

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİ İÇİN
TERS SAÇILMA PROBLEMİ**

Matematik Müh. Göker BAKIR

**FBE Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Coşkun GÜLER

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
KISALTMA LİSTESİ.....	iv
ÖNSÖZ	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ	1
2. KORTEWEG-DE VRIES (KdV) DENKLEMİ	4
2.1 Tarihsel Gelişimi	4
2.2 KdV Denkleminin Özellikleri	6
2.3 Soliton Çözümleri.....	8
2.4 Miura Dönüşümü ve Modifiye Edilmiş KdV Denklemleri (mKdV)	10
2.5 Korunum Kanunları	11
3. TERS SAÇILMA DÖNÜŞÜMÜ	15
3.1 Tarihsel Gelişimi	15
3.2 Ters Saçılma Metodu	16
3.3 Lax Genelleştirmesi	20
3.4 Nonlineer Schrödinger Denklemi.....	22
3.5 Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) Metodu.....	24
3.6 Ters Saçılma Dönüşümü ile İlgili Uygulamalar	28
3.7 Ters Saçılma Dönüşümünün Bir Boyutta Genelleştirilmesi	34
KAYNAKLAR	39
ÖZGEÇMİŞ.....	42

SİMGELİSTESİ

α	Sıvının düzgün hareketi ile ilgili bir katsayı
g	Yerçekimi ivmesi
h	Suyun derinliği
T	Yüzey gerilimi
ρ	Yoğunluk
$\eta(x,t)$	Su yüzeyinin denge seviyesinden yüksekliği

KISALTMA LİSTESİ

AKNS	Ablowitz-Kaup-Newell-Segur
GGKM	Gardner-Green-Kruskal-Miura
KdV	Korteweg-de Vries denklemi
mKdV	Modifiye edilmiş KdV denklemi
NLS	Nonlinear Schrödinger denklemi

ÖNSÖZ

Tezimin konusunu seçmemde bana yardımcı olan, gerek ders konusunda, gerekse sosyal hayatta yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Coşkun GÜLER'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu tez çalışmasında, Korteweg-de Vries denklemi (KdV) incelenmiş ve denklem Lax ve AKNS metotları kullanılarak elde edilmiştir. İkinci bölümde, KdV denklemi ve denklemin özellikleri tanıtılmıştır. KdV denklemi lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklemdir. Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için Fourier dönüşümünün nonlinear benzeri olan bir metot incelenmiştir. Ters saçılma dönüşümü, nonlinear denklemin çözümü ile özdeğerleri orijinal denklemin hareket sabitleri olan bir lineer özdeğer denklemini ilişkilendirmektedir. Orijinal denklemin çözümü özdeğer probleminin potansiyeli yerine geçmektedir. Bu sebeple, özdeğer probleminin saçılma verisine karşılık gelen çözüm ve zaman değişimleri hesaplanmıştır. Ardından ters saçılma dönüşümü ile orijinal denklemin çözümü elde edilmiştir.

ABSTRACT

In this thesis, the Korteweg-de Vries equation (KdV) is considered, and it is derived by using the Lax and the AKNS methods. In the second chapter, the KdV equation and some of its properties are introduced. The KdV equation is a nonlinear partial differential equation. A method for integrating nonlinear partial differential equations is discussed which can be viewed as a nonlinear analogue of the Fourier transform. It involves associating the solution of the nonlinear equation to a linear eigenvalue equation whose eigenvalues are constants of the motion for the original equation. The solution of the original equation plays the role of a potential in the eigenvalue problem. Thus the solution is mapped to scattering data of the eigenvalue equation and the time evolution of these data is trivially computed. Inverse scattering techniques are then applied to obtain the solution to the original equation.

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler ile ilgili çalışmalar başladığından beri kaydedilen ilerlemenin tamamına yakını lineer denklemler üzerine sağlanmıştır. Bunun en önemli nedeni lineer denklemlerin süperpozisyon ilkesine uymalarıdır. Bu ilkeye göre bir lineer sistemde, sistemin lineer çözüm kombinasyonları da aynı lineer sistemin çözümüdür. Bu sebeple, Fourier serileri ve Fourier dönüşümleri diferansiyel denklemlerin genel çözümlerinin açıklanması için geliştirilmiştir.

Lineer diferansiyel denklemler üzerinde yapılan çalışmalara ve geliştirmelere karşın, doğadaki birçok olayın anlaşılması için yapılan modeller, lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler içermektedir. Fiziğin birçok dallarında örneğin, lineer olmayan optik, hidrodinamik, katı hal fiziği, plazma fiziği, yüksek enerji fiziği gibi geniş bir alandaki fiziksel olayların incelenmesinde lineer olmayan sistemler karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle son yıllarda lineer olmayan sistemlerin tamamen çözülebilirliği fizikçiler ve matematikçilerin bir çalışma alanını oluşturmaktadır.

Son yıllarda lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler ve bunların kesin çözümleri üzerine yapılan çalışmalarda önemli bir ilerleme sağlanmıştır. Bu tezde, literatürde çok iyi bilinen ve (1+1) boyutta tamamen çözülebilen, lineer olmayan Korteweg-de Vries (KdV) diferansiyel denklemi ve Fourier dönüşümünün nonlinear benzeri olan ters saçılma dönüşümü ele alınacaktır.

KdV denkleminin çıkış noktası, İskoç mühendis J.Scott Russell'ın 1834 yılında gözlemlediği su dalgalarıdır. Russell, 1834 yılında Edinburgh ile Glasgow arasındaki bir kanal boyunca iki at tarafından hızla çekilen bir kayığın harekete geçirdiği su dalgalarını incelemiş ve gözlemlerini 1844 yılında 'Dalgalar Üzerine Rapor' isimli makalesinde anlatmıştır (Russell, 1844). Salınım yapan diğer dalga türlerinden farklı hareket biçimi nedeniyle yine Russell tarafından bunlara "soliter dalga" adı verilmiştir. Russell bunların nesne parçacığı özelliklerinden dolayı kendilerine ait dinamizme sahip olduklarını düşünüyordu. Bilim adamları O'ndan onlarca yıl sonra dalgaların farklı özelliklerini keşfedebilmiş, yayılış ve birbirinden geçiş özelliklerini fark edebilmişlerdir. Salınım yapan diğer dalga türlerinden farklı hareket biçimi nedeniyle bu dalgalar birçok bilim adamının ilgisini çekmiştir. Nitekim Russell'dan sonra 1847 yılında Stokes (1847) ve 1872 yılında Boussinesq (1872) gibi birçok matematikçi bu dalgalardan bahsetmiştir. Bu dalgaların en önemli özelliklerinden biri çarpışmaları ve çarpışmanın ardından şekillerini korumalarıdır. Bu özellikleri nedeniyle

Kruskal ve Zabusky (1965) bu dalgalara soliton adını vermiştir. Soliton kavramı dalgaların parçacık gibi hareket ettiklerini ima etmektedir.

Russell'ın gözlemlerinden yaklaşık 60 yıl sonra Hollandalı matematikçi Diederik Johannes Korteweg ve öğrencisi Gustav de Vries (1895) gözlemlenen olaya bir açıklama getirmek için bir model öne sürmüşlerdir. Literatürde KdV denklemi olarak bilinen bu model, günümüzde matematiksel fiziğin temel denklemlerinden biri olarak bilinmektedir. KdV denklemi çok farklı fiziksel sistemlerde ortaya çıktığından oldukça önemli bir nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklemdir.

Ters saçılma dönüşümü, lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntem, birçok lineer diferansiyel denklemin çözülmesini sağlayan Fourier dönüşümünün nonlinear bir benzeridir. Ters saçılma dönüşümü 1967 yılında Gardner, Greene, Kruskal ve Miura'dan oluşan bir ekip tarafından KdV denkleminin başlangıç-değer problemini çözmek için geliştirilmiştir (Gardner vd., 1967). Ters saçılma dönüşümü geliştirilmeden önce KdV denkleminin bilinen tek çözümleri soliter dalga çözümleri idi.

Ters saçılma dönüşümü bu tezde anlatılardan çok daha kapsamlı bir konudur. Bir boyutlu periyodik problemlerin bu metot ile çözülebilmesi ters saçılma dönüşümünün cebirsel geometri ve Riemann yüzeyleri ile ilişkisini göstermektedir. Ayrıca ters saçılma dönüşümü kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözülmesinde kullanılan Bäcklund dönüşümleri ile de bağlantılıdır.

Sadelik için, bu tez kapsamında kısmi türevli diferansiyel denklemleri (1+1) boyutta sınırlandıracağız. Buna göre, zamanı gösteren bir değişken ($t > 0$) ve $x \in \mathbb{R}$ olan bir değişken olacaktır.

Aşağıdaki iki tanım, tezin ilerleyen bölümlerinde sıkça karşımıza çıkacağı için oldukça önemlidir.

Tanım 1.1

Bilinmeyen bir $u(x,t)$ denklemi için,

$$u_t = K(u) \tag{1.1}$$

biçimindeki kısmi diferansiyel denklem evölüsyon denklemi olarak adlandırılır.

Bu denklemde $K(u)$ yalnızca u ve u 'nun x 'e bağılı değişkenlerini içeren bir ifadedir. Eğer bu ifade lineer değil ise (1.1) denklemi nonlinear evolüsyon denklemi olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.

$|x| \rightarrow \infty$ iken $\mathfrak{R}$ 'de tanımlı, sürekli bir $u(x,t)$ fonksiyonu ve x 'e bağılı türevleri sıfıra gidiyorsa u fonksiyonuna yeterince hızlı bir biçimde azalan fonksiyon denir.

