

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKLİ FONKSİYONLARIN LATİSLERİ ÜZERİNDEKİ
HOMOMORFİZMALAR

Matematikçi Nevin ÖZTÜRK

FBE Matematik Anabilim Dalında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer GÖK

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ.....	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	4
3. LATİS HOMOMORFİZMALARI	8
4. İZOMORFİZMALAR ÜZERİNE EK BİLGİLER	12
5. DÜZGÜN SÜREKLİ FONKSİYONLAR	19
6. L^∞ 'A DAHA YAKIN BİR BAKIŞ	22
7. ÖLÇÜLEBİLİR FONKSİYONLARIN LATİSLERİ.....	28
8. SONUÇ.....	31
KAYNAKLAR.....	32
ÖZGEÇMİŞ.....	35

SİMGE LİSTESİ

B^A	A 'dan B 'ye tüm dönüşümler
B_A	B^A 'daki sabit dönüşüm kümesi
$C(X)$	X topolojik uzayı üzerindeki tüm gerçekteğerli sürekli fonksiyonların latisleri
$C^*(X)$	Sınırlı fonksiyonların alt latisleri
clA	A kümesinin kapanışı
F_σ	$n \in \mathbb{N}$ için $\{F_n\}$ kümeleri Reel sayılar kümesinde kapalı kümelerin bir dizisi olsun. $\bigcup_n F_n$ kümesi
G_δ	$n \in \mathbb{N}$ için $\{B_n\}$ kümeleri Reel sayılar kümesinde açık kümelerin bir dizisi olsun. $\bigcap_n B_n$ kümesi
$\ell^\infty(\Gamma)$	$f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ tüm sınırlı fonksiyonların uzayı
$L^0(\mu)$	X üzerindeki tüm ölçülebilir fonksiyonların kümesi
$L^\infty(\mu)$	μ ölçümüne göre hemen hemen her yerde sınırlı fonksiyonların kümesi
$L^\infty(\mu)^*$	Göreceli zayıf* topolojisi $L^\infty(\mu)$ üzerindeki tüm sıfır olmayan çarpımsal lineer fonksiyonların kümesi
$maks$	Maksimum
μ	Ölçüm
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$P(X)$	Kuvvet kümesi
$\mathbb{R}_A$	A üzerindeki sabit fonksiyonlar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$supp f$	f 'nin desteği
U	$\mathbb{N}$ üzerinde bir serbest ultrafiltre
$U^*(X)$	X üzerindeki tüm sınırlı düzgün sürekli fonksiyonların latisleri
$(X, \mathfrak{X}, \mu)$	Ölçüm uzayı
X_T	T 'ye bağlı X 'in açık alt kümesi
x^+	Pozitif kısım
x^-	Negatif kısım
$ x $	x 'in mutlak değeri
$\ x\ $	x vektörünün normu
$\mathfrak{X}$	Polonya uzayının Borel kümelerinin cebiri
$\cap$	Kesişim, arakesit

Π	Çarpım sembolü
$\vee$	Supremum
$\wedge$	İnfimum
$\forall$	Her
$\exists$	En az bir
$\subset$	Öz alt küme
$\in$	Elemanı
$<$	Küçük
$\leq$	Küçük veya eşit
$\neq$	Eşit değil

ÖNSÖZ

Çalışmalarımın her aşamasında büyük desteğini gördüğüm, öneri ve yönlendirmeleriyle bana her konuda yardımcı olan değerli hocam Prof. Dr. Ömer Gök'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bütün eğitim hayatım boyunca gösterdikleri sabır, hoşgörü, maddi ve manevi destekleri için değerli aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu çalışmada sürekli fonksiyonların latisleri, onların homomorfizmaları ve izomorfizmaları üzerindeki etkileri ile ilgilenildi. Kompakt küme üzerinde, sürekli fonksiyonların latisleri arasındaki homomorfizmalar üzerindeki bazı genel sonuçlar elde edildi. Her boş olmayan sıfır kümesinin, X 'de boş olmayan bir içe sahip olduğu kabul edildiği durumda, $C(X)$ 'in her otomorfizmasının sürekli olduğu gösterildi. $C^*(S)$ 'in tüm otomorfizmalarının biçimi elde edildi.

Düzgün sürekli fonksiyonların latisleriyle ilgilenen Maribel Garrido ve Jesus Jaramillo'nun son sonuçlarının lineer olmayan karşılıkları gösterildi. Sınırlı ve ölçülebilir fonksiyonların latisleri arasındaki izomorfizmalar üzerinde çalışıldı ve elde edilen sonuçlar diğer fonksiyon latislerine genişletildi. Latisler arasındaki birebir ve örten fonksiyonların bir izomorfizma olması için gerek ve yeter koşul her iki yönde sırayı korumasıdır sonucuna varıldı.

Anahtar Kelimeler: Sürekli fonksiyonların latisi, latis homomorfizması, vektör latisi, ölçülebilir fonksiyonlar.

ABSTRACT

In this work; it was dealt with lattices of continuous functions and their homomorphisms, with emphasis on isomorphisms. It was obtained some general results on homomorphisms between the lattices of continuous functions on compact set. It was shown that every otomorphism of $C(X)$ is continuous when every (nonempty) zero set has nonempty interior in X . The form of automorphisms of $C^*(S)$ was obtained.

A nonlinear counterpart of a recent result of Maribel Garrido and Jesus Jaramillo concerning lattices of uniformly continuous functions were presented. It was studied on isomorphisms between lattices of bounded measurable functions and the results obtained were extended to other function lattices. It was concluded that a bijection between lattices is an isomorphism if and only if it preserves the order in both directions.

Keywords: Lattice of continuous functions, lattice homomorphism, vector lattice, measurable functions.

1. GİRİŞ

Bu çalışma, sürekli fonksiyonların latileri, onların homomorfizmaları ve izomorfizmaları üzerindeki etkileri ile ilgilidir.

Genel olarak, $\forall x \in X$ için $f \leq g$ iken $f(x) \leq g(x)$ olan Reel sayılarla oluşturulmuş X topolojik uzayı üzerindeki tüm gerçekteğerli sürekli fonksiyonların latileri için $C(X)$ yazılır. Sınırlı fonksiyonların alt latileri ise $C^*(X)$ ile gösterilir.

Aksi söylenmedikçe X ve Y uzaylarını kompakt Hausdorff uzayı olarak alacağız.

$T: C(X) \rightarrow C(Y)$ bir izomorfizma olarak verilsin, birebirlik ve örtenlik de $T(f \vee g) = Tf \vee Tg$ ve $T(f \wedge g) = Tf \wedge Tg$ şeklinde ifade edilsin (Bu birebir ve örtenlik için bir denkliktir). T hakkında ne söylenebilir? Özellikle nasıl temsil edilir? T 'nin lineer olmadığı varsayımı vurgulanır.

Bu çalışmadaki problemler ilk olarak Kaplansky, (1947,1948) ve onun dönemindeki matematikçiler tarafından düşünülmüştür. Geçmişte, Kaplansky, $C(Y)$ ve $C(X)$ latileri izomorfik ise bu durumda X ve Y 'nin de homeomorfik olduğunu gösterdi. İspat Stonian şeklindedir ve dualite ile türetilir. (X 'in noktaları $C(X)$ 'in asal ideallerinin denklik sınıfları olarak özdeşlenir, asal ideal, $\{0,1\}$ latisi üzerine bir homomorfizmanın çekirdeği olur ve benzer şekilde devam eder ve ayrıca (Semadeni, 1971) ve (Birkhoff, 1979)'a bakınız.)

(Shirota., 1952; Henriksen vd., 1956)'daki makaleler kompakt olmayan uzaylara genişletilmeyi içerir.

(Kaplansky, 1948)'nin devamındaki çalışma izomorfizmaların süreklilik özelliklerine ayrılmıştır. Örneğin, o, sup normlu topolojiye başvurarak ispatlanmıştır. T 'nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul

$$Tf(x) = t\left(x, f(\tau(x))\right) \quad (f \in C(Y), x \in X) \quad (1.1)$$

gibi bir gösterimin, $\tau: X \rightarrow Y$ 'nin bir homeomorfizma ve $t: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 'nin sürekli bir fonksiyon olduğu durumda sağlanmasıdır ($t(x, c) = Tc(x)$ ile verilme şartıyla). Ayrıca eğer X metriklenebilir ise (ve bu yüzden Y de) bu durumda $C(Y)$ ve $C(X)$ arasındaki her izomorfizma sürekli (Kaplansky, 1948). Daha sonra, Amemiya'nin eleştirisine rağmen Cater dizisel kompakt veya yerel bağlantılı X uzayı için aynısını ispatladı (Cater, 1965).

Her durumda, (Kaplansky, 1948)'de gösterildiği gibi otomatik süreklilik olması için bir kısıtlama gereklidir. Geri dönecek olursak; eğer S tam regüler uzay ise o zaman βS 'i

(onun Stone–Čech kompaktlaştırması) yoğun bir alt uzay olarak içeren bir kompakt uzay vardır, öyle ki $C^*(S)$ Banach cebiri izometrik olarak $C(\beta S)$ 'e izomorf olduğunu hatırlayalım.

$\ell^\infty(\Gamma)$, $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ tüm sınırlı fonksiyonların uzayı olsun. Γ 'nin ayrık küme olarak davrandığı durumda $\ell^\infty(\Gamma) = C(\beta\Gamma)$ 'dir. $t: \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ şu şekilde tanımlı bir fonksiyon olsun:

- Her $\gamma \in \Gamma$ için, $t(\gamma, \cdot)$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ 'nin bir otomorfizmasıdır. (Varsayılan durumda latis kurmak, bir artan homeomorfizma üretmektir.)
- $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $t(\cdot, f(\cdot))$ olmasıdır.

(Bu fonksiyon daha sonra kabul edilebilir olarak adlandırılacaktır.)

Sonra $\ell^\infty(\Gamma)$ 'nin bir otomorfizmasını şu şekilde tanımlayabiliriz.

$$Tf(\gamma) = t(\gamma, f(\gamma)) \quad (f \in \ell^\infty(\Gamma), \gamma \in \Gamma) \quad (1.2)$$

Bununla beraber böyle bir T 'nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\{t(\gamma, \cdot): \gamma \in \Gamma\}$ ailesinin $\mathbb{R}$ 'nin kompakt alt kümeleri üzerinde eş sürekli olmasıdır.

Daha somut bir şekilde (Ercan ve Onal, 2008)'i takip ederek;

$$\ell(x, c) = \begin{cases} c^x & 0 \leq c \leq 1 \\ \text{aksi taktirde} & \end{cases} \text{ ile } \ell: (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.3)$$

fonksiyonu tanımlansın.

Eğer f , $(0, \infty)$ 'in bir altkümesi üzerinde tanımlanırsa, f ile aynı tanım kümesine sahip $Lf(x) = \ell(x, f(x))$ eşitliği oluşturulur. Eğer $x \in \mathbb{N}$ alırsak; bu durumda L , $\ell^\infty = C(\beta\mathbb{N})$ eşitliğinin bir otomorfizması olur. $x \in (0, \infty)$ ve $f \in C^*(0, \infty)$ alarak;

$$C^*(0, \infty) = C(\beta(0, \infty)) \quad (1.4)$$

eşitliğinin bir otomorfizmasını elde ederiz. f , ölçülebilir ve esasen sınırlı alınarak; λ 'nın $(0, \infty)$ aralığının Borel kümeleri üzerinde Lebesgue ölçümü olarak kabul edildiği durumda L , $L^\infty(\lambda)$ 'nin bir otomorfizmasına genişletilir. Buna karşın L , $f = 1$ ' de süreksizdir; çünkü her $0 < c < 1$ için $\|Lc - L1\|_\infty = 1$ 'dir.

Bu örnekler içindeki Stone–Čech 'in bulunuşu rastlantısal değildir: Aslında Itô (1964), eğer $C(X)$ bir sürekli olmayan otomorfizma kabul ederse, bu durumda X , $\beta\mathbb{N}$ ile homeomorfik bir alt kümeye sahip olur, ifadesini ispatlamıştır. Diğer dikkate değer bir sonuç da (Itô, 1964)'dekidir. Bu sonuçta da $C(X)$ 'in tersinin süreksiz olduğu sürekli bir otomorfizmayı kabul etmesi için gerek ve yeter koşul X 'in bir F_σ açık özalt kümesi $S \subset X$ için $X = \beta S$ olmasıdır. Çalışmamızın planı aşağıdaki gibidir. Bölüm 3 homomorfizmalar üzerindeki

genellemeleri içerir. $T: C(Y) \rightarrow C(X)$ homomorfizmasının neden olduğu $\tau: X_T \rightarrow Y$ sürekli dönüşümünün basit bir ispatı verilir öyle ki burada X_T , T 'ye bağlı X 'in açık alt kümesidir, yani $t(x, c) = Tc(x)$ ile

$$t(x, f(\tau(x)))^- \leq Tf(x) \leq t(x, f(\tau(x)))^+ \quad (f \in C(Y), x \in X_T) \quad (1.5)$$

dir.

Bütün açıklamalarda bu notasyonları kullanırız.

