

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İNDİRGENEMEZ OPERATÖRLER

Matematikçi Esra Altınbilezik

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer Gök

İSTANBUL, 2007

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iii
ÖNSÖZ	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER	2
3. İNDİRGENEMEZ ve GENİŞLEYEN OPERATÖRLER.....	7
4. İDEAL İNDİRGENEMEZLİĞİ ve SPEKTRAL YARIÇAP.....	19
5. BAND İNDİRGENEMEZLİĞİ ve SPEKTRAL YARIÇAP.....	27
6. SONUÇ.....	33
KAYNAKLAR.....	34
ÖZGEÇMİŞ.....	36

SİMGE LİSTESİ

$\bar{A}$	: A kümesinin kapanışı
A	: Banach cebiri
c_0	: Sıfıra yakınsayan dizilerin kümesi
$C[0,1]$	: $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonlar kümesi
$C(\Omega)$	: Ω topolojik uzayında tanımlı bütün sürekli reel değerli fonksiyonlar
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
E'	: E nin topolojik duali
E^+	: E nin pozitif konisi
E^-	: E nin sıralı duali
E_u	: u tarafından üretilen esas ideal
I	: Birim operatör
$\inf$	: En büyük alt sınır
ℓ_∞	: Sınırlı dizilerin kümesi
$\mathcal{L}(E,F)$	: E 'den F 'ye lineer sınırlı operatörlerin vektör uzayı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\sup$	: En küçük üst sınır
$\{T\}'$	: T operatörünün komutanti
T^*	: T 'nin adjointi
$ x $	: x 'in mutlak değeri
$\ x\ $	: x vektörünün normu
$x_\alpha \uparrow x$	: x_α neti artan ve supremumu x
$x_\alpha \downarrow x$	: x_α neti azalan ve infimumu x
$x \vee y$	: x ve y 'nin supremumu
$x \wedge y$	: x ve y 'nin infimumu
$\mathbb{Z}(E)$	: Merkez operatörlerin kümesi
$\subset$	: Öz alt küme
$\subseteq$	: Alt küme veya eşit
$\in$	: Eleman
$\notin$	: Eleman değil
$<$	: Küçük
$\leq$	: Küçük veya eşit

$\neq$	: Eşit değil
$:=$	: Tanım olarak eşit
$\Rightarrow$	: İse
$\Leftrightarrow$	: Gerek ve yeter koşul
$\prod$	: Çarpım sembolü
$\cup$	: Birleşim
$\cap$	: Kesişim
Σ	: Toplam sembolü
$\forall$	: Her
$\exists$	: En az bir tane vardır

ÖNSÖZ

Bu tez, Banach latisler üzerindeki indirgenemez operatörleri ve spektral yarıçapın tam pozitifliliğinin farklı durumlarını sunmaktadır.

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli Hocam Sayın Prof. Dr. Ömer GÖK'e saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu çalışmada, Banach latis üzerindeki pozitif operatörlerin çeşitli özelliklerine göre sınıflarını inceledik. Bunlar değişmez alt uzaylarına göre idealler ve bandlardır.

Kompakt pozitif operatörler için spektral yarıçapın pozitifliğini garanti eden durumları sunduk. Özellikle Banach latis üzerinde $T : E \rightarrow E$ kompakt yarınilpotent pozitif operatör $T^2 \neq 0$ 'ı sağlıyorsa; $T(J) \neq \{0\}$ olacak şekilde T için aşikar olmayan kapalı latis hiperdeğişmez ideal J 'nin varolduğu gösterilmiştir. Bunun benzeri bir sonuç latis hiperdeğişmez bandlar için de verildi.

Ayrıca, band indirgenemez pozitif operatörlerin spektral yarıçapı tartışıldı. Band indirgenemez pozitif operatörler σ -sıralı sürekli özelliği altında incelendi.

Anahtar kelimeler: Değişmez alt uzaylar, band, ideal, band indirgenemezlik, yarı iç nokta, genişleyen operatör, spektral yarıçap, yarınilpotent.

ABSTRACT

In this work; we give the classes of positive operators on a Banach lattice according to their special properties. These are the ideals and bands in terms of certain invariant subspaces.

We presented conditions that guarantee the positivity of the spectral radius for compact positive operators. In particular it is shown that if a compact quasi-nilpotent positive operator $T : E \rightarrow E$ on a Banach lattice satisfies $T^2 \neq 0$, then there exists a non-trivial closed lattice- hyperinvariant ideal J for T such that $T(J) \neq \{0\}$. The analogue of this result for lattice hyperinvariant bands was also given.

Also, it was discussed the spectral radius of band irreducible positive operators. It was investigated band irreducible positive operators under the assumption σ -order continuous property.

Keywords: Invariant subspaces, band, ideal, band irreducible, quasi-interior point, expanding operator, spectral radius, quasi-nilpotent.

1. GİRİŞ

Bu tezde indirgenemez matrisleri sonsuz boyutlu uzaylara genişletiyoruz. Öncelikle tezin ilk kısmında tezle ilgili önceden bilinmesi gereken teorem, önerme, tanım gibi bilgiler verilmiştir.

Pozitif operatörün yarıçapının sıfırdan farklı olmasını garanti eden şartlar verildi. İdeal ve band indirgenemezliği bilinen şartlardır. Banach latiste tanımlı T operatörüne; T -değişmez aşıkâr olmayan kapalı ideali yok ise, ideal indirgenemez denir. Benzer tanımla, Banach latiste tanımlı T operatörüne; T -değişmez aşıkâr olmayan kapalı bandı yok ise, band indirgenemez denir.

Diğer bölümlerde; genişleyen operatörlerin tanımları ve çeşitli sınıfları, Banach latis üzerinde tanımlı pozitif operatörlerin gerektirme şeması ile aralarındaki ilişki verilmiştir. Kompakt pozitif operatörler ve band indirgenemez pozitif operatörlerin spektral yarıçapının pozitifliliği incelenerek elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı.

Bu tezle birlikte elde edeceğimiz sonuçların iki örneğini verelim:

- Her ideal indirgenemez kompakt pozitif operatörün pozitif spektral yarıçapı vardır.
- Birbiri ile değişmeli olan iki pozitif operatörden biri ideal indirgenemez, diğeri kompakt ise, ikisinin de pozitif spektral yarıçapı vardır.

2. ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1: Bir E sıralı vektör uzayında her $x, y \in E$ eleman çifti için $\{x, y\}$ kümesinin supremumu ve infimumu E 'nin elemanı ise E 'ye Riesz Uzayı (vektör latis) denir.

$$x \vee y := \sup \{x, y\}$$

$$x \wedge y := \inf \{x, y\} \text{ şeklinde gösterilir.}$$

Tanım 2.2: Riesz uzayı üzerinde tanımlı $\| \cdot \|$ norma; $|x| \leq |y|$ ifadesi $\|x\| \leq \|y\|$ olmasını gerektiriyorsa; latis norm denir. Latis normu içeren Riesz uzaya da Normlu Riesz uzayı denir.

Tanım 2.3: Normlu Riesz uzayı E 'ye tam ise Banach latis denir.

Tanım 2.4: Bir Riesz uzayına, uzayın üstten sınırlı her boştan farklı alt kümesi bir supremuma (ya da alttan sınırlı her boştan farklı alt kümesi bir infimuma) sahipse Dedekind tam Riesz uzayı denir.

Tanım 2.5: Bir Riesz uzayına, uzayın üstten sınırlı her sayılabilir alt kümesi bir supremuma sahipse σ -Dedekind tam Riesz uzayı denir.

Tanım 2.6: Bir Y sıralı vektör uzayına eğer her n için $nx \leq y$ ifadesi $x \leq 0$ olmasını gerektiriyorsa Archimedean sıralı vektör uzayı denir.

Tanım 2.7: $T : X \rightarrow Y$ operatörü iki vektör uzayı arasında tanımlansın. Her $x, y \in X$ ve her α, β skaleri için; $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ oluyorsa; T 'ye lineer operatör denir.

Eğer, X ve Y normlu uzaylar ise; $T : X \rightarrow Y$ operatörü bir normlu lineer operatördür ve normu;

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \text{ ile tanımlanır.}$$

Eğer; $\|T\| < \infty$ ise T 'ye sınırlı operatör denir.

Tanım 2.8: İki sıralı vektör uzayı arasında tanımlanmış $T : E \rightarrow F$ operatörüne; $\forall x \geq 0$ için $T(x) \geq 0$ oluyorsa pozitif operatör denir.

Eğer; $x > 0$ için $T(x) > 0$ oluyorsa, T operatörüne tam pozitif operatör denir.

Tanım 2.9: $T : X \rightarrow Y$ iki Banach uzayında tanımlı bir operatör olsun. X 'in her $\{x_n\}$ sınırlı dizisi için $\{Tx_n\}$ dizisinin Y 'de yakınsak bir alt dizisi varsa T 'ye kompakt operatör denir.

Tanım 2.10: $T : V \rightarrow W$ iki vektör uzayı arasında tanımlansın. Eğer T operatörünün görüntüsü bir boyutlu ise T 'ye rankı bir olan operatör denir.

Tanım 2.11: $T : X \rightarrow Y$ iki sıralı vektör uzayı arasında tanımlı bir operatör olmak üzere; T , X 'in sıralı sınırlı alt kümelerini, Y 'nin sıralı sınırlı alt kümelerine taşıyorsa, T 'ye sıralı sınırlı operatör denir.

Tanım 2.12: $T \in L(X)$ operatörüne;

1) Bir pozitif k tamsayısı için $T^k = 0$ oluyorsa nilpotent operatör,

2) $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$ oluyorsa yarınilpotent operatör denir.

Tanım 2.13: İki Riesz uzayı arasında tanımlı $T : E \rightarrow F$ operatörüne; E 'de $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olduğu sürece F 'de $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa, sıralı sürekli operatör denir.

Tanım 2.14: İki Riesz uzayı arasında tanımlı $T : E \rightarrow F$ operatörüne; E 'de $x_n \xrightarrow{o} 0$ olduğu sürece F 'de, $Tx_n \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa, σ -sıralı sürekli operatör denir.

Tanım 2.15: Bir Riesz uzayında tanımlı bir latis norma, $x_\alpha \downarrow 0$ iken $\|x_\alpha\| \downarrow 0$ 'ı sağlıyorsa sıralı sürekli norm denir.

Tanım 2.16: E bir Riesz uzayı olsun. E 'nin bir A alt kümesine, $y \in A$ olmak üzere $|x| \leq |y|$ ifadesi $x \in A$ olmasını gerektiriyorsa, solid (katı) denir. E 'nin bir solid vektör alt uzayına ideal denir.

Tanım 2.17: E bir Riesz uzayı olsun. E 'nin bir B idealine eğer; E 'de supremuma sahip her $A \subset B$ altkümesi için $\sup(A) \in B$ ise band denir.

Tanım 2.18: E , normlu Riesz uzayı olsun. Eğer; E_e , E içinde yoğun ise $e \in E^+$ elemanına E^+ nin bir yarı iç noktası denir.

Tanım 2.19: E bir sıralı vektör uzayı ise; $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ kümesine, E 'nin pozitif konisi denir.

Tanım 2.20: E bir Riesz uzayı olsun. Bir $\epsilon > 0$ vektörüne eğer; $E_\epsilon = E$ ise yani; her $x \in E$ için $|x| \leq \lambda \epsilon$ olacak şekilde bir $\lambda \geq 0$ varsa kuvvetli (sıralı) birim denir.

Tanım 2.21: $\epsilon > 0$ vektörüne eğer, ϵ tarafından üretilen band B_ϵ için $B_\epsilon = E$ ise yani; her $x \in E^+$ için $x \wedge n\epsilon \uparrow x$ sağlanıyorsa, zayıf birim denir.

Tanım 2.22: Banach latis E 'ye;

- 1) Eğer; $x \wedge y = 0$ 'ı sağlayan her $x, y \in E^+$ için $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ oluyorsa AL-uzayı (soyut Lebesgue uzayı) denir.
- 2) Eğer; $x \wedge y = 0$ 'ı sağlayan her $x, y \in E^+$ için $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ oluyorsa AM-uzayı (soyut maksimum uzayı) denir.

Tanım 2.23: E Riesz uzayı olsun. Dedekind tam Riesz uzayı $L_r(E, \mathbb{R})$ 'ye E 'nin sıralı dualı denir ve $E^\sim$ ile gösterilir.

Tanım 2.24: Eğer $T : X \rightarrow X$ bir Banach uzayında tanımlı operatör ise; T 'nin komutantı $\{T\}'$, T ile değişmeli X 'teki tüm sınırlı operatörleri içerir. Yani;

$$\{T\}' = \{S \in L(X) : ST = TS\}' \text{ dir.}$$

Tanım 2.25: İki Riesz uzayı arasında tanımlı $T : E \rightarrow F$ operatörüne, her $x, y \in E$ için; $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ oluyorsa, latis homomorfizma denir.

Tanım 2.26: Riesz uzayı E 'ye, eğer E 'nin her D altkümesi supremuma sahip iken $\sup D = \sup C$ olacak şekilde, D 'nin en çok sayılabilir C altkümesi varsa sayılabilir sup özelliğine sahiptir denir.