2. KORTEWEG-DE VRIES (KdV) DENKLEMİ

2.1 Tarihsel Gelişimi

J. Scott-Russel'in, 1844'de bir kanalda ilerleyen bir dalga ile at sırtında yaptığı yarışı anlatan 'Dalgalar Üzerine Rapor'u Korteweg-de Vries (KdV) denklemi üzerine yapılan araştırmaların ve yayınlanan makalelerin girişinde yer almaktadır. J. Scott-Russel, 1834 yılında karşılaştığı olayı aşağıdaki gibi ifade etmiştir (Russell, 1844):

“Dar bir kanal boyunca iki at tarafından hızla çekilen bir kayığın hareketini gözlemliyordum. Kayık aniden durunca kanalda kayığın harekete geçirdiği su aynı şekilde durmadı. Aracın arkasında şiddetle tahrik edilmiş şekilde toplandı sonra aniden aracı arkada bırakarak büyük bir hızla ileri doğru yuvarlandı. Hareket eden şey yuvarlak düzgün ve iyi tanımlı bir su tümseği büyük bir soliter yükselti halini almıştı, kanal boyunca yolunu ve biçimini değiştirmeden ve hızını azaltmadan ilerliyordu, onu at sırtında olduğum halde izledim ve saatte 8-9 millik hızda ilerlemekte iken ona yetiştim. Boyu 30 ayak kadar ve yüksekliği bir buçuk ayak kadar olan ilk şeklini koruyordu. Yüksekliği yavaş yavaş azaldı ve bir ya da iki millik yarıştan sonra onu kanalın kıvrımları arasında kaybettim, işte bu tekil ve şahane güzel olayla ilk tanışmam 1834'ün Ağustos ayında böyle oldu. “

Hollandalı matematikçiler Diederik Johannes Korteweg ve öğrencisi Gustav de Vries 1895 yılında yayınlanan makalelerinde Scott Russel tarafından gözlemlenen olaya matematiksel bir açıklama getirmek için bir model öne sürdüler. Bu model, bugün KdV denklemi olarak bilinmektedir (Korteweg ve Vries, 1895).

Uzun yıllar boyunca KdV denklemi sakin bir hayat sürdü, ara sıra literatürde adı geçti, ara sıra unutuldu. Patlama 1960 yıllarında Gardner ve Morikawa'nın (1960) denklemi çarpışmasız hidromanyetik dalgaların incelenmesinde yeniden bir model olarak keşfettikleri zaman oldu, bu tarihten itibaren KdV denklemi çok çeşitli fiziksel olayları tasvir eden bir model denklem olarak çeşitli kalıplarda tekrar tekrar çıkarılıyor.

KdV denkleminin önemi, 1965 yılında Zabusky ve Kruskal'ın soliter dalgaların birbiriyle olan etkileşimlerini ve başlangıç durumlarını korumalarını araştırmasıyla ortaya çıktı. Zabusky ve Kruskal KdV denklemi üzerindeki nümerik araştırmaları sırasında; çarpıştıktan sonra hızlarını ve şekillerini koruyan partikül benzeri bir davranış gösteren dalgalar buldular. Bu dalgalara soliton adını verdiler (Zabusky ve Kruskal, 1965).

KdV denklemindeki gelişmelere karşın, o yıllarda lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için herhangi bir yöntem bulunmamaktaydı. Çözüm sadece nümerik yollarla yapılabilmekte idi. 1967 yılında Gardner, Greene, Kruskal ve Miura'dan oluşan bir ekip KdV denklemini çözmek için bugün literatürde ters saçılma dönüşümü olarak bilinen bir metot sundular. Ters saçılma dönüşümü, KdV denklemi ve diğer lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için geliştirilmiştir (Gardner vd., 1967).

Bugün KdV denkleminin matematiksel fiziğin temel denklemlerinden biri olarak bakılabilir ancak şöhreti sadece buna dayanmamaktadır. Aynı ölçüde önemli bir sebep de KdV denkleminin incelenmesinden çıkan matematik yöntem ve sonuçlardır. Bu yöntem ve sonuçlar, dalga yayılımının pratik sorunlarından cebirsel geometrideki daha saf konulara kadar uygulama alanları bulmuştur (Dubrovin vd., 1978).

Bugün meşhur olan bu denkleme adlarını veren şahısların kimler olduğu ve nasıl bir işbirliği yapmış oldukları da doğal olarak akla gelecek sorulardandır. Diederik Johannes Korteweg (31.3.1848 – 5.10.1941) Amsterdam Üniversitesi'nde tanınmış bir profesör ve birçok makalenin yazarıdır (Blij, 1978).

Gustav de Vries, Korteweg'in gözetiminde bir doktora tezi yazdı ve bunu 1 Aralık 1884 tarihinde Amsterdam Üniversitesi'nde sundu. Bu tez Felemenkçe idi ve dokuzuncu sayfasında bugün KdV denklemi olarak bilinen denklemi içermektedir. Öyle görülüyor ki Gustav de Vries bundan sonra kalan hayatının çoğunu bir öğretmen olarak geçirmiş (Demirel, 1984).

Şöhret ve popülerliğine rağmen KdV denkleminin bir kanaldaki (uzun) su dalgalarının davranışını temsil eden bir model denklem olarak rakipsiz kalmadığını da belirtelim. Bona ve Mahony (1972) bu konu ile ilgili başka bir model önermiştir (Kruskal, 1975).

KdV denklemi dar ve uzun su kanallarındaki sığ su dalgalarının modellenmesinde kullanılmaktadır. KdV denklemi ile temsil edilen olayları şöyle sıralamak mümkündür: Sığ su dalgaları, plazmalarda Ion-Acoustic dalgaları, elastik ortamlardaki boyuna dalgalar vs. (Gardner vd., 1967; Wadati vd., 1972; Dubrovin vd., 1976).

2.2 KdV Denkleminin Özellikleri

KdV denklemi, John Scott Russell'ın gözlemlerine karşılık bir model oluşturmak amacıyla, Diederik Johannes Korteweg ve Gustav de Vries tarafından 1895 yılında ortaya çıkarılmıştır. Bu orijinal hali ile denklem;

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right) \quad (2.1)$$

biçimindeydi. Burada, $\eta(x,t)$ su yüzeyinin denge seviyesinden yüksekliği, g yerçekimi ivmesi, α sıvının düzgün hareketi ile ilgili bir katsayı, h suyun derinliği, σ ;

$$\sigma = \frac{1}{3} h^3 - \frac{Th}{\rho g} \quad (2.2)$$

ile tanımlı ikinci bir sabit, T yüzey gerilimi, ρ ise yoğunluktur. Bu denklem üzerinde yapılan değişken dönüşümleri ile KdV denkleminin standart biçimleri elde edilir. Bu dönüşümlerden en çok kullanılan biçim,

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h\sigma}} \tau,$$

$$x = \frac{-\xi}{\sqrt{\sigma}},$$

$$u = \frac{1}{2} \eta + \frac{1}{3} \alpha$$

dönüşümleri ile elde edilir.

Yapılan düzenlemelerin ardından (2.1) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.3)$$

Literatürde, (2.3) denklemi KdV denklemi olarak bilinmektedir. KdV denklemi belki de en basit kısmi diferansiyel denklemdir. uu_x teriminin varlığı nedeniyle KdV denklemi lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir. Denklemdaki en yüksek dereceli terim olan u_{xxx} ise KdV denkleminin üçüncü dereceden bir diferansiyel denklem olduğunu göstermektedir.

Bu denklemde $u=u(x,t)$ iki değişkene bağlı bir fonksiyondur. KdV denklemi birçok fiziksel olayda ortaya çıkması nedeniyle oldukça önemli bir denklemdir. Denklemdaki terimlerin önündeki katsayıların önemi olmayıp gösterim kolaylığı için rastgele seçilebilir.

$u = au', x = bx', t = ct'$ dönüşümleri ile denklem aşağıdaki hali alır:

$$acu'_t + 6a^2bu'u'_{x'} + a^3b^3u'_{x'x'x'} = 0 \quad (2.4)$$

Uygun a,b ve c seçimleri ile gerçek katsayılar bulunabilir.

KdV denklemi ile ilgili olarak bilinmesi gereken bir diğer önemli konu ise KdV denkleminin Galile tipi invariant olmasıdır. Bu şu anlama gelmektedir; eğer $u(x,t)$ bir çözüm ise, herhangi bir $c \in \mathbb{R}$ için $u(x-6ct, t) + c$ de bir çözümdür. Böylece çözüm için bir parametre ailesi elde edilmiş olur.

Yardımcı Teorem 2.1

KdV denkleminin belli bir başlangıç değerinden elde edilecek yeterince hızlı bir şekilde azalan tek bir çözümü vardır.

İspat:

u ve v (2.3)'ün iki çözümü ve $w = u - v$ olsun. Değişiklikleri yerine koyarsak denklem aşağıdaki hale gelir.

$$w_t + 6uw_x + 6wv_x + w_{xxx} = 0$$

Denklemi w ile çarpar ve x 'e göre integral alınırsa, integrasyonun ardından w ve tüm türevlerinin sıfıra gideceği göz önüne alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 dx + 6 \int_{-\infty}^{+\infty} (v_x - \frac{1}{2} u_x) w^2 dx = 0$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 dx \quad \text{ve} \quad M = \sup |6v_x - 3u_x| < \infty \quad \text{alırsak} \quad E(t) \leq E(0)e^{Mt} \text{ olur.} \quad E(0)=0$$

olduğundan $E(t) \equiv 0$ ve böylece $w \equiv 0$ olur. Böylece her zaman için $u=v$ eşitliği elde edilmiş olur.

2.3 Soliton Çözümleri

1965 yılında Kruskal ve Zabusky tarafından yapılan nümerik deneyler iç içe giren iki soliter dalganın etkileşimin ardından şekil bakımından değişmemiş iki soliter dalga olarak çıktığını göstermiştir. Çarpışmalarda şekillerini korudukları ve etkileşimleri parçacık gibi olduğundan Kruskal ve Zabusky onlara ‘Soliton’ adını verdiler. Bu isim onların parçacık gibi hareket ettiklerini ima etmektedir (Zabusky ve Kruskal, 1965).

