

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PRE-RIESZ UZAYLARINDA İDEALLER VE BANDLAR

Matematikçi Fulya ŞEREF

FBE Matematik Anabilim Dalında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ömer GÖK (YTÜ)

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
ÇİZELGE LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ.....	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER.....	2
3. İDEALLER, SOLVEKS İDEALLER ve BANDLAR.....	5
4. PRE-RIESZ UZAYLARI.....	10
5. KISITLAMA ve GENİŞLEME ÖZELLİKLERİ.....	16
6. AYRIKLİK ÜZERİNE	26
7. SONUÇ	27
KAYNAKLAR.....	28
ÖZGEÇMİŞ.....	29

SİMGE LİSTESİ

$A \subseteq B$	B kümesi, A kümesini kapsar veya eşittir
$A \subset B$	A kümesi, B kümesinin öz alt kümesidir
$C(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
l^∞	Sınırlı dizilerin uzayı
M^u	M kümesinin bütün üst sınırlarının kümesi
M^d	M kümesinin ayrık tümleyeni
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$P_2(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$ de tanımlı en fazla 2. dereceden polinomlar uzayı
$posM$	M kümesinin pozitif lineer kabuğu
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{2'}$	$\mathbb{R}^{2'}$ de tanımlı lineer fonksiyoneller uzayı
X^p	X uzayının Riesz tamlanması
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$x \perp y$	x ile y ayrıktır
xDy	x ile y D-ayrıktır.
$x_\alpha \uparrow$	Artan $\{x_\alpha\}$ ağı
$x_\alpha \downarrow$	Azalan $\{x_\alpha\}$ ağı
$x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$	x' e sıralı yakınsayan $\{x_\alpha\}$ ağı
$[x, y]$	sıralı aralık
$x \vee y$	x ve y elemanlarının supremumu
$x \wedge y$	x ve y elemanlarının infimumu
$ x $	Mutlak değer x
$\exists$	En az bir
$\forall$	Her
$\{.\}$	Küme
$\leq$	küçük veya eşittir

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 5.1. Kısıtlama ve Genişleme Özellikleri	16
---	----

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında bana her konuda destek olan ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ömer Gök' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bütün eğitim hayatım boyunca; anlayış, sevgi ve hoşgörüsüyle beni yalnız bırakmayan değerli aileme, arkadaşlarıma ve ayrıca desteğinden dolayı TÜBİTAK' a teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

“Pre-Riesz Uzaylarında İdealler ve Bandlar” adlı bu tez çalışmasında, vektör latislerinin önemli öğeleri olan ideal ve band kavramlarının pre-Riesz uzayları açısından birtakım özellikleri incelenmiştir. Öncelikle, vektör latislerinde ideal, band ve solveks ideal kavramları tanımlanmış, bu tanımlamalar neticesinde pre-Riesz uzayının tanımı yapılarak vektör latisleri ile ilişkisi incelenmiştir. Pre-Riesz uzayı tanımı yapılırken, Haandel tarafından verilen; her Archimedean yönlü kısmi sıralı vektör uzayının pre-Riesz uzay olduğu teoremi esas alınmıştır.

Gerekli tanımlamalar yapıldıktan sonra vektör latisleri ile pre-Riesz uzaylar arasındaki ilişki incelenirken, ikili pozitif tasvirlerden, izomorfizmalardan faydalanılmış ve kullanılan çeşitli metodlar birçok örnekle açıklanmaya çalışılmıştır. Ayrıca, ideallerin ve bandların kısıtlama ve genişleme özelliklerine de yer verilerek ayrıklık tanımı ile çalışma sonlandırılmıştır.

Anahtar Kelimeler. Band, ayrıklık, ideal, sıralı yoğun alt uzay, vektör latisi, kısmi sıralı vektör uzayı, pre-Riesz uzayı, solveks ideal.

ABSTRACT

In this thesis, entitled “Ideals and Bands In Pre-Riesz Spaces”, some particular properties of ideals and bands, which are important subjects in vector lattices, have been examined for pre-Riesz spaces. Firstly, ideals, bands and solvex ideals were defined in vector lattices and then by the definition of pre-Riesz spaces, the relation between vector lattices and pre-Riesz spaces were investigated. While the pre-Riesz spaces were introduced, the theorem given by Haandel as “Every Archimedean directed partially ordered vector space is pre-Riesz.” was presented.

After these necessary definitions, the relation between vector lattices and pre-Riesz spaces were investigated by using bipositive maps and isomorphisms. Several examples were given for every different method. Moreover, restriction and extension properties of ideals and bands, and finally disjointness have been defined at the end of the study.

Key words. Band, disjointness, ideal, the order dense subspace, partially ordered vector space, pre-Riesz space, solvex ideal.

1. GİRİŞ

Vektör latileri çalışılırken, latis olmayan kısmi sıralı vektör uzayları ile karşılaşılabilir. Örneğin, vektör latileri arasındaki operatörlerin uzayı az latis yapısı gösterirler. Bu problem genellikle, görüntü kümesinin Dedekind tamlık kabul edilmesiyle engellenir. Alternatif olarak, latis teorideki gerekli durumları, kısmi sıralı vektör uzayının daha genel sınıfına genişletilebilir. Üst sınırların uygun kümeleri arasındaki ilişkileri düzenlemek gibi, mutlak değer, negatif ve pozitif kısımları içeren ilişkileri de yeniden formülize etmek gerekir. Diğer bir yaklaşım da, kısmi sıralı vektör uzayını vektör latisine katarak içteki uzayın latis yapısını kullanmaktır. Son yaklaşım, Gaans ve Kalauch (2006) tarafından, kısmi sıralı vektör uzaylarında ayrıklık konusunda ele alınmıştır. Kural gereği, içine yerleştirme metodu, içine yerleştirilen sıralı yoğun ise başarılı sonuç verir. Sıralı yoğun vektör latisi içine yerleştirilen kısmi sıralı vektör uzayı Haandel (1993) tarafından pre-Riesz uzayı olarak karakterize edilmiştir. Her yönlü Archimedean uzayı pre-Riesz uzaydır, ancak Archimedean olmayan pre-Riesz uzayları da vardır. Genelde, bir vektör latisinde latis olma durumu birçok yolla belirtilir ve kısmi sıralı vektör uzaylarındaki farklı açıklamaları farklı durumlara sebebiyet vermektedir. Bu tezde, pre-Riesz uzaylarında vektör latis durumları bu bakış açısıyla incelenmiştir, (Gaans, 2008). En kullanışlı genellemelerin, doğrudan formüle ederek ve gömmeleri kullanarak yaklaşımlarının uyuştuğu yerde yapılabilmesi beklenebilir. Bu çalışmada, Gaans (2008) bakış açısıyla pre-Riesz uzaylarındaki vektör latis durumlarının araştırılması konusunu ilerletilmesi incelenmiştir. Vektör latis teorisinin vazgeçilmezi ideal ve bandlar konusunda odaklanılmıştır. Asıl tanımlarla başlayıp, vektör latilerindeki gömmelere göre özelliklere çalışılmıştır. Özel olarak, genişleme ve kısıtlama ile ilgilenilmiştir. Eğer kısmi sıralı bir X vektör uzayı, Y vektör latisinin sıralı yoğun bir alt uzayı ise, X' deki genelleştirilmiş ideal veya band, Y' deki ideal veya banda genişletilebilir mi? Ve Y' deki ideal veya band X' deki genelleştirilmiş ideal veya banda kısıtlanabilir mi? Buna ek olarak, hangi özellikler latis durumu ile benzer hangileri değil belirlenmiştir. Temel sonuçlar, 5. Bölümde verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1 X reel bir vektör uzayı, K da X uzayında bir koni yani,

$(x, y \in K, \lambda, \mu \geq 0 \text{ ise } \lambda x + \mu y \in K)$ ve $K \cap (-K) = \{0\}$ özelliklerini sağlayan bir lineer manifold olsun. X' de, kısmi sıralama; $y \geq x$ olması için gerek ve yeter koşul $y - x \in K$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.2 X bir reel vektör uzayı olsun. $x, y \in X, x \leq y$ olduğunda,

i) Her $z \in X$ için $x + z \leq y + z$,

ii) Her $a \geq 0$ için $ax \leq ay$

sağlanıyorsa X , kısmi sıralı vektör uzayı adını alır.

Bu çalışmada, (X, K) kısmi sıralı bir vektör uzayıdır. Genellikle, K' yı sabit tutarak (X, K) yerine X yazacağız.

Tanım 2.3 X kısmi sıralı bir vektör uzayı olsun. $y \leq z$ olacak şekilde $y, z \in K$ elemanları için sıralı aralık;

$[y, z] = \{x \in X: y \leq x \leq z\}$ ile gösterilir.

Tanım 2.4 X kısmi sıralı bir vektör uzayı olsun. Her $x \in M$ için, $x \leq z$ olacak şekilde $z \in X$ varsa $M \subset X$ kümesine majorize küme denir.

Tanım 2.5 X kısmi sıralı bir vektör uzayı olsun. Eğer, $M \subseteq [y, z]$ olacak şekilde $y, z \in X$ varsa M' ye sıralı sınırlıdır denir.

$M \subseteq X$ için bütün üst sınırları kümesini $M^u = \{x \in X: x \geq m \text{ her } m \in M \text{ için}\}$ ile gösteririz.

Tanım 2.6 X kısmi sıralı bir vektör uzayı olsun. $M \subseteq X$ için X' de pozitif-lineer kabuk,

$$posM = \left\{ x \in X: \exists n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in [0, \infty), x_i \in M, i = 1, \dots, n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.7 X kısmi sıralı bir vektör uzayı olsun. Her $x, y \in X$ için $nx \leq y$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ varsa (X, K) uzayına Archimedean denilir.

Tanım 2.8 X kısmi sıralı bir vektör uzayı olsun. Her $x, y \in M$ için $z \geq x$ ve $z \geq y$ olacak şekilde bir $z \in M$ varsa M kümesine yönlü küme denir.

X' in yönlü olması için gerek ve yeter koşul K konisinin X' de üretilmiş yani, $X = K - K$ olmasıdır.

Tanım 2.9 X kısmi sıralı bir vektör uzayı olsun. M kısmi sıralı kümesinde, herhangi iki $x, y \in M$ elemanları için,

$x \vee y = \sup \{x, y\}$ ve $x \wedge y = \inf \{x, y\}$ mevcut ise, M latis olarak adlandırılır.

Tanım 2.10 F boştan farklı konveks kümesi eğer, $0 \neq x \in K$ için $x = \lambda y, y \in F$ ve

$\lambda \in (0, \infty)$ ile tek türlü temsil edilebiliyorsa F alt kümesine K' nın bir tabanı denir.

Tanım 2.11 X kısmi sıralı bir vektör uzayı olsun. Bir $\{x_\alpha\}$ ağı için $\alpha \geq \beta$ iken $x_\alpha \leq x_\beta$ oluyorsa $\{x_\alpha\} \subseteq X$ ağına azalandır (sembolle $x_\alpha \downarrow$) denir.

$x \in X$ için $x_\alpha \downarrow x$ gösterimi, $x_\alpha \downarrow$ ve $\inf_\alpha x_\alpha$ anlamlarına gelir. $x_\alpha \uparrow$ ve $x_\alpha \uparrow x$ anlamları ise benzerdir.

Tanım 2.12 X kısmi sıralı bir vektör uzayı olsun. Bir $\{x_\alpha\} \subseteq X$ ağına eğer, $y_\alpha \downarrow 0$ ve her α için $\pm(x_\alpha - x) \leq y_\alpha$ olacak şekilde bir $\{y_\alpha\}_\alpha \subseteq X$ ağı varsa, $x \in X'$ e sıralı yakınsar

(sembolle $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$) denir.

$x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ ve $x_\alpha - x \xrightarrow{(o)} 0$ ifadelerinin denkliği açıktır. Eğer, bir ağ sıralı yakınsaksa limiti tektir.

Tanım 2.13 X kısmi sıralı bir vektör uzayı olsun. $M \subseteq X$ kümesi, eğer x' e yakınsayan her $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq M$ için $x \in M$ elde edilebiliyorsa sıralı kapalıdır denir.

Tanım 2.14 Bir X kısmi sıralı vektör uzayının D alt uzayı, eğer, her $x \in X$ için $x \leq y$ olacak şekilde bir $y \in D$ varsa büyükleme olarak adlandırılır.

Tanım 2.15 Bir vektör latisinin, eğer boştan farklı her büyüklenmiş alt kümesi bir supremuma sahipse Dedekind tam olarak adlandırılır.

Teorem 2.1 (Gaans ve Kalauch, 2008) Yönlü kısmi sıralı vektör uzayının majorizing alt uzayı da yönlüdür.

Tanım 2.16 X kısmi sıralı bir vektör uzayı olsun. Eğer her $x \in X$ için $x = \bigvee_{i=1}^m a_i - \bigvee_{i=1}^n b_i$ olacak şekilde

$a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in D$ varsa X vektör latisinin D alt uzayı X' i bir vektör latisi olarak üretir denir.

Tanım 2.17 X kısmi sıralı vektör uzayı aynı zamanda latis özelliğini gösteriyorsa Riesz uzay adını alır.

Tanım 2.18 X bir Riesz uzay olsun. $y \leq x_1 + x_2$ eşitsizliğini sağlayan her $y, x_1, x_2 \in K$ için $y = y_1 + y_2$ ve $y_1 \leq x_1, y_2 \leq x_2$ olacak şekilde $y_1, y_2 \in K$ varsa X' e Riesz ayrıştırma özelliğine sahiptir denir.

3. İDEALLER, SOLVEKS İDEALLER ve BANDLAR

Vektör latis teorisinin özellikleri, X kısmi sıralı vektör uzayının genel durumlarıyla verilmiştir. (Gaans, 1999; Gaans ve Kalauch, 2006). Burada, iki elemanın supremumu yerine elemanların bütün üst sınırlarının kümesi düşünülmüştür.

Tanım 3.1 (Gaans, 1999) M , X kısmi sıralı vektör uzayının alt kümesi olsun. Eğer her $x \in X$ ve $y \in M$ için $\{x, -x\}^u \supseteq \{y, -y\}^u$ iken $x \in M$ oluyorsa M' ye solid (katı) alt küme denir. X' in solid alt uzayına bir ideali denir.

Eğer, X bir vektör latisi ise, bu durumlar, alışılmış durumlarla uyudur. Bazı kümeler, birkaç uzayın alt kümesi gibi düşünülürse, onun katılığı üst sınırların alındığı uzaya bağlıdır. Karıştırma riskine karşılık “ X içinde katıdır” şeklinde ifade edilecektir. Konveks bir kümenin katı kabuğunun konveks olması gerekmediğinden, solveks kabuklarla ilgilenilecektir.

Tanım 3.2 (Gaans, 1999) X kısmi sıralı bir vektör uzayı olsun. $M \subset X$ kümesine eğer, her $x \in X, x_1, \dots, x_n \in M$ ve $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0,1]$ iken, $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ için,

$$\{x, -x\}^u \supseteq \left\{ \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda_k x_k : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\} \right\}^u \quad (3.1)$$

sağlandığında, $x \in M$ oluyorsa, solvekstir denir.

Yardımcı Teorem 3.3 (Gaans, 1999) X kısmi sıralı bir vektör uzayı olsun. X' deki her solveks küme solid (katı) ve konvektir. Eğer, X vektör latisi ise X' deki bir kümenin solveks olması için gerek ve yeter koşul X' in solid ve konveks olmasıdır.

Boş olmayan bir kümenin solveks kabuk temsilini elde etmek için, aşağıdaki ön bilgiye ihtiyaç vardır:

Yardımcı Teorem 3.4 (Gaans, 1999) X kısmi sıralı bir vektör uzayı olsun. Eğer, $x, x_k \in X$ ve $y_{k,i} \in X, i = 1, \dots, m_k$,

$k = 1, \dots, n$ için,

$$\{x_k, -x_k\}^u \supseteq \left\{ \sum_{i=1}^{m_k} \varepsilon_i y_{k,i} : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m_k} \in \{1, -1\} \right\}^u \quad (3.2)$$

ve $\{x, -x\}^u \supseteq \left\{ \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\} \right\}^u$ ise o zaman,

$$\{x, -x\}^u \supseteq \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{m_k} \varepsilon_{k,i} y_{k,i} : \varepsilon_{k,i} \in \{1, -1\}, k = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m_k \right\}^u \quad (3.3)$$

dır.

X kısmi sıralı vektör uzayı ve $M \subseteq X$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} S = \left\{ x \in X : \exists x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \right. \\ \left. \in (0,1], \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \text{ öyle ki, } \{x, -x\}^u \right. \\ \left. \supseteq \left\{ \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda_k x_k : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\} \right\}^u \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

kümesi M' nin solveks kabuğudur. S , M' yi kapsayan X 'deki en küçük solveks kümedir. Gerçekten, $M \subseteq S$ ve T , M' yi kapsayan solveks bir küme ise, $S \subseteq T'$ dir. Geriye, S' nin solveks olduğunu göstermek kalır. $x \in X, x_1, \dots, x_n \in S, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0,1], \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ olsun, öyle ki;

$$\{x, -x\}^u \supseteq \left\{ \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda_k x_k : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\} \right\}^u \quad (3.5)$$

dır.

Her $k \in \{1, \dots, n\}$ için $y_{k,1}, \dots, y_{k,m_k} \in M, \lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,m_k} \in (0,1], \sum_{i=1}^{m_k} \lambda_{k,i} = 1$ öyle ki,

$$\{x_k, -x_k\}^u \supseteq \left\{ \sum_{i=1}^{m_k} \varepsilon_i \lambda_{k,i} y_{k,i} : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m_k} \in \{1, -1\} \right\}^u \quad (3.6)$$

dır.

O zaman,

$$\{\lambda_k x_k, -\lambda_k x_k\}^u \supseteq \left\{ \sum_{i=1}^{m_k} \varepsilon_i \lambda_k \lambda_{k,i} y_{k,i} : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m_k} \in \{1, -1\} \right\}^u$$

Yardımcı Teorem 3.4' e göre,

$$\{x, -x\}^u \supseteq \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{m_k} \varepsilon_{k,i} \lambda_k \lambda_{k,i} y_{k,i} : \varepsilon_{k,i} \in \{1, -1\}, k = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m_k \right\}^u \quad (3.7)$$

$y_{k,i} \in M$ ve $\lambda_k \lambda_{k,i} \in (0,1]$ $k = 1, \dots, n$ ve $i = 1, \dots, m_k$ ve

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{m_k} \lambda_k \lambda_{k,i} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \sum_{i=1}^{m_k} \lambda_{k,i} = \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \quad (3.8)$$

olduğundan $x \in S$ dir ve S solvekstir.

Yardımcı Teorem 3.5 X kısmi sıralı bir vektör uzayı ve M, X' in alt uzayı olsun. M' nin S solveks kabuğu da X' in bir alt uzayıdır ve dolayısıyla bir idealdir.

İspat. M lineer alt uzay olduğundan, M' nin solveks kabuğu

$$S = \left\{ x \in X : \exists x_1, \dots, x_n \in M \text{ öyle ki, } \{x, -x\}^u \supseteq \left\{ \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\} \right\}^u \right\} \quad (3.9)$$

İçin $x, y \in S$ olsun. $x + y \in S$ olduğunu gösterelim. $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in M$ vardır, öyle ki;

$$\{x, -x\}^u \supseteq \left\{ \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\} \right\}^u \quad (3.10)$$

ve

$$\{y, -y\}^u \supseteq \left\{ \sum_{j=1}^m \delta_j y_j : \delta_1, \dots, \delta_m \in \{1, -1\} \right\}^u \quad (3.11)$$

dır.

u 'nun

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k + \sum_{j=1}^m \delta_j y_j : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \delta_1, \dots, \delta_m \in \{1, -1\} \right\} \quad (3.12)$$

kümesinin üst sınırı olduğunu kabul edelim. Örneğin, bazı $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \delta_1, \dots, \delta_m \in \{1, -1\}$ için

$$u \geq \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k + \sum_{j=1}^m \delta_j y_j \quad (3.13)$$

dır. Böylece,

$$u - \sum_{j=1}^m \delta_j y_j \geq \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k \quad (3.14)$$

dir.