Tanım 2.27: İki AM uzayı arasında tanımlı $T : E \rightarrow F$ operatörü ve birimleri de sırasıyla u ve v olsun. T 'ye $Tu = v$ 'yi sağlıyorsa Markov Operatörü denir.

Teorem 2.28: J , Riesz uzay E de bir ideal olsun. J 'nin band olması için gerek ve yeter koşul E 'den E/J 'ye bölüm dönüşümü $x \rightarrow [x]$ 'in sıralı sürekli olmasıdır.

Teorem 2.29: E , Banach latis, $\mathcal{F}$ E 'nin en çok sayılabilir alt kümesi olsun. C de, E 'deki düzenli operatörlerin en çok sayılabilir koleksiyonu olsun. O zaman aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $u > 0$ vardır:

- 1) $\mathcal{F}$ kümesi, E_u 'da bulunur, yani $\mathcal{F} \subseteq E_u$.

- 2) C 'deki her operatör E_u esas idealini değiştirmez bırakır. Yani; her $T \in C$ için $T(E_u) \subseteq E_u$ sağlanır.

Yardımcı Teorem 2.30: Gerçek Banach latis üzerindeki $T : E \rightarrow E$ pozitif operatörü için aşağıdakiler sağlanır.

- 1) Eğer $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > r(T)$ sağlanıyorsa, o zaman $\forall z \in E$ için $|R(\lambda, T)z| \leq R(|\lambda|, T)|z|$ 'dir.
- 2) Eğer λ_1, λ_2 gerçek sayılar ve $\lambda_1, \lambda_2 > r(T)$ ise o zaman; $0 \leq R(\lambda_1, T) \leq R(\lambda_2, T)$ 'dir.
- 3) Eğer λ , gerçek sayı ve $\lambda > r(T)$ sağlanıyorsa, o zaman, $0 \leq TR(\lambda, T) \leq \lambda R(\lambda, T)$ 'dir.

Teorem 2.31 (Aranszojn – Smith – Lomonosov, 1954, 1973): Sonsuz boyutlu reel ya da kompleks Banach uzayında her sıfırdan farklı kompakt operatörün, aşıkâr olmayan kapalı hiperdeğişmez altuzayı vardır.

Yardımcı Teorem 2.32 (de. Pagter, 1986): Bir yarııçnoktaya sahip (reel ya da kompleks) Banach latisi E ve $|x| \leq |y|$ olsun. O zaman, E 'deki operatörlerin öyle bir $\{M_n\}$ dizisi vardır ki; $\|M_n y - x\| \rightarrow 0$ ve her M_n operatörü birim operatör tarafından baskınlaştırılır.

Sonuç 2.33 (Aliprantis – Burkinshaw, 1980): Banach latis üzerinde tanımlı bir $S : E \rightarrow E$ operatörü bir kompakt pozitif operatör tarafından baskınlaştırılırsa S^2 'nin de kompakt olmasına gerek olmadan S^3 kompakt operatördür.

Yardımcı teorem 2.34: Normlu Riesz uzayı E 'de; $\{x_n\} \subseteq E$ neti, $x_\alpha \uparrow$ ve $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ 'ı sağlıyorsa; $x_\alpha \uparrow x$ 'tir.

Teorem 2.35: Herhangi bir Banach uzayında keyfi kompakt operatörün görüntü kümesi ayrılabilir.

Teorem 2.36: Eğer Banach uzayında $S, T : X \rightarrow X$ iki değişmeli sınırlı operatör ise $r(ST) \leq r(S)r(T)$ 'dir.

Sonuç 2.37 (M.G. Krein, 1948): Bir $C(\Omega)$ uzayı üzerindeki keyfi pozitif operatörün eşleniği sıfırdan farklı özdeğere karşılık gelen bir özvektöre sahiptir.

Sonuç 2.38: Her düzenli integral operatör $T : E \rightarrow F$ sıralı süreklidir. Düzenlilik varsayımı olmadan, T integral operatörü, E 'den $L_0(v)$ 'ye bir operatör olarak sıralı süreklidir.

Teorem 2.39 (Krein-Rutman Teoremi, 1948): $T : E \rightarrow E$ Banach latis üzerinde $r(T) > 0$ olan kompakt pozitif operatör olsun. O zaman spektral yarıçap $r(T)$, pozitif özvektöre sahip özdeğerdir. Bu, $Tx = r(T)x$ 'i sağlayan $x > 0$ 'ın varolmasıdır.

Teorem 2.40 (Klasik Ascoli Arzelâ Kompaktlık Teoremi, 2004): $U, C(K)$ 'nın herhangi bir alt kümesi olsun. U kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul U 'nın kapalı sınırlı eş sürekli olmasıdır.

Teorem 2.41 (Stone-Weierstrass Teoremi, 2004): Sabit 1 fonksiyonunu kapsayan ve K 'nın noktalarını ayırıştıran $C(K)$ 'nin her U alt latisi supremum norma göre $C(K)$ 'da yoğundur.

Teorem 2.42 (Dini's Teoremi, 2004): Kapalı ve sınırlı bir $[a, b]$ aralığında monoton olarak bir f fonksiyonuna noktasal yakınsak bir fonksiyon dizisi f_n olsun. Eğer $n \in \mathbb{N}$ için f_n , $[a, b]$ 'de sürekli ve f de $[a, b]$ 'de sürekliyse f_n fonksiyon dizisi f fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

Teorem 2.43 (Riesz Ayırıştırma Teoremi, 2004): $\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ ve $\{y_j : 1 \leq j \leq m\}$ bir Riesz uzayında tanımlı pozitif elemanların iki sınırlı altkümeleri olsun. Eğer;

$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^m y_j$ sağlanıyorsa; o zaman bu pozitif elemanların $\{z_{ij} : 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ olacak

şekilde $x_i = \sum_{j=1}^m z_{ij}; i = 1, \dots, n$ sınırlı alt kümeleri vardır.

$$y_j = \sum_{i=1}^n z_{ij}; j = 1, \dots, m$$

Tanım 2.44 : Ölçülebilir fonksiyon $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$K(s, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < s \leq 1 \\ 1, & 0 \leq t < s \leq 1 \end{cases}$ ile tanımlansın ve

$V : L_p[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ($1 \leq p \leq \infty$) Kernel K ile integral operatör olsun. Her $x \in L_p[0, 1]$ için;

$Vx(t) = \int_0^1 K(s, t) x(s) ds = \int_0^t x(s) ds$ vardır. Bu integral operatöre Volterra Operatör denir.

3. İNDİRGENEMEZ VE GENİŞLEYEN OPERATÖRLER

Pozitif operatörlerin spektral yarıçaplarına dikkat edilerek bazı genel sonuçları sunmadan önce, pozitif operatörlerin çeşitli sınıflarına ve birbirleriyle ilişkilerine değineceğiz. Bu operatörler değişmez alt uzaylara göre idealler ve bandlar olarak ikiye ayrılır.

$T : X \rightarrow X$ lineer operatörü Banach uzayında sınırlı operatör olsun. X 'in vektör altuzayı V 'ye, $T(V) \subseteq V$ oluyorsa T altında değişmezdir (ya da sadece T -değişmez) denir. V , X 'in bir vektör alt uzayı olsun. V , T ile değişmeli olan X üzerindeki her sınırlı operatör altında değişmez olduğu zaman, V 'ye T için hiperdeğişmez denir. Yani; $S \in L(X)$ ve $ST = TS$ ise $S(V) \subseteq V$ olduğunda V 'ye T hiperdeğişmez denir. X , Banach latis ve T pozitif operatör ise, X üzerindeki pozitif ve T ile değişmeli olan operatörler altında V değişmez ise X 'in vektör alt uzayı V 'ye, T için latishiperdeğişmez (ya da sadece l -hiperdeğişmez) denir. Genelde, X vektör uzayının vektör alt uzayı V 'ye, eğer $V \neq \{0\}$ ve $V \neq X$ ise aşıkâr olmayan denir.

İki Riesz uzayında tanımlı $T : E \rightarrow F$ operatörünün $N_T = \{x \in E : T|x| = 0\}$ olarak tanımlı E 'deki idealine N_T sıfır ideali denir. Tanımdan görüldüğü gibi; $T = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $N_T = E$ olmasıdır. Aynı zamanda E ve F Banach latisleri iken N_T sıfır idealinin E 'de kapalı olduğu açıktır. Ayrıca $T : E \rightarrow F$, pozitif, operatörünün tam pozitif olması için gerek ve yeter koşul $N_T = \{0\}$ olmasıdır. Eğer, Riesz uzayları arasında $T : E \rightarrow F$ bir pozitif operatör ise; $\hat{T} : E/N_T \rightarrow F$ pozitif operatörü $\hat{T}[x] = Tx$ olarak tanımlanır ve tam pozitifdir.

Yardımcı Teorem 3.1: Eğer $T : E \rightarrow E$ Banach latiste keyfi bir pozitif operatör ise, T 'nin görüntüsü tarafından oluşturulan sıfır ideali ve kapalı ideali l -hiperdeğişmezdir.

İspat: Banach latis üzerinde $T : E \rightarrow E$ bir pozitif operatör ve T ile değişmeli pozitif operatör de $S : E \rightarrow E$ olsun. Eğer; $x \in N_T$ alırsak

$0 \leq T|Sx| \leq T(S|x|) = S(T|x|) = 0$ olur. Burdan; $T|Sx| = 0$ çıkar ve $Sx \in N_T$ olur. Bu $S(N_T) \subseteq N_T$ demektir. Bu da T için, N_T 'nin kapalı l -hiperdeğişmez ideal olduğunu gösterir.

T 'nin görüntüsü tarafından oluşturulan J_T kapalı ideali

$J_T = \{x \in E : \exists y \geq 0 \text{ öyle ki } |x| \leq Ty\}^-$ ile tanımlanır.

$S \in L(E)$ T ile değişmeli pozitif operatör olarak kabul edelim. Eğer bir $y \geq 0$ iken $|x| \leq Ty$ ise; $|Sx| \leq S|x| \leq S(Ty) = T(Sy)$ olur. Bu, $Sx \in J_T$ olduğunu gösterir. Bu nedenle; J_T S -değişmez ve T için kapalı bir l -hiperdeğişmezdir.

Tanım 3.2: Bir Banach latiste $T : E \rightarrow E$ sınırlı operatörü;

- 1) Eğer T , değişmez aşıkâr olmayan kapalı idealler içermiyorsa; yani kapalı J ideali $T(J) \subseteq J$ olduğunda $J = \{0\}$ ya da $J = E$ oluyorsa, T 'ye ideal indirgenemezdir denir.
- 2) Eğer T , değişmez aşıkâr olmayan bandlar içermiyorsa; yani, B bandı $T(B) \subseteq B$ olduğunda $B = \{0\}$ ya da $B = E$ oluyorsa T 'ye band indirgenemezdir denir.

Sonraki netice; ideal indirgenemezliğin göreceli kuvvetli bir özellik olduğunu belirler. Özellikle sadece, yarı iç noktalı Banach latisler ideal indirgenemez pozitif operatörleri kabul eder.

Teorem 3.3: Banach latis üzerinde ideal indirgenemez pozitif operatör $T : E \rightarrow E$ ise;

- 1) T , band indirgenemezdir.
- 2) T , tam pozitifdir; yani $x > 0$, $Tx > 0$ olmasını gerektirir.
- 3) E 'nin yarı iç noktaları vardır.
- 4) T , yarı iç noktaları, yarı iç noktalara taşır.

İspat: 1) Her bandın kapalı ideal olmasından sonuca ulaşılır.

2) Banach latis üzerinde bir ideal indirgenemez pozitif operatör $T : E \rightarrow E$ olsun. T 'nin sıfır ideali N_T kapalıdır ve T -değişmezdir. T 'nin ideal indirgenemez olması $N_T = \{0\}$ olmasını gerektirir. Bu da T 'nin tam pozitif olduğu anlamına gelir.

3) Teorem 2.29'dan $T(E_u) \subseteq E_u$ olacak şekilde bir $u > 0$ vardır. Bu, $T(\overline{E_u}) \subseteq \overline{E_u}$ olduğunu gösterir. Yani; $\overline{E_u}$ T -değişmezdir. T 'nin ideal indirgenemez ve $E_u \neq \{0\}$ olmasından $\overline{E_u} = E$ 'dir. Bu nedenle u yarı-iç noktadır.

4) $u > 0$ E 'nin yarı iç noktası olsun; ve J_T , T 'nin görüntüsü ile üretilen kapalı ideali gösterebilir. Yani;

$$J_T = \{x \in E : \exists y \geq 0 \text{ öyle ki } |x| \leq Ty\}^- \text{ şeklindedir.}$$

Yardımcı teorem 3.1'den J_T , T için kapalı 1-hiperdeğişmez idealdir ve bu nedenle $J_T = E$ 'dir. $u > 0$ 'ın yarı iç nokta olmasından, u tarafından üretilen esas ideal E_u , E 'de norm topolojiye göre yoğundur.

$T(E_u) \subseteq E_{Tu} \subseteq J_T$ olduğu açıktır ve bu nedenle

$T(E) = T(\overline{E_u}) \subseteq \overline{T(E_u)} \subseteq \overline{E_{Tu}} \subseteq J_T$ bulunur. Buradan;

$\overline{E_{Tu}} = J_T = E$ elde edilir; yani Tu , E 'nin yarı iç noktasıdır.