4. bölüm izomorfizma üzerine odaklanmıştır. Bu taktirde τ , bir homeomorfizma ve τ dönüşümü ve t , tam olarak T 'yi belirtir. Bu T 'nin bir tam temsili aracılığı ile gösterilir. Bununla birlikte her $f \in C(Y)$ için $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$ eşitliğinin sağlandığı yerde X 'in G_δ yoğun altkümesi vardır. Ayrıca otomatik olarak sürekli $C(X)$ 'in otomorfizması olan için X kompakt uzayının yeni örnekleri verilir ve S , metrik uzay olduğunda $C^*(S) = C^*(\beta S)$ eşitliğinin otomorfizması açıklanır, böylece Ercan ve Önal'ın göz önünde bulundurduğu özgün olan yukarıdaki örnek verilebilir. Bir uygulama olarak, bölüm 5'teki düzgün sürekli fonksiyonlar üzerinde Garrido ve Jaramillo tarafından en son yayınlanan sonuçların lineer olmayan versiyonu verilir.

Bölüm 6, Von Neumann $L^\infty(\mu)$ cebiri üzerinedir. Bu arada, bu burada raporlanmış araştırmanın başlangıç noktasıdır. En az μ , bir standart ölçüm olduğu zaman otomorfizmaların çok kesin bir açıklaması elde edilir. Bölüm 7 analizde görülen birçok fonksiyon latilerinin otomorfizmalarını açıklar. Bu bölümün sonu (Birkhoff, 1979)'un 15.alt kısmını lineer olmayan küçük bir tümleyen olarak ele alır.

Notasyon 1.1 Verilen A ve B kümeleri için B_A , B^A 'daki sabit dönüşüm kümesini gösterirken A 'dan B 'ye tüm dönüşümler için de B^A yazarız. Özellikle $\mathbb{R}_A$, A üzerindeki sabit fonksiyonlardır. Her $a \in A$, $\delta_a: B^A \rightarrow B$ dönüşüm hesaplamasına sebep olur. ($\delta_a(f) = f(a)$ şeklinde tanımlanır.) Ayrıca $\tau: A \rightarrow B$ dönüşümü ve bir C kümesi verildiğinde τ ile sağdan bileşke için $\tau^*: C^B \rightarrow C^A$ yazarız. Bu da $\tau^*(f) = f \circ \tau$ şeklindedir. Benzer şekilde $\tau_*: A^C \rightarrow B^C$ dönüşümü de $\tau_*(f) = \tau \circ f$ ile soldan bileşkeyi gösterir. Sonuç olarak; A 'nın karakteristik fonksiyonu 1_A olduğunda A üzerindeki birim de 1_A olur.

2. ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1 Bir E sıralı vektör uzayında $x, y \in E$ eleman çifti için $\{x, y\}$ kümesinin supremumu ve infimumu E 'nin elemanı ise E 'ye Riesz Uzayı (vektör latis) denir.

$$x \vee y = \sup\{x, y\}$$

$$x \wedge y = \inf\{x, y\} \text{ şeklinde gösterilir.}$$

Tanım 2.2 İki Riesz uzayı arasında tanımlı $T: E \rightarrow F$ operatörüne, her $x, y \in E$ için; $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ ve $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$ oluyorsa, T bir latis homomorfizmasıdır denir.

Tanım 2.3 E bir Archimedean Riesz Uzayı olsun. U , E 'nin bir alt uzayı olmak üzere eğer tüm $x, y \in U$ için $x \vee y \in U$ ve $x \wedge y \in U$ ise U , E 'nin bir altlatisidir denir.

Tanım 2.4 Riesz uzayı üzerinde tanımlı $\|\cdot\|$ norma; $|x| \leq |y|$ ifadesi $\|x\| \leq \|y\|$ olmasını gerektiriyorsa; latis norm denir. Latis normu içeren Riesz uzaya da Normlu Riesz uzayı denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Tanım 2.5 Normlu Riesz uzayı E 'ye tam ise Banach latis denir.

Tanım 2.6 $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu birebir, örten, sürekli ve açıksa f 'ye homeomorfizma denir. X ve Y uzaylarına da homeomorf uzaylar denir (Munkres, 1975).

Tanım 2.7 P , R 'nin bir öz ideali ve R 'nin iki A ve B ideali için $AB \subset P$ olsun. $A \subset P$ veya $B \subset P$ oluyorsa P idealine asal ideal denir.

Tanım 2.8 X 'in bir x elemanının her bir U komşuluğu için $x \in V \subset U$ olacak şekilde x 'in bir bağlantılı komşuluğu varsa X uzayına x 'de yerel bağlantılıdır denir. $\forall x \in X$ için geçerli ise X uzayına yerel bağlantılıdır denir (Munkres, 1975).

Tanım 2.9 X bir topolojik uzayının bir x noktasına, $\{x\}$ tek nokta kümesi açık ise izole nokta (ayrık nokta) denir (Munkres, 1975).

Tanım 2.10 (X, τ) topolojik uzay olsun. Her $p \in X$ ve p 'yi ihtiva etmeyen bir F kapalı alt kümesi verilsin. $p \in U, F \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açıkları varsa bu uzaya regüler uzay denir (Lipschut, 1965).

Teorem 2.11 X tamamen düzenli bir uzay olsun. Her sınırlı sürekli dönüşüm $f: X \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}$ içine Y 'nin sürekli bir dönüşümüne tek bir şekilde genişler özelliğine sahip olan X 'in bir Y kompaktlaştırması vardır.

Tanım 2.12 Her bir X tamamen düzenli uzayı için Teorem 2.11'deki genişleme durumlarını sağlayan X 'in bir kompaktlaştırması seçilsin. X 'in bu kompaktlaştırması $\beta(X)$ ile gösterilir ve

Stone-Čech kompaktlaştırması olarak adlandırılır ve X 'in her bir sürekli dönüşümü $f: X \rightarrow C$, C kompakt Hausdorff uzayı içine $g: \beta(X) \rightarrow C$ sürekli dönüşümüne tek bir şekilde genişler şeklinde karakterize edilir.

Teorem 2.13 (Tietze Genişleme Teoremi) X bir normal uzay ve A , X 'in kapalı bir altuzayı olsun.

- (a) $\mathbb{R}$ 'nin $[a, b]$ kapalı aralığı içine A 'nın her hangi bir sürekli dönüşümü, $[a, b]$ içine X 'in tamamının sürekli bir dönüşümüne genişletilebilir.
- (b) $\mathbb{R}$ içine A 'nın her hangi bir sürekli dönüşümü, $\mathbb{R}$ içine X 'in tamamının sürekli bir dönüşümüne genişletilebilir.

Tanım 2.14 Normlu bir E uzayı cebir aksiyomlarını sağlasın. Her $x, y \in E$ için

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\| \quad (2.1)$$

ise E 'ye normlu cebir denir. Tam normlu cebire bir Banach cebiri denir.

Örnek 2.15 $C(X)$, noktasal çarpım ile $\mathbb{C}$ üzerinde bir cebir ve supremum normu $C(X)$ 'deki f ve g için

$$\|fg\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty} \quad (2.2)$$

sağlanır. Bu nedenle $C(X)$, bir Banach cebiridir.

Tanım 2.16 X bir küme ve Λ yönlendirilmiş küme olmak üzere Λ üzerinde tanımlı her $f: \Lambda \rightarrow X$ fonksiyonuna X 'de bir ağ veya net denir. $\lambda \in \Lambda$ için $f(\lambda) = x_{\lambda} \in X$ şeklinde veya (x_{λ}) şeklinde gösterilir (Willard, 1970).

Tanım 2.17 X bir küme ve X kümesinin alt kümelerinin bir cebiri S olsun. S içindeki $A_1, A_2, A_3, \dots$ sayılabilir kümelerinin bir dizisi olsun. Eğer $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ kümesi S cebirinin bir elemanı ise S cebirine bir σ -cebiri denir.

Tanım 2.18 X topolojik uzayının açık kümeleri ile üretilen σ -cebere Borel σ -cebiri, elemanlarına da Borel kümeleri denir.

Tanım 2.19 μ küme fonksiyonunu $\mathcal{M}$, σ -cebirine kısıtladığında μ fonksiyonuna Lebesgue ölçümü denir.

Tanım 2.20 X bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $F \subset P(X)$ alt ailesine X üzerinde bir filtre denir.

$$1-) \emptyset \notin F$$

$$2-) T_1, T_2 \in F \text{ için } T_1 \cap T_2 \in F$$

3-) $T_1 \in F$ ve $T_1 \subset T'$ ise $T' \in F$ 'dir (Willard, 1970).

Tanım 2.21 F , X üzerinde bir filtre olsun. Eğer X üzerinde kesin olarak F 'den daha kuvvetli başka bir filtre yoksa F 'ye ultra filtre denir (Willard, 1970).

Tanım 2.22 I boş olmayan bir küme, U , I 'nın alt kümelerinin bir ultrafiltresi olsun ve I 'da her i için boş olmayan E_i evreni ile tüm yapılar aynı benzerlik tipi σ 'ya sahip olan bir S_i yapısı verilmiş olsun. Benzerlik tipi σ 'nın S yapısı, U ultrafiltresi ile S_i 'nin ultraçarpımı olarak adlandırılır ve $S = \prod S_i / U$ şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.23 (Hahn –Tong) Eğer g ve h , normal uzaylar üzerinde reel değerli fonksiyonlar ise öyle ki h alt yarı sürekli iken g üst yarı sürekli ve $g \leq h$ olacak şekilde $g \leq f \leq h$ sağlayan bir f sürekli fonksiyonu vardır (Cheney ve Light, 2000).

Tanım 2.24 X bir normlu lineer uzay olsun. Bu durumda X 'in dual normu X' ile ve onun ikinci dual normu X'' ile gösterilir. X' , $\|x'\| = \sup\{|x'(x)| : \|x\| = 1\}$ normu altında bir Banach uzayıdır. X , X' ve X'' 'ın kapalı birim yuvarları sırasıyla U , U' ve U'' olsun.

$$U = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

$$U' = \{x' \in X' : \|x'\| \leq 1\} \quad (2.3)$$

$$U'' = \{x'' \in X'' : \|x''\| \leq 1\}$$

$$\langle X, X' \rangle = x'(x) \text{ ve } \langle X', X'' \rangle = x''(x') \quad (2.4)$$

dual sistemler bilineer formdadır.

U ve U' kapalı birim yuvarları $\langle X, X' \rangle$ dual sistemine göre dualite içindedir, $U^\circ = U'$ ve $(U')^\circ = U$ sağlanır. Benzer şekilde, U' ve U'' de $\langle X', X'' \rangle$ dual sistemine göre dualite içindedir. U' , $\sigma(X', X) - kompakt$ ve U'' , $\sigma(X'', X') - kompakt$ 'tır.

X bir normlu lineer uzay olsun. X üzerindeki zayıf topoloji $\sigma(X, X')$, w ($w = \sigma(X, X')$) ile gösterilir. Benzer şekilde X' üzerindeki $\sigma(X', X)$ 'ın topolojisi, zayıf* topoloji olarak adlandırılır ve w^* ($w^* = \sigma(X', X)$) ile gösterilir.

Tanım 2.25 Eğer (X, τ) topolojik uzayı ayrılabilir ve τ topolojisi için X üzerinde bir metrik varsa tam olan (X, τ) topolojik uzayı Polonya uzayı olarak tanımlanır.

Tanım 2.26 Rademacher fonksiyonlar aşağıdaki gibi tanımlanan $I = [0,1]$ 'den $\{-1,1\}$ 'e adım fonksiyonlardır. n , $0,1,2,3, \dots$ gösterebilir. O zaman n . rademacher fonksiyonu $\phi_n(x)$, $n \geq 1$ ve $i = 0,1,2, \dots, 2^n - 1$ olmak üzere $\phi_0(x) = 1$, $x \in [0,1]$ ve

$$\emptyset_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{2i}{2^n}, \frac{2i+1}{2^n}) \\ -1 & x \in [\frac{2i+1}{2^n}, \frac{2i+2}{2^n}) \end{cases} \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.27 (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere X 'in verilen bir A alt kümesi için A 'yı içeren tüm kapalı kümelerin arakesitlerine A 'nın kapanışı denir. clA ile gösterilir.

Tanım 2.28 X bir topolojik uzay ve X 'in topolojisine neden olan X kümesi üzerinde bir d metriği varsa X metrikleştirilebilir denir. X 'in topolojisini veren özel bir d metriği ile birlikte X bir metrikleştirilebilir uzaydır.

Tanım 2.29 $\mathfrak{X}$ bir normlu uzay olsun. O zaman $\mathfrak{X}$ üzerinde $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (2.6)$$

'dir. Bu metrikle oluşturulan topoloji, $\mathfrak{X}$ 'in norm topolojisi olarak adlandırılır.

Tanım 2.30 $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere, X 'in alt kümelerinden meydana gelen $\mathcal{B}$ topluluğu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X üzerindeki bir topoloji için bir tabandır denir.

- a) Her $x \in X$ için x 'i içeren $\mathcal{B}$ 'nin en az bir B elemanı vardır.
- b) Eğer x, B_1 ve B_2 gibi iki taban elemanının arakesitinde ise; o takdirde $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ olacak şekilde x 'i içeren bir B_3 taban elemanı vardır.

Teorem 2.31 (Banach – Stone) X ve Y birer kompakt Hausdorff uzayları ve $A: C(Y) \rightarrow C(X)$ örten izometri olsun. Bu durumda $T: X \rightarrow Y$ bir homeomorfizma ve $C(X)$ 'de bir π fonksiyonu vardır, öyle ki her $x \in X$ için $|\pi(x)| = 1$ ve her $f \in C(Y)$ ve $x \in X$ için $(Af)(x) = \pi(x)f(T(x))$ 'tir (Sinhg ve Manhas, 1993).

3. LATİS HOMOMORFİZMALARI

Bu bölümde, kompakt bir küme üzerinde sürekli fonksiyonların latisleri arasındaki homomorfizmalar üzerindeki bazı genel sonuçlar elde edilir. Sonuçlarımız, (Kaplansky, 1947,1948), (Shirota, 1952) ve (Cater, 1965) ile ilgilidir. Bununla beraber bu çalışmanın sadece izomorfizmalarla ilgili olduğuna fakat $C(X)$ 'in daha genel alt latisleri arasında olmadığına dikkat edelim.

$T: C(Y) \rightarrow C(X)$ bir latis izomorfizması olsun. $t(x, c) = Tc(x)$ şeklinde $t: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanır. t 'nin iki açık özelliği de şunlardır;

- Her reel c için $t(\cdot, c)$ fonksiyonu süreklidir.
- Sabitleştirilmiş $x \in X$ için $t(x, \cdot)$ fonksiyonu azalmayandır.

Her $x \in X$ için $O(x) = \{Tf(x): f \in C(Y)\}$ şeklinde bir küme olsun ve

$X_T = \{x \in X: O(x) \text{ tek bir nokta değildir}\}$ açık kümesinin de bu şekilde olduğu düşünölsün.

$$X/X_T = \{x \in X: t(x, c) = t(x, d) \text{ her } c, d \in \mathbb{R} \text{ için}\} \quad (3.1)$$

şeklinde olduğu görölür.

Yardımcı Teorem 3.1 Aşağıdaki notasyon ile $x \in X_T$ verildiğinde tek bir $y \in Y$ vardır, öyle ki her $c \in \mathbb{R}$ için

$$f(y) > c, Tf(x) \geq t(x, c) \quad (3.2)$$

ifadesini gerektirir ve

$$f(y) < c \text{ de } Tf(x) \leq t(x, c) \quad (3.3)$$

ifadesini gerektirir.

İspat: $x \in X$ ve $c \in \mathbb{R}$ 'yi sabit turalım. Bir $y \in Y$ vardır (mümkün olduğu kadar c 'ye bağılı) öyle ki $f(y) > c, Tf(x) \geq t(x, c)$ ifadesini gerektirir. Aksi taktirde her $y \in Y$ için $f \in C(Y)$ vardır ki $f(y) > c$ fakat $Tf(x) < t(x, c)$ ' tir. Kompaktlıkla

$Tf_i(x) < t(x, c)$ olduğu zaman $f_1 \vee \dots \vee f_k \geq c$ ile $f_1, \dots, f_k$ sonlu bir sistem vardır. Bu bir çelişkidir.

Sonra y 'nin genellikle c 'den bağımsız olduğu gösterilir. Böylece c' ve $y' \neq y$ 'nin var olduğunu kabul edelim öyle ki $f(y') > c', Tf(x) \geq t(x, c')$ ifadesini gerektirir. $c' \geq c$

varsayımı altında genellilik bozulmaz. O zaman $d \in \mathbb{R}$ verildiğinde; $f, f' \in C(Y)$ seçilebilir öyle ki $f(y) > c$ ve $f'(y') > c'$ 'dür; fakat $f \wedge f' \leq d$ 'dir, $x \in X_T$ olduğundan imkansız olan

$$t(x, d) = Td(x) \geq T(f \wedge f')(x) = Tf(x) \wedge Tf'(x) \geq t(x, c) \quad (3.4)$$

ifadesi ile devam eder. Yukarıdaki tartışma $c' = c$ aldığımızda y 'nin tek olduğunu gösterir: Bu birinci gerektirmeyi doğrular. Simetri ile, $y' \in Y$ vardır öyle ki tüm c' 'ler için $f(y') < c$ eşitsizliği $Tf(x) \leq t(x, c)$ ifadesini gerektirir. $y' = y$ olduğunu gösterelim. $c < c'$ aldığımızda $t(x, c) < t(x, c')$ elde edilir. Şimdi, eğer $y' \neq y$ ise $f(y) < c$ ve $f(y') > c'$ ile $f \in C(Y)$ vardır ve bu nedenle $Tf(x) \leq t(x, c)$ ve $Tf(x) \geq t(x, c')$ 'dir ve imkansızdır.

Yardımcı Teorem 3.2 Yardımcı teorem 3.1'in notasyonları ile; $\tau(x) = y$ ile verilen $\tau: X_T \rightarrow Y$ dönüşümü süreklidir.

İspat: Aksi varsayılırsa; $x \in X$ 'e yakınsayan x_α neti vardır öyle ki $\tau(x_\alpha), \tau(x)$ 'e yakınsamaz. Y kompakt olduğunda gerekirse alt nete geçmek için $\tau(x)$ 'in U komşuluğunun var olduğu varsayılır öyle ki her α için $\tau(x_\alpha) \notin U$ 'dur.

$c, d \in \mathbb{R}$ sabitler olsun ve $y = \tau(x), y_\alpha = \tau(x_\alpha)$ yazalım. O zaman Y tam olarak regüler iken $f \in C(Y)$ vardır öyle ki $f(y) < c$ ve her α için $f(y_\alpha) > d$ 'dir. Her α için $Tf(x) \leq t(x, c)$ ve $Tf(x_\alpha) \geq t(x_\alpha, d)$ olur. Süreklilik ile $Tf(x) \geq t(x, d)$ olduğu görülür ve bu yüzden $t(x, d) \leq t(x, c)$ 'dir. Simetrilik ile de $t(x, d) = t(x, c)$ 'dir.

Bütün bunlar aşağıdaki gibi tekrar ifade edilebilir:

Önerme 3.3 $T: C(Y) \rightarrow C(X)$ bir homomorfizma olsun. O zaman $\tau: X_T \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü vardır öyle ki $t(x, c) = Tc(x)$ ve

$$X_T = \{x \in X: t(x, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ sabit değildir.}\} \quad (3.5)$$

olmak üzere

$$t(x, f(\tau(x))^-) \leq Tf(x) \leq t(x, f(\tau(x))^+), (f \in C(Y), x \in X_T) \quad (3.6)$$

'dır.

Eğer $x \notin X_T$ ise bu durumda $t(x, \cdot)$ ile erişilmiş tek değer $Tf(x)$ 'tir. Yukarıdaki τ 'dan, T 'ye bağlı (veya T 'ile oluşturulan) bir dönüşüm olarak bahsedilecektir.

Aşağıdaki sonuçlar, bir homomorfizmanın davranışının sadece sabit fonksiyonlar üzerindeki etkisine dayandığını gösterir.

Sonuç 3.4 $T: C(Y) \rightarrow C(X)$ bir homomorfizma olsun.

- Eğer T , $C(X)$ 'in noktasal yakınsaklığının topolojisi için $\mathbb{R}_Y$ üzerinde sürekli ise bu durumda her $f \in C(Y)$ ve her $x \in X_T$ için $Tf(x) = t\left(x, f(\tau(x))\right)$ 'tir.
- Eğer T , $\mathbb{R}_Y$ üzerinde lineer ise bu durumda o vektör latisinin bir homomorfizmasıdır ve bu yüzden $\omega = T1$ olduğunda $Tf = \omega \cdot \tau^*(f)$ 'tir.
- Eğer T , sabitleri koruyorsa (Bu her reel c için $Tc = c$), bu durumda T bir cebir homomorfizmasıdır ve bu yüzden $T = \tau^*$ 'dir.

Önceki sonucun üçüncü kısmı uzun bir zaman önce Mena ve Roth, (1978) tarafından ispatlanmıştır.

Genel durum için (Ercan ve Wickstead, 2006)'ya bakınız.

Şimdi $T: C(Y) \rightarrow \mathbb{R}$ skaler değerli durumunu düşünelim. Bu miktarlar, bir tek nokta üzerinde sürekli fonksiyonların latisi olarak $\mathbb{R}$ 'nin incelenmesi için uygundur.

İlk olarak; eğer T sürekli değilse, bir tek $y \in Y$ noktasına bağlı olduğunu dikkate alalım, eğer $t(c) = Tc$ şeklinde tanımlanırsa;

$$t(f(y)^-) \leq Tf \leq t(f(y)^+), \quad (f \in C(Y)) \quad (3.7)$$

olur.

Bu $\delta_y f$ bir genişleme ile Tf 'yi kontrol etmeyi gerektirir. Eğer ki f 'de T 'nin tam değeri y 'de f 'nin değerinden sonuç çıkarılmamış olsa bile, T yerel bir davranışa sahip olur.

Önerme 3.5 $T: C(Y) \rightarrow \mathbb{R}$, $y \in Y$ noktasına bağlı bir homomorfizma olsun. Eğer f ve g , y 'nin komşuluğu üzerinde eşitse; bu durumda $Tf = Tg$ 'dir.

İspat: Eğer gerekirse; $f \wedge g$ ve $f \vee g$ ile f ve g değiştirilerek $f \leq g$ olduğu kabul edilebilir. $Th \leq Tf$ 'nin $h(y) < f(y)$ ifadesini sağladığını yardımcı teorem 3.1'de açıkça görmekteyiz. f ve g 'nin eşit olduğu durumda y 'nin açık komşuluğu A olsun ve $h' \geq 0$, A 'nın dışında sıfır olan sürekli bir fonksiyon olsun ve öyle ki $h'(y) = 1$ olsun. $h = g - h'$ alalım. Bu durumda $Th \leq Tf$ elde edilir. Fakat, $g = h \vee f$ ve bu yüzden

$$Tg = Th \vee Tf = Tf \quad (3.8)$$

'tir.

Bu, evrensel kompakt uzayı, $\mathbb{R}$ ayrılmış varsayılarak (Kaplansky, 1947)'yi geliştirmek için kullanılabilir.

Sonuç 3.6 $T: C(Y) \rightarrow C(X)$ bir homomorfizma olsun.

- (a) Eğer T örten ise bu durumda $X_T = X$ ve $\tau: X \rightarrow Y$, Y 'nin kapalı alt uzayı olarak X 'i gömer.
- (b) Eğer T birebir ise bu durumda $\tau(X_T)$, Y 'de yoğundur. Bunun yanı sıra $X_T = X$ ise bu durumda τ örtendir.

İspat: (a)'nın ispatı önerme 3.3'ten görülür. (b)'ye gelince; $y \in Y$ 'nin $\tau(X_T)$ 'nin kapanışı içinde olmadığını varsayalım. Bu durumda bir $f \in C(Y)$, $f(y) = 1$ ile $\tau(X_T)$ 'yi içeren bir açık küme üzerinde sıfır olan vardır. $Tf = T0$ olduğunu gösterelim. Şüphesiz eğer ki $x \notin X_T$ ise bu durumda $Tf(x) = T0(x)$ 'tir. Eğer $x \in X_T$ ise bu durumda $Tf(x)$, f 'de $T^*\delta_x: C(Y) \rightarrow \mathbb{R}$ homomorfizmasının bir değeridir. Açık olarak; $T^*\delta_x$, $\tau(x)$ 'e bağlıdır ve f ve 0 , $\tau(x)$ 'in komşuluğunda eşittir. Bu nedenle $Tf(x) = T0(x)$ ve T birebir değildir.

Eğer T birebir ve $A \subset Y$ herhangi boş olmayan açık kümesi üzerinde $f, g \in C(Y)$ eşit ise bu durumda X 'in boş olmayan açık altkütmesi $\tau^{-1}(A)$ üzerinde Tf ve Tg eşittir.

Bu bölümü aşağıdaki örnek ile kapatalım.

Örnek 3.7 $T: C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, 0 noktası ile bağlantılı örten bir homomorfizmadır ve öyle ki her $c \in [-1,1]$ için f vardır ve bu durumda $f(0) = 0$ ve $Tf = c$ 'dir.

İspat: Tüm n 'ler için $t_n \neq 0$ ile $[0,1]$ içindeki (t_n) 0'a yakınsayan bir dizi olsun. U , $\mathbb{N}$ üzerinde bir serbest ultrafiltre olsun ve $\gamma: C[0,1] \rightarrow [-\infty, \infty]$ fonksiyonu

$\gamma(f) = \lim_{U(n)} nf(t_n)$ olarak tanımlansın.

$s: [-\infty, \infty] \rightarrow [-1,1]$ artan bir homeomorfizma olsun ve

$$Tf = \begin{cases} f(0) - 1 & f(0) < 0 \\ s(\gamma(f)) & f(0) = 0 \\ f(0) + 1 & f(0) > 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

T istenilen özellikleri sağlar.

Başka bir örnek de (Kaplansky, 1947)'de görülmektedir.

4. İZOMORFİZMALAR ÜZERİNE EK BİLGİLER

Bu bölümde $T: C(Y) \rightarrow C(X)$ aksi belirtilmedikçe bir latis izomorfizması olarak belirtilecektir. $\tau: X \rightarrow Y$ ve $t: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümleri bölüm 3'te olduğu gibi aynı anlamdadır. Aşağıdaki iki sonuç, genel otomorfizmalar için ispatlayabileceğimiz temel yapısal özellikler içerir. Önerme 4.1 Kaplansky'e aittir. Bu açık olarak sonuç 3.6'dan elde edilir. Bununla beraber bu, yardımcı teorem 3.1 ve 3.2'den doğrudan çıkarılır.

Teorem 4.2'nin ilk kısmı, bir izomorfizmanın, sadece homomorfizmalar için doğru olmayan τ ve t dönüşümlerine bağlı olduğunu gösterir. Ayrıca bu, soyut düşüncelerden takip edilir olmasına rağmen onu kesinleştirmek gerekir.

(b). kısım, $t(x, \cdot)$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ 'nin otomorfizmaları olmak üzere $x \in X$ 'lerin kümesinin çok büyük olduğu durumda homomorfizmaların olamayacağını ispatlar.

Önerme 4.1 (Kaplansky) Eğer $T: C(Y) \rightarrow C(X)$ bir izomorfizma ise bu durumda $\tau: X \rightarrow Y$ bir homeomorfizmadır.

İspat: τ için ters olan T^{-1} 'e bağlı $Y \rightarrow X$ sürekli dönüşümünü gösterelim. $s: Y \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü de $s(y, c) = T^{-1}c(y)$ şeklinde tanımlansın. Sabit $x \in X$ ve $y = \tau(x)$ olsun. T^{-1} ve y 'ye yardımcı teorem 3.1'i uygularsak $x' \in X$ elde edilir, öyle ki her c, d ve f için;

- $Tf(x) > t(x, c)$, $f(y) \geq c$ 'yi gerektirir.
- $Tf(x') < d$, $f(y) \leq s(y, d)$ 'yi gerektirir.

Birinci gerektirmenin burada, yardımcı teorem 3.1'deki ikinci gerektirmenin başka şekilde ifadesi olduğuna dikkat edelim. Geriye sadece $x' = x$ olduğunu göstermek kalır. Aksi içinse $c = 1$ alınsın ve $s(y, d) \leq 0$ olsun. Bunları sağlayan bir f alalım; bu durumda $Tf(x) > t(x, 0)$ ve $Tf(x') < d$ olmalıdır. Bu durumda $f(y)$, 1'den daha büyük ve 0'dan daha küçük olmalıdır. Bu bir çelişkidir.

Eğer $\tau: X \rightarrow Y$, T ile oluşturulan bir homeomorfizma ise bu durumda $T' = T \circ (\tau^{-1})^*$, $C(X)$ 'in otomorfizmasıdır ve $C(X)$ 'in bağlantılı homeomorfizması, X üzerindeki birim dönüşümdür. Bununla birlikte T' ve T , cebirlerin bir lineer izomorfizması ile bileşke ile korunulmuş bir özelliği paylaşırlar. Basitleştirmek için bazı ispatları kullanacağız.

Teorem 4.2 $T: C(Y) \rightarrow C(X)$ bir izomorfizma olsun. Bu durumda:

(a) Her $f \in C(Y)$ ve tüm $x \in X$ için

$$\begin{aligned} Tf(x) &= t\left(x, f(\tau(x))^+\right) \wedge \lim_{z \rightarrow x} \inf t\left(z, f(\tau(z))^+\right) \\ &= t\left(x, f(\tau(x))^- \right) \vee \lim_{z \rightarrow x} \sup t\left(z, f(\tau(z))^- \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

elde edilir.

(b) $D \subset X$ 'in yoğun bir altkümesi G_δ vardır öyle ki her $x \in D$ için $t(x, \cdot)$, $\mathbb{R}$ 'nin bir otomorfizmasıdır ve özellikle

$$Tf(x) = t\left(x, f(\tau(x))\right) \quad (f \in C(Y), x \in D) \quad (4.2)$$

elde edilir.

İspat: $Y = X$ ve $\tau = 1_X$ olduğunu kabul edelim. İlk kısmı ispatlamak için bu gözlem ile başlayalım, X üzerinde verilen keyfi sınırlı fonksiyonlar a ve c için $a \leq b \leq c$ olacak şekilde bir $b \in C(X)$ olması için gerek ve yeter koşul üst $a \leq \text{alt } c$ olmasıdır, burada üst a ,

$$\text{üst } a(x) = a(x) \vee \lim_{z \rightarrow x} \sup a(z) \quad (4.3)$$

ile a 'yı kısıtlayan en büyük üst yarı sürekli fonksiyondur, $\text{alt } c$ de

$$\text{alt } c(x) = c(x) \wedge \lim_{z \rightarrow x} \inf c(z) \quad (4.4)$$

ile c 'yi kısıtlayan en küçük alt yarı sürekli fonksiyondur.

Bu Hahn-Tong teoreminden elde edilir ve (Semadeni, 1971)'de görülür. Bir dakikalık yansıma b interpolasyon fonksiyonunun tek olması için gerek ve yeter koşulun

$$\text{üst } a = \text{alt } c \quad (4.5)$$

olduğunu açıklamak için yeterlidir.

Eğer, $T_\pm f(x) = t(x, f(x)^\pm)$ olmak üzere, Tf 'in T_-f ve T_+f arasındaki tek sürekli fonksiyon olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur. $g \in C(X)$ ile

$$T_-f \leq g \leq T_+f \quad (4.6)$$

olduğunu varsayalım. Önerme 3.3'ten

$$T(f - \delta) \leq T_-f \leq g \leq T_+f \leq T(f + \delta) \quad (\delta > 0) \quad (4.7)$$

elde edilir. Fakat herhangi latis izomorfizması keyfi supremum ve infimumları korur ve bu nedenle

$$Tf = \bigvee_{\delta > 0} T(f - \delta) \leq g \leq \bigwedge_{\delta > 0} T(f + \delta) = Tf \quad (4.8)$$

'tir.

(b)'yi ispatlamak için; $p < q$ ile verilen $p, q \in \mathbb{Q}$ ve

$$N(p, q) = \{x \in X : t(x, p) = t(x, q)\} \quad (4.9)$$

kümesini ele alalım. Sonuç 3.6'dan sonraki uyarıyla; bu içi boş olan kapalı bir kümedir ve bu yüzden $N = \bigcup_{p < q} N(p, q)$ ($p, q \in \mathbb{Q}$), birinci kategoridendir. D_1 , X 'te N 'nin tümleyeni olsun. $t(x, \cdot)$ 'in $\mathbb{R}$ üzerinde tam artan olması için gerek ve yeter koşul $x \in D_1$ olmasıdır. Şimdi $s(x, c) = T^{-1}c(x)$ ile $s: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlansın ve $\mathbb{R}$ üzerinde tam artan olan $s(x, \cdot)$ için tüm x 'lerin kümesi D_2 olsun. $D = D_1 \cap D_2$ 'nin X 'in G_δ yoğun alt kümesi olduğu açıktır. Şimdi önerme 3.3'ten dolayı tüm $x \in D$ 'ler için $t(x, \cdot)$ 'in sürekli olduğunu göstermek yeterlidir ($\mathbb{R}$ 'nin otomorfizması olduğundan dolayı).

$x \in D$ sabiti ve verilen $c \in \mathbb{R}$ için $t(x, c)$ 'nin $s(x, \cdot)$ 'in sürekliliğinin bir noktası olduğunu sağlayan

$$s(x, t(x, c)) = c \quad (4.10)$$

elde edilir. $t(x, \cdot)$ tam artan ve $s(x, \cdot)$ sayılabilir bir kümenin dışında sürekli olduğundan (4.10)'un sağlandığı yerdeki c 'lerin kümesinin $\mathbb{R}$ 'de yoğun olduğu görülür. Çünkü tümleyen küme en çok sayılabiliridir.

Böylece aşağıdaki sonuçlar ispatı tamamlar.

Yardımcı Teorem 4.3 $t, s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tam artan fonksiyonlar olsunlar öyle ki $s \circ t$, doğrunun bir yoğun alt kümesi üzerinde birimdir. Bu durumda t süreklidir.

İspat: $S = \{c \in \mathbb{R} : s(t(c)) = c\}$ kümesini oluşturalım. Her reel c için

$$s(t(c^-)^-) = s(t(c^+)^+) \quad (4.11)$$

olduğunu gösterelim. S 'de c sabit ve (p_n) ve (q_n) dizi olsun öyle ki $p_n \rightarrow c^-$ ve $q_n \rightarrow c^+$ 'dir. Bu durumda $t(p_n) \rightarrow t(c^-)^-$ ve $t(q_n) \rightarrow t(c^+)^+$ ve bu yüzden

$$s(t(c^-)^-) = s(t(c^+)^+) = c \quad (4.12)$$

'dir.

Sadece T sürekli olduğu zaman tüm $x \in X$ 'ler için teorem 4.2'nin (b) kısmındaki temsilin mümkün olduğunu hatırlayalım. Aşağıdaki yardımcı teoremden Kaplansky, Cater ve Itô'dan elde edilen sonuçları toplarız.

Yardımcı Teorem 4.4 $T: C(Y) \rightarrow C(X)$ bir izomorfizma olsun. Aşağıdakiler denktir:

(a) $T, C(X)$ 'de noktasal yakınsaklığın topolojisi için $\mathbb{R}_Y$ üzerinde süreklidir.

(b) T , noktasal yakınsaklığın topolojisinde süreklidir.

(c) Tüm f ve x için $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$

(d) T^{-1} artandır.

(e) T , norm topolojisinde süreklidir.

İspat: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) ve (e) $\Rightarrow$ (a) gerektirmelerinin ispatları açık olduğundan (c) $\Rightarrow$ (d) gerektirmesini gösterelim. (d), eğer her x için $f(x) > g(x)$ ise bu durumda $T^{-1}f(y) > T^{-1}g(y)$ olduğu anlamına gelir. $h = f, g$ için $h' = T^{-1}h$ yazarak bu şu şekilde ifade edilebilir: Eğer bir $y \in Y$ için $f'(y) \leq g'(y)$ ise bu durumda (c) ile açık olarak belirtilen bir $x \in X$ için $Tf'(x) \leq Tg'(x)$ 'dir.

$\{h \in C(X): f < h < g\}$ ($f, g \in C(X)$) kümeleri $C(X)$ 'in norm topolojisi için bir taban oluşturduğundan (d) $\Rightarrow$ (e)'dir.

Sonuç 4.5 Her boş olmayan sıfır kümesinin X içinde boş olmayan bir içe sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $C(X)$ 'in her otomorfizması süreklidir.

İspat: Sonuç 3.6 (b), $C(X)$ 'in otomorfizmasının artan olmasını gerektirir.

Sonuç 4.5'e uygun olan en tipik örnek, onun Stone – Čech kompaktlaştırması içindeki tamsayıların genişlemesi olan $\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ 'dir. $C(\mathbb{N}^*) = \ell_\infty / c_0$ Banach Cebirleri olarak iyi bilinir. $f \in C(\mathbb{N}^*)$ 'in bir $x \in \mathbb{N}^*$ noktasında sıfırlandığını varsayalım ve $f' \in C(\beta\mathbb{N})$ bir genişleme olsun. Açık olarak; sonlu bir $M \subset \mathbb{N}$ vardır öyle ki M 'de $n \rightarrow \infty$ iken $f'(n) \rightarrow 0$ 'dır. Bundan dolayı $f' - 1_M f'$, f' 'in M 'de sıfırlanan başka bir genişlemesidir ve bu yüzden $f, \mathbb{N}^*$ 'in açık alt kümesi olan $cl_{\beta\mathbb{N}} M \cap \mathbb{N}^*$ üzerinde sıfırdır.

Otomorfizmaları otomatik olarak sürekli olan diğer bir latis sınıfı da $C(X)$ 'in bir sayılabilir ailesinin ultraçarpımları (Banach uzayları)'dır. Burada daha fazla detaya girmekten kaçınılacaktır. Sonuç 4.5'ten çıkarılan ultraçarpımlardaki latis otomorfizmalarının sürekliliğini almanın yeterli olduğu (Cabello Sánchez, 2000)'den bilinir.

Aşağıdaki sonuç için; X 'in belirli noktalarında T 'nin davranışının kesin bir açıklamasını elde etmek için (Cater, 1965) çalışmasından yararlanılır, hatta öyle bir açıklama X 'in tüm noktalarında imkansızdır. Bununla birlikte ispat, Kaplansky (1948) tarafından hazırlanan bir çalışma ile geliştirilir.

Yardımcı Teorem 4.6 $T: C(Y) \rightarrow C(X)$ bir izomorfizma ve $x \in X$ aşağıdaki durumların birini sağlayan bir nokta olsun:

- (a) Tüm n 'ler için $x_n \neq x$ ile x 'e yakınsayan bir (x_n) dizisi vardır.
- (b) X, x 'te yerel bağlantılıdır.

Bu durumda $t(x, \cdot)$, $\mathbb{R}$ 'nin bir otomorfizmasıdır ve tüm $f \in C(Y)$ için; $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$. Teorem 4.2'deki notasyonla T izomorfizması olduğunu dikkate almaksızın bazı noktalar D 'de olmalıdır anlamına gelir (Bu örnek 6.4 ile karşılaştırılmalıdır.). İspat için aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 4.7 $x \in X$, yardımcı teorem 4.6'daki şartlardan birini sağlasın. Bir x noktasında $f, g \in C(X)$ olduğunu varsayalım, fakat $\{z \in X: f(z) = g(z)\}$, x 'in bir komşuluğu olmasın. Bu durumda $h \in C(X)$ vardır öyle ki $\{z: h(z) > f(z)\}$ ve $\{z: h(z) < g(z)\}$, x 'in her komşuluğunda kesişir.

Yardımcı Teorem 4.7'nin ispatı: İlk durumda çift n için

$$h(x) = f(x) = g(x)$$

$$h(x_n) = f(x_n) + 1/n \tag{4.13}$$

ve tek n için

$$h(x_n) = g(x_n) - 1/n \tag{4.14}$$

olarak $h: \{x_n\} \cup \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlayalım ve Tietze Genişleme Teoremi ile genişletelim. İkinci kısım için de $f \geq g = 0$ alınabilir. Eğer $f(z) = 0$ ise $h(z) = 0$ ile

$$h(z) = 2f(z)\cos(1/f(z)) \tag{4.15}$$

oluşturalım.

Yardımcı Teorem 4.6'nın ispatı: $\tau = 1_X$ kabul edelim. $f(x) = g(x)$ varsayalım.

$Tf(x) = Tg(x)$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer f ve g , x 'in bir komşuluğunda aynı ise bu önerme 3.3'ten elde edilir. Aksi halde yardımcı teorem 4.7'de olduğu gibi h alınır. $\{z: Th(z) \geq Tf(z)\}$, ve $\{z: Th(z) \leq Tg(z)\}$, x 'in her komşuluğunda kesiştiği önerme 3.3'ten elde edilir.

Bundan dolayı

$$Tf(x) \leq Th(x) \leq Tg(x) \tag{4.16}$$

ve simetriden $Tf(x) = Tg(x)$ 'tir.

Bu yüzden $Tf(x) = t(x, f(x))$ ve (örtelikten dolayı) $t(x, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ örtendir ve böylece süreklidir. Bunun otomorfizma olduğunu göstermek için; $s(x, c) = T^{-1}c(x)$ ile verilen $s(x, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t(x, \cdot)$ için sürekli terstir.

Şimdi, yukarıdaki sonuçların ışığında bazı örnekler verelim. Başlangıçta bahsettiğimiz gibi sürekli olmayan otomorfizmalar Stone – Čech kompaktlaştırması ile bağlantılı görülür. Aşağıdaki sonuç, metrikleştirilebilir S için $C(\beta S)$ 'nin otomorfizmalarını açıklar.

Sonuç 4.8 S bir metrikleştirilebilir uzay, τ , S 'nin bir homeomorfizması ve $t: S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kabul edilebilir sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x))) \quad (x \in S, f \in C^*(S)) \quad (4.17)$$

ile tanımlanan dönüşüm $C^*(S)$ 'in bir otomorfizmasıdır. $C^*(S)$ 'in tüm otomorfizmaları bu şekildedir.

İspat: T 'nin örten olduğunu göstermek yeterlidir. $C^*(S) = C(\beta S)$ ve ikinci kısımdaki her şey, βS 'deki G_δ noktalarının kesin olarak S 'de olduğu yardımcı teorem 4.6'dan elde edilir fakat t 'nin sürekliliği elde edilemez. Aşağıdaki uyarı ispatı tamamlar.

Yardımcı Teorem 4.9 S metrik uzay olmak üzere $t: S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kabul edilebilir olsun (ya da hatta normal uzay) $s(x, d) = c$ olarak $s: S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlamak için gerek ve yeter koşul $t(x, c) = d$ olmasıdır.

Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (a) Eğer f ise fonksiyon $x \rightarrow t(x, f(x))$, $C^*(S)$ 'dedir.
- (b) t süreklidir.
- (c) t kapalı grafiğe sahiptir.
- (d) s kapalı grafiğe sahiptir.
- (e) s süreklidir.
- (f) Sadece f ise $x \rightarrow t(x, f(x))$ fonksiyonu $C^*(S)$ 'dedir.

İspat: $(d) \Leftrightarrow (e) \Leftrightarrow (f)$ denkliklerinin elde edilmesi için gerek ve yeter koşul $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c)$ denkliklerinin elde edilmesi gerektiği açıktır. $(c) \Leftrightarrow (d)$ aşıkardır, bu nedenle ilk üç durumun denk olduğunu ispatlamak yeterli olur. Açıkça, (Kaplansky, 1948)'de olduğu gibi $(a) \Rightarrow (b)$ olduğunda (b) , (a) ve (c) 'nin her ikisini de gerektirir ve sonuç olarak $(c) \Rightarrow (b)$ 'yi ispatlamamız yeterlidir. Bir metrik uzayda tanımlı kapalı grafikli, her

yerel sınırlı, reel değerli fonksiyonların sürekli olduğunu gösterelim. $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. u 'nın grafiği,

$$G(u) = \{(x, c) \in M \times \mathbb{R} : c = u(x)\} \quad (4.18)$$

kümesidir.

M 'de x 'e yakınsayan (x_n) olsun. $n \rightarrow \infty$ iken $u(x_n) \rightarrow u(x)$ olduğunu gösterelim. Gerçekten eğer u^* , $(u(x_n))$ dizisinin bir limit noktası ise bu durumda (x, u^*) , $G(u)$ 'a bağlıdır ve bu yüzden $u^* = u(x)$ 'tir.

Başka bir ilginç sonuç da $C(X)$ 'in sadece sürekli otomorfizmalara sahip olan daha geniş $C(Y)$ içinde bir alt cebir olarak gömülmesidir. Şimdi de $Y = X \times [0,1]$ olduğunu düşünelim, doğal izdüşüm $\pi: Y \rightarrow X$ ve $\iota(x) = (x, 0)$ ile verilen $\iota: X \rightarrow Y$ gömme olsun. $\pi^*: C(X) \rightarrow C(Y)$ ve $\iota^*: C(Y) \rightarrow C(X)$ dönüşümleri, cebirlerin homomorfizmalarıdır ve birincisi birebir ve bununla birlikte $\iota^* \circ \pi^* = 1_{C(X)}$ 'dir. Görüldüğü gibi Y 'nin her noktası yardımcı teorem 4.6'daki ilk hipotezi sağlar.

5. DÜZGÜN SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Bu bölümde düzgün sürekli fonksiyonların latisleriyle ilgilenen Maribel Garrido ve Jesus Jaramillo'nun son sonuçlarının lineer olmayan karşılıklarını göstereceğiz. (Garrido ve Jaramillo, 2000)'de olduğu gibi sadece metrik uzayları düşünelim. X ve Y kompakt uzayları gösterebilir ve verilen bir X metrik uzayı için daha önceki kuralları bir yana bırakalım ve X üzerindeki tüm sınırlı düzgün sürekli fonksiyonların latisleri için $U^*(X)$ yazılsın.

(Garrido ve Jaramillo, 2000)'de uyarıldığı gibi; her (X, d) metrik uzayı, bir κX kompaktlaştırmasına sahiptir, öyle ki $U^*(X)$ Banach cebirleri ve $C(\kappa X)$ açık biçimde izometrik olarak izomorfiktir. Daha önemlisi (Garrido ve Jaramillo, 2000)'den görüldüğü üzere şöyledir: X tam metrik uzay ise bu durumda tabanlarının sayılabilir temel komşuluğuna sahip olan κX 'in noktaları X 'in tamamıyla noktalarıdır.

X ve Y tam metrik uzay olmak üzere $T: U^*(Y) \rightarrow U^*(X)$ bir latis izomorfizması verildiğini kabul edelim. Bu durumda T , bir $\tau: \kappa X \rightarrow \kappa Y$ homeomorfizmasına sebep olur ve önceki uyarıyla τ , Y üzerine X 'in dönüşümüdür. Diğer yandan τ ile birleşimi düzgün sürekliliği korur ve bu yüzden Efremovich'in eski sonuçlarından τ düzgün sürekli ve aslında düzgün bir homeomorfizmadır.

$U^*(Y)$ ve $U^*(X)$ 'in izomorfik latisler olması için gerek ve yeter koşul X ve Y 'nin düzgün homeomorfik olması gerektiği elde edilir. Bizim burada amacımız T 'yi göstermektir. Bu doğrultuda (Garrido ve Jaramillo, 2000)'deki aşağıdaki lineerlik elde edilir.

Teorem 5.1: X ve Y tam metrik uzaylar, $\tau: X \rightarrow Y$ düzgün homeomorfizma ve $t: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kabul edilebilir fonksiyon olsun, bunların gösterdiği durumlar:

- Eğer (x_n) ve (y_n) , X 'te $0 < d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ ile diziler ve $(c_n), (d_n), \mathbb{R}$ 'de sınırlı ise $c_n - d_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow t(x_n, c_n) - t(y_n, d_n) \rightarrow 0$ vardır.

Bu durumda

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x))) \quad (x \in X) \quad (5.1)$$

ile tanımlanan $T: U^*(Y) \rightarrow U^*(X)$ dönüşümü bir izomorfizmadır ve sonuç olarak tüm izomorfizmalar bu şekilde elde edilir.

İspat: İlk kısım, f 'in düzgün sürekli olması için gerek ve yeter koşulun $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ ifadesinin $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$ ifadesini gerektirmesi olduğu dikkate alınarak açıkça görülmektedir. Böylece $\tau = 1_X$ varsayar ve T 'yi (5.1)'deki gibi alırsak; $U^*(X)$ 'in bir

endomorfizmasını elde ederiz. Gerçekte burada sadece $\Rightarrow$ gerektirmesine ihtiyaç vardır. $\Leftarrow$: ters gerektirme, eğer s, t 'nin kabul edilebilir tersi ise bu durumda

$$Sf(x) = s(x, f(x)) \quad (5.2)$$

alınarak T 'nin tersi elde edilir.

Tersini ispatlamak için; $T: U^*(Y) \rightarrow U^*(X)$ 'in bir izomorfizma olduğunu kabul edelim. Önceki uyarılarla T , bir düzgün homeomorfizma olarak Y örten, X 'i dönüştüren $\tau: \kappa X \rightarrow \kappa Y$ homeomorfizmasına neden olur ve X 'in noktaları κX 'de sayılabilir komşuluk tabanları aldığından $t(x, c) = Tc(x)$ olmak üzere (5.1)'i elde etmek için yardımcı teorem 4.6 (a)'ya başvurulabilir.

Açık olarak t kabul edilebilirdir. Her kabul edilebilir fonksiyon $t: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, öyle ki tüm $f \in U^*(X)$ için $t(\cdot, f(\cdot))$ 'in, $U^*(X)$ 'e ait olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olacaktır. $\Rightarrow$ ile değiştirilerek $\Leftrightarrow$ yukarıdaki durumu sağlar. $\Leftarrow$ gerektirmesi de s 'ye başvurulularak aynı tartışmadan elde edilir.

Gerçekten (x_n) ve (y_n) , X 'te $0 \neq d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ ile diziler olsun ve (s_n) ve (t_n) 'nin de $c_n - d_n \rightarrow 0$ ile sınırlı diziler olduğunu kabul edelim.

$$t(x_n, c_n) - t(y_n, d_n) \rightarrow 0 \quad (5.3)$$

olduğunu göstermeliyiz.

Fakat bir dizinin ℓ 'ye yakınsaması için gerek ve yeter koşul her alt dizinin ℓ 'ye yakınsayan başka bir alt dizi almasıdır. Burada $t(x_n, c_n) - t(y_n, d_n)$ 'nin bir alt dizisinin sıfıra yakınsadığını göstermek yeterlidir.

Böylece genelliği bozmaksızın (c_n) ve (d_n) dizilerinin c 'ye yakınsadığı kabul edilir.

Diğer yandan

(a) (x_n) yakınsak bir alt diziye sahiptir veya

(b) (x_n) kesikli bir alt diziye sahiptir.

(a) durumunda (x_n) 'i x 'e yakınsak alabiliriz. $t(x_n, c_n) \rightarrow t(x, c)$ olduğu ispatlanır ve sonuçlar simetri ile elde edilir. Tekrar $t(x, c)$ 'ye yakınsayan bir alt dizi bulmamız yeterlidir. Şimdi eğer gerekirse bir alt diziye başvurulularak diğerleri varsayılabilir:

Ya

(a.1) tüm n için $x_n = x$ ya da

(a.2) her $n \neq m$ için $x_n \neq x_m \neq x$.

İlk durumda ikinci değişkendeki süreklilik ile $t(x_n, c_n) \rightarrow t(x, c)$ 'dir ve ispat biter. (a.2)'yi varsayarsak; x_n 'i c_n 'e ve x 'i c 'ye gönderen fonksiyon $\{x_n\} \cup \{x\}$ kompakt kümesi üzerinde düzgün süreklidir ve bu yüzden $f \in U^*(X) = C(\kappa X)$ vardır öyle ki $c_n = f(x_n)$ ve $c = f(x)$ 'tir. (a)'nın varsayımı üzerindeki ispatı tamamlayan

$$t(x_n, c_n) = t(x_n, f(x_n)) \rightarrow t(x, f(x)) = t(x, c) \quad (5.4)$$

elde edilir.

(b) için de $n \neq m$ ve $d(x_n, y_n) < r/2$ için $d(x_n, x_m) \geq r > 0$ varsayılabilir. y_n 'i d_n 'e ve x_n 'i c_n 'e gönderen $S = \{x_n, y_n; n \in \mathbb{N}\}$ kümesi üzerinde bir fonksiyon tanımlansın. Açık olarak bu fonksiyon S üzerinde düzgün sürekli ve bu yüzden κX 'de S 'nin kapanışına sürekli bir fonksiyon olarak genişler ve normallik ile κX 'in de tamamına genişletilir. Böylece $f \in U^*(X)$ vardır öyle ki tüm n 'ler için $c_n = f(x_n)$ ve $d_n = f(y_n)$ 'dir. $x \rightarrow t(x, f(x))$ fonksiyonu düzgün sürekli ve $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ olduğundan ispatı tamamlayan

$$t(x_n, c_n) - t(y_n, d_n) = t(x_n, f(x_n)) - t(y_n, f(y_n)) \rightarrow 0 \quad (5.5)$$

elde edilir.

Önceki teoremden ' $d(x_n, y_n) > 0$ ' şartı kaldırılamaz. Gerçekten $U^*(\mathbb{N}) = \ell^\infty$ ve eğer T , ℓ^∞ 'ın bir otomorfizması ise bu durumda t yukarıdaki $d(x_n, y_n) > 0$ kaldırılma şartını sağlar ve $\Rightarrow$ ile $\Leftrightarrow$ değişimi ancak ve ancak T 'nin sürekli olmasına bağlıdır.

Gerçekten teorem 5.1'deki $d(x_n, y_n) > 0$ şartına geri dönülebilinmesi için gerek ve yeter koşul $\mathbb{N}$ 'nin düzgün kategorideki X 'in direkt toplamı olarak görünmemesidir. $\mathbb{N}$ 'nin bir direkt toplam olması için gerek ve yeter koşul $\varepsilon > 0$ ve $S \subset X$ sonsuz bir alt kümenin var olmasıdır öyle ki $s \in S$ ve $x \in X$ ($x \neq s$) olduğunda $d(s, x) \geq \varepsilon$ 'dur.

O halde, t üzerindeki bağlantılı durumda, $X \times [a, b]$ formunun her kümesi üzerinde t ve s 'nin düzgün sürekliliğe denk olduğuy kolayca görülür.

6. L^∞ 'A DAHA YAKIN BİR BAKIŞ

Bu bölümde sınırlı ve ölçülebilir fonksiyonların latileri arasındaki izomorfizmalar ile ilgilenilecektir. Verilen bir $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ölçüm uzayı için noktasal işlemler ile donatılmış X üzerindeki tüm ölçülebilir fonksiyonların kümesi için $L^0(\mu)$ yazılır ve fonksiyon özdeşleşmesi hakkındaki geleneksel uygunluk hemen hemen her yerde aynıdır.

Gerekli supremum normu ile $L^0(\mu)$ 'daki gerekli sınırlı fonksiyonların altkütmesi $L^\infty(\mu)$ ile gösterilen bir Banach cebiridir.

Genel temsil teoremleri ile $L^\infty(\mu)$, $\mathfrak{M}$ kompakt bir uzay olmak üzere $C(\mathfrak{M})$ 'ye izometrik olarak izomorftur. Genel olarak; $L^\infty(\mu)^*$ kümesi göreceli zayıf* topolojisi $L^\infty(\mu)$ üzerindeki tüm sıfır olmayan çarpımsal lineer fonksiyonların kümesidir. Burada bizim sadece $\mathfrak{M}$ hakkında birkaç elementer gerçeğe ihtiyacımız vardır. Esasen her bir ölçülebilir $A \subset X$, $\mathfrak{M}$ 'nin hem açık hem kapalı alt kümesine karşılık gelir. 1_A 'nın $L^\infty(\mu) = C(\mathfrak{M})$ 'de bir idempotent olduğu açıktır.

Diğer taraftan $\mathfrak{M}$ 'nin topolojisi çok kapsamlıdır: $\mathfrak{M}$ 'nin topolojisi her zaman aşırı bağlantısız uzaydır. Ayrıca $\mathfrak{M}$ atomik değilse bu durumda $\mathfrak{M}$ 'nin ayırık noktası yoktur ve gerçekte hiçbir nokta G_δ değildir.

Bununla beraber, boş olmayan sıfır kümeleri boş içe sahip olabilir (Bu pozitif ölçümlerin olmayan kümesi üzerinde, kaybolan $L^\infty(\mu)$ 'de tersinemez fonksiyonlara karşılık gelir).

Bir Banach latisi olarak; $L^\infty(\mu)$ bazı güzel özellikler göstermesine rağmen en dikkat çekici özellik sıralı tamlıktır. Eğer $S \subset L^\infty(\mu)$ (sıralı) sınırlı ise bu durumda $\vee S$ vardır. Eğer $S \subset L^\infty(\mu)$ sayılabilir ise bu durumda $\vee S$ noktasal olarak hesaplanır.

Yardımcı Teorem 6.1 $L^\infty(\nu) \rightarrow L^\infty(\mu)$ izomorfizmaları hemen hemen her yerde yakınsaklığı korur.

İspat: $f_n \rightarrow f$ hemen hemen her yerde sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$f = \bigwedge_n \bigvee_{k \geq n} f_k = \bigvee_n \bigwedge_{k \geq n} f_k \quad (6.1)$$

olmasıdır ve izomorfizmalar keyfi supremum ve infimumları korur.

Daha fazla ilerlemeden önce, aşağıdakiler gibi latis izomorfizmalarının davranışlarını basitleştirelim. $L: L^\infty(\nu) \rightarrow L^\infty(\mu)$ bir latis izomorfizması ve U da cebirlerin bağlantılı izomorfizması olsun. Bu durumda $T = L \circ U^{-1}$, bağlantılı cebir otomorfizması birim olan $L^\infty(\mu)$ 'nin bir latis otomorfizmasıdır. Bu şekilde bir kısıtlama getirilebilir.

Sonuç 3.5 (b)'den eğer $f, g \in L^\infty(\mu)$, bir ölçülebilir $A \subset X$ üzerinde hemen hemen her yerde aynı ise bu durumda Tf ve Tg 'nin de aynı olduğu elde edilir.

$t(x, c) = Tc(x)$ olarak $t: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlansın, Tc 'nin her hangi çeşidi yeterlidir. Şimdi, eğer f basit ise (bu, sadece sınırlı olarak bazı değerler alır)

$$f = \sum_{i=1}^n c_i 1_{A_i} \quad (6.2)$$

elde edilir ve bu nedenle $Tf(x) = t(x, f(x))$ hemen hemen her yerde sağlanır.

Her $f \in L^\infty(\mu)$ için aynısının sağlandığı düşünülür, fakat basit örnekler, $t(., c)$, Tc 'nin keyfi temsili ise bu durumun olmadığını gösterir. $L^\infty(\mu)$ 'nün temsil otomorfizmalarındaki ana netice olan aşağıdaki sonuç çeşitli çalışmaların mantıklı bir seçimi olduğunu gösterir.

Yardımcı Teorem 6.2 T , bağlantılı cebir otomorfizması birim olan $L^\infty(\mu)$ 'nün bir otomorfizması olsun. Bu durumda ölçülebilir bir kabul edilebilir $t: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vardır, öyle ki her $f \in L^\infty(\mu)$ için

$$Tf(x) = t(x, f(x)) \quad (6.3)$$

hemen hemen her yerde sağlanır.

İspat: Her rasyonel r için Tr 'nin sınırlı bir çeşidini sabitleyelim, öyle ki her $x \in X$ için $Tr(x)$ tanımlayalım. $r < s$ ise bu durumda hemen hemen her yerde $Tr(x) < Ts(x)$ olur. Açık olarak

$$N = \{x \in X: Tr(x) \geq Ts(x) \text{ bazı } r < s \text{ için}\} \quad (6.4)$$

kümesi sıfır ölçüme sahiptir.

$$t^*(x, c) = \begin{cases} Tr(x) & \text{eğer } x \notin N \text{ ise} \\ r & \text{eğer } x \in N \text{ ise} \end{cases} \quad (6.5)$$

alınarak $t^*: X \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlansın.

Şimdi, $c \in \mathbb{R}$ için

$$t(x, c) = \sup\{t^*(x, r): r \in \mathbb{Q}, r < c\} \quad (6.6)$$

alınır.

Yardımcı teorem 6.1'den, her $c \in \mathbb{R}$ için Tc 'nin sınırlı bir temsili olarak $t(., c)$ elde edilir.

Tüm $t(x, .)$ fonksiyonları artandır: $c, d \in \mathbb{R}$ seçelim öyle ki $c < d$ olsun ve herhangi bir $x \in X$ alalım. p ve q rasyonel sayılarsa $c < p < q < d$ 'dir ve istenildiği gibi

$$t(x, c) \leq t^*(x, p) \leq t^*(x, q) \leq t(x, d) \quad (6.7)$$

elde edilir.

Sonra $t(x, \cdot)$ 'nin soldan sürekli olduğunu ispatlayalım: her $c \in \mathbb{R}$ ve $x \in X$ için $c_n < c$ ile bir (c_n) dizisi vardır ve $t(x_n, c_n) \rightarrow t(x, c)$ 'nin var olduğunu göstermemiz yeterlidir. r_n, c 'ye yakınsayan rasyonel sayıların artan dizisi olsun öyle ki $t^*(x, r_n) \rightarrow t(x, c)$ 'dir. Sonra

$$\lim_n t^*(x, r_n) = \lim_n t(x, r_{n+1}) = t(x, c) \quad (6.8)$$

elde edilir.

Şimdiye kadar ki bildiklerimizden formül (6.3) elde edilir, şöyle ki $t(\cdot, c)$ Tc 'nin bir versiyonu ve her $t(x, \cdot)$ 'nin soldan sürekliliğidir. $f \in L^\infty(\mu)$ alınsın. $(s_n), f$ 'e noktasal olarak yakınsayan basit fonksiyonların artan bir dizisi olsun.

Önceki yardımcı teoremden uyarı ile hemen hemen her yerde $Ts_n(x) = t(x, s_n(x))$ vardır. Fakat, soldan süreklilik ile ayrıca

$$t(x, s_n(x)) \rightarrow t(x, f(x)) \quad (x \in X) \quad (6.9)$$

elde edilir.

Bunun yanı sıra Ts_n hemen hemen her yerde Tf 'e yakınsar ve bu yüzden hemen hemen her yerde $Tf(x) = t(x, f(x))$ 'tir.

t 'nin kabul edilebilir olduğu ispat tamamlanır. T^{-1} bir otomorfizma olduğundan her tam olarak artan, $s(x, \cdot)$, $T^{-1}c$ 'in bir çeşidi, her $s(x, \cdot)$ ile $s: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vardır ve öyle ki her $f \in L^\infty(\mu)$ için hemen hemen her yerde $T^{-1}f(x) = s(x, f(x))$ elde edilir. Özellikle her $r \in \mathbb{Q}$ için

$$s(x, t(x, r)) = r \quad (6.10)$$

hemen hemen her yerde sağlanır ve böylece

$$M = \{x \in X: s(x, t(x, r)) \neq r \text{ bir } r \in \mathbb{Q} \text{ için}\} \quad (6.11)$$

kümesi boştur. M 'nin dışında x için $t(x, \cdot)$ 'in, $\mathbb{R}$ 'nin bir otomorfizması olduğu yardımcı teorem 4.3'ten elde edilir. Şimdi $x \in M$ ve $c \in \mathbb{R}$ için $t(x, c) = c$ alınarak t tekrar tanımlanırsa (6.3)'ü hala sağlayan kabul edilebilir bir t elde edilir.

t 'nin ölçülebilir olduğu gösterilerek ispat sonuçlandırılır. Her n için, k 'nın bir tek tamsayı olduğu durumda $t_n(x, c) = t(x, k/2^n)$ alınarak $t_n: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlansın öyle ki

$$k/2^n \leq c < (k+1)/2^n \quad (6.12)$$

'dir.

$t_n \leq t_{n+1}$ olduğuna dikkat edelim. Her t_n ölçülebilir ve t_n , t 'ye noktasal olarak yakınsadığından t de ölçülebilirdir.

Sonuç olarak, esas ölçümlerin standart olduğu durumda L^∞ latisleri arasında izomorfizmaların anlaşılır tanımları alınır. Bir X (bir ayrılabilir tam metrikleştirilebilir uzay) Polonya uzayının Borel kümelerinin cebiri $\mathfrak{X}$ ise $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ standart olarak adlandırılır.

Ayrıca, verilen $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ve $(Y, \mathfrak{Y}, \nu)$ ölçüm uzayları için bir ölçülebilir izomorfizma, her iki yönde ölçülebilir $\tau: X \rightarrow Y$ birebir ve örtendir öyle ki $A \in \mathfrak{X}$ sıfır ölçüme sahip olması için gerek ve yeter koşul $\nu(\tau(A)) = 0$ olmasıdır.

Teorem 6.3 $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ve $(Y, \mathfrak{Y}, \nu)$ standart ölçüm uzayları, $\tau: X \rightarrow Y$ bir ölçülebilir izomorfizma ve $t: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Borel yapılarına göre ölçülebilir, kabul edilebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$ ile verilen $T: L^\infty(\nu) \rightarrow L^\infty(\mu)$ dönüşümü bir izomorfizmadır. Tüm izomorfizmalar bu şekilde oluşur.

İspat: Ölçümler üzerindeki hipotezler garanti eder ki; her cebir izomorfizması $L^\infty(\nu) \rightarrow L^\infty(\mu)$, bir $\tau: X \rightarrow Y$ ölçülebilir izomorfizmalı bileşke ile verilir. Böylece ikinci kısım Yardımcı teorem 6.2'den elde edilir.

İlk kısmı ispatlamak için, $\mu = \nu$ ve $\tau = 1_X$ kabul edilir ve T 'nin örtenliği dışında her şey açıktır. $s(x, d) = c$ ile verilen t 'nin kabul edilebilir tersinin olabilmesi için gerek ve yeter koşulun $t(x, c) = d$ olduğu düşünölsün. Onun grafiğı

$$G(s) = \{(x, d, c) \in X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : c = s(x, d)\} = \{(x, d, c) \in X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : d = t(x, c)\} \quad (6.13)$$

Boreldir ve Polonya uzayındaki bir fonksiyonun Borel ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul grafiğinin bir Borel kümesi olmasıdır bu nedenle bu bir ölçülebilir fonksiyondur (Cohn, 1980). Şimdi, $Sf(x) = s(x, f(x))$ ile $L^\infty(\mu)$ üzerindeki S dönüşümünden T 'nin tersinin olduğu göröölür.

Örnek 6.4 Bir kompakt uzay $\mathfrak{M}$, öyle ki her $m \in \mathfrak{M}$ için $C(\mathfrak{M})$ 'nin bir T otomorfizması vardır öyle ki $T^* \delta_m$ süreksizdir.

İspat: μ , birim aralığın Borel kümeleri üzerinde Lebesgue ölçümü olsun. L^∞ Banach cebirinin maksimal ideal uzayı $\mathfrak{M}$ bir kompakt uzaydır.

Sabit $m \in \mathfrak{M}$ olsun. $m, m: L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ cebirlerinin bir birimsel homomorfizması olarak göröölür. Tek bir $y \in [0, 1]$ vardır, öyle ki her $f \in C[0, 1]$ için

$$f(m) = m(f) = f(y) \quad (6.14)$$

m, δ_y 'nin bir genişlemesidir. $(A_n), A_1 = [0,1]$ ile $[0,1]$ 'deki y 'nin komşuluklarının bir azalan tabanı olsun ve $n(y) = 1$ ile $n(x) = \max\{n: x \in A_n\}$ alalım.

Şimdi; ℓ , giriş kısmında tanımlanan fonksiyon olmak üzere

$$t(x, c) = \ell(n(x), c) \quad (6.15)$$

ile $t: [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlansın ve $Tf(x) = t(x, f(x))$ ($f \in L^\infty$) olsun.

Açık olarak T , bir otomorfizmadır ve $f = 1$ 'de T^*m süreksizdir. μ , tamamen atomik olmadığında hemen hemen her yerde yakınsaklığa neden olan $L^\infty(\mu)$ üzerinde topoloji yoktur. Bununla birlikte hemen hemen her yerdeki yakınsaklık, ölçüm içinde yakınsaklığı gerektirir ve ölçüm içinde her bir yakınsak dizi aynı limite yakınsayan alt dizilere sahiptir, (Cohn, 1980), Yardımcı teorem 6.1'den $T: L^\infty(\nu) \rightarrow L^\infty(\mu)$ izomorfizmasının ölçümde yakınsaklığın topolojisi için homeomorfizma olduğu sonucuna varılır. μ sonlu ise bu topoloji

$$\|f\|_0 = \int_X \frac{|f(x)|}{1+|f(x)|} d\mu \quad (f \in L^0(\mu)) \quad (6.16)$$

F - normu ile $L^0(\mu)$ üzerinde verilir.

Belki $L^\infty(\mu)$ 'de en önemli topoloji zayıf* topolojidir. Burada, $L^\infty(\mu), L^1(\mu)$ Banach uzayının duali olarak düşünülür. Teorem 6.3, $L^\infty(\mu)$ 'nün otomorfizmasının zayıf* sürekli olması gerektiğini önerir. Bununla birlikte sonuçları takip ederek (Cabello Sánchez, Ercan vd., Onal vd., 2007)'deki fikir bir temele dayandırılır.

Sonuç 6.5 ν ve μ atomsuz sonlu standart ölçümler olsunlar. Bir $T: L^\infty(\nu) \rightarrow L^\infty(\mu)$ latis izomorfizmasının zayıf* sürekli olması ancak ve ancak onun norm topolojisi içinde afin homeomorfizma olması ile sağlanır.

İspat: Birim aralık üzerinde $\nu = \mu$ Lebesgue ölçümü ve ayrıca $T0 = 0$ ispat boyunca kabul edilir, böylece T 'nin afin olması ancak ve ancak onun lineer olmasına bağlıdır. Birinci gerektirme açıktır: T lineer ise bu durumda $\omega = T1_y$ olmak üzere

$$Tf(x) = \omega(x)f(\tau(x)) \quad (6.17)$$

'tir. Hem bileşke hem de çarpma operatörlerinin her ikisi için bu operatörler her zaman zayıf* süreklidir.

Aksini ispatlamak için τ^{-1} ile bileşke aldıktan sonra T 'nin $f \rightarrow t(., f(.))$ formuna sahip olduğu varsayılır. Bu, verilen birim aralığın Borel alt kümesi üzerinde iki fonksiyonun aynı olması için gerek ve yeter koşulun T altındaki görüntülerinin de aynı olmasıdır ifadesine denktir.

(r_n) , Rademacher fonksiyonlarının dizisi olsun, bu $r_n(x)$, $0 \leq x \leq 1$ için $\cos(2^n \pi x)$ 'in işaretidir. L^∞ 'un zayıf* topolojisinde (r_n) , sifıra yakınsar.

$$U_n^\pm = \{x \in [0,1]: r_n(x) = \pm 1\} \quad (6.18)$$

kümesini alalım. Şimdi, $1_{U_n^\pm} = (1 \pm r_n)/2$ olduğundan dolayı zayıfça* $1_{U_n^\pm} \rightarrow \frac{1}{2}$ elde edilir ve L^∞ üzerindeki çarpım ayrı ayrı zayıf* sürekli olduğundan dolayı her $f, g \in L^\infty$ için bu görülür,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1_{U_n^+} f + 1_{U_n^-} g) = \frac{f+g}{2} \text{ (zayıf*)} \quad (6.19)$$

elde edilir. $1_{U_n^+} f + 1_{U_n^-} g$, U_n^+ üzerindeki f ve U_n^- üzerindeki g ile aynı olduğu düşünülürse, bu nedenle

$$T(1_{U_n^+} f + 1_{U_n^-} g) = 1_{U_n^+} T f + 1_{U_n^-} T g \quad (6.20)$$

ve burada

$$T\left(\frac{f+g}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1_{U_n^+} T f + 1_{U_n^-} T g = \frac{T f + T g}{2} \quad (6.21)$$

ile alınan limit zayıf* anlamına gelir. Bu nedenle T , orta noktaları ve sifırı korur (her iki yönde). Onun toplamsal olduğu elde edilir (her iki yönde) ve T sıralılığı koruyan lineer bir dönüşümdür ve norm sürekliliği kolayca elde edilir.

7. ÖLÇÜLEBİLİR FONKSİYONLARIN LATİSLERİ

Şimdi önceki bölümün sonuçları diğer fonksiyon latislerine genişletilebilir. Daha önceden olduğu gibi $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ bir standart ölçümü gösterebilir. Eğer $L^\infty(\mu) \subset L \subset L^0(\mu)$ ise latisler gibi μ üzerinde L 'nin bir fonksiyon latisi görülür. Eğer μ sonlu ise latislerin çoğuyla, $0 \leq p \leq \infty$ için $L^p(\mu)$ uzaylarını içeren analizde karşılaşılır. Eğer μ sonlu değil ise bu durumda $L^2(\mu)$, $L^\infty(\mu)$ 'yi içermez, fakat eğer μ, σ -sonlu ise bu durumda aynı boş kümeler ile sonlu bir ν ölçümü vardır (böylece $L^0(\nu) = L^0(\mu)$ ve $L^\infty(\nu) = L^\infty(\mu)$) ve öyle ki $L^p(\mu)$ tüm p 'ler için ν üzerinde bir fonksiyon latisine izomorfiktir.

Teorem 7.1 M ve L sırasıyla ν ve μ standart ölçümleri üzerinde fonksiyon latisleri olmak üzere $T: M \rightarrow L$ bir izomorfizma olsun. O zaman bir $\tau: X \rightarrow Y$ ölçülebilir izomorfizma ve bir $t: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon vardır öyle ki her $f \in M$ için hemen hemen her yerde

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x))) \quad (7.1)$$

sağlanır. Bununla birlikte t , her sabit x için seçilebildiğinden $t(x, \cdot)$ dönüşümü $\mathbb{R}$ 'nin bir otomorfizmasıdır.

İspat: $T0 = 0$ olduğu kabul edilsin. $\rho(t) = \frac{t}{1+|t|}$ ($t \in \mathbb{R}$) ile $\rho * (f) = \rho \circ f$ ve etiketsiz oklar tam kapsama olmak üzere

$$S: L^\infty(\nu) \rightarrow M \xrightarrow{T} L \rightarrow L^0(\mu) \xrightarrow{\rho^*} L^\infty(\mu) \quad (7.2)$$

olduğunu düşünelim.

S birebir olduğundan dolayı eğer $f, g \in L^\infty(\nu)$, pozitif ölçümlü bir A kümesinde aynı ise bu durumda Sf ve Sg (ve bu yüzden Tf ve Tg de) sadece A 'ya bağlı olan bir pozitif ölçümlü B kümesi üzerinde aynı olduğu sonuç 3.6'dan bilinir. Şimdi $f, g \in M$, A üzerinde aynı olduğunu kabul edelim. Bu durumda A 'da eşit f_n ve g_n ile $L^\infty(\nu)$ 'de (f_n) ve (g_n) dizileri vardır ve hemen hemen her yerde $f_n \rightarrow f$ ve $g_n \rightarrow g$ 'dir. Fakat T hemen hemen her yerde yakınsaklığı korur (Yardımcı teorem 6.1'deki ispat ile aynıdır.) ve böylece Tf ve Tg , B üzerinde hemen hemen her yerde aynıdır. T^{-1} 'e aynı şekilde başvurarak; $f, g \in M$ 'nin, pozitif ölçümlü bir küme üzerinde aynı olması için gerek ve yeter koşulun Tf ve Tg 'nin de aynı olmasıyla sağlandığı elde edilir.

Sonuç olarak hemen hemen her yerde $T1_y > 0$ ve bu nedenle $\eta(x) = 1/T1_y(x)$, $L^0(\mu)$ 'nün bir fonksiyonu anlamına gelir. Şimdi, η , $L^0(\mu)$ 'nün bir lineer otomorfizması olan η ile çarpımı göstermek üzere

$$T': L^\infty(\nu) \rightarrow M \xrightarrow{T} L \rightarrow L^0(\mu) \xrightarrow{\eta} L^0(\mu) \xrightarrow{\rho^*} L^\infty(\mu) \quad (7.3)$$

bileşkesini düşünelim. $L^\infty(\mu) = C(\mathfrak{M})$ ve $L^\infty(\nu) = C(\mathfrak{N})$ olmak üzere T' , $C(\mathfrak{N})$ 'den $C(\mathfrak{M})$ 'ye bir homomorfizma olarak kabul edilebilir. Açık olarak; $T'0 = 0$ ve $T'1 = 1/2$. Bundan dolayı T' , $\emptyset: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ sürekli dönüşümüne ve ayrıca $\emptyset *: C(\mathfrak{N}) \rightarrow C(\mathfrak{M})$ birimsel cebirlerin bir homomorfizmasına neden olur. $\emptyset *$ idempotentleri idempotentlere götürdüğünden $1_{\Phi(A)} = \emptyset * (1_A)$ kuralı ile $\Phi: \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ dönüşümü tanımlanabilir.

Bizim öncelikli amacımız Φ 'nin bir izomorfizma olduğunu göstermektir.

İddia 7.2 $f, g \in M$, A üzerinde hemen hemen her yerde aynı olsun. Bu durumda Tf ve Tg , $\Phi(A)$ üzerinde hemen hemen her yerde aynıdır.

T^{-1} , benzer özelliklere sahip olduğundan bir $\Psi: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ dönüşümü elde edilir ve eğer Tf ve Tg , B üzerinde aynı ise bu durumda f ve g , $\Psi(B)$ üzerinde hemen hemen her yerde aynıdır.

Ψ 'nin, Φ için bir ters olduğu gösterilir. $A \in \mathfrak{Y}$ alınsın ve 1 ve 1_A fonksiyonları düşünölsün. $T1$ ve $T1_A$, $\Phi(A)$ üzerinde hemen hemen her yerde aynı olduğu ve bu nedenle $1 = T^{-1}T1$ ve $1_A = T^{-1}T1_A$, $\Psi\Phi(A)$ üzerinde aynı olduğu elde edilir. Bundan dolayı her ölçülebilir A için $\Psi\Phi(A) \subset A$ ve ayrıca

$$(\Psi\Phi(A))^c = \Psi\Phi(A^c) \subset A^c \quad (7.4)$$

'dir bu da $\Psi\Phi(A) = A$ 'dır.

Bundan dolayı Φ bir izomorfizmadır ve ölçümler üzerindeki hipotez $\tau: X \rightarrow Y$ ikili ölçüm varlığını garanti eder öyle ki $\Phi(A) = \tau^{-1}(A)$ 'dir.

İspatın geri kalan kısmı 6. bölümdekine benzer. Zaten hemen hemen her yerde $f < g$ olması için gerek ve yeter koşulun hemen hemen her yerde $Tf < Tg$ olması gerektiği bilinir. Özellikle $r \in \mathbb{Q}$ için Tr 'nin çeşitleri seçilebilir öyle ki tüm $r < s$ ve tüm $x \in X$ için $Tr(x) < Ts(x)$ 'tir. Şimdi, $t(x, 0) = 0$ ve

$$t(x, c) = \begin{cases} \inf\{Tr(x): r > c, r \in \mathbb{Q}\} & c < 0 \text{ için} \\ \sup\{Tr(x): r < c, r \in \mathbb{Q}\} & c > 0 \text{ için} \end{cases} \quad (7.5)$$

ile $t: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlayalım.

Her reel c için $t(., c)$ fonksiyonu Tc 'nin bir çeşidi ve ayrıca her sabit x için reel $t(x, .)$, fonksiyonunun $(0, \infty)$ üzerinde soldan ve $(-\infty, 0)$ üzerinde sağdan sürekli olduğu açıktır.

Eğer s basitse bu durumda $Ts(x) = t(x, s(\tau(x)))$ eşitliğinin hemen hemen her yerde sağlandığı yukarıdaki iddiadan elde edilir. Keyfi $f \in M$ için, f^+ ve f^- , ayrık desteklerle, negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere $f = f^+ - f^-$ yazılsın. Açık olarak hemen hemen her yerde sağlanan $s_n^\pm \rightarrow f^\pm$ ile basit fonksiyonların artan $(s_n^\pm)$ dizileri vardır öyle ki $\text{supp } s_n^\pm \subset \text{supp } f^\pm$. $s_n \rightarrow f$ hemen hemen her yerde olmak üzere $s_n = s_n^+ - s_n^-$ yazılsın.

Bununla birlikte her x için;

$$t(x, s_n(\tau(x))) \rightarrow t(x, f(\tau(x)))$$

$$Tf(x) = t(x, f(\tau(x))) \quad (7.6)$$

olduğundan hemen hemen her yerde sağlanır.

İspatın geriye kalanı Yardımcı teorem 6.2'nin ispatındaki gibi devam eder yani t değiştirilebilirdir öyle ki her $t(x, \cdot)$, $\mathbb{R}$ 'nin artan homeomorfizmasıdır ve sonuçta oluşan t , bağlantılı ölçülebilirdir. Şüphesiz ki t ve τ 'daki kesin şartlar altında (7.1), M ve L 'ye bağlı olan bir izomorfizma tanımlar. $t(\cdot, f(\cdot))$ 'in L 'ye bağlı olması için gerek ve yeter koşulun $f \in M$ olması aşık bir durumdur. $L^0(\mu)$ maksimal latisi için aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 7.3 μ , sonlu bir standart ölçüm olsun. τ , X 'in ölçülebilir otomorfizması ve $t: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir ölçülebilir fonksiyon olsun öyle ki her sabit x için $t(x, \cdot)$, $\mathbb{R}$ 'nin bir otomorfizmasıdır. Bu durumda $Tf(x) = t(x, f(\tau(x)))$ ($x \in X$) $L^0(\mu)$ 'nün bir otomorfizmasını tanımlar. $L^0(\mu)$ 'nün tüm otomorfizmaları bu yolla oluşur ve $L^0(\mu)$, ölçüm içinde yakınsaklık topolojisi ile donatıldığında $L^0(\mu)$ 'nün tüm otomorfizmaları sürekli olur.

$0 \leq p, q \leq \infty$ için L^p ve L^q latislerinin izomorfik olması için gerek ve yeter koşulun $0 < p, q < \infty$ olduğu teorem 7.1'in diğer bir aşık çözümüdür. Bununla birlikte bu kontrol ile elde edilir: gerçekten eğer $0 < p, q < \infty$ ise bu durumda $f \in L^p$ 'i $\sigma(f)|f|^p$ 'ye gönderen dönüşüm, L^1 ve L^p arasında bir izomorfizma verir, burada σ 'işareti' gösterir. Karşıt önerme: (f_n) dizisi vardır öyle ki her f için bir n vardır öyle ki $f_n \geq f$ ifadesinin L^p 'de sağlanması için gerek ve yeter koşul $p = \infty$ 'dur. Önermeye karşın: eğer (f_n) ve f , öyle ki her n için $f \leq f_n$ ve $n \neq m$ olmak üzere $f_n \wedge f_m = f$ ise bu durumda $\bigvee_n f_n$ varlığının L^p 'de sağlanması için gerek ve yeter koşul $p = 0$ olmasıdır.

8. SONUÇ

Yakın zamanda Marovt, (2005; 2006a; 2006b) makalelerini yayınladı. Onun sonuçları aşağıdaki gibi özetlenebilir. Latisler arasındaki birebir ve örten fonksiyonların bir izomorfizma olması için gerek ve yeter koşul her iki yönde sırayı korumasıdır.

X metriklenebilir kompakt uzay ve $\mathbb{I} = [0,1]$ olmak üzere $T, C(X, \mathbb{I})$ 'da bir birebir ve örten fonksiyon olsun.

- (a) Eğer T , her iki yönde sıralılığı koruyorsa bu durumda τ, X 'in bir homeomorfizması olmak üzere $Tf(x) = t\left(x, f(\tau(x))\right)$ formu elde edilir ve $t: X \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$, $t(x, c) = Tc(x)$ ile verilir.
- (b) Eğer T , çarpımsal ise bu durumda τ bir homeomorfizma ve $\kappa: X \rightarrow (0, \infty)$ sürekli olmak üzere $Tf(x) = \left(f(\tau(x))\right)^{\kappa(x)}$ 'dir.
- (c) Eğer T bir afin ise bu durumda τ bir homeomorfizma ve $u: X \rightarrow \pm 1$ sürekli olmak üzere $Tf(x) = 1/2 + u(x)\left(1/2 - f(\tau(x))\right)$ 'dir.

Marovt, aynılarının metrikleştirilemeyen uzaylar için aynı sonuçlar elde edilir mi diye sorar. Bu (c)'deki durumdur, fakat (a) ya da (b)'deki değildir. Gerçekten de (Ercan ve Onal, 2008)'deki, (b) için karşı örneğin (a) için de karşı örnek olduğu kolayca görülür. Aslına bakarsak; $C(X, \mathbb{I})$ üzerinde her çarpımsal birebir ve örten fonksiyonun sıralılığı (her iki yönde) korumalıysa; bu sonuçların gerekliliği bilinmemektedir. $C(X, (0,1))$ üzerindeki herhangi bir birebir ve örten fonksiyonun sağladığı ise açıktır. $C(X)$ yarı grup üzerindeki sonuçlarla ilişkilendirmek için (Milgram, 1949; Cabello Sánchez vd. , 2000; Henriksen vd., 1956; Császár vd., 1983) kaynaklarını öneririz.

Afin durumu aşağıdakiler gibidir (Biraz farklı tartışmalar (Ercan ve Onal, 2006)'da görülür.): $\mathbb{I}, [-1,1]$ ile afin olduğundan $C(X, [-1,1])$ üzerindeki afin birebir ve örten fonksiyonları düşünülün. $C(X, [-1,1])$, $C(X)$ Banach uzayının birim yuvarıdır. Başka bir ifadeyle; eğer B , bir Banach uzayının birim yuvarı ise bu durumda orijin B 'de sadece f noktasıdır.

Verilen $g \in B$ için $h \in B$ vardır öyle ki $f = (g + h)/2$ (Eğer $f \neq 0$ ise bu durumda f , $g = -f/\|f\|$ ile bir orta nokta değildir). $T0 = 0$ olduğu elde edilir ve bu yüzden tüm $f \in C(X, [-1,1])$ ve $c \in \mathbb{I}$ için $Tcf = cTf$ 'tir. Bu nedenle bir lineer birebir ve örten fonksiyonu T 'ye genişletebiliriz, böylece: $f \rightarrow \|f\|T(f/\|f\|)$.

Fakat bir lineer birebir ve örten fonksiyonun birim yuvarı kendi üzerine dönüştürmesi ayrıca bir izometridir ve bu yüzden Banach - Stone Teoremi, τ , X 'in bir homeomorfizması ve $u: X \rightarrow \pm 1$ sürekli olmak üzere T 'nin, $Tf = u \cdot f \circ \tau$ formuna sahip olduğunu verir. Bunu $C(X, \mathbb{I})$ 'e uygularsak keyfi bir X kompakt Hausdorff uzayı ile (c) sağlanır. (ya da metriklenabilir uzay, kompakt ya da değil) Bu konu ile ilgili (Garrido ve Jaramillo, 2002; Marovt vd., 2006a; 2006b) kaynak gösterilir. Bu çalışmanın sonuçları, eğer $\mathbb{I}$ ile $\mathbb{R}$ yer değiştirilerek gerekli değişikliklerin yapılması koşuluyla aynı kalır. Ana fikre hiçbir şey eklenmediğinden dolayı burada daha fazla ayrıntıya girmekten kaçınılmıştır.

Çalışmanın sonuçlarından doğan bazı sorular ile çalışmamızı bitirelim.

İlk olarak; $t: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümlerini karakterize etmekle ilgilenildi öyle ki kompakt X ile $C(X)$ 'in bir T otomorfizması için $t(x, c) = Tc(x)$ 'tir. Bu Teorem 4.2'yi tamamlayacaktır.

7. bölümün tek istisnası ile; sonuçlarımız sadece sınırlı fonksiyonları içerir. X metrik uzay olmak üzere $C(X)$ 'in otomorfizmalarının bir tanımını elde etmek ilginç olacaktır. X tam metrik ile $U(X)$ için aynı soru geçerlidir.

KAYNAKLAR

Aliprantis, C.D., ve Burkinshaw, O., (1985), Positive Operators, Academic Press Inc., London.

Amemiya, I. G., MR0173939 (this is the review of (Cater,1965)).

Birkhoff, G., (1979). “Lattice theory.”, Corrected reprint of the 1967 third edition. American Mathematical Society Colloquium Publications, 25. American Mathematical Society, Providence, R.I

Burris, S., Sankappanavar, H. P., (1981),“ A course in universal algebra.”, Graduate Texts in Mathematics, vol. 78. Springer-Verlag, New York-Berlin

Cabello Sánchez, F., (2000), “Nearly variant of properties and ultrapowers”, Glasgow Math. J., 42(2) : 275–281.

Cabello Sánchez, F., J., Ercan, Z., Onal, S., (2007), “ Memorandum on multiplicative bijections and order”, preprint available at <http://kolmogorov.unex.es/~fcabello>.

Cabello Sánchez, F.,(2008) “Homomorphisms on lattices of continuous functions” Positivity 12, 341-362

Cater, S., (1965), “ Remark on a result of Kaplansky concerning $C(X)$ ”, Michigan Math. J., 12: 97–103.

Cheney W., Light W., (2000), A Course in Approximation Theory

Cohn, D. H., (1980), Measure Theory, Birkhäuser, Boston

Császár, Á., (1983), “Semigroups of continuous functions”, Acta Sci. Math., 45: 131–140.

Ercan, Z., Onal, S., (2008), “An answer to a conjecture on multiplicative maps on $C(X, I)$ ”, 12:537-538.

Ercan, Z., Onal, S., (2006), “ A remark on affine maps on $C(X, I)$ ”.

Ercan, Z., Wickstead, A. W., (2006), “When a lattice homomorphism is a Riesz homomorphism”, Math. Nachr., 279 (9–10): 1024–1027.

Garrido, M. I., Jaramillo, J. A., (2000), “A Banach-Stone theorem for uniformly continuous functions”, Monatsh. Math., 131(3): 189–192.

Garrido, M. I., Jaramillo, J. A., (2002), “ Variations on the Banach-Stone theorem”, Extracta. Math., 17(3): 351–385.

Henriksen, M., (1956), “On the equivalence of the ring, lattice and semigroup of continuous functions”, Proc. Am. Math. Soc., 7:959–960.

Itô, T., (1964), “On the continuity of lattice automorphisms on continuous function lattices”, Illinois J. Math., 8: 419–424.

Kaplansky, I., (1947), “Lattices of continuous functions”, Bull. Am. Math. Soc., 53:617–623.

- Kaplansky, I., (1948), "Lattices of continuous functions", II, Am. J. Math., 70:626–634.
- Lipschutz, S., (1965), General Topology, Temple University, New York
- Lochan, R., Strauss, D., (1982), "Lattice homomorphisms of spaces of continuous functions", J. London Math. Soc. (2) 25, no. 2:379–384.
- Marovt, J., (2005), "Order preserving bijections of $C(X, I)$ ", J. Math. Anal. Appl., 311(2): 567–581.
- Marovt, J., (2006), "Multiplicative bijections of $C(X, I)$ ", Proc. Am. Math. Soc., 134(4):1065–1075.
- Marovt, J., (2006), "Affine bijections of $C(X, I)$ ", Studia Math., 173(3): 295–309.
- Mena, R., Roth, B., (1978), "Homomorphisms of lattices of continuous functions", Proc. Am. Math. Soc., 11–12.
- Milgram, A. N., (1949), "Multiplicative semigroups of continuous functions", Duke Math. J., 16:377–383.
- Namioka, I., Saeki, S., (1978), "On lattice isomorphisms of $C(X)^+$ ", Tokyo J. Math. 1, no. 2:345–368.
- Semadeni, Z., (1971), "Banach spaces of continuous functions", Monografie Matematyczne 55. PNW–Polish Scientific Publishers, Warszawa 1971.
- Shirota, T., (1952), "A generalization of a theorem of I", Kaplansky. Osaka Math. J., 4:121–132.
- Singh R.K., Manhas J.S., (1993), Composition operators on function spaces
- Willard, S., (1970), General Topology, Addison–Wesley, Reading

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 28.05.1985

Doğum yeri Kırcaali

Lise 2000-2004 Beşiktaş Atatürk Anadolu Lisesi

Lisans 2004-2008 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Çift Lisans 2005-2010 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
İstatistik Bölümü

Yüksek Lisans 2008-2010 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı, Fonksiyonel Analiz

Çalıştığı kurumlar

2007-2008 Final Dergisi Dershanesi

2009-Devam ediyor Haliç Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi
Uygulamalı Matematik Bölümü
Araştırma görevlisi