Nonlineer denklemlerin süperpozisyon ilkesine uymamalarından dolayı solitonlar gibi özel çözümlerin böyle önemli bir hale gelmesi beklenmemiştir. Solitonların ne olduğunun matematiksel bir tanımı yoktur, tanım genellikle özel bir problem kalıbında bir formül vasıtası ile yapılır (Miura, 1976).

Burada KdV denkleminin kalıcı tip denem $u(x,t) = f(x-ct)$ formunda sürekli dalga çözümleri olup olmadığını araştırıyoruz. Bunlara gezen veya ilerleyen dalgalar da deniyor. Bu dalgalar, hareket eden özel bir koordinat sisteminden bakıldığında şeklini değiştirmeyen dalgalardır. (2.3) denkleminde $u(x,t)$ yerine $f(x-ct)$ konulursa;

$$f''' + 6ff' - cf' = 0$$

lineer olmayan diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemde bir kez integral alınır ise

$$f'' + 3f^2 - cf = m$$

denklemi elde edilir. Burada m keyfi bir sabittir. Bu denklemi de önce f' ile çarpar ve ardından bir kere daha integral alınır ise

$$\frac{1}{2}(f')^2 + f^3 - \frac{c}{2}f^2 - 2mf = n$$

denklemi elde edilir.

Bu denklemde, n integrasyondan elde edilen diğer bir keyfi sabittir. Bu eşitlik, eliptik integrallerin kesin çözümü için kullanılabilir fakat biz yalnızca $f(x)$ 'in yeterince hızlı bir biçimde azalarak m ve n sabitlerini sıfıra götüren çözümleri ele alacağız. Bu çözümlere ‘soliter dalgalar’ adı verilecektir. Böylece diferansiyel denklem f için doğrudan integrallenebilir ve sonuç aşağıdaki gibi olur:

$$u(x,t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct - x_0) \right) \quad (2.5)$$

Bu aşamada aşağıdaki iki gözlem oldukça önemlidir:

- i) Soliter dalga çözümü sadece $c > 0$ dalga hızı için mevcuttur, böylece KdV denkleminin her soliter dalga çözümü sağa doğru hareket eder.
- ii) Soliter dalganın yayılma hızı dalganın genliği ile orantılıdır, bu yüzden büyük soliter dalga küçük olandan daha hızlı yayılır (Demirel, 1984).

2.4 Miura Dönüşümü ve Modifiye Edilmiş KdV Denklemi (mKdV)

Miura'nın 1968 yılında bulduğu dönüşüm KdV denklemi ve ters saçılma dönüşümünün gelişimi açısından oldukça önemlidir. Miura bu dönüşümü, bir sonraki bölümde anlatılacak olan korunum kanunları üzerinde çalışırken bulmuştur (Miura, 1968).

Bugün Miura dönüşümü olarak bilinen ve kısaca mKdV olarak gösterilen modifiye edilmiş KdV denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0 \quad (2.6)$$

Miura'nın KdV ve mKdV denklemlerinin çözümü ile ilgili yaratıcı dönüşümü ters saçılma dönüşümüne ilham vermiştir. Literatürde Miura dönüşümü olan bu dönüşüme göre, eğer v (2.6)'da gösterilen mKdV denkleminin bir çözümü ise $u = -(v^2 + v_x)$ (2.3)'de gösterilen KdV denkleminin bir çözümüdür.

Eğer $u = -(v^2 + v_x)$ olarak alırsak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = -(2v + \partial_x)(v_t - 6v^2v_x + v_{xxx})$$

Bu denklemde $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ 'dir. Miura dönüşümü ile mKdV denkleminin $v(x,t)$ çözümü, KdV denklemi için $u(x,t)$ çözümünü meydana getirmektedir. Böylece, lineer olmayan KdV denkleminin çözümleri nonlineer bir denklemin çözümleri tarafından doğrulanmaktadır. Miura dönüşümünün tek yönlü işlediğini de belirtmekte fayda var. mKdV denkleminin her bir çözümü Miura dönüşümü ile KdV denkleminin bir çözümü ile eşlenir fakat KdV denkleminin her çözümü mKdV denklemi tarafından elde edilemez (Ablowitz ve Clarkson, 1991).

2.5 Korunum Kanunları

KdV denkleminin en önemli özelliklerinden birisi, sonsuz sayıda korunum kanununa sahip olmasıdır. Sonsuz sayıdaki korunum kanununun varlığı, KdV denkleminin özel bir denklem olduğunun farklı bir göstergesidir.

Tanım 2.1.

$$\Delta(x, t, u(x, t)) = 0 \quad (2.7)$$

şeklindeki 1 + 1 boyutlu bir kısmi diferansiyel denklem ile ilgili bir korunum kanunu,

$$D_t T_i + D_x X_i = 0 \quad (2.8)$$

formunda olan ve (2.7) denkleminin her çözümü için sağlanan bir denklemdir.

(2.8) denkleminde $T_i(x, t)$ ve $X_i(x, t)$ t, x, u ve u 'nun kısmi türevlerinden oluşan fonksiyonlardır. Bu denklemde T 'ye korunmuş yoğunluk ve X 'e de akış adı verilir. D_t t 'ye göre, D_x ise x 'e göre toplam türevi göstermektedir. Sınırlı bir korunum kanunu yalnızca u ve onun türevlerine bağlı olup x ve t 'ye bağlı değildir. Bu tipteki korunum kanunları için (2.8) denkleminde integral alınırsa;

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} T_i(x, t) dx = 0$$

olur. Böylece,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_i(x, t) dx = c_i$$

olduğu görülebilir. Burada c_i sabittir.

Not: Korunum kanunlarından oluşmayan hareket sabitlerinin olması mümkündür.

Tarihsel açıdan bakıldığında, Korteweg ve de Vries (2.1) denklemini korunum biçiminde göstermek için seçmişlerdir. Yakın geçmişte, korunum kanunları ön kestirimler çıkarmak ve hareketin integralini elde etmek için kullanılmıştır.

KdV denklemini için ilk üç korunum kanunu (2.3) denklemini incelenerek kolaylıkla görülebilir:

$$(u)_t + (3u^2 + u_{xx})_x = 0$$

$$(u^2)_t + (4u^3 + 2uu_{xx} - u_x^2)_x = 0$$

$$(u^3 - \frac{1}{2}u_x^2)_t + (\frac{9}{2}u^4 + 3u^2u_{xx} - 6uu_x^2 - u_xu_{xxx} + \frac{1}{2}u_{xx}^2)_x = 0$$

Birinci korunum kanunu, KdV denklemini korunum denklemi şeklinde yeniden ifade etmek için oluşturulmuştur. İkinci korunum kanunu, KdV denklemini önce $2u$ ile çarpıp, korunum denklemi şeklinde yeniden yazılması şeklinde elde edilmiştir. Üçüncü korunum kanunu ise, KdV denkleminin önce $3u^2 - u_{xx}$ ile çarpılıp ardından da türevle gerekli düzenlemeler yapılarak elde edilmiştir.

İlk iki korunum kanunu momentum ve enerjinin korunumu ile ilgilidir. Daha az öneme sahip olan üçüncü korunum kanunu ise Whitham (1965) tarafından bulunmuştur. KdV denkleminin dördüncü ve beşinci korunum kanunları Kruskal ve Zabusky (1963) tarafından bulunmuştur. Ardından KdV denklemi ile ilgili dört korunum kanunu daha bulunmuştur.

KdV denklemi ile ilgili korunum kanunlarındaki korunmuş yoğunluklar, bazı fiziksel sistemler için kütle, momentum ve enerji olarak yorumlanabilir. Buradaki ilk üçünün ötesindeki korunmuş yoğunluklar için herhangi bir fiziki yoruma sahip olmadığı görülmektedir.

KdV denklemi için bulunan korunum kanunlarının ardından 1966 yazında, sadece dokuz adet polinom korunum kanunu olduğuna dair söylentiler vardı. Miura KdV denklemi ve diğer kısmi türevli diferansiyel denklemler ile ilgili korunum kanunları üzerinde çalışırken Bölüm 2.4'de açıklanan Miura dönüşümünü bulmuştur. Miura dönüşümünün birçok önemli sonucu olmakla birlikte en önemli olanı, KdV ve mKdV denklemlerinin sonsuz sayıda korunum kanununa sahip olduğunu göstermiş olmasıdır. Miura'nın buluşu KdV denkleminin başlangıç değer probleminin çözümü için ters saçılma dönüşümünün geliştirilmesini sağlamıştır.

Şimdi, KdV denkleminin korunum kanunları için sonsuz dizi oluşumunu sağlayan ve 1968 yılında Miura, Gardner ve Kruskal tarafından bulunmuş olan bir yöntemden bahsedeceğiz (Miura vd., 1968).

$$u = w - \varepsilon w_x - \varepsilon^2 w^2 \tag{2.9}$$

olarak belirlensin. Bu, Miura dönüşümünün genelleştirilmesinden başka bir şey değildir.