Benzer sonuç, band indirgenemez pozitif operatörler için de geçerlidir. Bunu bir örnekle görelim:

Örnek: Eğer bir σ -sıralı sürekli band indirgenemez pozitif operatör $T : E \rightarrow E$ ise;

- a) T , tam pozitifdir.
- b) T , zayıf birimleri zayıf birimlere taşır.
- c) E , zayıf birimler içerir.

Çözüm: a) $x > 0$ olsun ve B_x , E 'de x ile üretilen bandı göstereyim. Şimdi çelişki yoluyla $Tx=0$ olduğunu varsayalım. Her $y \in B^+$ 'in $y \wedge nx \uparrow y$ 'i sağlamasından ve $\forall n$ için; $T(y \wedge nx) = 0$ sağlanmasından $\forall y \in B_x^+$ için T 'nin σ -sıralı sürekliliğinden $Ty = 0$ olması elde edilir. Sonuç olarak $\forall y \in B_x$ için $Ty = 0$ 'dır. Bu $T(B_x) = \{0\} \subseteq B_x$ olmasını gerektirir. Yani; B_x T -değişmezdir ve böylece T 'nin band indirgenemezliğinden $B_x = E$ 'dir. Fakat $Tx = 0$ olması mümkün değildir. Bu yüzden $x > 0$, $Tx > 0$ olmasını gerektirir ve böylece T tam pozitifdir.

b) $u > 0$, E 'de zayıf birim olsun. Yani $B_u = E$ 'dir. (a)'dan dolayı T tam pozitif olduğundan, $v = Tu > 0$ elde ederiz. Ve böylece $B_v \neq \{0\}$ 'dır. Şimdi bir $x > 0$ 'ı sabit alalım ve $x \wedge nu \uparrow x$ 'in $T(x \wedge nu) \uparrow Tx$ 'i gerektirdiğine dikkat edelim. $T(x \wedge nu) \leq nv$ olmasından $Tx \in B_v$ 'dir. Böylece, B_v T -değişmezdir ve T 'nin band indirgenemezliği $B_v = E$ olduğunu gösterir. Bu $v = Tu$ E 'de zayıf birimdir demektir.

c) Bir $y > 0$ 'ı sabit alalım ve u vektörünün $u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{T_y^n}{\|T\|^n} > 0$ olduğunu düşünelim.

Esas ideal E_u 'nun T değişmez olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten; eğer $|x| \leq \lambda u$ ise,

$$|Tx| \leq T|x| \leq \lambda Tu = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{T^{n+1}y}{\|T\|^n} = 2\lambda \|T\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{T^{n+1}y}{\|T\|^{n+1}} \leq 2\lambda \|T\| u \text{ 'dır ve böylece } Tx \in E_u$$

olur. Bu nedenle $T(E_u) \subseteq E_u \subseteq B_u$ 'dur. T 'nin σ -sıralı sürekli olmasından $T(B_u) \subseteq B_u$ elde edilir. T band indirgenemezdir ve $B_u \neq \{0\}$ olduğunu hesaba katarsak $B_u = E$ olduğunu görürüz. Bu, u 'nun E 'de bir zayıf birim olduğunu gösterir; ve sonuç olarak E 'de zayıf birimler vardır.

Şimdi de genişleyen operatörlerin sınıflarını sunacağız:

Tanım 3.4: Banach latiste tanımlı $T : E \rightarrow E$ pozitif operatörü;

- 1) Eğer her $x > 0$ için Tx vektörü yarı iç nokta ise, güçlü genişleyendir.
- 2) Eğer her $x > 0$ için Tx zayıf birim ise; genişleyendir.
- 3) Eğer her $x > 0$ için $T^n x$ vektörü zayıf birim olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa (n, x 'e bağlı); zayıf genişleyendir.

Yukarıdaki çalışmamızda değindiğimiz operatör sınıflarıyla yakından ilişkili başka operatör sınıfları da vardır. Bunlar, Krein ve güçlü Krein operatörleridir(Abramovich, Aliprantis, Burkishaw, 1992). Tanımları; takip eden tanımda yer almaktadır.

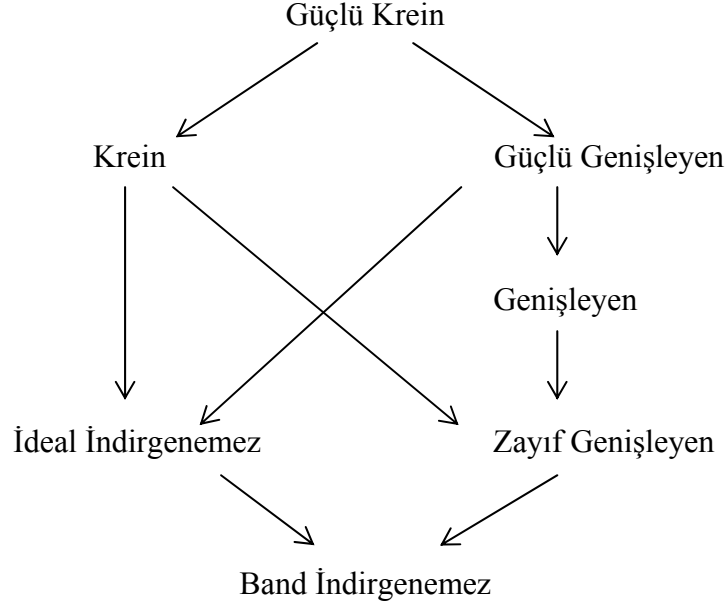
Tanım 3.5: Birimli keyfi AM uzayı üzerinde tanımlı $T : E \rightarrow E$ pozitif operatörüne;

- 1) Her sıfırdan farklı pozitif vektörü (kuvvetli) birime götürüyorsa; güçlü Krein operatörü denir.
- 2) Her $x > 0$ için $T^n x$ güçlü birim olacak şekilde n varsa (x 'e bağlı); Krein operatörü denir.

Tanım 3.1, 3.4 ve 3.5'lerde sunulan özellikler keyfi bir Banach latis üzerinde bu özellikleri taşımayan oldukça kuvvetli pozitif operatörlerdir. Genişleyen operatörler sadece zayıf birimli uzaylarda mevcut ve ideal indirgenemez pozitif operatörler de sadece sayılabilir sup özellikli Banach latislerde mevcut iken Krein ve güçlü genişleyen operatörler sırasıyla yarı iç noktaların ve kuvvetli birimlerin olmasına ihtiyaç duyar.

Bir sonraki şema pozitif operatörlerin farklı sınıfları arasındaki ilişkileri sistematik olarak göstermektedir.

Teorem 3.6: Banach latis üzerindeki pozitif operatörler için aşağıdaki gerektirme diyagramı vardır:



Şema 3.1.

Genel olarak diğer gerektirmeler doğru değildir.

İspat: Gerektirme şemasından

Güçlü Krein $\Rightarrow$ Krein Operatör $\Rightarrow$ İdeal İndirgenemez $\Rightarrow$ Band indirgenemez

Gerektirmelerinden sadece Krein operatör ise ideal indirgenemez olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $T : E \rightarrow E$ birimli AM uzayı üzerinde bir Krein operatör olsun. Ayrıca $J \neq \{0\}$ E 'de kapalı T -değişmez ideal olsun. Bir $0 < x \in J$ sabiti alalım ve $T^n x$ güçlü birim olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ alalım. J 'nin T -değişmezliğinden $T^n x \in J$ 'dir. Burdan $J = E$ olur. Bu nedenle T ideal indirgenemezdir. İdeal indirgenemez operatörün Krein operatör olmadığını göstermek için $T(x, y) = (y, x)$ ile tanımlanan $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ operatörünü düşünebiliriz.

Gerektirmelerden

Güçlü genişleyen $\Rightarrow$ genişleyen operatör

$\Rightarrow$ zayıf genişleyen

$\Rightarrow$ band indirgenemez.

Sadece zayıf genişleyen $\Rightarrow$ band indirgenemez gerektirmesinin doğruluğunu görmek yeterlidir. Bu, bir önceki durumdaki ispata benzer şekilde yapılabilir.

Güçlü Krein $\Rightarrow$ Güçlü genişleyen gerektirmesi açıktır.

Krein Operatör $\Rightarrow$ Zayıf genişleyen gerektirmesi, güçlü birimin her zaman zayıf birim de olmasından çıkar. Sonuç olarak, Güçlü genişleyen $\Rightarrow$ ideal indirgenemez gerektirmesini

doğrulamalıyız. Bunu görmek için; Banach latis üzerinde güçlü genişleyen operatör $T : E \rightarrow E$ olduğunu kabul edelim ve kapalı ideal $J \neq \{0\}$ T -değişmez olsun. $0 < x \in J$ 'i sabit alalım ve $u = Tx \in J$ vektörünün yarı iç nokta olduğuna dikkat edelim.

Böylece; $E_u \subseteq J$ olmasından $E = \overline{E_u} \subset J$ ya da $J = E$ 'dir. Bu da; T 'nin ideal indirgenemez olduğunu gösterir.

Örnek 3.7: Sıralı sürekli band indirgenemez pozitif operatör ne ideal indirgenemezdir ne de zayıf genişleyendir. Bunun için;

$T : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ pozitif operatörü

$$T(x_1, x_2, \dots) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}, x_1, x_2, \dots \right) \text{ şeklinde tanımlansın.}$$

$T(c_0) \subseteq c_0$ olduğu açıktır ve T ideal indirgenemez değildir. Ayrıca, T 'nin sıralı sürekli olduğu açıktır. Şimdi $x = (1, 0, 0, \dots, 0) > 0$ ise; o zaman her k için $T^k x$, zayıf birim değildir ve bu nedenle T zayıf genişleyen değildir.

T 'nin band indirgenemez olduğunu görmek için; $B \neq \emptyset$ bir B bandı için; $T(B) \subseteq B$ olduğunu varsayalım. Eğer $0 < x \in B$ ise $T^k x \in B$ elemanı sıfırdan farklı ilk k bileşenlerine sahiptir. Bunun anlamı; her k için B bandı k bileşeni sıfırdan farklı olan pozitif bir vektör içerir, yani; bir $v \in \ell_\infty$ elemanı $v \perp B$ sağlarsa $v = 0$ 'dır; ve bu da $B = \ell_\infty$ olduğunu gösterir. Yani; T bir band indirgenemez operatördür.

Örnek 3.8: Krein operatörü; ne güçlü Krein ne de genişleyen operatördür.

$T : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ operatörü şu şekilde tanımlansın:

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_1 + x_4, \dots)$$

Bu; ne genişleyen ne de güçlü Krein operatördür.

Örnek 3.9: Genişleyen operatör, güçlü genişleyen değildir.

$T = C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ operatörü

$$Tx(t) = \int_0^1 \sin(st) x(s) ds \text{ şeklinde tanımlansın.}$$

T , genişleyen kompakt bir operatördür.

Her $x \in C[0,1]$ için $Tx(0) = 0$ olduğunda, bu operatör güçlü genişleyen olmaz. Aynı zamanda eğer;

$$J = \{x \in C[0,1] : x(0) = 0\} \text{ ise; } J \text{ aşıkâr olmayan kapalı ideal ve } T(J) \subseteq J \text{ sağlanır.}$$

Bu gösterir ki; T ideal indirgenemez değildir.

Ve ayrıca T operatörü bu özelliklerle birlikte aşağıdakileri de sağlar:

a) T; 1-1 ve tam pozitifdir.

b) T; kompakt operatördür.

c) Eğer $J = \{x \in C[0,1] : x(0) = 0\}$ ise, o zaman J aşıkâr olmayan kapalı idealdir ve $T(J) \subseteq J$ 'yi sağlar. Böylece T, ideal indirgenemez değildir.

d) $\forall x > 0$ için Tx fonksiyonu J'nin yarı iç noktasıdır. Özellikle; $T : J \rightarrow J$ operatörü (T'nin J'ye kısıtlaması) güçlü genişleyendir, ve bu nedenle ideal indirgenemezdir.

e) $T : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ operatörünün spektral yarıçapı pozitifdir. ($r(T) > 0$) ve $T : J \rightarrow J$ (T'nin J'ye kısıtlaması) operatörünün spektral yarıçapı ile çakışmaktadır.