Bu nedenle,

$$u - \sum_{j=1}^m \delta_j y_j \geq \mp x \quad (3.15)$$

Dolayısıyla, $u - x \geq \sum_{j=1}^m \delta_j y_j$ ve $u + x \geq \sum_{j=1}^m \delta_j y_j$ olur.

$u - x$ ve $u + x$, $\{\sum_{j=1}^m \delta_j y_j : \delta_1, \dots, \delta_m \in \{1, -1\}\}$ kümesinin üst sınırları olduğundan, $\{y, -y\}$ 'nin de üst sınırları olurlar. Öyle ise, $u - x \geq y$ ve $u + x \geq -y$, yani $u \in \{x + y, -x - y\}^u$ dır.

Sonuç olarak,

$$\{x + y, -x - y\}^u \supseteq \left\{ \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k + \sum_{j=1}^m \delta_j y_j : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \delta_1, \dots, \delta_m \in \{1, -1\} \right\}^u \quad (3.16)$$

ve $x + y \in S'$ dir. $x \in S$ ise, $-x \in S'$ dir. Aynı zamanda, $0, x \in S$ ve $\lambda > 0$ olsun. $\lambda x \in S$ olduğunu gösterelim. $x_1, \dots, x_n \in M$ vardır ki, öyle ki;

$$\{x, -x\}^u \supseteq \left\{ \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\} \right\}^u \quad (3.17)$$

dır.

Eğer u , $\{\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda x_k : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}\}$ kümesinin bir üst sınırı ise, o zaman, $\frac{1}{\lambda}u$ da $\{\sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}\}$ 'in bir üst sınırıdır. Böylece, $\frac{1}{\lambda}u \in \{x, -x\}^u$ gösterir ki, $u \in \{\lambda x, -\lambda x\}^u$. Dolayısıyla, $\{\lambda x, -\lambda x\}^u \supseteq \{\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda x_k : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}\}^u$ ve bu nedenle, $\lambda x \in S'$ dir.

Bir vektör latisinde, x ve y elemanları için, $|x| \wedge |y| = 0$ veya $|x + y| = |x - y|$ ise, x ve y ayrıktır denir, (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985) Kısmi sıralı vektör uzayında ayrıklık tanımı verelim.

Tanım 3.6 (Gaans ve Kalauch, 2006) X kısmi sıralı bir vektör uzayı olsun. $x, y \in X$ elemanları için

$$\{x + y, -x - y\}^u = \{x - y, -x + y\}^u \text{ ise } x \text{ ile } y \text{ ayrıktır denir ve } x \perp y \text{ ile gösterilir.}$$

$M \subseteq X$ alt kümesinin ayrık tümleyeni $M^d = \{y \in X : y \perp x \text{ her } x \in M \text{ için}\}$ kümesidir.

$x, y \in X$ için, $y \perp x$ olması için gerek ve yeter koşul $x \perp y$ olmasıdır ve açık olarak $x \perp 0$ dır.

Diğer yandan, $x \perp y$ ise $-x \perp y$ ' dir. Eğer, $x \perp x$ ise, $\{x + x, -x - x\}^u = \{x - x\}^u = K$ böylece, $x, -x \leq 0, x = 0$. Benzer şekilde, $x \perp (-x)$ ise, $x = 0$ 'dır. Eğer, $x, y \in K$ için, $x \perp y$ ve $z \geq x, y$ olacak şekilde bir "z" varsa, $z \in \{x - y, -x + y\}^u = \{x + y\}^u$ ' dur, böylece, $z \geq x + y$ ' dir. $M \subseteq X$ için M^d boştan farklıdır, çünkü $0 \in M^d$ 'dir. Diğer taraftan M ve N , $M \subseteq N$ olacak şekilde X ' in alt kümeleri ise $M^d \supseteq N^d$ ' dir. Görülebilir ki, $x, y \in X$ iken $x \perp y$ olması için gerek ve yeter koşul şu şartların sağlanmasıdır:

$$(K \pm x) \cap (K \pm y) \subseteq K \quad (3.18)$$

Gerçekten, $x, y \in X$ iken $x \perp y$ olsun, yani;

$$(K + x + y) \cap (K - x - y) = (K + x - y) \cap (K - x + y) \quad (3.19)$$

$K = 2K$ olduğunu göz önüne alarak, $x + y$ ekleyerek ve 2 ile bölerek sırasıyla

$$(3.19) \Leftrightarrow (K + 2x + 2y) \cap K = (K + 2x) \cap (K + 2y) \quad (3.20)$$

$$\Leftrightarrow (2K + 2x + 2y) \cap (2K) = (2K + 2x) \cap (2K + 2y) \quad (3.21)$$

$$\Leftrightarrow (K + x + y) \cap K = (K + x) \cap (K + y) \quad (3.22)$$

elde edilir.

(3.22)' deki benzer hesaplamalar kullanılarak (3.18)' deki kapsamalar elde edilir. Diğer yandan (3.18)' i kabul edelim. $(K + x) \cap (K - y) \subseteq K$ dan,

$$(K + x + y) \cap K \subseteq (K + y) \quad (3.23)$$

$$(K - x) \cap (K + y) \subseteq K \Rightarrow K \cap (K + x + y) \subseteq (K + x) \quad (3.24)$$

dır.

Böylece,

$$(K + x + y) \cap K = (K + x) \cap (K + y) \quad (3.25)$$

$$\left. \begin{array}{l} (K + x) \cap (K + y) \subseteq K \\ (K - x) \cap (K - y) \subseteq K \end{array} \right\} \Rightarrow (K + y) \cap (K + x) \subseteq (K + x + y) \quad (3.26)$$

Dolayısıyla, $(K + x + y) \cap K \supseteq (K + x) \cap (K + y)$ ' dır.

(3.22) sağlandığından $x \perp y$ olduğu söylenebilir. Bu bölümü, kısmi sıralı vektör uzayı içinde band tanımı yaparak sonlandıralım.

Tanım 3.7 X kısmi sıralı vektör uzayının lineer bir alt uzayı M ' ye, $(M^d)^d = M$ koşulunu sağlıyorsa, X ' de bir band denir.

4. PRE-RIESZ UZAYLARI

Bu bölümde, pre-Riesz uzayının durumu geliştirilerek, pre-Riesz uzaylarının gerçekte vektör latislerinin sıralı yoğun alt uzayları olduğu yeniden hatırlayalım. Pre-Riesz uzayları ve vektör latisleri üzerine gömmeleri ile ilgili birtakım örnekler verelim.

Tanım 4.1 (Haandel, 1993) (X, K) kısmi sıralı vektör uzayı, eğer her $x, y, z \in X$ için

$\{x + y, x + z\}^u \subseteq \{y, z\}^u$ kapsaması, $x \in K$ olmasını gerektiriyorsa, pre-Riesz olarak adlandırılır. Açık olarak, Tanım 4.1' deki kapsama $(x + y) \vee (x + z) \geq y \vee z$ eşitsizliğine indirgenerek,

$x + (y \vee z) \geq y \vee z$ ve dolayısıyla $x \geq 0$ olduğundan her vektör latis bir pre-Riesz' tir.

Önerme 4.2 (Haandel, 1993) Her pre-Riesz uzayı yönlüdür ve her yönlü Archimedean kısmi sıralı vektör uzayı pre-Riesz' tir.

Archimedean olmayan pre-Riesz uzayına örnek olarak,

$K = \{(x_1, x_2)^T : x_2 > 0\} \cup \{(x_1, 0)^T : x_1 \geq 0\}$ konisi ile birlikte, $\mathbb{R}^2$ uzayını düşünelim.

X kısmi sıralı vektör uzayının D lineer alt uzayını, eğer her $x \in X$ için

$x = \inf\{y \in D : y \geq x\}$ oluyorsa; yani, $x; \{y \in D : y \geq x\}$ kümesinin en büyük alt sınırı ise, X' de sıralı yoğun olarak adlandırılır. (Buskes ve Rooij, 1993). Doğrudan, D' nin, X' de sıralı yoğun olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için $x = \sup\{y \in D : y \leq x\}$ olmasıdır. Açık olarak, sıralı yoğun bir alt uzay büyüklemedir, (majorizing).

X ve Y kısmi sıralı vektör uzayları için, $i: X \rightarrow Y$ lineer tasviri, eğer her $x \in X$ için,

$i(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ ise, ikili pozitif olarak adlandırılır. Pre- Riesz uzayları gerçekte, vektör latislerinin sıralı yoğun alt uzaylarıdır.

Teorem 4.3 (Haandel, 1993) X kısmi sıralı bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) X , pre-Riesz' tir.
- (ii) Bir Y vektör latisi ve $i: X \rightarrow Y$ ikili pozitif lineer tasviri vardır öyle ki, $i(X)$, Y' de sıralı yoğundur.
- (iii) Bir Y vektör latisi ve $i: X \rightarrow Y$ ikili pozitif lineer tasviri vardır öyle ki, $i(X)$, Y' de sıralı yoğundur ve bir vektör latisi olarak Y' yi üretir.

(iii)'deki gibi bütün Y uzayları sıralı izomorfiktir. (iii)'deki gibi (Y, i) ikilisi, X' in Riesz tamlanması olarak adlandırılır. Yukarıya izomorfizma olarak, Riesz tamlanmalarından bahsedilecektir ve bu tamlanma X^p ile gösterilecektir.

Eğer, (X, K) pre-Riesz uzayı Archimedean ise, X^p de Archimedean' dır. Pre-Riesz uzayına örnekler düşünelim. 4. 4, 4. 5. 4. 6 ve 4. 7 Örnekleri aynı kısmi sıralı vektör uzayın farklı temsillerini tanımlar. 4.7 ve 4. 8 örneklerine 5. Bölüm' de zıt örnekleri oluşturmak için devam edilmiştir.

Örnek 4.4 (Gaans, 2008) Bu örnekte $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonlar uzayı $C(\mathbb{R})$ ' nin

$\{x \in C(\mathbb{R}): x(t) \geq 0, \text{ her } t \in \mathbb{R} \text{ için}\}$ doğal konisi ile sıralı alt uzaylarını düşüneceğiz. $X = P_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}'$ deki en çok 2. Dereceden reel polinom fonksiyonlarının sıralı vektör uzayı olsun. X' in yönlü olduğu görülür. X' in, $V = \{v \in C(\mathbb{R}): p \in X \text{ vardır öyle ki, } |v| \leq p\}$ vektör latisinde sıralı yoğun olduğunu gösterelim.

$v \in V$ ve $p \in X$ olsun öyle ki, her $t \in \mathbb{R}$ için $|v(t)| < p(t)$ dir. $v(t_0) + \varepsilon < p(t_0)$ olacak şekilde bir $t_0 \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ noktalarını sabitleyelim. v sürekli olduğundan, $\delta > 0$ vardır, öyle ki, her $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ için, $v(t) \leq v(t_0) + \varepsilon$ olur.

$p_\varepsilon(t_0) = v(t_0) + \varepsilon$, $p_\varepsilon(t_0 - \delta) = p_\varepsilon(t_0 + \delta) = \max\{p(t_0 - \delta), p(t_0 + \delta)\}$ denklemlerinden bir $p_\varepsilon \in X$ polinomu elde edilebilir. p_ε polinomu minimumunu t_0 ' da alır ve her

$t \in \mathbb{R} - (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ için $p_\varepsilon(t) \geq p(t)$ sağlanır. Böylece, $p_\varepsilon \geq v$ ' dir. Aynı zamanda,

$\inf\{p(t_0): p \in X, p \geq v\} \leq p_\varepsilon(t_0) = v(t_0) + \varepsilon$ ve $\varepsilon \rightarrow 0$ iken,

$v(t_0) = \inf\{p(t_0): p \in X, p \geq v\}$. Dolayısıyla, $v = \inf\{p \in X, p \geq v\}$. Sonuç olarak, $X; V'$ de sıralı yoğun olduğu elde edilir. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ve $t_1 < \dots < t_n$ olacak şekilde $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ varsa ve y , her $i=1, \dots, n-1$ için $(-\infty, t_1], [t_n, \infty]$ ve $[t_i, t_{i+1}]$ üzerinde en çok 2. dereceden polinom fonksiyonu ise, $y; \mathbb{R}'$ de parçalı polinom fonksiyonu olarak adlandırılır.

Böyle bir y fonksiyonu için,

$L(y) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t)/t^2$ ve $R(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)/t^2$ tanımlansın.

$Y = \{y \in C(\mathbb{R}): y, \text{ en çok 2. dereceden parçalı polinom fonksiyonu ve } L(y) = R(y)\}$ ile gösterelim.

Açık olarak, Y, V' nin bir alt uzayıdır ve $X \subset Y$; böylece, X aynı zamanda Y' de sıralı yoğundur. Ek olarak, Y, V' nin bir alt latisidir. X' in Y' yi ürettiğini görmek için, $t_1 < \dots < t_n$ ve $p_i \in X$ ile bir y fonksiyonunu düşünelim, $i = 0, \dots, n$ öyle ki; $(-\infty, t_1]$ aralığında $y = p_0$,

$[t_i, t_{i+1}]$ aralığında $y = p_i$, $i=1, \dots, n-1$, ve $[t_n, \infty)$ aralığında $y = p_n$ olsun. $i \in \{1, \dots, n-1\}$ için, $[t_i, t_{i+1}]$ üzerinde t^2 katsayısı çok büyük olmak koşuluyla $(t_i, y(t_i))$ ve $(t_{i+1}, y(t_{i+1}))$ noktalarından geçen $z \in X$ parabolü seçerek $y_i \geq y$ ve $y_i = y$ olacak şekilde bir $y_i = p_i \vee z$ fonksiyonu oluşturulur. $(-\infty, t_1]'$ de $y_0 = p_0$ ve $y_0 \geq y$ ile X 'in en fazla üç elemanının noktasal maksimumu olacak şekilde y_0 oluşturulabilir. Gerçekten, $a = L(y) = R(y) \leq 0$ ise, y_0, p_0' in noktasal maksimumu olarak alınabilir. Eğer $a > 0$ ise $v(t) = at^2 + pt + q$ olduğu yerde $y_0 = p_0 \vee v \vee w$ olarak alınabilir, öyle ki; $v(t_n) = y(t_n)$ ve $v'(t_n)$ çok büyük yani, $(-\infty, t_1]'$ de $v \leq p_0$ ve $[t_n, \infty)'$ da $v \geq p_n$ dir. Ayrıca, $w, (t_1, y(t_1))$ ve $(t_n, y(t_n))$ arasından geçen bir paraboldür, öyle ki, $[t_1, t_n]'$ de $w \geq y$ ve $(-\infty, t_1]'$ de $w \leq p_0$ olur. Benzer şekilde, y_n de oluşturulabilir. $y = \bigwedge_{i=0}^n y_i = -\bigvee_{i=0}^n (-y_i)$. Dolayısıyla, X, Y' yi üretir ve Y, X' in Riesz tamlanmasıdır.

Örnek 4.5 $X = \mathbb{R}^3$ uzayı üç boyutlu $K_3 = \{(x_1, x_2, x_3)^T : x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2, x_3 \geq 0\}$ konisi ile donatılmış olsun. X' in Örnek 4.4' te verilen $P_2(\mathbb{R})$ (noktasal sıralılık ile donatılmış) uzayına sıralı izomorf olduğunu iddia ediyoruz. $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun ve $P_2(\mathbb{R})'$ de bir

$p(t) = at^2 + bt + c$ elemanını düşünelim. $a \neq 0$ olması durumunda p' nin sıfırları

$$t_{1,2} = \frac{1}{2a}(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac})$$

ile verilir. Dolayısıyla, p' nin pozitif olması için gerek ve yeter koşul, ya

(i) $0 < a$ ve $b^2 - 4ac \leq 0$, ya da

(ii) $a = b = 0$ ve $0 \leq c$ olmasıdır.

$(x_1, x_2, x_3)^T \mapsto p(t) = at^2 + bt + c$; öyle ki, $a = x_1 + x_3$, $b = 2x_2$, $c = x_3 - x_1$ ile tanımlanan $j: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ lineer birebir örten fonksiyonunu düşünelim. j' nin ikili pozitif olduğunu gösterelim. $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in K_3$ olsun yani, $x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2$ ve $x_3 \geq 0$.

$x_1 = \frac{a-c}{2}$, $x_2 = \frac{b}{2}$ ve $x_3 = \frac{a+c}{2}$ olmasına bağlı olarak, $x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $b^2 \leq 4ac$ olmasıdır. Özel olarak, $0 \leq ac$ elde edilir. $0 \leq x_3 = \frac{a+c}{2}$ kombinasyonundan $0 \leq a$ ve $0 \leq c$ elde edilir. Eğer, $0 < a$ ise (i)' deki durum geçerlidir. Diğer yandan, eğer $a = 0$ ise $b = 0$ olduğu elde edilir ve dolayısıyla (ii)' deki durum geçerli olur. Böylece, $j(x)$ polinomu noktasal sıralamaya göre pozitifdir.

Tersine, $p; P_2(\mathbb{R})'$ nin pozitif bir elemanı olsun. (i) durumunda $x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2$ elde edilir, özel olarak $|x_1| \leq |x_3|$, ve $0 < a = x_1 + x_3$ den $0 < x_3$ ve dolayısıyla $x \in K_3$ olur. (ii) durumunda, $x_2 = 0$ ve $x_3 = -x_1$ olduğu görülür ve böylece $x_1^2 = x_3^2$ dir.

Şimdi, $0 \leq c = 2x_3$ ifadesinden $x \in K_3$ elde edilir. Sonuç olarak, $(\mathbb{R}^3, K_3)$ uzayının Riesz tamlanması Örnek 4.4' teki Y uzayıdır.

Örnek 4.6 X uzayı, içindeki bütün yarıtanımlı pozitif matrisler konisi ile sıralı 2×2 mertebeli matrislerin uzayı olsun. X' in Örnek 4.4' te verilen $P_2(\mathbb{R})$ uzayına sıralı izomorf olduğunu gösterelim.

$$j: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(\mathbb{R}) \quad (4.1)$$

$$p(t) = at^2 + bt + c \mapsto \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

birebir örten dönüşümünü düşünelim.

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix} \text{ matrisinin } K' \text{ da olması için gerek ve yeter koşul}$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \left(a + c \mp \sqrt{(a + c)^2 + b^2 - 4ac} \right) \quad (4.3)$$

ile verilen öz değerlerin ikisinin de negatif olmamasıdır. Sonra, $0 \leq \lambda_1, \lambda_2$ elde edilmesi için gerek ve yeter koşul (iii) $0 \leq a + c$ ve $b^2 - 4ac \leq 0$ olmasıdır. Gerçekten, $0 \leq \lambda_1, \lambda_2$ ise $0 \leq \lambda_1 + \lambda_2 = a + c$ dir. İlave olarak, $a + c \geq \sqrt{(a + c)^2 + b^2 - 4ac}$ eşitsizliği $0 \geq b^2 - 4ac$ olmasını gerektirir. Diğer yandan, (iii)'nin kabul edilmesinden $0 \leq \lambda_1, \lambda_2$ olduğu açıktır.

Örnek 4.5' deki (i) durumundan $0 \leq ac$ elde edilir ve dolayısıyla $0 \leq c'$ dir, böylece (iii) sağlanmış olur. Açık olarak, (ii)' nin olması (iii)' yi gerektirir. Diğer yandan, (iii)' nin olması (i) ya da (ii)' nin olmasını gerektirir. Böylece, $p \in P_2(\mathbb{R})'$ nin pozitif olması için gerek ve yeter koşul $A = j(p) \in K$, yani, j bir ikili pozitif bijektif fonksiyon olmasıdır, ve sonuç olarak iki uzay sıralı izomorftur. Dolayısıyla, X' in Riesz tamlanması yine Örnek 4.4' teki Y uzayıdır.

Örnek 4.7 $S = \{(\xi, \eta): \xi^2 + \eta^2 = 1\}$, $\mathbb{R}^{2'}$ de birim çember ve X' de; $\mathbb{R}^{2'}$ den $\mathbb{R}'$ ye bütün afin fonksiyonların S' ye kısıtlandığı uzay olsun, yani;

$$X = \{x: S \rightarrow \mathbb{R}: \exists \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R} \text{ öyle ki } x(\xi, \eta) = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \mu_3 \forall (\xi, \eta) \in S\}.$$

K , S üzerinde noktasal negatif olmayan fonksiyonların konisi olsun. Bu kısmi sıralı vektör uzayı (X, K) , Gaans (1999) tarafından tanımlanmıştır. X yönlü, Archimedean ve dolayısıyla pre-Riesz' tir. X , $C(S)$ ' nin kısmi sıralı bir alt uzayı olarak düşünülebilir. Gaans (1999)' a göre X , $C(S)$ ' de sıralı yoğundur. Dolayısıyla, $C(S)$ ' nin X tarafından üretilen latis alt uzayı X'

in X^p Riesz tamlanmasıdır. (X, K) uzayı Örnek 4.5' teki $(\mathbb{R}^3, K_3)$ uzayına (ve dolayısıyla Örnek 4.4' teki $P_2(\mathbb{R})$ uzayına) izomorftur. Gerçekten, $j: \mathbb{R}^3 \rightarrow X$,

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T \mapsto x(\xi, \eta) = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \mu_3 \quad (4.4)$$

ile tanımlı lineer birebir-örten dönüşümünü düşünelim.

Doğrudan hesaplamayla,

$$\min\{x(\xi, \eta): (\xi, \eta) \in S\} = \mu_3 - \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2} \quad (4.5)$$

dır.

Dolayısıyla, x' in S' de noktasal negatif olmayan olması için gerek ve yeter koşul

$$\mu_3 \geq 0 \text{ ve } \mu_3^2 \geq \mu_1^2 + \mu_2^2 \quad (4.6)$$

dır. Dolayısıyla, j ikili pozitiftir. Örnek 4.4' teki Y uzayı ve X^p , X uzayının iki farklı Riesz tamlanma temsilleridir.

Sıradaki örnekte, sonlu olarak üretilmiş bir koniyle donatılmış $\mathbb{R}^n$ uzayının bir vektör latisi içine gömmesi tartışılmıştır.

Örnek 4.8 $\langle ., . \rangle$ skaler çarpımı ile $X = \mathbb{R}^n$ Öklid uzayını düşünelim. $\mathbb{R}^n$ ile X üzerinde tanımlı bütün lineer fonksiyonellerin uzayını genel olarak X' ile gösterilecektir. X içerisindeki bir K konisi, eğer $K = \text{pos}\{x_1, \dots, x_r\}$ yani, K ; $x_1, \dots, x_r$ elemanlarının pozitif lineer germesine eşit olacak şekilde $x_1, \dots, x_r \in X$ sonlu elemanları varsa *sonlu üretilmiş* olarak adlandırılır. K , X' de sonlu üretilmiş bir koni ve üreten, yani $r \geq n$ olsun. K kapalı ve dolayısıyla Archimedeeandır, böylece (X, K) pre- Riesz' tir. Sonra, $\text{int}(K) \neq \emptyset$ gösterir ki, $K' = \{f \in X': f(K) \subseteq [0, \infty)\}$ bir konidir. Sabit bir $u \in \text{ic}(K)$ için

$F = \{x \in K': \langle u, x \rangle = 1\}$, K' için bir tabandır. $k \geq n$ olduğu yerde F sonlu birçok ekstrem $f_1, \dots, f_k$ noktaya sahiptir ve buradan $K' = \text{pos}\{f_1, \dots, f_k\}$ elde edilebilir. K için,

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n: f_i(x) \geq 0 \text{ her } i = 1, \dots, k\} \quad (4.7)$$

temsili elde edilebilir.

$$i: x \mapsto (f_1(x), \dots, f_k(x))^T \quad (4.8)$$

ile verilen $i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ tasviri ikili pozitif ve dolayısıyla bire birdir, yani i , $(\mathbb{R}^n, K)$ kısmi sıralı vektör uzayını $(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}_+^k)$ vektör latisine gömer, (Bu gömme bazen Königstein gömmesi olarak adlandırılır,).

Dört eleman tarafından üretilmiş K konisi ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ uzayını düşünelim.

$$K = pos \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (4.9)$$

konisi

$$f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

fonksiyonellerine göre (4.7)' deki temsile sahiptir.

(4.8)' deki gömme

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

olduğu yerde $(x_1, x_2, x_3)^T \mapsto x_1 b^{(1)} + x_2 b^{(2)} + x_3 b^{(3)}$ olmasını gerektirir.

Uygun olması adına $i(\mathbb{R}^3)'$ ü germek için

$$\frac{1}{2}(b^{(3)} - b^{(2)}), \frac{1}{2}(b^{(1)} + b^{(3)}) \text{ ve } \frac{1}{2}(b^{(2)} + b^{(3)}) \quad (4.12)$$

vektörlerini kullanacağız yani,

$$i(\mathbb{R}^3) = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.13)$$

$\mathbb{R}^4$ ' ün lineer alt uzayı $i(\mathbb{R}^3)$, $\mathbb{R}^4$ ' te sıralı yoğundur, (Standart sıralama ile).

Gerçekten, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ için

$$u = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_2 - x_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (|x_2 - x_1| + |x_3| + |x_4|) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ (x_2 - x_1) + |x_2 - x_1| + |x_3| + |x_4| \\ |x_2 - x_1| + |x_3| + |x_4| \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

O zaman, $u, v \in i(\mathbb{R}^3)$, $u \geq x$ ve $x = u \wedge v$ ' dir. Dolayısıyla, $i(\mathbb{R}^3)$ $\mathbb{R}^4$ ' de sıralı yoğundur.

Ek olarak, kısmi sıralı $(\mathbb{R}^3, K)$ vektör uzayının Riesz tamlanması $(\mathbb{R}^4, i)$ uzayıdır.

5. KISITLAMA ve GENİŞLEME ÖZELLİKLERİ

Vektör latilerinde ideallerin ve bandların genelleştirilmesi olarak kısmi sıralı vektör uzaylarında ideal, solveks ideal, sıralı kapalı ideal ve band tanımları yapıldı. Bu durumlar bir pre-Riesz uzayı içerisinde araştırıldı ve Riesz tamlanma içindeki ilgili durumlarla ilişkilendirildi. Bir pre-Riesz uzayının Riesz tamlanmasının sıralı yoğun alt uzayı olarak bir Y vektör latisi ve onu sıralı yoğun alt uzayı X' i düşünelim. (R) kısıtlama, (E) genişleme, (P) ise X veya Y alt kümesi için “ideal olma”, “band olma” özelliklerini göstermek üzere,

(R) Eğer $J \subseteq Y$, Y içerisinde (P) özelliğine sahipse, $J \cap X$ de X içerisinde (P) özelliğine sahiptir.

(E) Eğer $I \subseteq X$ X içerisinde (P) özelliğine sahipse, Y içerisinde (P) özelliğine sahip olacak şekilde bir $J \subseteq Y$ vardır ve $I = J \cap X$.

Buradaki sonuçlar aşağıdaki gibi olacaktır:

Çizelge 5.1 Kısıtlama ve Genişleme Özellikleri

(P)	(R)	(E)
İdeal olma	Evet, Önerme 5.3	Hayır, Örnek 5.7
Sıralı kapalı ideal olma	Evet, Önerme 5.1 (iii), 5.3	Hayır, Örnek 5.6
Solveks ideal olma	Evet, Önerme 5.5 (i)	Evet, Önerme 5.6
Band olma	Hayır, Örnek 5.13	Evet, Önerme 5.12

Sıralı yakınsaklığı ilgilendiren bir ifadeyle başlayalım ve sıralı kapalı kümeler için kısıtlama özelliğini çıkaralım.

Önerme 5.1 X , kısmi sıralı vektör uzayı Y' nin sıralı yoğun bir alt uzayı olsun.

- (i) D , X içinde $\inf_X D$ infimumu var olacak şekilde X' in bir alt kümesi ise, $\inf_Y D$ infimumu da Y' dedir ve $\inf_X D$ ' ye eşittir.
- (ii) $\{x_\alpha\}$, X' de bir ağ, $x \in X$ için $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ X içerisinde ise, $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ Y' nin de içerisindeydir.
- (iii) Eğer, $J \subseteq Y$ Y' de sıralı kapalı ise, $J \cap X$ de X' de sıralı kapalıdır.

İspat. (i) $w = \inf_X D$, böylece $w \in X \subseteq Y$ ve her $d \in D$ için $w \leq d$. Her $d \in D$ için $v \leq d$ olacak şekilde $v \in Y$ olsun. X , Y' de sıralı yoğun olduğundan $v = \sup\{x \in X: x \leq v\}$ elde edilebilir. $x \leq v$ ve her $d \in D$ için $x \leq D$ olacak şekilde $x \in X$ olsun, dolayısıyla

$x \leq \inf_X D = w$. Böylece, her $x \in X$ için w bir üst sınırdır yani $x \leq v$ ve $v \leq w$. Sonuç olarak, $w = \inf_Y D$.

(ii) $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ olduğunu kabul edelim, yani $y_\alpha \downarrow 0$ ve her α için $\pm(x_\alpha - x) \leq y_\alpha$ olacak şekilde bir $\{y_\alpha\} \subset X$ ağı vardır. O zaman, Y' de $y_\alpha \downarrow$ ve her α için $y_\alpha \geq 0$ ' dır. (i)' ye bağlı olarak $\inf\{y_\alpha\} = 0$ olduğu elde edilebilir, böylece $y_\alpha \downarrow 0$ ' dır. Dolayısıyla, Y' de $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ ' dır.

(iii), (ii)' nin doğrudan bir sonucudur.

Önerme 5.1 (ii), özel olarak, $i: X \rightarrow X^p$ gömmesinin sıralı sürekli olduğunu gösterir.

Genel olarak, (ii)' nin ters ifadesi doğru değildir. Y' deki sıralı yakınsaklık, dizinin limiti X' de olsa bile, X' de sıralı yakınsak olduğunu göstermez. Buna bir örnek verelim.

Örnek 5.2 $Y = \{y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z}) : \lim_{i \rightarrow \infty} y_i \text{ mevcuttur}\}$

vektör latisini ve

$$X = \left\{ x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in Y : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{-k}}{2^k} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i \right\}$$

alt uzayını düşünelim.

$i \in \mathbb{Z}$ için, $e^{(i)} = (e_j^{(i)})_{j \in \mathbb{Z}}$ ile gösterelim. $i = j$ ise, $e_j^{(i)} = 1$; diğer durumda ise $e_j^{(i)} = 0$ olsun.

(a) X, Y' de sıralı yoğundur.

$y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ve

$$\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} y_i - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_{-k}}{2^k} \quad (5.1)$$

olsun.

$\alpha \geq 0$ ise,

$$x^{(1)} = y + 2\alpha e^{(-1)} \text{ ve } x^{(2)} = y + 4\alpha e^{(-2)} \quad (5.2)$$

değerlerini yerlerine koyalım.

O zaman, $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$, ve $y = x^{(1)} \wedge x^{(2)}$ dir. $\alpha < 0$ ise, o zaman her $m \in \mathbb{N}$ için,

$$x^{(m)} = y - \alpha \sum_{i=m}^{\infty} e^{(i)} \quad (5.3)$$

koyalım. Her $m \in \mathbb{N}$ için $x^{(m)} \in X$ olduğu elde edilebilir ve dolayısıyla

$$y = \inf\{x^{(m)} : m \in \mathbb{N}\}.$$

(b) $(e^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \subset X$ dizisi Y içerisinde sıfıra sıralı yakınsar, fakat X içerisinde sıralı yakınsamaz. $m \in \mathbb{N}$ için $y^{(m)} = \sum_{i=m}^{\infty} e^{(i)}$ olsun. Açık olarak, her $m \in \mathbb{N}$ için $y^{(m)} \in Y$ ve $y^{(m)} \downarrow m 0$ dır. Her $m \in \mathbb{N}$ için $\pm e^{(m)} \leq y^{(m)}$ olduğundan, Y' de $e^{(m)} \xrightarrow{(o)} 0$ elde edilebilir. Çelişki yöntemiyle, $(e^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ dizisinin X' de sıralı yakınsak olmadığı gösterilebilir. X içerisinde $e^{(m)} \xrightarrow{(o)} v$ olacak şekilde bir $v \in X$ olduğunu kabul edelim. O zaman, Y' de de $e^{(m)} \xrightarrow{(o)} v$, dolayısıyla $v=0$ olur. Böylece, her $m \in \mathbb{N}$ için, $v^{(m)} \downarrow m 0$ ve $e^{(m)} \leq v^{(m)}$ olacak şekilde $(v^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \subset X$ dizisi mevcuttur. $i \geq m$ ise, o zaman $v^{(m)} \geq v^{(i)} \geq e^{(i)}$ olur. Dolayısıyla, her $i \geq m$ için $v_i^{(m)} \geq 1$ dir. Bu da, $\lim_{i \rightarrow \infty} v_i^{(m)} \geq 1$ ve sonuç olarak, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_{-k}^{(m)}}{2^k} \geq 1, \forall m \in \mathbb{N}$ için, olmasını gerektirir. Her $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için, monoton yakınsaklık, yani; $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_{-k}^{(m)}}{2^k} \downarrow m 0$ elde edilemediğinden $v_{-k}^{(m)} \downarrow m 0$ olduğu bulunamaz.

Böylece, her $m \in \mathbb{N}$ için $v_{-k}^{(m)} \geq \delta$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ve $\delta > 0$ vardır. Her $m \in \mathbb{N}$ için,

$w = \delta e^{(-k)} - 2\delta e^{(-k-1)}$ yerine konulursa, o zaman, $w \in X$ ve $w \leq \delta e^{(-k)} \leq v^{(m)}$ olur. Ayrıca, $w \not\leq 0$ olması $\inf\{v^{(m)} : m \in \mathbb{N}\} = 0$ ile çelişir.

Şimdi katı (solid) kümeler için kısıtlama özelliğini yapılandıracağız, (Gaans ve Kalauch, 2006).

Önerme 5.3 Y yönlü ve kısmi sıralı bir vektör uzayı, X, Y' nin sıralı yoğun bir alt uzayı ve J, Y' nin solid alt kümesi olsun. O zaman, $J \cap X$ kümesi de X' de solid(katı) dir.

İspat. $\{x, -x\}^u \cap X \supseteq \{y, -y\}^u \cap X$ olacak şekilde $x \in X$ ve $y \in J \cap X$ olsun. Y yönlü olduğundan, $\{y, -y\}^u$ kümesi boştan farklıdır. Eğer, $v \geq y, v \geq -y$ olacak şekilde $v \in Y$ ise, o zaman,

$$\{u \in X : u \geq v\} \subseteq \{y, -y\}^u \cap X \subseteq \{x, -x\}^u \cap X \quad (5.4)$$

olması $v = \inf\{u \in X : u \geq v\} \geq x$ olmasını gerektirir ve benzer şekilde $v \geq -x$ tir. Böylece, $\{x, -x\}^u \supseteq \{y, -y\}^u$. J, Y' de katı olduğundan $x \in J$ ve böylece $x \in J \cap X$ elde edilebilir. Dolayısıyla, $J \cap X, X'$ de katıdır.

Sonuç 5.4 X bir pre-Riesz uzayı ve $X^{p'}$ de ilgili gömme tasviri i ile birlikte bu uzayın Riesz tamlanması olsun. Eğer; $J, X^{p'}$ de bir idealse o zaman, $\{x \in X : i(x) \in J\}$ de X' de bir idealdir.

Solveks kümeler için hem kısıtlama hem de genişleme özellikleri geçerlidir.

Önerme 5.5 Y kısmi sıralı yönlü bir vektör uzayı, X de Y' nin sıralı yoğun bir alt uzayı olsun.

- (i) J, Y' nin solveks bir alt kümesi ise, $J \cap X$ de X' de solvekstir.
- (ii) I, X' in solveks bir alt kümesi ve J de onun Y' deki solveks bir kabuğu ise o zaman, $J \cap X = I$ dir.

İspat. (i) $x \in X, x_1, \dots, x_n \in J \cap X$ ve $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ ile $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0,1]$ olsun öyle ki,

$$\{x, -x\}^u \cap X \supseteq \left\{ \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda_k x_k : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\} \right\}^u \cap X. \quad (5.5)$$

Eğer, $v \in Y, \{\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda_k x_k : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}\}^u$ kümesinin bir üst sınırı ise, o zaman,

$$\{u \in X : u \geq v\} \subseteq \left\{ \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda_k x_k : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\} \right\}^u \cap X \subseteq \{x, -x\}^u \cap X$$

olması $v = \inf\{u \in X : u \geq v\} \geq x$ ve benzer şekilde $v \geq -x$ olmasını gerektirir. Böylece,

$$\{x, -x\}^u \supseteq \left\{ \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda_k x_k : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\} \right\}^u. \quad (5.6)$$

J, Y' de solveks olduğundan, $x \in J$ ve dolayısıyla $x \in J \cap X$ olmasıyla devam eder. Yani, $J \cap X, X'$ de solvekstir.

(ii) I' nın X içerisinde solveks olduğunu kabul edelim.

$$J = \left\{ y \in Y : \exists x_1, \dots, x_n \in I, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0,1], \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \text{ öyle ki, } \{y, -y\}^u \supseteq \left\{ \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda_k x_k : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\} \right\}^u \right\}$$

kümesi verilsin.

Açık olarak, $I \subseteq J$, böylece $I \subseteq J \cap X$ dir. Geriye $J \cap X \subseteq I$ olduğunu göstermek kalır. $x \in J \cap X$ olsun. O zaman, $x_1, \dots, x_n \in I$ ve $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ ile $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0,1]$ vardır, öyle ki;

$$\{x, -x\}^u \supseteq \left\{ \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda_k x_k : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\} \right\}^u.$$

Bu nedenle,

$$\{x, -x\}^u \cap X \supseteq \left\{ \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \lambda_k x_k : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\} \right\}^u \cap X.$$

ve I , X içerisinde solveks olduğundan $x \in I$ olur.

X içerisinde genişleme özelliği taşıyan idealler tam olarak solveks ideallerdir.

Önerme 5.6 Y bir vektör latisi ve X de Y' nin sıralı yoğun bir alt uzayı olsun. X içindeki bir I ideali için aşağıdaki iki ifade birbirine denktir:

(i) $I = J \cap X$ olacak şekilde Y' de bir J ideali vardır.

(ii) I , X içerisinde solvekstir.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii): Vektör latisi içerisindeki her ideal gibi J de solid ve konvektir. Dolayısıyla, Yardımcı Teorem 3.3' ten J solvekstir ve böylece Önerme 5.5 (i)' ye bağlı olarak $J \cap X$ de solvekstir.

(ii) $\Rightarrow$ (i): J , Y içerisinde I' nin bir solveks kabuğu olsun. Yardımcı Teorem 3.5' e göre, J bir idealdir. Ayrıca, Önerme 5.5 (ii)' ye göre $I = J \cap X$ dir.

Y vektör latisi içindeki her ideal solveks olduğundan, Önerme 5.6 solveks idealler için genişleme özelliğini belirtmiş olur.

Şimdi, bir X pre-Riesz uzayı içindeki I ideali için, I ; X' de solveks olmayacak şekilde bir örnek vereceğiz. Önerme 5.6' ya göre $I = J \cap X$ olacak şekilde X' in Riesz tamlanması $X^{p'}$ de J ideali yoktur. Örnekteki I ideali sıralı kapalıdır.

Örnek 5.7 Örnek 4.7' ye devam edelim, yani, $S = \{(\xi, \eta) : \xi^2 + \eta^2 = 1\}$, $\mathbb{R}^{2'}$ de birim çember ve X de; $\mathbb{R}^{2'}$ den $\mathbb{R}'$ ye bütün afin fonksiyonların S' ye kısıtlandığı uzay olsun. X pre-Riesz uzayı ve $C(S)$ ' de sıralı yoğundur. X içerisinde,

$$I = \{x : S \rightarrow \mathbb{R} : \exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \text{ öyle ki } x(\xi, \eta) = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta \forall (\xi, \eta) \in S\}$$

alt kümesini düşünelim.

(a) I , X' de bir idealdir.

Açık olarak, I , X' in lineer bir alt uzayıdır, böylece, geriye sadece I' nin solid olduğunu göstermek kalır.

$$y = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta \in I, y \neq 0$$

olsun.

y' nin sıfırları

$$s_1 = \left(\frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}}, \frac{-\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}} \right) \text{ ve } s_2 = \left(\frac{-\mu_2}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}}, \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}} \right). \quad (5.7)$$

$\{x, -x\}^u \supseteq \{y, -y\}^u$ olacak şekilde $x \in X$ olsun. Sıradaki hesaplamada, $|z|_{C(S)}$; bir $z \in C(S)$ fonksiyonunun noktasal mutlak değerini gösterecektir. Gaans (1999)' a göre

$$|x(s_1)| = \inf\{u(s_1): u \in X, u \geq |x|_{C(S)}\} \quad (5.8)$$

$$= \inf\{u(s_1): u \in X, u \geq \pm x\} \quad (5.9)$$

$$\leq \inf\{u(s_1): u \in X, u \geq \pm y\} \quad (5.10)$$

$$= \inf\{u(s_1): u \in X, u \geq |y|_{C(S)}\} \quad (5.11)$$

$$= |y(s_1)| = 0 \quad (5.12)$$

elde edilir. Böylece, $x(s_1) = 0$, ve benzer şekilde, $|x(s_2)| = 0$. Dolayısıyla $x = \lambda y$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}$ vardır, yani $x \in I$ dir.

(b) I solveks değildir.

$J, X^{p'}$ de I' yı içeren en küçük ideal olsun. Özel olarak, $x_1(\xi, \eta) = \xi$ ve $x_2(\xi, \eta) = \eta$ fonksiyonları için $|x_1| \vee |x_2| \in J$ elde edilir. Her $s \in S$ için $(|x_1| \vee |x_2|)(s) \geq \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır, böylece bütün sabit fonksiyonlar J' ye ait olur. $X^{p'}$ nin her elemanı sınırlı fonksiyon olduğundan, $J = X^p$ elde edilir. Şimdi, örnek olarak; $s \mapsto 1 (s \in S)$ fonksiyonu $J \cap X = X$ kümesinin bir elemanıdır, fakat I' ya ait değildir. Önerme 5.6' ya göre, I solveks değildir.

(c) I sıralı kapalıdır.

$\{x_\alpha\}_\alpha$ I içerisinde bir ağ ve $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ olacak şekilde $x \in X$ olsun, yani $y_\alpha \downarrow 0$ ve her α için $\pm(x_\alpha - x) \leq y_\alpha$ olacak şekilde bir $\{y_\alpha\} \subset X$ ağı vardır. $x(\xi, \eta) = \mu_1\xi + \mu_2\eta + \mu_3$ olacak şekilde $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ vardır. $x \in I$, yani $\mu_3 = 0$ olduğunu göstermeliyiz. y_α ağının sıfıra noktasal olduğunu göstereceğiz ve x_α ağının x' e noktasal yakınsadığını göstererek sonuçlandıracağız. O zaman, $\mu_3 = 0$ olur. Her $s \in S$ için $\{y_\alpha(s)\}_\alpha$, $[0, \infty)$ aralığında azalandır ve böylece yakınsaktır. $y(s) = \lim_\alpha y_\alpha(s)$ ile gösterilir.

y' nin $\mathbb{R}^2$ üzerindeki bir afin fonksiyonunun S' deki kısıtlanması olduğu iddia edilmektedir. Afin fonksiyonlar S çemberi üzerinde üç ayrı noktadaki değerleriyle belirtilirler. Noktaları, $(1,0)$, $(0,1)$ ve $(-1,0)$ olarak seçelim. S' deki her nokta, bu noktaların; toplamaları $1'$ e eşit olan

katsayılarla lineer kombinasyonu şeklinde ifade edilir. Yani, $(\xi, \eta) \in S$ için $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ve $(\xi, \eta) = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) + \lambda_3(-1,0)$ olacak şekilde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ vardır.

$$v_1 = \frac{1}{2}[y(1,0) - y(-1,0)] \quad (5.13)$$

$$v_2 = y(0,1) - \frac{1}{2}[y(1,0) + y(-1,0)] \quad (5.14)$$

$$v_3 = \frac{1}{2}[y(1,0) + y(-1,0)] \quad (5.15)$$

ile gösterelim. O zaman,

$$y(\xi, \eta) = \lim_{\alpha} y_{\alpha}(\xi, \eta) \quad (5.16)$$

$$= \lim_{\alpha} y_{\alpha}(\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) + \lambda_3(-1,0)) \quad (5.17)$$

$$= \lim_{\alpha} (\lambda_1 y_{\alpha}(1,0) + \lambda_2 y_{\alpha}(0,1) + \lambda_3 y_{\alpha}(-1,0)) \quad (5.18)$$

$$= \lambda_1 y(1,0) + \lambda_2 y(0,1) + \lambda_3 y(-1,0) \quad (5.19)$$

$$= \lambda_1(v_1 + v_3) + \lambda_2(v_2 + v_3) + \lambda_3(v_3 - v_1) \quad (5.20)$$

$$= v_1(\lambda_1 - \lambda_3) + v_2\lambda_2 + v_3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \quad (5.21)$$

$$= v_1\xi + v_2\eta + v_3 \quad (5.22)$$

Böylece, y bir afin fonksiyondur, yani $y \in X'$ dir. Her α için $0 \leq y$ ve $y \leq y_{\alpha}$ elde edilebilir. $\inf_{\alpha} y_{\alpha} = 0$ olduğundan $y = 0$ olur. Bu nedenle, her $(\xi, \eta) \in S$ için $\lim_{\alpha} y_{\alpha}(\xi, \eta) = 0$ olur. Böylece,

$\pm(x(\xi, \eta) - x_{\alpha}(\xi, \eta)) \leq y_{\alpha}(\xi, \eta)$ olduğundan $x(\xi, \eta) = \lim_{\alpha} x_{\alpha}(\xi, \eta)$ elde edilir.

$x(1,0) = \mu_1 + \mu_3$ ve $x(-1,0) = -\mu_1 + \mu_3$ ‘ dan

$$2\mu_3 = x(1,0) + x(-1,0) = \lim_{\alpha} (x_{\alpha}(1,0) + x_{\alpha}(-1,0)). \quad (5.23)$$

olur.

$x_{\alpha} \in I$ olduğundan, $x_{\alpha}(1,0) = -x_{\alpha}(-1,0)$ elde edilir, böylece, son limit sıfıra eşittir. Sonuç olarak $x \in I'$ dir.

Bir vektör latisi içindeki band sıralı kapalı ve solveks olduğundan, Önerme 5.1 (iii) ve Önerme 5.5 (i) ‘ nin sıradaki sonucunu elde ederiz.

Önerme 5.8 Y bir vektör latisi, X ; Y' nin sıralı yoğun bir alt uzayı ve J , Y içerisinde bir band olsun. O zaman, $J \cap X$, X içerisinde sıralı kapalı solveks bir idealdir.

Ayrık elemanları ilgilendiren bir ön bilgiyi hatırlayalım.

Önerme 5.9 (Gaans ve Kalauch, 2006) X ve Y kısmi sıralı vektör uzayları ve $x, y \in X$ olsun.

(i) Eğer X , Y' nin alt uzayı ise, Y içerisinde $x \perp y$ olması, X içerisinde $x \perp y$ olmasını gerektirir.

(ii) Eğer X , Y' nin sıralı yoğun bir alt uzayı ise Y içerisinde $x \perp y$ olması için gerek ve yeter koşul X içerisinde $x \perp y$ olmasıdır.

Y kısmi sıralı bir vektör uzayı, X ; Y' nin sıralı yoğun bir alt uzayı ve $M \subseteq X$ olsun. I ve J sırasıyla M' nin X ve Y içerisindeki iki ayrık tümleyeni olsun. Önerme 5.9 (ii), $I = J \cap X$ olmasını gerektirir.

Ayrıca Y , bir vektör latisi ise, o zaman, J , Y içerisinde bir banddır ve özellikle J' nin lineer alt uzay olması I' nin da lineer alt uzay olmasını gerektirir, (Gaans ve Kalauch, 2006). Ayrıca, Yardımcı Teorem 3.3' e göre J solvekstir. Önerme 5.5 (i)' yi uygulayarak I' nin solveks olduğu elde edilebilir. Son olarak, J sıralı kapalı olduğundan, I da Önerme 5.1 (iii)' e göre sıralı kapalı olur.

Teorem 5.10 X bir pre- Riesz uzayı, X^p de i gömme tasvirine göre uzayın Riesz tamlanması ve $M \subseteq X$ olsun.

(i) X^p de $i(M^d) = i(M)^d \cap i(X)'$ dır.

(ii) X içindeki M^d ayrık tümleyeni X' in lineer bir alt uzayıdır.

(iii) M^d solveks ve dolayısıyla soliddir.

(iv) M^d sıralı kapalıdır.

(v) M^d banddır.

Teoremin (v)' deki iddiası için, bakınız; Gaans ve Kalauch (2008), Önerme 5.5.

(ii)' deki durumda X' in pre-Riesz olması, aşağıdaki örnekte görüleceği gibi önemlidir, fakat gerekli değildir.

Örnek 5.11 $X = \mathbb{R}^2$ ve $K = \{(x_1, x_2)^T : 0 < x_1, x_2\} \cup \{(0,0)^T\}$ olsun. Her $x \in X \setminus \{(0,0)^T\}$ için $\{x\}^d = \{(0,0)^T\}$ elde edilebilir. Böylece, her $M \subseteq X$ için M^d ayrık tümleyeni X' in lineer bir alt uzayıdır. Diğer yandan, $y = (1,0)^T$ ve $x = z = (0,1)^T$ için,

$$\{y + x, z + x\}^u = \{(x_1, x_2)^T : 1 < x_1, 2 < x_2\} \subseteq \{(x_1, x_2)^T : 1 < x_1, x_2\} = \{y, z\}^u$$

elde edilebilir, fakat $x \notin K$. Böylece, (X, K) pre-Riesz değildir.

Pre- Riesz uzayındaki bandlar için genişleme özelliğini çıkaralım.

Önerme 5.12 Y bir pre-Riesz uzayı, X ; Y' nin sıralı yoğun bir alt uzayı ve I da X içerisinde bir band olsun. O zaman, Y içinde bir J bandı vardır, öyle ki $I = J \cap X$ dir.

İspat. X içinde $D = I^d$ olsun, böylece, I, X' de bir band olduğundan $D^d = (I^d)^d = I'$ dir. Dolayısıyla, I, X içinde D' nin ayrık tümleyeni olur. J de, Y içerisinde D' nin ayrık tümleyeni olsun. Teorem 5.10 (v)' ye göre J, Y' de bir banddır ve $I = J \cap X$ dir. (Haandel, 1993)

Y bir vektör latisi, X, Y' nin sıralı yoğun bir alt uzayı ve B, Y' de bir band ise, $B \cap X, X$ içerisinde bir band olmak zorunda değildir; yani, genelde bandlar için kısıtlama özelliği geçerli değildir. Ayrıca, bandlar yönlü olmak zorunda değildir.

Örnek 5.13 Örnek 4.8' e devam edelim. Gaans ve Kalauch (2006) tarafından $(\mathbb{R}^3, K)$ içindeki yönlü bandlar sadece

$$\{0\}, \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

alt uzaylarıdır.

Ayrıca, iki tane yönlü olmayan

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

bandları da vardır.

(5)' te verilen i gömme tasvirini işleme sokarak, $\mathbb{R}^4$ ' teki lineer alt uzayları,

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ve

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$i(\mathbb{R}^3)'$ te aşikar olmayan bandlardır. $i(\mathbb{R}^3), \mathbb{R}^{4'}$ te sıralı yoğun olsa bile, $\mathbb{R}^{4'}$ teki bir band ile $i(\mathbb{R}^3)'$ in kesişiminin band olması gerekmez. Gerçekten, $\mathbb{R}^{4'}$ te

$$B = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

bandını düşünelim, o zaman,

$$B \cap i(\mathbb{R}^3) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

dır.

$i(\mathbb{R}^3)$ ' te bir band değildir. Önerme 5.8' e bağlı olarak, $B \cap i(\mathbb{R}^3)$, $i(\mathbb{R}^3)$ ' te sıralı kapalı bir solveks idealdir.

Teorem 5.10' un bir sonucu olarak, pre-Riesz uzayındaki bir band için aşağıdaki özellik elde edilebilir.

Teorem 5.14 X bir pre-Riesz uzayı ise, o zaman X' deki her band bir sıralı kapalı solveks idealdir.

Genelde, pre-Riesz uzayındaki sıralı kapalı solveks idealin band olması gerekmez, (Örnek 5.13).

X keyfi bir pre- Riesz uzayı ise, kısıtlama ve genişleme özelliklerinin ikisi de solveks idealler için geçerlidir. Dolayısıyla, bir pre-Riesz uzayının alt uzayının Riesz tamlanması içindeki idealinin kısıtlanması olması için gerek ve yeter koşul solveks ideal olmasıdır. Bandlar için, genişleme özelliği geçerlidir, fakat genelde kısıtlama özelliği geçerli değildir.

6. AYRIKLİK ÜZERİNE

(X, K) kısmi sıralı vektör uzayı içerisindeki pozitif elemanlar için Katsikis ve Polyrakis (2006) tarafından tanımlanan bir başka ayrıklık tanımı tartışılmıştır. $x, y \in K$ elemanları için $[0, x] \cap [0, y] = \{0\}$ koşulu sağlanıyorsa, bu elemanlar D - ayrık (sembolle, xDy) olarak adlandırılır. X pre-Riesz ve $x \perp y$ ile $x, y \in K$ ise o zaman, X^p ' de de $x \perp y$ ' dir, böylece, X^p ' de $[0, x] \cap [0, y] = \{0\}$ ' dir, yani xDy olur. Ek olarak, X Riesz ayrıştırma özelliğine sahipse sıradaki önerme elde etmiş olunur.

Önerme 6.1 (X, K) Riesz ayrıştırma özelliğine sahip bir pre-Riesz uzayı ve $x, y \in K$ olsun. O zaman, $x \perp y$ olması için gerek ve yeter koşul (xDy) olmasıdır.

İspat. X Riesz ayrıştırma özelliğine sahip ve $x, y \in K$ da xDy olacak şekilde elemanlar olsun. x ve y pozitif olduğundan $\{x + y, -x - y\}^u = \{x + y\}^u \subseteq \{x - y, -x + y\}^u$ elde edilir.

Ters kapsamayı gösterelim. $z \in \{x - y, -x + y\}^u$ olsun, o zaman $0 \leq x \leq z + y$, böylece, $x = x_1 + x_2$, $0 \leq x_1 \leq z$ ve $0 \leq x_2 \leq y$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in K$ vardır. Şimdi $0 \leq x_2 \leq x$ ve x ile y ' nin D - ayrık olması $x_2 = 0$ olmasını gerektirir, yani $z \geq x$ ' dir. Benzer şekilde $z \geq y$ elde edilir. $0 \leq x \leq z = (z - y) + y$ olsun, $0 \leq x_3 \leq z - y$ ve $0 \leq x_4 \leq y$ ile $x = x_3 + x_4$; $0 \leq x_4 \leq x$ den $x_4 = 0$ ve böylece $x \leq z - y$ olması gösterir ki; $z \in \{x + y\}^u$ ' dir. Dolayısıyla, $x \perp y$ ' dir.

Genelde, iki pozitif eleman için ayrıklık ve D - ayrıklık farklıdır. Örnek 4.5' te $x = (1, 0, 1)^T$ elemanı ile ayrık olan tek pozitif eleman 0 ' dir, halbuki $y = \lambda(y_1, y_2, 1)^T$, $y_1^2 + y_2^2 = 1$,

$y_1 \neq 1, \lambda \geq 0$ şeklindeki pozitif elemanlar x ile D -ayrıktır. Böyle y elemanlarının oluşturduğu küme konveks değildir, böylece Teorem 5.10' daki gibi temel özellikler genelde D - ayrıklık için elde edilmez. Her halükarda, Riesz ayrıştırma özelliğine sahip pre-Riesz uzaylarında pozitif elemanlar için ayrıklık ve D - ayrıklık uyum göstermektedir.

7. SONUÇ

Bu çalışmada çok iyi bilinen Riesz uzayları veya başka bir deyişle vektör latis konusu genişletilmiştir. Pre-Riesz uzayı olarak adlandırılan bu genişletilmiş uzayda vektör latisleri için önemli öğeler olan idealler, solveks idealler ve bandlar yeniden tanımlanmıştır.

Burada, özellikle ideallerin ve bandların kısıtlama ve genişleme özellikleri ile ilgilenilmiş, ve vektör latisleri ile pre-Riesz uzayları arasındaki ilişki gösterilmiştir.

Son olarak, ayrıklık konusu bakımından vektör latisleri ile pre-Riesz uzayları karşılaştırılmıştır.

KAYNAKLAR

- Aliprantis, C.D. ve Burkinshaw, O., (1985), Positive Operators, Academic Press Inc., London.
- Buskes, G. ve Rooij A. C. M. van., (1993), "The vector lattice cover of certain partially ordered groups", J. Austral. Math. Soc. (Series A) 54, 352-367.
- Gaans, van O., (1999), Seminorms on ordered vector spaces, Ph. D. Thesis, University of Nijmegen.
- Gaans, van O. ve Kalauch, A., (2006), "Disjointness in partially ordered vector spaces", Positivity 10, no. 3, 573-589.
- Gaans, van O. ve Kalauch, A., (2008) "Bands in pervasive Riesz spaces", Oper. Matrices, vol. 2, no. 2, 177-191.
- Gaans, van O. ve Kalauch, A., (2008), "Ideals and bands in pre-Riesz spaces", Positivity 12, 591-611.
- Haandel, van M., (1993), Completions in Riesz space theory, Ph. D. thesis, University of Nijmegen.
- Katsikis V. ve Polyrakis I. A., (2006), "Positive base in ordered subspaces with the Riesz decomposition property", Stud. Math. 174, no. 3, 233-253.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 21.08.1986

Doğum yeri Gaziantep

Lise 1997-2004 Fitnat Nuri Tekerekoğlu Anadolu Lisesi

Lisans 2004-2008 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 2008-Devam ediyor Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı, Fonksiyonel Analiz

Çalıştığı kurumlar

2007-2008 Final Dergisi Dershanesi

2009-Devam ediyor Doğu Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi