın. Bu durumda, A cebiri üzerindeki $\Delta_A : A \rightarrow A \otimes A$ cebir homomorfizminin koordinat fonksiyonları üzerine etkisi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\Delta_A(x) = x \otimes x$$

$$\Delta_A(y) = x \otimes y + y \otimes x \quad (5.1)$$

$$\Delta_A(\theta) = \theta \otimes 1 + \theta \otimes 1$$

Ko-çarpma denen bu tasvir,

$$(\text{id} \otimes \Delta_A) \circ \Delta_A = (\Delta_A \otimes \text{id}) \circ \Delta_A$$

şeklindeki ko-assosyatiflik özelliğine sahiptir ve (3.1) bağıntılarını korur.

$\varepsilon_A : A \rightarrow \mathbb{C}$ cebir homomorfizminin koordinat fonksiyonlarına etkisi

$$\mu \circ (\varepsilon_A \otimes \text{id}) \circ \Delta_A = \text{id} = \mu \circ (\text{id} \otimes \varepsilon_A) \circ \Delta_A$$

$$\mu \circ (S_A \otimes \text{id}) \circ \Delta_A = \varepsilon_A = \mu \circ (\text{id} \otimes S_A) \circ \Delta_A$$

özellikleri kullanılarak bulunur ki böylece,

$$\varepsilon_A(x) = 1, \varepsilon_A(y) = 0, \varepsilon_A(\theta) = 0$$

elde edilir. Bu tasvire **ko-birim** denir.

$S_A : A \rightarrow A$ cebir anti-homomorfizminin koordinat fonksiyonlarına etkisi de

$$\mu \circ (S_A \otimes \text{id}) \circ \Delta_A = \varepsilon_A = \mu \circ (\text{id} \otimes S_A) \circ \Delta_A$$

özelligi kullanılarak bulunur. Böylece,

$$S_A(x) = x^{-1}, S_A(y) = -x^{-1}y x^{-1}, S_A(\theta) = -\theta$$

elde edilir.

Kolayca gösterilebileceği gibi yukarıda verilen $\Delta_A, \varepsilon_A, S_A$ tasvirleriyle A bir Hopf cebiridir.

Cartan - Maurer formları Δ_A ko-çarpmasının A cebirinin jeneratörlerine etkisi kullanılarak Woronowicz (1989) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$w_{x_k} = \mu \circ (d \otimes S) \circ \Delta(x_k) \quad , \quad k=1, 2, 3 \quad , \quad x_k \in \{x, y, \theta\}. \quad (5.2)$$

Böylece, Cartan - Maurer formlarını

$$w_x = \mu \circ (d \otimes S) \circ \Delta(x) = \mu \circ (d \otimes S)(x \otimes x) = \mu(dx \otimes S(x)) = \mu(dx \otimes x^{-1}) = dx x^{-1}$$

$$w_y = \mu \circ (d \otimes S) \circ \Delta(y) = \mu \circ (d \otimes S)(x \otimes y + y \otimes x) = \mu(dx \otimes S(y) + dy \otimes S(x))$$

$$= \mu(dx \otimes -x^{-1}yx^{-1} + dy \otimes x^{-1})$$

$$= -dx x^{-1}y x^{-1} + dy x^{-1}$$

$$w_\theta = \mu \circ (d \otimes S) \circ \Delta(\theta) = \mu \circ (d \otimes S)(\theta \otimes 1 + 1 \otimes \theta) = \mu(d\theta \otimes S(1) + d1 \otimes S(\theta))$$

$$= \mu(d\theta \otimes 1) = d\theta$$

şeklinde elde ederiz. Sonuç olarak

$$w_x = dx x^{-1}$$

$$w_y = -dx x^{-1}y x^{-1} + dy x^{-1} \quad (5.3)$$

$$w_\theta = d\theta$$

dır.

5.1 Cartan - Maurer Formları ile Koordinat Fonksiyonları Arasındaki Bağlıntılar

Şimdi Cartan - Maurer formlarının A cebirinin jeneratörleriyle olan bağlantılarını bulalım.

Bunun için (5.3) bağlantılarından ve cebirin birleşmeli olmasından yararlanacağız:

$$x w_y = x(-dx x^{-1}y x^{-1} + dy x^{-1})$$

$$= -x dx x^{-1}y x^{-1} + x dy x^{-1}$$

Yukarıdaki denklemde (3.11) deki birinci ve ikinci bağlantıları ve (3.1) deki uygun

komutasyon bağıntılarını kullanarak

$$\begin{aligned}
 x w_y &= -j^2 dx x x^{-1} y x^{-1} + q j^2 dy x x^{-1} \\
 &= -j^2 dx y x^{-1} + q j^2 dy x x^{-1} \\
 &= -j^2 dx y x^{-1} + q j^2 \{w_y + dx x^{-1} y x^{-1}\} x \\
 &= -q j^2 dx x^{-1} y + q j^2 w_y x + q j^2 dx x^{-1} y x^{-1} x
 \end{aligned}$$

den

$$x w_y = q j^2 w_y x$$

elde ederiz.

Diğer bağıntıları da benzer şekilde bularak aşağıdaki bağıntıları elde ederiz:

$$x w_x = j^2 w_x x$$

$$y w_x = j^2 w_x y + (j^2 - 1) w_y x$$

$$\theta w_x = j^2 w_x \theta + (j - j^2) w_\theta$$

$$x w_y = q j^2 w_y x$$

$$y w_y = q w_y y$$

$$\theta w_y = \theta w_y \tag{5.4}$$

$$x w_\theta = q j^2 w_\theta x$$

$$y w_\theta = q j^2 w_\theta y$$

$$\theta w_\theta = j w_\theta \theta.$$

5.2 Cartan - Maurer Formları ile Birinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağıntılar

Cartan - Maurer formları ile birinci mertebe diferansiyeller arasındaki bağıntıları bulmak için (3.11) ve (5.3) bağıntılarından ve yine cebirin birleşmeli olmasından faydalanacağız.

Böylece aşağıdaki bağıntıları elde ederiz:

$$dx \wedge w_x = j^2 w_x \wedge dx$$

$$dy \wedge w_x = j^2 w_x \wedge dy$$

$$d\theta \wedge w_x = j w_x \wedge d\theta$$

$$dx \wedge w_y = q j w_y \wedge dx$$

$$dy \wedge w_y = q j^2 w_y \wedge dy \quad (5.5)$$

$$d\theta \wedge w_y = j w_y \wedge d\theta$$

$$dx \wedge w_\theta = q j w_\theta \wedge dx$$

$$dy \wedge w_\theta = q j w_\theta \wedge dy$$

$$d\theta \wedge w_\theta = w_\theta \wedge d\theta .$$

5.3 Cartan - Maurer Formları ile İkinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağlılıklar

Cartan - Maurer formları ile ikinci mertebe diferansiyeller arasındaki bağıntıları bulmak için (3.11), (3.13), (3.14) ve (5.3) bağıntılarından ve yine cebirin birleşmeli olmasından faydalanacağız.

Böylece aşağıdaki bağıntıları elde ederiz:

$$d^2x \wedge w_x = j w_x \wedge d^2x$$

$$d^2y \wedge w_x = j w_x \wedge d^2y$$

$$d^2\theta \wedge w_x = w_x \wedge d^2\theta$$

$$d^2x \wedge w_y = q w_y \wedge d^2x$$

$$d^2y \wedge w_y = q j w_y \wedge d^2y \quad (5.6)$$

$$d^2\theta \wedge w_y = w_y \wedge d^2\theta$$

$$d^2x \wedge w_\theta = q w_\theta \wedge d^2x - (j - j^2) dx \wedge w_\theta^2$$

$$d^2y \wedge w_\theta = q w_\theta \wedge d^2y - (j - j^2) dy \wedge w_\theta^2$$

$$d^2\theta \wedge w_\theta = w_\theta \wedge d^2\theta .$$

5.4 Cartan - Maurer Formları Arasındaki Bağlıntılar

Cartan - Maurer formlarının kendi aralarındaki bağlantıları bulmak için (3.11), (3.12), (5.3) bağlantılarından yararlanacağız. Cebirin birleşme özelliğini kullanarak aşağıdaki bağlantıları elde ederiz:

$$w_x \wedge w_y = j^2 w_y \wedge w_x$$

$$w_x \wedge w_\theta = j^2 w_\theta \wedge w_x$$

$$w_y \wedge w_\theta = j^2 w_\theta \wedge w_y \quad (5.7)$$

$$w_x \wedge w_x \wedge w_x = 0.$$

5.5 Cartan - Maurer Formları ile d Dış Diferansiyel Operatörü Arasındaki Bağlıntılar

d dış diferansiyel operatörünün (3.3) te verilen Leibniz kuralını kullanarak ve (3.11), (3.13), (3.14) bağlantılarından yararlanarak d' nin Cartan - Maurer formları ile olan bağlantılarını buluruz:

$$dw_x = d^2 x x^{-1} - j w_x \wedge w_x$$

$$dw_y = d^2 y x^{-1} - d^2 x x^{-1} y x^{-1} + w_x \wedge w_y \quad (5.8)$$

$$dw_\theta = d^2 \theta.$$

(5.8) bağlantılarında (3.3) te verilen Leibniz kuralını bir kez daha kullandığımızda aşağıdaki bağlantıları elde ederiz:

$$d^2 w_x = 0$$

$$d^2 w_y = 0 \quad (5.9)$$

$$d^2 w_\theta = 0.$$

6. Z_3 – DERECELİ KUANTUM SÜPER LİE CEBİRİ

Kuantum süper Lie cebirini elde etmek için d dış diferansiyel operatörünü aşağıdaki formda yazalım:

$$df = (w_x X + w_y Y + w_\theta \nabla) f \quad (6.1)$$

Burada X, Y, ∇ Lie cebiri jeneratörleridir.

Kuantum süper Lie cebirini elde ederken A cebirinin jeneratörlerinin kısmi türevlerinden faydalanacağız.

6.1 Süper Lie Cebir Jeneratörleri ile Koordinat Fonksiyonları Arasındaki Bağlıntılar

Bu kısımda, süper Lie cebir jeneratörleriyle A cebirinin jeneratörleri arasında sağlanan komutasyon bağıntılarını bulacağız.

Önce, süper Lie cebiri jeneratörlerinin kısmi türevlerle aralarındaki bağıntıları bulmamız gerekir. Bunun için ilk olarak d' nin (6.1) tanımını kullanacağız.

Orada (5.3) formüllerini yazdığımızda

$$\begin{aligned} df &= [(dx x^{-1})X + (-dx x^{-1}y x^{-1} + dy x^{-1})Y + d\theta \nabla] f \\ &= [dx (x^{-1}X - x^{-1}y x^{-1}Y) + dy x^{-1}Y + d\theta \nabla] f \end{aligned}$$

elde ederiz.

Şimdi d' nin (4.1) tanımını yazalım:

$$df = [dx \partial_x + dy \partial_y + d\theta \partial_\theta] f$$

Bu iki ifadeyi eşitlediğimizde süper Lie cebiri jeneratörlerinin kısmi türevlerle olan bağıntılarını

$$X_1 = x \partial_x, \quad X_2 = y \partial_y, \quad (X = X_1 + X_2)$$

$$Y = x \partial_y \quad (6.2)$$

$$\nabla = \partial_\theta$$

şeklinde buluruz.

Bulduğumuz bu (6.2) bağıntılarıyla (4.6) bağıntılarını birlikte kullanarak süper Lie cebiri

jeneratörleriyle koordinat fonksiyonları arasındaki bağıntıları

$$X_1 x = x + j^2 x X_1$$

$$X_1 y = y X_1$$

$$X_1 \theta = \theta X_1$$

$$X_2 x = j^2 x X_2$$

$$X_2 y = y + j^2 y X - y X_1$$

$$X_2 \theta = \theta X_2$$

$$Y x = q j^2 x Y$$

$$Y y = x + j^2 x X - x X_1 \quad (6.3)$$

$$Y \theta = \theta Y$$

$$\nabla x = q j^2 x \nabla$$

$$\nabla y = q j^2 y \nabla$$

$$\nabla \theta = 1 + j^2 \theta \nabla + (j^2 - 1) X$$

şeklinde buluruz.

6.2 Süper Lie Cebir Yapısı

Bu bölümde, süper Lie cebiri jeneratörlerinin kendi aralarındaki bağıntıları bularak A cebirinin bir Lie cebiri olduğunu göreceğiz. Bunun için ilk olarak, Lie cebir jeneratörleri arasındaki bağıntıları bulmamız gerekir. Örnek olarak Y ile ∇ arasındaki bağıntıyı bulalım:

$$[Y, \nabla] = Y \nabla - \nabla Y = x \partial_y \partial_\theta - \partial_\theta x \partial_y$$

ifadesinde (4.2) ve (4.6) daki üçüncü bağıntıları kullandığımızda

$$[Y, \nabla] = 0$$

buluruz.

Benzer şekilde diğer ifadeleri de (4.2) ve (4.6) daki bağıntılardan yararlanarak yazdığımızda

$$[X_1, X_2] = 0$$

$$[X_1, Y] = (j^2 - 1)Y X_1 + Y$$

$$[X_1, \nabla] = 0$$

$$[X_2, \nabla] = 0$$

$$[X_2, Y] = -(j^2 - 1)Y X_1 - Y$$

bağıntılarını buluruz.

Bu bağıntılardan yararlanarak

$$[X, [Y, \nabla]] + [Y, [\nabla, X]] + [\nabla, [X, Y]] = 0$$

olduğu kolayca gösterilir.

Sonuç olarak elde edilen cebir bir Lie cebiridir.

7. SONUÇLAR

Bu tezde, üç boyutlu $R_q(2/1)$ kuantum süper uzayının Z_3 -dereceli diferansiyel geometrisi üzerine bir çalışma Wess-Zumino tarafından ortaya atılan yaklaşım kullanılarak yapıldı. Diferansiyel yapı oluşturulurken koordinat fonksiyonları, onların diferansiyelleri vb. arasındaki komutasyon bağıntılarının yanı sıra kısmi türev operatörleri arasında sağlanan komutasyon bağıntıları da elde edildi. Sonra, Cartan - Maurer formları bulunup bu formların oluşturduğu Z_3 -dereceli cebir ortaya kondu. Son olarak, Z_3 -dereceli süper vektör alanlarının Lie cebir yapısı oluşturulmuştur.

KAYNAKLAR

- Abe, E., (1977), Hopf Algebras, Cambridge University Press, Cambridge.
- Brzezinski, T., Dabrowski, H. ve Rembienski, J., (1992), "On the quantum differential calculus and the quantum holomorphicity", Journal of Mathematical Physics, 33: 19-24.
- Celik, S., (1998), "Differential geometry of the q - superplane", J. Phys. A: Math. Gen., 31: 9695-9701.
- Celik, S. ve Celik, S.A., (2000), "Differential geometry of the q -plane", Int. J. Modern Phys. A, 15: 3237-3243.
- Celik, S., (2002a), "Differential geometry of the Z_3 -graded quantum superplane", Journal of Physics A: Mathematical and General, 35: 4257-4268.
- Celik, S., (2002b), " Z_3 -graded differential geometry of the quantum plane", Journal of Physics A: Mathematical and General, 35: 6307-6318.
- Chung, W.S., (1994), "Quantum Z_3 -graded space", Journal of Mathematical Physics, 35: 2497-2504.
- Drinfeld, V. G., (1986), "Quantum groups", Proc. ICM, Berkeley, 798-820.
- Faddeev, L., Reshetikhin, N. ve Takhtajan, L., (1987), "Quantisation of Lie groups and Lie algebras", Preprint LOMI.
- İnekci, M., (2007), "An extended differential calculus on the quantum super space", Yüksek Lisans Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Manin, Yu I., (1988), "Quantum groups and noncommutative geometry", Montreal University Preprint CRM-1561.
- Schmidke, B., Vokos, S. ve Zumino, B., (1990), "Differential geometry of the quantum supergroup $GL_q(1/1)$ ", Zeitschrift Für Physik C, 48: 249-255.
- Soni, S.K., (1991), "Differential calculus on the quantum superplane", Journal of Physics A: Mathematical and General, 24: 619-624.
- Sweetler, M. E., (1969), Hopf Algebras, Benjamin, New York.
- Wess, J., ve Zumino, B., (1990), "Covariant differential calculus on the quantum hyperplane", Nucl. Phys. B, Proc. Suppl., 18: 302-312.
- Woronowicz, S.L., (1987), "Compact matrix pseudogroups", Communications in Mathematical Physics, 111: 613-665.
- Woronowicz, S.L., (1989), "Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)", Communications in Mathematical Physics, 122: 125-170.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 30.06.1980

Doğum yeri Almanya

Lise 1995-1999 Orhan Cemal Fersoy Lisesi

Lisans 1999-2003 İstanbul Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Çalıştığı kurumlar 2003-2007 Birey Dershanesi
2007-2010 Detay Bilim Dershanesi (devam ediyor)