Şimdi bunların doğruluğunu sırasıyla gösterelim:

a) $Tx = 0$ olduğunu varsayalım. Yani $\forall t \in [0,1]$ için

$$\int_0^1 \sin(st) x(s) ds = 0 \text{ 'dır.}$$

Bu $\forall t \in [0,1]$ ve $\forall n = 0, 1, \dots$ için

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} \int_0^1 \sin(st) x(s) ds = \int_0^1 \frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} [\sin(st) x(s)] ds$$

$$= (-1)^n \int_0^1 s^{2n} \sin(st) x(s) ds = 0 \text{ olmasını gerektirir. Sonuç olarak; } \forall p \text{ polinomu için}$$

$\int_0^1 p(s^2) \sin(st) r(s) ds = 0$ 'dır. Şimdi $\{1, s^2\}$ ile üretilen cebirin $C[0,1]$ 'deki norma göre

yoğun olduğuna dikkat edelim. (Stone-Weierstrass teoreminden) ve böylece, $\forall f \in C[0,1]$

sürekli fonksiyonları ve $\forall t \in [0,1]$ için $\int_0^1 \sin(st) [x(s)]^2 ds = 0$ 'ı elde ederiz. $\forall 0 < s, t < 1$

için; $\sin(st) > 0$ olduğundan her $0 < s \leq 1$ için $x(s) = 0$ olduğunu görürüz. Ve böylece $x = 0$ 'dır. Bu T 'nin 1-1 olduğunu kanıtlar. $0 < x \in C[0,1]$ olması $Tx > 0$ olmasını gerektirdiğinden Tx tam pozitif operatördür.

b) Eğer $f \in C[0,1]$ $\|f\|_\infty \leq 1$ sağlarsa; o zaman $\forall t_1, t_2 \in [0,1]$ için;

$$\begin{aligned} |Tf(t_1) - Tf(t_2)| &= \left| \int_0^1 [\sin(st_1) - \sin(st_2)] f(s) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |\sin(st_1) - \sin(st_2)| ds \\ &\leq \int_0^1 |st_1 - st_2| ds = |t_1 - t_2| \int_0^1 s ds = \frac{1}{2} |t_1 - t_2| \end{aligned}$$

sağlanır. Bu; $T([-1,1])$ 'nin $C[0,1]$ 'nin eşsürekli alt kümesi olduğunu gösterir. Klasik Ascoli Arzelâ Kompaktlık teoreminden, $T([-1,1])$, $C[0,1]$ 'nin norm topolojiye göre toplamsal sınırlı altkümesidir ve böylece T kompakt operatördür.

c) J 'nin $C[0,1]$ 'in aşıkâr olmayan kapalı ideali olduğu açıktır. $\forall f \in C[0,1]$ fonksiyonu için $Tf(0) = 0$ olmasından, J T -değişmezdir. Bu T 'nin ideal indirgenemez olmadığını gösterir.

d) Eğer; $\forall 0 < t \leq 1$ için bir $u \in J$, $u(t) > 0$ 'ı sağlıyorsa; u , J 'nin yarı iç noktasıdır. Gerçekten, eğer $0 < y \in J$ ise $\forall t \in [0,1]$ için $(y \wedge nu)(t) \uparrow y(t)$ 'dir ve böylece (Dini's teoreminden) $\|y \wedge nu - y\|_\infty \rightarrow 0$ 'dır. Bu nedenle u , J 'nin yarı iç noktasıdır.

Şimdi; $0 < x \in C[0,1]$ olsun. $\forall 0 < s, t < 1$ için $\sin(st) > 0$ olduğundan; $\forall 0 < t \leq 1$ için $Tx(t) = \int_0^1 \sin(st)x(s)ds > 0$ 'dır. Bu nedenle Tx , J 'nin bir yarı iç noktasıdır. Bu; $T : J \rightarrow J$ 'nin güçlü genişleyen ve sonuç olarak ayrıca ideal indirgenemez olduğunu gösterir.

e) $T : J \rightarrow J$ operatörü, kompakt ideal indirgenemez pozitif operatördür. Sonuç 4.3'ten; T_J 'nin spektral yarıçapı r , pozitifdir yani $r = r(T/J) > 0$. Bu yüzden; Krein-Rutman Teoreminden, $Tx = rx$ olacak şekilde bir $0 < x \in J$ vardır. Bu $r(T) \geq r > 0$ olduğunu gösterir.

$T : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ kompakt pozitif operatör olmasından; yine Krein-Rutman Teoreminden; $r(T)$, T 'nin özdeğeridir. Böylece; $\forall t \in [0,1]$ için; $Ty(t) = \int_0^1 \sin(st)y(s)ds = r(T)y(t)$ 'yi sağlayan $y \in C[0,1]$ bir pozitif fonksiyon vardır. Bu $y(0) = 0$ olmasını gerektirir ve böylece $y \in J$ 'dir. Sonuç olarak $r(T) \leq r$ doğrudur ve $r = r(T/j) = r(T)$ 'dir.

Örnek 3.10: İdeal indirgenemez bir operatör zayıf genişleyen değildir.

Örnek 3.7'deki c_o 'a kısıtlanmış T operatörünü gözönüne alalım. O örnekte de dikkat edildiği gibi $T(c_o) \subseteq c_o$ 'dır. c_o , sıralı sürekli norma sahip olduğundan; ideal ve band indirgenemez kavramları çakışır ve $T : c_o \rightarrow c_o$ operatörü ideal indirgenemezdir. Örnek 3.7 deki tartışmadan $T : c_o \rightarrow c_o$ zayıf genişleyen değildir.

Örnek 3.11: Zayıf genişleyen operatör ne genişleyen ne de ideal indirgenemezdir.

$S : c_o \rightarrow c_o$ pozitif operatörünün

$$S(x_1, x_2, \dots) = \left(x_2 + x_1, x_3 + \frac{x_1}{2}, x_4 + \frac{x_1}{3}, \dots \right)$$

şeklinde tanımlandığını düşünelim.

S zayıf genişleyendir ama genişleyen değildir. Örn.3.7'de ispat edildiği gibi S ideal indirgenemezdir. c_o sıralı sürekli norma sahip olmasından dolayı S sıralı sürekli dir.

Banach latis c_o 'deki bütün yakınsak dizileri $T(x_1, x_2, \dots) = S(x_1 - x_\infty, x_2 - x_\infty, \dots) + 2x_\infty e$ ile S 'ye genişletelim. Burada $x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ve $e = (1, 1, 1, \dots)$ 'dir. Ayrıca, $T(c_o) \subseteq c_o$ olmasından dolayı $T : c_o \rightarrow c_o$ operatörü tam pozitif, zayıf genişleyendir. İdeal indirgenemez değildir. Ek olarak; T σ -sıralı sürekli değildir.

Örnek 3.12: Rankı bir olan genişleyen sıralı sürekli pozitif operatör ideal indirgenemez değildir.

$u = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right)$ dizisini ele alalım, u 'nun ℓ_∞ 'un zayıf birimi olduğuna dikkat edelim.

Ayrıca, $\phi : \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ tam pozitif sıralı sürekli lineer fonksiyonel olsun. Örneğin; $\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$

şeklinde tanımlayabiliriz. $T : \phi \otimes u : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ rangı-bir olan sıralı sürekli pozitif operatörünü düşünelim. $T(c_o) \subseteq c_o$ olduğundan, T ideal indirgenemez değildir.

Bununla beraber $0 < x \in \ell_\infty$ ise $T(x) = \phi(x)u$ zayıf birimdir ve böylece kompakt pozitif operatör T, genişleyendir.

Sonuç olarak; eğer u'yu güçlü birim olarak alırsak; örneğin, $u = (1, 1, 1, \dots)$ olsun $\phi \otimes u; \ell_\infty$ uzayında ideal indirgenemez olmayan bir güçlü Krein operatör olur. Aynı zamanda, her genişleyen operatörün tam pozitif olduğunu görebiliriz. Ayrıca aşağıdaki yardımcı teoremlerle bu durumun tersleri için iyi faydalı yeter şartı verelim.

Yardımcı Teorem 3.13: $S : E \rightarrow E$ bir tam pozitif operatör olsun. Eğer bir $T : E \rightarrow E$ ideal indirgenemez pozitif operatörü $\lambda > 0$ için $TS \leq \lambda S$ 'yi sağlarsa; her $k = 0, 1, 2, \dots$ için, $T^k S$ ve ST^k güçlü genişleyendir.

İspat: Sadece, T'nin pozitif ve ideal indirgenemez olduğu durumları göz önüne alacağız. Diğer durumlar bunlarla benzerdir. İspat için; k üzerinden tümevarım uygulayacağız. İlk önce $k = 0$ olduğunu varsayalım. $T(Sx) \leq \lambda Sx$ (yani $Tu \leq \lambda u$) olduğundan $T(\overline{E_u}) \subseteq \overline{E_u}$ olduğunu görürüz. T'nin ideal indirgenemezliğinden $\overline{E_u} = E$ 'yi elde ederiz. Bu; $u = Sx$ 'in bir yarı iç nokta olması demektir; ve burdan S, güçlü genişleyendir. Şimdi $T^{k-1}S$ 'nin güçlü genişleyen olduğunu farzedelim. $T^k S = T(T^{k-1}S) = T^{k-1}(TS) \leq \lambda T^{k-1}S$ ve (tümevarım hipoteziyle) $T^{k-1}S$ tam pozitif olduğundan, $T^k S$ güçlü genişleyendir.

Burada Yardımcı teorem 3.13'teki operatörlerin sırasının önemli olup olmadığını yani $TS \leq \lambda S$ ve $ST \leq \lambda S$ 'nin yer değiştirebilirliğini sormak doğaldır. Bunun gerekliliğini aşağıdaki örneklerle gösterelim:

Atomik ve atomik olmayan Banach latisler üzerinde tanımlı, T ideal indirgenemez, $ST \leq S$ ve S genişlemeyen tam pozitif operatör özelliklerini sağlayan iki operatör örneğini verelim: (Bu, Yardımcı teorem 3.13'teki $TS \leq \lambda S$ eşitsizliğinin $ST \leq \lambda S$ ile değiştirilemeyeceğini gösterir.)

Atomik durum için; $E = \mathbb{R}^2$ olsun. $S, T : E \rightarrow E$ pozitif operatör çiftinin $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve

$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri ile verildiğini düşünelim.

T , ideal indirgenemez ve S , tam pozitiftir. $Se_1 = e_1$ olmasından; S operatörü genişleyen değildir. Sonuç olarak; Her $(\alpha, \beta) \in E$ için;

$$ST \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = (\beta + \alpha, 0) = S \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \text{ olduğuna dikkat edelim. Bu, } ST = S \text{ olduğunu}$$

gösterir ve buradan da $ST \leq S$ olması doğrudur.

Atomik olmayan durum için; $1 \leq p < \infty$ olduğunda $E = L_p[0,1]$ alalım. $\emptyset(1) = 1$ sağlanacak

şekilde bir $\emptyset \in E^*$ tam pozitif fonksiyoneli alalım. Örneğin; $\emptyset(x) = \int_0^1 x(t) dt$ alalım ve

pozitif rangı bir olan $T = \emptyset \otimes 1$ operatörünü düşünelim. T , E üzerinde ideal indirgenemez pozitif operatördür. Şimdi; $A = \aleph_{\left[0, \frac{1}{2}\right]}$ olsun ve E üzerinde S operatörünün $S = \aleph_A T$ olduğunu

düşünelim. S , tam pozitiftir fakat genişleyen değildir. Gerçekten; S 'nin görüntüsü $R(S)$, bir boyutlu vektör uzayıdır: $R(S) = \{\lambda \aleph_A : \lambda \in \mathbb{R}\}$. O zaman, eğer $x \in E^+$ ise;

$Sx = \aleph_A Tx = \aleph_A \emptyset(x)1 = \emptyset(x) \aleph_A$ olduğuna dikkat edelim ve buradan $\emptyset(1) = 1$ olduğundan;

$$STx = S(\emptyset(x)1) = \emptyset(x)S(1) = \emptyset(x)\emptyset(1)\aleph_A = \emptyset(x)\aleph_A \text{ 'dır.}$$

Böylece; $ST = S$ 'dir ve aynı zamanda $ST \leq S$ de sağlanır.

Sonuç 3.14: $T : E \rightarrow E$ ideal indirgenemez pozitif operatör ise, her $\lambda > r(T)$ ve her $k = 0, 1, 2, \dots$ için $R(\lambda, T)T^k$ operatörü genişleyendir (ve böylece ideal indirgenemezdir).

Benzer şekilde; eğer $T : E \rightarrow E$ σ -sıralı sürekli band indirgenemez pozitif operatör ise her $\lambda > r(T)$ ve her $k = 0, 1, 2, \dots$ için $R(\lambda, T)T^k$ operatörü genişleyendir.

İspat: Her $\lambda > r(T)$ için $R(\lambda, T)$ operatörü tam pozitiftir ve $TR(\lambda, r) \leq \lambda R(\lambda, T)$ sağlanır (Yardımcı teorem 2.30).

Banach latis E üzerindeki bir ideal indirgenemez operatörün varlığı E üzerinde bir kaç kısıtlamayı gerektirir.

Yardımcı teorem 3.15: Eğer Banach latis E , bir kompakt tam pozitif operatör kabul ediyorsa, E aynı zamanda tam pozitif lineer fonksiyonel de kabul eder. Özel olarak bu konumda E sayılabilir sup özelliğine sahiptir.

İspat: $T : E \rightarrow E$ kompakt bir tam pozitif operatör olsun. T^* 'in görüntüsü $R(T^*)$ da sürekli sıfırdan farklı lineer fonksiyonların sayılabilir kümesini; $\{\varnothing_1, \varnothing_2, \dots\}$ alalım. Bu; $R(T^*)$ 'da norm topolojiye göre yoğundur ve $\varnothing = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varnothing_n|}{2^n \|\varnothing_n\|} \geq 0$ diyelim. ($T^* : E^* \rightarrow E^*$ kompakt operatör olduğundan mümkündür.) $\varnothing$ 'nin E 'de tam pozitif olduğunu iddia ediyoruz.

Bunu görmek için; $x > 0$ olsun. Eğer $\varnothing(x) = 0$ ise her n için $\varnothing_n(x) = 0$ olur ve böylece $\forall \psi \in E^*$ için $\psi(Tx) = T^*\psi(x) = 0$ olur. Bu yüzden $Tx = 0$ 'dır ve T 'nin tam pozitifliğiyle çelişir. Böylece; $\varnothing(x) > 0$ ve $\varnothing$ tam pozitifdir. Bu, E 'nin sayılabilir sup özelliği olduğu anlamına gelir.

Sonuç 3.16: Eğer bir Banach latis E , bir kompakt tam pozitif operatör kabul ediyorsa, E 'deki pozitif operatörler için σ -sıralı süreklilik ve sıralı süreklilik kavramları çakışmıştır.

Sonuç 3.17: Eğer bir Banach latis E , ideal indirgenemez bir pozitif operatör kabul ediyorsa E 'nin sayılabilir sup özelliği vardır.

İspat: $T : E \rightarrow E$ bir ideal indirgenemez pozitif operatör olsun. Bir $\lambda > r(T)$ skaleri alalım ve pozitif operatör $Q = R(\lambda, T)$ 'nin güçlü genişleyen olduğuna dikkat edelim. (Sonuç 3.14) Şimdi; $0 < \varnothing \in E^*$ ve $0 < u \in E$ 'yi alalım ve $K = \varnothing \otimes u$ olsun. Her yarı iç vektör $x > 0$ için; $Kx = \varnothing(x)u > 0$ 'dır. Böylece; $KQ : E \rightarrow E$ kompakt tam pozitif operatördür ve Yardımcı teorem 3.15'ten E sayılabilir sup özelliğe sahiptir.

4. İDEAL İNDİRGENEMEZLİĞİ ve SPEKTRAL YARIÇAP

Krein-Rutman Teoremi kompakt pozitif operatörün spektral yarıçapı pozitif olduğunda pozitif bir özvektöre uygun bir özdeğeri olduğunu söyler. Bununla beraber Krein-Rutman Teoremi kompakt pozitif operatörün spektral yarıçapının pozitif olduğunu söylemez. Volterra operatörlere göz attığımızda ise spektral yarıçapın sıfır olabildiğini görürüz. Bu bölümün amacı, kompakt pozitif operatörler için, spektral yarıçapın pozitifliğini garanti edecek durumları sunmaktır. Karışıklıktan kaçınmak için aşağıdaki ifadelerdeki operatörlerin sıfırdan farklı olduğunu ve Banach latislerin birden büyük boyutlu olduğunu kabul edeceğiz.

Yerel yarı nilpotent kavramıyla başlayalım:

Tanım 4.1: Banach uzayında tanımlı, sınırlı $T : X \rightarrow X$ operatörüne, eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n x_0\|^{1/n} = 0$ ise x_0 vektöründe yarınilpotenttir (yerel) denir.

Banach uzayındaki bir $T : X \rightarrow X$ operatörü ancak ve ancak X 'in her noktasında yerel yarınilpotent ise yarınilpotenttir.

Bunu şöyle görebiliriz:

$T \in \mathcal{L}(X)$ olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$ olması için gerek ve yeter koşulun her $x \in X$ için

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0$ olduğunu gösterelim.

Eğer; $x \in X$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$ ise; o zaman $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n x\|^{1/n} \leq (\|T^n\| \|x\|)^{1/n} = \|T^n\|^{1/n} \cdot \|x\|^{1/n} \rightarrow 0$

olmasından $\|T^n x\|^{1/n} \rightarrow 0$ olur.

Tersi için; $\forall x \in X$ için $\|T^n x\|^{1/n} \rightarrow 0$ olduğunu kabul edelim. $\alpha \neq 0$ kompleks sayısını sabit

turalım ve $x \in X$ olsun. $\|T^n x\|^{1/n} \rightarrow 0$ olduğundan; $\forall n \geq n_0$ için $\|T^n x\|^{1/n} \leq \frac{|\alpha|}{2}$ olacak şekilde

bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu $\forall n \geq n_0$ için $\|\alpha^{-(n+1)} T^n x\| \leq \frac{1}{|\alpha|} \cdot \frac{1}{2^n}$ olmasını gerektirir. Özellikle,

$\forall x \in X$ $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{-(n+1)} T^n x$ serisi X 'te yakınsaktır.

$T : X \rightarrow X$ sınırlı bir operatör ve bir sıfırdan farklı α sayısı için $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{-(n+1)} T^n x$ serisi $\forall x \in X$ için yakınsarsa $\alpha \in \rho(T)$ olduğu biliniyor. $\forall \alpha \neq 0$ için $\alpha \in \rho(T)$ 'dir. Bu ve $\sigma(T) \neq \emptyset$ olması $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ veya $\sigma(T) = \{0\}$ olmasını gerektirir. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \sigma(T) = 0$ 'dır.

Diğer bir yandan, yarınılpotent olmayan bazı noktalarda bire bir operatör bir yerel yarınılpotent olabilir. Örneğin;

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(x_1, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2}, \dots \right) \text{ ile tanımlı } T : \ell_2 \rightarrow \ell_2 \text{ pozitif operatörünü}$$

düşünelim. T'nin birebir e_2 'de yerel yarınılpotent olduğunu ve yarınılpotent olmadığını gösterelim:

$\forall n \geq 2$ için $Te_n = \frac{1}{n} e_{n+1}$ olduğuna dikkat edelim. Şimdi tümevarım yöntemini kullanarak $T^n e_2 = \frac{1}{(n+1)!} e_{n+2}$ olduğunu görürüz. Böylece, $\forall n$ için $\|T^n e_2\| = \frac{1}{(n+1)!}$ 'dir. Bu, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n e_2\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(n+1)!} \right]^{\frac{1}{n}} = 0$ olmasını gerektirir. Bu, T, e_2 'de yerel yarınılpotent demektir.

Diğer yandan, $\forall n$ için $\|T^n\| \geq \|T^n e_1\| \geq 1$, $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \geq 1$ olmasını gerektirir. Böylece, T, $e_2 > 0$ 'de yerel yarınılpotenttir fakat yarınılpotent operatör değildir.

Sonsuz boyutlu bir Banach uzayında sıfırdan farklı kompakt operatörler daima aşıkâr olmayan kapalı hiperdeğişmez alt uzaylar içerir. (Teorem 2.31) Sonraki temel netice, B. de Pagter'e göre, local (yerel) yarınılpotent kompakt pozitif operatörler için aşıkâr olmayan kapalı l-hiperdeğişmez ideallerin varolduğudur.

Pagter'in ispatı A.J. Michaels (1997) ile sunulduğu gibi Lomonosov'un değişmez alt uzay teoreminin, Hilden'in ispatının Banach latislerine usta bir uyarlamasıdır.

Yarınılpotentin, yerel yarınılpotentle yerdeğiştirebilmesi durumu (Abramovich, Aliprantis, Burkishaw, 1992) de incelenmiştir.

Eğer; $T : X \rightarrow X$ Banach uzayında sınırlı bir operatör ise komutantı $\{T\}'$, T ile değişmeli X üzerindeki bütün sınırlı operatörlerden oluşan $L(X)$ 'in altcibiridir. Yani;

$$\{T\}' = \{S \in L(X) : ST = TS\} \text{ 'dir.}$$

Teorem 4.2 (de Pagter, 1986): Sıfırdan farklı pozitif vektörde yerel yarınilpotent olan, her sıfırdan farklı kompakt pozitif operatörün, aşikâr olmayan kapalı l-hiperdeğişmez ideali vardır.

İspat: $T : E \rightarrow E$ bir E Banach latis üzerinde (sıfırdan farklı) bir kompakt pozitif operatör olsun. T'nin tam pozitif olduğunu kabul edelim. Aksi durumda Yardımcı teorem 3.1'den T'nin sıfır ideali N_T aşikâr olmayan kapalı l-hiperdeğişmezdir. Yardımcı teorem 3.1'den T'nin görüntüsü tarafından üretilen sıfırdan farklı kapalı ideali

$J_T = \{x \in E : \exists y \geq 0 \text{ öyle ki } |x| \leq Ty\}^-$, T için latis hiperdeğişmezdir. Eğer $J_T \neq E$ ise, o zaman J_T T için istenen l-hiperdeğişmez idealdir. Bu nedenle; $J_T = E$ olarak kabul edelim. T'nin görüntüsünün ayrılabilir olmasını gerektirir (Teorem 2.35). Bundan dolayı, $T(E)$ 'de sıfırdan farklı norm topolojiye göre yoğun olan vektörlerden oluşan $T(E)$ görüntüsünün $(w_1, w_2, \dots)$ sayılabilir bir altkümesi vardır.

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|w_n|}{2^n \|w_n\|} > 0 \text{ olsun. } (w_1, w_2, \dots) \subseteq E_w \text{ aşikâr kapsama } T(E) \subseteq \overline{E_w} \text{ yi gerektirir.}$$

Bu nedenle, $E = J_T \subseteq E_w$ ve $\overline{E_w} = E$ 'dir. Aynı zamanda, bu durumda E'nin yarıiçnoktalarının varolduğunu da kabul edebiliriz.

Şimdi, operatörlerin aşağıdaki topluluğunu göz önüne alalım:

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{L}(E) : \exists 0 \leq B \in \{T\}' \text{ öyle ki } |Ax| \leq B|x| \quad \forall x \in E \text{ için}\}$$

$\mathcal{A}$, E'nin merkezini kapsayan $\mathcal{L}(E)$ 'nin altcibiridir. Yani $Z(E) \subseteq \mathcal{A}$. Şimdi $\forall x \in E$ için;

$$\mathcal{A}x = \{Ax : A \in \mathcal{A}\} \text{ olsun.}$$

$\mathcal{A}x$ 'in E'nin l-hiperdeğişmez vektör alt uzayı olduğunu iddia ediyoruz. Bunu görmek için; $ST = TS$ 'yi sağlayan $0 \leq S \in \mathcal{L}(E)$ seçelim. Herhangi bir $A \in \mathcal{A}$ alalım ve $y = Ax \in \mathcal{A}x$ vektörüne dikkat edelim. Her $z \in E$ için $|Az| \leq B|z|$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde $0 \leq B \in \{T\}'$ alalım ve her $z \in E$ için $|SAz| \leq S|Az| \leq (SB)|z|$ ve $SB \in \{T\}'$ olduğuna dikkat

edelim. Bu $SA \in \mathcal{A}$ olmasını sağlar ve böylece $Sy = SAx \in \mathcal{A}x$ olur. Diğer bir ifadeyle; her $x \in E$ için $\mathcal{A}x$ l-hiperdeğişmezdir. Sonuç olarak norm topolojiye göre kapanışı $\overline{\mathcal{A}x}$ de her x için benzer şekilde E 'nin l-hiperdeğişmez altuzayıdır.

$I \in A$ olduğundan $x = Ix \in \mathcal{A}x$ 'dir. Böylece sıfırdan farklı $x \in E$ vektörü için, $\mathcal{A}x$ sıfırdan farklıdır. Şimdi, $\overline{\mathcal{A}x}$ 'in her x için E 'de kapalı ideal olduğunu iddia ediyoruz. Bunu görmek için; her $A_i \in \mathcal{A}$ olmak üzere $|y| \leq \sum_{i=1}^k |A_i x|$ 'i sağlayan $y \in E$ alalım. (Riesz Ayırıştırma Teoreminden, 1978) Her i için; $|y_i| \leq |A_i x|$ ile $\sum_{i=1}^k y_i$ yazabildiğimizden, bir $A \in \mathcal{A}$ için $|y| < |Ax|$ olduğunu kabul edebiliriz. Şimdi Yardımcı teorem 2.32'den $T_n Ax \rightarrow y$ olacak şekilde $\{T_n\} \subseteq Z_n(E) \subseteq A$ dizisinin varolduğunu söyleyebiliriz. Her n için $T_n A \in \mathcal{A}$ olduğundan $y \in \overline{\mathcal{A}x}$ 'i elde ederiz ve böylece $\overline{\mathcal{A}x}$ bir idealdir.

İspatı tamamlamak için; bir $x \neq 0$ için $\overline{\mathcal{A}x} \neq E$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için; $x \neq 0$ olduğu durumlarda $\overline{\mathcal{A}x} = E$ olduğunu çelişki yoluyla kabul edelim. $u > 0$ T 'nin yerel yarınilpotentinin bir vektörü olsun. Yani; $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n u\|^{1/n} = 0$.

T 'nin tam pozitifliliği $Tu > 0$ olmasını gerektirir. Bu nedenle T 'nin sürekliliğinden, $0 \notin \overline{U}$ ve $0 \notin \overline{T(U)}$ olacak şekilde u merkezli açık yuvar U vardır. (*)

$\forall x \in \overline{T(U)}$ için, $\overline{\mathcal{A}x} = E$ olduğu kabulünden $\forall x \in T(U)$ için $u \in \overline{\mathcal{A}x}$ olduğunu görürüz.

Şimdi $\forall x \in \overline{T(U)}$ için $A_x(x) \in U$ olacak şekilde $Ax \in A$ operatörü alalım ve merkezi x 'te olan $A_x(B_x) \subseteq U$ olacak şekilde B_x seçelim. T 'nin kompaktlığı, $\overline{T(U)}$ 'nin norm topolojide kompakt küme olduğunu gösterir. Açık yuvarlar; $\{B_x : x \in \overline{T(U)}\}$, $\overline{T(U)}$ kümesini örttüğünden, $\overline{T(U)} \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_{x_i}$ olacak şekilde $x_1, x_2, \dots, x_k \in \overline{T(U)}$ vardır. Kolaylık açısından B_{x_i} yerine B_i , A_{x_i} yerine A_i yazalım. Şimdi, her $i = 1, \dots, k$ ve her $z \in E$ için $|A_i z| \leq R|z|$ 'yi sağlayan $0 \leq R \in \{T\}'$ operatörünün varolduğuna dikkat edelim.

$Tu \in \overline{T(U)}$ olduğundan, $Tu \in B_{j_1}$ olacak şekilde $j_1 \in \{1, \dots, k\}$ indeksleri vardır. Bu, $A_{j_1} Tu \in U$ olduğunu gösterir ve böylece $TA_{j_1} Tu \in \overline{T(U)}$ olur. Bu tartışmayı tümevarımsal olarak

tekrarlarsak; $\forall n$ için $z_n = (A_{j_n} T)(A_{j_{n-1}} T) \dots A(J_1 T)u \in U$ olacak şekilde $\{1, \dots, k\}$ 'dan alınan indekslerin bir $\{J_n\}$ dizisini elde ederiz.

$|A_j z| \leq R|z|$ ve $RT = TR$ 'den $\forall n$ için $|z_n| \leq R^n T^n u$ alalım. Önceki cümle, $\|z_n\| \leq \|R\|^n \cdot \|T^n u\|$ yi gerektirir. Bu nedenle $\|z_n\|^{1/n} \leq \|R\| \cdot \|T^n u\|^{1/n} \rightarrow 0$ ve böylelikle de $z_n \rightarrow 0$ olur. $\forall n$ için $z_n \in U$ olduğundan bunu $O \in \overline{U}$ takip eder. Bu da (*) durumuyla çelişmektedir. Bu çelişkiyle teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 4.3 (de Pagter, 1986): Banach latis üzerindeki bir ideal indirgenemez kompakt pozitif operatör, pozitif spektral yarıçapa sahiptir.

Yukarıdaki sonuçta kompaktlık hipotezinin gerekli olduğuna işaret etmek gerekir. İki değişmeli pozitif operatörün spektral yarıçaplarının pozitifliğini ispat etmek için önceki neticeyi almak durumundayız.

Sonuç 4.4 (Abramovich – Aliprantis – Burkinshaw, 1992): Eğer, bir ideal indirgenemez pozitif operatör $T : E \rightarrow E$, kompakt pozitif operatör $S : E \rightarrow E$ ile değişmeli ise $r(T) > 0$, $r(S) > 0$ olur.

İspat: $S, T : E \rightarrow E$ Banach latis üzerinde sıfırdan farklı iki pozitif operatör olsun. S kompakt, T ideal indirgenemez ve $ST = TS$ olduğunu kabul edelim. Teorem 3.3'e göre $ST = TS > 0$ olur.

$r(ST) = 0$ olduğunu varsayalım. Teorem 4.2'den kompakt pozitif operatör ST aşıkâr olmayan bir kapalı 1-hiperdeğişmez J idealine sahiptir. T operatörü, ST ile değişmeli olduğundan $T(J) \subseteq J$ 'yi elde ederiz. Bu da T 'nin ideal indirgenemezliği ile çelişir. Bu yüzden $r(ST) > 0$ 'dır. Bu aynı zamanda $0 < r(ST) \leq r(S) r(T)$ olduğunu gösterir (Teorem 2.36) (S ve T 'nin değişmeli olmasından) Bu da; $r(T) > 0$ ve $r(S) > 0$ olmasını gerektirir.

Bir sonraki sonuçlar Sonuç 4.3'teki kompaktlık varsayımının makul olarak yumuşatılabilir (hafifletilebilir) olduğunu gösterir.

Sonuç 4.5 (Abramovich – Aliprantis – Burkinshaw, 1992): Eğer; Banach latis üzerindeki T , kompakt olarak baskınlaştırılmış ideal indirgenemez pozitif operatör ise T 'nin komutanti içindeki her pozitif S operatörü, pozitif bir spektral yarıçapa sahiptir. Yani $r(S) > 0$.

İspat: Bir kompakt K operatörü için $0 \leq T \leq K$ olsun ve S , ideal indirgenemez T operatörü ile değişmeli bir pozitif operatör olsun. Teorem 3.3 ile T operatörü tam poziftir. Bu yüzden,

Sonuç 2.33'ten tam pozitif T^3 operatörü kompakttır. Teorem 3.3'ten E 'nin yarı iç noktalar içerdiği ve T 'nin yarı iç noktaları yarı iç noktalara taşıdığı biliniyor. Bu, ST^3 pozitif operatörünün sıfırdan farklı olduğunu gerektirir. Aynı zamanda, ST^3 kompakt ve T ile değişmelidir. Son olarak, Sonuç 4.4 $r(ST^3) > 0$ olmasını gerektirir ve buradan $r(ST^3) \leq r(S)r(T^3)$ ve $r(S) > 0$ elde edilir.

Tanım: X bir Banach uzayı olsun. X 'te $x_n \xrightarrow{w} 0$ ve X^* 'de $x_n^* \xrightarrow{w} 0$ olması, $x_n^*(x_n) \rightarrow 0$ olmasını gerektiriyorsa X 'e Dunford – Pettis Özelliğine sahiptir denir. AL ve AM uzayları Dunford-Pettis Özelliğine sahiptirler.

Yardımcı teorem 4.6: Eğer $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z$, Banach uzayları arasında zayıf kompakt pozitif operatörler ve Y Dunford – Pettis özelliğini sağlıyorsa, TS kompakt operatördür.

Sonuç 4.7: Bir Banach latis üzerinde $T : E \rightarrow E$ ideal indirgenemez zayıf kompakt pozitif operatör olsun. Eğer E Dunford – Pettis özelliğine sahipse, (özellikle E , AL ya da AM Uzayı ise) T pozitif spektral yarıçapa sahiptir.

İspat: Bu durumda, T^2 ; ideal indirgenemez T operatörü ile değişmeli, tam pozitif kompakt bir operatördür.

B. De Pagter, Teorem 4.2, Banach latis üzerindeki $T : E \rightarrow E$ kompakt yarınilpotent pozitif operatörün aşikâr olmayan l-hiperdeğişmez ideal J 'ye sahip olduğunu belirtir. Bu sonuç, $T(J) \neq \{0\}$ olduğunu garanti etmez. Basit bir örnek verelim:

Örnek 4.8: $T(x,y) = (y,0)$ ile tanımlı $T : R^2 \rightarrow R^2$ pozitif operatörünü düşünelim. $T^2 = 0$ olduğu açıktır. İdeal (gerçekten band) $J = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$, T için aşikâr olmayan kapalı hiperdeğişmez idealdir. Bununla birlikte $T(J) = \{0\}$.

Eğer $T^2 = 0$ durumunu kabul etmezsek, Teorem 4.2'den yararlanılarak latis hiperdeğişmez ideal J , $T(J) \neq \{0\}$ 'ı sağlayacak şekilde seçilebilir.

Teorem 4.9: Banach latis üzerindeki kompakt yarınilpotent pozitif operatör $T : E \rightarrow E$, $T^2 \neq 0$ 'ı sağlarsa T için $T(J) \neq \{0\}$ olacak şekilde aşikâr olmayan kapalı l-hiperdeğişmez J ideali vardır.

İspat: Banach latıs üzerindeki $T : E \rightarrow E$, $T^2 \neq 0$ olacak şekilde kompakt yarınilpotent pozitif bir operatör olsun. T 'nin sıfır ideali $N = \{x \in E : T|x| = 0\}$ olsun; ve $\hat{T} : E/N \rightarrow E/N$ operatörü $\hat{T}[x] = [Tx]$ ile tanımlansın. $\hat{T}$ yarınilpotent kompakt pozitif bir operatördür. Aynı zamanda $\hat{T}$ 'nin sıfırdan farklı olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten; $T^2x > 0$ 'ı sağlayan $x > 0$ alırsak, $Tx \notin N$ olur ve böylece E/N 'de $\hat{T}[x] = [Tx] > 0$ olur. Bu da $\hat{T} > 0$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.2'den; $\hat{T}$ için, aşıkâr olmayan kapalı l-hiperdeğişmez ideal $\hat{J}$ vardır. $J = \{x \in E : [x] \in \hat{J}\}$ olsun. Kanonik dönüşüm $x \rightarrow [x]$ latıs homomorfizma olduğundan, bu J 'nin T altında değişmez ve E 'de aşıkâr olmayan kapalı ideal olduğunu gösterir. $T(J) \neq \{0\}$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu görmek için; $0 < [x] \in \hat{J}$ 'yı sağlayan bir $0 < x \in J$ alalım ve $T[x] > 0$ olduğuna dikkat edelim. Aksi taktirde, $Tx = 0$ olması $x \in N$ olduğunu belirtir. Bu $[x] = 0$ demektir. Bu da bir çelişkidir.

Son olarak, J 'nin T için l-hiperdeğişmez olduğuna dikkat edelim. Bunu kanıtlamak için, T ile değişmeli, $S : E \rightarrow E$ operatörü alalım. Eğer $[x] = [y]$ yani $x - y \in N$ ise $0 \leq T|Sx - Sy| \leq TS|x - y| = ST|x - y| = 0$ 'dan $Sx - Sy \in N$ olduğu görülür. Yani; $[Sx] = [Sy]$ 'dir. O halde S ; $\hat{S}[x] = [Sx]$ formülü aracılığıyla E/N üzerinde $\hat{S} \geq 0$ operatörünü tanımlar. $\hat{S}$, $\hat{T}$ ile değişmeli olduğundan, $\hat{S}(\hat{J}) \subseteq \hat{J}$ kapsaması vardır. buradan $S(J) \subseteq J$ olduğunu çıkarırız.

Güçlü genişleyen operatörleri ilgilendiren genel bir sonuç ile devam edelim.

Teorem 4.10: Banach latıs üzerinde $Q, S : E \rightarrow E$ aşağıdaki özellikleri sağlayan iki pozitif operatör olsun.

- 1) Q bir güçlü genişleyen operatördür.
- 2) S , kompakt olarak baskın pozitif operatörü baskınlaştırır, özellikle S 'nin kendisi kompakt operatörle baskınlaştırılırsa bu şekildir.

Bu şartlar altında; $r(QS) > 0$, yani QS operatörünün spektral yarıçapı pozitifdir.

İspat: Q ve S teoremden belirtilen özellikleri sağlasın. $0 < L \leq S$ ve $L \leq K$ 'yı sağlayan pozitif bir L operatörü ve kompakt bir K operatörü alalım.

$C = QL$ pozitif operatörünü göz önüne alalım; ve Q güçlü genişleyen olduğundan C 'nin sıfırdan farklı olduğuna aynı zamanda, bir $x > 0$ için ve bir k için $C^k x > 0$ ise bir $R > 0$ için C^k , $C^k = QR$ şeklinde yazılabildiğinden $C^k x$ bir yarı iç noktadır. Bu her k için, $C^k > 0$ olduğunu gösterir. $0 < C = QL \leq QK$ olduğundan Sonuç 2.33 C^3 'ün kompakt bir operatör olmasını gerektirir.

$r(C) = 0$ olduğunu farzedelim. O zaman; $r(C^3) = r[(C)]^3 = 0$ 'dır. Bunu hesaba katarak $(C^3)^2 = C^6 > 0$ elde edilir. Teorem 4.9 dan $C^3(J) \neq \{0\}$ ile her C^3 için bir aşikâr olmayan kapalı l-hiperdeğişmez J ideali vardır.

Böylece, bir $x > 0$ için $C^3 x$ yarı içnoktası, J kapalı idealine aittir. Bu $J = E$ olmasını gerektirir. Bu durum $r(C) = 0$ kabulüyle çelişmektedir. Böylece; $r(QS) \geq r(C) > 0$ 'dır.

Sonuç 4.11: Eğer pozitif operatör T 'nin komutanti ideal indirgenemez pozitif operatör S 'yi ve kompakt pozitif operatör K 'yı içeriyorsa; o zaman $r(T) > 0$ olur.

İspat: $S > 0$ ideal indirgenemez ve $K > 0$ kompakt olmak üzere $TS = ST$ ve $TK = KT$ olsun. $\lambda > r(S)$ 'yi sabit turalım ve Sonuç 3.14'ten $R(\lambda, S)$ operatörünün güçlü genişleyen olduğuna dikkat edelim. Bu $TR(\lambda, S)K > 0$ 'ı gerektirir. Hem $R(\lambda, S)$, hem de K , T ile değişmeli olduğundan $T[R(\lambda, S)K] = [R(\lambda, S)K]T > 0$ 'ı elde ederiz. Sonuç olarak, $TK=KT>0$ olur ve $R(\lambda, S)$ ve TK operatörlerinin Teorem 4.10'u sağladıklarından dolayı;

$$0 < r(R(\lambda, S)TK) = r(T[R(\lambda, S)]K) \leq r(T)r(R(\lambda, S)K) \text{ 'dir. O halde; } r(T) > 0 \text{ olur.}$$

Sonuç 4.12: Banach latis üzerinde $S, T : E \rightarrow E$ değişmeli pozitif operatörler olsun. Eğer T ideal indirgenemez ve S 'nin bir kuvveti kompakt baskın bir operatörü baskınlaştırırsa; o zaman $r(S) > 0$ ve $r(T) > 0$ olur.