Bu dönüşüm denklemde yerine konulursa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = (1 - \varepsilon \partial_x - 2\varepsilon^2 w)(w_t + 6(w - \varepsilon^2 w^2)w_x + w_{xxx})$$

Bu denklemde $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ 'dir. Böylece, KdV denkleminin çözümleri ile yukarıda bulunan diferansiyel denklemin sağ tarafındaki w çözümlerini eşleyebiliriz. w, yukarıdaki denklemin sağ tarafında verilen kısmi diferansiyel denklemin bir çözümü olsun. Bu halde korunum kanununu aşağıdaki biçimde ifade edebiliriz:

$$w_t + 6(w - \varepsilon^2 w^2)w_x + w_{xxx} = 0 \quad (2.10)$$

KdV denkleminde ε bulunmadığından KdV denkleminin çözümü olan u sadece x ve t'ye bağlıdır, buna karşın (2.10) denkleminin w çözümü x,t ve ε 'a bağlıdır. Bu sebeple;

$$w(x,t;\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x,t)\varepsilon^n \quad (2.11)$$

biçiminde bir formal kuvvet serisi bulmalıyız. (2.10) denklemini korunum kanunu formunda olduğu için aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x,t;\varepsilon) dx = \text{sabit},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w_n(x,t) dx = \text{sabit}$$

Her $n=0,1,2,\dots$ değeri için (2.11) denklemini (2.9) denkleminde yerine koyar ve ε katsayılarını eşitlersek aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$w_0 = u, \quad (2.12.a)$$

$$w_1 = w_{0,x} = u_x, \quad (2.12.b)$$

$$w_2 = w_{1,x} + w_0^2 = u_{xx} + u^2, \quad (2.12.c)$$

$$w_3 = w_{2,x} + 2w_0 w_1 = u_{xxx} + 4uu_x, \quad (2.12.d)$$

$$w_4 = w_{3,x} + 2w_0 w_2 + w_1^2 = u_{xxxx} + 6uu_{xx} + 5u_x^2 + 2u^3, \quad (2.12.e)$$

Bu şekilde KdV denklemi için sonsuz korunum kanunu elde edilmiş olunur. $\mathcal{E}$ 'un her bir kuvvetinin katsayıları KdV denklemi için birer korunum kanunudur. Bu denklemlere karşılık gelen korunum kanunu (2.12) denklemlerini (2.10) denkleminde yerine koyarak elde edilebilir.

3. TERS SAÇILMA DÖNÜŞÜMÜ

3.1 Tarihsel Gelişimi

Ters saçılma dönüşümü, lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntem, birçok lineer diferansiyel denklemin çözülmesini sağlayan Fourier dönüşümünün nonlinear bir benzeridir.

Bu bölümde ters saçılma dönüşümünün tarihsel gelişimi, nasıl ve kimler tarafından geliştirildiği ve hangi tipteki denklemlere uygulanabileceği anlatılacaktır. Ayrıca bu bölümde, KdV denkleminin çözümünün taslağı açıklanacaktır.

Ters saçılma dönüşümünün ortaya çıkış sürecinde ilk olarak Bölüm 2.4’de açıkladığımız Miura dönüşümü etkili olmuştur. Miura bulduğu yaratıcı dönüşüm ile ters saçılma dönüşümüne ilham vermiştir. Ardından Gardner, Greene, Kruskal ve Miura’dan oluşan ekip Miura dönüşümünden esinlenerek, KdV denklemi ile zamandan bağımsız Schrödinger denklemini ilişkilendirecek bir metot geliştirmişlerdir. Bu metot ters saçılma metodu olarak bilinmektedir (Gardner vd., 1967,1974).

Peter Lax, ters saçılma metodunu daha genel bir çalışma haline getirmiş ve ters saçılma metodu yardımı ile çözülebilen denklemler oluşturulmasını sağlayan genel bir ilke sunmuştur (Lax, 1968).

Ablowitz, Kaup, Newell ve Segur ters saçılma metodunu bugün bilinen son şekline getirmişlerdir. Lineer evolüsyon denklemlerinin başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanılan Fourier dönüşümü ile nonlinear evolüsyon denklemlerinin çözümünde kullanılan ters saçılma metodu arasındaki benzerlik nedeniyle ters saçılma tekniğini Ters Saçılma Dönüşümü olarak adlandırmışlardır (Ablowitz vd., 1973).

3.2 Ters Saçılma Metodu

1967 yılında Gardner, Greene, Kruskal ve Miura'dan oluşan ekip, KdV denklemi başlangıç değer probleminin kesin çözümü için bir yöntem geliştirdi (Gardner vd., 1967,1974). Bu çalışma yapılan kadar KdV denkleminin bilinen tek çözümleri soliter dalga çözümleri idi. Yapılan çalışmada hedef;

$$u(x,0)=f(x)$$

başlangıç koşulu altında, (x,t) : $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ için (2.3)'de gösterilen KdV denklemini çözmektir. Yine, yalnızca yeteri kadar hızlı bir şekilde azalan başlangıç değerlerinin göz önüne alındığını belirtelim. Yani, $|x| \rightarrow \infty$ iken $f(x)$ yeterince hızlı bir şekilde azalan fonksiyondur. KdV denkleminin çözümü için temel fikir, denklemi zamandan bağımsız Schrödinger saçılma problemi ile ilişkilendirmektir. Bu denklem;

$$Lv = v_{xx} + u(x,t)v = \lambda v \quad (3.2)$$

formundadır. Bu denklemleri ilişkilendirmek için Bölüm 2.4'de açıklanan Miura dönüşümünden yola çıkılmıştır. Miura dönüşümü KdV denklemi ile mKdV denkleminin çözümlerini ilişkilendiren bir dönüşüm idi.

Eğer $U(x,t)$

$$U_t - 6U^2U_x + U_{xxx} = 0 \quad (3.3)$$

mKdV denkleminin bir çözümü ise,

$$u = -(U^2 + U_x) \quad (3.4)$$

(2.3)'de gösterilen KdV denkleminin bir çözümüdür.

(3.4) denklemi Ricatti tipi diferansiyel denklem olup bunu lineerleştirmek için çok iyi bir yöntem vardır. Bu yöntemle göre, $U = \frac{v_x}{v}$ dönüşümü yapılırsa,

$$v_{xx} + uv = 0 \quad (3.5)$$

eşitliği elde edilir. KdV denklemi Galile tipi invaryant olduğu için

$$(x, t, u(x, t)) \rightarrow (x - ct, t, u(x, t) + \frac{1}{6}c)$$

dönüşümü altında da invaryanttır. Bu dönüşümde c sabit olup dönüşümün ardından (3.2) denklemi yerine (3.5) denklemi göz önüne alınabilir. (3.5) denkleminde t parametre olup $u(x, t)$ ise potansiyeldir. (3.2) denkleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları, $u(x, t)$ potansiyeline göre $S(\lambda, t)$ saçılma verisini oluşturmaktadır. Burada saçılma problemi, $u(x, t)$ potansiyelini saçılma verisi ile ilişkilendirmektir. Ters saçılma problemi ise, $u(x, t)$ potansiyelini saçılma verisinden yeniden oluşturmaktır.

(3.2) denkleminin zaman değişimi,

$$v_t = (\gamma + u_x)v - (4\lambda + 2u)v_x \quad (3.6)$$

ile gösterilebilir Burada λ keyfi bir sabittir. $\lambda_t = 0$ varsayımı ile (3.2) ve (3.6) denklemlerinden aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$v_{txx} = [(\gamma + u_x)(\lambda - u) + u_{xxx} + 6uu_x]v - (4\lambda + 2u)(\lambda - u)v_x \quad (3.7a)$$

$$v_{xxt} = [(\lambda - u)(\gamma + u_x) - u_t]v - (\lambda - u)(4\lambda + 2u)v_x \quad (3.7b)$$

Bu denklemlerden görülebileceği gibi, (3.2) ve (3.6) denklemleri ancak ve ancak $u(x, t)$ KdV denkleminin bir çözümü ise uyumludur (örneğin $v_{txx} = v_{xxt}$). Benzer şekilde, eğer KdV denklemini sağlanıyorsa, özdeğerler zamandan bağımsız ($\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0$) olmak zorundadır (Ablowitz ve Clarkson, 1991).

KdV denkleminin çözüm aşamaları aşağıdaki gibidir:

1. Saçılma problemi: $t=0$ anında, verilen $u(x, 0)$ değeri için saçılma problemini çözeriz. (3.2) Schrödinger denkleminin spektrumu sonlu sayıda ayrık özdeğerden oluşmaktadır, $\lambda > 0$ için $\lambda = \kappa_n^2$, $n=1, 2, \dots, N$, ve $\lambda < 0$ için $\lambda = -k^2$ Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar hesaplanabilir ve bunların asimptotik davranışları aşağıdaki gibidir:

$$0 < \lambda = \kappa_n^2 \text{ için,}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_n^2 dx = 1, \quad (3.8a)$$

ile

$$x \rightarrow \infty \text{ iken, } v_n(x, t) \sim c_n(t) \exp(-\kappa_n x) \quad (3.8b)$$

ve $0 > \lambda = -k^2$ için,

$$x \rightarrow \infty \text{ iken, } v(x, t) \sim e^{-ikx} + r(k, t)e^{ikx}, \quad (3.9a)$$

$$x \rightarrow -\infty \text{ iken, } v(x, t) \sim a(k, t)e^{-ikx} \quad (3.9b)$$

Bu denklemlerde $r(k, t)$ ve $a(k, t)$ yansıma ve iletim katsayıları olarak bilinirler.

Böylece, $t=0$ anında saçılma verisi aşağıdaki gibi elde edilir;

$$S(\lambda, 0) = \left\{ (\kappa_n, c_n(0))_{n=1}^N, r(k, 0), a(k, 0) \right\}$$

2. Zaman değişimi: (3.6) denkleminde saçılma verisinin zaman değişimini belirleyebiliriz.

Bu, aşağıdaki gibi gösterilebilir;

$$\kappa_n = \text{sabit, } n=1, 2, \dots, N \quad (3.10a)$$

$$c_n(t) = c_n(0) \exp(4\kappa_n^3 t), \quad n=1, 2, \dots, N \quad (3.10b)$$

$$a(k, t) = a(k, 0), \quad (3.10c)$$

$$r(k, t) = r(k, 0) \exp(8ik^3 t), \quad (3.10d)$$

Böylece, t anında saçılma verisi aşağıdaki gibi elde edilir;

$$S(\lambda, t) = \left\{ (\kappa_n, c_n(t))_{n=1}^N, r(k, t), a(k, t) \right\}$$

3. Ters saçılma problemi: $t=0$ anındaki saçılma verisi bilinirse bunun zaman değişimini belirlemek mümkündür. $u(x, 0)$ başlangıç koşulu $S(0)$ 'ı verir ve $t > 0$ için bütün $S(t)$ değerlerini bulabiliriz. Böylece, KdV denkleminin başlangıç değer problemini çözmemiz için yapılması gereken, (3.2) denklemindeki $u(x, t)$ potansiyelini elde etmek için $S(t)$ saçılma verisini ters çevirmektir. Burada bilinmesi gereken, Schrödinger denkleminde t değişkenin sadece bir parametre olup, saçılma verisinin KdV denkleminde t 'ye göre değiştiğidir. $S(t)$ saçılma verisinden $u(x, t)$ potansiyelinin bulunması, Schrödinger denklemi için ters saçılma problemi olarak adlandırılır. Bu, Gel'fand-Levitan-Marchenko olarak bilinen bir lineer diferansiyel denklem içerir (Ablowitz ve Clarkson, 1991).

Ters saçılma dönüşümü için kullanacağımız metot: KdV denkleminin u çözümü ile, başlangıç saçılma verisi ve zaman değişimini belirleyebileceğimiz Schrödinger denkleminin potansiyelini eşleriz. Ardından, Schrödinger denkleminin saçılma verilerini veren $u(x, t)$ potansiyelini bulmak için aynı işlemi tersine yaparız.

Metodun işe yaramasının temel sebebi, saçılma verisinin zaman değişiminin kolaylıkla belirlenebilmesidir. Bunun gerçekleşme sebebi, u sıfıra yaklaşırken saçılma verisinin $|x| \rightarrow \infty$ olarak tanımlanmasıdır. Böylelikle problem, saçılma verisinin zaman değişimi için lineer adi diferansiyel denklemin ve t 'nin yalnızca parametre olduğu lineer integral denkleminin çözülmesi problemine indirgenmiş olur. Sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir. Öncelikle, (3.10) denklemlerinde gösterilen saçılma verisi kullanılarak,

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n^2(t) \exp(-\kappa_n x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r(k, t) e^{ikx} dk \quad (3.11)$$

denklemini elde edilir. Ardından,

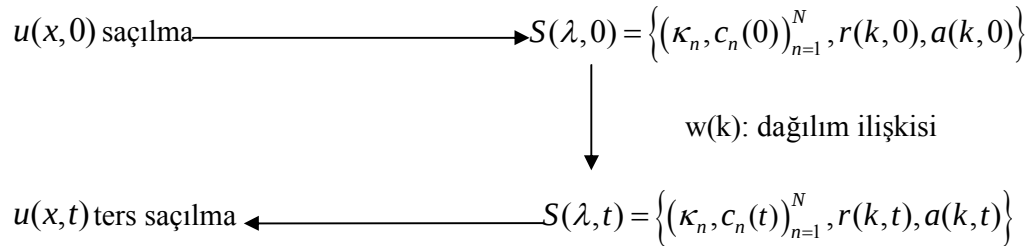
$$K(x, y; t) + F(x, y; t) + \int_x^{+\infty} K(x, z; t) F(z + y; t) dz = 0 \quad (3.12)$$

denklemini çözülür. Bu denklem Gel'fand-Levitan-Marchenko tipi diferansiyel denklem olarak bilinir. Son olarak ise

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial}{\partial x} [K(x, x; t)] \quad (3.13)$$

eşitliği yardımı ile $u(x, t)$ potansiyeli belirlenir.

Bu metot birçok açıdan lineer diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan Fourier dönüşümüne benzemektedir. Ters saçılma dönüşümü şematik olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir;



3.3 Lax Genelleştirilmesi

Gardner, Greene, Kruskal ve Miura'nın KdV denklemi için başlangıç değer probleminin ters saçılma dönüşümü ile çözülebileceğini göstermelerinin ardından Peter Lax, ters saçılma metodu yardımı ile çözülebilen integrallenebilir nonlinear evolüsyon denklemleri oluşmasını sağlayan bir yöntem geliştirdi. Lax, KdV denklemi ve Schrödinger operatöründe olduğu gibi, nonlinear evolüsyon denklemlerinin lineer operatörler ile ilişkilendirilmesini ve böylece lineer operatörlerin özdeğerlerinin nonlinear denklemin hareket sabitleri olmasını sağlayan genel bir ilke sundu (Lax, 1968).

L ve M ile gösterilen iki operatörü göz önüne alalım. L spektral problemin operatörü ve M ise,

$$Lv = \lambda v \quad (3.13a)$$

$$v_t = Mv \quad (3.13b)$$

denklemlerindeki özfonksiyonların zaman değişimini belirleyen operatör olsun. (3.13a)

denkleminde kısmi türev $(\frac{\partial}{\partial t})$ uygulanırsa,

$$L_t v + L v_t = \lambda_t v + \lambda v_t$$

eşitliği elde edilir. (3.13b) denklemi de kullanılarak,

$$\begin{aligned} L_t v + L M v &= \lambda_t v + \lambda M v \\ &= \lambda_t v + M \lambda v \\ &= \lambda_t v + M L v \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikler düzenlenirse,

$$L_t + [L, M] = 0 \quad (3.14)$$

elde edilir. Bu denklemde, $[L, M] = LM - ML$ olarak belirlenmiştir.

$v(x, t)$ özfonksiyonlarının çözümü ancak ve ancak $\lambda_t = 0$ olması durumunda mevcuttur. (3.14)

denklemi Lax denklemi olarak bilinir ve uygun L ve M seçimleri için nonlinear evolüsyon denklemi içerir. Örneğin,

$$L := \frac{\partial^2}{\partial x^2 + u}, \quad (3.15a)$$

$$M := (\gamma + u_x) - (4\lambda + 2u) \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.15b)$$

olarak belirlenirse L ve M (3.14) denklemini, u ise $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$ KdV denklemini sağlar.

Bu sebeple, KdV denklemi (3.15) denklemlerindeki gibi belirlenen iki lineer operatör için uygunluk koşulu olarak düşünülebilir. Eğer nonlinear kısmi bir diferansiyel denklem, L ve M gibi iki operatör için uygunluk koşulu olarak oluşuyorsa, (3.14) denkleminde kısmi diferansiyel denklemin Lax gösterimi, L ve M operatörlerine ise Lax çifti adı verilir. Bu yaklaşımın en önemli sorunu, verilen bir kısmi diferansiyel denklemin Lax gösterimine sahip olup olmadığını anlamak için sistematik bir yöntem olmaması ve eğer var ise denklem ile ilişkili L ve M operatörlerinin nasıl belirleneceğidir (Lax, 1968).

3.4 Nonlinear Schrödinger Denklemi

Gardner, Greene, Kruskal ve Miura'nın ters saçılma metodu ile KdV denklemi için başlangıç değer probleminin çözülebileceğini göstermelerinin ardından akla gelen ilk düşünce, ters saçılma metodunun fiziksel anlamda önemli diğer nonlinear evolüsyon denklemlerine uygulanabilip uygulanamayacağı idi (Gardner vd., 1967, 1974).

1972 yılında, Zakharov ve Shabat aşağıdaki nonlinear Schrödinger denklemi üzerinde çalıştılar (Zakharov ve Shabat, 1972):

$$iu_t + u_{xx} + \kappa u^2 u^* = 0 \quad (3.16)$$

Denklemde * karmaşık eşleniği göstermekte olup, κ ise lineer saçılma problemine ait bir sabittir. Bu denklem, düzlemsel monokromatik bir dalga'nın enine kararsızlığını tanımlar. Lineer Schrödinger denkleminin farklı olarak, soliton çözümü vardır ve bu sebeple de bir dalga grubu kavramına sahiptir. Denklem, dalga grubunu parçalama eğilimli lineer dispersiyon ile dalga'nın kendi kendine etkileşiminden oluşan odaklama etkisi arasındaki bir dengeyi gösterir.

Zakharov ve Shabat (1972) bu denklem için bir Lax çifti buldu ve bunun ters saçılma dönüşümü ile kolaylıkla çözülebileceğini gösterdi. Bu buluş, ters saçılma metodu ile çözülebilen ikinci nonlinear evolüsyon denklemi olması nedeniyle oldukça önemlidir.

Not: Görülebileceği gibi, lineer ve nonlinear Schrödinger denklemleri arasında bir bağlantı yoktur. İlki, nonlinear KdV evolüsyon denklemi ile ilişkili lineer özdeğer problemi olup ikincisi ise farklı bir lineer özdeğer problemi ile ilişkili, ters saçılma ile çözülebilen bir nonlinear evolüsyon denklemdir.

Zakharov ve Shabat aslında NLS denkleminin daha genel bir versiyonunu göz önüne aldılar. Buldukları Lax çifti aşağıdaki 2×2 'lik matrislerden oluşan diferansiyel operatörlerden meydana gelmektedir:

$$L = i \begin{pmatrix} 1+k & 0 \\ 0 & 1-k \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17a)$$

$$M = ik \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} \frac{-iuu^*}{1+k} & u_x^* \\ -u_x & -\frac{iuu^*}{1-k} \end{pmatrix} \quad (3.17b)$$

Bu tercihlerin yanı sıra $\kappa = \frac{2}{1-k^2}$ olarak belirlenirse,

$$L_t + [L, M] = 0 \quad (3.18)$$

eşitliği elde edilir. Lax denkleminin sağlanması için gerek ve yeter koşul $u(x,t)$ fonksiyonunun (3.16) nonlinear Schrödinger denklemini sağlamasıdır. Zakharov ve Shabat (3.17)'daki L ve M seçimleri ile, $u(x,0)=f(x)$ başlangıç koşulu altında (3.16) Schrödinger denklemini çözmeyi başardılar.

3.5 Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) Metodu

Bu bölümde, Ablowitz, Kaup, Newell ve Segur tarafından bulunan bir metot anlatılacaktır. Bu metot, ters saçılma dönüşümü ile çözülebilen kısmi diferansiyel denklemler oluşturmak için kullanılan metotlardan biridir. Genel olarak, ters saçılma verisi özel bir özdeğer problemine dönüştürülebilirse ilgili evolüsyon denkleminin çözülebildiği söylenebilir (Ablowitz vd., 1973, 1974).

Zakharov ve Shabat'ın (1972) nonlinear Schrödinger denklemi üzerine yaptıkları çalışmaların hemen ardından, Wadati 1972 yılında Modifiye KdV denklemi üzerine çalışmalar yaptı ve bu denklemin çözüm metodunu sundu. 1973 yılında ise, Ablowitz, Kaup, Newell ve Segur'dan (1973) oluşan ekip Zakharov ve Shabat'ın ters saçılma metodundan yola çıkarak bu dönüşümü

$$u_{xt} = \sin(u) \quad (3.19)$$

Sine-Gordon denkleminde uygulayarak bu denklemi çözmüşlerdir.

1973-1974 yılları arasında, Ablowitz, Kaup, Newell ve Segur ters saçılma metodu ile hangi önemli fiziksel denklemlerin başlangıç değer problemlerinin çözülebileceğini gösteren bir yöntem sunmuşlardır. Lineer evolüsyon denklemlerinin başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanılan Fourier dönüşümü ile nonlinear evolüsyon denklemlerinin çözümünde kullanılan ters saçılma metodu arasındaki benzerlik nedeniyle ters saçılma tekniğini Ters Saçılma Dönüşümü olarak adlandırmışlardır (Ablowitz vd., 1973, 1974).

Aşağıdaki iki lineer denklemi göz önüne alalım:

$$v_x = Xv \quad (3.20a)$$

$$v_t = Tv \quad (3.20b)$$

Bu denklemlerde, v n -boyutlu bir vektör, X ve T ise $n \times n$ boyutlu matrislerdir. Bu denklemlerin uyumlu olmaları için $v_{xt} = v_{tx}$ olmalıdır. Eğer bu eşitlik sağlanıyor ise X ve T matrisleri için;

$$X_t - T_x + [X, T] = 0 \quad (3.21)$$

eşitliği sağlanmalıdır. (3.21) denklemleri ile (3.14) Lax denklemleri benzer olmakla birlikte, (3.20)

denklemleri $Lv = \lambda v$ eşitliğinin daha genel bir halidir.

Örnek olarak,

$$v_{1,x} = -ikv_1 + q(x,t)v_2 \quad (3.22a)$$

$$v_{2,x} = ikv_2 + r(x,t)v_1 \quad (3.22b)$$

denklemleri ile verilen saçılma problemi [(1.9.2a) denkleminin daha genel bir hali] ile

$$v_{1,t} = Av_1 + Bv_2 \quad (3.23a)$$

$$v_{2,t} = Cv_1 + Dv_2 \quad (3.23b)$$

denklemleri ile verilen en genel zaman bağımlılığını göz önüne alalım. Bu denklemlerdeki A, B, C ve D $q(x,t)$, $r(x,t)$ ve k değişkenlerine bağlı skaler fonksiyonlar olup (v_1, v_2) 'den bağımsızdırlar. Öncelikle, (3.20) denklemlerinde

$$X = \begin{pmatrix} -ik & q \\ r & ik \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

olarak belirlenir. Eğer, (3.23) denklemlerinin sağ tarafında x değişkenine bağlı türev var ise (3.22) denklemleri kullanılarak bunlar sadeleştirilebilir.

Ayrıca, $r=-1$ ise, (3.22) denklemleri,

$$v_{2,xx} + (k^2 + q)v_2 \quad (3.24)$$

şekline dönüşür. (3.24) denkleminde $k^2 = -\lambda$ olarak seçilirse bu denklem (3.2)'de gösterilen Schrödinger saçılma problemine eş hale gelir. Ablowitz-Kaup-Newell-Segur metodunda $r=-1$ veya $r = -q^*$ seçimleri ile, fiziksel olarak çok önemli nonlinear evolüsyon denklemlerinin elde edilmesi oldukça ilginçtir.

AKNS metodu, (3.21) denklem formatı ile açıklanabilen nonlinear evolüsyon denklemleri bulunmasını sağlamaktadır. (3.21) ve (3.22) denklemlerinin uygunluk koşulu, $j=1,2$ için

$$v_{j,xt} = v_{j,tx}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu eşitliği ve k özdeğerinin zamandan bağımsız ($\frac{dk}{dt} = 0$) olduğu göz önüne alınırsa A , B , C ve D 'nin sağlaması gereken koşullar ortaya çıkar. Böylece,

$$\begin{aligned} v_{1,xt} &= -ikv_{1,t} + q_tv_2 + qv_{2,t} \\ &= -ik(Av_1 + Bv_2) + q_tv_2 + q(Cv_1 + Dv_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{1,tx} &= A_xv_1 + Av_{1,x} + B_xv_2 + Bv_{2,x} \\ &= A_xv_1 + A(-ikv_1 + qv_2) + B_xv_2 + B(ikv_2 + rv_1) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. v_1 ve v_2 katsayıları eşitlenirse,

$$A_x = qC - rB \quad (3.25a)$$

$$B_x + 2ikB = q_t - (A - D)q \quad (3.25b)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} v_{2,xt} &= ikv_{2,t} + r_tv_1 + rv_{1,t} \\ &= ik(Cv_1 + Dv_2) + r_tv_1 + r(Av_1 + Bv_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{2,tx} &= C_xv_1 + Cv_{1,x} + D_xv_2 + Dv_{2,x} \\ &= C_xv_1 + C(-ikv_1 + qv_2) + D_xv_2 + D(ikv_2 + rv_1) \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Yine katsayılar eşitlenirse,

$$C_x - 2ikC = r_t + (A - D)r \quad (3.26a)$$

$$(-D)_x = qC - rB \quad (3.26b)$$

koşulları elde edilir. (3.25a) ve (3.26b) koşullarından $D = -A$ olarak kabul edebiliriz. Böylece, A , B ve C 'nin sağlaması gereken uygunluk koşullarını aşağıdaki gibi belirleyebiliriz:

$$A_x = qC - rB \quad (3.27a)$$

$$B_x + 2ikB = q_t - 2Aq \quad (3.27b)$$

$$C_x - 2ikC = r_t + 2Ar \quad (3.27c)$$

Bu koşulların bulunmasından sonra, (3.22) ve (3.23) denklem sistemlerini uyumlu hale getiren A, B ve C'yi bulabiliriz. Genel olarak, bunları bulmak için r veya q üzerinde başka bir koşul belirlenmesi gereklidir. k özdeğeri bağımsız bir parametre olduğundan dolayı, A, B ve C'yi sonlu kuvvet serilerine açarak çözülebilir evolüsyon denklemleri elde edebiliriz.

$$A = \sum_{j=0}^n A_j k^j, B = \sum_{j=0}^n B_j k^j, C = \sum_{j=0}^n C_j k^j \quad (3.28)$$

(3.28) eşitliklerini (3.27) denklemlerinde yerine koyar ve k katsayıları eşitlenirse, $3n+5$ denklem elde edilir. $3n+3$ bilinmeyen $(A_j, B_j, C_j, j = 0, 1, \dots, n)$ olduğu için bilinmeyenlere ilave olarak, r ve q için iki tane evolüsyon denklemi elde edilir (Ablowitz ve Clarkson, 1991).

3.6 Ters Saçılma Dönüşümü ile İlgili Uygulamalar

ÖRNEK 3.1 n=2

A, B ve C aşağıdaki gibi ikinci dereceden polinomlar olsun.

$$A = A_2 k^2 + A_1 k^1 A_0 \quad (3.29a)$$

$$B = B_2 k^2 + B_1 k^1 B_0 \quad (3.29b)$$

$$C = C_2 k^2 + C_1 k^1 C_0 \quad (3.29c)$$

(3.29) denklemlerini (3.27)'da yerine koyar ve ardından k değişkeninin katsayılarını eşitleriz.

k^3 katsayıları eşitlenirse, $B_2 = C_2$ elde edilir.

k^2 katsayıları eşitlenirse, $A_2 = a$, sabit, $B_1 = iaq$, $C_1 = iar$, elde edilir.

k^1 katsayıları eşitlenirse, $A_1 = b$, sabit, sadelik için $b=0$ (b sıfırdan farklı ise daha genel evolüsyon denklemi elde edilir) seçilirse, $B_0 = -\frac{1}{2}aq_x$ ve $C_0 = \frac{1}{2}ar_x$ elde edilir.

k^0 katsayıları eşitlenirse, $A_0 = \frac{1}{2}arq + c$ elde edilir. burada c sabit olmakla birlikte sadelik için $c=0$ seçilirse;

$$-\frac{1}{2}aq_{xx} = q_t - aq^2r, \quad (3.30a)$$

$$\frac{1}{2}ar_{xx} = r_t + aqr^2 \quad (3.30b)$$

evolüsyon denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde, $r = \pm q^*$ ve $a = 2i$ olarak belirlenirse,

$$iq_t = q_{xx} \pm 2q^2q^*$$

nonlinear Schrödinger denklemi elde edilir. Özetlenirse, (3.22) saçılma problemi ve bununla ilişkili (3.23) zaman denklemleri ile, (3.27) uygunluk koşulları sağlanmaktadır. Bu örnekte, $r = -q^*$ olarak belirlenirse,

$$A = 2ik^2 \pm iqq^* \quad (3.32a)$$

$$B = 2qk + iq_x \quad (3.32b)$$

$$C = \pm 2q^*k \pm iq_x^* \quad (3.32c)$$

eşitlikleri elde edilir ve bu eşitlikler (3.27) uygunluk koşullarını sağlarken $q(x,t)$ ise (3.31) Nonlinear Scrödinger eşitliğini sağlamaktadır.

ÖRNEK 3.2 (n=3)

A, B ve C üçüncü derece polinomlar olsun. Bunları (3.27)'da yerine koyarsak;

$$A = a_3k^3 + a_2k^2 + \frac{1}{2}(a_3qr + a_1)k + \frac{1}{2}a_2qr - \frac{1}{4}ia_3(qr_x - rq_x) + a_0 \quad (3.33a)$$

$$B = ia_3qk^2 + (ia_2q - \frac{1}{2}a_3q_x)k + [ia_1q - \frac{1}{2}a_2q_x + \frac{1}{4}ia_3(2q^2r - q_{xx})] \quad (3.33b)$$

$$C = ia_3rk^2 + (ia_2r + \frac{1}{2}a_3r_x)k + [ia_1r + \frac{1}{2}a_2r_x + \frac{1}{4}ia_3(2r^2q - r_{xx})] \quad (3.33c)$$

Bu denklemlerde a_3, a_2, a_1 ve a_0 sabitler olmak üzere, $q(x,t)$ ve $r(x,t)$ aşağıdaki evolüsyon denklemlerini sağlar;

$$q_t + \frac{1}{4}ia_3(q_{xxx} - 6qrq_x) + \frac{1}{2}a_2(q_{xx} - 2q^2r) - ia_1q_x - 2a_0q = 0 \quad (3.34a)$$

$$r_t + \frac{1}{4}ia_3(r_{xxx} - 6qrr_x) - \frac{1}{2}a_2(r_{xx} - 2qr^2) - ia_1r_x + 2a_0r = 0 \quad (3.34b)$$

a_3, a_2, a_1 ve a_0 sabitlerinin özel seçimleri ile, fiziksel olarak ilginç evolüsyon denklemleri elde edilir.

$a_0 = a_1 = a_2 = 0, a_3 = -4i$ ve $r = -1$ seçilirse KdV denklemi

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$$

elde edilir.

$a_0 = a_1 = a_2 = 0, a_3 = -4i$ ve $r=q$ seçilirse mKdV denklemi

$$q_t - 6q^2 q_x + q_{xxx} = 0$$

elde edilir.

$a_0 = a_1 = a_3 = 0, a_2 = -2i$ ve $r = -q^*$ seçildiğinde ise nonlinear Schrödinger denklemi

$$iq_t = q_{xx} \pm 2q^2 q^*$$

elde edilir.

ÖRNEK 3.3 (n=-1)

$$A = \frac{a(x,t)}{k}, B = \frac{b(x,t)}{k}, C = \frac{c(x,t)}{k} \quad (3.35)$$

olarak verilsin. (3.27) uygunluk koşulları,

$$a_x = \frac{1}{2}(qr)_t, \quad (3.36a)$$

$$q_{xt} = -4iaq, \quad (3.36b)$$

$$r_{xt} = -4iar \quad (3.36c)$$

olması durumunda sağlanır. Bu örnekteki özel durumlar;

(i)

$$a = \frac{1}{4}i \cos u \quad (3.37a)$$

$$b = c = \frac{1}{4}i \sin u \quad (3.37b)$$

$$q = -r = -\frac{1}{2}u_x \quad (3.37c)$$

olarak seçilmesi durumunda, u Sine-Gordon denklemini ($u_{xt} = \sin u$) sağlar.

(ii)

$$a = \frac{1}{4}i \cosh u \quad (3.37a)$$

$$b = c = \frac{1}{4}i \sinh u \quad (3.37b)$$

$$q = r = \frac{1}{2}u_x \quad (3.37c)$$

olarak seçilmesi durumunda, u Sinh-Gordon denklemini ($u_{xt} = \sinh u$) sağlar.

İncelediğimiz üç örnek, ters saçılma dönüşümü ile elde edilebilecek birçok nonlinear evolüsyon denkleminde yalnızca birkaçını göstermektedir. Bu örneklerde görüldüğü gibi, $r = -1$ olması durumunda, (3.22) saçılma problemi (3.24) Schrödinger denklemine dönüşüyor. Bu durumda,

$$v_t = Av + Bv_x \quad (3.38)$$

zaman denklemini göz önüne alıyoruz. Bu denklem ile,

$$v_{xx} + (k^2 + q)v = 0$$

denklemini uyumlu olup $dk/dt=0$ varsayımı ile bu denklemler (3.27) uygunluk koşullarına benzer.

Ters saçılma dönüşümünün birçok uygulaması ve genelleştirmesi bulunmaktadır. Örneğin, (3.22) yerine aşağıdaki saçılma problemini ele alalım:

$$v_{1,x} = -f(k)v_1 + g(k)q(x,t)v_2 \quad (3.39a)$$

$$v_{2,x} = f(k)v_2 + g(k)r(x,t)v_1 \quad (3.39b)$$

Bu denklemlerde, $f(k)$ ve $g(k)$ k özdeğerine bağlı fonksiyonlardır. Bu saçılma probleminin zaman denklemleri de aşağıdaki gibi olsun:

$$v_{1,t} = Av_1 + Bv_2 \quad (3.40a)$$

$$v_{2,t} = Cv_1 - Av_2 \quad (3.40b)$$

(3.39) ve (3.40) denklemlerinin uygunluğu için A,B ve C'nin sağlaması gereken koşullar aşağıdaki gibi oluşur:

$$A_x = g(qC - rB) \quad (3.41a)$$

$$B_x + 2fB = gq_t - 2Agq \quad (3.41b)$$

$$C_x - 2fC = gr_t + 2Agr \quad (3.41c)$$

Önceki saçılma problemi örneğinde olduğu gibi, A, B, C, f ve g'nin k için sonlu kuvvet serisine açılabilceği kabulüyle fiziksel olarak ilginç birçok evölüsyon denklemi elde edilebilir.

ÖRNEK 3.4

$$f(k) = iak^2 - \sqrt{2bk}$$

$$g(k) = ak + i\sqrt{b/2}$$

$$A = -2ia^2k^4 + 4a\sqrt{2bk}^3 + (4ib - ia^2rq)k^2 + \sqrt{2b}arqk + irq\sqrt{b/2} \quad (3.42c)$$

$$B = 2a^2qk^3 + 3i\sqrt{2b}aqk^2 + (-2bq + iaq_x + a^2r^2q)k + (-q_x + iarq^2)\sqrt{b/2} \quad (3.42d)$$

$$C = 2a^2rk^3 + 3i\sqrt{2b}ark^2 + (-2br - iar_x + a^2r^2q)k + (r_x + iar^2q)\sqrt{b/2} \quad (3.42e)$$

olarak seçilsin. Bu denklemlerde a ve b sabit sayılardır. r ve q aşağıdaki (3.43) evölüsyon denklemlerinin çözümü ise, (3.41) denklemlerinde verilen uygunluk koşulları sağlanır.

$$r_t + ir_{xx} - a(r^2q)_x + ibr^2q = 0 \quad (3.43a)$$

$$q_t - iq_{xx} - a(rq^2)_x - ibrq^2 = 0 \quad (3.43b)$$

(3.43) denklemlerinde, $r = q^*$ olarak seçilirse q aşağıdaki genelleştirilmiş nonlinear Schrödinger eşitliğini sağlar.

$$q_t = iq_{xx} + a(q^2q^*)_x + ibq^2q^* \quad (3.44)$$

Eğer a=0 ise, (3.45) denkleminde gösterilen nonlinear Schrödinger denklemi elde edilecektir.

$$q_t = iq_{xx} + a(q^2q^*)_x \quad (3.45)$$

ÖRNEK 3.5

$$f(k) = g(k) = k \quad (3.46a)$$

$$A = -\frac{4ik^3}{(1-rq)^{1/2}} + \frac{(rq_x - qr_x)k^2}{(1-rq)^{3/2}} \quad (3.46b)$$

$$B = \frac{4qk^3}{(1-rq)^{1/2}} + \frac{2iq_x k^2}{(1-rq)^{3/2}} - k \left[\frac{q_x}{(1-rq)^{3/2}} \right]_x \quad (3.46c)$$

$$C = \frac{4rk^3}{(1-rq)^{1/2}} - \frac{2ir_x k^2}{(1-rq)^{3/2}} - k \left[\frac{r_x}{(1-rq)^{3/2}} \right]_x \quad (3.46d)$$

olarak seçilsin. r ve q aşağıdaki (3.47) evölüsyon denklemlerinin çözümü ise, (3.41) denklemlerinde verilen uygunluk koşulları sağlanır.

$$q_t + \left[\frac{q_x}{(1-rq)^{3/2}} \right]_{xx} = 0 \quad (3.47a)$$

$$r_t + \left[\frac{r_x}{(1-rq)^{3/2}} \right]_{xx} = 0 \quad (3.47b)$$

Özel olarak, $r=-q$ olarak seçilirse,

$$q_t + \left[\frac{q_x}{(1+q^2)^{3/2}} \right]_{xx} = 0 \quad (3.48)$$

denklemini elde edilir. eğer $r=-1$ ve $q=u-1$ olarak seçilirse de,

$$u_t = 2(-u^{-1/2})_{xxx} \quad (3.49)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem Harry-Dym denklemini olarak bilinir.

3.7 Ters Saçılma Dönüşümünün Bir Boyutta Genelleştirilmesi

Nonlinear evolüsyon denklemlerinin en genel sınıfının ne olduğu akla gelebilecek sorulardandır. Burada, aşağıdaki 2 x 2'lik saçılma problemini göz önüne alıyoruz:

$$v_{1,x} = -ikv_1 + q(x,t)v_2 \quad (3.50a)$$

$$v_{2,x} = ikv_2 + r(x,t)v_1 \quad (3.50b)$$

Ablowitz, Kaup, Newell ve Segur (1974) A, B ve C fonksiyonları ile ilişkili (3.25) denklemlerini göz önüne alarak bu soruyu yanıtladı. Kesin kısıtlamalar altında, çözülebilen nonlinear evolüsyon denklem sınıfı veren genel bir bağıntı bulundu. Bu ilişki, nonlinear denklemin lineerleştirilmiş formunun dağılma ilişkisine ve bir integro-diferansiyel operatöre göre belirlenmektedir. $|x| \rightarrow \infty$ iken q ve r 'nin yeterince hızlı bir şekilde azalan fonksiyon olduğu kabulü ile genel evolüsyon denklemi,

$$\begin{pmatrix} r \\ -q \end{pmatrix}_t + A_0(L) \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = 0 \quad (3.51a)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu denklemde, $A_0(k) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} A(x,t,k)$ ve L integro-diferansiyel operatörü

$$L = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} \partial_x - 2r(I_- q) & 2r(I_- r) \\ -2q(I_- q) & -\partial_x + 2q(I_- r) \end{pmatrix} \quad (3.51b)$$

olarak tanımlanmıştır. $(I_- f)(x)$ ise

$$(I_- f)(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy \quad (3.51c)$$

olarak verilmiştir.

(3.51) denklemi matris formunda

$$\sigma_3 u_t + A_0(L)u = 0 \quad (3.52a)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu gösterimde;

$$L = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} \quad (3.52b)$$

olarak tanımlanmıştır.

$|x| \rightarrow \infty$ iken $f(x)$ ve $g(x)$ yeterince hızlı bir şekilde azalan fonksiyonlar ise $x \rightarrow -\infty$ için limit,

$$f(x)(I - g)(x) \equiv f(x) \int_{-\infty}^x g(y) dy \rightarrow 0$$

olur ve sonsuz küçük q ve r için L diferansiyel operatörü aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$L = \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Böylece (3.51) denklemlerini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$r_t + 2A_0 \left(-\frac{1}{2} i \partial_x\right) r = 0 \quad (3.53a)$$

$$-q_t + 2A_0 \left(\frac{1}{2} i \partial_x\right) q = 0 \quad (3.53b)$$

(3.53) denklemleri Fourier dönüşümü ile çözülebilen lineer kısmi diferansiyel denklemlerdir.

Ayrıca,

$$r(x, t) = \exp\{i(ikx - w_r(k)t)\}$$

$$q(x, t) = \exp\{i(ikx - w_q(k)t)\}$$

dalga çözümleri (3.53) denklemlerinde yerine konulursa,

$$A_0(k) = \frac{1}{2} i w_r(2k) = -\frac{1}{2} i w_q(-2k) \quad (3.54)$$

eşitliği elde edilir. Böylece, genel evolüsyon denklemi,

$$\begin{pmatrix} r \\ -q \end{pmatrix}_t = -i w(2L) \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

şeklinde veya matris formunda,

$$\sigma_3 u_t + iw(2L)u = 0 \quad (3.56)$$

biçiminde gösterilebilir.

Böylelikle, nonlinear evolüsyon denklemi, denklemin lineerleştirilmiş halinin dağılım ilişkisi ve bir integro-diferansiyel operatör ile karakterize edilmiş oldu.

UYGULAMA 1: Nonlinear Schrödinger denklemi

Nonlinear Schrödinger denklemi,

$$iq_t = q_{xx} \pm 2q^2 q^*$$

şeklinde idi. Bu denklemin lineerleştirilmiş hali,

$$iq_t = q_{xx}$$

biçimindedir. Böylece, dağılım ilişkisi, $w_q(k) = -k^2$ olur. (3.54) eşitliğinden $A_0(k)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$A_0(k) = 2ik^2 \quad (3.59)$$

Evolüsyon denklemi, (3.51) veya (3.55) denklemlerinden,

$$\begin{pmatrix} r \\ -q \end{pmatrix}_t = -4iL^2 \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = -2L \begin{pmatrix} r_x \\ q_x \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} r_{xx} - 2r^2 q \\ q_{xx} - 2q^2 r \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

olarak bulunur. Böylece, $r \pm q^*$ olduğu sürece bu iki denklemin de nonlinear Schrödinger denklemine eşit olduğu görülebilir.

(3.55) denklemi, $|x| \rightarrow \infty$ iken q ve r 'nin sifıra yaklaştığı kabulü ile elde edilmiştir. Bu nedenle,

$$v_{xx} + (k^2 + q)v = 0 \quad (3.61)$$

Schrödinger saçılma probleminde $r=-1$ olarak belirlenemez. Bu durumda, genel evolüsyon denklemi aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$q_t + \gamma(L)q_x = 0 \quad (3.62a)$$

Bu denklemde, aşağıdaki gösterimler geçerlidir.

$$L := -\frac{1}{4}\partial_x^2 - q + \frac{1}{2}q_x I_+ \quad (3.62b)$$

$$(I_+ f)(x) := \int_x^\infty f(y)dy \quad (3.62c)$$

$$\gamma(k^2) = \frac{w(2k)}{2k} \quad (3.62d)$$

$w(k)$ yukarıda olduğu gibi $q = \exp \{i(ikx - w(k)t)\}$ ile lineerleştirilmiş denklemin dağılım ilişkisini göstermektedir.

UYGULAMA 2: Korteweg-de Vries denklemi

Korteweg-de Vries denklemi,

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0 \quad (3.63)$$

şeklinde idi. Bu denklemin lineerleştirilmiş hali,

$$q_t + q_{xxx} = 0 \quad (3.64)$$

biçimindedir. Bu denkleme göre, dağılım ilişkisi, $w(k) = -k^3$ ve $\gamma(k^2) = -4k^2$ ve böylece $\gamma(L) = -4L$ olarak bulunur. (3.62) denklemlerinden

$$q_t - 4Lq_x = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemde L yerine konulursa,

$$q_t - 4\left(-\frac{1}{4}\partial_x^2 - q + \frac{1}{2}q_x I_+\right)q_x = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik de düzenlenirse,

$$q_t + q_{xxx} + 4qq_x + 2q q_x = 0$$

denklemini elde edilir ki bu denklem KdV denkleminin kendisidir.

KAYNAKLAR

Ablowitz, M.J., ve Clarkson, P.A., (1991), *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge University, New York.

Ablowitz, M. J., Kaup, D. J., Newell, A. C. ve Segur, H., (1973), "Method for solving the sine-Gordon equation", *Phys. Rev. Lett.* 30:1262-1264.

Ablowitz, M. J., Kaup, D. J., Newell, A. C. ve Segur, H., (1974), "The inverse scattering transform - Fourier analysis for nonlinear problems," *Studies in Applied Mathematics*, 53: 249-315.

Blij, F. V. D., (1978), "Some details of the history of the Kortewegde Vries equation", *Nieuw Archief voor Wiskunde XXVI*, 1:54-64.

Boussinesq, J., (1872), "Theorie des Ondes it des Remous Quise Propagent le long d'un Canal Rectangularie Horizontal, en Communiquant au Liquide Continu Dans ce Canal des Vitesses Sensiblement Parlilles de la Surface au fond", *J.Math. Pures. Appl.*, Ser 2, 17:55-108

Demirel, A., (1984), *Korteweg-De Vries Denklemi Türündeki Denklemlerin Inverse Scattering (Ters Saçınım) Metodu ile Çözülebilirliği*, Doktora Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Dubrovin, B.A., Matveey, V.B. ve Novikov, S.P., (1976), "Nonlinear equations of Korteweg-de Vries type, Finite-zone linear operators, and Abelian Varieties", *Russian Math. Surveys*, 31:59-146.

Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D. ve Miura, R. M.,(1967), "Method for solving the Korteweg-de Vries equation", *Phys. Rev. Lett.*, 19:1095-1097.

Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D. ve Miura, R. M., (1974), "Korteweg-de Vries Equation and generalizations" *VI. Comm. Pure Appl. Math.*, 27:97-133.

Gardner, C.S., Morikawa, G.K., (1960), *Similarity in the asymptotic behavior of collision free hydromagnetic waves and water waves*, New York Univ,Courant Inst. Math. Sci.Rep., NYO.

Korteweg, D. J. ve Vries, G.,(1895), "On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and a new type of long stationary waves", *Phil. Mag.* 39:422-443.

Kruskal, M., (1975), "Nonlinear Wave equations In Dynamical Systems and Applications", I.Moser Ed. *Springer Lecture Notes in Physics*, 38:310-354.

Lax , P. D., (1968), "Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves", *Comm. Pure Appl. Math.* 21:467-490.

Miura, R. M., (1968), "Korteweg-de Vries equation and generalization. I. A remarkable explicit nonlinear transformation", *J. Math. Phys.* 9:1202-1204.

Miura, R. M., (1976), "Korteweg-de Vries equation A survery of results", *Siam Review*, 3:412-459.

Miura, R. M., Gardner, C. S. ve Kruskal, M. D., (1968), "Korteweg-deVries Equation and Generalizations.II. Existence of Conservation Laws and Constants of Motion", *J. Math. Phys.* 9:1204-1209.

Özdemir, E., (2009), *Korteweg-De Vries Denklemi Üzerine Bir Çalışma*, Yüksek Lisans Tezi,

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

Russell, J. S., (1844), Report on waves, Report of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, John Murray, London, 301-390.

Stokes, G.G., (1847), “On the Theory of Oscillatory Waves”, Camb. Trans. 8:441-473

Wadati, M. ve Toda, M., (1972), “The exact N-soliton solution of the Korteweg-de Vries equation”, J.Phys. Soc. Jap., 32:1403-1411.

Whitham, G. B. (1974), Linear and nonlinear waves, Wiley, New York.

Zabusky, N. J. ve Kruskal, M. D., (1965), “Interaction of solitons in a collisionless plasma and initial states”, Phys. Rev. Lett. 15:240-243.

Zakharov, V. E. ve Shabat, A. B., (1972), “Exact Theory Of Two-Dimensional Self-Focusing And One-Dimensional Self-Modulation Of Waves In Nonlinear Media”, Soviet Phys. JETP, 34:62-69.

İnternet Kaynakları

[1] <http://www.msstate.edu/aktosun/kdv>

[2] <http://www.osti.gov/accomplishments/pdf/A80037041/A80037041.pdf>

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	15.01.1984	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1997-2001	Beyoğlu Fındıklı Lisesi
Lisans	2003-2007	Yıldız Teknik Üniversitesi Kimya Metalurji Fak. Matematik Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	2007-2010	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Bölümü

Çalıştığı kurum

2009-Devam ediyor Finansbank A.Ş.