

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

GAMMA HALKALARI

Sultan YETİŞ

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	ii
KISALTMALAR LİSTESİ.....	iii
SİMGE LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT	vii
1. ÖN BİLGİLER	1
1.1 Temel Bilgiler.....	1
1.2 Halkalarda Asal İdeal	4
1.3 Değişmeli Halkalarda Asalımsı İdeal ve Ayrışımı	6
2. GAMMA HALKALAR	9
2.1 Tanım.....	9
2.2 Gamma Halkalarda İdeal	10
2.3 Gamma Halkalarda Homomorfizma.....	13
2.4 Gamma Halkalarda Asal İdeal ve Radikal.....	17
2.5 Gamma Halkalarda Asalımsı İdealler.....	22
2.6 Gamma Halkalarında Artan Zincir Koşulu.....	23
2.7 Gamma Halkalarda İdeallerin Asalımsı Ayrışımı	25
3. SONUÇ.....	29
KAYNAKLAR.....	30
ÖZGEÇMİŞ.....	31

KISALTMA LİSTESİ

$\text{Hom}(X, Y): X \rightarrow Y$ homomorfizma

$\text{Min}(I)$: I idealini kapsayan minimal asal idealler kümesi

$r(A)$: A idealinin radikali

$\text{Spec}(R)$: R halkasının asal ideallerinin kümesi

$V(I)$: I idealini kapsayan asal idealler kümesi

SİMGE LİSTESİ

$A = B$: A ve B kümeleri birbirine eşittir

$A \subseteq B$: A, B nin bir alt kümesidir

$A \subset B$: A, B nin kendisinden farklı bir alt kümesidir

$A \not\subseteq B$: A kümesi B kümesinde içerilmez.

$A \cap B$: A ve B kümelerinin kesişimi

$A \cup B$: A ve B kümelerinin birleşimi

$A \setminus B$: A kümesinin B kümesinden farkı

$\sqrt{A}$: A idealinin radikali

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{Z}$: Tam sayılar kümesi

ÖNSÖZ

Halkalar konusu matematikte Cebirin birçok dalıyla birlikte Sayılar Teorisi, Cebirsel Topoloji ve Fonksiyonel Analiz gibi alanlarla da alakalıdır.

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanan bu tezin amacı, halkalar konusunun temel teoremlerinin Γ -halkalar üzerinde incelenmesidir. Bu çalışmada değişmeli cebirde asal halkalar ve asalımsı ayrışım gibi önemli konuların Γ -halkalar üzerindeki durumu ele alınmıştır.

Bu çalışmanın hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Doç. Dr. Ünsal TEKİR, Yrd. Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT ve çalışma boyunca sorularımı sabırla cevaplayan Arş.Gör. Hakan Kürşat ORAL ve Arş. Gör. Ayşen ÖZKİRİŞÇİ hocam ile maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen eşim Nihat YETİŞ'e teşekkür ediyorum.

Sultan YETİŞ

ÖZET

Bu tezde, temel cebir konuları ve teoremleri Γ -halkaları (Gamma halkaları) üzerinde incelendi. Halkalar konusunun önemli yapıları olan ideal, asal ideal, asalımsı ideal ve homomorfizma yapılarının Γ -halkalar için tanımı verildi. Ayrıca, Γ -halkalar üzerinde asalımsı ayrışım ve artan zincir koşulu ile ilgili önerme ve teoremler ispatlandı.

ABSTRACT

In this thesis, the basic concepts and theorems for algebra are studied for Γ -rings (Gamma rings). Ideals, primes, primary ideals and homomorphism structures which are the important for the rings are studied for gamma rings.

A theorem and a lemma related the primary representation and ascending chain condition are also given.

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, Wilfred E. Barnes'in On The Γ -Rings Of Nobusawa, Neal H. McCoy'un Prime Ideals In General Rings ve Z. Warsi'nin On Decomposition Of Primary Ideals Of Γ -Rings adlı makalelerinin derlenmesiyle oluşan Γ -Halkalar isimli tezin anlaşılmasını kolaylaştırmak için gerekli olan bazı kavramlar verilecektir.

1.1 TEMEL BİLGİLER

Tanım 1.1.1: G boş olmayan bir küme ve $*$, G de bir ikili işlem olsun. $(G,*)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa G ye *grup* denir.

- (1) $*$, G de bir ikili işlemdir.
- (2) $*$ işleminin G de birleşme özelliği vardır. Her $a, b, c \in G$ için, $a * (b * c) = (a * b) * c$ dir.
- (3) $*$ işleminin, G de birim elemanı vardır. Her $a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir tane $e \in G$ vardır.
- (4) $*$ işlemine göre G deki her elemanın bir tersi vardır. $a \in G$ için, $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde bir tane $a^{-1} \in G$ vardır.

Tanım 1.1.2: $(G,*)$ bir grup ve her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ değişme özelliği de sağlanıyorsa gruba *değişmeli grup* denir. Değişmeli gruplarda işlem $+$ ise gruba *toplamsal grup* denir.

Tanım 1.1.3: G bir grup ve H , G de boş olmayan bir alt küme olsun. Eğer H , G deki işleme göre kendi başına bir grup ise H ye G nin bir *alt grubu* denir.

Önerme 1.1.4: G bir grup olmak üzere G nin boştan farklı olan H alt kümesinin alt grup olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in H$ için $ab \in H$ ve $a^{-1} \in H$ olmasıdır.

Önerme 1.1.5: Bir toplamsal grubun bir takım alt gruplarının ara kesiti de bir alt gruptur.

İspat: G bir grup ve $\{H_i\}, i \in I$ olmak üzere G nin bir takım alt grupları olsunlar. $H = \bigcap H_i$ nin bir alt grup olduğunu gösterelim. Her $i \in I$ için, $e \in \bigcap H_i = H$ olduğundan H boştan farklıdır. Her $a, b \in H$ ve her $i \in I$ için $a, b \in H_i$ ve H_i alt grup olduğundan $a + b \in H_i$ ve $a^{-1} \in H_i$ olur. Dolayısıyla $a + b \in \bigcap H_i = H$ ve $a^{-1} \in \bigcap H_i = H$ bulunur, böylelikle H bir alt gruptur.

Önerme 1.1.6: G bir toplamsal grup ve G nin iki alt grubu A ve B olmak üzere $A + B$ kümesi

de bir alt gruptur.

İspat: $e \in A$ ve $e \in B$ olduğundan $e + e = e \in A + B$ olduğundan $A + B$ boştan farklıdır. $a_1 + b_1, a_2 + b_2 \in A + B$ için $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 = a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \in A + B$ olur.

$a + b \in A + B$ için $-(a + b) = -a - b \in A + B$ dir. Dolayısıyla $A + B$ bir alt gruptur.

Tanım 1.1.7: G bir grup, A ve B iki alt kümesi olsunlar. $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$ kümesine A ile B kümelerinin çarpımı denir.

Örnek 1.1.8: G bir grup, A , G nin alt grubu ve S , G nin boştan farklı alt kümesi olmak üzere SA kümesi de G nin bir alt grubudur.

Tanım 1.1.9: $(G, \cdot)$ ve $(H, *)$ iki grup ve $f: G \rightarrow H$ bir fonksiyon olsun. Her $a, b \in G$ için $f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$ ise f ye G den H ye bir homomorfizma denir.

Örnek 1.1.10: X ve Y değişmeli gruplar,

$$M = \text{Hom}(X, Y) = \{f : f : X \rightarrow Y, f \text{ homomorfizma}\},$$

$$\Gamma = \text{Hom}(Y, X) = \{\alpha : \alpha : Y \rightarrow X, \text{homomorfizma}\}$$

ve M kümesinde toplama işlemini $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ şeklinde tanımlanmak üzere M ve Γ toplamsal değişmeli gruplardır.

M kümesinde toplama işlemini $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ şeklinde tanımlayalım.

- (1) Her $f, g \in M$ için $f + g \in M$ olduğunu yani $f + g$ nin bir homomorfizma olduğunu gösterelim. Her $x, y \in X$ için $(f + g)(x + y) = f(x + y) + g(x + y)$ olduğunu tanımdan söyleyebiliriz. Ayrıca f ve g homomorfizma olduklarından dolayı
- $$f(x + y) + g(x + y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y)$$
- ve toplama işlemi değişme özelliğine sahip olduğundan
- $$f(x) + f(y) + g(x) + g(y) = f(x) + g(x) + f(y) + g(y) \text{ olur. Buradan da}$$
- tanımdan $f(x) + g(x) + f(y) + g(y) = (f + g)(x) + (f + g)(y)$ bulunur. Dolayısıyla $f + g \in M$ dir.

- (2) Her $f, g, h \in M$ için birleşme özelliğini gösterelim. Her $x \in X$ için
- $$\begin{aligned} ((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) \\ &= f(x) + (g + h)(x) = (f + (g + h))(x) \end{aligned}$$
- olduğunu tanımdan söyleyebiliriz.

(3) Her $f \in M$ için birim eleman olduğunu gösterelim. Her $x \in X$ için

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(x)$ olacak şekilde $g(x) = 0$ dir. Yani $g, 0$ homomorfizmasıdır ve M nin elemanıdır.

(4) Her $f, g \in M$ için $f + g = 0$ olacak şekilde ters elemanın varlığını gösterelim. Her $x \in X$ için $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0$ eşitliğini sağlayan $g(x) = -f(x)$ yani $g = -f$ fonksiyonudur.

Aynı işlemlerle Γ nın da grup olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi de değişmeli olduklarını gösterelim.

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ denkleminde toplama işleminin değişme özelliğini kullanarak $f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$ olduğundan $f + g = g + f$ olduğunu kolaylıkla söyleyebiliriz.

Tanım 1.1.11: Boş kümeden farklı bir R kümesi üzerinde tanımlı ikili işlem $+$ ve $\cdot$ olsun. Bu durumda $R(+, \cdot)$ cebirsel yapısı her $a, b, c \in R$ için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa *halka* olarak adlandırılır.

(1) $(R, +)$ bir değişmeli gruptur.

(i) $a + b = b + a$

(ii) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(iii) Her $a \in R$ için $a + 0_R = a$ olacak şekilde bir $0 = 0_R \in R$ var,

(iv) Her $a \in R$ için $a + (-a) = 0$ olacak şekilde bir $(-a) \in R$ var.

(2) $\cdot$ işleminin R de birleşme özelliği vardır.

(3) $\cdot$ işleminin $+$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır.

$$a(b + c) = ab + ac \text{ ve } (a + b)c = ac + bc.$$

Tanım: R halkasında her $a, b \in R$ için $ab = ba$ olacak şekilde değişme özelliği varsa R ye *değişmeli halka* denir.

Tanım 1.1.12: R bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun. Eğer

(1) Her $a, b \in I$ için, $a - b \in I$ ve

(2) Her $a \in I$ ve her $r \in R$ için, $ra \in I$ ($ar \in I$) ise I ya R nin bir sağ(sol) ideali denir.

Önerme 1.1.13: I, R değişmeli halkasının bir ideali olsun.

$\sqrt{I} = \{r \in R : \text{bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } r^n \in I\}$ kümesi R halkasının I yı kapsayan bir idealidir. Bu

ideale I idealinin radikali denir.

1.2 Halkalarda Asal İdeal

Tanım 1.2.1: R değişmeli halka ve P , R nin bir ideali olmak üzere $a, b \in R$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P ye R nin bir *asal ideali* denir. R halkasının tüm asal ideallerinin kümesi $\text{spec}(R)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.2: R değişmeli halkasının, I idealini kapsayan tüm asal ideallerinin kümesini

$V(I) = \{P \in \text{Spec}(R) : I \subseteq P\}$ ile gösterelim.

Tanım 1.2.3: Değişmeli olmayan bir R halkası için P, R nin bir ideali ve $A, B \subseteq R$ olmak üzere $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyor ise P ye R nin bir *asal ideali* denir.

$a \in R$ olmak üzere, $(a) = RaR$, R de a ile üretilen kümedir.

Önerme 1.2.4: Değişmeli olmayan bir R halkası için $P \subsetneq R$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) P asaldır.
- (2) $a, b \in R$ için $(a)(b) \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ dir.
- (3) $a, b \in R$ için $aRb \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ dir.
- (4) i. $A, B \subseteq R$ sol idealleri için $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ dir.
ii. $A, B \subseteq R$ sağ idealleri için $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ dir.

İspat: P asal iken tanımdan $(a)(b) \subseteq P$ iken $(a) \subseteq P$ yani $a \in P$ veya $(b) \subseteq P$ yani $b \in P$ olduğu açıktır. (2) sağlanıyorken (3) ün sağlandığı aşıkardır. Şimdi (3) iken (4) olduğunu gösterelim. A, B sol idealler olmak üzere $AB \subseteq P$ iken $A \not\subseteq P$ olduğunu kabul edelim. $a \in A \setminus P$ seçelim. Herhangi $b \in B$ için $aRb \subseteq AB \subseteq P$ dir ve böylelikle (3) den dolayı $b \in P$ bulunur. Bu da $B \subseteq P$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde sağ ideal olduğu da gösterilebilir. (4) var iken (1) tanımdan sağlanır.

Örnek olarak R de bir M maksimal idealini alalım. Eğer A, B idealleri M de içerilmiyor ise o halde $M + A = R = M + B$ olur ve böylece $R = (M + A)(M + B) = M + AB$ dir yani $AB \not\subseteq M$ dir.

Değişmeli cebirde asal idealler çarpımsal kapalı kümeler ile ilişkilidir. Asal idealin tümleyenini çarpımsal kapalı bir kümedir. Boştan farklı S çarpımsal kümesi için, S den ayrık maksimal ideal her zaman asal idealdir. Bu özelliği herhangi bir halka için ele alalım.

Değişmeli olmayan halkalarda çarpımsal kapalı küme için bu durumu inceleyelim.

Tanım 1.2.5: Boştan farklı bir $S \subseteq R$ alalım. Eğer $a, b \in S$ iken $arb \in S$ olacak şekilde $r \in R$ mevcut ise S kümesi bir m -sistem olarak adlandırılır.

Örnek olarak boştan farklı çarpımsal kapalı olan S kümesini alalım. $S \subseteq R$ kapalı çarpımsal kümesinin özelliği $1 \in R$ ve her $s_1, s_2 \in S$ için $s_1 s_2 \in S$ olması idi. $a, b \in S$ iken $1 \in S \subseteq R$ için $a1b \in S$ olduğundan S kümesi bir m -sistemdir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Örneğin $a \in R$ için $S = \{a, a^2, a^4, a^8 \dots\}$ kümesi bir m -sistemdir fakat $aa^2 = a^3 \notin S$ olduğundan çarpımsal kapalı değildir.

Sonuç 1.2.6: $P \subseteq R$ nin bir asal ideal olması için gerek ve yeter koşul $R \setminus P$ nin bir m -sistem olmasıdır.

İspat: P asal olsun. $R \setminus P$ nin m -sistem olduğunu gösterelim. $a, b \notin P$ yani $a, b \in R \setminus P$ iken P nin asal olması tanımından $aRb \not\subseteq P$ dir. Buradan da $arb \in R \setminus P$ olacak şekilde $r \in R \setminus P$ olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla $a, b \in R \setminus P$ iken $arb \in R \setminus P$ olacak şekilde $r \in R \setminus P$ mevcut olduğundan $R \setminus P$ bir m -sistemdir.

Şimdi de $R \setminus P$ nin bir m -sistem olduğunu kabul edelim. O halde $a, b \notin P$ iken $arb \in R \setminus P$ olacak şekilde $r \in R$ mevcuttur. Buradan $aRb \not\subseteq P$ olduğu aşıkardır. Dolayısıyla P asaldır.

Tanım 1.2.7: R bir halka ve A bir ideali olsun. A idealini içeren P asal ideali için, eğer $A \subseteq P' \subseteq P$ olacak şekilde bir P' asal ideali mevcut değilse P ye A nın bir *minimal asal ideali* denir. A nın minimal asal ideallerinin kümesi $Min(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.8: R değişmeli ve birimli bir halka ve M, R nin kendinden farklı bir ideali olsun. R nin M yi kapsayan M ve R den başka hiçbir ideali yok ise, M ye R nin bir *maksimal ideali* denir.

Önerme 1.2.9: $S \subseteq R$ bir m -sistem ve P, S den ayrık ideallerin içinde maksimal olsun. O halde P asaldır.

İspat: $a \notin P, b \notin P$ fakat $(a)(b) \subseteq P$ olduğunu kabul edelim. P nin maksimal olması özelliğinden $s_1 \in P + (a), s_2 \in P + (b)$ olacak şekilde $s_1, s_2 \in S$ vardır. S m -sisteminden $r \in R$ olacak şekilde bir $s_1 r s_2$ alalım. Bu durumda $s_1 r s_2 \in (P + (a))R(P + (P + (b))) \subseteq P + (a)(b) \subseteq P$ buluruz. Yani $s_1 r s_2 \in P$ bulmuş

olduk ancak bu durum P nin S den ayrık olma kabulümüzle çeliştiğinden $(a)(b) \notin P$ dir. Böylelikle P asaldir.

Tanım 1.2.10: R halkasının bir A ideali için

$\sqrt{A} = \{s \in R: s \text{ yi } \text{i} \text{çeren her } m - \text{sistem } A \text{ ile kesişecek}\}$ kümesine A nın radikali denir.

$\sqrt{A} \subseteq \{s \in R: s^n \in A, \text{bazı } n \geq 1 \text{ için}\}$ dir.

R halkasının *değişmeli* olması durumunda $\subseteq$ bağıntısı yerine $\sqrt{A} = \{s \in R: s^n \in A, \text{bazı } n \geq 1 \text{ için}\}$ eşitliği vardır. $s^n \in A$ alalım. S de s yi içeren bir m -sistem olsun. Bu durumda m -sistem tanımından $s^n r \in S$ olan $r \in R$ mevcuttur. Burada $s^n r \in S$ ve $s^n r \in A$ olduğundan $S \cap A \neq \emptyset$ bulunur. Dolayısıyla $s \in \sqrt{A}$ bulunur. Bu eşitlikten şunu kolayca söyleyebiliriz ki halkamızın *değişmeli* olması durumunda $\sqrt{A}$ bir idealdir. Ancak genel durumda tanımdan $\sqrt{A}$ nın ideal olduğu açık değildir. Şimdi özellikle bu soruya cevap veren teoremi verelim.

Teorem 1.2.11: R bir halka ve $A \subseteq R$ de bir ideali olsun. A idealinin radikali, A yı kapsayan tüm asal ideallerin kesişimidir. $\sqrt{A}$, R de bir idealdir.

İspat: $\sqrt{A} = \cap P$, $A \subseteq P$ olduğunu gösterelim. $s \in \sqrt{A}$ ve P , A yı kapsayan bir asal ideal olsun. $R \setminus P$ m -sistemini ele alalım. Bu m -sistem s yi içeremez ve diğer taraftan A nın bir elemanı olduğundan P nin bir elemanıdır, $s \in P$ dir.

Diğer taraftan $s \notin \sqrt{A}$ olsun. Bu durumda tanımdan A dan ayrık olan ve s yi içeren bir S m -sistemi vardır. Zorn yardımcı teoreminden $P \supseteq A$ olacak şekilde A dan ayrık bir maksimal P ideali vardır. Önerme 1.2.8 den bu P ideali asaldir. Bu durumda $s \notin P$ bulunur. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

1.3 Değişmeli Halkalarda Asalımsı İdeal ve Ayrışımı

Tanım 1.3.1: R bir halka ve $Q \subset R$ bir ideali olsun. Eğer her $ab \in Q$ iken $a \in Q$ veya $b^n \in Q$ oluyorsa Q ya R nin bir *asalımsı ideali* denir.

Teorem 1.3.2: Q, R halkasının bir asalımsı ideali ise $P = \sqrt{Q}$ asal idealdir. Bu durumda Q ya *P -asalımsı ideal* denir. P, Q nun tek minimal asal idealidir.

İspat: $1 \notin Q$ olduğundan $1 \notin \sqrt{Q} = P$ dir. Böylece $P \neq R$ dir. $a, b \in R$ olmak üzere $ab \in Q$

fakat $a \notin \sqrt{Q}$ olsun. Bu durumda bir $n \in \mathbb{N}$ için $(ab)^n = a^n b^n \in Q$, fakat a nın hiçbir kuvveti Q da olmadığından, a^n nin de hiçbir kuvveti Q da değildir. Q asalımsı olduğundan $b^n \in Q$ yani $b \in \sqrt{Q}$ bulunur. Dolayısıyla $P = \sqrt{Q}$ asal idealdir. Her P^* asal ideali ve $Q \subseteq P^*$ için $P = \sqrt{Q} \subseteq \sqrt{P^*} = P^*$ olur. Böylece P, Q nun tek minimal asal idealidir.

Önerme 1.3.3: P, R halkasının bir asal ideali ve $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ ler P -asalımsı idealler olsunlar. Bu durumda $\bigcap_{i=1}^n Q_i$ de bir P -asalımsı idealdir.

İspat: $\sqrt{Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n} = \sqrt{Q_1} \cap \sqrt{Q_2} \cap \dots \cap \sqrt{Q_n} = P \subset R$ dir. Böylece $\bigcap_{i=1}^n Q_i \neq R$ dir. $a, b \in R$ olmak üzere $ab \in \bigcap_{i=1}^n Q_i$ ve $b \notin \bigcap_{i=1}^n Q_i$ olsun. Şu halde $b \notin Q_j$ olacak şekilde bir $1 \leq j \leq n$ vardır. Böylece $ab \in Q_j$ ve $b \notin Q_j$ olduğundan $a \in P = \sqrt{Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n}$ dir. $\bigcap_{i=1}^n Q_i$ de bir P -asalımsı ideal olur.

Tanım 1.3.4: I, R halkasının bir ideali ve her $i = 1, 2, \dots, n$ için, Q_i ler P_i -asalımsı idealler olmak üzere,

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$$

şeklinde yazılabiliyorsa bu yazılışa I nın bir *asalımsı ayrışımı* ve I idealine de *ayrışabilir ideal* denir. Ayrıca $P_1, P_2, \dots, P_n$ ler R nin farklı idealleri ve her $j = 1, 2, \dots, n$ için $I \neq \bigcap_{i \neq j}^n Q_i$ şartı var ise ayrışımaya *minimal asalımsı ayrışım* denir.

Önerme 1.3.5: R bir halka ve I bir ideali olsun. Bu idealin bir asalımsı ayrışımı var ise, bir minimal asalımsı ayrışımı da vardır.

İspat: Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\sqrt{Q_i} = P_i$ olmak üzere, I idealinin bir asalımsı ayrışımı $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ olsun. Önerme 1.3.3 e göre, ayrışımada radikalleri aynı olan asalımsı ideallerin ara kesitleri de aynı radikalli asalımsı ideal olduğundan, bir ayrışım verildiğinde, ayrışımadaki asalımsı ideallerin radikallerini farklı yapabiliriz. Ayrıca bir $j = 1, 2, \dots, n$ için, $\bigcap_{i \neq j}^n Q_i \subseteq Q_j$ ise $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ ayrışımında Q_j asalımsı idealini atabiliriz. Bu şekilde devam ederek, verilen bir asalımsı ayrışımından, bir minimal asalımsı ayrışım elde edilmiş olur.

Tanım 1.3.6: I, R halkasının ayrışabilir bir ideali ve I idealinin bir minimal asalımsı ayrışımı, $\sqrt{Q_i} = P_i (i = 1, 2, \dots, n)$ olmak üzere, $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ olsun. n elemanlı $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ kümesine, I ya ilişkin *asal idealler* kümesi denir ve $A(I) = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ ile gösterilir.

Önerme 1.3.7: I, R halkasının ayrışabilir ideali ve $P \in \text{spec}(R)$ olsun. $P \in \text{Min}(I)$ olması için gerek ve yeter koşul P nin $A(I)$ da minimal eleman olmasıdır.

İspat: I nın minimal asalımsı ayrışımı

$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$, $\sqrt{Q_i} = P_i$ ($i=1,2,\dots,n$) olsun. Ayrıca $I \subseteq P$ olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{P} = P$ olmasıdır.

$\sqrt{I} = \bigcap_{i=1}^n \sqrt{Q_i} = \bigcap_{i=1}^n P_i$ dir. Böylece $I \subseteq P$ olması, $1 \leq j \leq n$ için, $P_j \subseteq P$ olmasına denktir. Bu da bir ilgili asal ideal $P^* \in A(I)$ için, $P^* \subseteq P$ demektir.

P, I nın bir minimal asal ideali olsun. Yukarıdaki açıklamalardan bir $P^* \in A(I)$ için, $P^* \subseteq P$ ve P minimal asal olduğundan, $P = P^* \in A(I)$ bulunur. Fakat $A(I) \subseteq V(I)$ olduğundan, P nin $A(I)$ nın da minimal elemanı olduğu anlaşılır.

Diğer taraftan $P, A(I)$ nın bir minimal elemanı olsun. Şu halde $I \subseteq P$ ve sonuç $P' \subseteq P$ olacak şekilde I nın bir minimal asal P' ideali bulunabilir. Yukarıdaki açıklamalardan $P^* \subseteq P'$ olacak şekilde bir $P' \in A(I)$ vardır. Şu halde $P^* \subseteq P' \subseteq P$ ve $P, A(I)$ nın bir minimal elemanı olduğundan, $P^* = P' = P$, yani $P = P' \in \text{Min}(I)$ elde edilir.

2. GAMMA HALKALAR

2.1 Gamma Halka Tanımı

Tanım 2.1.1: $M=\{a, b, c \dots\}$ ve $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma \dots\}$ toplamsal değişmeli gruplar olmak üzere her $a, b, c \in M$ ve her $\alpha, \beta \in \Gamma$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan M ye Γ – halka denir.

- (1) $a\alpha b \in M$
- (2) $(a + b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$, $a\alpha(b + c) = a\alpha b + a\alpha c$, $a(\alpha + \beta)c = a\alpha c + a\beta c$
- (3) $(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c)$.

Ayrıca bu koşullar aşağıdaki şekilde güçlendirilirse Nobusawa'nın Γ -halkasını elde ederiz.

- (1) $a\alpha b \in M, \alpha a\beta \in \Gamma$
- (2) Yukarıdaki 2 ile aynı
- (3) $(a\alpha b)\beta c = a(\alpha b\beta)c = a\alpha(b\beta c)$
- (4) Her $a, b \in M$ için $a\alpha b = 0$ ise $\alpha = 0$.

Bundan sonraki bölümde aksi belirtilmedikçe M bir Γ –halka belirtecektir.

Örnek 2.1.2: X ve Y değişmeli gruplar olmak üzere, $M = \text{Hom}(X, Y)$, $\Gamma = \text{Hom}(Y, X)$ ve $a\alpha b$ bileşke işlemi olarak Γ -halkaya bir örnektir.

$$M = \text{Hom}(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y : f \text{ homomorfizma}\}$$

$$\Gamma = \text{Hom}(Y, X) = \{\alpha: Y \rightarrow X : \alpha \text{ homomorfizma}\}$$

M kümesinde toplama işlemi $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ şeklinde tanımlı olmak üzere M ve Γ kümelerinin toplamsal değişmeli gruplar olduğu bölüm 1 de gösterilmişti. M nin bir Γ -halka olduğunu gösterelim.

- (1) Her $f, g, h \in M$ ve her $\alpha \in \Gamma$ için $f\alpha g \in M$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \text{Her } x, y \in X \text{ için } f\alpha g(x + y) &= f\alpha(g(x) + g(y)) = f(\alpha(g(x)) + \alpha(g(y))) \\ &= f(\alpha(g(x))) + f(\alpha(g(y))) = f\alpha g(x) + f\alpha g(y). \end{aligned}$$

Yani $f\alpha g$ bir homomorfizma olup M nin elemanıdır.

- (2) Her $f, g, h \in M$, her $\alpha, \beta \in \Gamma$ ve her $x \in X$ için

$$(2.1) (f + g)\alpha h = f\alpha h + g\alpha h \text{ olduğunu gösterelim.}$$

$$\begin{aligned}
((f + g)\alpha h)(x) &= ((f + g)\alpha)(h(x)) = (f + g)(\alpha(h(x))) \\
&= f(\alpha(h(x))) + g(\alpha(h(x))) = f\alpha h(x) + g\alpha h(x).
\end{aligned}$$

(2.2) $f\alpha(g + h) = f\alpha g + f\alpha h$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
(f\alpha(g + h))(x) &= f\alpha((g + h)(x)) = f\alpha(g(x) + h(x)) \\
&= f(\alpha(g(x))) + f(\alpha(h(x))) = f\alpha g(x) + f\alpha h(x).
\end{aligned}$$

(2.3) $f(\alpha + \beta)h = f\alpha h + f\beta h$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
(f(\alpha + \beta)h)(x) &= (f(\alpha + \beta))(h(x)) = f((\alpha + \beta)h(x)) \\
&= f(\alpha(h(x)) + \beta(h(x))) = f(\alpha(h(x))) + f(\beta(h(x))) \\
&= f\alpha h(x) + f\beta h(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) ((f\alpha g)\beta h)(x) &= (f\alpha g)\beta(h(x)) = f\alpha g(\beta(h(x))) \\
&= f\alpha(g(\beta(h(x)))) = (f\alpha(g\beta h))(x)
\end{aligned}$$

olduğundan $(f\alpha g)\beta h = f\alpha h + f\beta h$ buluruz.

2.2 Gamma Halkalarda İdeal

Tanım 2.2.1: M Γ -halkasının aşağıdaki şartları sağlayan A alt kümesine bir sağ ideal denir.

i: A, M nin toplamsal alt grubu

ii: $A\Gamma M = \{a\alpha c : a \in A, \alpha \in \Gamma, c \in M\} \subset A$.

$M\Gamma A \subset A$ ise sol ideal denir. A hem sağ hem sol ideal ise ideal adını alır.

Tanım 2.2.2: $a \in M$ olmak üzere, a ile üretilen esas ideal a yı içeren tüm ideallerin arakesitidir ve (a) ile gösterilir.

Bu küme, $n \in \mathbb{Z}, x, y, z, u \in M$ ve $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma$ olmak üzere $na + x\alpha a + a\beta y + u\gamma a\beta v$ formundaki sonlu toplam elemanlarının oluşturduğu kümedir.

Önerme 2.2.3: Eğer A ve B, M nin iki sağ(sol) ideali ise

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

kümesi de M nin bir sağ(sol) idealidir ve A ile B nin toplamı olarak adlandırılır.

İspat: $A + B$ kümesinin M Γ -halkasının bir sağ(sol) ideali olduğunu gösterelim.

i: $A + B$ nin toplamsal alt grup olduğu Bölüm 1 de gösterildi.

ii: $(A + B)\Gamma M = \{(a + b)\alpha c : a + b \in A + B, \alpha \in \Gamma, c \in M\} \subset A + B$ olduğunu gösterelim.

$x \in (A + B) \Gamma M$ olsun.

$x = (a + b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c \in A + B$ ve her $x \in (A + B)\Gamma M$ iken $x \in A + B$ olduğundan $(A + B)\Gamma M \subset A + B$ olur ve bir sağ idealdir.

Sol ideal olduğu da benzer yolla gösterilir.

Önerme 2.2.4: M nin herhangi sayıdaki sağ(sol) ideallerinin ara kesiti de bir sağ(sol) idealdir.

İspat: A_i ler M nin sağ(sol) idealleri olmak üzere $A = \bigcap A_i$ olsun.

i: A nin M nin toplamsal alt grubu olduğu Bölüm 1 de gösterilmişti.

ii: $A\Gamma M, A$ nin alt kümesidir.

$$A\Gamma M = \{a\alpha m : a \in \bigcap A_i, \alpha \in \Gamma, m \in M\}$$

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $a\alpha m \in A_1$ ve $a\alpha m \in A_2$ ve ... ve $a\alpha m \in A_n$ olduğundan $a\alpha m \in \bigcap A_i = A$, dolayısıyla $A\Gamma M \subset A$ elde edilir.

Önerme 2.2.5: A, M nin bir sağ ideali ve S de boştan farklı bir alt kümesi iken SA kümesi S ile A nin çarpımı olarak adlandırılır ve bu küme

$$SA = \{\sum_{i=1}^n s_i \alpha_i a_i : s_i \in S, \alpha_i \in \Gamma, a_i \in A, n \in \mathbb{Z}^+\}$$
 şeklinde olup M nin bir alt grubudur.

İspat: SA, M nin alt grubudur:

$$\sum_{i=1}^n s_i \alpha_i a_i, \sum_{i=1}^m t_i \beta_i b_i \in SA \text{ olsun.}$$

$$\sum_{i=1}^n s_i \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^m t_i \beta_i b_i = \sum_{i=1}^n s_i \alpha_i a_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} r_i \gamma_i c_i = \sum_{i=1}^{n+m} p_i \delta_i d_i \in SA \text{ elde edilir.}$$

Burada $r_{n+k} = t_k$, $\gamma_{n+k} = \beta_k$ ve $c_{n+k} = b_k$ dir. $0 < i \leq n$ için $p_i = s_i$, $\delta_i = \alpha_i$, $d_i = a_i$; $n < i \leq m$ için $p_i = r_i$, $\delta_i = \gamma_i$, $d_i = c_i$ dir. Ayrıca $\sum_{i=1}^n s_i \alpha_i a_i \in SA$ iken $-(\sum_{i=1}^n s_i \alpha_i a_i) \in SA$ olduğundan alt gruptur.

Önerme 2.2.6: A, M nin bir sağ ideali ; B, M nin bir sol ideali ve S de boştan farklı bir alt kümesi olsun. $SA = \{\sum_{i=1}^n s_i \alpha_i a_i : s_i \in S, \alpha_i \in \Gamma, a_i \in A, n \in \mathbb{Z}^+\}$ kümesi M nin bir sağ ideali, BS bir sol ideali ve BA da bir idealidir.

İspat:

i: SA nın bir sağ ideal olduğunu gösterelim.

SA, M nin bir alt grubudur. Bu nedenle $SA\Gamma M \subset SA$ olduğunu göstermemiz SA nın sağ ideal olduğunu göstermemiz için yeterli olacaktır.

$SA\Gamma M = \{(\sum_1^n s_i \alpha_i a_i) \beta m : \sum_1^n s_i \alpha_i a_i \in SA, \beta \in \Gamma, m \in M, n \in \mathbb{Z}^+\}$. Her $x \in SA\Gamma M$ için $x = (\sum_1^n s_i \alpha_i a_i) \beta m = \sum_1^n s_i \alpha_i (a_i \beta m)$ ve burada A ideal olduğundan $a_i \beta m \in A$ olur ve dolayısıyla $\sum_1^n s_i \alpha_i (a_i \beta m) \in SA$ bulunur. Yani $SA\Gamma M \subset SA$ dır.

ii: BS nin sol ideal olduğunu gösterelim.

BS, M nin bir alt grubudur. Yukarıdaki örnekte olduğu gibi BS nin sol ideal olduğunu göstermek için $M\Gamma BS \subset BS$ olduğunu gösterelim.

Her $x \in M\Gamma BS$ için $x = m\beta(\sum_1^n b_i \alpha_i s_i) = \sum_1^n (m\beta b_i) \alpha_i s_i$ ve burada B ideal olduğundan $m\beta b_i \in B$ olur ve $\sum_1^n (m\beta b_i) \alpha_i s_i \in BS$ bulunur. Yani $M\Gamma BS \subset BS$ dir.

iii: BA nın hem sağ hem de sol ideal olduğunu gösterelim.

BA, M nin bir alt grubudur. BA nın ideal olduğunu göstermek için $BA\Gamma M \subset BA$ ve $M\Gamma BA \subset BA$ olduğunu gösterelim.

$$BA\Gamma M = \{(\sum_1^n b_i \alpha_i a_i) \beta m : \sum_1^n b_i \alpha_i a_i \in BA, \beta \in \Gamma, m \in M, n \in \mathbb{Z}^+\},$$

Her $x \in BA\Gamma M$ için $x = (\sum_1^n b_i \alpha_i a_i) \beta m = \sum_1^n b_i \alpha_i (a_i \beta m) \in BA$ olduğundan $BA\Gamma M \subset BA$ dır.

$$M\Gamma BA = \{m\beta(\sum_1^n b_i \alpha_i a_i) : \sum_1^n b_i \alpha_i a_i \in BA, \beta \in \Gamma, m \in M, n \in \mathbb{Z}^+\}$$

Her $x \in M\Gamma BA$ için $x = m\beta(\sum_1^n b_i \alpha_i a_i) = \sum_1^n (m\beta b_i) \alpha_i a_i \in BA$ olduğundan $M\Gamma BA \subset BA$ olur.

Dolayısıyla BA, M nin bir idealidir.

Önerme 2.2.7: A, M nin bir ideali olsun. O halde $M/A = \{x + A : x \in M\}$ koseti de $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$ ve $(x + A)\alpha(y + A) = x\alpha y + A$ işlemleri altında bir Γ -halkadır.

İspat:

$$(1) \quad (x + A)\alpha(y + A) = x\alpha y + A \in M/A.$$

(2)

$$(2.1) \quad ((x + A) + (y + A))\alpha(z + A) = ((x + y) + A)\alpha(z + A)$$

$$\begin{aligned}
&= (x + y)\alpha z + A = (x\alpha z + y\alpha z) + A = (x\alpha z + A) + (y\alpha z + A) \\
&= (x + A)\alpha(z + A) + (y + A)\alpha(z + A).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.2) \quad &(x + A)\alpha((y + A) + (z + A)) = (x + A)\alpha((y + z) + A) \\
&= x\alpha(y + z) + A = (x\alpha y + x\alpha z) + A = (x\alpha y + A) + (x\alpha z + A) \\
&= (x + A)\alpha(y + A) + (x + A)\alpha(z + A).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.3) \quad &(x + A)(\alpha + \beta)(y + A) = x(\alpha + \beta)y + A = (x\alpha y + x\beta y) + A \\
&= (x\alpha y + A) + (x\beta y + A) = ((x + A)\alpha(y + A)) + ((x + A)\beta(y + A)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad &((x + A)\alpha(y + A))\beta(z + A) = (x\alpha y + A)\beta(z + A) = x\alpha y\beta z + A \\
&= (x + A)\alpha(y\beta z + A) = (x + A)\alpha((y + A)\beta(z + A)).
\end{aligned}$$

2.3 Gamma Halkalarda Homomorfizma

Tanım 2.3.1: M ve N Γ -halkalar ve $\theta: M \rightarrow N$ olmak üzere her x, y ve α için $\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$ ve $\theta(x\alpha y) = \theta(x)\alpha\theta(y)$ şartını sağlayan θ ya Γ -homomorfizma denir.

Önerme 2.3.2: $\theta: M \rightarrow N$ Γ -homomorfizma olmak üzere

$\text{Çek}\theta = 0\theta^{-1} = \{x \in M : \theta(x) = 0\}$ kümesi de bir idealdir. Gösterelim:

İspat:

i) $\text{Çek}\theta$, M nin bir alt grubudur:

$x, y \in \text{Çek}\theta$ olsun. O halde $\theta(x) = 0$ ve $\theta(y) = 0$ dır.

$\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y) = 0 + 0 = 0$ olduğundan $x + y \in \text{Çek}\theta$ bulunur.

$x \in \text{Çek}\theta$ olsun. $\theta(x) = 0$, $\theta(-x) = -\theta(x) = 0$ dolayısıyla $-x \in \text{Çek}\theta$ dır.

ii) $\theta^{-1}(0)\Gamma M \subset \theta^{-1}(0)$ olduğunu gösterelim.

$$\theta^{-1}(0)\Gamma M = \{a\alpha m \mid a \in \theta^{-1}(0), \alpha \in \Gamma, m \in M\}$$

$a \in \text{Çek}\theta = \theta^{-1}(0)$ olmak üzere $a\alpha m \in \text{Çek}\theta$ yani $\theta(a\alpha m) = 0$ mıdır?

$$\theta(a\alpha m) = \theta(a)\alpha\theta(m) = 0 \text{ bulunur.}$$

Önerme 2.3.3 Daha genel olarak,

(1) B, N nin (sağ) ideali olmak üzere $\theta^{-1}(B) = \{x \in M \mid \theta(x) \in B\}$ M nin (sağ) idealidir.

(2) $\theta: M \rightarrow N$ örten homomorfizma iken, A, M nin sağ ideali olmak üzere $\theta(A) = \{\theta(a): a \in A\}$ N nin bir sağ idealidir. Gösterelim:

İspat:

(1) i) $\theta^{-1}(B)$ alt gruptur:

$x_1, x_2 \in \theta^{-1}(B)$ olsun. $x_1 + x_2 \in \theta^{-1}(B)$ olduğunu gösterelim.

$\theta(x_1 + x_2) = \theta(x_1) + \theta(x_2) \in B$ olduğundan $x_1 + x_2 \in \theta^{-1}(B)$ olur.

$x \in \theta^{-1}(B)$ olsun. $-x \in \theta^{-1}(B)$ olduğunu gösterelim.

$\theta(-x) = -\theta(x) \in B, -x \in \theta^{-1}(B)$

ii) $\theta^{-1}(B)\Gamma M \subset \theta^{-1}(B)$ olduğunu gösterelim.

$\theta^{-1}(B)\Gamma M = \{a\alpha b | a \in \theta^{-1}(B), \alpha \in \Gamma, b \in M\}$

$a \in \theta^{-1}(B)$ için $\theta(a\alpha b) \in B$ midir?

$\theta(a\alpha b) = \theta(a)\alpha\theta(b) \in B$, $\theta(a) \in B$, $\theta(b) \in N$ olduğundan $\theta^{-1}(B)$ sağ idealdir.

(2) i) $\theta(A)$ alt gruptur:

$a, b \in \theta(A)$ olsun. $a = \theta(x)$ ve $b = \theta(y)$ olacak şekilde bazı $x, y \in A$ vardır.

$a + b = \theta(x) + \theta(y) = \theta(x + y) \in \theta(A)$ dır.

$a \in \theta(A)$ olsun. $a = \theta(x)$ olacak şekilde bazı $x \in A$ vardır.

$-a = -\theta(x) = \theta(-x) \in \theta(A)$ dır.

ii) $\theta(A)\Gamma N \subset \theta(A)$ olduğunu gösterelim.

$\theta(A)\Gamma N = \{a\alpha b | a \in \theta(A), \alpha \in \Gamma, b \in N\}$

$a \in \theta(A)$ iken $a = \theta(x)$ olacak şekilde bazı $x \in A$ vardır. θ örten Γ -homomorfizma olduğundan her $b \in N$ için $\theta(c) = b$ olacak şekilde bazı $c \in M$ vardır.

$a\alpha b = \theta(x)\alpha\theta(c) = \theta(x\alpha c) \in \theta(A)$

Teorem 2.3.4: A, M Γ -halkasının bir ideali ve $\theta: M \rightarrow M/A$ örten doğal tasvir olsun. Bu takdirde $A = \text{Çek}\theta$ olmak üzere θ bir örten Γ -homomorfizmadır. Tersine, eğer θ , M ve N Γ -halkalar olmak üzere bunlar arasında bir örten Γ -homomorfizma ise, $A = \text{Çek}\theta$ olmak üzere, $M/A \cong N$ dır.

İspat: 1) $\theta: M \rightarrow M/A$ olarak tanımlayalım.

$$x \rightarrow x + A$$

θ iyi tanımlıdır: $x_1 = x_2$ alalım. O halde $x_1 - x_2 = 0 \in \text{Çek}\theta = A$ olduğundan $x_1 - x_2 \in A$, $x_1 + A = x_2 + A$ dır. Buradan da $\theta(x_1) = \theta(x_2)$ bulunur.

θ homomorfizmadır: $\theta(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) + A = (x_1 + A) + (x_2 + A) = \theta(x_1) + \theta(x_2)$

$$\theta(x_1 \alpha x_2) = x_1 \alpha x_2 + A = (x_1 + A) \alpha (x_2 + A) = \theta(x_1) \alpha \theta(x_2)$$

θ örtendir: Her $x + A \in M/A$ için $\theta(x) = x + A$ olacak şekilde bazı $x \in M$ vardır.

2) $\theta: M \rightarrow N$ bir örten Γ - homomorfizma ve $A = \text{Çek}\theta$ olsun.

$f: M/A \rightarrow N$ olarak tanımlayalım.

$$f(x + A) \rightarrow \theta(x)$$

f iyi tanımlıdır: $x_1 + A = x_2 + A$ alalım. Burada $x_1 - x_2 \in A$ olur, $A = \text{Çek}\theta$ olduğundan $\theta(x_1 - x_2) = 0$, yani $\theta(x_1) = \theta(x_2)$ dır. Dolayısıyla $f(x_1 + A) = f(x_2 + A)$ bulunur.

f homomorfizmadır: $f((x_1 + A) + (x_2 + A)) = f((x_1 + x_2) + A)$

$$= \theta(x_1 + x_2) = \theta(x_1) + \theta(x_2) = f(x_1 + A) + f(x_2 + A)$$

$$f((x_1 + A) \alpha (x_2 + A)) = f(x_1 \alpha x_2 + A)$$

$$= \theta(x_1 \alpha x_2) = \theta(x_1) \alpha \theta(x_2) = f(x_1 + A) \alpha f(x_2 + A)$$

f örtendir: $n \in N$ alalım. θ örten olduğundan $\theta(x) = n$ olacak şekilde bazı $x \in M$ ve her $\theta(x) \in N$ için $f(x + A) = \theta(x)$ olacak şekilde bazı $x + A \in M/A$ vardır.

f birebirdir: $\text{Çek } f = \{x + A | f(x + A) = 0_N\} = \{x + A | \theta(x) = 0_N\}$

$$= \{x + A | x \in \text{Çek}\theta = A\} = 0 + A = 0_{M/A}$$

Dolayısıyla f bir Γ - izomorfizmadır.

Teorem 2.3.5: M ve N Γ -halkalar, $A = \text{Çek}\theta$ olmak üzere $\theta: M \rightarrow N$ örten Γ -homomorfizma olsun. B, M Γ -halkasının A yı kapsayan ideali olmak üzere $(M/A)/(B/A) \cong M/B$.

İspat: $h: (M/A) \rightarrow (M/B)$

$x + A \rightarrow x + B$ olarak tanımlayalım.

h iyi tanımlıdır: $x_1 + A = x_2 + A, x_1 - x_2 \in A \subset B$ olduğundan $x_1 - x_2 \in B$ bulunur ve B alt grup olduğundan $x_1 + B = x_2 + B, h(x_1 + A) = h(x_2 + A)$.

h homomorfizmadır: $h((x_1 + A) + (x_2 + A)) = h((x_1 + x_2) + A) = (x_1 + x_2) + B$

$$= (x_1 + B) + (x_2 + B) = h(x_1 + A) + h(x_2 + A)$$

$$h((x_1 + A)\alpha(x_2 + A)) = h(x_1\alpha x_2 + A) = x_1\alpha x_2 + B$$

$$= (x_1 + B)\alpha(x_2 + B) = (h(x_1 + A))\alpha(h(x_2 + A)).$$

h örtendir: Her $x + B \in M/B$ için $h(x + A) = x + B$ olacak şekilde bazı $x + A \in M/A$ vardır.

Şimdi de Çek h ı bulalım. $\text{Çek } h = \{x + A : h(x + A) = 0_{M/B} = B\}$

$$= \{x + A : x + B = B\} = \{x + A : x \in B\} = B/A \text{ bulunur.}$$

h örten bir homomorfizma ve $\text{Çek } h = B/A$ olduğundan teorem 2.3.4 den $(M/A)/(B/A) \cong M/B$ bulunur.

Teorem 2.3.6 : A ve B, M Γ -halkasının idealleri ve $\theta: M \rightarrow M/B$ Γ -homomorfizma olsun. O halde $(A + B)/B \cong A/A \cap B$. Ayrıca $A + B = (A\theta)\theta^{-1}$ dir.

İspat: $g: A \rightarrow (A + B)/B$

$a \rightarrow a + B$ olarak tanımlayalım.

g iyi tanımlıdır: $a_1 = a_2, a_1 - a_2 = 0 \in B, a_1 + B = a_2 + B$ ve dolayısıyla $g(a_1) = g(a_2)$ dir.

g homomorfizmadır: $g(a_1 + a_2) = (a_1 + a_2) + B = (a_1 + B) + (a_2 + B) = g(a_1) + g(a_2)$

$$g(a_1\alpha a_2) = a_1\alpha a_2 + B = (a_1 + B)\alpha(a_2 + B) = g(a_1)\alpha g(a_2)$$

g örtendir: Her $a + B \in (A + B)/B$ için $g(a) = a + B$ olacak şekilde bazı $a \in A$ bulunabilir.

Çek g yi bulalım.

$$\text{Çek } g = \{a \in A : g(a) = B\} = \{a \in A : a + B = B\} = \{a \in A : a \in B\} = A \cap B$$

Teorem 2.3.4 den $(A + B)/B \cong A/A \cap B$ bulunur.

$A + B = (A\theta)\theta^{-1}$ olduğunu gösterelim.

$x \in A + B$ alalım. $x = a + b$ olacak şekilde bazı $a \in A, b \in B$ vardır. $\theta(x) = \theta(a + b) = a + b + B = a + B \in \theta(A)$ olduğundan $A + B \subset \theta^{-1}(\theta(A))$ bulunur.

$x \in \theta^{-1}(\theta(A))$ alalım. $\theta(x) \in \theta(A)$ ve $x + B \in \theta(A)$ dolayısı ile $x + B = a + B$ olacak şekilde bazı $a \in A$ vardır. $x + B = a + B$, buradan $x - a \in B$ dir. O halde $x - a = b$ olacak şekilde bazı $b \in B$ vardır. $x = a + b \in A + B$ olduğundan $\theta^{-1}(\theta(A)) \subset A + B$ bulunur.

2.4 Gamma Halkalarda Asal İdeal ve Radikal

Tanım 2.4.1: M Γ -halkasının bir P ideali eğer her A ve B idealleri için $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ şartını sağlıyorsa *asal ideal* olarak adlandırılır.

Teorem 2.4.2: M nin bir P idealinin asal ideal olması için gerek ve yeter koşul $(a)(b) \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ olmasıdır.

İspat: P asal olsun. Asal olmasından dolayı

$(a)(b) \subseteq P$ iken $(a) \subseteq P$ veya $(b) \subseteq P$, buradan $a \in P$ veya $b \in P$ bulunur.

Diğer taraftan $(a)(b) \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ alalım ve P nin asal olduğunu gösterelim. M nin herhangi iki ideali $AB \subseteq P$ iken $A \not\subseteq P$ şartını sağlayan A ve B olsun. $A \not\subseteq P$ ise $a \notin P$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. Her $b \in B$ için $(a)(b) \subseteq AB \subseteq P, a \notin P$ olduğundan $b \in P$ olur. Yani $B \subseteq P$ bulunur.

Teorem 2.4.3: M Nobusawayı sağlayan bir Γ -halka ve P, M nin bir ideali olsun.

P nin asal olması için gerek ve yeter koşul $a\Gamma b \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ olmasıdır.

İspat: P asal olsun. $a\Gamma b \subseteq P$ ve $a \notin P$ alalım.

P asal iken $(a)(b) \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ idi. $x \in (a)(b)$ alalım.

$x = (na + c\alpha a + a\beta d + e\gamma a\delta f)\rho(mb + g\mu b + b\vartheta h + j\xi b\eta k)$ şeklindedir. Burada m ve $n \in \mathbb{Z}; c, d, e, f, g, h, j, k \in M; \alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho, \mu, \vartheta, \varepsilon, \eta \in \Gamma$ dir. Bu çarpımdaki her bir eleman $a\Gamma b \subseteq P$ kabulümüzden dolayı P nin içine düşer. Örneğin

$(na)\rho(mb) \in P$ dir.

$(na)\rho(g\mu b) = (na\rho g)\mu b \in P$ dir.

$(c\alpha a)\rho(g\mu b) = c\alpha(a\rho(g\mu b)) = c\alpha(a(\rho g\mu)b) = c\alpha(a\sigma b)$, bazı $\sigma \in \Gamma$ ve böylelikle $c\alpha P \subseteq P$ bulunur. O halde aldığımız her $x \in (a)(b)$ için $x \in P$ bulduk.

Dolayısıyla buradan Teorem 2.4.2 yi kullanarak $(a)(b) \subseteq P$ ve $a \notin P$ iken $b \in P$ bulunur.

Tersine olarak $a\Gamma b \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ alalım.

A ve B idealler olmak üzere $AB \subseteq P$ fakat $A \not\subseteq P$ olsun. O halde $a \notin P$ olacak şekilde bazı $a \in A$ vardır. Böylelikle her $b \in B$ için $a\Gamma b \subseteq AB \subseteq P$ iken $b \in P$ bulunur. Buradan $B \subseteq P$ dir yani P asaldır.

Teorem 2.4.4: P ve A, M nin idealleri, $A \subseteq P$ ve P asal olmak üzere $P/A, M/A$ da asaldır. Tersine eğer $P', M/A$ nın bir asal ideali ise , $\theta: M \rightarrow M/A$ örten homomorfizma olmak üzere $\theta^{-1}(P')$ de M nin bir asal idealidir.

İspat: M nin P asal olacak şekilde $A \subseteq P$ olan A ve P ideallerini alalım. P/A nın M/A nın asal ideali olduğunu gösterelim. Bunun için $B/A, C/A \in M/A$ iken

$(B/A)(C/A) \subseteq P/A$ ise $(B/A) \subseteq (P/A)$ veya $(C/A) \subseteq (P/A)$ olduğunu göstermeliyiz.

$(B/A)(C/A) \subseteq P/A$ iken $(BC + A)/A \subseteq P/A$ ve $BC \subseteq P$ dir. Buradan $B \subseteq P$ veya $C \subseteq P$ bulunur. (P asal olduğundan) Dolayısıyla $(B/A) \subseteq (P/A)$ veya $(C/A) \subseteq (P/A)$ bulunur.

Tersine olarak $P', M/A$ nın bir asal ideali ve $BC \subseteq P = \theta^{-1}(P')$ olsun.

$\theta(B)\theta(C) \subseteq \theta(P) = P'$ ve P' asal olduğundan $\theta(B) \subseteq P'$ veya $\theta(C) \subseteq P'$ olur. Buradan

$B \subseteq \theta^{-1}(\theta(B)) \subseteq \theta^{-1}(P') = P$ veya $C \subseteq \theta^{-1}(\theta(C)) \subseteq \theta^{-1}(P') = P$ bulunduğundan P asaldır.

Tanım 2.4.5: $M \Gamma$ -halkasındaki A idealinin radikalini tanımlamak için m -sistem tanımını hatırlayalım.

Tanım 2.4.6: $S, M \Gamma$ -halkasının bir alt kümesi olmak üzere eğer S kümesi aşağıdaki iki şarttan birini sağlıyorsa S ye bir m -sistem denir.

i: $S = \emptyset$,

ii: $a, b \in S$ iken $(a)(b) \cap S \neq \emptyset$.

Önerme 2.4.7: m -sistemde bir P idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul P^c nin bir m -sistem olmasıdır.

İspat: P asal olsun. P^c nin m -sistem olduğunu göstermek için $a, b \in P^c$ iken $(a)(b) \cap P^c \neq \emptyset$ olması gerekir. $a \in P^c$ ve $b \in P^c$ ise $a \notin P$ ve $b \notin P$ dir. P asal olduğundan

$ab \notin P$ dir yani $ab \in P^c$ dir. $ab \in (a)(b)$ de olduğundan $(a)(b) \cap P^c \neq \emptyset$ bulunur.

P^c bir m -sistem olsun. O halde $a \in P^c$ ve $b \in P^c$ iken $(a)(b) \cap P^c \neq \emptyset$ dir. Buradan $(a)(b) \not\subseteq P$ bulunur. Dolayısıyla $a \notin P$ ve $b \notin P$ iken $ab \notin P$ olduğundan P asaldir.

Tanım 2.4.8: P idealinin A idealinin asal bölteni olması için gerek ve yeter koşul P^c nin A dan ayrık bir m -sistem olmasıdır.

Tanım 2.4.9: M halkasının bir A ideali için , $x \in M$ yi içeren her m -sistemin A ile kesişimi boştan farklı ise bu şekildeki tüm x lerin kümesine A nın radikali denir ve $r(A)$ ile gösterilir.

$$r(A) = \{ x \in M : x \text{ i içeren her } m - \text{sistem } A \text{ nın bir elemanını içerecek} \}.$$

Burada $x \in M$ elemanlarını $x \in A$ olarak seçersek x i içeren her m -sistem tanımdan dolayı A ile kesişeceğiinden A nın bir elemanını içerecektir. Dolayısıyla $A \subseteq r(A)$ bulunur.

Önerme 2.4.10: Eğer P, A nın asal bölteni ise P^c A dan ayrık bir m -sistem olmak üzere $r(A) \subseteq P$ dir.

İspat: P, A nın asal bölteni iken P^c A dan ayrık bir m -system olsun. Bazı $x \in r(A)$ fakat $x \notin P$ olduğunu kabul edelim.

$x \notin P$ ise $x \in P^c$ olur. P^c, A dan ayrık olduğundan $x \notin A$ olur. $x \in r(A)$ idi, o halde x i içeren her m -sistem A nın bir elemanını içermelidir. Fakat x i içeren P^c m -sistemi A dan ayrık olduğundan dolayı çelişki oluşur. Yani $x \in r(A)$ olup $x \notin P$ olacak şekilde bir x yoktur ve $r(A) \subseteq P$ bulunur.

Tanım 2.4.11: M Γ -halkasının radikali $r(0)$ ile tanımlanır.

Önerme 2.4.12: $r(A)$, A nın tüm asal ideal böltenlerinin kesişimidir ve böylelikle $r(A)$ bir idealdir. Yani P_i, A nın asal ideal bölteni olmak üzere $r(A) = \cap P_i$ dir.

İspat: P, A nın asal ideal bölteni olmak üzere $r(A) \subseteq P$ idi. O halde P_i, A nın asal ideali olmak üzere $r(A) \subseteq P_i$ olduğundan $r(A) \subseteq \cap P_i$ bulunur.

Diğer taraftan $x \notin r(A)$ alalım. Bu durumda tanımdan A ile kesişimi boş küme olan ve x i içeren bir m -sistem bulabiliriz. Zorn yardımcı teoreminden A dan ayrık ve $P \supseteq A$ olacak şekilde maksimal P ideali vardır ve hatta bu ideal asaldir. Buradan $x \notin P$ bulunur. Dolayısıyla $P = \cap P_i \subseteq r(A)$ bulunur.

$r(A) \subseteq \cap P_i$ ve $\cap P_i \subseteq r(A)$ bulduğumuzdan $r(A) = \cap P_i$ olur.

Burada P_i ler ideal olduğundan ve ideallerin kesişimi de bir ideal oluşturduğundan $r(A)$ da $\cap P_i$ olarak bir ideal olur.

Yardımcı Teorem 2.4.13: A, S m -sisteminden ayrık bir ideal olsun. O halde $S \subseteq T$ olacak şekilde A dan ayrık m -sistemler sınıfının bir maksimali vardır.

İspat: Bu teoremin ispatı için Zorn yardımcı teoremini hatırlayalım.

$$\Omega = \{T \subset M : S \subseteq T, T \text{ bir } m - \text{sistem ve } T \cap A = \emptyset\} \text{ ve}$$

$$\Delta = \{T_i : T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots, T_i \text{ bir } m - \text{sistem ve } T_i \cap A = \emptyset\}$$

kümelerini ele alalım. Zorn yardımcı teoremine göre $(\Omega, \subset)$ kısmi sıralı kümesinin herhangi bir tam sıralı alt kümesi(zinciri) $\Delta = \{T_i\}$ olmak üzere eğer bu zincirin bir üst sınır varsa Ω nın da en az bir maksimal elemanı vardır.

$T_i \in \Delta$ olmak üzere $\cup T_i = T$ ile gösterelim. $\cup T_i = T$, Δ için bir üst sınırdır. Bu üst sınırın Ω nın bir elemanı olduğunu gösterelim. Öncelikle $S \in \Omega$ olduğundan Ω boştan farklı bir kümedir.

- (i) $T \cap A = (\cup T_i) \cap A = \cup (T_i \cap A)$ dir. $T_i \in \Delta$ olduğundan $T_i \cap A = \emptyset$ ve dolayısıyla $\cup (T_i \cap A) = \emptyset$ olur.
- (ii) Her $a, b \in T = \cup T_i$ için T_i ler m -sistem olduğundan $(a)(b) \cap (\cup T_i) \neq \emptyset$ buluruz yani $T = \cup T_i$ bir m -sistemidir.
- (iii) $\cup T_i = T \in M$ dir ve $S \subseteq T_1$ ve $S \subseteq T_2$ ve ... olduğundan $S \subseteq \cup T_i = T$ olur.

$\cup T_i = T$ bu üç şartı sağladığından Ω nın bir elemanıdır ve hatta aldığımız zincir için Ω da bir üst sınırdır. Zorn yardımcı teoremine göre Ω nın en az bir maksimal elemanı vardır.

Yardımcı Teorem 2.4.14: A, S m -sisteminden ayrık ideal olmak üzere $A \subseteq P$ olacak şekilde A yı kapsayan ve S den ayrık olan bir maksimal P ideali vardır ve hatta bu ideal asaldır.

İspat: Zorn yardımcı teoremini kullanarak önceki teoremde olduğu gibi

$$\Omega = \{P \subset M : A \subseteq P, P \text{ } S \text{ den ayrık ideal ve } P \text{ asal}\}$$

$$\Delta = \{P_i : P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots, P_i \text{ } S \text{ den ayrık ideal ve } P_i \text{ asal}\}$$

şeklinde seçerek P nin varlığından bahsedebiliriz. O halde P nin asal olduğunu gösterelim.

P, S m -sisteminden ayrık maksimal ideal olsun. $b, c \in M$ alalım öyle ki $b, c \notin P$ olsun.

$P + (b) \neq P$ ve $P + (c) \neq P$ dir. P, S den ayırık ideallerin maksimali olduğundan $P + (b)$ S den ayırık değildir. Dolayısı ile S ile kesişimi boştan farklıdır. Yani bazı $s_1 \in S$ vardır öyle ki $s_1 = p_1 + b_1$ ve benzer şekilde bazı $s_2 \in S$ vardır öyle ki $s_2 = p_2 + c_1$ olur. S bir m -sistem olduğundan $(s_1)(s_2) \cap S \neq \emptyset$ dir. $(s_1)(s_2) \subseteq (P + (b_1))(P + (c_1)) \subseteq (P + (b))(P + (c)) \subseteq P + (b)(c)$ ve $(s_1)(s_2) \cap S \neq \emptyset$ olduğundan $(P + (b)(c)) \cap S \neq \emptyset$ bulunur.

P, S den ayırık idi, o halde $(b)(c) \cap S \neq \emptyset$ yani $(b)(c) \not\subseteq P$ bulunur. Dolayısıyla $b \notin P$ ve $c \notin P$ iken $(b)(c) \not\subseteq P$ olduğundan P asaldır.

Yardımcı Teorem 2.4.15: M Γ -halkasının boştan farklı P alt kümesinin A yı içeren minimal asal ideal olması için gerek ve yeter koşul P^c nin A dan ayırık maksimal m -sistem olmasıdır.

İspat: P^c A dan ayırık maksimal m -sistem ve P_1, P^c den ayırık A yı kapsayan maksimal ideal olsun. (Yardımcı teorem 2.4.14 de böyle bir P_1 in var ve asal olduğunu göstermiştik).

$P^c \subseteq P_1^c$ olur. P_1 asal idealinin tümleyeni olan P_1^c A 'dan ayırık bir m -sistemdir. A dan ayırık m -sistemlerin en büyüğü P^c idi o halde $P_1^c = P^c$ olur. Yani $P_1 = P$ dir ve böylelikle P asaldır.

Tersine olarak P, A nın minimal asalı olsun. P^c nin A dan ayırık maksimal m -sistem olduğunu gösterelim. P asal ideal olduğundan P^c, A dan ayırık bir m -sistemdir. Yardımcı Teorem 2.4.13 den dolayı $P^c \subseteq S$ olacak şekilde bir S maksimal m -sistemi vardır. Teoremin ilk kısmından S^c, A yı kapsayan minimal ideal olmalıydı. Yani $S^c = P$ olmalı olduğundan $S = P^c$ bulunur. P^c maksimaldir.

Sonuç 2.4.16: Eğer P, A nın bir asal ideal böleni ise bu durumda P, A nın minimal asalını içerir.

İspat: Eğer P bir asal ideal bölen ise P^c, A dan ayırık bir m -sistemdir. Yardımcı Teorem 2.4.13 den dolayı $P^c \subseteq S$ olacak şekilde bir maksimal S m -sistemi vardır. $S^c \subseteq P$ ve S maksimal olduğundan S^c, A yı içeren minimal asalıdır.

Teorem 2.4.17: A, M Γ -halkasının herhangi bir ideali olmak üzere $r(A), A$ nın minimal asallarının kesişimidir.

İspat: P asal ideal olmak üzere $r(A) \subseteq P$ idi. P_i ler minimal asallar olmak üzere $r(A) \subseteq P_i$ olduğundan $r(A) \subseteq \bigcap P_i$ dir.

$\cap P_i = P$ alalım. $P \subseteq r(A)$ olduğunu gösterelim. $x \notin r(A)$ olsun. Bu durumda x i içeren fakat A dan ayrık olan bir m -sistem vardır. Yardımcı Teorem 2.4.13 den dolayı $S \subseteq S_1$ olacak şekilde maksimal S_1 m -sistemi vardır. Yardımcı Teorem 2.4.15 den dolayı S_1 maksimal olmak üzere $S_1^c = P, A$ nın minimal asalıdır ve $x \in S \subseteq S_1$ ise $x \notin P$ dir. Böylelikle $x \notin r(A)$ iken $x \notin P$ olduğundan $P \subseteq r(A)$ bulunur.

Sonuç 2.4.18: Bir idealin radikali de idealdir.

İspat: A ideal olmak üzere $r(A) = \cap P_i$ olduğunu gösterdik. İdeallerin kesişimi de bir ideal olduğundan $r(A)$ bir idealdir.

Sonuç 2.4.19: $r(r(A)) = r(A)$

İspat: A ideal olmak üzere $A \subseteq r(A)$ olduğunu göstermiştik. $r(A)$ da bir ideal olduğundan $r(A) \subseteq r(r(A))$ dır.

Diğer taraftan $r(r(A)) = \cap_{r(A) \subset P} P \subseteq \cap_{A \subset P} P = r(A)$ olduğundan $r(r(A)) \subseteq r(A)$

Sonuç 2.4.20: Eğer $R = r(0)$ ise o halde $r(M/R) = 0$ dır.

İspat: $r(0) = \cap P$, $r(M/R) = \cap (P/R) = \cap P/R = R/R = 0$.

Sonuç 2.4.21 4: A ve B herhangi iki ideal olmak üzere $r(A \cap B) = r(A) \cap r(B)$ dir.

İspat: A ya da B nin her asal bölteni $(A \cap B)$ nin de asal bölteni olacağından, yani $r(A \cap B) \subseteq r(A)$ ve $r(A \cap B) \subseteq r(B)$ olduğundan $r(A \cap B) \subseteq r(A) \cap r(B)$ olduğu açıktır.

Tersine olarak P asal olmak üzere $A \cap B \subseteq P$ ise $AB \subseteq P$ ve $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ dir. Buradan $r(A) \cap r(B) \subseteq r(A \cap B)$ bulunur.

2.5 Gamma Halkalarda Asalımsı İdealler

Tanım 2.5.1: M Γ -halkasının bir Q idealine, A ve B idealler olmak üzere, $AB \subseteq Q$ iken $A \subseteq r(Q)$ veya $B \subseteq Q$ şartını sağlıyorsa asalımsı sağ ideal denir. Benzer bir tanım sol asalımsı ideal için de yapılabilir.

Teorem 2.5.6: M Γ -halkasının Q idealinin asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul $(a)(b) \subseteq Q$ iken $a \in r(Q)$ veya $b \in Q$ olmasıdır.

İspat: Q asalımsı ideal olsun. $(a)(b) \subseteq Q$ ise tanımdan $(a) \subseteq r(Q)$ veya $(b) \subseteq Q$, dolayısıyla $a \in r(Q)$ veya $b \in Q$ bulunur.

$(a)(b) \subseteq Q$ iken $a \in r(Q)$ veya $b \in Q$ şartı sağlansın ve $AB \subseteq Q$ iken $B \not\subseteq Q$ olsun. O halde bazı $b \in B \cap Q^c$ vardır ve her $a \in A$ için $(a)(b) \subseteq AB \subseteq Q$ olduğundan $b \notin Q$ ise $a \in r(Q)$ olur ve buradan $A \subseteq r(Q)$ bulunur, dolayısıyla Q asalımsıdır.

Teorem 2.5.7: Bir M Γ -halkasının Nobusawa şartlarını sağlayan Q idealinin asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul $a\Gamma b \subseteq Q$ iken $a \in r(Q)$ veya $b \in Q$ ya da $a \notin r(Q)$ ve $b \notin Q$ iken $a\Gamma b \cap Q^c \neq \emptyset$ olmasıdır.

İspat: Q asalımsı ideal olsun ve $a\Gamma b \subseteq Q$ iken $a \notin r(Q)$ alalım.

$(a)(b)$ kümesinin elemanları $(na + c\alpha a + a\beta d + e\gamma a\delta f)\rho(mb + g\mu b + b\vartheta h + j\xi b\eta k)$ şeklindeki elemanlar idi, bu çarpımdaki tüm elemanlar $a\Gamma b \subseteq Q$ aldığımızdan Q nun elemanı olur. Yani $(a)(b) \subseteq Q$ olur. $(a)(b) \subseteq Q$ ise $(a) \subseteq r(Q)$ veya $(b) \subseteq Q$ idi, $a \notin r(Q)$ kabul ettiğimizden $b \in Q$ olur. Dolayısıyla $a\Gamma b \subseteq Q$ iken $a \in r(Q)$ veya $b \in Q$ bulunur.

Tersine olarak $a\Gamma b \subseteq Q$ iken $a \in r(Q)$ veya $b \in Q$ şartı sağlansın, $AB \subseteq Q$ fakat $B \not\subseteq Q$ olsun. O halde bazı $b \in B \cap Q^c$ vardır ve her $a \in A$ için $a\Gamma b \subseteq AB \subseteq Q$ olur ve böylelikle $a\Gamma b \subseteq Q$ iken $a \in r(Q)$ veya $b \in Q$ kabulümüzden $b \notin Q$ için $a \in r(Q)$ olur ve buradan $AB \subseteq Q$ iken $A \subseteq r(Q)$ veya $b \in Q$ bulunur, dolayısıyla Q asalımsıdır.

Teorem 2.5.8: Q_1 ve Q_2 asalımsı ve $r(Q_1) = r(Q_2) = C$ olsun. O halde $Q_1 \cap Q_2$ de asalımsıdır ve radikali C ye eşittir.

İspat: Teorem 2.4.17 den $r(Q_1 \cap Q_2) = r(Q_1) \cap r(Q_2) = C$ olduğu açıktır. $Q_1 \cap Q_2$ nin asalımsı olduğunu gösterelim. $AB \subseteq Q_1 \cap Q_2$ iken $B \not\subseteq Q_1 \cap Q_2$ yani $B \not\subseteq Q_1$ olsun. Bu durumda $AB \subseteq Q_1$ dir ve Q_1 de asalımsı olduğundan $B \not\subseteq Q_1$ iken $A \subseteq r(Q_1) = C$ olur. $C = r(Q_1) \cap r(Q_2)$ olduğundan $A \in r(Q_1) \cap r(Q_2)$ buluruz. Dolayısıyla $Q_1 \cap Q_2$ asalımsıdır.

Sonuç 2.5.9: $i = 1, 2, \dots, n$, Q_i C radikali ile asalımsı olsun. Bu durumda $Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ de C radikali ile asalımsıdır.

2.6 Gamma Halkalarında Artan Zincir Koşulu

Bundan sonraki kısımda M nin ideallerde artan zincir koşulunu sağlayan bir Γ -halkası olduğu kabul edilecektir.

Teorem 2.6.1: M nin herhangi bir ideali, minimal asallarının bir sonlu çarpımını içerir.

İspat: Aksini kabul edelim, A teoremdeki koşulları sağlamayan ideallerin içinde maksimal olsun, bu taktirde A asal değildir ve A yı içeren öyle B ve C idealleri vardır ki $BC \subseteq A$ dır. B

ve C teoremdaki koşulu sağlamalı olduğundan A , asal ideal bölenlerinin $P_1 P_2 \dots P_n$ sonlu çarpımlarının bazılarını içerir. Bu yüzden A nın herhangi bir asal ideal böleni A nın bir minimal asalını içerir, A nın bir minimal asalı olmayan herhangi bir P_i , A nın bir minimal asalı ile yer değiştirebilir. Böylece kabul ettiğimiz aksine A şartı sağlar ve teorem ispatlanır.

Sonuç 2.6.2: M nin herhangi bir A ideali sadece sonlu tane minimal asala sahiptir.

İspat: $P_1 P_2 \dots P_n \subseteq A$ ve P , A 'nın bir minimal asalı olsun. O halde $A \subseteq P$ ise bazı $P_i \subseteq P$ vardır ve böylece P nin minimallikinden dolayı $P_i = P$ dir.

Sonuç 2.6.3: Bazı n pozitif tamsayısı için $(r(A))^n \subseteq A$ dır.

İspat: $P_1 P_2 \dots P_n \subseteq A$ ve her i için $r(A) \subseteq P_i$ olması koşulları birden $(r(A))^n \subseteq A$ olmasını sağlar.

Teorem 2.6.4: Q asalımsı ideal olmak üzere $r(Q) = P$ bir asal idealdir.

İspat: Q asalımsı ve $BC \subseteq r(Q)$ iken $B \not\subseteq r(Q)$ olsun. Bu durumda bazı n için $(BC)^n \subseteq (r(Q))^n \subseteq Q$ olur ve bu özelliği sağlayan en küçük pozitif tam sayının n olduğunu farz edelim. Eğer $n = 1$ ise o halde $BC \subseteq Q$ iken Q asalımsı olduğundan $C \subseteq r(Q)$ bulunur. Eğer $n > 1$ ise o halde $B(C(BC)^{n-1}) \subseteq Q$ olduğundan $C(BC)^{n-1} \subseteq Q$ olur ve $(BC)^{n-1} \not\subseteq Q$ olduğundan tekrar $C \subseteq r(Q)$ olduğunu elde ederiz. Böylelikle $r(Q)$ asaldır.

Sonuç 2.6.5: Eğer Q bir asalımsı ideal ise bu durumda Q tek bir minimal asal ideale sahiptir.

İspat: Öncelikle P , A nın asal böleni iken P^c A dan ayrık bir m -sistem olmak üzere $r(A) \subseteq P$ idi. O halde P kendisinin asal böleni olduğundan $r(P) \subseteq P$ dir ve $P \subseteq r(P)$ olduğunu da zaten bildiğimizden $P = r(P)$ olur. Şimdi de P, Q nun minimal asal ideali olmak üzere $Q \subseteq P^*$ olacak şekilde P den farklı bir P^* bulunmadığını yani P nin tek olduğunu gösterelim.

$Q \subseteq P^*$ ise $P = r(Q) \subseteq r(P^*)$ olur ve P^* asal olmak üzere $r(P^*) = P^*$ olduğunu da gösterdiğimizden $P \subseteq P^*$ bulunur. Dolayısıyla P, Q nun tek minimal asal idealidir.

Sonuç 2.6.6: Bir Q idealinin asalımsı olması için gerek ve yeter koşul

- (i) $AB \subseteq Q$ ise bazı n için $A^n \subseteq Q$ veya $B \subseteq Q$ olmasıdır ya da
- (ii) $(a)(b) \subseteq Q$ ise bazı n için $(a)^n \subseteq Q$ veya $(b) \subseteq Q$ olmasıdır.

İspat: Q asalımsı ve $AB \subseteq Q$ olsun. Bu durumda $A \subseteq r(Q)$ veya $B \subseteq (Q)$ idi.

- (i) $A \subseteq r(Q)$ iken $AAA \dots = A^n \subseteq r(Q)r(Q)r(Q) \dots = (r(Q))^n \subseteq Q$ olduğundan $AB \subseteq Q$ ise bazı n için $A^n \subseteq Q$ veya $B \subseteq Q$ olur.
- (ii) $(a)(b) \subseteq Q$ ise bazı n için $(a)^n \subseteq Q$ veya $(b) \subseteq Q$ olması (i) den dolayı açıktır.

Diğer taraftan (i) ve (ii) nin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $AB \subseteq Q$ ise bazı n için $A^n \subseteq Q$ veya $B \subseteq Q$ vardır. $A^n = AA \dots A \subseteq Q \subseteq r(Q)$ veya $B \subseteq Q$ olduğundan Q asalımsı idealdir.

Eğer Q asalımsı ideal ve radikali P asalı ise o halde Q idealine P -asalımsı ya da P için asalımsıdır denir.

Teorem 2.6.7: $Q \neq M$ idealinin P -asalımsı olması için gerek ve yeter koşul

- (1) Bazı n için $P^n \subseteq Q$ ve $AB \subseteq Q$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq Q$ ya da
- (2) $P^n \subseteq Q$ ve $(a)(b) \subseteq Q$ iken $(a) \subseteq P$ veya $(b) \subseteq Q$ olmasıdır.

Eğer bu iki şarttan birisi sağlanıyorsa P asaldır.

İspat: Q P -asalımsı ise tanımdan Q asalımsı ve $r(Q) = P$ dir. Teorem 2.6.4 den P nin asal olduğunu ve Teorem 2.6.1 sonuç 2.6.3 den bazı n için $P^n \subseteq Q$ olduğunu söyleyebiliriz. Böylece eğer Q P -asalımsı ise (1) ve (2) sağlanır ve P asaldır.

Diğer taraftan öncelikle (1) sağlansın. $M \not\subseteq Q$ iken $QM \subseteq Q$ olduğundan $Q \subseteq r(Q) = P$ yani $Q \subseteq P$ olduğunu ve $P^n \subseteq Q$ ise $PP \dots P \subseteq Q \subseteq r(Q) = P$ yani $P \subseteq r(Q)$ olduğunu biliyoruz. Eğer $AB \subseteq P$ ise o halde $(AB)^n \subseteq P \subseteq Q$ dir ve dolayısıyla $A \subseteq r(Q) = P$ veya $B(AB)^{n-1} \subseteq Q$ olur. Buradan da $B \subseteq P$ veya $(AB)^{n-1} \subseteq Q$ dur. Bu şekilde devam edersek $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ buluruz dolayısıyla P asaldır. Böylelikle $P = r(Q)$ dur ve (1) Q nun P -asalımsı olduğunu söyler.

Son olarak (2) nin sağlandığını kabul edelim. Eğer $AB \subseteq Q$ fakat $B \not\subseteq Q$ ise o halde $b \in B \cap Q^c$ vardır. Böylece her $a \in A$ için , $(a)(b) \subseteq AB \subseteq Q$ ise $(a) \subseteq P$ veya $A \subseteq P$ bulunur. Yani (2) var ise (1) vardır, ispat tamamlanmıştır.

2.7 Gamma Halkalarda İdeallerin Asalımsı Ayrışımı

Tanım 2.7.1: A bir ideal ve Q_i ler P_i -asalımsı idealler olmak üzere $A = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ yazılışında Q_i lerin hiçbiri ihmal edilemiyorsa o halde bu yazılış A nın indirgenemez asalımsı ayrışımı olarak adlandırılır. Buna ek olarak eğer asal radikaller olan $P_1, P_2, \dots, P_n$ lerin hepsi ayırık ise o halde ayrışım *minimal* dir.

Teorem 2.7.2: Asalımsı ideallerin indirgenemez kesişimi olan $A = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ nın da asalımsı olması için gerek ve yeter koşul $P_i = r(Q_i)$ iken $P_1 = P_2 = \dots = P_n$ olmasıdır.

İspat: $P_1 = P_2 = \dots = P_n$ ise o halde Teorem 2.5.8 in sonucundan P için A asalımsıdır. Tersine P_i lerin hepsinin eşit olmadığını kabul edelim. $P_1 \not\subseteq P_2$ alalım. Bu durumda bazı n için $P_1^n \subseteq Q_1$ ve dolayısıyla $P_1^n(Q_2 \cap \dots \cap Q_n) \subseteq A$ olur. Fakat P_2 asal olduğundan $P_1^n \not\subseteq P_2$ dir yani $P_1^n \not\subseteq r(A)$ dir. Kesişimin indirgenemez olmasından $Q_2 \cap \dots \cap Q_n \not\subseteq A$ dir. Buradan da eğer P_i lerin hepsi eşit değil ise A asalımsı değildir sonucuna ulaşırız.

Sonuç 2.7.3: Eğer A ideali asalımsı ideallerin sonlu sayıda kesişimi şeklinde gösterime sahip ise o halde A minimal asalımsı ayrışımına sahiptir.

İspat: Öncelikle her indirgenebilir kesişimi indirgenemez ayrışımına indirgeyebiliriz. Önceki teoremden radikalleri aynı olan asalımsı ideallerin ara kesitleri de aynı radikalli asalımsı idealdir ve böylelikle ayrışım indirgenemez hale geldikten sonra bu ayrışımından minimal ayrışım bulabiliriz.

Teorem 2.7.4: A nın bir asalımsı ayrışımı $A = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ ve $P_i = r(Q_i)$ olsun. Bu durumda A nın minimal asalları, $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ kümesinin minimal elemanlarıdır.

İspat: A nın herhangi bir P minimal asalı için $r(A) = P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n \subseteq P$ dir. O halde $P_1 P_2 \dots P_n \subseteq P$ ise bazı i için $P_i \subseteq P$ dir. Fakat P, A nın minimal asalı olduğundan $P_i = P$ dir. Bundan dolayı A nın minimal asalları $P_1, P_2, \dots, P_n$ lerin arasındadır. Eğer $P_i, \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ lerin içinde minimal ise o halde P_i, A nın diğer P asal ideal bölenlerini içeremez, bu yüzden P bazı P_j leri içermeli olduğundan P_i, A nın minimal asalıdır.

Tanım 2.7.5: A, M Γ -halkasının herhangi bir ideali ve $P \neq M$ bir asal ideal olmak üzere $A_P = \cup \{C : BC \subseteq A, B \not\subseteq P\}$ kümesi A nın P -(izole edilmiş) bileşeni olarak tanımlanır. Kolay olması açısından A_M, A olarak gösterilecektir.

A_P iyi tanımlıdır. Artan zincir koşulundan en az bir maksimal C ideali vardır öyle ki $BC \subseteq A, B \not\subseteq P$ dir. Eğer $B'C' \subseteq A, B' \not\subseteq P$ ise o halde P asal olduğundan $BB' \not\subseteq P$ dir. $BB'(C + C') \subseteq A$ olduğundan $C + C'$ yine bir idealdir. C nin maksimal olmasından $C' \subseteq C$ dir. Böylelikle A_P tek maksimal idealdir öyle ki bazı $B \not\subseteq P$ için $BA_P \subseteq A$ dir. $A \subseteq A_P$ olduğu açıktır. Eğer $A \not\subseteq P$ ise o halde $A_P = M$ dir.

Yardımcı Teorem 2.7.6:

- (1) Eğer $P_1 \supseteq P_2$ ise bu durumda $A_{P_1} \subseteq A_{P_2}$ dir.
- (2) Eğer $A_1 \subseteq A_2$ ise o halde $(A_1)_P \subseteq (A_2)_P$ dir.
- (3) $(A_1 \cap A_2)_P = (A_1)_P \cap (A_2)_P$
- (4) Q nun P -asalımsı olması için gerek ve yeter koşul $Q_P = Q$ ve bazı m için $P^m \subseteq Q$ olmasıdır.

İspat:

- (1) Bazı $B \not\subseteq P_1$ için $BA_{P_1} \subseteq A$ dir ve böylece $B \not\subseteq P_2$ ve $A_{P_1} \subseteq A_{P_2}$ dir.
- (2) Bazı $B \not\subseteq P$ için $B(A_1)_P \subseteq A_1 \subseteq A_2$ ve böylece $(A_1)_P \subseteq (A_2)_P$ dir.
- (3) Bazı $B \not\subseteq P$ için $B(A_1 \cap A_2)_P \subseteq A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$ ve böylece $(A_1 \cap A_2)_P \subseteq (A_1)_P$ dir. Benzer şekilde $(A_1 \cap A_2)_P \subseteq (A_2)_P$ dir, bu nedenle $(A_1 \cap A_2)_P \subseteq (A_1)_P \cap (A_2)_P$ buluruz. Diğer taraftan eğer $x \in (A_1)_P \cap (A_2)_P$ alırsak bu durumda $B_1(x) \subseteq A_1$ ve $B_2(x) \subseteq A_2$ koşulunu sağlayan $B_1 \not\subseteq P$ ve $B_2 \not\subseteq P$ idealleri vardır. Buradan $B_1 B_2(x) \subseteq A_1 \cap A_2$ bulunur, yani $B_1 B_2 \not\subseteq P$ ise $x \in (A_1 \cap A_2)_P$ dir.
- (4) Q, P -asalımsı olsun. $Q_P \supseteq Q$ olduğu aşikardır. Eğer $B \not\subseteq P$ ise Q P -asalımsı olduğundan $BC \subseteq Q$ iken $C \subseteq Q$ dur, böylelikle $Q_P = Q$ olur. Tersine eğer $Q_P = Q$ ise o halde $BC \subseteq Q$, ve $C \not\subseteq Q$ ise $B \subseteq P$ dir. $P^m \subseteq Q$ olduğunu da kabul ettiğimizden Q, P -asalımsı olur.

Teorem 2.7.7: $A = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ P_i için Q_i asalımsı olsun. P nin P_i yi içeren asal ideal olması için gerek ve yeter koşul $1 \leq i \leq m \leq n$ olmasıdır. Bu durumda $A_P = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m$ dir. Eğer P hiç bir P_i içermiyorsa o halde $A_P = M$ dir.

İspat: Eğer P hiçbir P_i içermiyorsa o halde A minimal asallarını içerdiğinden, P A yı içmez ve $A_P = M$ olur. $P \supseteq P_i$ olması için gerek yeter koşulun $1 \leq i \leq m \leq n$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $1 \leq i \leq m$ için $A_P \subseteq A_{P_i} \subseteq (Q_i)_{P_i} = Q_i$ ve $A_P \subseteq Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m$ dir.

$m = n$ ise $A_P \subseteq A \subseteq A_P$ olur ve bu nedenle $A_P = A = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ dir.

$m < n$ ise $m < i \leq n$ için $P_i \not\subseteq P$ iken $Q_i \not\subseteq P$ ve böylelikle $Q_{m+1} Q_{m+2} \dots Q_n \not\subseteq P$ dir. $(Q_{m+1} Q_{m+2} \dots Q_n) (Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m) \subseteq A$ olur, bu nedenle $Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m \subseteq A_P \subseteq Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m$ buluruz.

Eğer $P_i = r(Q_i)$ olmak üzere $A = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ A nın minimal asalımsı ayrışımı

ise $P_i \in S$ ve $P_j \subseteq P_i$ iken $P_j \in S$ oluyorsa ilişkili asalların bir $S = \{P_{i_1}, \dots, P_{i_k}\}$ kümesi ilişkili asalların bir izole edilmiş kümesidir. Asalların izole edilmiş kümesi olan S kümesi için, $A_S = \cap Q_i, P_i \in S$, A nın bir izole edilmiş bileşen kümesidir.

Sonuç 2.7.8: $P_i = r(Q_i)$, $A = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ A nın minimal asalımsı ayrışımı ve S, A nın ilişkili asallarının bir izole edilmiş kümesi olsun. Bu durumda A_S izole edilmiş bileşeni sadece A ve S ye bağlıdır, A nın asalımsı ayrışımına bağlı değildir. Eğer P, A nın minimal asalı ise o halde bazı i için $A_P = Q_i$ dir. Böylelikle minimal P asalı ile ilişkili olan izole edilmiş bileşen P_i -asalımsıdır ve A nın her minimal asalımsı ayrışımında vardır.

Teorem 2.7.9: A nın bir minimal asalımsı ayrışımı $P_i = r(Q_i)$ olmak üzere $A = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ olsun. Bu durumda A yı içeren bir P asal idealinin P_i lerden biri olması için gerek ve yeter koşul bazı $B \not\subseteq A_P$ ideali için $PB \subseteq A_P$ olmasıdır.

İspat: $P = P_m$ ve $P_i \subseteq P$ olması için gerek ve yeter koşul $i \leq m$ olsun. O halde $A_P = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m$ minimaldir ve böylece $C = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_{m-1} \not\subseteq A_P$ dir ($m = 1$ ise $C = M$ idi). Bu yüzden bazı k için $P_k \subseteq Q^m, P^k C \subseteq A_P$ olur ve $P^r C \subseteq A_P$ olacak şekilde r yi minimal seçebiliriz. ($C \not\subseteq A_P$ iken $r \geq 1$) Eğer $r = 1$ ise bu durumda $PC \subseteq A_P$ dir ve $B = C$ olarak alabiliriz. Eğer $r > 1$ ise bu durumda $P(P^{r-1}C) \subseteq A_P$ fakat $P^{r-1}C \not\subseteq A_P$ olduğundan $B = P^{r-1}C$ olarak alabiliriz.

Tersine $P \supseteq A$ ve $B \not\subseteq A_P$ iken $PB \subseteq A_P$ olsun. A_P nin bir minimal ayrışımını $A_P = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m$ olarak alalım. ($P \supseteq P_i$ olması için gerek ve yeter koşul $1 \leq i \leq m$ olmasıydı) Bu durumda $1 \leq i \leq m$ için $PB \subseteq Q_i$ fakat bazı $j \leq m$ için $B \not\subseteq Q_j$ dir. Q_i, P_j için asalımsı olduğundan $P \subseteq P_j$ ve buradan da $P = P_j$ olur.

Sonuç 2.7.10: Eğer $A = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n = Q'_1 \cap Q'_2 \cap \dots \cap Q'_m$ A nın iki minimal asalımsı ayrışımı ise $m = n$ dir ve radikallerin iki kümesi olan $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ ile $\{P'_1, P'_2, \dots, P'_m\}$ aynıdır.

SONUÇ

Bu çalışmada halkadan daha genel olan Γ -halka notasyonu ile alakalı yapılar verilmiştir. Halkalar için bilinen önerme ve teoremler, bu yeni yapıda incelenip ispatları yapılmıştır. Eğer M Γ -halkası artan zincir koşulunu sağlıyor ise bu durumda bir asalımsı idealin radikalının asal olduğu ve $Q \neq M$ idealinin P -asalımsı olması için gerek ve yeter koşulun, bazı n için, $P^n \subseteq Q$ olduğu gösterilmiştir. Son olarak Γ -halkası için eğer ideal asalımsı ayrışımaya sahip ise bu durumda teklik teoremi Murdoch'un verdiği teoreme benzer olarak gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- Ağargün, G. ve Aygör, N.K. ve Ersoy, B.A. ve Alan, M., (2002) Soyut Cebir, YTÜ, İstanbul.
- Barnes, W.E., (1966), “On The Γ -Rings Of Nobusawa”, Pasific Journal Of Mathematics, 18:3, 411-422.
- Çallıalp, F., (2009), Örneklerle Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- Çallıalp, F. ve Tekir, Ü., (2009) Değişmeli Halkalar ve Modüller, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- Lam, T.Y., (1991), A First Course In Noncommutative Rings, Springer –Verlag, New York.
- McCoy, N.H., (1948), “Prime Ideals In General Rings”, American Mathematical Society, 823-833.
- Warsi, Z.K., (1978), “On Decomposition Of Primary Ideals Of Γ -Rings”, Department of Mathematics, University of Gorakhpur, 9:9, 912-917

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 31.08.1986

Doğum yeri Gerger

Lise 2000-2004 Adile Mermerci Anadolu Lisesi

Lisans 2004-2008 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

2009-2010 Kadriye Moroğlu Lisesi