İspat: S^m in bir kompakt baskın pozitif operatörü baskınlaştırdığını kabul edelim. $\lambda > r(T)$ 'yi sabit turalım ve $Q = R(\lambda, T)T$ olsun. Sonuç 3.14 Q 'nun güçlü genişleyen olduğunu gösterir. Teorem 4.10

$$0 < r(QS^m) = r(R(\lambda, T)TS^m) \leq r(R(\lambda, T))r(T)[r(S)]^m \text{ olmasını gerektirir ve böylece hem } r(S) > 0 \text{ hem de } r(T) > 0 \text{ sağlanır.}$$

5. BAND İNDİRGENEMEZLİĞİ ve SPEKTRAL YARIÇAP

Bu bölümde, band indirgenemez pozitif operatörlerin spektral yarıçaplarını inceleyeceğiz. Sonuçların bir önceki bölümle benzer fakat aynı olmadığını göreceğiz. Band indirgenemez pozitif operatörlerden bahsederken, onların aynı zamanda σ -sıralı sürekli olduklarını da kabul etmeliyiz. Önceki bölümde olduğu gibi bütün operatörlerin sıfırdan farklı olduğunu ve birden büyük boyutlu Bahach latisler üzerinde etki ettiklerini kabul edeceğiz.

Yardımcı teorem 5.1: Banach latis üzerinde $T : E \rightarrow E$ σ -sıralı sürekli kompakt ve tam pozitif bir operatör olsun. O zaman, E üzerindeki T ile değişmeli her pozitif operatör sıralı süreklidir.

İspat: Sonuç 3.16'dan E'deki her σ -sıralı sürekli pozitif operatörün aynı zamanda sıralı sürekli olduğu biliniyor. Şimdi, $S : E \rightarrow E$ pozitif operatörünün $ST = TS$ 'yi sağladığını kabul edelim. $x_n \downarrow 0$ olsun. O zaman $Tx_n \downarrow 0$ 'dır ve T'nin kompaktlığından $\|Tx_n\| \downarrow 0$ olması sonucunu çıkarırız. (T'nin kompaktlığı $\{Tx_n\}$ dizisinin $\{Tx_{k_n}\}$ gibi norm topolojiye göre yakınsak alt dizisinin var olduğunu gösterir. $Tx_{k_n} \downarrow 0$ olduğunda Yardımcı teorem 2.34'ten $\|Tx_{k_n}\| \downarrow 0$ olduğu elde edilir ve buradan $\|Tx_n\| \downarrow 0$ olur.) Böylece; $\|STx_n\| \downarrow 0$ 'dır. Diğer taraftan $\forall n$ için $Sx_n \geq x \geq 0$ sağlanırsa, $STx_n = TSx_n \geq Tx \geq 0$ ve $\|STx_n\| \downarrow 0$ 'dan $Tx=0$ 'ı elde ederiz. T tam pozitif olduğundan, buradan $x = 0$ ve böylece $Sx_n \downarrow 0$ yani S σ -sıralı sürekli ve sonuç olarak S sıralı süreklidir.

T operatörünün kompaktlığı olmasından, T'yi ideal indirgenemez alsak bile Yardımcı teorem 5.1 sağlanmaz. Buna bir örnek verirek:

T'nin kompaktlığının T'nin ideal indirgenemezliği ile yerdeğiştiremediğini gösterelim. Banach latis üzerinde değişmeli pozitif operatörler $T, S : E \rightarrow E$ şu özellikte olsun:

- (a) T, tam pozitif, sıralı sürekli ve ideal indirgenemez
- (b) S, sıralı sürekli değildir.

Çözüm: $E = C(\Gamma)$ olsun. Burada Γ bir birim çemberdir. 1 ile sabit bir fonksiyonunu ifade edeceğiz. Sıfırdan farklı rasyonel θ açısını sabit tutalım ve T, θ açısı ile dönmesi vasıtasıyla tanımlanmış operatör olsun. Bu, $\forall x \in C(\Gamma)$ ve $\gamma \in \Gamma$ için, $Tx(\gamma) = x(\gamma e^{i\theta})$ demektir. T, örten latis izometridir. Bu, T'nin tam pozitif ve sıralı sürekli olmasını gerektirir.

Devam edebilmek için, aşağıdaki sonuca ihtiyacımız var:

(•) Eğer θ sıfırdan farklı ve rasyonel ise $\{e^{in\theta} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi Γ 'de yoğundur.

Bunu görmek için bir k doğal sayısı alalım ve $\varepsilon > 0$ olsun. Kronecker teoreminden T 'nin altgrubu $\{e^{in\theta} : n \in \mathbb{Z}\}$ yoğundur. Bu $\{e^{in\theta} : n \in \mathbb{Z} \text{ ve } |n| > k\}$ kümesinin de T 'de yoğun olmasını gerektirir. Böylece; $|e^{im\theta} - 1| < \varepsilon$ olacak şekilde $|m| > k$ 'yı sağlayan bir $m \in \mathbb{Z}$ vardır.

$|e^{im\theta} - 1| = |e^{im\theta}(1 - e^{-im\theta})| = |1 - e^{-im\theta}|$ olmasından $m \in \mathbb{N}$ (ve böylece $m > k$) olduğunu düşünebiliriz. Şimdi, eğer $n = m - k \in \mathbb{N}$ alırsak;

$$|e^{in\theta} - e^{-ik\theta}| = |e^{-ik\theta}(e^{im\theta} - 1)| = |e^{im\theta} - 1| < \varepsilon \text{ olur.}$$

Bu Kronecker teoremiyle birleştirilince $\{e^{in\theta} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin Γ 'de yoğun olduğu görülür.

Şimdi Q 'nın rasyonelliğinin T 'nin ideal indirgenemez operatör olmasını gerektirdiğini iddia ediyoruz. Bunu görmek için; $J \neq \{0\}$ olmak üzere $J, C(\Gamma)$ 'de T -değişmez kapalı ideal olsun.

$x(\gamma_0) \neq 0$ olacak şekilde $x \in J^+$ fonksiyonu ve bir $\gamma_0 \in \Gamma$ alalım. Şimdi $\gamma \in \Gamma$ keyfi bir nokta olsun. θ 'nın rasyonel aç olması, (•)'dan, $\{\gamma e^{in\theta} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi Γ 'de yoğundur. Her $n \in \mathbb{N}$ için (ve $\gamma_0 \in \{\gamma e^{in\theta} : n \in \mathbb{N}\}$) $T^n x \in J^+$ ve $T_x^n(\gamma) = x(\gamma e^{in\theta})$ olmasından, bir $n \in \mathbb{N}$ için $T^n x(\gamma) > 0$ olmalıdır. Bundan dolayı $\forall \gamma \in \Gamma$ için $Z_\gamma > 0$ olacak şekilde $Z_\gamma \in J^+$ fonksiyonu vardır. Özellikle $\forall \gamma \in \Gamma$ için γ 'nin V_γ komşuluğunu $\forall \eta \in V_\gamma$ için $Z_\gamma(\eta) > 0$ olacak şekilde bulabiliriz. Γ 'nin sonlu altkümesi $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ 'nin varlığını söyleyebiliriz. Şimdi $Z = \sum_{i=1}^k Z_{\gamma_i} \in J^+$ olsun ve her $\gamma \in \Gamma$ için $Z(\gamma) > 0$ olduğuna dikkat edelim. Bu, Z 'nin E 'nin sıralı birimi olmasını gerektirir ve sonuç olarak $J = E$ 'dir.

Şimdi Sonuç 2.37'den, $T^* \emptyset = \emptyset$ ve $\|\emptyset\| = \emptyset(1) = 1$ olacak şekilde bir $0 < \emptyset \in E^*$ vardır.

$C(\Gamma)$ aşıkâr olmayan sıralı sürekli lineer fonksiyoneller kabul etmez. Bu nedenle; $\emptyset$ sıralı sürekli değildir ve sonuç olarak E üzerindeki pozitif operatör $S = \emptyset \otimes 1$ de sıralı sürekli değildir. Ayrıca aşağıdaki iki özelliği dikkate alalım:

(i) T ve S operatörleri Markov operatörlerdir, Bu nedenle $r(T) = r(S) = 1$

(ii) $R \cap I = \{\lambda.1 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ olduğunda altuzaylar çifti $(\text{Ker } \emptyset, R \cap I)$, S operatörü için indirgeyen çifttir.

Son olarak; T ve S 'nin değişmeli olduğunu ispatlamalıyız. Gerçekten, $\forall x \in E$ için $T(Sx) = T(\emptyset(x)1) = \emptyset(x)1$ ve $S(Tx) = \emptyset(Tx)1 = [T^* \emptyset](x)1 = \emptyset(x)1$ 'dir.

Teorem 4.9 ve Teorem 4.2 nin benzerini latis hiperdeğişmez bandlar için verelim.

Teorem 5.2: Eğer Banach latis üzerinde $T : E \rightarrow E$ bir sıralı sürekli kompakt yarınilpotent pozitif operatör ise; o zaman T için bir aşikâr olmayan l-hiperdeğişmez B bandı vardır. Ayrıca, eğer $T^2 \neq 0$ ise B bandı $T(B) \neq \{0\}$ 'yı sağlayacak şekilde seçilebilir.

İspat: Eğer sıfır ideal $N = \{x \in E : T|x| = 0\}$ sıfırdan farklı ise N (Yardımcı teorem 3.1'den) bir aşikâr olmayan T -hiperdeğişmez bandtır. Burdan, $N_T = \{0\}$ olduğunu kabul edebiliriz ve bu nedenle T tam pozitiftir.

J_T , E 'de T 'nin görüntüsü tarafından üretilen kapalı ideali belirtsin. Yani; $J_T = \{x \in E : \exists y \geq 0 \text{ öyle ki } |x| \leq T_y\}^-$ 'dir. Yardımcı teorem 3.1'den; J_T , T için kapalı latis hiperdeğişmez idealdir. $T : J_T \rightarrow J_T$ operatörü tam pozitif ve yarınilpotent olduğundan Teorem 4.9'dan T , J_T üzerindeki operatör olarak, aşikâr olmayan kapalı l-hiperdeğişmez ideal $J \subseteq J_T$ vardır. J_T 'nin kendisinin l-hiperdeğişmez olmasından E 'nin ideali olarak düşündüğümüz J de l-hiperdeğişmezdir. Şimdi de; B , E 'de J ile üretilen band olsun. Yardımcı teorem 5.1'den T ile değişmeli her pozitif operatör sıralı sürekli. Bu, B 'nin T için bir l-hiperdeğişmez olmasını gerektirir. İspatı tamamlamak için; $B \neq E$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu görmek için, çelişki yoluyla $B = E$ olduğunu varsayalım. Böylece $\forall x > 0$ için $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ olacak şekilde J 'de $\{x_\alpha\}$ neti vardır. T 'nin sıralı sürekliliğinden $Tx_\alpha \uparrow Tx$ 'i elde ederiz, ve T 'nin kompaktlığından artan net $\{Tx_\alpha\}$ E 'de norm topolojiye göre yakınsaktır. Burdan; $\|Tx_\alpha - Tx\| \rightarrow 0$ elde edilir. J 'nin T -değişmez olmasından $\{Tx_\alpha\} \subseteq J$ 'dir ve bu nedenle $\forall x \in E$ için $Tx \in J$ 'dir. Bu $J = J_T$ olmasını gerektirir ki; bu durum $J \neq J_T$ kabulüyle çelişmektedir.

İkinci kısmı ispatlamak için; $T^2 \neq 0$ olduğunu farz edelim. Bu durumda N yine T 'nin sıfır ideali olmak üzere; $\hat{T} : E/N \rightarrow E/N$ operatörünün $\hat{T}[x] = [Tx]$ ile tanımlandığını düşünelim. T 'nin sıralı sürekli olmasından, N bir bandtır. $\hat{T} > 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten; eğer

$T^2x > 0$ olacak şekilde $x > 0$ alırsak, o zaman $Tx \notin N$ 'dir. Böylece, $\hat{T}[x] > 0$ olur. $\hat{T}$ yarınilpotent ve kompaktır. Ayrıca; $\hat{T}$ 'nin sıralı sürekli olduğunu da iddia ediyoruz.

Bunu görmek için; E/N 'de $[x_\alpha] \downarrow 0$ olsun. $\{x_\alpha^+\}$ netinin bütün sonlu infumumlarının neti ile $\{x_\alpha\}$ 'yı yerdeğiştirerek E 'de $0 \leq x_\alpha$ 'nın sağlandığını kabul edebiliriz. E 'nin Archimedean olmasından; $\forall \alpha$ ve $\forall \lambda$ için $0 \leq y\lambda \leq x_\alpha$ 'yı ve $x_{\alpha-y}\lambda \downarrow_{(\alpha,\lambda)} 0$ 'ı sağlayan E 'nin $\{y_\lambda\}$ neti vardır. $[x_\alpha] \downarrow 0$ olmasından $[y\lambda] \downarrow 0$ olduğunu görürüz. Yani; $\forall \lambda$ için, $Ty_\lambda = 0$ 'dır. O halde; $\{x_\alpha\}$ nin $\{x_\alpha - y_\lambda\}$ ile yerdeğiştirmesiyle geneli bozmaksızın E 'de $x_\alpha \downarrow 0$ olduğunu kabul edelim. T 'nin sıralı sürekliliğinden $Tx_\alpha \downarrow 0$ elde edilir. Böylece, bölüm dönüşümü $x \rightarrow [x]$ 'in sürekliliğinden $\hat{T}[x_\alpha] = [Tx_\alpha] \downarrow 0$ olduğunu elde ederiz (Teorem 2.28).

Böylece $\hat{T}$ sıralı süreklidir.

İspatın birinci kısmı ile E/N 'de aşıkak olmayan l-hiperdeğişmez $\hat{D}$ bandı vardır. $D = \{x \in E : [x] \in \hat{D}\}$ olsun. Sıralı sürekli bölüm dönüşümü $x \rightarrow [x]$ D 'nin aşıkak olmayan l-hiperdeğişmez band olmasını gerektirir. İspatı tamamlamak için; $T(D) \neq \{0\}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu görmek için, $0 < [x] \in \hat{D}$ 'yi sağlayan bir $0 < x \in \hat{D}$ alalım. $Tx > 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Aksi halde, $Tx = 0$, $x \in N$ olmasını gerektirecektir. Yani $[x] = 0$ olacaktır. Bu bir çelişkidir.

Önceki teoremi kullanarak, band indirgenemez pozitif operatörün komutantında bulunan her sıralı sürekli kompakt pozitif operatörün sıfırdan farklı bir spektral yarıçapının olduğunu göstereceğiz.

Sonuç 5.3: Band indirgenemez pozitif operatör ile değişmeli olan her sıralı sürekli kompakt pozitif operatör T , pozitif spektral yarıçapa sahiptir; yani $r(T) > 0$.

İspat: T operatörünün, band indirgenemez pozitif operatör S ile değişmeli olduğunu kabul edelim. Eğer $r(T) = 0$ ise, Teorem 5.2'den T operatörünün aşıkak olmayan l-hiperdeğişmez B bandı vardır. Özellikle, $S(B) \subseteq B$ olmalıdır ki, bu imkansızdır; yani $r(T) > 0$ 'dır.

Sonuç 5.4 (Schaefer – Grobler, 1986): Banach latis üzerinde her σ -sıralı sürekli band indirgenemez kompakt pozitif operatör, pozitif spektral yarıçapa sahiptir.

İspat: $T : E \rightarrow E$, σ -sıralı sürekli band indirgenemez kompakt pozitif operatör olsun. T tam pozitifdir (Örneği Teorem 3.3'ten sonra verdik).

Böylece (Yardımcı teorem 5.1'den) T aynı zamanda sıralı süreklidir. Sonuç 5.3'ten $r(T) > 0$ 'dır.

Sonuç 5.4'ün varsayımları; sadece T 'nin değil aynı zamanda T 'nin komutantındaki her pozitif operatörün de pozitif spektral yarıçapa sahip olduğudur.

Sonuç 5.5: T , σ -sıralı sürekli band indirgenemez kompakt pozitif operatör olsun. O zaman T 'nin komutantındaki her pozitif S operatörünün pozitif spektral yarıçapı vardır. Yani; $r(S) > 0$ 'dır.

İspat: $0 < S \in \{T\}'$ olsun. İlk önce ST 'nin σ -sıralı sürekli pozitif operatör olduğunu gözlemleyelim. Bunu görmek için; T tam pozitif olduğundan $ST = TS > 0$ 'dır. Şimdi; $x_n \downarrow 0$ olsun. $Tx_n \downarrow 0$ ve T 'nin kompaklılığından $\|Tx_n\| \downarrow 0$ 'ı elde ederiz. Yani; $0 \leq STx_n \downarrow$ ve $\|STx_n\| \downarrow 0$ 'dan ST 'nin σ -sıralı sürekli olduğu anlamına gelen $STx_n \downarrow 0$ 'ı elde ederiz. ST , T ile değişmeli olduğundan Yardımcı teorem 5.1'den ST 'nin aynı zamanda sıralı sürekli olmasını gerektirir.

Kompakt pozitif ST operatörü, band indirgenemez pozitif T operatörü ile değişmeli olduğundan Sonuç 5.3'ten $0 \leq r(ST) \leq r(S)r(T)$ olur. Sonuç olarak $r(S) > 0$ 'dır.

Bandlar için Teorem 4.10'un benzeri aşağıdadır:

Teorem 5.6: $Q, S : E \rightarrow E$ aşağıdaki özellikleri sağlayan iki pozitif operatör olsun.

- 1) Q , σ -sıralı sürekli ve genişleyendir.
- 2) S , kompakt baskın σ -sıralı sürekli pozitif operatörü baskınlaştırır, özellikle S 'nin kendisi σ -sıralı sürekli ve kompakt operatör tarafından baskınlaştırılırsa bu durum geçerlidir.

O zaman; $r(QS) > 0$ yani QS operatörünün spektral yarıçapı pozitifdir.

İspat: Bu ispat Teorem 4.10'un ispatının biraz değiştirilmiş halidir. $L \leq S$ ve $L \leq K$ 'yi sağlayan σ -sıralı sürekli $L > 0$ operatörü ve kompakt $K > 0$ operatörü alalım.

$C = QL$ operatörünü tanımlayalım. Eğer bir $x > 0$ için $C^3x > 0$ ise C^3x bir zayıf birimdir.

$(LQ)^3 = L(QL)(QL)Q$ kompakt tam pozitif operatördür. Yardımcı teorem 3.15'ten, Banach

latis E , sayılabilir sup özelliğe sahiptir ve böylece Q ve L operatörleri sıralı süreklidirler. Diğer taraftan $C^3 = Q(LQ)(LQ)L$ 'den ve L 'nin sıralı sürekliliğinden $C^3 > 0$ ve $C^6 > 0$ olduğu görülür. Teorem 4.10'un ispatında kullanılan tartışmalar vasıtasıyla Teorem 4.9 yerine Teorem 5.2 kullanılarak ispat tamamlanır.

Şimdi; E Dedekind tam Banach latis olsun. E 'deki bütün düzenli operatörlerin Dedekind tam Riesz uzayı $\mathcal{L}_r(E)$ ile gösterilir ve bütün soyut integral operatörlerin Riesz Uzayı $\mathcal{L}_r(E)$ 'de sonlu rank operatörleri $E_n^- \otimes E$ ile üretilen $(E_n^- \otimes E)^{dd}$ bandtır. Bu tanım, her pozitif soyut integral operatör S için rangı sonlu $K \in (E)$ ve $0 < L \leq S$ ve $L \leq K$ 'yı sağlayan $L \in L(E)$ pozitif operatörünün varolduğunu gösterir. Özellikle, K kompakt operatördür ve böylece S , kompakt baskın sıralı sürekli operatörü baskınlaştırır. Diğer bir ifadeyle, her pozitif operatör $S \in (E_n^- \otimes E)^{dd}$ Teorem 5.6 daki (2) şartını sağlar. Şimdi; aşağıdaki sonucu ispatlayıp formüle edebiliriz:

Teorem 5.7: E , Dedekind tam Banach latis olsun. Eğer bir σ -sıralı sürekli band indirgenemez $T : E \rightarrow E$ pozitif operatörü bir pozitif soyut integral operatör $S : E \rightarrow E$ ile değişmeli ise, $r(T) > 0$ ve $r(S) > 0$ 'dır.

İspat: Bir $\lambda > r(T)$ sabit alalım ve $Q = R(\lambda, T)T$ operatörünü düşünelim. Q , S ile değişmeli σ -sıralı süreklidir ve Sonuç 3.14'ten genişleyendir. Bundan dolayı Q ve S operatörleri Teorem 5.6'daki hipotezleri sağlar ve böylece $r(QS) > 0$ olur. Son olarak $r(QS) \leq r(R(\lambda, T))r(T)r(S)$ eşitsizliğini kullanarak $r(T) > 0$ ve $r(S) > 0$ 'ı elde ederiz.

Andô-Krieger teoreminin soyut formülü önceki teoremin bir özel durumudur.

Sonuç 5.8 (Andô-Krieger, 1957,1969): Eğer T Dedekind tam Banach latis üzerinde bir band indirgenemez soyut integral pozitif operatör ise; $r(T) > 0$ 'dır.

6. SONUÇ

Tezimizi tarihsel bir yorumla bitireceğiz. Andô-Kruger teoreminin bir çok sonucunu Bölüm 4 ve Bölüm 5'te görmüştük. Bu, Banach latislerdeki ideal ve band indirgenemez operatörlerin çalışılmasıyla başladı. İlk görevimiz σ -sıralı sürekli band indirgenemez operatörler için Sonuç 5.8'in bir benzerini kurmaktı. Hatırlandığı gibi; integral operatörler otomatik sıralı sürekli dir. (Sonuç 2.38) M.M. Schaefer (1986) operatörün kompakt olduğunu ve bir uzayın σ -sıralı sürekli dualinin ayrılabilir olduğunu ilk kabul edendi. Sonra J.J. Grobler (1986) son hipotezi değiştirdi, son sonuçlar Sonuç 5.4'te verildi.

İkinci sorgulama problemi her kompakt ideal indirgenemez pozitif operatörün tam pozitif spektral yarıçapının olup olmadığıydı. Bunu doğrulayan cevap B. de Pagter'in dikkate değer sonucu ile sağlandı (Sonuç 4.3).

Yukarıdaki neticelerde kompaktlık hipotezinin gerekli olduğunu gösteren örnek (Schaefer, M.M, 1970) ve ayrıca kompakt nilpotent (gerçekte rankı bir olan) band indirgenemez pozitif operatör ile ilgili örnek (Abramovich, Aliprantis, Burkinshaw, 1992) verilmiştir.

KAYNAKLAR

Abramovich, Y.A. ve Aliprantis C.D., (2002), "Irreducible Operators", An Invitation to Operator Theory, American Mathematical Society.

Abramovich, Y.A. ve Aliprantis C.D., (2002), "Problems in Operator Theory", American Mathematical Society.

Abramovich, Y.A., Aliprantis C.D. ve Burkishaw O., (1992), "On the spektral radius of positive operators, 211, Math. Z. 593-607.

Abramovich, Y.A., Aliprantis C.D. ve Burkishaw O., (1992), "Pozitive operators on Krein spaces", Acta Appl. Math. 27, 1-22.

Abramovich, Y.A., Aliprantis C.D. ve Burkishaw O., (1993), "Invariant subspaces of operators on L_p -spaces", J. Funct. Anal. 115, 418-424.

Aliprantis C.D. ve Burkishaw O., (1978), "Locally Solid Riezs Spaces", Academic Press, New York.

Aliprantis C.D ve Burkishaw O., (1980), "Positive compact operators on Banach lattices", Math.Z. 174, 289-298.

Aliprantis C.D. ve Burkishaw O., (1985), "Positive Operators", Academic Press, New York.

Ando T., (1957), "Positive operators in semi-ordered linear spaces", J.Fak.Sci.hokkaido Üniv, Ser.1,13 , 214-228.

Aronszojn N. ve Smith K.T., (1954), "Invariant subspace of completely continuous operators", Ann of Math, 345-350.

Gerhardt C., (2004), "Analysis 1", University of eidelberg, Germany, İnternational Pres.

Grobler J.J., (1986), "Band Irreducible Operators", Indag Math. 48, 405-409.

Krein M.G. ve Rutman M.A., (1948), "Lineer operators leaving invariant a cone in a Banach space", Uspekhi Mat. 3, 3-95.

Krieger H.J., (1969), "Beitrage zu Theorie positiver Operatoren", Schriftehreihe der İnstitute für Math. Reihe A, Heft 6, Akad-Verlag, Berlin.

Lomonosov V.I., (1973), "Invariantsubspace of the family of operators that commute with a completely continuous operator", Funktsional.Anal. i Prilozhen 7,3, 55-56.

Luxemburg W.A.J. ve Zaanen A.C., (1971), "Riezs Spaces I", North-Holland, Amsterdam.

Michaels A.J., (1997), "Hilden's simple proof of Lamonosov's invariant subspace theorem", Adv. in Math. 25, 56-58.

Meyer-Neiberg, P., (1991), "Banach Lattice", Springer, Verlag, 51.

Pagter, B. de, (1986), "Irreducible compact operators", Math Z. 192, 149-153.

Schaefer, M.M., (1970), "Topologische Nilpotenz irreduzibler Operatoren", Math.Z. 117, 135-140.

Schaefer, M.M., (1986), "On theorems of the Pagter and Andô-Krieger", Math.Z. 192, 155-157.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	19.05.1983	
Doğum Yeri	Üsküdar/İstanbul	
Lise	1997-2001	Kurtuluş Süper Lisesi
Lisans	2001-2006	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü