

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DERECELENDİRİLMİŞ HALKALAR ve
DERECELENDİRİLMİŞ MODÜLLER**

Matematikçi Neslihan Ayşen ÖZKİRİŞÇİ

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ünsal TEKİR

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	i
SİMGE LİSTESİ	iii
KISALTMA LİSTESİ.....	iv
ÖNSÖZ.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Halkalar	1
1.2 Modüller.	3
1.3 Temel Topoloji Kavramları	5
2. DERECELENDİRİLMİŞ HALKALAR	10
2.1 Derecelendirilmiş Halkaların Özellikleri.....	10
2.2 Derecelendirilmiş Halkalar Üzerinde Topoloji	11
3. DERECELENDİRİLMİŞ MODÜLLER.....	14
3.1 Derecelendirilmiş Modüllerin Özellikleri.....	14
3.2 $G - Spec(M)$ Üzerinde Topoloji	17
3.3 $G - Spec(M)$ ile $G - Spec(R/Ann(M))$ Arasındaki İlişki.....	20
3.4 $G - Spec(M)$ Üzerindeki Zariski Topolojisi için Taban	23
3.5 $G - Spec(M)$ nin İndirgenemez Kapalı Alt Kümesi ve Bu Kümelerin Jenerik Noktaları	25
4. SONUÇ.....	31
KAYNAKLAR.....	32
ÖZGEÇMİŞ.....	33

SİMGE LİSTESİ

Σ	Toplam sembolü
Π	Çarpım sembolü
$\oplus$	Direkt toplam
$-$	Fark sembolü
$\setminus$	Fark sembolü
$\circ$	Bileşke işlemi
$\triangleleft_G$	Derecelendirilmiş ideal
$<_G$	Derecelendirilmiş alt modül

KISALTMA LİSTESİ

$G(R)$	Derecelendirilmiş R halkası
$h(R)$	Derecelendirilmiş R halkasının homojen elemanlarının kümesi
$h(M)$	Derecelendirilmiş M R -modülünün homojen elemanlarının kümesi
$h(I)$	$h(R)$ kümesi ile I idealinin kesişimi
$V^R(I)$	Derecelendirilmiş I idealinin çokluğu
$V(N)$	Derecelendirilmiş N alt modülünün çokluğu
$\bar{R}$	$R/Ann(M)$
$G-Spec(R)$	Derecelendirilmiş R halkasının derecelendirilmiş asal ideallerinin kümesi
$G-Spec(M)$	Derecelendirilmiş M R -modülünün derecelendirilmiş asal alt modüllerinin kümesi
X	$G-Spec(M)$
X^R	$G-Spec(R)$
$Cl(Y)$	Zariski topolojisi için Y kümesinin kapanışı
$\xi(Y)$	Y kümesinin elemanlarının kesişimi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi

ÖNSÖZ

Üzerimde çok büyük emekleri bulunan ve tez yazımı boyunca da her türlü desteklerini esirgemeyen değerli hocalarım Ünsal TEKİR ve Kürşat Hakan ORAL'a sonsuz teşekkürler...

N. Ayşen ÖZKİRİŞÇİ

ÖZET

M bir derecelendirilmiş R -modül olmak üzere $G\text{-Spec}(M)$ üzerinde tanımlayacağımız farklı çoklukların hangi durumlarda bir topoloji oluşturduğunu inceleyip aralarındaki ilişkileri araştıracağız. Tanımladığımız çokluklardan ilki olan $V^*(N) = \{P \in G\text{-Spec}(M) | P \supseteq N\}$ kümesi kapalı kümeleri temsil etmek üzere oluşturulan τ^* yapısı, quasi-Zariski topolojisi olarak adlandırılmıştır. τ^* yapısı topoloji aksiyomlarının tamamını gerçekleştirmediğinden, bu aksiyomları sağladığı koşul olan M nin derecelendirilmiş çarpımsal R -modül olması durumunu incelerken oluşturduğumuz $V(N) = \{P \in G\text{-Spec}(M) | (P:M) \supseteq (N:M)\}$ kapalı kümeleri ile elde edilen ve Zariski topolojisi olarak adlandırılacak olan τ topolojisinin yapısı incelenecektir.

Anahtar Kelimeler: Derecelendirilmiş Halka, Derecelendirilmiş Modül, Zariski Topolojisi

ABSTRACT

We search for the relationships of the different varieties that defined on $G\text{-Spec}(M)$ where M is a graded R -module, by examining in which conditions they generate a topology. The structure of τ^* is called quasi-Zariski topology, where the set of $V^*(N) = \{P \in G\text{-Spec}(M) | P \supseteq N\}$ the first one of the varieties that we defined, represents the closed sets. Owing to the fact that the structure of τ^* does not satisfy all of the topology axioms. We investigate the structure of τ , which is a Zariski topology and obtained with the closed sets of $V(N) = \{P \in G\text{-Spec}(M) | (P:M) \supseteq (N:M)\}$ that were constituted while we were examining the condition of M which is a multiplication graded R -module that proves all the axioms of topology.

1. GİRİŞ

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, lisans ve yüksek lisans eğitiminde gösterilen cebir ve topoloji derslerinde verilen bazı temel kavramlar hatırlatılacaktır. Hatırlatmalar üç ana başlıkta, sırasıyla Halkalar, Modüller ve Temel Topoloji Kavramları adı altında verilecektir. Halkalar ve Modüller bölümleri oluşturulurken yararlanılan kitaplar Sharp (2000), Çallıalp ve Tekir (2009), olmuştur. Topoloji bölümü için de Munkers (2000) ve Kılıç (2002) kitabından faydalanılmıştır.

1.1 Halkalar

Tanım 1.1.1: İki işlemli $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı verilsin. Her $a, b, c \in R$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa R kümesine bir halka denir.

- i. $a + b = b + a$
- ii. $(a + b) + c = a + (b + c)$
- iii. Her $a \in R$ için $a + 0_R = a$ olacak şekilde bir $0_R \in R$ vardır.
- iv. Her $a \in R$ için $a + (-a) = 0$ olacak şekilde bir $-a \in R$ vardır.
- v. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- vi. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Tanım 1.1.2:

1. R halkasında ‘ $\cdot$ ’ işleminin değişme özelliği varsa R ye bir değişmeli halka denir.
2. R halkasında ‘ $\cdot$ ’ işleminin birim elemanı varsa R ye bir birimli halka denir ve bu birim 1_R ile gösterilir.
3. Birimli ve değişmeli bir R halkasının sıfırdan farklı her elemanının tersi varsa R ye bir cisim, eğer R değişmeli değilse R ye bölümlü (division) halka denir.
4. R halkasında $a \in R$ için $ab = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $b \in R$ bulunabilirse, a elemanına halkanın bir sıfır böleni denir.

Tez boyunca R halkasından bahsettiğimizde birimli ve değişmeli bir halka kastedeceğiz.

Tanım 1.1.3: R bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun.

1. Her $a, b \in I$ için $a - b \in I$,
2. Her $a \in I$ ve her $r \in R$ için $ra \in I$

oluyorsa I ya R nin bir ideali denir.

Tanım 1.1.4: $\{I_n\}_{n \in \Lambda}$, R nin bir idealler ailesi olsun. Bu ideallerin birleşimlerinin ürettiği ideal sonlu sayıda I_n lerden alınan elemanlarının toplamalarının oluşur ve bu ideal $\sum_{n \in \Lambda} I_n$ ile gösterilir.

Önerme 1.1.5: $\{I_n\}_{n \in \Lambda}$, R nin bir idealler ailesi olsun.

$$\sum_{n \in \Lambda} I_n = \left\{ \sum_{i=1}^k x_{n_i} \mid x_{n_i} \in I_{n_i}, n_i \in \Lambda, k \in \mathbb{N} \right\}$$

kümesi R nin bir idealdir.

Önerme 1.1.6: I_1 ve I_2 , R nin iki ideali olsun.

$$I_1 I_2 = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i b_i \mid a_i \in I_1, b_i \in I_2, i = 1, 2, \dots, k \right\}$$

kümesi R nin bir idealidir.

Önerme 1.1.7: R bir halka olmak üzere I , R nin bir ideali ve $X \subseteq R$ olsun.

$$(I : X) = \{r \in R \mid \text{her } x \in X \text{ için } rx \in I\}$$

kümesi R nin bir idealidir. Özel olarak $I = 0$ alınırsa,

$$(0 : X) = \{r \in R \mid \text{her } x \in X \text{ için } rx = 0\}$$

idealine X in sıfırlayıcısı denir ve bu ideal bazen $\text{Ann}(X)$ olarak da gösterilir.

İspat : Her $r, s \in (I : X)$, her $t \in R$ ve her $x \in X$ için $rx - sx = (r - s)x \in I$ olup $r - s \in (I : X)$ dir. Benzer şekilde $t(rx) = (tr)x = (rt)x \in I$, yani $rt \in (I : X)$ olduğundan $(I : X)$ in bir ideal olduğu görülür.

Tanım 1.1.8: P , R halkasının kendinden farklı bir ideali olsun. $a, b \in R$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P ye bir asal ideal denir. R nin bütün asal ideallerinin kümesi $\text{Spec}(R)$ ile gösterilir.

Önerme 1.1.9: P , R halkasının bir asal ideali ve $I_1, I_2, \dots, I_n$ de R halkasının idealleri olsunlar. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. Bir $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $P \supseteq I_j$ dir.
- ii. $P \supseteq \bigcap_{k=1}^n I_k$ dir.
- iii. $P \supseteq \prod_{k=1}^n I_k$ dir.

Önerme 1.1.10: R halkasının bir I ideali için,

$$\sqrt{I} = \{r \in R \mid \text{bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } r^n \in I\}$$

kümesi de R nin, I idealini kapsayan bir idealidir. Bu ideal, I nin radikali olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.11: M , R halkasının kendinden farklı bir ideali olsun. R nin M yi kapsayan M den başka bir has ideali yoksa M ye bir maksimal ideal denir.

1.2 Modüller

Tanım 1.2.1: $(M, +)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun.

$$R \times M \rightarrow M$$

$$(r, m) \rightarrow rm$$

fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa M ye bir R -modül denir,

1. Her $r \in R$ ve her $m, m' \in M$ için $r(m + m') = rm + rm'$
2. Her $r, r' \in R$ ve her $m \in M$ için $(r + r')m = rm + r'm$
3. Her $r, r' \in R$ ve her $m \in M$ için $(rr')m = r(r'm)$
4. Her $m \in M$ için $1_R m = m$.

Örnek 1.2.2:

1. V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ise V bir F -modül olarak düşünülebilir.
2. Her değişmeli grup bir $\mathbb{Z}$ -modüldür.

Tanım 1.2.3: R bir halka, M bir R -modül ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ olsun. N alt kümesi de M deki işlemlerle R -modül oluyorsa N ye M nin bir alt modülü veya R -alt modülü denir.

Örnek 1.2.4: M modülünün kendisi ve $\{0_M\} = 0$ alt kümesi M nin birer alt modülüdür.

Tanım 1.2.5: M bir R -modül olsun. $\{N_i\}_{i \in I}$ ailesi M nin bir alt modüller ailesi olsun. $\bigcup_{i \in I} N_i$ kümesinin ürettiği alt modüle $\{N_i\}_{i \in I}$ alt modüllerinin toplamı denir ve $\sum_{i \in I} N_i$ ile gösterilir.

Önerme 1.2.6: R bir halka, M bir R -modül, N bir alt modül ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ olsun.

$$(N : X) = \{r \in R \mid rX \subseteq N\}$$

ile gösterelim. $(N : X)$ kümesi R nin bir idealidir.

İspat : Her $a, b \in (N : X)$ ve $x \in X$ için

$$ax - bx = (a - b)x \in N$$

olur. Dolayısıyla $a - b \in (N : X)$ tir. Her $a \in (N : X)$ ve $r \in R$ için

$$r(aX) = (ar)X \subseteq N$$

olup $ar \in (N : X)$ elde edilir. Böylece $(N : X)$ kümesi R nin bir ideali olarak bulunmuş olur.

Tanım 1.2.7: R bir halka, M bir R -modül ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ olsun.

$$(0 : X) = \{r \in R | rX = 0\}$$

idealine X in sıfırlayıcısı denir ve $Ann(X)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.8: R bir halka, M bir R -modül olsun. $(0 : M) = \{r \in R | rM = 0\}$ idealine M nin sıfırlayıcısı denir ve $Ann(M)$ ile gösterilir. Eğer $Ann(M) = 0$ ise M ye sadık R -modül denir.

Önerme 1.2.9: M bir R -modül ve $\{N_i\}_{i \in I}$ ailesi M nin alt modüller ailesi olsun.

1. $(\cap_{i \in I} N_i : X) = \cap_{i \in I} (N_i : X)$
2. $(N : \sum_{i \in I} N_i) = \cap_{i \in I} (N : N_i)$
3. N ve N' alt modüller olmak üzere $Ann(N + N') = Ann(N) \cap Ann(N')$ dir.

Tanım 1.2.10: R bir halka ve $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesi R -modüller ailesi olsun.

$$\prod_{i \in I} M_i = \{(m_i)_{i \in I} | m_i \in M_i, i \in I\}$$

kümesini alalım. $\prod_{i \in I} M_i$ kümesi,

$$(m_i)_{i \in I} + (m_i')_{i \in I} = (m_i + m_i')_{i \in I}$$

ve

$$r(m_i)_{i \in I} = (rm_i)_{i \in I}$$

işlemleri altında bir R -modüldür ve $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesinin direkt çarpımı denir.

Bu çarpımda, bileşenlerin ancak sonlu tanesi sıfır olmayan elemanların oluşturduğu alt küme $\prod_{i \in I} M_i$ nin bir alt modülüdür. Bu alt modüle de $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesinin dış direkt toplamı denir ve $\bigoplus_{i \in I} M_i$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.11: R bir halka, M bir R -modül ve $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesi R -alt modüller ailesi olsun.

1. $M = \sum_{i \in I} M_i$ yani her $m \in M$ elemanı $m_i \in M$ olmak üzere sonlu toplam olarak $m = \sum_{i \in I} m_i$ şeklinde yazılabiliyor ve
2. Bu yazılış ancak tek türlü oluyorsa

M ye $\{M_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin iç direkt toplamı denir.

Önerme 1.2.12: R bir halka, M bir R -modül ve $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesi R -alt modüller ailesi olsun. $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olması için gerek ve yeter koşul, $M = \sum_{i \in I} M_i$ ve her $i \in I$ için $M_i \cap (\sum_{i \neq j} M_j) = 0$ olmasıdır.

İspat : Tanım 1.2.11 in 1. koşulundan $M = \sum_{i \in I} M_i$ olduğu açıktır. $m_i \in M_i \cap (\sum_{i \neq j} M_j)$ ise $m_i = \sum_{i \neq j \in I} m_j$ olduğundan sıfırın aşikar yazımından başka $0 = m_i - \sum_{i \neq j \in I} m_j$ yazılışı daha bulunmuş olur.

Tanım 1.2.11 in 2. koşulundan $m_i = 0$ ve her $i \in I$ için $M_i \cap (\sum_{i \neq j} M_j) = 0$ olduğu gösterilmiş olur. Tersine, $M = \sum_{i \in I} M_i$ olsun. Şu halde her $m \in M$ ve $m_i \in M_i$ için $m = \sum_{i \in I} m_i$ şeklinde yazılabilir.

Bu yazılışın tekliğini göstermek için $m = \sum_{i \in I} m_i = \sum_{i \in I} m_i'$ olsun. I nin j . elemanı için, $m_j - m_j' = \sum_{i \neq j} (m_i - m_i') \in M_j \cap (\sum_{i \neq j} M_i) = 0$ yani $m_j = m_j'$ elde edilir. Bu ise her $j \in I$ için sağlandığından yazılışın tekliği gösterilmiş olur.

Tanım 1.2.13: R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir has alt modülü olsun. Her $r \in R$ ve $m \in M$ için, $rm \in N$ iken $m \in N$ veya $r \in (N:M)$ ise N ye M nin bir asal alt modülü denir.

Yardımcı Teorem 1.2.14: R bir halka, M bir R -modül ve N , M 'nin bir has alt modülü olsun. N , M nin bir asal alt modül ise, $(N:M)$ R nin asal idealidir.

Tanım 1.2.15: R bir halka, M bir R -modül olsun. M 'nin her N alt modülü için $N = IM$ olacak şekilde R nin bir I ideali varsa M ye bir çarpımsal modül denir.

Önerme 1.2.16: R bir halka, M bir çarpımsal R -modül olsun. N , M 'nin bir çarpımsal alt modülü olmak üzere $N = (N:M)M$ dir.

İspat : M bir çarpımsal R -modül olduğundan $N = IM$ olacak şekilde R nin bir I ideali vardır. Dolayısıyla $I \subseteq (N:M)$ dir. Böylece $N = IM \subseteq (N:M)M \subseteq N$ olup $N = (N:M)M$ elde edilir.

1.3 Temel Topoloji Kavramları

Tanım 1.3.1: Boştan farklı olan bir X kümesi ile bunun alt kümelerinden oluşan bir τ ailesi verilsin. Eğer bu τ ailesi için;

- $X \in \tau$ ve $\emptyset \in \tau$
- $T_1 \in \tau$ ve $T_2 \in \tau$ iken $T_1 \cap T_2 \in \tau$
- τ kümesinin keyfi sayıda elemanlarından oluşan herhangi bir alt aile $\mathcal{A} = \{T_i | i \in \Lambda\}$ olmak üzere tüm $T_i \in \mathcal{A}$ elemanları için $\bigcup_{i \in \Lambda} T_i \in \tau$

sağlanıyor ise τ ailesine X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

Tanım 1.3.2: τ topolojisinin her bir elemanına (X, τ) uzayında bir açık küme adı verilir.

Sonuç 1.3.3: Bir (X, τ) uzayında;

- X ve $\emptyset$ açık kümelerdir.
- Sonlu sayıda açık kümenin kesişimi de açıktır.
- Keyfi sayıda açık kümenin birleşimi de açıktır.

Örnek 1.3.4:

1. Bir X kümesinin kuvvet kümesi $\mathcal{P}(X)$ olmak üzere $\tau = \mathcal{P}(X)$ ailesi X üzerinde bir topoloji oluşturur. Bu topolojiye ayrık topoloji ve (X, τ) uzayına da ayrık uzay denir.
2. Bir X kümesi için $\tau = \{X, \emptyset\}$ ailesi X üzerinde bir topoloji oluşturur. Bu topolojiye X üzerinde ayrık olmayan topoloji ve böylece elde edilen (X, τ) uzayına da ayrık olmayan uzay denir.
3. Bir X kümesinin alt kümelerinde oluşan $\tau_s = \{\emptyset, \emptyset \neq A \subset X | A^c \text{ sayılabilir}\}$ ailesi X üzerinde bir topoloji oluşturur. Bu topolojiye X üzerinde sayılabilir tümleyenler topolojisi denir.

Tanım 1.3.5: Bir X kümesi üzerinde τ_1 ve τ_2 topolojileri verilsin. Eğer her $T \in \tau_1$ için $T \in \tau_2$ oluyorsa τ_1 topolojisine τ_2 topolojisinden daha kaba ya da τ_2 topolojisi τ_1 topolojisinden daha ince olarak adlandırılır. τ_1 ve τ_2 topolojileri için $\tau_1 \subset \tau_2$ veya $\tau_2 \subset \tau_1$ oluyorsa bu iki topolojiye karşılaştırılabilir topolojiler, aksi durumda karşılaştırılmaz topolojiler denir.

Tanım 1.3.6: Bir (X, τ) topolojik uzayında açık bir kümenin tümleyeni olan kümeye veya tümleyeni açık olan kümeye kapalı küme denir.

Örnek 1.3.7: Örnek 1.3.4 te verilenler için;

1. $(X, \tau = \mathcal{P}(X))$ uzayının kapalı kümeler ailesi $\mathcal{P}(X)$ tir.
2. $(X, \tau = \{\emptyset, X\})$ uzayının kapalı kümeler ailesi de $\{\emptyset, X\}$ tir.
3. Bir X kümesi üzerindeki τ_s topolojisinin kapalı kümeleri $\{X, B \subseteq X | B \text{ sayılabilir}\}$ olur.

Önerme 1.3.8: Bir (X, τ) topolojik uzayında;

1. $\emptyset$ ve X birer kapalı kümedir.
2. Sonlu sayıda kapalı kümenin birleşimi de kapalıdır.
3. Keyfi sayıda kapalı kümenin kesişimi de kapalıdır.

Tanım 1.3.9: Bir (X, τ) topolojik uzayı ve bu uzayın bir Y alt kümesinin göz önüne alalım. Bu uzayın Y alt kümesini içeren tüm kapalı alt kümelerinin kesişimine Y nin kapanışı denir ve $\bar{Y}$ ile gösterilir.

Sonuç 1.3.10: Bir (X, τ) topolojik uzayında Y nin kapanışı, Y kümesini içeren en küçük kapalı kümedir.

Önerme 1.3.11: Bir (X, τ) topolojik uzayının bir Y alt kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul $Y = \bar{Y}$ olmasıdır.

Örnek 1.3.12: $X = \{a, b, c, d, e\}$ üzerindeki $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}, X\}$ topolojisine göre kapalı kümeler ailesi $\tilde{\tau}$ olmak üzere, $\tilde{\tau} = \{X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}, \emptyset\}$ dir. Şu halde bazı alt kümelerinin kapanışı; $\overline{\{a\}} = \{a\}$, $\overline{\{a, b\}} = \{a, b, e\}$, $\overline{\{a, c\}} = X$, $\overline{\{b\}} = \overline{\{e\}} = \{b, e\}$, $\overline{\{a, d\}} = \{a, e\}$, $\overline{\{c\}} = \overline{\{d\}} = \{b, c, d, e\}$ dir. Ayrıca burada $\{a\}$ kümesi kapanışına eşit olduğundan kapalı bir kümedir.

Örnek 1.3.13: $A \subseteq \mathbb{R}$ sonlu bir alt kümeysen $\bar{A} = A$ olur.

Tanım 1.3.14: (X, τ) bir topolojik uzay olsun ve $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ailesini göz önüne alalım. τ topolojisinin her açık kümesi, açık kümelerden oluşan $\mathcal{B}$ ailesinin elemanlarının birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa $\mathcal{B}$ ailesine τ topolojisinin bir tabanı denir.

Önerme 1.3.15: Bir $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ailesinin X kümesi üzerinde bir τ topolojisi üretmesi için;

- a. $B \in \mathcal{B}$ olmak üzere $X = \bigcup B$
- b. Kesişimleri boş kümeden farklı her $A \in \mathcal{B}$ ve her $B \in \mathcal{B}$ ile her $x \in A \cap B$ elemanına karşılık $x \in C_x \subset (A \cap B)$ şeklinde bir $C_x \in \mathcal{B}$ elemanının varlığı gerekli ve yeterlidir.

Örnek 1.3.16: $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin $a < b$ şeklindeki iki elemanı yardımıyla

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

biçimde tanımlanan açık aralıkların oluşturduğu

$$\mathcal{R} = \{\emptyset, (a, b) | a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji belirler.

Tanım 1.3.17: Bir X kümesi, bu kümenin bir Y alt kümesi ve bir $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ailesi verilmiş olsun. Eğer $Y = \bigcup \{F \mid F \in \mathcal{A}\}$ oluyorsa $\mathcal{A}$ ailesine Y alt kümesinin bir örtüsü denir. Eğer $\mathcal{A}$ sayılabilir ise sayılabilir örtü, $\mathcal{A}$ sonlu ise sonlu örtü adını alır. Ayrıca, X üzerindeki bir τ topolojisi için eğer $\mathcal{A} \subset \tau$ ise $\mathcal{A}$ örtüsünün durumuna göre açık örtü, sayılabilir açık örtü ve sonlu açık örtü şeklinde kullanılır.

Tanım 1.3.18: Bir (X, τ) topolojik uzayının her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa bu uzay quasi kompakt olarak adlandırılır.

Tanım 1.3.19: X ve Y birer topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer Y nin her açık alt kümesinin ters görüntüsü X te açıksa f fonksiyonuna sürekli denir.

Örnek 1.3.20: X ve Y birer topolojik uzay ve $a \in Y$ olsun. Öyleyse X ten Y ye giden ve sabit a değerini alan g_a fonksiyonu sürekli. Nitekim eğer $U \subseteq Y$ açık bir küme ise;

$$g_a^{-1}(U) = \begin{cases} X, & a \in U \text{ ise} \\ \emptyset, & a \notin U \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

Teorem 1.3.21: X ve Y birer topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul Y nin her kapalı alt kümesinin ters görüntüsünün kapalı olmasıdır.

Tanım 1.3.22: X ve Y birer topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyonu X in açık (kapalı) her alt kümesini Y nin açık (kapalı) alt kümesine götürüyorsa f fonksiyonuna açık (kapalı) fonksiyon denir.

Sonuç 1.3.23: Sürekli bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunun, eğer varsa tersi açık ve kapalı bir fonksiyondur.

Sonuç 1.3.24: Sürekli birebir ve örten bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunun tersi açık ve kapalı bir fonksiyondur.

Tanım 1.3.25: X ve Y birer topolojik uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa f ye bir homeomorfizma denir:

- f birebir ve örten,
- f sürekli,
- f^{-1} sürekli.

Eğer bu fonksiyon mevcutsa X ve Y uzayları homeomorfik olarak adlandırılır.

Tanım 1.3.26: X bir topolojik uzay ve X_1 ile X_2 kapalı kümeler olmak üzere $X = X_1 \cup X_2$ iken $X_1 = X$ veya $X_2 = X$ oluyorsa X indirgenemez denir.

Tanım 1.3.27: X bir topolojik uzay olsun. X in indirgenemez alt kümelerinin maksimaline X in indirgenemez bileşeni adı verilir.

Tanım 1.3.28: Bir (X, τ) topolojik uzayının $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için bu elemanlardan en az birinin diğerini içine almayan bir komşuluğu varsa bu uzaya T_0 uzayı ve τ topolojisine de T_0 topolojisi denir.

Örnek 1.3.29: Bir X kümesi üzerindeki ayrık topolojiye göre bir T_0 uzayıdır.

Tanım 1.3.30: Bir (X, τ) topolojik uzayının $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için, bu elemanların her birinin diğerini içine almayan bir komşuluğu varsa bu uzaya T_1 uzayı ve τ topolojisine de T_1 topolojisi denir.

Örnek 1.3.31: Herhangi bir X kümesi için $\tau = \mathcal{P}(X)$ topolojisi bir T_1 topolojisidir.

Sonuç 1.3.31: Her T_1 uzayı bir T_0 uzayıdır. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek 1.3.32: $X = \{a, b\}$ üzerindeki $\tau = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ topolojisi bir T_0 topolojisidir ancak T_1 topolojisi değildir.

2. DERECELENDİRİLMİŞ HALKALAR

2.1 Derecelendirilmiş Halkaların Özellikleri

Tanım 2.1.1: G , birimi e olan bir çarpımsal grup ve R bir halka olsun. R nin $g \in G$ ile indekslenmiş R_g toplamsal alt grupları ve her $g, h \in G$ için, $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ ve $R_g R_h \subseteq R_{gh}$ oluyorsa R ye bir G -derecelendirilmiş halka denir ve $G(R)$ ile gösterilir.

R_g nin elemanları g . dereceden homojen olarak adlandırılır. Tüm homojen elemanların kümesi $h(R)$ ile gösterilir ve $h(R) = \bigcup_{g \in G} R_g$ dir. Her bir $a \in R$, tüm terimleri sıfırdan farklı olacak şekildeki tek türlü yazılan sonlu $\sum_{g \in G} a_g$ toplamından oluşur. Buradaki a_g elemanlarına a nın R_g deki g -bileşeni adı verilir.

Örnek 2.1.2: R bir halka olmak üzere $R[X]$ polinom halkasını ele alalım. $i, j \in \mathbb{N}$ ve $R_i = Rx^i$ olmak üzere $R[X] = \bigoplus_{i \geq 0} Rx^i$ olarak yazılabilir. Ayrıca $R_i R_j = Rx^i Rx^j = Rx^{i+j} = R_{i+j}$ olduğundan $R[X]$ bir derecelendirilmiş halkadır.

Teorem 2.1.3: R bir derecelendirilmiş halka olsun. 1_R , e . dereceden homojendir yani $1_R \in R_e$ dir.

İspat : $1_R \in R_a$ olsun. Her $g \in G$ için $1.x_g = x_g$ olduğundan $R_a R_g = R_g$ dir. Dolayısıyla $ag = g$ olup $a = e$ elde edilir.

Sonuç 2.1.4: R bir derecelendirilmiş halka olmak üzere R_e , R nin bir alt halkasıdır.

İspat : $R_e R_e \subseteq R_e$ olduğundan R_e , R halkasındaki işleme göre kapalıdır. Ayrıca Teorem 2.1.3 e göre $1_R \in R_e$ olduğundan R_e bir alt halkadır.

Tanım 2.1.5: R bir derecelendirilmiş halka ve I bir ideali olsun. $g \in G$ için $I_g = I \cap R_g$ olmak üzere $I = \bigoplus_{g \in G} I_g$ ise I ya R nin bir derecelendirilmiş ideali denir ve I_g , I nın g -bileşeni olarak adlandırılır. I daki homojen elemanların kümesini $h(I) = h(R) \cap I$ ile göstereceğiz.

Not : R nin derecelendirilmiş I ideali tez içerisinde $I \triangleleft_G R$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.6: R bir derecelendirilmiş halka ve p bir has ideali olsun. $a, b \in h(R)$ olmak üzere $ab \in p$ olması $a \in p$ veya $b \in p$ olmasını gerektiriyorsa p ye bir derecelendirilmiş ideal denir.

Önerme 2.1.7: R bir derecelendirilmiş halka, I, J ve p derecelendirilmiş idealleri olsun. p derecelendirilmiş asal ideal ve $I \cap J \subseteq p$ ise $I \subseteq p$ veya $J \subseteq p$ dir.

İspat : $I \cap J \subseteq p$ ve $I \not\subseteq p$ olsun. Bu durumda bir $a \in h(I) \setminus p$ elemanı mevcuttur. Her $b \in h(J)$ elemanı için $ab \in IJ \subseteq I \cap J \subseteq p$ ve p derecelendirilmiş asal olduğundan $b \in p$ olup $J \subseteq p$ elde edilir.

Sonuç 2.1.8: R bir derecelendirilmiş halka, I, J ve p derecelendirilmiş idealleri olsun. p derecelendirilmiş asal ideal ve $IJ \subseteq p$ ise $I \subseteq p$ veya $J \subseteq p$ dir.

Tanım 2.1.9: R bir derecelendirilmiş halka ve I derecelendirilmiş bir ideali olsun. Her $g \in G$ için $x_g^{n_g} \in I$ olacak şekilde $n_g > 0$ mevcut ise tüm $x \in R$ elemanlarının kümesine I nin derecelendirilmiş radikali denir ve $Gr(I)$ ile gösterilir. Eğer r , $G(R)$ nin bir homojen elemanı ise $r \in Gr(I)$ olması için gerek ve yeter koşul bazı $n \in \mathbb{N}$ için $r^n \in I$ olmasıdır.

Tanım 2.1.10: R bir derecelendirilmiş halka ve I , $G(R)$ nin derecelendirilmiş bir ideali ve $I \neq R$ olsun. $I \subsetneq J \subsetneq R$ olacak şekilde $G(R)$ nin J ideali yoksa I ya derecelendirilmiş maksimal ideal denir.

2.2 Derecelendirilmiş Halkalar Üzerinde Topoloji

$G(R)$ nin tüm asal ideallerinin kümesi $G\text{-Spec}(R)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.1: I , $G(R)$ nin bir ideali olsun. $V^R(I) = \{p \in G\text{-Spec}(R) | p \supseteq I\}$ kümesi I nin çokluğu olarak adlandırılır.

Önerme 2.2.2: I , $G(R)$ nin bir ideali olmak üzere $V^R(I)$ kümesi için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

1. $V^R(0) = G\text{-Spec}(R)$ ve $V^R(R) = \emptyset$
2. $\bigcap_{i \in \Lambda} V^R(I_i) = V^R(\sum_{i \in \Lambda} I_i)$
3. $V^R(I) \cup V^R(J) = V^R(I \cap J) = V^R(IJ)$

İspat :

1. 0 ideali $G(R)$ nin tüm asal idealleri tarafından içerildiğinden $V^R(0) = G\text{-Spec}(R)$ ve R yi kapsayan bir derecelendirilmiş asal ideal mevcut olmadığından $V^R(R) = \emptyset$ olduğu görülür.
2. $p \in \bigcap_{i \in \Lambda} V^R(I_i) \Leftrightarrow$ Her $i \in \Lambda$ için $p \in V^R(I_i)$
 $\Leftrightarrow$ Her $i \in \Lambda$ için $I_i \subseteq p$
 $\Leftrightarrow \sum_{i \in \Lambda} I_i \subseteq p$
 $\Leftrightarrow p \in V^R(\sum_{i \in \Lambda} I_i)$

olduğundan $\bigcap_{i \in \Lambda} V^R(I_i) = V^R(\sum_{i \in \Lambda} I_i)$ elde edilir.

3. $p \in V^R(I \cap J) \Rightarrow I \cap J \subseteq p$
 $\Rightarrow I \subseteq p$ veya $J \subseteq p$
 $\Rightarrow p \in V^R(I)$ veya $p \in V^R(J)$
 $\Rightarrow p \in V^R(I) \cup V^R(J)$ dir.

Yani $V^R(I \cap J) \subseteq V^R(I) \cup V^R(J)$ dir. Ters kapsama için, $V^R(I) \subseteq V^R(I \cap J)$ ve $V^R(J) \subseteq V^R(I \cap J)$ olduğundan $V^R(I) \cup V^R(J) \subseteq V^R(I \cap J)$ elde edilir.

Benzer şekilde $p \in V^R(IJ) \Rightarrow IJ \subseteq p$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow I \subseteq p \text{ veya } J \subseteq p \\ &\Rightarrow p \in V^R(I) \text{ veya } p \in V^R(J) \\ &\Rightarrow p \in V^R(I) \cup V^R(J) \end{aligned}$$

olduğundan $V^R(IJ) \subseteq V^R(I) \cup V^R(J)$ dir ve ters kapsama için, $V^R(I) \subseteq V^R(IJ)$ ve $V^R(J) \subseteq V^R(IJ)$ olduğundan $V^R(I) \cup V^R(J) \subseteq V^R(IJ)$ bulunur.

Sonuç 2.2.3: $\zeta(R) = \{V^R(I) | I \triangleleft_G R\}$ kümeler ailesi kapalı kümeler için topolojik uzay aksiyomlarını sağlar. $G\text{-Spec}(R)$ üzerinde oluşturulan bu topoloji Zariski topolojisi veya spektral topoloji olarak adlandırılır.

Önerme 2.2.4: R bir derecelendirilmiş halka ve $r \in h(R)$ olsun. $D_r = G\text{-Spec}(R) \setminus V^R(rR)$ bir açık kümedir ve $\{D_r | r \in h(R)\}$, $G\text{-Spec}(R)$ üzerindeki Zariski topolojisi için bir tabandır.

İspat : U, X te herhangi bir açık küme olsun. Dolayısıyla derecelendirilmiş bir I ideali için $U = X \setminus V^R(I)$ dır. Şu halde, $U = X \setminus V^R(\bigcup_{a_i \in h(I)} \{a_i\})$

$$\begin{aligned} &= X \setminus \bigcap_{a_i \in h(I)} V^R(a_i) \\ &= \bigcup_{a_i \in h(I)} (X \setminus V^R(a_i)) \\ &= \bigcup_{a_i \in h(I)} D_{a_i} \end{aligned}$$

elde edilir ve $\{D_r | r \in h(R)\}$ kümesinin Zariski topolojisi için bir taban olduğu görülür.

Önerme 2.2.5: Her $r, s \in h(R)$ için $D_r \cap D_s = D_{rs}$ dir.

İspat : $p \in D_r \cap D_s \Leftrightarrow rR \not\subseteq p$ ve $sR \not\subseteq p \Leftrightarrow rsR \not\subseteq p \Leftrightarrow p \in D_{rs}$ olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Önerme 2.2.6: Her $r, s \in h(R)$ için $D_r = D_s$ olması için gerek ve yeter koşul $(\sqrt{rR}) = (\sqrt{sR})$ olmasıdır.

İspat : $D_r = D_s \Leftrightarrow V^R(rR) = V^R(sR)$

$$\Leftrightarrow \text{her } p \in G\text{-Spec}(R) \text{ için } (r \in p \Leftrightarrow s \in p)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{rR}) = (\sqrt{sR})$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7: Her $r \in h(R)$ için D_r quasi-kompakttır.

İspat : $r \in h(R)$ olsun. Her $i \in \Lambda$ için $s_i \in h(R)$ olmak üzere $\{D_{s_i} | i \in \Lambda\}$ kümesi D_r nin bir açık örtülüğü olsun. Böylece $D_r = G\text{-Spec}(R) \setminus V^R(rR)$

$$\begin{aligned} &\subseteq \bigcup_{i \in \Lambda} D_{s_i} \\ &= \bigcup_{i \in \Lambda} G\text{-Spec}(R) \setminus V^R(s_i R) \\ &= \bigcup_{i \in \Lambda} G\text{-Spec}(R) \setminus V^R(s_i) \end{aligned}$$

dir ve buradan $V^R(\bigcup_{i \in \Lambda} \{s_i\}) \subseteq V^R(r) = V^R(\sqrt{rR})$ bulunur. Böylece $\sqrt{rR} \subseteq \sqrt{(\bigcup_{i \in \Lambda} \{s_i\})}$ elde edilir. Dolayısıyla $r^n \in (\bigcup_{i \in \Lambda} \{s_i\})$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $j \in \Delta$ için $t_j \in h(R)$ olmak üzere $r^n = \sum_{j \in \Delta} t_j s_j$ olacak şekilde sonlu bir $\Delta \subseteq \Lambda$ alt kümesi vardır. Diğer yandan $p \in V^R(r) \Leftrightarrow p \in V^R(r^n)$ olduğundan dolayı $(rR)^n \subseteq (\{s_j | j \in \Delta\})$ dir ve buradan $V^R(\{s_j | j \in \Delta\}) \subseteq V^R(r^n) = V^R(r)$ elde edilir. Şu halde $\bigcap_{j \in \Delta} V^R(s_j) \subseteq V^R(r)$ olduğundan $\bigcup_{j \in \Delta} (G\text{-Spec}(R) \setminus V^R(s_j)) \supseteq G\text{-Spec}(R) \setminus V^R(r)$ olur ve böylece $D_r \subseteq \bigcup_{j \in \Delta} D_{s_j}$ elde edilir. Δ kümesi sonlu olduğundan D_r quasi kompakttır.

Teorem 2.2.8: R bir derecelendirilmiş halka olmak üzere, $G\text{-Spec}(R)$ Zariski topolojisi için bir T_0 uzayıdır.

İspat : $P, Q \in G\text{-Spec}(R)$, $P \neq Q$ olsun. $r \in h(R)$ için $r \in P \setminus Q$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse $P \notin D_r$ ve $r \notin Q$ olduğundan $rR \not\subseteq Q$ olup $Q \notin V^R(rR)$ dir. Dolayısıyla $Q \in D_r$ elde edilir ve D_r bir açık küme olduğundan $G\text{-Spec}(R)$ bir T_0 uzayıdır.

Not : $G\text{-Spec}(R)$ üzerinde oluşturulan Zariski topolojisi, $G(R)$ nin bir I ideali için $G\text{-Spec}(R/I)$ üzerinde de düşünülebileceğinden tüm özellikler bu küme için de sağlanır.

3. DERECELENDİRİLMİŞ MODÜLLER

3.1 Derecelendirilmiş Modüllerin Özellikleri

Tanım 3.1.1: R bir derecelendirilmiş halka ve M bir R -modül olsun. $\{M_g\}_{g \in G}$, M modülünün alt gruplarının ailesi olmak üzere her $g, h \in G$ için

$$M = \bigoplus_{g \in G} M_g \text{ ve } R_g M_h \subseteq M_{gh}$$

oluyorsa R -modül M ye G -derecelendirilmiş R -modül (veya derecelendirilmiş R -modül) denir.

$R_g M_h$ kümesi, $r_g \in R_g$ ve $m_h \in M_h$ olmak üzere $r_g m_h$ elemanlarının sonlu toplamlarından oluşan M nin toplamsal alt grubudur. Tüm homojen elemanların kümesi $h(M)$ ile gösterilir ve $h(M) = \bigcup_{g \in G} M_g$ dir.

Örnek 3.1.2: R bir halka ve M bir R -modül olsun. $M[X]$ bir derecelendirilmiş $R[X]$ -modüldür. Çünkü, $R[X] = \bigoplus_{i \geq 0} R x^i = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ ve $M[X] = \bigoplus_{i \geq 0} M x^i = \bigoplus_{i \geq 0} M_i$ şeklinde yazılırsa $R_i M_j = (R x^i)(M x^j) = (RM) x^{i+j} = M_{i+j}$ olduğu görülür.

Önerme 3.1.3: $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ derecelendirilmiş bir R -modül ise her $g \in G$ için M nin M_g alt grubu bir R_e -modüldür.

İspat : $R_e M_h \subseteq M_{eh} = M_h$ olduğundan ispat açıktır.

Tanım 3.1.4: $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ derecelendirilmiş bir R -modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. Her $g \in G$ için $N_g = N \cap M_g$ olmak üzere $N = \bigoplus_{g \in G} N_g$ ise N ye M nin bir derecelendirilmiş alt modülü denir. Ayrıca N_g , N nin g -bileşeni olarak adlandırılır.

Not : M nin derecelendirilmiş N alt modülü tez içerisinde $N <_G M$ ile gösterilecektir.

Önerme 3.1.5: R bir derecelendirilmiş halka, $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ derecelendirilmiş bir R -modül ve N, M nin bir derecelendirilmiş alt modülü olsun. Her $g \in G$ için $(M/N)_g = (M_g + N)/N$ ile M/N bölüm modülü bir G -derecelendirilmiş R -modül yapılabilir.

İspat : $\bigoplus_{g \in G} (M/N)_g = \bigoplus_{g \in G} (M_g + N)/N = \bigoplus_{g \in G} M_g + N/N = M + N/N = M/N$ ve

$$R_g (M/N)_h = R_g (M_h + N)/N = R_g M_h + R_g N + N/N \subseteq M_{gh} + N/N = (M/N)_{gh}$$

olduğundan M/N bölüm modülü bir G -derecelendirilmiş R -modüldür.

Tanım 3.1.6: M ve M' derecelendirilmiş R -modüller olsun. $\sigma \in G$ olmak üzere $f: M \rightarrow M'$ R -modül homomorfizması her $\tau \in G$ için $f(M_\tau) \subseteq M'_{\tau\sigma}$ koşulunu sağlıyorsa f ye σ derecesinden derecelendirilmiş homomorfizma denir ve f_σ ile gösterilir.

Not : Özel olarak $\sigma = e$ olduğunda f_e yerine f kullanılacaktır.

Tanım 3.1.7: R bir derecelendirilmiş halka ve M bir derecelendirilmiş R -modül, N de M nin bir derecelendirilmiş R -alt modülü ve $(N:M) = p$ olsun. $N \neq M$ ve $a \in h(R)$ ve $m \in h(M)$ olmak üzere $am \in N$ iken $a \in p$ veya $m \in N$ oluyorsa N ye derecelendirilmiş asal (p -asal) alt modül denir.

Yardımcı Teorem 3.1.8: R bir derecelendirilmiş halka ve N derecelendirilmiş bir R -modül M nin derecelendirilmiş R -alt modülü olsun. Bu durumda $(N:M)$ ideali R nin derecelendirilmiş idealidir.

İspat : Her $g \in G$ için $(N:M)_g = (N:M) \cap R_g \subseteq (N:M)$ yani $\bigoplus_{g \in G} (N:M)_g \subseteq (N:M)$ dir. Diğer taraftan $a = \sum_{g \in G} a_g \in (N:M)$ olsun. Her $i = 1, 2, \dots, t$ için $a_{g_i} \neq 0$ ve her $g \notin \{g_1, g_2, \dots, g_t\}$ için $a_g = 0$ olmak üzere genelliği bozmadan $a = \sum_{i=1}^t a_{g_i}$ kabul edebiliriz. $a \in (N:M)$ olduğundan $\sum_{i=1}^t a_{g_i} M \subseteq N$ dir. M derecelendirilmiş R -modül olduğundan bir $m \in M$ ve her j için $m_{h_j} \neq 0$ olmak üzere $m = \sum_{j=1}^k m_{h_j}$ yazabiliriz. Buradan her j için $am_{h_j} \in N$ elde edilir. Böylece $\sum_{i=1}^k a_{g_i} m_{h_j} = am_{h_j} \in N$ ve N derecelendirilmiş alt modül olduğundan $a_{g_i} m_{h_j} \in N$ dir. Dolayısıyla $a_{g_i} M \subseteq N$ olup $a_{g_i} \in (N:M)$ ve aynı zamanda $a_{g_i} \in R_{g_i}$ olduğundan $a_{g_i} \in (N:M)_{g_i}$ elde edilir ve ters kapsama da gösterilmiş olur.

Önerme 3.1.9: R bir derecelendirilmiş halka ve M bir derecelendirilmiş R -modül olsun. N , M nin bir derecelendirilmiş asal R -alt modülü ise $(N:M)$, R nin derecelendirilmiş asal idealidir.

İspat : N derecelendirilmiş asal R -alt modül olduğundan $(N:M) \neq R$ dir. Yardımcı teorem 3.1.8 den $(N:M)$ derecelendirilmiş idealdir. $a, b \in h(R)$ olmak üzere $ab \in (N:M)$ ve $b \notin (N:M)$ olsun. Şu halde $abM \subseteq N$ ve bir $m \in M$ için $bm \notin N$ dir. M derecelendirilmiş olduğundan bir $g \in G$ için $bm_g \notin N$ dir. $abm \in N$ ve N derecelendirilmiş olduğundan $abm_g \in N$ dir ve N derecelendirilmiş asal ve $bm_g \notin N$ olduğundan $a \in (N:M)$ dir.

Not : Yukarıdaki önermede $(N:M)$ R nin derecelendirilmiş asal ideali iken N M nin

derecelendirilmiş asal R -alt modülü olmayabilir.

Örnek 3.1.10: $R = \mathbb{Z} = R_0$ $\mathbb{Z}$ -derecelendirilmiş halka ve $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bir $\mathbb{Z}$ -derecelendirilmiş R -modül olsun. $N = 4\mathbb{Z} \times \{0\}$ derecelendirilmiş alt modülünü ele alalım. $(N:M) = \{r \in \mathbb{Z} | r(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \subseteq 4\mathbb{Z} \times \{0\}\} = 0$, R de derecelendirilmiş asaldır ancak $2(2,0) \in N$ iken $2 \notin (N:M)$ ve $(2,0) \notin N$ olduğundan N alt modülü M nin derecelendirilmiş asal alt modülü değildir.

Not : R bir halka I, J ve P idealleri olsun. Önerme 1.1.9 dan P asal ideal ve $I \cap J \subseteq P$ iken $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ olduğunu biliyoruz. Ancak bu özelliği derecelendirilmiş asal alt modüller için genelleyemeyiz.

Örnek 3.1.11: $\mathbb{Z}$ -derecelendirilmiş $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$ -modülünü ele alalım. Öncelikle $N = \{0\} \times \{0\}$ asal alt modülünün derecelendirilmiş asal alt modül olduğunu gösterelim. $r \in h(R)$ ve $m \in h(M) = (\mathbb{Z} \times 0) \cup (0 \times \mathbb{Z})$ alalım. $(N:M) = 0$ olduğu açıktır. $rm \in \{0\} \times \{0\}$ ve $m \notin \{0\} \times \{0\}$ olsun.

$m = (a, 0) \in h(M)$ için $r(a, 0) = (ra, 0) \in \{0\} \times \{0\}$ olup $r = 0 \in (N:M)$ olduğu görülür. Benzer şekilde $m = (0, b) \in h(M)$ için aynı sonuç elde edilir. $(\mathbb{Z} \times \{0\}) \cap (\{0\} \times \mathbb{Z}) \subseteq \{0\} \times \{0\}$ olur fakat $(\mathbb{Z} \times \{0\}) \not\subseteq \{0\} \times \{0\}$ ve $(\{0\} \times \mathbb{Z}) \not\subseteq \{0\} \times \{0\}$ dir.

Tanım 3.1.12: M bir derecelendirilmiş R -modül olsun. M nin derecelendirilmiş N alt modülü için $N = IM$ olacak şekilde $G(R)$ nin bir I ideali varsa M ye çarpımsal derecelendirilmiş R -modül denir.

Yardımcı Teorem 3.1.13: M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modül olmak üzere N, N_1 ve N_2 de M nin derecelendirilmiş alt modülleri olsun. Bu durumda N derecelendirilmiş asal alt modül ise $N_1 \cap N_2 \subseteq N$ iken $N_1 \subseteq N$ veya $N_2 \subseteq N$ dir.

İspat : M çarpımsal derecelendirilmiş R -modül olduğundan $N_1 = IM$ ve $N_2 = JM$ olacak şekilde $G(R)$ nin I ve J idealleri vardır. Şu halde $IM \cap JM \subseteq N$ ise $(IM \cap JM:M) = (IM:M) \cap (JM:M) \subseteq (N:M)$ dir. Önerme 3.1.9 a göre $(N:M)$ derecelendirilmiş asal ideal olduğundan, $(IM:M) \subseteq (N:M)$ veya $(JM:M) \subseteq (N:M)$ elde edilir. Bu durumda $(IM:M)M \subseteq (N:M)M$ veya $(JM:M)M \subseteq (N:M)M$ ve M derecelendirilmiş çarpımsal R -modül olduğundan $IM \subseteq N$ veya $JM \subseteq N$ yani $N_1 \subseteq N$ veya $N_2 \subseteq N$ dir.

Tanım 3.1.14: M bir derecelendirilmiş R -modül olmak üzere $M = Rx_{g_1} + Rx_{g_2} + \dots + Rx_{g_n}$

olacak şekilde $x_{g_1}, x_{g_2}, \dots, x_{g_n} \in h(M)$ elemanları mevcutsa M derecelendirilmiş R -modülüne sonlu üretilmiştir denir.

3.2 $G\text{-Spec}(M)$ Üzerinde Topoloji

Önerme 3.2.1: M bir derecelendirilmiş R -modül olsun. M nin bir derecelendirilmiş N alt modülü için $V^*(N) = \{P \in G\text{-Spec}(M) | P \supseteq N\}$ çokluğunu tanımlayalım. Şu halde aşağıdaki ifadeler M nin derecelendirilmiş alt modülleri N, N_i ve L için doğrudur:

1. $V^*(0) = G\text{-Spec}(M)$ ve $V^*(M) = \emptyset$
2. $\bigcap_{i \in \Lambda} V^*(N_i) = V^*(\sum_{i \in \Lambda} N_i)$
3. $V^*(N) \cup V^*(L) \subseteq V^*(N \cap L)$ dir.

İspat :

1. 0 alt modülü, tüm derecelendirilmiş asal alt modüller tarafından içerildiğinden $V^*(0) = G\text{-Spec}(M)$ dir ve M yi kapsayan herhangi bir derecelendirilmiş asal alt modül olmadığından $V^*(M) = \emptyset$ olduğu görülür.
2. $P \in \bigcap_{i \in \Lambda} V^*(N_i) \Leftrightarrow \text{Her } i \in \Lambda \text{ için } P \in V^*(N_i)$
 $\Leftrightarrow \text{Her } i \in \Lambda \text{ için } N_i \subseteq P$
 $\Leftrightarrow \sum_{i \in \Lambda} N_i \subseteq P$
 $\Leftrightarrow P \in V^*(\sum_{i \in \Lambda} N_i)$
 olduğundan sonuç elde edilir.
3. $N \cap L \subseteq N$ ve $N \cap L \subseteq L$ olduğundan $V^*(N) \subseteq V^*(N \cap L)$ ve $V^*(L) \subseteq V^*(N \cap L)$, dolayısıyla $V^*(N) \cup V^*(L) \subseteq V^*(N \cap L)$ dir. Ancak ters kapsama, Önerme 1.1.9 derecelendirilmiş asal alt modüller için geçerli olmadığından sağlanmaz.

Sonuç 3.2.2: Topolojik uzay aksiyomlarının tümü sağlanmadığından $V^*(N)$ kümesi topolojik bir yapı oluşturmaz.

Tanım 3.2.3: Bir M derecelendirilmiş R -modülü üzerinde $\zeta^*(M) = \{V^*(N) | N <_G M\}$ kümesi sonlu birleşim altında kapalı olduğundan $V^*(N)$ kümesi kapalı küme olarak göz önüne alınırsa, M ye G -top modül ve $\zeta^*(M)$ ile oluşturulan topolojiye quasi-Zariski topolojisi denir.

Teorem 3.2.4: M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modül ise G -top modüldür.

İspat : M nin G -top modül olduğunu kanıtlamak için $V^*(N \cap L) \subseteq V^*(N) \cup V^*(L)$ kapsamasının gösterilmesi yeterlidir.

$$P \in V^*(N \cap L) \Rightarrow N \cap L \subseteq P$$

$$\Rightarrow (N \cap L : M) \subseteq (P : M)$$

$$\Rightarrow (N : M) \cap (L : M) \subseteq (P : M)$$

$$\Rightarrow (N : M) \subseteq (P : M) \text{ veya } (L : M) \subseteq (P : M)$$

$$\Rightarrow (N : M)M \subseteq (P : M)M \text{ veya } (L : M)M \subseteq (P : M)M$$

dir. M bir çarpımsal derecelendirilmiş R -modül olduğundan Yardımcı Teorem 3.1.13 e göre $N \subseteq P$ veya $L \subseteq P$ olur. Yani $P \in V^*(N)$ veya $P \in V^*(L)$ elde edilir. Dolayısıyla $P \in V^*(N) \cup V^*(L)$ olup kapsama gösterilmiş olur.

Sonuç 3.2.5: $\zeta'(M) = \{V^*(IM) | I \triangleleft_G R\}$ kümesi sonlu birleşim altında kapalı olduğundan bir topoloji oluşturur. Bu topoloji τ' ile gösterilsin.

Sonuç 3.2.6: M bir G -top modül ise τ^* topolojisi τ' topolojisinden daha incedir.

➤ Yukarıdaki iki sonuçtan faydalananarak bir başka topolojik yapı tanımlayalım.

Önerme 3.2.7: M bir derecelendirilmiş R -modül olsun. M nin bir derecelendirilmiş N alt modülü için $V(N) = \{P \in G\text{-Spec}(M) | (P : M) \supseteq (N : M)\}$ çokluğunu tanımlayalım. Şu halde M nin derecelendirilmiş alt modülleri N, N_i ve L için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

1. $V(0) = G\text{-Spec}(M)$ ve $V(M) = \emptyset$
2. $\bigcap_{i \in \Lambda} V(N_i) = V(\sum_{i \in \Lambda} (N_i : M)M)$
3. $V(N) \cup V(L) = V(N \cap L)$ dir.

İspat :

1. $(0 : M)$ derecelendirilmiş idealini $P \in G\text{-Spec}(M)$ olmak üzere tüm $(P : M)$ derecelendirilmiş asal idealleri kapsadığı için $V(0) = G\text{-Spec}(M)$ dir. Ayrıca $(M : M) = R$ ve R yi kapsayan derecelendirilmiş asal ideal bulunmadığından $V(M) = \emptyset$ olduğu görülür.

2. $P \in \bigcap_{i \in \Lambda} V(N_i) \Leftrightarrow$ her $i \in \Lambda$ için $P \in V(N_i)$

$$\Leftrightarrow \text{her } i \in \Lambda \text{ için } (N_i : M) \subseteq (P : M)$$

$$\Leftrightarrow \text{her } i \in \Lambda \text{ için } (N_i : M)M \subseteq (P : M)M$$

$$\Leftrightarrow (\sum_{i \in \Lambda} (N_i : M)M) \subseteq (P : M)M \subseteq P$$

$$\Leftrightarrow P \in V(\sum_{i \in \Lambda} (N_i : M)M)$$

dir. Dolayısıyla $\bigcap_{i \in \Lambda} V(N_i) = V(\sum_{i \in \Lambda} (N_i : M)M)$ elde edilir.

3. $N \cap L \subseteq N$ ve $N \cap L \subseteq L$ olduğundan $V(N) \subseteq V(N \cap L)$ ve $V(L) \subseteq V(N \cap L)$ olup

$V(N) \cup V(L) \subseteq V(N \cap L)$ elde edilir. Ters kapsama için,

$$P \in V(N \cap L) \Rightarrow (N \cap L : M) \subseteq (P : M)$$

$$\Rightarrow (N : M) \cap (L : M) \subseteq (P : M)$$

$$\Rightarrow (N : M) \subseteq (P : M) \text{ veya } (L : M) \subseteq (P : M)$$

$$\Rightarrow P \in V(N) \text{ veya } P \in V(L)$$

$$\Rightarrow P \in V(N) \cup V(L)$$

olduğundan eşitlik elde edilmiş olur.

Tanım 3.2.8: $\zeta(M) = \{V(N) | N <_G M\}$ kapalı kümeler ailesi sonlu birleşim altında her zaman kapalı olduğu için topolojik uzay aksiyomlarının tümünü sağlamış olur. M üzerinde oluşturulan bu topolojiye Zarsiki topolojisi denir. Bu topoloji τ ile gösterilsin.

τ, τ^*, τ' topolojileri arasındaki bağıntıları incelemek için $G\text{-Spec}(M)$ üzerindeki Zariski topolojisini ele alalım.

Yardımcı teorem 3.2.9: M bir derecelendirilmiş R -modül ve N ve L , M nin derecelendirilmiş alt modülleri olsun. $(N : M) = (L : M)$ ise $V(N) = V(L)$ dir. N ve L derecelendirilmiş asal alt modüller ise ifadenin tersi de doğrudur.

İspat : $P \in V(N) \Leftrightarrow (P : M) \supseteq (N : M) = (L : M) \Leftrightarrow P \in V(L)$ olduğu görülür.

N asal ise $N \in V(N) = V(L) \Rightarrow (N : M) \supseteq (L : M)$ dir.

L asal ise $L \in V(L) = V(N) \Rightarrow (L : M) \supseteq (N : M)$ olup $(N : M) = (L : M)$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.2.10: M bir derecelendirilmiş R -modül ve N , M nin bir derecelendirilmiş alt modülü ve $p \in G\text{-Spec}(R)$ olsun.

$G\text{-Spec}_p(M) = \{P \in \text{Spec}(M) | (P : M) = p\}$ olmak üzere

$V(N) = \bigcup_{p \in V^R(N : M)} G\text{-Spec}_p(M)$ eşitliği mevcuttur.

İspat : $P \in \bigcup_{p \in V^R(N : M)} G\text{-Spec}_p(M) \Leftrightarrow \text{Bazı } p \in V^R(N : M) \text{ için } P \in G\text{-Spec}(M)$

$$\Leftrightarrow \text{Bazı } p \in V^R(N : M) \text{ için } (P : M) = p$$

$$\Leftrightarrow (N : M) \subseteq p = (P : M)$$

$$\Leftrightarrow P \in V(N)$$

olduğundan $V(N) = \bigcup_{p \in V^R(N:M)} G\text{-Spec}_p(M)$ dir.

Yardımcı Teorem 3.2.11: M bir derecelendirilmiş R -modül ve N, M nin bir derecelendirilmiş alt modülü olsun. $V(N) = V((N:M)M) = V^*((N:M)M)$ dir. Özel olarak $G(R)$ nin her derecelendirilmiş I ideali için $V(IM) = V^*(IM)$ dir.

İspat : $(N:M)M \subseteq N$ olduğundan $V(N) \subseteq V((N:M)M)$ dir. $P \in V((N:M)M)$ alalım. Bu durumda $((N:M)M:M) \subseteq (P:M)$ dir. Ayrıca $(N:M) \subseteq ((N:M)M:M)$ olduğu gösterilirse $P \in V(N)$ olur ve ters kapsama gösterilmiş olur. $r \in (N:M)$ olsun. Şu halde $r((N:M)M) \subseteq rN \subseteq M$ olup $r \in ((N:M)M:M)$ olduğundan istenen elde edilmiş olur.

$$P \in V(N) \Leftrightarrow (P:M) \supseteq (N:M)$$

$$\Leftrightarrow P \supseteq (P:M)M \supseteq (N:M)M$$

$$\Leftrightarrow P \in V^*((N:M)M)$$

olduğundan $V(N) = V((N:M)M) = V^*((N:M)M)$ dir.

Sonuç olarak $\zeta(M) = \zeta'(M) \subseteq \zeta^*(M)$ olduğu görülür ve sıradaki teorem elde edilir:

Teorem 3.2.12:

1. Derecelendirilmiş bir R -modül M için $G\text{-Spec}(M)$ üzerindeki τ topolojisi ile τ' topolojisi eşittir.
2. Bir M derecelendirilmiş G -top modülü için $G\text{-Spec}(M)$ üzerindeki τ^* topolojisi, τ topolojisinden daha incedir.

İspat : Yardımcı teoremlerden elde edilen $\zeta(M) = \zeta'(M) \subseteq \zeta^*(M)$ sonucundan $\tau = \tau' \subseteq \tau^*$ olduğu görülür.

3.3 $G\text{-Spec}(M)$ ile $G\text{-Spec}\left(\frac{R}{\text{Ann}(M)}\right)$ Arasındaki İlişki

Boştan farklı $G\text{-Spec}(M)$ kümesi her derecelendirilmiş R -modül için Zariski topolojisine sahip olsun. $\bar{R} = \frac{R}{\text{Ann}(M)}$ olmak $G\text{-Spec}(M)$ yerine X ve $G\text{-Spec}(\bar{R})$ yerine $X^{\bar{R}}$ kullanılacaktır. Her derecelendirilmiş R -modül M için X üzerindeki Zariski topolojisinin tanımından, X ile $X^{\bar{R}}$ arasındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 3.3.1: Her $P \in X$ için $\varphi: X \rightarrow X^{\bar{R}}, P \mapsto (\overline{P:M})$ fonksiyonu birebir eşleme olup φ fonksiyonu X in doğal tasviri olarak adlandırılır.

Önerme 3.3.2: M bir derecelendirilmiş R -modül olsun. M ve R üzerinde oluşturulan Zariski topolojileri için tanımlanan $\varphi: X \rightarrow X^{\bar{R}}, P \mapsto (\overline{P:M})$ doğal tasviri süreklidir. Özel olarak $G(R)$ nin $\text{Ann}(M)$ yi içeren her I derecelendirilmiş ideali için $\varphi^{-1}(V^{\bar{R}}(\bar{I})) = V(IM)$ dir.

İspat : φ tasvirinin sürekliliğini ispatlamak için $\bar{I}$, $G(\bar{R})$ nin bir ideali olmak üzere $V^{\bar{R}}(\bar{I}) \in \zeta(\bar{R})$ için $\varphi^{-1}(V^{\bar{R}}(\bar{I})) \in \zeta(M)$ olduğu gösterilmelidir. Bir $P \in \varphi^{-1}(V^{\bar{R}}(\bar{I}))$ için $\varphi(P) = (\overline{P:M}) \in V^{\bar{R}}(\bar{I}) \Leftrightarrow (\overline{P:M}) \supseteq \bar{I}$ dir.

$a \in I \cap h(R)$ olsun. $a + \text{Ann}(M) \in (\overline{P:M}) \Rightarrow a + \text{Ann}(M) = x + \text{Ann}(M) \Rightarrow x - a \in \text{Ann}(M) \Rightarrow (x - a)M = 0$ dir. Her $m \in h(M) \setminus P$ için $(x - a)m = xm - am \in P$ elde edilir. $xm \in P$ olduğundan $am \in P$, yani $a \in (P:M)$ olduğu görülür. Dolayısıyla $I \subseteq (P:M) \Rightarrow IM \subseteq P \Rightarrow P \in V(IM)$ dir. Ters kapsama için, $P \in V(IM)$ olsun. Bu durumda $IM \subseteq P \in G\text{-Spec}(M)$ ise $I \subseteq (P:M) \in G\text{-Spec}(R)$ yani $\bar{I} \subseteq (\overline{P:M}) \in G\text{-Spec}(\bar{R})$ dir. Buradan $(\overline{P:M}) \in V^{\bar{R}}(\bar{I})$ olup $\varphi(P) \in V^{\bar{R}}(\bar{I})$ elde edilir. Dolayısıyla $\varphi^{-1}(V^{\bar{R}}(\bar{I})) = V(IM)$ olup φ tasviri süreklidir.

Önerme 3.3.3: Bir M derecelendirilmiş R -modülü ve $P, Q \in X$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

1. $\varphi: X \rightarrow X^{\bar{R}}$ doğal tasviri birebirdir.
2. $P, Q \in X$ için $V(P) = V(Q)$ ise $P = Q$ dur.
3. Her $p \in G\text{-Spec}(R)$ için $|G\text{-Spec}_p(M)| \leq 1$ dir.

İspat :

1 $\Rightarrow$ 2: $V(P) = V(Q)$ iken $(\overline{P:M}) = (\overline{Q:M})$ ve φ birebir olduğundan $P = Q$ dur.

2 $\Rightarrow$ 3: $|G\text{-Spec}_p(M)| > 1$ olsun. $P, Q \in G\text{-Spec}_p(M)$ ise $(P:M) = (Q:M) = p$ dir. Yardımcı Teorem 3.2.9 dan $V(P) = V(Q)$ olduğu görülür ve kabulümüzden $P = Q$ olup çelişki elde edilir yani $|G\text{-Spec}_p(M)| \leq 1$ dir.

3 $\Rightarrow$ 1: $(\overline{P:M}) = (\overline{Q:M})$ olsun. Bu durumda $(P:M) = (Q:M) = p$ yazılabilir. $|G\text{-Spec}_p(M)| \leq 1$ olduğundan $P = Q$ olup φ doğal tasviri birebirdir.

Teorem 3.3.4: Bir M derecelendirilmiş R -modülü için $\varphi: X \rightarrow X^{\bar{R}}$, M nin doğal tasviri olsun. Eğer φ örten ise hem kapalı hem açıktır. Yani her N derecelendirilmiş alt modülü için $\varphi(V(N)) = V^{\bar{R}}(\overline{N:M})$ ve $\varphi(X - V(N)) = V^{\bar{R}} - V^{\bar{R}}(\overline{N:M})$ dir.

İspat : $\varphi^{-1}(V^{\bar{R}}(\bar{I})) = V(IM)$ ise $\varphi^{-1}(V^{\bar{R}}(\overline{N:M})) = V((N:M)M) = V(N)$ dir. φ örten

olduğundan $\varphi \circ \varphi^{-1} \left(V^{\bar{R}}(\overline{N:M}) \right) = \varphi(V(N)) = V^{\bar{R}}(\overline{N:M})$ dir.

$$\begin{aligned} \varphi(X - V(N)) &= \varphi \left(\varphi^{-1}(X^{\bar{R}}) - \varphi^{-1} \left(V^{\bar{R}}(\overline{N:M}) \right) \right) \\ &= \varphi \left(\varphi^{-1} \left(X^{\bar{R}} - V^{\bar{R}}(\overline{N:M}) \right) \right) \\ &= \varphi \circ \varphi^{-1} \left(X^{\bar{R}} - V^{\bar{R}}(\overline{N:M}) \right) \\ &= X^{\bar{R}} - V^{\bar{R}}(\overline{N:M}) \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.5: M bir derecelendirilmiş R -modül olmak üzere M nin doğal tasviri $\varphi: X \rightarrow X^{\bar{R}}$ örten olsun. φ nin birebir olması için gerek ve yeter koşul homeomorfizma olmasıdır.

Sonuç 3.3.6: M bir derecelendirilmiş R -modül olmak üzere M nin doğal tasviri $\varphi: X \rightarrow X^{\bar{R}}$ örten olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

1. $X = G\text{-Spec}(M)$ bağlantılıdır.
2. $X^{\bar{R}} = G\text{-Spec}(\bar{R})$ bağlantılıdır.

İspat :

1 $\Rightarrow$ 2: Farz edelim ki $G\text{-Spec}(\bar{R})$ bağlantılı olmasın. Bu durumda $V(\bar{A})$ ve $V(\bar{B})$ boştan farklı, ayrık ve kapalı kümeler olmak üzere $G\text{-Spec}(\bar{R}) = V(\bar{A}) \cup V(\bar{B})$ yazılır. φ doğal tasviri sürekli olduğundan $X = \varphi^{-1}(X^{\bar{R}}) = \varphi^{-1}(V(\bar{A})) \cup \varphi^{-1}(V(\bar{B}))$ dir. Dolayısıyla X boştan farklı, ayrık ve kapalı iki kümenin birleşimi olarak yazıldığından bağlantılı değildir.

2 $\Rightarrow$ 1: $X^{\bar{R}}$ bağlantılı olsun. X bağlantılı değilse hem kapalı hem açık olacak şekilde boştan farklı bir Y has alt kümesi vardır. Böylece Teorem 3.3.4 e göre $\emptyset \neq \varphi(Y) \subset X^{\bar{R}}$ hem kapalı hem açıktır. $\varphi(Y)$, $X^{\bar{R}}$ nin bir has alt kümesidir. Aksini kabul edelim, yani $\varphi(Y) = X^{\bar{R}}$ olsun. Y açık olduğundan N bir derecelendirilmiş alt modül olmak üzere $Y = X - V(N)$ şeklinde yazılabilir yani $\varphi(Y) = X^{\bar{R}} - V^{\bar{R}}(\overline{N:M})$ olup $V^{\bar{R}}(\overline{N:M}) = \emptyset$ elde edilir. Buradan $\overline{N:M} = \bar{R}$ ve böylece $N = M$ olduğu görülür, şu halde $Y = X - V(N) = X - V(M) = X$ çelişkisi olur. Bu durumda ise $X^{\bar{R}}$ nin $\emptyset$ ve $X^{\bar{R}}$ den başka hem açık hem kapalı olan bir alt kümesi bulunmuş olduğundan $X^{\bar{R}}$ bağlantılı olduğu kabulü ile çelişir. Dolayısıyla $\varphi(Y)$, $X^{\bar{R}}$ nin bir has alt kümesidir.

Önerme 3.3.7: M ve M' derecelendirilmiş R -modüller, $X = G\text{-Spec}(M)$,

$X' = G\text{-Spec}(M')$ ve $f: M \rightarrow M'$ bir epimorfizma olsun. Bu durumda $\theta: X' \rightarrow X$, $P' \mapsto f^{-1}(P')$ tasviri süreklidir.

İspat : Bir $P' \in X'$ ve R -modül M nin derecelendirilmiş alt modülü N olmak üzere $V(N)$, X te herhangi bir kapalı küme olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} P' \in \theta^{-1}(V(N)) &= \theta^{-1}\left(V^*((N:M)M)\right) \Leftrightarrow \theta(P') = f^{-1}(P') \supseteq (N:M)M \\ &\Leftrightarrow P' \supseteq f((N:M)M) = (N:M)M' \\ &\Leftrightarrow P' \in V^*((N:M)M) = V((N:M)M') \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\theta^{-1}(V(N)) = V((N:M)M')$ olup θ tasvirinin sürekli olduğu görülür.

3.4 $G\text{-Spec}(M)$ Üzerindeki Zariski Topolojisi İçin Taban

Her $r \in h(R)$ için $X_r = X - V(rM)$ tanımlayalım. Bu durumda her X_r , X için bir açık kümedir ve $X_0 = \emptyset$, $X_1 = X$ olduğu açıktır.

Önerme 3.4.1: M bir derecelendirilmiş R -modül, $\varphi: X \rightarrow X^{\bar{R}}$ bir doğal tasvir ve $r \in h(R)$ olsun. Bu durumda;

1. $\varphi^{-1}(D_{\bar{r}}) = X_r$,
2. $\varphi(X_r) \subseteq D_{\bar{r}}$; φ örten ise $\varphi(X_r) = D_{\bar{r}}$ dir.

İspat :

1. $\varphi^{-1}(D_{\bar{r}}) = \varphi^{-1}\left(X^{\bar{R}} - V^{\bar{R}}(\bar{r}\bar{R})\right) = X - \varphi^{-1}\left(V^{\bar{R}}(\bar{r}\bar{R})\right) = X - V(rM) = X_r$
2. (1) den elde edilir.

Sonuç 3.4.2: Herhangi bir $r, s \in h(R)$ için $X_{rs} = X_r \cap X_s$ dir.

İspat : Önerme 3.4.1 i kullanarak;

$$\begin{aligned} X_{rs} &= \varphi^{-1}(D_{\bar{r}\bar{s}}) = \varphi^{-1}(D_{\bar{r}} \cap D_{\bar{s}}) \\ &= \varphi^{-1}(D_{\bar{r}}) \cap \varphi^{-1}(D_{\bar{s}}) \\ &= X_r \cap X_s \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Önerme 3.4.3: Bir M derecelendirilmiş R -modülü için $B = \{X_r | r \in h(R)\}$ kümesi X üzerindeki Zariski topolojisi için bir tabandır.

İspat : $X \neq \emptyset$ ve U, X te bir açık küme olsun. $\zeta(M) = \zeta'(M) = \{V^*(IM) = V(IM)|I \triangleleft_G R\}$ olduğundan R nin derecelendirilmiş bir I ideali için $U = X - V(IM)$ dir. $V(IM) = V(\sum_{a_i \in I} a_i M) = V(\sum_{a_i \in I} (a_i M : M)M) = \cap_{a_i \in I} V(a_i M)$ dir. Buradan, $U = X - V(IM) = X - \cap_{a_i \in I} V(a_i M) = \cup_{a_i \in I} X_{a_i}$ elde edilir. Dolayısıyla $B = \{X_r | r \in h(R)\}$ kümesi X üzerindeki Zariski topolojisi için bir tabandır.

Teorem 3.4.4: M bir derecelendirilmiş R -modül olsun. X in φ doğal tasviri örten ise, her $r \in h(R)$ için X_r açık kümesi quasi kompakttır. Özel olarak X uzayı quasi kompakttır.

İspat : $B = \{X_r | r \in h(R)\}$ kümesi X üzerindeki Zariski topolojisi için bir taban olduğundan X_r nin herhangi bir açık örtüsü için $X_r \subseteq \cup_{\lambda \in \Lambda} X_{r_\lambda}$ olacak şekilde $\{r_\lambda \in h(R) | \lambda \in \Lambda\}$ ailesi vardır. Önerme 3.4.1 (2) den $D_{\bar{r}} = \varphi(X_r) \subseteq \cup_{\lambda \in \Lambda} D_{\bar{r}_\lambda}$ dir. $D_{\bar{r}}$ quasi kompakt olduğundan $D_{\bar{r}} \subseteq \cup_{\lambda \in \Lambda'} D_{\bar{r}_\lambda}$ olacak şekilde sonlu bir $\Lambda' \subset \Lambda$ alt kümesi vardır. Önerme 3.4.1 (1) den $X_r = \varphi^{-1}(D_{\bar{r}}) \subseteq \cup_{\lambda \in \Lambda'} X_{r_\lambda}$ olduğu görülür.

Teorem 3.4.5: M bir sonlu üretilmiş derecelendirilmiş R -modül olsun. $G\text{-Spec}(M)$ nin bir $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtüsü için $G\text{-Spec}(\bar{R})$ nin bir $\{U_\alpha'\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtüsü vardır öyle ki, $\varphi^{-1}(U_\alpha') = U_\alpha$ dir.

Sonuç 3.4.6: M bir sonlu üretilmiş derecelendirilmiş R -modül ise $G\text{-Spec}(M)$ quasi kompakttır.

İspat : $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, $G\text{-Spec}(M)$ nin bir açık örtüsü olsun. M bir sonlu üretilmiş derecelendirilmiş R -modül olduğundan Teorem 3.4.5 ten $\varphi^{-1}(W_\alpha') = W_\alpha$ olacak şekilde $G\text{-Spec}(\bar{R})$ nin $\{W_\alpha'\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtüsü olduğunu biliyoruz. $G\text{-Spec}(\bar{R})$ quasi kompakt olduğundan $G\text{-Spec}(\bar{R})$ yi örten sonlu bir $\{W'_\alpha\}_{i=1}^n$ kümesi mevcuttur. Böylece $\{\varphi^{-1}(W'_\alpha)\}_{i=1}^n$ kümesi de $G\text{-Spec}(M)$ yi örter, yani $G\text{-Spec}(M)$ quasi kompakttır.

Teorem 3.4.7: M bir derecelendirilmiş R -modül olsun. φ doğal tasviri örten ise X in quasi kompakt açık kümeleri sonlu kesişim altında kapalıdır.

İspat : C_1 ve C_2 , X in birer quasi kompakt açık kümeleri ve $C = C_1 \cap C_2$ olsun. C_1 ve C_2 $B = \{X_r | r \in h(R)\}$ kümesinin elemanlarının sonlu birleşimi şeklinde yazılabilir. Sonuç 3.4.2 den C kümesi de bu şekilde yazılabilir. $C = \cup_{i=1}^n X_{r_i}$ ve Ω , C nin bir açık örtüsü olsun. Bu durumda Ω , her bir X_{r_i} yi de örter. Teorem 3.4.4 ten her X_{r_i} quasi kompakt olduğundan, her X_{r_i} kümesi Ω nın sonlu bir alt örtüsüne sahip olduğundan C de quasi kompakttır.

3.5 $G\text{-Spec}(M)$ nin İndirgenemez Kapalı Alt Kümeleri ve Bu Kümelerin Jenerik Noktaları

$Y, X = G\text{-Spec}(M)$ kümesinin bir alt kümesi olsun. Y nin tüm elemanlarının kesişimi $\xi(Y)$ ve Zariski topolojisi için Y nin X teki kapanışı $Cl(Y)$ ile gösterilecektir.

Önerme 3.5.1: M bir derecelendirilmiş R -modül ve $Y \subset X$ olsun. Bu durumda $V(\xi(Y)) = Cl(Y)$ dir. Böylece Y nin kapalı olması için gerek ve yeter koşul $V(\xi(Y)) = Y$ olmasıdır.

İspat : $Y \subset V(\xi(Y))$ olduğundan $Cl(Y) \subseteq V(\xi(Y))$ dır. Ters kapsama için, $V(N)$ kümesi X in Y yi kapsayan kapalı bir alt kümesi olsun.

Şu halde her $P \in Y$ için $(P:M) \supseteq (N:M)$, buradan $(\xi(Y):M) \supseteq (N:M)$ olduğu görülür. Bu yüzden her $Q \in V(\xi(Y))$ için $(Q:M) \supseteq (\xi(Y):M) \supseteq (N:M)$ yani $V(\xi(Y)) \subseteq V(N)$ dir. Bu ise $V(\xi(Y))$ nin Y yi kapsayan en küçük alt kümesi olduğunu gösterir, dolayısıyla $V(\xi(Y)) = Cl(Y)$ dir.

➤ M bir derecelendirilmiş R -modül ve $\delta = \{(P:M) | P \in X\} \subset G\text{-Spec}(R)$ olsun.

Önerme 3.5.2: Derecelendirilmiş bir R -modül M için $P \in X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler gerçekleşir:

1. $Cl(\{P\}) = V(P)$
2. Bir $Q \in X$ için $Q \in Cl(\{P\})$ dir ancak ve ancak $(Q:M) \supseteq (P:M)$ dir ancak ve ancak $V(Q) \subseteq V(P)$ dir.
3. $\{P\}$ kümesinin X te kapalı olması için gerek ve yeter koşul
 - (a) $p = (P:M)$, δ kümesinin maksimal elemanıdır ve
 - (b) $G\text{-Spec}_p(M) = \{P\}$ yani $|G\text{-Spec}_p(M)| = 1$ olmasıdır.

İspat :

1. $Y = \{P\}$ alınarak Önerme 3.5.1 den $Cl(\{P\}) = V(P)$ elde edilir.
2. (1) den, $Q \in Cl(\{P\}) = V(P)$ olup Yardımcı Teorem 3.2.9 dan elde edilir.
3. $\{P\}$ kümesinin X te kapalı olduğunu kabul edelim. Şu halde $Cl(\{P\}) = \{P\}$ ve (1) den $\{P\} = V(P)$ dir. $p \subseteq q$ olacak şekilde $q \in \delta$ olsun. $Q \in X$, q -asal alt modül ise $Q \in V(P) = \{P\}$ dir, yani $Q = P$ olup $p = q$ elde edilir. Dolayısıyla p , δ kümesinin maksimal elemanıdır ve (a) ispatlanmış olur. $P' \in G - \text{Spec}_p(M)$ olsun. Bu durumda $(P':M) = p = (P:M)$ olduğundan $P' \in V(P) = \{P\}$ olur ve $P' = P$ elde edilir. Böylece

$G - Spec_p(M) = \{P\}$ dir ve (b) gösterilmiş olur. Diğer taraftan; (a) ve (b) yi kabul edelim. P asal olduğundan $\{P\} \subseteq V(P)$ dir. $Q \in V(P)$ ise $q = (Q: M) \supseteq (P: M) = p$ olup (a) dan $q = p$ olduğu ve sonuç olarak (b) den $Q = P$ olduğu görülür. Dolayısıyla $V(P) = \{P\}$, yani $\{P\}$ kümesi X te kapalıdır.

Not : A nın her singleton alt kümesi indirgenemez olduğundan kapanışı da indirgenemezdir.

Sonuç 3.5.3: M nin her P derecelendirilmiş asal alt modülü için $V(P)$, $G-Spec(M)$ nin indirgenemez kapalı alt kümesidir.

İspat : Önerme 3.5.2 ye göre $Cl(\{P\}) = V(P)$ olduğundan sonuç elde edilir.

Önerme 3.5.4: Bir derecelendirilmiş R -modül M için $Y \subset G-Spec(M)$ olsun. Eğer $\xi(Y)$, M nin bir derecelendirilmiş asal alt modülü ise Y indirgenemezdir. Tersine, Y indirgenemez ise $\Omega = \{(P: M) | P \in Y\}$ kümesi $G-Spec(R)$ nin indirgenemez alt kümesidir yani $\xi(\Omega) = (\xi(Y): M)$, R nin derecelendirilmiş asal idealidir.

İspat : $\xi(Y) = Q$, M nin derecelendirilmiş asal alt modülü olsun. Bu durumda Sonuç 3.5.3 ve Önerme 3.5.1 den $V(Q) = V(\xi(Y)) = Cl(Y)$ indirgenemezdir, dolayısıyla Y de indirgenemezdir. Y indirgenemez olmasaydı, $Y = A_1 \cup A_2$ olacak şekilde A_1 ve A_2 kapalı kümeleri olur ve bu durumda $i = 1, 2$ için $A_i = V(N_i)$ olacak şekilde $N_i <_G M$ mevcut olurdu, böylece $Y = V(N_1) \cup V(N_2) = V(N_1 \cap N_2) = Cl(Y)$ çelişkisi elde edilirdi. Tersine, Y nin indirgenemez olduğunu kabul edelim. Öyleyse Y nin φ doğal tasviri altındaki görüntüsü $\varphi(Y) = Y'$, Önerme 3.3.2 ye göre φ nin sürekliliğinden dolayı $X^{\bar{R}}$ nin indirgenemez alt kümesidir. Böylece $\xi(Y') = (\overline{\xi(Y): M})$ kümesi $\bar{R}$ nin, dolayısıyla $\xi(\Omega) = (\xi(Y): M)$ kümesi de R nin derecelendirilmiş asal idealidir; yani Ω kümesi $G-Spec(R)$ nin indirgenemez alt kümesidir.

Not : Bu önermeden $G-Spec(R)$ nin Ω alt kümesinin indirgenemez olması için gerek ve yeter koşulun $\xi(\Omega)$ nin R nin derecelendirilmiş asal ideali olduğu görülür. Ancak bu önermeyi $G-Spec(M)$ için genelleştiremeyiz. Yani $G-Spec(M)$ nin Y alt kümesinin indirgenemez olması için gerek ve yeter koşulun $\xi(Y)$ nin derecelendirilmiş asal alt modülü olduğu genel olarak doğru değildir.

$p \in X^R$ ve $P \in X$ olmak üzere X^R nin $V^R(p)$ ve X in $V(P)$ indirgenemez alt kümeleri için $\xi(V^R(p)) = p$, R nin her zaman derecelendirilmiş asal idealidir fakat $\xi(V(P))$, M nin her zaman derecelendirilmiş asal alt modülü olmayabilir. Sıradaki örnek Y , X in indirgenemez alt kümesi iken $\xi(Y)$ nin M nin derecelendirilmiş asal alt modülü olmadığını gösterir.

Örnek 3.5.5: q asal tamsayı olmak üzere $M = \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda M , aşağıdaki koşulları sağlayan derecelendirilmiş sonlu üretilmiş sadık $\mathbb{Z}$ -modüldür:

- (a) $\mathbb{Q}$ alt modülü ele alınırsa, $(0:M) = \{r \in \mathbb{Z} \mid r(\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}) = 0\} = (0)$ dır, fakat $q(\bar{1}, 0) \in 0$ iken $q \notin (0:M)$ ve $(\bar{1}, 0) \notin 0$ olduğundan $\mathbb{Q}$, M nin derecelendirilmiş (0) -asal alt modülü değildir.
- (b) $N = \mathbb{Z}_q \times (0)$ alt modülü M nin derecelendirilmiş (0) -asal alt modülüdür.
- (c) $qM = (\bar{0}) \times q\mathbb{Z}$ alt modülü M nin derecelendirilmiş (q) -asal alt modülüdür.

Verilenlere dayanarak, (b) den $V(N) = X$ tir ve Sonuç 3.5.3 ten X indirgenemezdir.

$Y = X$ alınırsa, $\xi(Y) = \xi(X) \subseteq N \cap qM = 0$ olduğundan, (a) dan $\xi(Y) = 0$, M nin derecelendirilmiş asal alt modülü değildir.

Sonuç 3.5.6: M bir derecelendirilmiş R -modül olsun. M nin derecelendirilmiş asal alt modüllerinin ailesi olan $Y = \{P_i \mid i \in I\}$ kümesi kapsamaya göre lineer sıralı ise Y , X te indirgenemezdir.

İspat : $\xi(Y) = \bigcap_{i \in \Lambda} P_i = P$ olsun. Şu halde $P \neq M$ dir. $r \in h(R)$ ve $m \in h(M)$ olmak üzere $rm \in P$ fakat $m \notin P$ olsun. Buradan en az bir $i \in \Lambda$ için $m \notin P_i$ dir ve P_i derecelendirilmiş asal alt modül olduğundan $r \in (P_i:M)$ dir. $j \in \Lambda$ olmak üzere $i < j$ olsun. Böylece $P_i \subset P_j$ olacağından $r \in (P_j:M)$ olduğu görülür. Diğer yandan, eğer $j < i$ ise $P_j \subset P_i$ olacağından $rm \in P_j$ ve $m \notin P_j$ olduğundan $r \in (P_j:M)$ olur. Sonuç olarak $r \in (P:M)$ elde edilir. Böylece $\xi(Y)$ nin derecelendirilmiş asal alt modül olduğu, dolayısıyla Önerme 3.5.5 e dayanarak Y nin X te indirgenemez olduğu gösterilmiş olur.

Sonuç 3.5.7: Bazı $p \in G\text{-Spec}(R)$ için $G\text{-Spec}_p(M) \neq \emptyset$ olsun. Şu halde;

- (a) $G\text{-Spec}_p(M)$ indirgenemezdir.
- (b) p , R nin derecelendirilmiş maksimal ideali ise $G\text{-Spec}_p(M)$, X in indirgenemez kapalı alt kümesidir.

İspat :

- (a) $i \in \Lambda$ için $P_i \in G - \text{Spec}_p(M)$ olsun. $\xi(G - \text{Spec}_p(M)) = \bigcap_{i \in \Lambda} P_i$ nin derecelendirilmiş asal alt modül olduğu gösterilmelidir. $(\bigcap_{i \in \Lambda} P_i : M) = \bigcap_{i \in \Lambda} (P_i : M) = \bigcap p = p$ olduğunu biliyoruz. Şu halde $r \in h(R)$ ve $m \in h(M)$ olmak üzere $rm \in \bigcap_{i \in \Lambda} P_i$ olsun. Her $i \in \Lambda$ için $rm \in P_i$ ve P_i derecelendirilmiş asal alt modül olduğundan $m \in P_i$ veya $r \in (P_i : M) = p$ dir. Buradan her $i \in \Lambda$ için $m \in \bigcap_{i \in \Lambda} P_i$ veya $r \in p = (\bigcap_{i \in \Lambda} P_i : M)$

olduğundan $\xi(G\text{-Spec}_p(M))$, derecelendirilmiş p -asal alt modüldür. Dolayısıyla Önerme 3.5.5 ten $G\text{-Spec}_p(M)$ indirgenemezdir.

- (b) p , R nin derecelendirilmiş maksimal ideali olmak üzere $G\text{-Spec}_p(M) = V(pM)$ olduğu sağlanırsa ispat gösterilmiş olur. $N \in V(pM)$ olsun. Bu durumda $(N:M) \supseteq (pM:M) \supseteq p$ ve p maksimal olduğundan $(N:M) = p$ olup $N \in G\text{-Spec}_p(M)$ elde edilir. Tersine, $P \in G\text{-Spec}_p(M)$ için $(P:M) = p \subseteq (pM:M)$ olduğundan $(P:M) = (pM:M)$ dir dolayısıyla $P \in V(pM)$ olduğu görülür.

Önerme 3.5.8: M bir derecelendirilmiş R -modül, $Y \subseteq X$ ve $(\xi(Y):M) = p$, R nin asal ideali olsun. $G\text{-Spec}_p(M) \neq \emptyset$ ise Y indirgenemezdir.

İspat : $P \in G\text{-Spec}_p(M)$ olsun. Bu durumda $p = (P:M) = (\xi(Y):M)$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.2.9 ve Önerme 3.5.1 e dayanarak $V(P) = V(\xi(Y)) = Cl(Y)$ olduğu görülür. $V(P)$ nin indirgenemez oluşundan $Cl(Y)$ dolayısıyla Y indirgenemezdir.

Tanım 3.5.9: Y kümesi topolojik bir uzayın kapalı bir alt kümesi olsun. Bir $y \in Y$ elemanına, $Y = Cl(\{y\})$ ise Y nin jenerik noktası denir.

- Önerme 3.5.2 (1) den M nin bir P derecelendirilmiş asal alt modülü, $G\text{-Spec}(M)$ nin indirgenemez kapalı alt kümesi olan $V(P)$ nin jenerik noktasıdır.
- Bir T_0 uzayının kapalı alt kümesinin jenerik noktası tektir.

Teorem 3.5.10: M bir derecelendirilmiş R -modül, $\varphi: X \rightarrow X^{\bar{R}}$ doğal tasviri örten ve $Y \subseteq X$ olsun. Şu halde, Y nin X in indirgenemez kapalı alt kümesi olması için gerek ve yeter koşul bazı $P \in X$ için $Y = V(P)$ olmasıdır.

İspat : Sonuç 3.5.3 ten $Y = V(P)$ kümesi bazı $P \in X$ için X in indirgenemez kapalı alt kümesi olduğundan yeter koşul açıktır. Tersine, X in bir Y indirgenemez kapalı alt kümesi alınırsa $Y = V(N)$ olacak şekilde M nin N derecelendirilmiş alt modülü vardır. Önerme 3.5.4 e dayanarak, $(\xi(V(N)):M) = (\xi(Y):M) = p$, R nin derecelendirilmiş asal idealidir. φ örten olduğundan derecelendirilmiş p -asal alt modül olan $P \in X$ mevcuttur. Bu durumda $(\xi(V(N)):M) = (P:M) = p$ olup Yardımcı Teorem 3.2.9 dan $V(\xi(V(N))) = V(P)$ dir. Her $i \in \Lambda$ için $V(N) = \{N_i\}_{i \in \Lambda}$ ve $X_i \in V(\xi(V(N)))$ olsun. Böylece

$$\Rightarrow \bigcap_{i \in \Lambda} (N_i:M) \subseteq (X_i:M)$$

$$\Rightarrow (N_i:M) \subseteq (X_i:M)$$

ve $(N:M) \subseteq (X_i:M)$ olduğundan $X_i \in V(N)$ olup $V(P) \subseteq V(N)$ elde edilir. Tersine, $X \in V(N)$ alalım. Şu halde $\xi(V(N)) \subseteq X$ tir. Buradan $(\xi(V(N)):M) \subseteq (X:M)$ olur ve $X \in V(\xi(V(N))) = V(P)$ olduğundan ters kapsama da sağlanır ve $V(P) = V(N)$ olduğu gösterilmiş olur.

Sonuç 3.5.11: M bir derecelendirilmiş R -modül ve $\varphi: X \rightarrow X^{\bar{R}}$ doğal tasviri örten olsun.

- (a) X kümesini, X in indirgenemez kapalı alt kümelerine götüren $P \mapsto V(P)$ eşleşmesi örtendir.
- (b) X in indirgenemez bileşenlerinin kümesini, $\bar{R}$ nin derecelendirilmiş minimal asal ideallerine götüren $V(P) \mapsto (\overline{P:M})$ eşleşmesi birebirdir.

İspat :

- (a) Teorem 3.5.10 dan X in indirgenemez kapalı alt kümelerinin her $V(P)$ elemanına karşılık en az bir $P \in X$ mevcut olduğundan örtenlik açıktır.
- (b) X in her bir indirgenemez bileşeni $\{V(Q)|Q \in X\}$ kümesinin maksimal elemanı olduğundan Önerme 3.5.2 ye göre $(\overline{P:M}) = (\overline{Q:M})$ iken $(P:M) = (Q:M)$ olup $V(P) = V(Q)$ dur, dolayısıyla eşleme birebirdir.

Teorem 3.5.12: M bir derecelendirilmiş R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

1. X, T_0 uzayıdır.
2. $\varphi: X \rightarrow X^{\bar{R}}$ doğal tasviri birebirdir.
3. $P, Q \in X$ için $V(P) = V(Q)$ ise $P = Q$ dur.
4. Her $p \in G\text{-Spec}(R)$ için $|G\text{-Spec}_p(M)| \leq 1$ dir.

İspat :

1 $\Rightarrow$ 3: X, T_0 uzayı ise $P, Q \in X$ için $Cl(\{P\}) = Cl(\{Q\})$ iken $P = Q$ dur. Önerme 3.5.2 den ise $V(P) = Cl(\{P\})$ olduğundan istenen elde edilir.

3 $\Rightarrow$ 1: $P, Q \in X$ için $V(P) = V(Q)$ iken $P = Q$ ise Önerme 3.5.2 ye göre $Cl(\{P\}) = Cl(\{Q\})$ olup X in T_0 uzayı olduğu görülür.

2, 3 ve 4'ün denklği Önerme 3.3.3 te gösterilmiş olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Önerme 3.5.13: M bir derecelendirilmiş R -modül ve $G\text{-Spec}(M) \neq \emptyset$ olsun. $G\text{-Spec}(M)$ nin bir T_1 uzayı olması için gerek ve yeter koşul

- (a) Her $P \in X$ için $p = (P: M)$ nin δ kümesinin maksimal elemanı olması ve
- (b) Her $p \in G\text{-Spec}(R)$ için $|G\text{-Spec}_p(M)| \leq 1$ olmasıdır.

İspat : $G\text{-Spec}(M)$ bir T_1 uzayı olsun. Bu durumda $G\text{-Spec}(M)$ nin tek nokta kümeleri kapalıdır. Şu halde Önerme 3.5.2 den (a) ve (b) sağlanır. Tersine, (a) ve (b) nin sağlandığını kabul edelim. Şu halde Önerme 3.5.2 ye göre her $P \in X$ için $\{P\}$ tek nokta kümeleri kapalı olup X in bir T_1 uzayı olduğu gösterilmiş olur.

4. SONUÇ

M bir derecelendirilmiş R -modül olmak üzere üzerinde tanımladığımız çokluklar ile oluşturulan yapılar sonucu M nin özel olarak çarpımsal derecelendirilmiş R -modül seçilmesi ile quasi Zariski topolojisi olarak adlandırılan yapıdan Zariski topolojisi yapısına geçilmiştir. Bu topolojinin özellikleri incelendiğinde ise $G\text{-Spec}(M)$ nin quasi kompakt bir uzay olduğu ayrıca hangi koşullar altında bir T_0 veya T_1 uzayı meydana getirdiği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

Atani, S.E. (2006), “On Graded Prime Submodules”, Chiang Mai J. Sci, 33(1):3-7.

Atani, S.E and Farzalipour, F. (2006), “Notes On the Graded Prime Submodules”, International Mathematicial Forum, 38:1871-1874

Çallıalp, F. ve Tekir, Ü., (2009), Değişmeli Halkalar ve Modüller, Birsen Yayınevi, İstanbul.

Duravie, T. (1992), “Topology on Spectrum of Modules”, J. Ramanujan Math. Soc., 9(1): 25-29

Escoriza, J. and Torrecillas, B. (2000), “Multiplication Graded Rings”, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 208.

Kılıç, S.A. (2002), Genel Topoloji, Vipaş A.Ş., Bursa.

Lu, C.P. (1999), “The Zariski Topology On the Prime Spectrum of a Module”, Houston Journal of Mathematics, 25(3):418-430.

McCasland, R.L., Moore, M.E. and Smith, P.F. (1997), “On the Spectrum of a Module Over a Commutative Ring”, Communication in Algebra, 25(1):79-96

Munkers, J.R. (2000), Topology, Pearson Education International, Prentice Hall, New Jersey.

Nastasescu, C. and Oystaeyen, F.V. (1979), Graded and Filtered Rings and Modules, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.

Oral, K.H., Tekir, Ü. and Ağargün, A.G. (2010), “ On Graded Prime and Primary Submodules”, Turkish Journal of Mathematics, 34:1-9

Refai, M. and Al-Zoubi, K. (2004), “ On Graded Primary Ideals”, Turkish Journal of Mathematics, 28

Sharp, R.Y. (2000), Steps in Commutative Algebra, Cambridge University Press, London Mathematical Society Student, Cambridge.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi 11.08.1987

Doğum Yeri Gaziantep

Lise 2001-2004

Özel Sunguroğlu Fen Lisesi

Lisans 2004-2008

Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 2008-2009

Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı

Çalıştığı Kurumlar

2009-Devam Ediyor YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi