

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SAYILAR TEORİSİNİN BAZI KONULARINDAKİ
PROBLEM ÇÖZÜMLERİNDE ÖĞRENCİ
YAKLAŞIMLARININ İNCELENMESİ**

Matematikçi Sümeyra ÜSTÜNSOY

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd.Doç.Dr. Hasan ÜNAL (YTÜ)

İSTANBUL, 2010

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SAYILAR TEORİSİNİN BAZI KONULARINDAKİ
PROBLEM ÇÖZÜMLERİNDE ÖĞRENCİ
YAKLAŞIMLARININ İNCELENMESİ**

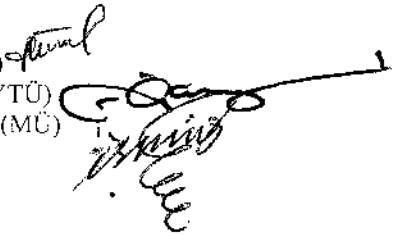
Matematikçi Sümeyra ÜSTÜNSOY

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Tez Danışmanı
Jüri Üyeleri**

: Yrd. Doç. Dr. Hasan ÜNAL (YTÜ)
: Prof. Dr. A. Göksel AĞARGÜN (YTÜ)
: Doç. Dr. Ahmet Şükrü ÖZDEMİR (MÜ)



İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	ii
TABLolar LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Araştırmanın Problemi	3
1.2 Araştırmanın Amacı	4
1.3 Araştırmanın Önemi	5
1.4 Araştırmanın Varsayımları	6
1.5 Araştırmanın Sınırlılıkları	6
1.6 Tanımlar	6
2. LİTERATÜR TARAMASI.....	7
2.1 Matematiğin Tanımı	7
2.2 Matematik Öğretiminin Amaçları	8
2.3 Sayılar Teorisi	11
2.4 Bölünebilme	11
2.5 Bölünebilme Kuralları	11
2.5.1 2 ile Bölünebilme:	12
2.5.2 3 ile Bölünebilme:	12
2.5.3 4 ile Bölünebilme:	12
2.5.4 5 ile Bölünebilme:	12
2.5.5 6 ile Bölünebilme:	12
2.5.6 7 ile Bölünebilme:	12
2.5.7 8 ile Bölünebilme:	13
2.5.8 9 ile Bölünebilme:	13
2.5.9 10 ile Bölünebilme:	13
2.5.10 11 ile Bölünebilme:	13
2.5.11 12 ile Bölünebilme:	13
2.6 Asal Sayılar	14
2.7 Sayıların Teklik ve Çiftlik Durumları	16
2.8 Yapılan Çalışmalar	16
3. ARAŞTIRMA YÖNTEMİ	18
3.1 Araştırmanın Modeli	18
3.1.1 Nitel Araştırma	18
3.1.2 Durum Çalışması.....	19

3.2	Araştırmanın Evreni ve Örneklemi	20
3.3	Veri Toplama Teknikleri	21
3.3.1	Çalışma Kâğıtları.....	21
3.3.1.1	Soru Grubu 1:	22
3.3.1.2	Soru Grubu 2:	23
3.3.1.3	Soru Grubu 3:	24
3.3.1.4	Soru Grubu 4:	25
3.3.2	Görüşme	25
3.3.2.1	Görüşme Tekniğinin Faydaları.....	26
3.3.2.2	Görüşme Tekniğinin Sınırlılıkları	27
3.3.2.3	Yapılandırılmamış Görüşme	27
3.3.2.4	Yapılandırılmış Görüşme	28
3.3.2.5	Yarı Yapılandırılmış Görüşme	28
3.4	Verilerin Analizi.....	29
4.	BULGULAR VE YORUMLAR	31
4.1	Birinci Soru Grubuna Ait Bulgular ve Yorumlar	31
4.2	İkinci Soru Grubuna Ait Bulgular ve Yorumlar.....	34
4.3	Üçüncü Soru Grubuna Ait Bulgular ve Yorumlar.....	44
4.4	Dördüncü Soru Grubuna Ait Bulgular ve Yorumlar	54
5.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER	61
5.1	Sonuçlar.....	61
5.2	Öneriler.....	64
	KAYNAKLAR.....	65
	EKLER.....	68
	ÖZGEÇMİŞ	71

TABLÖLAR LİSTESİ

	Sayfa
Tablo-4.3.1 3. Soru Grubu, 1. Soruya Verilen Cevapların Özeti (Asal Sayı Tanımı).....	45
Tablo-4.3.2 3. Soru Grubu, 1. Soruya Verilen Cevapların Özeti (Asal Olmayan Sayı Tanımı).....	46
Tablo-4.3.3 3. Soru Grubu, 2. Soruya Verilen Cevapların Özeti.....	47
Tablo-4.3.4 3. Soru Grubu, 3. Soruya Verilen Cevapların Özeti.....	50
Tablo-4.4.1 4. Soru Grubu, 1. Soruya Verilen Cevapların Özeti.....	55

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanan bu tezin amacı, Sayılar Teorisi konularının öğrenciler tarafından nasıl öğrenildiğini ortaya çıkarmak ve öğrencilerin, edinmiş oldukları bilgileri her durumda kullanıp ifade edebilme yeteneklerini incelemektir.

Araştırma süresi boyunca yardımlarını esirgemeyerek, bana yol gösteren çok değerli hocam Sayın Yrd. Doç Dr. Hasan ÜNAL'a, dar zamanlarımda her türlü soruma içtenlikle yanıt veren Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÖZKAN'a ve Sayın Doç. Dr. Ahmet Şükrü ÖZDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak hiçbir zaman manevi desteğini esirgemeyen babam Prof. Dr. İsmail ÖZSOY'a ve canım anneme, ayrıca her zaman yanımda olan en iyi arkadaşım, dostum, sevgili eşim Seyfettin ÜSTÜNSOY'a tezimin de bir parçası olduğu için minnettarım.

ÖZET

Sayılar Teorisi matematiğin merkezi olarak tanımlanmaktadır. Bölünebilme, sayıların teklik-çiftlik özellikleri, asal sayılar, Sayılar Teorisi'nin başlıca konularıdır. Bugüne kadar Sayılar Teorisi'nin öğretim ve öğrenimi ile ilgili yurtdışında birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmanın Türk öğrencileri ile yapılması ile alana katkıda bulunulması hedeflenmiştir.

Araştırma, Türkiye'de Marmara bölgesinde bir devlet üniversitesinde yapılmıştır. Soyut Matematik 1 Dersi'ni alan 50 öğrenci, Analiz 1 Dersi'ni alan 10 öğrenci ve İntegral Denklemler Dersi'ni alan 23 öğrenci olmak üzere toplamda 83 öğrenci üzerinde yürütülmüştür.

Araştırmada, nitel araştırma deseni olan “durum çalışması” modeli kullanılmıştır.

Araştırmanın konusuyla ilgili sorular, öğrencilerin cevaplarını yazabilecekleri çalışma alanını içeren çalışma kâğıtlarında yazılı olarak öğrencilere dağıtılmıştır ve yeterli süre sonunda kâğıtlar toplanmıştır. Öğrencilerin çalışma kâğıtları, cevaplarına göre gruplandırılmış ve her gruptan temsil olarak seçilen öğrencilerle birebir görüşme yapılmıştır.

Çalışma kâğıtlarından ve görüşmelerden elde edilen verilerin analizinde betimsel analiz yaklaşımı kullanılmıştır. Bütün bu değerlendirmelerin sonucunda, genel olarak öğrencilerin aynı konuyu farklı şekillerde kavradıkları görülmüştür. Anlamadaki bu farklılıklar ve zorluklar detaylı bir şekilde verilmiştir. İlk öneri öğretim esnasında farklı gösterimlerin kullanılması ve birden fazla çözüm yönteminin öne çıkarılmasıdır.

Anahtar Kelimeler: Sayılar Teorisi, Bölünebilme, Tek ve Çift Sayı, Asal ve Asal Olmayan Sayı

ABSTRACT

Number Theory is described as the center of Mathematics. Divisibility, parity of numbers, prime and composite numbers are the main topics of Number Theory. There are numerous studies related to Number Theory, teaching and learning Number Theory in other countries in the world, this study makes contributions to field by investigating Turkish students understanding of and use of that understanding in Number Theory.

This study is conducted at a large public university in Marmara Region of Turkey. Totally 83 students participated in this research. 50 of them were studying Abstract Mathematics 1, 10 of them were studying Calculus-I and 23 of them were studying Integral Equations.

Case study design is used as a model for this study.

Questionnaires are delivered to the students and collected back after they have answered the questions. There was enough space on questionnaires for students' answers and all the students are given enough time for answering questions. Questionnaires are grouped according to the responses and from each group one student has been chosen for interview.

Descriptive analysis has been used for data which is obtained from questionnaires and students interviews. This study showed that each student's conception of same topic is different. The different responses and difficulties were discussed in details. One possible suggestion is to use different representation of problems and emphasizing multiple ways of solutions during the instruction.

Key Words: Number Theory, Divisibility, Odd and Even Number, Prime and Composite Number.

1. GİRİŞ

Dünyadaki bilgi birikimi 1850’li yıllara kadar her yüz yılda ikiye katlanırken, 1970’lerde bu süre beş yıla kadar düşmüş, 1980’li yıllardan itibaren ise bilginin kendisini yenileme süresi bir yılın altına düşmüştür. Üretilen her yeni bilgi sonraki bilginin üretilmesinin hazırlayıcısı olmaktadır. Ayrıca günümüz enformasyon teknolojilerinin sağlamış olduğu imkânlarla, isteyen herkesin dilediği yerden dilediği bilgiye ulaşması imkânı doğmuştur. Bu imkân bilginin daha hızlı gelişmesine ortam hazırlamaktadır.

Eğitim, her açıdan insanın kişisel hayatına katkıda bulunur. Eğitim almış insan, üretebilme kabiliyetine sahiptir, yaşama her açıdan bakabilir, başkalarını yargılamadan olduğu gibi kabul eder. Eğitim almış insan, sorunları üzerinde yoğunlaşıp çözmeyi bilir ve yaşamının bir parçası olan hedeflerine ulaşmak için hayatını planlayabilir. Eğitim yalnızca kişinin kendi hayatına değil topluma da katkıda bulunur. Eğitim düzeyinin yüksek olduğu ülkelerde ekonomik, siyasal, sosyal ve kültürel gelişmeler hızlanmış demektir. Bir ülkenin gelişmişlik düzeyini o ülkenin insanların sahip olduğu eğitimin niteliği belirlemektedir.

Türk Eğitim Sistemi’nin temel amacı, “görev ve sorumluluklarını bilen, kendilerinin ve toplumun mutluluğuna katkıda bulunacak bireyler yetiştirmektir.”

Eğitimin amacı; eleştirel düşünebilen, araştırmalar yapabilen, bilgiye ulaşabilen ve teknoloji konusunda belirli bir aşinalık düzeyine sahip bireyler yetiştirmektir. Eğitimci Booker’a göre; “Gençleri eğitmenin amacı, onları yaşamları boyunca kendi kendilerini eğitmeye hazırlamaktır.” (Özsoy, 2004).

Eğitimin amacı, ülkede yaşayan bireylerin eğitim isteklerine ve toplumun tüm gereksinimlerine cevap verebilecek bir biçimde olmalıdır. Bu bağlamda öğretimin hedeflerinin tespit edilmesi gerekmektedir. Bunları yaparken toplumun bir kısmının öğretimi ile ilgilenilirken bir kısım ihmal edilmemelidir. Örneğin, öğrencinin eğitimi göz önüne alınırken öğretmenlerin günün gelişen şartlarına göre eğitilmeleri ihmal edilmemelidir. İyi bir öğretmen, kendi kişiliğini çözümleme, eksik ve kusurlu yönlerini giderme konusunda sürekli kendini eğitmelidir.

Günümüzde bilgi aktarmaya dayalı klasik öğretim anlayışı işlevini tamamen kaybetmiş durumdadır. Bu eğitim anlayışı yerini, bilgiye ulaşma ve elde etme yolları, eleştirel düşünme ve bilgisayar aşinalığı gibi temel becerilerin kazandırılmasına bırakılmıştır.

Bu bağlamda öğretmenlerin öğretim faaliyeti sırasında daha çok kurumsal temellerin

aktarılmasına dayalı eğitim yerine, pratik becerilerin kazandırılmasına yönelik öğretime yer vermeleri daha işlevsel olacaktır (Özsoy, 2004).

Çağın gerektirdiği şekilde eğitim sağlanmalıdır. Toplumdaki bireylerin eğitim düzeyleri yükseldikçe toplumun kalkınmasının da o nispette artacağından hiç kuşku yoktur. Bunu yaparken kişinin üretken olması hedef alınmalıdır. Tüm bu çalışmalar yapılırken özellikle bilgi toplumunun oluşturulması hedeflenmelidir. Bilgi toplumu, çağdaş, günün teknolojisini kullanmayı daha kolay kılan bir uygulama alanı oluşturmayı hedeflemelidir. Bilgi toplumu olmanın bir gereği de eğitim kurumlarında etkin ve verimli matematik öğrenimi ortamı oluşturmaktır (Aydın, 2003).

Eğitim sisteminin her aşamasında matematik eğitiminin kalitesini yükseltmek için de çeşitli amaçlar belirlenmektedir. Öğrencilerin matematiksel kavramlara sahip olması, problem çözme becerilerini kazanması, matematikte kendine güven duyması, matematiğe karşı olumlu tutuma sahip olması bu amaçlardan bazılarıdır (NCTM, 2000).

Bir ülkenin kalkınmasında, bir bilgi toplumunun oluşturulmasında, ülkenin geleceği açısından matematik öğretimi de önemli bir yer tutmaktadır. Matematik eğitim ve öğretimi toplumda bireyin düşünce ve ufkunun gelişmesini sağlar. Bir bakış açısı, farklı bir açıdan yorum getirmeyi öğretir (Aydın, 2003).

İnsanlar ufkunu ne kadar geliştirirlerse, matematik de hiç durmadan gelişimini devam ettirecektir. Toplum; bu yeni gelişmeler ve eğilimler sayesinde matematiği daha da geliştirip ondan daha fazla yararlanma olanağını elde edecek ve matematik diğer bilimlerde anahtar görevi görmeye devam edecektir.

Süregelen tarihi sürecinde Matematiğin amacının insanların doğuştan getirdiği düşünme kabiliyetini geliştirmek olduğunu söyleyebiliriz. Matematik, bizlere bir kısım bilgiler kazandırarak karşılaşacağımız olay ve problemlerde inceleme, araştırma ve karşılaştırmalar yaptırarak, düzenli ve dikkatli olmamızı, mantıklı düşünmemizi ve her konuda doğruyu bulmamızı sağlar. Problemleri çözerken değişik bağlantıları bulmak insana heyecan verir. Böylece insanda yeni şeyler bulma arzusu doğar. Bütün bilimlerin doğması ve gelişmesi insandaki bu arzudan doğmuştur ve bu da matematik yardımıyla olmuştur. Bu sebeple bütün bilim dallarında matematikten yararlanılır. Matematik nitelikleri değil nicelikleri konu edinir, fakat niteliği bulunan her şeyin sayılabilir ve ölçülebilir olması, matematiğin sadece fen bilimleri ve teknolojinin yanında değil aynı zamanda sosyal bilimlerde de vazgeçilmez olmasını sağlamıştır. Bu yüzden matematik her öğrencinin öğrenmesi gereken bir bilimdir.

Matematik dersinin her basamakta hayat için olması zorunludur. Yeni yetişen kuşaklara matematiksel görüş, matematiksel düşünüş vermek artık bir zorunluluktur. Matematiği bir eğitim olgusu olarak düşünmek gerekir ve matematiği diğer derslerle paralel yürütmenin de önemini bilmek gereklidir.

Matematik, insanlar tarafından iyi bir yaşamın ve iyi bir kariyerin kapı açıcısı olarak görülmektedir. Aynı zamanda matematik, hayatın ve dünyanın anlaşılması ve bunlar hakkında fikirler üretilebilmesi için yardımcı bir eleman olarak da görülmektedir. Bu nedenle, günümüzde eğitimle ilgili yapılan reform çalışmalarının en önemli amacı, öğrencilerin matematiği anlayarak öğrenmelerine yardımcı olabilecek bir sistemin oluşturulmasını sağlamaktır (Dursun ve Dede, 2004).

Program değişimleri ile başlayan reform sürecinin başarıya ulaşması yeni programları uygulayacak öğretmenlere bağlıdır. Bu bağlamda öğretmen yeterliklerinin neler olduğunun tespit edilmesi ve buna göre öğretmenlerin değerlendirilmesi ve öğretmen yetiştirilmesi önem taşımaktadır. Ayrıca özel alan yeterliklerinin tanımlanması öğretmenlerin meslekî gelişimlerinin planlamasında da yol gösterecektir (MEB, 2009).

Ünlü bir Çin atasözünde , “Kişiye bir balık verirken bir öğün doyar, ona balık tutmayı öğret ki ömür boyu doysun” der. Yeni yetişen nesli, onlara hayat boyu lazım olacak bilgilerle donatmak her şeyden daha önemlidir (Özsoy, 2004).

Bu çalışmada, öğrencilerin bildikleri konular üzerinde fikirler üretip, karşılaştıkları sorular karşısında yorum yapma becerileri ve sahip oldukları bilgilerini gerekli olan her noktada doğru bir şekilde kullanıp kullanamadıkları araştırılmıştır.

1.1 Araştırmanın Problemi

Hangi konu ya da düzeyde olursa olsun, en genel biçimde “düşünmek” bir sorun ya da problemi çözme etkinliğidir ve düşünme sürecinde iki temel aşama dikkati çekmektedir: (1) sorunu açıklayıcı veya giderici çözüm bulma (indüktif-sezgiye dayalı düşünme); (2) bulunan çözümün doğruluğunu yoklama (dedüktif düşünme). Matematiksel düşünme temelde günlük ve bilimsel düşünmeden farklı değildir, günlük düşünme şeklinin belli bir yöntemde gelişen biçimidir (Yıldırım, 2000).

Düşünmek, insanların çevreleri ile ilgili anlamalarını arttırmak ve bazı durumları kontrol altında tutmak için kullanılan bir yöntemdir. Matematiksel düşünme ise bu amaca hizmet

etmek için matematiğin çalışma alanına ait yöntemler kullanmaktadır (Mason vd., 1998).

Aslında her iki tanım da aynı şeyi ifade etmektedir. Bu bakış açısı altında matematiksel düşünmeyi diğer düşülmelerden ayıran en belirgin özelliğin, sahip olunan bilgi ve becerilerden yola çıkarak tahmin etme, genelleme, varsayımda bulunup test etme, soyutlama, muhakeme etme, ispatlama ile yeni bir bilgi ya da kavrama ulaşma çabası olduğu söylenebilir (Alkan ve Güzel, 2005). O halde matematiksel düşünme en genel anlamda; “matematiksel teknik, kavram ve yöntemlerin problem çözme sürecinde dolaylı ya da doğrudan kullanmak” şeklinde tanımlanabilir (Henderson vd., 2004).

Yapılan açıklamalardan hareketle, bu çalışmada öğrencilerin sayılar teorisi konularında,

- matematiksel düşünceye sahip olup olmadıkları,
- genelleme ve soyutlama yapabilme becerileri,
- bilgilerini ezberci bir yöntemle mi yoksa gerçekten anlayarak mı edindikleri,

sorularına cevaplar aranacaktır.

1.2 Araştırmanın Amacı

Matematik eğitiminde yapılan araştırmaların büyük çoğunluğunun odağı öğrencilerin matematiği kavramaları ve yorumlamaları, kavramların öğrenciye nasıl öğretildiği, gibi sadece matematik alanıyla sınırlı kalmaktadır. Araştırmaların büyük çoğunluğunun matematiği anlamının doğası ile ilgili olması, öğrencilerin matematiği farklı ortamlarda uygulama becerilerini geliştirmeye yönelik farklı eğitim-öğretim yöntemleri üzerinde yoğunlaşan çalışmaların sınırlı kalmasına sebep olmaktadır (Niss, 1999). Gerçek hayattaki her bir problemin kendine has, farklı yönleri olduğu için, öğrenci belirli bir bağlamda tecrübe ettiği bir problemi başka bir bağlamda anlamlandırmakta ve dolayısıyla çözmekte güçlük çekmektedir (Bransford vd., 1999).

Bu araştırmanın amacı da matematik öğrencilerinin öğrenmiş oldukları bölünebilme, bölünebilme kuralları, asal ve asal olmayan (birleşik) sayılar, tek ve çift sayılar gibi sayılar teorisinin başlıca konularıyla ilgili bilgilerini karşısına çıkan problemlerde kullanabilme yaklaşımlarını incelemektir. Ayrıca bu konuları kavrama şekillerinin daha detaylı bir şekilde araştırılmasıdır. Bu araştırma yapılırken;

- Bölünebilme kurallarının ne seviyede kavrandığı ve bu kuralların herhangi bir sayıda ya da asal çarpanlarına ayrılmış bir sayıda uygulanmasının ne ölçüde olduğunun anlaşılması;
- Asal sayı ve asal olmayan sayıların tanımlanabilmesi ayrıca asal sayıların büyük sayılar da olabileceği ve sonsuz sayıda asal sayının varlığının kavranabilmesinin ne seviyede olduğunun ortaya çıkarılması;
- Sayının teklik-çiftlik durumunun tayin edilmesi için hangi yöntemlerin kullanıldığı ve sayıların bölünebilme özellikleri incelenirken teklik-çiftlik durumlarının nasıl kullanıldığının incelenmesi;

amaçlanmıştır.

1.3 Araştırmanın Önemi

Öğrenme ortamlarının öğretmen merkezli ve tek bir sınıf ortamında olması, öğrencilerin bilgilerini gerçek hayat problemlerine transfer edebilme becerileri üzerinde negatif bir etkiye sahip olabilir.

Günümüzde eğitim ile ilgili ortaya konan beklentiler eskiye göre oldukça değişmiştir. Öncelikle, sosyal çevrede başarılı olabilmeleri için bireylerin erken yaşlardan itibaren çabuk ve doğru karar verebilme, fikir geliştirebilme, geliştirdiği fikirleri uygulayabilme, kişiler arası başarılı ilişkiler kurabilme ve özgüven gibi bazı yetilerini geliştirmeleri beklenmektedir. Ayrıca bu bireylerin içinde yer aldıkları öğrenme ortamları gerçek hayatla doğrudan bağlantılı olmalıdır. Onların sahip oldukları farklı kişisel yapı ve özelliklerine uygun öğrenme imkânlarını sağlamalıdır. Bunun devamı olarak, bireyin öğrenmeyi öğrenmesi amaçlanmalı ve böylece yaşam boyu öğrenmeyi sağlayacak ortamlar elde edilmeye çalışılmalıdır.

Bütün bu ortamların sağlanması ve öğrencinin öğrenmeyi öğrenmesiyle daha üst seviye öğrenci kitlesine ulaşılmış olur. Öğrencinin öğrendiklerini kavramalı, bu bilgilerini her zaman kullanılabılır vaziyette tutabilmeli ve yaşam boyunca problemlerin üstesinden gelebilmelidir. Matematik eğitimi açısından da problem çözme becerilerinin gelişmesi en önemli sıradadır.

Matematikte problemi çözmek kadar problemin nasıl çözüldüğü de önemlidir. Bulunan her doğru cevap, problemin doğru çözüldüğü anlamına gelmez. Çözüm esnasında yapılmış olan bir hata da sonucun doğru çıkmasına sebep olabilir.

Bu çalışmada da önemli olan sayılar teorisinin öğretilmesi değil sayılar teorisini öğrenmiş olan öğrencilerin sonuca ulaşmaya çalışırken kullandığı yöntem ve düşünme yapısıdır.

1.4 Araştırmanın Varsayımları

Bu araştırmanın varsayımları aşağıdaki şekilde belirlenmiştir;

- Örneklemenin evreni temsil ettiği varsayılmıştır.
- Araştırmaya katılan öğrencilerin, çalışma kâğıtlarındaki soruları çözerken ciddiye alarak, içtenlikle çözdükleri kabul edilmiştir.
- Görüşme için seçilen öğrencilerin, soruları ciddiyetle cevapladıkları ve düşüncelerini açık bir şekilde ifade ettikleri varsayılmıştır.
- Araştırmaya katılan öğrencilerin zekâ seviyeleri arasında önemli bir farklılığın olmadığı varsayılmıştır.
- Araştırmaya katılan öğrenciler arasındaki etkileşimin minimal düzeyde kaldığı kabul edilmiştir.

1.5 Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu araştırma aşağıda belirtilen sınırlılıklar içerisinde yürütülmüştür;

- Bu araştırma; 2009–2010 Eğitim-Öğretim yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Davut Paşa Kampüsü Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde eğitim gören öğrenciler ile sınırlandırılmıştır.
- Araştırma; Matematik Bölümü’nde eğitim gören öğrenciler için sayılar teorisi konularına yönelik hazırlanmış sorulardan oluşan çalışma kâğıtlarının kullanımı ile sınırlandırılmıştır.
- Bu araştırma; sayılar teorisi konuları ile sınırlandırılmıştır.
- Araştırmanın süresi yüksek lisans tezi için ayrılan süre ile sınırlandırılmıştır.

1.6 Tanımlar

- **MEB:** Milli Eğitim Bakanlığı.
- **NCTM:** Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics).
- **Problem:** Öğrencinin çözmek için belirli veya ezberlenmiş kurala sahip olmadığı bir olay, konu veya etkinliktir (Van de Walle, 2003).

2. LİTERATÜR TARAMASI

Literatür taraması, veri toplama ve toplanan verinin öneminin tartışılması, toplanan verilerin problemle ilişkisinin kurulması ve bilginin sınıflandırılması aşamalarından oluşan bir süreçtir (Balcı, 2007). Çalışmanın bu bölümünde de konumuzla alakalı yapılmış olan çalışmalar, makaleler, dergi, kitap ve internetten edinilen bilgiler yer almaktadır.

2.1 Matematiğin Tanımı

Matematik, günlük problemlerimizi çözen, soyut ve sembolik dil kullanan, mantiki düşünmeyi sağlayan ve geliştiren, dünyayı anlama ve kavramamıza yardım eden bir bilimdir. Matematik, insanoğlunun karşılaştığı her türlü problemi çözmek için kullanılan düşünceler sistemidir (Ardahan, 1990).

Matematik, dünyayı görmenin ve anlamanın bir yoludur. Matematik, aslında keşfetmeye yönelik hayal gücüne dayalı yeni dünyayı yaratmada bir araç ve materyaldir. Matematik gerçek hayat problemlerine uygulanarak onları insanların kontrol altında tutmasını sağlar. Kısaca, matematik kendi içinde soyut; ancak somuta uygulanabilen evrensel bir dildir (Mirasyedioğlu ve Hacısalihoglu, 2003).

Matematik, birçok kişi tarafından değişik şekillerde tanımlanmıştır. Ancak bu güne kadar herkesin kabulleneceği bir tanım yapılamamıştır. Bunun tek nedeni, bu konuda bilgi üretenlerin matematiğe bakış açılarının farklı olmasıdır.

Matematikle ilgili yapılan tanımlardan bazılarını şu şekilde sıralayabiliriz;

- Şekil, sayı ve çoklukların yapılarını, özelliklerini ve aralarındaki bağıntıları düşünce yoluyla inceleyen bilimdir.
- Dil, din, ırk ve ülke tanımadan medeniyetten medeniyete zenginleşerek geçen sağlam, kullanışlı, evrensel bir dil ve kültürdür.
- Genel düzen ve ölçü birimidir. (Rene Descartes)
- Her konuda doğruyu bulmamızı sağlayan bilimdir.
- Uğraş konularının yaygınlaşmasına ve derinliğine sınır konulmayan bilimdir.

- Gürültüsüz ve patırtısız devrimler yapan bir bilimdir.
- İnsan aklının ve gücünün yüceliğini gösteren en etkin bir kavramdır.
- Günlük hayatın her evresinde başvurulana hesaplama, çizme ve ölçme bilimidir.
- Herhangi bir problem karşısında, düşünce çeperlerini zorlamak suretiyle çok boyutlu düşünme melekesini geliştirerek hata yapmayı azaltan bilim dalıdır (Özdemir, 1997).

Matematiğin temel kavramları sayılar, nokta, doğru, yüzey (daire, kare.....gibi) ve cisimlerdir (küre, silindir, koni küp...gibi). Bunların dışında; ölçü, kuvvet ve hareket gibi kavramlar da matematiğin konusunu teşkil eder. Gök cisimlerinin hareket denklemlerinden, evrenin, canlının ve Yerküre'nin yapısına kadar olan problemlerin incelenmesi ve çözümlenmesi de matematiğin konusunun içindedir. İnsanın günlük yaşantısını etkileyen basit olaylardan başlayıp evrenin yapısına kadar giden düşüncelerde yer alan matematiğin konusunu sınırlamak çok zordur (Göker, 1997).

2.2 Matematik Öğretiminin Amaçları

Gerçekte matematik için tek amaç gösterilemez Ancak, matematikte temel amaç, insanlarda doğuştan var olan düşünebilme kabiliyetini geliştirmektir. Bu gelişmeyi sağlamak için, insana önceden bazı ön bilgileri kazandırmak gerekir (Göker, 1997).

Matematiğin insan hayatındaki önemi ve bilimsel hayatın gelişmesine olan katkısından ötürü, matematik öğretimi önem kazanmakta ve matematik öğretime okul öncesinden başlayarak, ilköğretim ve sonrasında geniş bir zaman ayrılmaktadır. Matematik öğretiminin amacı genel olarak şöyle ifade edilebilir. Kişiyi günlük hayatın gerektirdiği matematik bilgi ve becerileri kazandırmak, ona problem çözmeyi öğretmek ve olayları problem çözme atmosferi içinde ele alan bir düşünme biçimi kazandırmaktır.

İnsanın çevresi geometrik eşya ve yapılarla kuşatılmıştır. Kullanılan eşyaların tamamı çok çeşitli geometrik cisimlerin yalın ya da bileşik halleridir. Bunları tanımak, insan hayatının her anında sıkça yer alan ölçü aletlerini kullanmak ve elde edilen sonuçları yorumlamak temel matematik beceriler gerektirir. Televizyon ya da gazete haberlerindeki sayısal verileri ya da grafikleri anlamak yine bazı temel matematik bilgi ve beceriler sayesinde olur. İnsan,

hayatında sıkça bir şeyleri karşılaştırma daha iyi ve daha uygun olanı seçme durumunda kalır. Karşılaştırma varlıkların nitel ve nicel özellikleri üzerinde yapıldığı için karşılaştırmada da temel matematik bilgilerden yararlanılır (Alkan ve Altun, 1998).

İnsanın, içinde yaşadığı topluma ekonomik, sosyal, kültürel, bilimsel bakımdan uyum sağlayabilmesi ve kendisine de yararlı bir fert olarak yetişebilmesi için gerekli olan bir takım amaçları vardır. Bunları özetle şöyle sıralamak mümkündür:

- Matematiğe karşı olumlu bir tutum geliştirebilme.
- Matematiğin hayattaki yerini ve önemini kavrayabilme.
- Varlıklar arasındaki temel ilişkileri kavrayabilme.
- Günlük hayatta gerekli olan zihinden hesaplama becerisi kazanabilme.
- Günlük hayatta kullanılacak dört işlem becerisi kazanabilme.
- Problem çözme yeteneğini geliştirme.
- Problem kurma yeteneğini edinebilme.
- Günlük hayatta kullanılan ölçü, grafik, plan, çizelge ve cetvelden yararlanabilme.
- Günlük hayatta kullanılan temel işlem becerisini (yüzde, faiz, iskonto, vb.) kazanabilme.
- Zaman, mekân ve sayılar arasındaki ilişkiler hakkında açık ve kesin fikirler kazanabilme.
- Bu derste edinilen bilgi ve becerileri diğer derslerde ve günlük hayatta kullanma yeteneğini geliştirebilme.
- Başlıca geometrik şekillerin aralarındaki ilişkileri kavrayabilme, alan ve hacimlerini hesaplama becerisini geliştirebilme, özelliklerini günlük hayattaki problemlere uygulayabilme.

- Çevredeki eşyayı şekil ve büyüklük bakımından doğru olarak kavrama ve bu eşyanın şekilleri ile fonksiyonları arasındaki ilişkileri anlayabilme.
- Basit cebirsel işlemler becerisini edinebilme.
- Birinci dereceden en çok iki bilinmeyenli denklem sistemlerini günlük hayattaki problemlere uygulayabilme.
- Basit trigonometri kavramları bilgisine sahip olabilme.
- Olasılık ve istatistik ile ilgili temel kavramları anlayabilme.
- Çözümleme yapma, tümdengelimle düşünme, tümevarımla düşünme, her iki yolla düşünme yeteneği edinebilme.
- İnceleme, araştırma, yorum yapma, öğrenileni şema haline koyma, düzenli, dikkatli, sabırlı olma, açık ifade etme becerisi ve alışkanlığı kazanabilme.
- Araştırma merakına sahip olma, tarafsız olabilme, peşin hükümden kaçınma, yerinde karar verebilme, açık fikirli olma ve bilginin yayılmasını arzu etme duygusunu kazanabilme.
- Yaratıcı ve eleştirci düşünme yeteneğini geliştirebilme.
- Günlük hayatta karşılaşılan problemleri çözmeye yarayacak düşünme yolu edinebilme.
- Estetik duygusu geliştirebilme (M.E.B.).

2.3 Sayılar Teorisi

Sayılar teorisi bir tamsayı çalışmasıdır. Sayılar teorisi, matematiğin tam olarak merkezidir (Devadas ve Lehman, 2005).

Sayılar teorisinin temel kavramı, matematik alanındaki önemine rağmen, Matematik eğitim araştırmalarında yeterince dikkat çekmemiştir. Türkiye’de de Matematik eğitimi üzerinde yapılan çalışmalar arasında “sayılar teorisi” oldukça az yer almaktadır.

Daha önceki çalışmalarda temel sayı teorisi kavramı, matematiksel bağlamda farklı konuları araştırmak için kullanılmıştır. Örneğin; Martin ve Harel (1989) bölünebilme kavramlarını, öğretmen adaylarının matematiksel ifadeleri anlamalarıyla ilgili araştırmasında kullanmıştır. Leron (1985), bu teoriyi kullanarak asal sayıların sonsuzluğunun dolaylı kanıtlarını daha yararlı yaklaşımlarla açıklamıştır. Lester ve Mau (1993) asal çarpanları, ilköğretim öğretmen adaylarının derslerinde problem çözmelerini incelemede kullanmışlardır. Movshovitz-Hadar ve Hadass (1990) çalışmalarında öğretmen adaylarının eğitiminde mantığa aykırı düşünce ve birbirini tutmayan sonuçların eğitimsel rolünü incelemek için asal sayı kareköklerinin irrasyonelliğinin ispatlarını kullanmışlardır. Fakat bu çalışmada, Zazkis ve Campbell’in (1996) çalışmalarında olduğu gibi sayılar teorisi konularının kendileri araştırmanın asıl merkezidir.

Bu çalışmadaki temel vurgu; bölünebilme kavramı ve bunun bölmeye ilişkisi, bölünebilme kuralları, çarpma, sayının tek veya çift olması, çarpanlara ayırma, asal ve asal olmayan sayılar ve asal sayıların analizi kavramlarıdır.

2.4 Bölünebilme

“Bölünebilme” kavramı bir tamsayının verilen herhangi bir tamsayıya tam bölünmesini ifade etmektedir (Altun, 2008).

Bölünebilmeyle ilgili kuralları anlama ve bu kuralları gerektiği yerde bağlantı yaparak kullanabilme yeteneği çalışmada esas alınan noktalardan biridir.

2.5 Bölünebilme Kuralları

Bölünebilme kurallarından bazılarını şu şekilde sıralayabiliriz.

2.5.1 2 ile Bölünebilme:

Verilen sayının son rakamı çift ise, o sayı 2 ile tam bölünür.

2.5.2 3 ile Bölünebilme:

Verilen sayının bütün rakamlarının sayı değerleri toplamı 3 ile tam bölünüyorsa sayının kendisi de 3 ile tam bölünür.

Örnek: 258 $\rightarrow 2+5+8=15$, 15 sayısı 3 ile tam bölünür öyleyse 258 sayısı da 3 ile tam bölünür.

2.5.3 4 ile Bölünebilme:

Verilen sayının son iki rakamı 4 ile tam bölünüyorsa sayının kendisi de 4 ile tam bölünür.

Örnek: 63512 $\rightarrow$ 12 sayısı 4 ile tam bölünür öyleyse 63512 sayısı da 4 ile tam bölünür.

2.5.4 5 ile Bölünebilme:

Verilen sayının son rakamı 0 veya 5 ise, o sayı 5 ile tam bölünür.

2.5.5 6 ile Bölünebilme:

Verilen sayı 2 ve 3 ile tam bölünebiliyorsa sayı 6 ile tam bölünür.

Örnek: 258 $\rightarrow$ 2 ve 3 ile tam bölünür öyleyse 258 sayısı 6 ile tam bölünür.

2.5.6 7 ile Bölünebilme:

Verilen sayının 7 ile tam bölünüp bölünemediğini bulmak için şu yöntem uygulanır:

- 1) Sayının son rakamı 2 ile çarpılır.
- 2) Bulunan bu değer sayının diğer kalan parçasından çıkarılır.
- 3) Bu işlem çıkan sonucun 7 ile bölünüp bölünemediğini anlayana kadar devam eder.

Örnek: 7203 sayısı 7 ile tam bölünür, çünkü:

- a) $7203 \rightarrow 720 - (3 \times 2) = 714$
- b) $714 \rightarrow 71 - (4 \times 2) = 63$
- c) $63 \rightarrow 6 - (3 \times 2) = 0$

Evet, 0 sayısı 7 ile tam bölündüğüne göre 7203 sayısı da 7 ile tam bölünür.

2.5.7 8 ile Bölünebilme:

Verilen sayının son üç rakamı 8 ile tam bölünüyorsa sayının kendisi de 8 ile tam bölünür.

Örnek: $34168 \rightarrow 168$ sayısı 8 ile tam bölünür öyleyse 34168 sayısı da 8 ile tam bölünür.

2.5.8 9 ile Bölünebilme:

Verilen sayının bütün rakamlarının sayı değerleri toplamı 9 ile tam bölünüyorsa sayının kendisi de 9 ile tam bölünür.

Örnek: $34164 \rightarrow 3+4+1+6+4 = 18$ sayısı 9 ile tam bölünür öyleyse 34164 sayısı da 9 ile tam bölünür.

2.5.9 10 ile Bölünebilme:

Verilen sayının son rakamı 0 ise sayı 10 ile tam bölünür.

2.5.10 11 ile Bölünebilme:

Verilen sayının 11 ile tam bölünebilmesi için sayı sağdan sola doğru (+1) ve (-1) ile çarpılarak sonuçlar toplanır. Sonuç 0 ise sayı 11 ile tam bölünür. Sonuç pozitif ise bu, sayının 11 ile bölümünden kalanını verir. Sonuç negatif ise sonuca 11 eklenip sayının 11 ile bölümünden kalanı bulunur.

Örnek: $6613585 \rightarrow (5+5+1+6) - (8+3+6) = 0$, sayı 11 ile tam bölünür.

2.5.11 12 ile Bölünebilme:

Verilen sayı 3 ve 4 ile tam bölünüyorsa sayı 12 ile tam bölünür.

Örnek: $264 \rightarrow 3$ ve 4 ile tam bölünür öyleyse 264 sayısı 12 ile tam bölünür.

Pek çok örnek üzerinde bu kuralların uygulanabilirliği görülebilir. Bölünebilme kurallarını çoğaltmak ya da bu kuralları ispatlamak mümkündür. Ancak bu çalışmanın çok dışında kaldığı için farklı bir çalışmada incelenmesi daha doğru olur.

2.6 Asal Sayılar

Matematiksel tanıma göre asal sayılar, yalnızca iki çarpanı olan doğal sayılardır. (Asal sayılar listesinden 1 sayısını çıkarabilmek için, yalnızca “kendine” ve 1’e bölünebilen sayılardır tanımı daha uygun bulunmaktadır) (Zazkis, 2005).

Asal sayıların öğrenene her zaman anlaşılmaz gelen kendine özgü iki özelliği vardır. Birincisi sonsuz tane asal sayının olmasıdır ki bu büyük asal sayıların da olduğunu gösterir. Diğeri ise asal sayıların basit polinom fonksiyonlarından meydana gelmediğidir. Gerçekte farklı alanlardan matematikçiler yüzyıllarca asal sayıların kaynağını keşfetmek için çabalamıştır. 1970’lerdeki çok az çalışma kaydedilebilmiştir (örneğin Gandhi’nin Ribenboim’deki formülü, 1996). Fakat bu ilerlemeler fark edilebilecek düzeyde matematiğin karmaşıklığını ortaya koymuştur (Zazkis ve Liljedahl, 2004).

Asal sayılara ilgi en az 2500 yıl öncesindeki eski Yunan Matematikçilerinin çalışmalarına dayanır. Eski Yunan Matematikçisi Euclid, sonsuz sayıda asal sayı olduğunu kanıtlamış ve şu yöntemi kullanmıştır:

“Asal sayıların sonlu olduğunu ve P sayısının en büyük asal sayı olduğunu varsayalım...

$$Q = (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times P) + 1$$

ile tanımlanan Q sayısını ele alalım. Q sayısının 2,3,5,...,P sayılarının hiçbirisi ile bölünemediği açıktır; çünkü bu sayıların herhangi biri ile bölündüğünde ‘1’ kalanını bırakır. Ama kendisi asal değilse, bir asal ile bölünebilmelidir; bu nedenle de bütün asallardan daha büyük bir asal sayı vardır. Bu, Q’nun kendisi de olabilir. Bu sonuç, P’den daha büyük bir asal sayı olmadığı yolundaki hipotezimizle çelişir. O halde bu hipotez doğru değildir.” (Çakar vd., 2002).

17. ve 18. yüzyılda, Pierre de Fermat ve Leonhard Euler asal sayı üretmek için yaklaşımlarda bulundular ve önemli sonuçlar elde ettiler, bu sebepten tekrar asal sayılara olan ilgi arttı. 19. yüzyılda asal sayılar ile ilgili çalışmalar önemli bir şekilde ilerledi ve sonuçlar aritmetiğin ilerlemesindeki asal sayıların sınırsızlığını içeriyordu. Pozitif $\times$ sayısını aşmayan asalların sayısı kesin olarak tahmin edildi. 20. yüzyılda asal sayılar ile ilgili güçlü teknikler geliştirildi. Modern sayılar teorisinin gelişmesi ise muhtemelen Alman matematikçi Carl Friedrich Gauss tarafından yapıldı, tarihteki en büyük matematikçiler arasında yer alan Gauss 19. yüzyılın başlarında kongrüansların gelişmesini sağladı.

Rosen (2005) araştırmalarında, sayılar teorisini; sayıların belli tiplerini, aralarındaki ilişkileri ve özelliklerini çalışan matematiğin bir dalı olarak tanımlamıştır. Sayılar Teorisinin önemli

bir yerini asal sayılar oluşturmaktadır (Zazkis ve Liljedahl, 2004).

Asal sayılar üzerine yapılan çalışmalar, günümüzde de devam etmektedir ve şimdiye kadar bulunan en büyük asal sayı (213466917) 'dir (Cameron, Woltman, Kurowski, GIMPS).

Asal sayılar sadece matematikte değil, farklı alanlarda da kullanılmaktadır. Elektronik hesaplama yöntemi kullanılmaya başlandığından beri, asal sayı bulma programları da donanım testleri için iyi bir yöntem haline gelmiştir. Kendileri ve 1'den başka çarpanları olmadığından, asalları ifade etmenin tek bir biçimi vardır ve bu sayede donanım daha güvenilir bir şekilde kontrol edilmiş olur. Asal sayılar, sesle haberleşmede de aynı sebeple kullanılmaktadır. Yani asal olmayan bir sayı (örneğin; 15), farklı bir şekilde de yazılabilir: $(15 = 3 \times 5)$; ama asal olan bir sayı başka bir şekilde gösterilemez. Asal sayılar aynı zamanda bankaların, askeri sistemlerin ve hatta internet sayfalarının gizli şifrelerinin düzenlenmesinde kullanılır. Bunun nedeni ise; iki büyük asal sayının çarpımını, çarpanlarına ayırmanın çok güç olmasıdır (Çakar vd., 2002).

Sayıları anlama, sayıların temsil yöntemleri ve sayıların kendi aralarındaki ilişkileri National Council of Teachers of Mathematics (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi) tarafından tanımlanmıştır (NCTM, 2000). Bize göre asal sayıların öneminin anlaşılması için, bu üç açıdan da incelenmesi gerekir. Bina bloklarındaki gibi, asal sayılar da sayıları ve sayılar arasındaki çarpımsal ilişkiyi anlamada çok önemlidir (Zazkis ve Liljedahl, 2004).

Asal sayılar, sayılar teorisinin temel düşüncesi veya yapı taşıdır. Ayrıca, bu temel düşünce ayrı olarak ele alınamaz çünkü matematiksel kavramları anlama diğer kavramlarla karmaşık bir bağlantı ve ilişkiye sahiptir. Bu sebeple, bir öğrencinin asal sayıları anlaması, doğal sayılarda çarpan ilişkisini anlamasıyla bağlantılıdır. Örneğin; çarpanlar, bölenler, asal olmayan sayılar ve bölünebilirlik gibi. Bu yüzden, bir öğrencinin asal sayı kavramını anlamış olması,

- a) 1'den büyük herhangi bir doğal sayının ya asal sayı ya da asal olmayan bir sayı olduğunu bilmesi ve asal sayının tanımını yapabilmesi;
- b) Eğer sayı çarpım olarak verilmişse, bu çarpanlar 1 ve asal sayı olmadıkça bu çarpımın asal sayı olmadığını anlaması;
- c) Asal olmayan sayının yalnızca bir tane asal çarpanlarına ayrılmış şekli olduğunu ve asal sayıların sonsuz tane olduğunu bilmesi;

ile gerçekleşebilir (Zazkis ve Liljedahl, 2004).

2.7 Sayıların Teklik ve Çiftlik Durumları

Teklik ve çiftlik arasındaki fark Matematik çalışmaları kadar eskidir. Plato aritmetiği “teklik ve çiftlik teorisi” olarak tanımlamıştır (van der Waerden, 1955). Pisagor’a göre teklik ve çiftlik aritmetiğin sadece temel kavramları değildir, gerçekten doğanın temel kavramlarıdır.

Öğrencilerin tam sayıların teklik-çiftlik özelliğini anlayabilmelerini tanımlayabilmek için;

- Öğrenciler teklik-çiftlik özelliklerini bölünebilme sonuçlarında nasıl kullanırlar?
- Öğrenciler verilen sayının teklik-çiftlik özelliğini tayin etmek için hangi yöntemleri kullanırlar?
- Bölünebilmede teklik-çiftliğin anlaşılması eğitimsel yaklaşımı nasıl daha iyi bir duruma getirir?

sorularına cevap aramak gerekir (Zazkis, 1998).

2.8 Yapılan Çalışmalar

Zazkis ve Campbell (1996), yaptıkları çalışmada öğretmen adaylarının doğal sayıların bölünebilme ve çarpanlarına ayrılma yapısını anlama şekillerini araştırmıştır. Araştırmada, 21 ilköğretim öğretmen adayı yer almaktadır. Öğretmen adaylarına sorulmuş olan sorular bu çalışmada da kullanılmıştır ve sorular **Soru Grubu 1** başlığı altında verilmiştir. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının, özel yöntemlerin olmadığı yerlerde bölünebilme kurallarını gereğinden fazla genelleştirdiği ve yanlış uygulamalar yaptıkları görülmüştür.

Ferrari (2001), çalışmasında Zazkis ve Campbell (1996)’ın çalışmalarında kullandıkları sorulara benzer sorular kullanmıştır ve bu sorular **Soru Grubu 2** başlığı altında bu çalışmada da kullanılmıştır. Araştırmada 39 bilgisayar bilimi öğrencisi yer almaktadır. Araştırma öncesinde öğrencilere 30 saat cebir dersi verilmiştir (bölünebilme, çarpanlara ayırma, en büyük ortak bölen konuları dahil edilmiştir). Araştırma sonucunda ise Zazkis ve Campbell’in analiz sonuçlarının bu çalışmada da geçerli olduğu görülmüştür.

Zazkis ve Liljedahl (2004), "Asal Sayıları Anlama" başlıklı araştırmalarında 134 ilköğretim öğretmen adayı ile çalışılmıştır. Adaylara sorulmuş olan sorular bu çalışmada da kullanılmıştır ve sorular **Soru Grubu 3** başlığı altında verilmiştir. Öğrenciler tarafından verilen cevapların incelenmesi sonucunda, öğrencilerin asal sayıların büyük sayılar da olabileceği ve dolayısıyla sonsuz sayıda asal sayının olduğu konusunda zorlandıkları

görülmüştür.

Zazkis (1998), sayıların teklik ve çiftlik durumları ile ilgili yapmış olduğu çalışmada ilköğretim öğretmen adaylarında 2'ye bölünebilme veya çiftlik ve herhangi bir sayıya bölünebilme arasındaki farkları gözlemlemiştir. Zazkis'in çalışmasında kullanmış olduğu sorular çalışmamızda da kullanılmıştır ve sorular, **Soru Grubu 4** başlığı altında verilmiştir. Zazkis'in çalışmasında elde ettiği en önemli bulgu birçok öğrenciye göre bir sayının 2'ye bölünebilmesi ve o sayının çift olması ayrı kavramlar olarak algılanmıştır. Çiftlik genelde sayının son rakamına bağlı bir özellik olarak düşünülmüştür. Üstelik, 2 çarpanı varsa çift olarak tanımlanmıştır, fakat yoksa tek olarak tanımlanamamıştır. Bunun yanında bazı öğrenciler teklik-çiftlik özelliklerini tam kare özelliği gibi diğer bazı sayı teorileriyle karıştırmışlardır.

Özdemir ve Sert (2010), "Elemanter Sayı Kuramı Dersinde Proje Destekli Öğretimin Öğrenci Başarısına Etkisi" isimli araştırmalarında, proje destekli öğretimin öğretmen adaylarının başarılarına ve düşünce yapılarına etkisinin olup olmadığını incelemeyi amaçlamışlardır. Araştırma, Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik öğretmenliği Anabilim Dalı'ndaki Elemanter Sayı Kuramı dersini alan 46 öğrenciye uygulanmıştır. Araştırmada, "son test kontrol gruplu model" kullanılmıştır. Düşünme stil farklılıklarını incelemek için "Düşünme Stilleri Envanteri"ne dayandırılarak öntest-sontest kontrol grup modeli kullanılmıştır. Sonuçlar analiz edildiğinde, deney ve kontrol grubunun başarılarında anlamlı bir farklılık oluşmamıştır. Deney ve kontrol grubunun düşünme stillerinde ise Anarşik ve Çokerkçi alt faktörünün deney grubu yönünde anlamlı olduğu görülmüştür.

3. ARAŞTIRMA YÖNTEMİ

Bu bölümde araştırmanın modeli, araştırmanın evreni ve örnekleme, araştırma verilerinin toplanması ve verilerin analizi üzerinde durulmuştur.

3.1 Araştırmanın Modeli

Araştırma yöntemi, araştırmanın amacını gerçekleştirebilmek için kullandığı genel yaklaşımdır. Araştırma tekniği ise, araştırma yönteminin gerçekleştirilebilmesi için kullanılan bilgi toplama aracıdır (Türkdoğan, 2000).

Yapılan bu çalışmada nitel araştırma deseni olan “durum çalışması” modeli kullanılmıştır.

Öncelikle nitel araştırma ve durum çalışmasından kısaca bahsedelim ve bu modellerin çalışmamız için uygunluğunu inceleyelim.

3.1.1 Nitel Araştırma

Nitel araştırma olaylar ve bireylerin bu olaylardaki yaşantılarıyla ilgili sorulara cevap vermek için kullanılır. Kısaca, nitel araştırma olay veya bilinmeyene yönelik ne, nerede, ne zaman, niçin ve nasıl sorularıyla ilgilenir (Penfield, 2005). Nitel veri analizi sistematik bir anlamlandırmaya yönelik araştırma sürecidir. Analiz diğer bir deyişle nitel verinin organize edilmesi ve sorgulanması, araştırmacının temaları belirlemesi, ilişkileri ortaya çıkarması, bunları açıklayabilmesi, yorumlaması ve yordaması ve teori oluşturmasını sağlar. Bu sentezleme, “değerlendirme, yordama, kategorize etme, hipotez oluşturma, karşılaştırma ve yapıların bulunmasını kapsar” (Hatch, 2002; Tanrıöğen, 2009).

Nitel çalışma, sosyal bir olgunun anlamını, doğal yapısının mümkün olduğu kadar küçük parçalarından yararlanarak anlamaya ve açıklamaya yardımcı olan sorgulamaların çeşitli biçimlerini kapsayan bir şemsiyedir....Nitel araştırmacıları, insanların yapılandırmış oldukları şeyler, yani dünyalarını nasıl anlamlandırdıkları ve sahip oldukları deneyimler ilgilendirir (Merriam, 1998).

Nitel araştırma, belli olgu veya olayları kendi doğal ortamları içerisinde çok yönlü ve uzun süreli olarak derinlemesine incelemektir (Işıkoğlu, 2005).

Nitel araştırma tekniklerinin doğal ortama duyarlılık sağlaması, araştırmacının katılımcı rolü olması, bütüncül bir yaklaşıma sahip olması, algıların ortaya konmasını sağlaması, araştırma deseninde esnekliği olması ve tümevarımcı bir analize sahip olması önemli özellikleridir

(Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Nitel araştırmaların sakıncalı yönlerine, veri toplamanın zaman alıcı olması, toplanan verinin analizinin oldukça zor olması, kişilerin davranış kalıplarını tam olarak gösteremedikleri durumlarda bu kalıpların gözden kaçabilmesi ve nitel araştırmaların araştırmacı olmayan kişilerce geçerliliğinin kabul edilmemesi örnek verilebilir. Öte yandan, nitel araştırmalar, "nasıl" ve "niçin" sorularına cevap verebilme, araştırmacıya araştırma sürecinde ortaya çıkabilecek değişikliklere adapte olabilecek bir esneklik sağlama ve sosyal süreci anlamaya elverişli olma gibi üstün yönleri de sahiptir (Saunders vd., 1997).

Nitel araştırmanın birçok tanımının ortaya konulması çeşitli disiplinler içerisinde aktif olarak kullanılmasından kaynaklanmaktadır. Bugün birçok araştırmacının geniş bir şekilde yararlandığı en kapsamlı nitel araştırmanın tanımının Denzin ve Lincoln (1998) tarafından yapıldığı söylenebilir. Onlara göre nitel araştırma, araştırmacıların araştırılacak konu ya da konuları doğal ortamda incelemeleri, araştırılan insanların getirmiş oldukları anlamlar açısından olguyu anlamlaştırma ve yorumlama çabası içerisinde olmalarıdır.

Nitel metotlar, az sayıdaki insan ve durum hakkında detaylı bilgi zenginliği verir. Bu olay, çalışılan durumları daha iyi anlamamızı sağlar, ayrıca genellemeyi indirger (Patton, 1990).

Bu çalışmada da herhangi bir genelleme yapmadan, sınırlı sayıda öğrencinin sayılar teorisi konuları üzerindeki kabiliyetlerini detaylı bir şekilde incelemek istediğimiz için nitel metot kullanımı tercih edilmiştir.

3.1.2 Durum Çalışması

Özel durum çalışması, felsefesi yorumlayıcı paradigmaya dayanan, araştırmacıya bir bağlam içerisinde bir grubu, olayları veya ilişkileri derinlemesine inceleme ve yorumlama olanağı sağlayan, elde edilen bulgularla benzer durumlar üzerinde gerçekçi tahminlerden ziyade analitik genellemeler yapma fırsatı veren nitel araştırma yöntemlerinden biridir. Her bir bağlam kendine has ve dinamik bir yapıda olduğundan, özel durum çalışması bir bağlam içerisindeki olayların, insan ilişkilerinin veya başka faktörlerin dinamik, karmaşık ve belirgin olmayan ilişkilerini ortaya çıkarmayı amaçlamaktadır (Cohen, Manion ve Morrison, 2000).

Özel durum çalışması, kısa bir zaman içerisinde belirlenen bir problemin tüm yönü ile ele alıp ayrıntılı olarak inceleme olanağı sağlayan bir yöntem olarak düşünülmektedir. Özel durum çalışması araştırma yöntemlerinin tümünü kapsayabilen bir çalışma olarak tanımlanır (Çepni, 2001).

Özel durum çalışması, belirli bir bağlamın ve bu bağlam içerisindeki etkileşimin parçası olan durumları derinlemesine anlama çabasıdır (Patton, 1985).

Durum çalışması yanlıdır, genellemelere izin vermez, uzun zaman alır ve okunması mümkün olmayan şişkin bir veri seti üretir (Yin, 1994). Özel durum çalışmasındaki “genellemelere izin vermez” kaygısına karşı, özel durum çalışmasının bir evrene istatistiksel genellemeler yapma kaygısı yoktur, onun yerine analitik genellemeler yapmak, yani kuramsal önermelerde bulunmayı amaçlamaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2005), ifadesi yeterlidir. Araştırmacı kullanacağı yöntemi ne kadar iyi kullanırsa bu önyargıların da o kadar kolay dışında kalır.

Bir durum, tek bir birey, aile ya da bir sınıf olarak seçilebilen bir grup, bir kurum ya da bir toplum olabilir. Durumların seçimi, sizin ne istediğinize bağlı olarak değişir (Gilham, 2000).

Her öğrencinin bölünebilme, asal sayı, tek-çift sayı kavramları hakkında düşüncelerinin derinlemesine incelenmesi amaçlandığı için bu çalışmada öğrencilerin her biri “bir durum” olarak ele alınmıştır ve bu çalışma bir durum çalışmasıdır.

3.2 Araştırmanın Evreni ve Örneklemi

Araştırmanın evrenini 2009-2010 Eğitim-Öğretim döneminde Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde öğrenim gören öğrenciler oluşturmaktadır.

Bu çalışmada, amaçlı örneklem yöntemlerinden “maksimum çeşitleme” kullanılmıştır. maksimum çeşitlemede amaç görece olarak küçük bir örneklem oluşturmak ve bu örneklemde çalışılan probleme taraf olabilecek bireylerin çeşitliliğini maksimum derecede yansıtmaktır (Yıldırım ve Şimşek 2005).

Araştırmanın örnekleme oluşturulurken en üst seviyede çeşitlilik oluşturulmaya çalışılmıştır. Araştırmanın örnekleminde, 2009-2010 Eğitim-Öğretim döneminde Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde öğrenim gören Soyut Matematik 1 Dersi’ni alan 50 öğrenci, Analiz 1 Dersi’ni alan 10 öğrenci ve İntegral Denklemler Dersi’ni alan 23 öğrenci olmak üzere toplamda 83 öğrenci bulunmaktadır.

3.3 Veri Toplama Teknikleri

Bilimsel araştırmalarda bilgi veren, sorunu çözmemize ya da karar vermemize yardımcı olan her türlü bilgi veya olguya veri denir (Tanrıöğen, 2009).

Araştırmacılar, araştırma sürecinde, araştırmanın amacına ve konusuna uygun olarak farklı kaynaklardan veri toplayabilir. İnsan, hayvan, bitki, tarihi belgeler, kalıntılar vb. veri kaynağı niteliğı taşıyabilir. Araştırmada kaynak, bilmek istenen ne ise onun karakterine göre ortaya çıkar. Kaynağı belirleyen faktör, araştırmanın incelediğı soru veya hipotezidir. Kaynağın ne olduğunu, araştırmanın sorusu veya hipotezi belirler (Erdoğan, 2003).

Nitel araştırmada geçerlik ve güvenirlik için “veri çeşitlemesi” yapılması gerekmektedir. Farklı yöntemlerle elde edilen verilerin birbirlerini teyit amacıyla kullanılması, ulaşılan sonuçların geçerliğini ve güvenirliğini artırır (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Durum çalışmalarında genellikle, birden fazla veri toplama yöntemi işe koşulur; bu yolla zengin ve birbirini teyit edebilecek veri çeşitliliğine ulaşılmaya çalışılır. Durumlar birbirinden farklı olduğı için sonuçların genellenmesi söz konusu değildir. Ancak bir duruma ilişkin olarak elde edilen sonuçların benzer durumların anlaşılmasına yönelik örnekler ve deneyimler oluşturması beklenir (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Araştırmanın özelliğine göre, farklı veri toplama tekniklerinden yararlanılabilir. Bu çalışmada araştırmanın yapısına uygun olması bakımından veri olarak öğrencilerin problemlerin çözümlerini yaptıkları çalışma kağıtları ve bu çözümlerin “nasıl?”, “niçin?” yapıldığının daha detaylı anlaşılması için görüşme tekniklerinden faydalanılmıştır.

3.3.1 Çalışma Kâğıtları

Öğrenciler tarafından cevaplandırılması gereken sorular ve öğrencilerin cevaplarını yazabilecekleri çalışma alanını içeren çalışma kâğıtları hazırlanmıştır. Çalışma kâğıtlarındaki sorular bölünebilme, asal sayılar, sayıların teklik-çiftlik durumları konularından seçilmiştir. Seçilen her soru daha önce uygulanmıştır ve bu çalışmada uygulanabilirlik durumları, uzman görüşü de alınarak kararlaştırılmıştır.

3.3.1.1 Soru Grubu 1:

Bu gruptaki sorular, Zazkis ve Campbell (1996) tarafından yapılan çalışmadan alınmıştır.

Soru 1:

$M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ olarak alalım.

M sayısı, 7 ile bölünebilir mi? Açıklayınız.

M sayısı, 2, 5, 9, 63, 11, 15 sayıları ile bölünebilir mi? Açıklayınız.

Bu sorular, katılımcıların bölünebilme kuralları ile asal çarpanlara ayırma arasında ilişki kurabilmeyi anlama durumlarını incelemek için hazırlanmıştır. Bu soruda asıl önemli olan, katılımcıların M sayısının değerini çarparak hesaplamak yerine asal çarpanlara ayrılmış olması avantajını kullanabilme becerilerini ölçmektir.

Soru 2:

(a) 391 sayısı 23 ile bölünebilir mi?

(b) 391 sayısı 46 ile bölünebilir mi?

Bu sorular, katılımcıların bölmenin daha gerekli olduğu bir durumda bölme işlemi ve bölünebilme konusu arasındaki ilişkiyi (a kısmında) ve daha sonraki aşamada bölmenin gereksiz olduğunu (b kısmında) anlama durumunu incelemek için hazırlanmıştır. Sayı bazı basit bölünebilme kurallarının kullanılamayacağı şekilde seçilmiştir (2, 3, 5 ile bölünebilme kuralları gibi).

Soru 3:

12358 ve 12368 sayılarını ele alalım.

Bu sayılar arasında 7 ile bölünebilen bir sayı var mıdır?

Bu sayılar arasında 12 ile bölünebilen bir sayı var mıdır?

Bu sorular, katılımcıların basite indirgeme kabiliyetlerini değerlendirmek ve verilen aralıkta sayının varlığı veya var olmayışını tartışmalarını sağlamak için hazırlanmıştır.

Soru 4:

- (a) 15 sayısının 4 tane böleni vardır. Bunları listeleyebilir misiniz? 4 tane böleni olan başka sayılar da var mıdır?
- (b) 45 sayısının 6 tane böleni vardır. Bunları listeleyebilir misiniz? 6 tane böleni olan başka sayılar da var mıdır?

Bu soru, katılımcıların daha önceki sorulardaki başarılarına göre sorulmuştur. Bu sorunun amacı katılımcıların verilen kurallarla sistematik olarak sayı oluşturmalarını sağlamaktır.

3.3.1.2 Soru Grubu 2:

Bu gruptaki sorular, Zazkis ve Campbell (1996) tarafından yapılan çalışmanın sorularına benzer olarak Ferrari (2001) tarafından kendi çalışmasında kullanılmıştır.

Soru :

$M = 3^4 \times 5^3 \times 7^6 \times 19^8$ olarak alalım.

- a) M sayısı, 63 ile bölünebilir mi?
- b) M sayısı, 18 ile bölünebilir mi?
- c) M+5 sayısı, 10 ile bölünebilir mi?
- d) $M < X < M+10$ aralığında 8 ile bölünebilen bir X sayısı var mıdır?

Bu gruptaki sorular 1.grup soruları gibi katılımcıların bölünebilme kuralları ile asal çarpanlara ayırma arasında ilişki kurabilmeyi anlama durumlarını incelemek için hazırlanmıştır. (a) ve (b) şıkları katılımcılara konuyla ilgili ısındırma soruları olarak seçilmiştir. (c) şıkkındaki soru ilk iki şıkta olduğu gibi basit bir gözden geçirme durumuyla kolayca çözülemeyebilir.

(d) şıkkındaki soru ise görülmeyen bir sayının varlığını ifade etme kabiliyetini ölçmek için hazırlanmıştır.

3.3.1.3 Soru Grubu 3:

Bu gruptaki sorular, Zazkis ve Liljedahl (2004) tarafından yapılan çalışmadan alınmıştır.

Soru 1:

Asal sayıları nasıl tanımlarsınız? Asal olmayan sayıları nasıl tanımlarsınız?

Soru 2:

$F = 151 \times 157$ olarak alalım. F bir asal sayı mıdır? Cevabınızı işaretleyiniz (EVET/HAYIR). Açıklayınız.

Soru 3:

$m(2k+1)$ ifadesini alalım (m ve k tam sayılar). Bu sayı asal mıdır? Hiç asal olabilir mi?

1.soru giriş olarak kolay ve konuşmaya başlayabilmek için ısındırma sorusu olarak seçilmiştir. Bununla birlikte 1.soruda öğrencilerin asal sayıyı ifade edebilme yetenekleri ölçülmüştür. Asal sayılar ve asal olmayan sayılar arasındaki ilişkiyi ifade edebilme durumları incelenmiştir.

2.soruda yapılması gereken herhangi bir şey yoktur. F sayısı doğal sayıların çarpımı olarak verilmiştir. Burada önemli olan katılımcıların verecekleri cevapların ne seviyede olacağını ölçmektir.

3.soruda da sayı bir çarpım olarak verilmiştir fakat bu sayı cebirsel sembolle ifade edilmiştir. Ancak bunun bir önemi yoktur, k ve m ifadelerinin alacağı değerler her ne olursa olsun bu ifade iki sayının çarpımından oluşmuştur. Ayrıca çarpanlardan biri 1 olursa bu ifade oldukça basite indirgenmiş olacaktır. Bu durumda, m veya $2k+1$ çarpanlarının 1 olması ifadeyi basitleştirecektir. 2.soruda olduğu gibi bu soruda da verilen cevapların analizinde

katılımcıların ifadeye olan ilgilerine odaklanılmıştır.

3.3.1.4 Soru Grubu 4:

Bu gruptaki sorular, Zazkis (1998) tarafından yapılan çalışmadan alınmıştır.

Soru:

Aşağıdaki her sayının tek veya çift olduğuna karar verip cevabınızı işaretleyin (tek/çift). Kısaca açıklayınız.

1. 1234567
2. 3^{100}
3. 3^{99}
4. $2^{100}+3$
5. 6^{71}
6. $7^{50} \cdot 3^{40}$
7. $1234567 \cdot 2^{40}$

1. sayı çok genel bir teklik çiftlik sorusu olarak verilmiştir. Burada asıl merak edilen, son basamağa bakmaktan farklı bir yöntem ya da ifadenin kullanılıp kullanılmayacağını görmektir. 2., 3., 4. ve 5. sayıların amacı, öğrencinin asal çarpanlarına ayrılmış olarak verilen sayıların son basamağını bilmeden teklik çiftlik özelliğini kavrayabilme durumunu anlamaktır. 6. ve 7. sayılarda ise üslü sayıların çarpımlarının teklik ve çiftlik durumları sorulmuştur. Bu sorular sadece karmaşıklığı biraz daha arttırmak içindir.

3.3.2 Görüşme

Görüşme, belli bir amaçla yüz yüze gelen iki veya daha fazla kişinin, belli bir amaçla sözel veya sözel olmayan iletişim araç ve tekniklerini kullanmak suretiyle yarattıkları bir etkileşimdir (Özgüven, 1992).

Nitel araştırmalarda kullanılan görüşme tekniği, üzerinde araştırma yapılan kişilerin bakış a ıllarını, anlam dünyalarını ortaya koyma, dünyayı onların gözleriyle görme amacına hizmet edecek şekilde kullanılmaktadır. Nitel araştırmalarda kullanılan görüşme tekniğinin belirleyici özelliği, görüşülen kişilerin bakış a ıllarını ortaya çıkarmaktır. Bu nedenle, görüşülenlerin, anlam dünyalarını, duygu ve düşüncelerini yüzeysel değil daha derinlemesine anlamak esastır (Kuş, 2007; Tanrıöğen, 2009).

Araştırmacı iyi bir görüşme yapabilmesi için görüşme sürecini iyi bir şekilde planlaması gerekir. Planlamada, dikkat edilecek hususlar şu şekilde tanımlanmaktadır:

1. Örneklem nasıl seçilecek?
2. Kaç kişi ile görüşmeye ihtiyaç var?
3. Soru formunun uzunluğu ne kadar olacak?
4. Görüşme tarzı nasıl olacak?
5. Veriler nasıl analiz edilecek?
6. Görüşmeciler kimler olacak ve bu görüşmeciler nasıl eğitilecek?
7. Soru formunun karmaşıklığı ve görüşme tarzına dayalı olarak gerekli olan denetleyici sayısı ve tipi ne olacak?
8. Verileri depolamayı gerektiren işlemlerde neler yapılacaktır?

Bu sorulara verilecek cevaplar, görüşme sürecinin sağlıklı yürütülmesinde etkili olabilir (Frey ve Oishi, 1995; Kuş, 2007).

Görüşme tekniğinin bazı faydaları ve sınırlılıkları vardır.

3.3.2.1 Görüşme Tekniğinin Faydaları

Faydalarından bazıları şu şekilde ifade edilebilir ( zg ven, 1992):

1. Görüşme yüz yüze yapılan bir veri toplama tekniğidir. Bu sebeple doğru ve eksiksiz bilgi toplanabilir.
2. Araştırma alanlarının hemen hemen hepsinde görüşme tekniğinden yararlanılabilir.

3. Görüşme sadece özel cevaplara değil, bu cevapların arkasındaki duygu ve düşünceleri de gözlemeye olanak sağlar.
4. Görüşmede, görüşmeci dışındakilerin etkisi azalmış olur.
5. Görüşme süresinde ortaya çıkan duruma bağlı olarak, görüşmenin kapsamında değişiklik yapabilmek mümkündür. Görüşme sürecinde birey öyle bir bilgi verebilir ki, görüşme süreci bu bilgi ile ilgili durum üzerinde yoğunlaşabilir.

3.3.2.2 Görüşme Tekniğinin Sınırlılıkları

Görüşme tekniğinin sınırlılıklarından bazıları şu şekilde sıralanabilir (Özgüven, 1992):

1. Görüşmede, görüşülecek bireylerle tek tek görüşme yapıldığı için ekonomik olmayan bir yöntemdir.
2. Görüşme kişisel görüşlerin ve yargıların ifadesi olduğu için nesneldir.
3. Görüşme sürecinde bireylerin farklı nitelikleri ile taraflar birbirlerini etkileyebilir. Bu da görüşmeciyi, görüşülen kişiyi bazı yanlışlara götürebilir.
4. Görüşme sonucunda elde edilen bilgiler, görüşülen bireyin vermek istediği bilgiler ile sınırlıdır.
5. Görüşme yapabilmek için, tarafların uygun yer, zaman ve süre belirlemesi oldukça güç ve zaman alıcıdır.

Görüşme tekniği yapısı bakımından yapılandırılmamış görüşme, yapılandırılmış görüşme ve yarı yapılandırılmış görüşme olmak üzere üç gruba ayrılır.

Bu çalışma için uygun olan görüşme tekniğinin belirlenebilmesi için kısaca yapılandırılmamış görüşme, yapılandırılmış görüşme ve yarı yapılandırılmış görüşme tekniklerinin tanımlarını verelim:

3.3.2.3 Yapılandırılmamış Görüşme

Bu görüşme türünde, görüşmeci, görüşmeye giderken herhangi bir planlama yapmaz. Görüşme sürecinde ortaya çıkan duruma bağlı olarak, araştırma yapılan konu ve birey hakkında detaylı bilgi alma olanağı vardır (Tanrıöğen, 2009).

3.3.2.4 Yapılandırılmış Görüşme

Bu tür görüşmede, görüşmenin tüm aşamaları önceden planlanır ve görüşme sürecinde bu planın dışına çıkmaz. Görüşme formuna sorulacak tüm sorular yazıldığı için görüşme esnasında görüşmecinin verdiği bazı beklenmeyen cevaplara ya da açıklamalara göre görüşmenin seyri değişmez (Tanrıöğen, 2009).

3.3.2.5 Yarı Yapılandırılmış Görüşme

Bu tür görüşme, yapılandırılmış ve yapılandırılmamış görüşmeden farklı olarak görüşme formunun yarısı yapılandırılmış, yarısı da yarı yapılandırılmış bir biçimde hazırlanır. Görüşmecinin, görüşme esnasında vereceği tepkilere dayalı olarak açık uçlu, başka seçenekleri konularak görüşme formu esnek bir biçimde hazırlanmış olur (Tanrıöğen, 2009).

Çalışmada iletişim bakımından bireysel görüşme tercih edilmiştir. Bu görüşmede, görüşmeci ile kaynak kişi arasında kimse bulunmaz. Görüşme daha önce saptanan yer, tarih ve saatte iki kişi arasında yapılır. Kişiye özel bilgiler sadece bireysel görüşme ile alınabilir (Tanrıöğen, 2009).

Bu çalışmanın yapısına uygun olması için görüşme esnasında yarı yapılandırılmış görüşme tekniği tercih edilmiştir.

Çalışma kağıtları önceden hazırlanmış ve önceden belirlenmiş öğrencilere verilmiştir. Öğrenciler, soruları öğretmen gözetiminde çözmüşlerdir. Daha sonra toplanan kağıtlar arasından görüşmeye uygun olan öğrenciler seçilmiş ve belirlenen uygun bir vakitte bireysel görüşme yapılmıştır. Görüşme esnasında öğrenciden kağıtta yazılı olarak verdiği cevapları biraz daha açıklaması istenmiştir. Verdiği cevaplara ve tepkilere göre bir takım sorular ilave edilmiştir. Bu nedenle, görüşmenin yarı yapılandırılmış görüşme olarak seçilmesi çalışmanın yapısı için daha uygun bulunmuştur.

3.4 Verilerin Analizi

Her nitel araştırma farklı bir takım özellikler taşır ve veri analizinde bir takım yeni yaklaşımlar gerektirir. Bu nedenle araştırmacı, araştırmanın ve toplanan verilerin özelliklerinden yola çıkarak, var olan veri analiz yöntemlerini gözden geçirmeli, kendi araştırması için bir veri analiz planı geliştirmelidir.

Nitel araştırmalarda araştırmanın merkezinde problemi araştıran araştırmacı vardır ve araştırmanın asıl ölçme aracı, araştırmacının kendisidir. Doğal olarak araştırma sonuçlarının araştırmacının yorumlarından etkilenme olasılığı her zaman var olacaktır. Bundan dolayı nitel araştırmalarda araştırma sonuçlarının inandırıcılığını artıracak kavramların ön plana çıktığı görülmektedir (Yıldırım, 2010).

Nitel araştırmada elde edilen verilerin analizi için iki genel yöntem önerilebilir. Bunlardan ilki betimsel, ikincisi ise içerik analizidir. Bu çalışmada, görüşme verilerinin analizinde betimsel analiz yaklaşımı kullanılmıştır. Çünkü betimsel analiz yaklaşımı, verilerin araştırma sorularının ortaya koyduğu temalara göre organize edilmesine ve görüşmede kullanılan sorular veya boyutlar dikkate alınarak sunulmasına imkân vermektedir.

Bu analiz türünde elde edilen veriler daha önceden belirlenen temalara göre özetlenir ve yorumlanır. Betimsel analizde, görüşülen ya da gözlenen bireylerin görüşlerini çarpıcı bir biçimde yansıtmak amacıyla doğrudan alıntılara sık sık yer verilir. Bu tür analizde amaç, elde edilen bulguları düzenlenmiş ve yorumlanmış bir biçimde okuyucuya sunmaktır.

Betimsel analiz dört aşamadan oluşur:

1. Betimsel Analiz İçin Bir Çerçeve Oluşturma: Araştırma sorularından, araştırmanın kavramsal çerçevesinden ya da görüşme ve/veya gözlemde yer alan boyutlardan yola çıkarak veri analizi için bir çerçeve oluşturulur. Bu çerçeveye göre verilerin hangi temalar altında düzenleneceği ve sunulacağı belirlenir. Eğer daha önceden belirlenmiş bir kavramsal çerçeve yoksa, betimsel analizi kullanmak güçtür. Böyle bir durumda belirlenecek temalar, veri kaybına ve yanlış veri düzenlenmesine neden olabilir.
2. Tematik Çerçeveye Göre Verilerin İşlenmesi: Bu aşamada, daha önce oluşturulan çerçeveye göre elde edilen veriler okunur ve düzenlenir. Buna göre bazı veriler dışarıda kalabilir ya da önemli olmayabilir. Ayrıca bu aşamada, daha sonra sonuçlar yazılırken kullanılacak doğrudan alıntılar da seçilir.
3. Bulguların Tanımlanması: Düzenlenen veriler tanımlanır ve gerekli yerlerde doğrudan alıntılarla desteklenir.

4. Bulguların Yorumlanması: Tanımlanan bulguların açıklanması, ilişkilendirilmesi ve anlamlandırılması bu aşamada yapılır (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Bu araştırmada bulguların tanımlanması ve yorumlanması, çalışma kağıtlarından ve görüşme sorularından elde edilen temalara göre yapılmıştır. Temalar;

- Katılımcıların bölünebilme kuralları ile asal çarpanlara ayırma arasında ilişki kurabilmeyi anlama durumları,
- Katılımcıların asal sayıları anlama ve asal sayıların sonsuz sayıda olduğu buna bağlı olarak büyük sayıların da asal sayı olabileceği ifadelerini anlama durumları,
- Katılımcıların sayıların teklik-çiftlik durumları ile bölünebilme kuralları arasında ilişki kurabilme durumları,

olarak belirlenmiştir.

4. BULGULAR VE YORUMLAR

Bu bölümde, katılımcılardan elde edilen verilerin bir önceki bölümde belirtilen yöntemlerle analizleri sonucunda elde edilen bulgulara ve bu bulgularla ilgili yorumlara yer verilecektir.

4.1 Birinci Soru Grubuna Ait Bulgular ve Yorumlar

Soru 1:

$M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ olarak alalım.

M sayısı, 7 ile bölünebilir mi? Açıklayınız.

M sayısı, 2, 5, 9, 63, 11, 15 sayıları ile bölünebilir mi? Açıklayınız.

Soru 2:

(c) 391 sayısı 23 ile bölünebilir mi?

(d) 391 sayısı 46 ile bölünebilir mi?

Soru 3:

12358 ve 12368 sayılarını ele alalım.

Bu sayılar arasında 7 ile bölünebilen bir sayı var mıdır?

Bu sayılar arasında 12 ile bölünebilen bir sayı var mıdır?

Soru 4:

(c) 15 sayısının 4 tane böleni vardır. Bunları listeleyebilir misiniz? 4 tane böleni olan başka sayılar da var mıdır?

(d) 45 sayısının 6 tane böleni vardır. Bunları listeleyebilir misiniz? 6 tane böleni olan başka sayılar da var mıdır?

Katılımcılara hazırlanan bu soruların amacı katılımcıların bölünebilmeye ilgili kuralları anlama ve sorularda bu kurallarla bağlantı yapabilme kabiliyetlerini ölçmektir.

1.soruda M sayısı asal çarpanlarına ayrılmış olarak verilmiştir. 50 katılımcı arasından bu soruyu direk olarak hesaplamayı tercih eden yalnızca 1 kişi olmuştur. Fakat buna rağmen elde ettiği sonucu 7 ile bölememiştir. “Sonucun rakamları toplamı 3’ün katı olmadığı için 3’e de

tam bölünmez” gibi bir ifade de kullanmıştır. Buradan katılımcının çarpma işleminde hata yaptığını kolayca anlayabiliyoruz.

Toplamda 4 kişi “M sayısı 7 ile bölünemez” demiştir ancak herhangi bir açıklama yapamamışlardır.

1.soruyu doğru cevaplandıran katılımcılardan nasıl cevaplandırıldığını çok net ifade edemeyenlerin olduğu gibi bölünebilme kurallarıyla çok iyi ilişkilendirip ifade edenler de olmuştur.

Soruya doğru cevap veren bazı öğrencilerin çalışma kağıtlarına yazmış oldukları farklı cevaplara yer verecek olursak;

1)

bölünebilir. Çarpanlarında 7 var.

$$\frac{3^3 \times 5^2 \times 7}{7}$$

2)

$M = 7k$ old. bölünür.

3)

Bölünebilir çünkü M sayısının çarpanları arasında 7 sayısı vardır.

4)

Evet bölünebilir. Çünkü 7 sayısı M'in bir bölenidir.

5)

Evet bölünebilir. Çünkü bir çarpanı 7'dir.

6)

$$M = 27 \cdot 25 \cdot 7$$

bölünür

$$M = \frac{27 \cdot 25 \cdot 7}{7} = 27 \cdot 25$$

7)

Bölünebilir.

$$\begin{array}{r} 3^3 \times 5^2 \times 7 \overline{) 7} \\ - 3^3 \times 5^2 \times 7 \overline{) 3^3 \times 5^2} \\ \hline 0 \end{array}$$

Çünkü 7 çarpanıdır.

8)

Bölünebilir çünkü M sayısı 7'nin katıdır.

Öğrenciler, M sayısının asal çarpanlarından her birine kalansız olarak bölünebildiğini söyleyebilmişlerdir. M sayısının 15'e kalansız bölündüğünü "eğer sayı 3 ile ve 5 ile kalansız bölünüyorsa 15 ile de kalansız bölünür" şeklinde ifade edebilmişlerdir. Aynı şekilde 9 ile bölümü için " $3^2 = 9$ olduğundan bölünür" ve 63 ile bölümü için de " $3^2 \times 7 = 63$ olduğundan bölünür" şeklinde ifade etmişlerdir. M sayısının 2 ve 11 ile bölümünde ise "M sayısının çarpanı değildir, bu yüzden bölünmez" gibi cevaplar verilmiştir.

b) M sayısı, 2, 5, 9, 63, 11, 15 sayıları ile bölünebilir mi? Açıklayınız.

2 ile bölünmez, 2 sayısı çarpanları arasında yok.

11 " " " " " " " " " "

5 sayısı ile bölünebilir. $M = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$

9 sayısı ile bölünebilir. $M = 3^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$

$63 = 7 \cdot 9$ sayısı ile bölünebilir. $M = 3^2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5^2$

$15 = 3 \cdot 5$ " " " " $M = 3 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

2.soruda 391 sayısının 23 ve 46 ile bölünebilirliği ile ilgili farklı cevaplar verilmiştir. 391 sayısını 23'e bölmek en önce akla gelen uygulama yöntemi olmuştur.

Yine öğrenciler tarafından uygulanan bir başka yöntem de 23'ü sayılarla çarparak 391 sayısını elde etmeye çalışmak olmuştur. Örneğin, birler basamağının 1 olması için 23 sayısı 7 ile çarpılır ancak bu sayı çok küçük olduğundan 17 ile çarpılır ve sonuç olarak 391 elde edilir.

Direk uygulama yöntemini seçen öğrenciler aynı şekilde 3.soruda verilen 12358 ve 12368 arasında 7 ile bölünebilen bir sayı var mıdır sorusu karşısında da bu aralıkta verilen sayıları tek tek 7 ile bölmeye çalışmışlardır. Bu soruda sayı aralığında verilen ilk sayıyı 7 ile bölüp kalanı bulduktan sonra diğer sayılarda da sırasıyla kalanları da ilerleten katılımcılar olmuştur. Örneğin, 12359 sayısı 7 ile bölünürse 4 kalanını verir. 12360, 5 kalanını verir. 12361, 6 kalanını verir ve 12362 sayısı 7 ile kalansız bölünür. Bu yöntemi uygulayan öğrenci sayının varlığını tek tek hesaplamadan söyleyememiştir.

Aynı soruda 7 ile bölünebilen sayının varlığını hesaplamadan söyleyen ve bunu açıklayabilen katılımcılar da vardır. Ancak katılımcıların sadece 7 tanesi “Her yedinci sayı 7 ile bölünür” ifadesini kullanabilmiştir.

4.2 İkinci Soru Grubuna Ait Bulgular ve Yorumlar

Soru :

$M = 3^4 \times 5^3 \times 7^6 \times 19^8$ olarak alalım.

- a) M sayısı, 63 ile bölünebilir mi?
- b) M sayısı, 18 ile bölünebilir mi?
- c) M+5 sayısı, 10 ile bölünebilir mi?
- d) $M < X < M+10$ aralığında 8 ile bölünebilen bir X sayısı var mıdır?

Bu sorunun (a) ve (b) şıkları 1.soru grubundaki sorularla çok benzerdir. Bu iki şık, (c) ve (d) şıklarındaki sorulara hazırlık amaçlı hazırlanmıştır. Soru 33 tane öğrenciye çalışma kağıtlarında yazılı olarak verilmiştir ve yalnız 1 öğrenci (a) şıkkına yanlış cevap vermiştir.

İlk soru için, çalışma kağıtlarında soruyu farklı şekillerde çözen bazı örnekler verecek olursak:

1)

$M = 3^2, (3^2, 7) 5^3, 19^8$
 içinde 63 bölenleri arayan olarak bulunduğu için
 63 sayısı ile bölünebilir.

2)

$$63 = 7 \times 9$$

$$M = 7 \cdot 3^2 (3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^5 \cdot 19^8) \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

3)

$$\frac{3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^6 \cdot 19^2}{63} = \frac{(9 \cdot 7) \cdot (3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^5 \cdot 19^8)}{(9 \cdot 7)} = \text{evet}$$

$$\frac{7 \cdot 9}{7 \cdot 9}$$

Çalışma kağıtlarındaki cevaplarına göre bazı öğrenciler görüşmeye alınmıştır ve araştırmacı tarafından öğrencilerden soruya cevap verirken yazdıkları bazı ifadelerini açıklamaları istenmiştir. Bu görüşmelerden soruyla alakalı bazı diyalogları aktaralım:

Araştırmacı: M sayısı 63 ile bölünür mü?

Mert: Bölünür. Çünkü $3^2 \times 7^1$ mevcut M sayısının içinde.

Araştırmacı: Peki, M sayısı 18 ile bölünebilir mi?

Mert: Hmm... Bölünmez, çünkü M'nin içinde 2 yok.

Açıklama yapmakta zorlanan bir grup öğrenci bu şekilde kısaca cevap vermeyi tercih etmiştir.

Çarpan ya da bölen ifadeleri kullanmamışlardır. Düşüncesini biraz daha açık ifade edebilen bir öğrenciye bakalım:

Araştırmacı: M sayısı 63 ile bölünebilir demişsin, bana bunu biraz açıkla mısın? Yani neden bölünür?

Ahmet: Çünkü M sayısı 63'ün bir katıdır.

Araştırmacı: Nasıl katıdır?

Ahmet: $M = 3^2 \times 7 \times (3^2 \times 5^3 \times 7^5 \times 19^8)$ olarak yazarsak daha net görünür sanırım.

Araştırmacı: Peki, M sayısının 18 ile bölünmesine ne dersin?

Ahmet: Bölünmez derim. Çünkü deminki gibi bir kat oluşturamayız. $18 = 3^2 \times 2$ olarak çarpanlarına ayrılır ama M sayısının içinde 2 yok.

Diyalogdan anlaşılacağı gibi Ahmet M sayısının içinde 63 ve 18 sayılarını oluşturmaya çalışmıştır. 63 sayısını elde ettiği için de M sayısı 63'ün katıdır demiştir. Bu yöntem çalışma kağıtlarında ağırlıklı olarak kullanılan yöntemdir. Yine bu soruyu doğru cevaplayan ve birçok katılımcı tarafından kullanılan başka bir yöntem bakalım. Bu yöntem için Gamze örnek olarak seçilmiştir.

Araştırmacı: M sayısı neden 63 ile bölünebilir de 18 ile bölünemez bana açıkla mısın?

Gamze: Peki, önce $63 = 3^2 \times 7$ ve $18 = 3^2 \times 2$ olarak yazalım.

$$\frac{3^4 \times 5^3 \times 7^6 \times 19^8}{3^2 \times 7} = 3^2 \times 5^3 \times 7^5 \times 19^8 \text{ ifadesi elde edilir yani tam sayıdır.}$$

$$\text{Fakat } \frac{3^4 \times 5^3 \times 7^6 \times 19^8}{3^2 \times 2} = \frac{3^2 \times 5^3 \times 7^6 \times 19^8}{2} \text{ ifadesi tam sayı değil.}$$

Sadeleştirmek için yukarda 2 yok. Yani M sayısı 63'e bölünür ama 18'e bölünmez.

Gamze, soruyla alakalı düşüncesini ifade ederken sadeleştirmeyi tercih etmiştir. Yani M sayısını kesrin payına bölen sayıyı da kesrin paydasına yazmıştır ve sadeleştirme yapmıştır. Sonuçta M sayısının 63 ile bölümünde bir tam sayı elde etmiştir ve "M sayısı 63 ile bölünür" demiştir. Ancak M sayısının 18 ile bölümünde sonuç tam sayı değildir ve "M sayısı 18 ile bölünmez" demiştir.

Yine aynı soruya farklı ifadelerle cevap veren gruptan Zeynep örnek olarak seçilmiştir. Bu gruptaki öğrenciler sayının teklik-çiftlik özelliğini kullanmışlardır.

Araştırmacı: Neden M sayısı 63 ile bölünebilir?

Zeynep: Çünkü $63 = 7 \times 9$ ve $9 = 3^2$, yani bütün çarpanlar M sayısında mevcuttur.

Araştırmacı: Peki, M sayısı neden 18 ile bölünmez?

Zeynep: Çünkü 18 çift bir sayıdır. M sayısında ise hiç çift çarpan yok, tek sayıların çarpımları yine tektir. Yani M tektir. Bu yüzden M sayısı 18'e bölünmez yani sonuç tam sayı değildir.

Verilen cevaplardan öğrencilerin genelde çarpanlarına ayrılmış bir sayının herhangi bir sayıya bölünmesi konusunda sıkıntı yaşamadıklarını görmekteyiz. Akla gelen ilk işlem verilen sayı içerisinde böleni elde etmeye çalışmak olmuştur. M sayısının tek sayı olduğu ve çift bir sayıya bölünemeyeceği de öğrenciler tarafından yapılan açıklamalarda sıkça karşılaşılmaktadır.

Sorunun ilk iki şıkkını doğru cevaplayan öğrencilere sorunun (c) şıkkı sorulmuştur ve her öğrencinin ilk iki şıktaki başarısı (c) şıkkı için geçerli olmamıştır. Öğrencilere göre soru biraz daha karmaşık bir hale gelmiştir. M sayısı yine çarpanlarına ayrılmış olarak verilmiştir ancak M sayısına 5 eklenmiştir. Oluşan $M+5$ sayısının 10 ile bölünüp bölünmediği sorulmuştur. Öğrencilere sayının 10 ile bölünüp bölünmediği sorulunca öğrencilerin aklına ilk gelen 10 ile bölünebilme kuralı olmuştur. “Eğer sayının son rakamı 0 ise sayı 10 ile tam bölünür.” Ancak $M+5$ sayısının son rakamı açıkça belirtilmediği için öğrenciler bu kuralı ilk adımda kullanamamışlardır. Şimdi bu soru için çalışma kağıtlarındaki cevaplarına göre belirlenmiş ve temsil olarak seçilmiş öğrenci diyaloglarına bakalım:

Araştırmacı: $M=3^4 \times 5^3 \times 7^6 \times 19^8$ şeklinde verilen M sayısına 5 eklersek 10 ile bölünür mü?

Mert: M sayısının 10 ile bölünüp bölünmediğini anlamak için son rakamını bilmek gerek.

Araştırmacı: Peki, bunu nasıl yaparsın?

Mert: Cep telefonumdaki hesap makinesini kullansam olur mu?

Araştırmacı: Sen bilirsin. Ama hesaplamak biraz zorlamaz mı sence de?

Mert: Ya da sadece son rakamlarıyla hesap yapabilirim.

Araştırmacı: Sadece son rakamları derken neyi kastettin?

Mert:

$3^1=3$	$5^1=5$	$7^1=7$	$19^1=19$
$3^2=9$	$5^2=25$	$7^2=49$	$19^2=__1$
$3^3=27$	$5^3=__5$	$7^3=__3$	$19^3=__9$
$3^4=81$		$7^4=__1$	$19^4=__1$
		$7^5=__7$	
		$7^6=__9$	

Araştırmacı: Bulabildin mi son rakamı?

Mert: Evet. Son rakamları çarpalım: $1 \times 5 \times 9 \times 1 = 45$. Son rakam 5. Yani 5 eklersek 10 olur, son rakam sıfır olur yani. Öyleyse M sayısı 10 ile tam bölünür.

Yaptığı işlemlerden de anlaşılacağı gibi Mert, M sayısının son rakamını hesaplamadan bulamamıştır. Hesaplamak için de üslü sayıların değerini tamamen hesaplamak yerine sayıların son rakamlarını çarparak biraz daha kısa bir yöntem kullanmıştır. En son bulduğu rakamları da birbirleriyle çarparak M sayısının son rakamının 5 olduğunu bulmuştur. Bu sayıya 5 ekleyince de 10 ile bölünebileceğini söylemiştir.

Bu yöntemi 33 öğrenci arasından sadece 4 öğrenci kullanmıştır. Her biri aynen Mert'in yaptığı gibi tek tek son rakamları çarparak elde etmiştir. Fakat bir öğrenci hesaplama yaparken matematiksel olarak yanlış bir düşünceye girmiştir:

Gizem: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \rightarrow$ son rakam 1

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \rightarrow$ son rakam 5

$7^6 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = __1 \rightarrow$ son rakam 1

$19^8 = 19 \cdot 19 \cdot 19 \cdot 19 \cdot 19 \cdot 19 \cdot 19 \cdot 19 = __1 \rightarrow$ son rakam 1

Son rakamları toplayalım: $1+5+1+1=8$

M sayısının son rakamı 8'dir. $M+5 = 8+5 = 13$ olur ve 10 ile bölünmez.

Gizem de Yusuf'un yaptığı gibi M sayısındaki Üslü sayıların son rakamlarını tek tek hesaplamaya çalışmıştır ancak hesap yaparken 7^6 sayısının son rakamını yanlış hesaplamıştır. Üstelik çarpım durumunda olan üslü sayıları çarpım durumunda değil de toplam durumunda gibi düşünmüş ve son rakamları çarpmak yerine toplamıştır. Sonuç olarak da “M+5 sayısı 10 ile bölünemez” demiştir.

Şahin:

$$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$5^3 \equiv 5 \pmod{10}$$

$$7^6 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$19^8 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$1 \times 5 \times 9 \times 1 = 45.$$

$$45 + 5 = 50 \rightarrow 10 \text{ ile bölünür.}$$

Şahin, sayıların son rakamlarını hesaplarırken modüler aritmetiği kullanmayı tercih etmiştir. Sonuç olarak M sayısının son rakamının 5 olduğunu ve 5 eklersek M+5 sayısının 10 ile bölünebildiğini söylemiştir.

Başka bir gruptan temsil olarak seçilen bir öğrenci:

Araştırmacı: Eda, M sayısı 63 ile bölünebilir 18 ile bölünemez demişsin. Peki söyler misin bana, M+5 sayısı 10 ile bölünebilir mi?

Eda: Önce bi bakalım... Bu diğer iki soru gibi değil. Üzerinde biraz düşünmek lazım.

Araştırmacı: Olur, bekliyorum.

Eda: $M = 3^4 \times 5^3 \times 7^6 \times 19^8$ sayısının çarpanları tek sayılardan oluştuğu için M sayısı tek sayıdır. Çarpanları arasında 5 var. Bu yüzden M sayısının son rakamı 5'tir. Bu sayıya bir daha 5 eklersek sonu sıfır olur. O zaman 10'a da bölünür.

Araştırmacı: Neden 10 ile bölündüğünü biraz daha açıklar mısın?

Eda: Son basamağı sıfır olan sayılar 10 ile tam bölünür.

Eda, M sayısının son rakamının 5 olduğunu hesaplamadan akıllıca düşünmüş, M sayısına 5 eklenince son basamağının 0 olduğunu hesaplamıştır. Bu aşamada da 10 ile bölünebilme kuralını yerinde kullanarak M+5 sayısının 10 ile bölünebildiğini söylemiştir.

Sayıların teklik-çiftlik özelliğini kullanarak bu sorunun (a) ve (b) şıklarına cevap veren Zeynep M+5 sayısının 10 ile bölümünde de aynı yöntemi kullanmıştır. 33 öğrenci arasından sorunun (c) şıkında Zeynep’le aynı yöntemi kullanan 6 öğrenci vardır.

Araştırmacı: Öyleyse şimdi de bana M+5 sayısının 10 ile bölünüp bölünmediğini söyleyebilir misin?

Zeynep: Bakalım...bir dakika...

Araştırmacı: Nasıl yapmayı düşünüyorsun?

Zeynep: Yine tek-çift durumlarına bakacağım.

Şimdi M sayısı $3^4 \times 5^3 \times 7^6 \times 19^8$ olarak verilmiş bize,

$M + 5 = 3^4 \times 5^3 \times 7^6 \times 19^8 + 5$ olur.

5 parantezine alırsam: $M+5 = 5(3^4 \times 5^2 \times 7^6 \times 19^8 + 1)$ elde edilir.

Araştırmacı: Bu senin bir işine yarar mı?

Zeynep: Sanırım yarar. Parantezin içinde kalan $3^4 \times 5^2 \times 7^6 \times 19^8$ kısım tek sayıdır, buna 1 ekleyince sayı çift olur. Yani 2 çarpanı var demektir.

Araştırmacı: 2 çarpanının olması yeterli mi sayının 10 ile bölünmesi için?

Zeynep: Parantezin dışında da 5 çarpanı var. Bir sayının 10 ile bölünmesi için 2 ve 5 ile bölünmesi gerekir. Ben bu iki çarpanı da elde ettim. Öyleyse sayı 10 ile bölünür.

Zeynep, soruyu M sayısının son rakamını hesaplamaya ihtiyaç duymadan çözmüştür. $10=5 \times 2$ olarak çarpanlarına ayırmış ve bu çarpanları elde etmeye çalışmıştır. M+5 sayısını 5 parantezine alarak yazdığında 5 çarpanını direk olarak elde etmiştir ve parantezin içine de çift dediği için 2 çarpanı da vardır diyip “M+5 sayısı, 10 ile bölünür” demiştir.

Çalışma kağıtlarına bakıldığında soruyu yanlış çözenler ya da çözemeyenler arasında bu yöntemi kullanmaya çalışanlar olmuştur ancak başarılı bir şekilde sonuca ulaşamamışlardır.

Örneğin;

$$3) M+5 = 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^6 \cdot 19^8 + 5$$

$$= 5(3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^6 \cdot 19^8 + 1)$$

İçinde 10'un çarpanlarından biri olan 2 bulunmadığı için 10 ile tam bölünmez -

Murat: $M+5 = 3^4 \times 5^3 \times 7^6 \times 19^8 + 5$

10'a bölünmez. Çünkü 10'un katları şeklinde ayıramıyor.

Çalışma kağıdından alınan çözümünden anlaşılacağı gibi öğrenci 2 çarpanını açık bir şekilde görmeyi beklemiştir. Tek olan iki sayının toplamının çift olduğunu ve çift sayının 2 çarpanını içerdiğini düşünememiştir. Murat ise bir sayının 10'un katı olması için mutlaka 10k şeklinde ifade edilmesi gerektiğini düşündüğü için M+5 sayısının 10'un katı olduğunu görememiştir ve M+5 sayısı 10 ile bölünmez demiştir.

(d) şıkında, “ $M < X < M+10$ aralığında 8 ile bölünebilen bir X sayısı var mıdır?” sorusuna yer verilmiştir. Toplamda 33 öğrenciye sorulan bu soruya çalışma kağıtlarında 25 öğrenci “evet vardır” cevabı vermiştir. 25 öğrencinin 21 tanesi bu cevabını çeşitli yollarla mantıklı bir şekilde açıklamıştır, 1 öğrenci cevabını açıklamaya çalışmıştır ancak doğru bir açıklama kullanmamıştır ve 3 öğrenci de hiçbir açıklama yapamamıştır. 5 öğrenci bu soruya hiç cevap vermemiştir, 3 öğrenci ise “ $M < X < M+10$ aralığında 8 ile bölünebilen bir X sayısı yoktur” demiştir.

Öğrenciler, cevap kağıtlarındaki cevaplarına göre gruplandırılmıştır ve görüşme için bu grupların her birinden temsil olarak seçilen öğrencilerle görüşme yapılmıştır. Takip eden paragraflarda bu görüşmelerdeki diyalogların bazı bölümlerine yer verilmiştir.

Merve, verdiği cevaba göre bulunduğu gruptan temsil olarak seçilmiştir. X sayısı vardır diyen öğrencilerin 9 tanesi Merve ile hemen hemen aynı düşünceye sahiptirler.

Araştırmacı: Merve sence $M < X < M+10$ aralığında 8 ile bölünebilen bir X sayısı var mıdır?

Merve: Şöyle yazarsak, $3^4 \times 5^3 \times 7^6 \times 19^8 < X < 3^4 \times 5^3 \times 7^6 \times 19^8 + 10$

Araştırmacı: Evet??

Merve: Vardır. Aralık yeterince geniş. Yani M ne olursa olsun 10 fazlasına kadar olan sayılar arasında mutlaka 8 ile bölünebilen bir sayı vardır.

Araştırmacı: Yeterince geniş demekle neyi kastediyorsun?

Merve: Bu aralıkta 8 taneden fazla sayı var. En azından biri 8'in katı olmalı.

Verdiği cevaba bakarsak, Merve doğru bir mantık kullanmıştır. Aralık yeterince geniş olduğu için X sayısının varlığına tek tek bakmaya gerek kalmamıştır. Arada bulunan dokuz sayıdan biri 8'in katı olmak zorundadır. Ancak bu aralık 8 elemandan daha az sayıda elemana sahip olsaydı bu açıklama her zaman doğru olmazdı.

Bu gruba dahil edilen bir öğrenci biraz farklı şu açıklamayı yapmıştır:

Ahmet: M ile $M+10$ arasında mutlaka 8 ile bölünen bir sayı vardır. Mesela M sayının 8 ile bölümünden kalan 5 olsun, öyleyse $M+3$ sayısı 8 ile tam bölünür. Ya da M sayısı 8 ile tam bölünür dersek $M+8$ sayısı da 8 ile tam bölünür. Bu iki sayı da verilen aralıkta yer alır.

Bu cevapta da Ahmet kalanların üzerine sayı ekleyerek 8 ile bölünen sayılar elde etmiştir. Yine aralık yeterince geniş olduğu için herhangi bir sorun yaşanmamıştır.

Verilen aralıkta bir X sayısı vardır diyen öğrencilerin 6 tanesi modüler aritmetik metodunu kullanmışlardır. Bu gruptan Şahin temsil olarak seçilmiştir.

Araştırmacı: Sence $M < X < M+10$ aralığında 8 ile bölünebilen bir X sayısı var mıdır?

Şahin: Önce M sayısı 8 ile bölünür mü ona bakalım?

Araştırmacı: Bölünürse ne olur, bölünmezse ne olur?

Şahin: Önce ben bi hesaplasam olur mu?

Araştırmacı: Tamam. Olur.

Şahin: $3^1 \equiv 3 \pmod{8}$ $5^1 \equiv 5 \pmod{8}$ $7^1 \equiv 7 \pmod{8}$ $19^1 \equiv 3 \pmod{8}$

$3^2 \equiv 1 \pmod{8}$ $5^2 \equiv 1 \pmod{8}$ $7^2 \equiv 1 \pmod{8}$ $19^2 \equiv 1 \pmod{8}$

$5^3 \equiv 5 \pmod{8}$

$1 \times 5 \times 1 \times 1 = 5$. Yani M sayısının 8 ile bölümünden kalan 5.

Araştırmacı: Yani M sayısı tam bölünmüyormuş. Şimdi?

Şahin: M sayısına 3 eklersek 8 ile tam bölünür. Bu da verilen aralıkta.

Araştırmacı: Peki, M sayısı 8 ile tam bölünseydi ne olurdu?

Şahin: 8 fazlası da tam bölünürdü, o da verilen aralıkta.

Araştırmacı: Yani?

Şahin: Yani... Boşuna hesapladım...

Şahin, hesaplarını yaptıktan sonra M sayısının 8 ile tam bölünmediğini ama M+3 sayısının tam bölündüğünü ve verilen aralıkta yer aldığını belirtti. “M sayısı 8 ile tam bölünseydi ne olurdu?” sorusu karşısında ise yaptığı hesapların soruya cevap vermek için gerekli olmadığını görmüş oldu.

Bu soruyu cevaplandıran öğrencilerden 5 tanesi soruyu örneklendirerek cevaplamışlardır. Bu grubu temsil etmesi için Seda ve Ezgi seçilmiştir.

Seda:

$0 < \mathbf{8} < 10$	}	M sayısı kaç alınırsa alınsın verilen aralıkta en az bir tane 8 ile bölünen bir sayı vardır.
$10 < \mathbf{16} < 20$		
$20 < \mathbf{24} < 30$		

Ezgi: M’yi küçük bir sayı farzetsek; mesela 5 olsun (M sayısı gibi tek seçtim).
 $5 < X < 15$ aralığında 8 vardır. Daha büyük aralık seçseydik, 8’in katları olurdu.

Seda ve Ezgi’nin örneklendirmelerine bakacak olursak; ikisi de olabildiğince küçük sayıları tercih etmişlerdir. Seda aralıklarını herhangi bir şarta bağlamadan seçmiştir ancak Ezgi, M sayısının tek olduğunu düşünüp “M sayısı gibi tek sayı seçtim” ifadesini özellikle belirtmiştir.

Bu soruda öğrencilerin çoğu soruyu doğru cevaplandırmışlardır ve doğru açıklamalarda bulunmuşlardır. Bu soruyu kolay yapan en önemli özellik ise verilen aralığın 8 sayıdan fazlasını içermesidir. Eğer verilen aralık 7 tane elemana sahip olsaydı ve yine aynı cevaplar alınsaydı, o zaman cevapların bir kısmı doğru kabul edilemezdi.

4.3 Üçüncü Soru Grubuna Ait Bulgular ve Yorumlar

Soru 1:

Asal sayıları nasıl tanımlarsınız? Asal olmayan sayıları nasıl tanımlarsınız?

Soru 2:

$F = 151 \times 157$ olarak alalım. F bir asal sayı mıdır? Cevabınızı işaretleyiniz (EVET/HAYIR). Açıklayınız.

Soru 3:

$m(2k+1)$ ifadesini alalım (m ve k tam sayılar). Bu sayı asal mıdır? Hiç asal olabilir mi?

1.soru, 50 öğrenciye sorulmuştur ve asal sayı tanımında öğrencilerin asal olmayan sayı tanımına göre daha az zorlandıkları görülmüştür. Çalışma kâğıtlarındaki bazı cevaplara bakacak olursak:

1)

Asal sayılar = çarpanı 1 ve kendisi olan sayılar.

Asal olmayanlar = 1 ve kendisinden başka en az bir çarpanı daha olan sayılar

2)

Kendisi ve 1'den başka bir sayıya bölünemeyen sayılardır. Asal olmayan sayılar bölenleri olan sayılardır.

3)

Asal sayılar; 2 den başlayıp sonsuza giden, kendisinden ve 1 den başka sayılara tam olarak bölünemeyen sayılardır.
Asal olmayan sayılar; kendisi ve 1 bölenlerinin dışındaki sayılarla bölünemeyen tam sayı olmadığı sayılardır.

Öğrenciler verdikleri cevaplara göre gruplandırılmıştır. Aşağıdaki Tablo-4.3.1’de öğrencilerin verdikleri cevaplar ve cevabı veren öğrenci sayıları yer almaktadır.

Tablo-4.3.1

3. Soru Grubu, 1. Soruya Verilen Cevapların Özeti (Asal Sayı Tanımı)

Asal sayılar yalnızca 1 ve kendisine bölünen sayılardır.	43
Asal sayılar yalnızca 2 çarpanı olan sayılardır.	5
Tanımlanamamış	2

Tablo-4.3.1’de görüldüğü gibi öğrencilerin %86’sı “Asal sayılar yalnızca 1 ve kendisine bölünen sayılardır” açıklamasını yapmıştır. %10 gibi bir kısım ise “yalnızca iki çarpanı vardır” ifadesini kullanmıştır. Ancak bu açıklama 1 sayısının asallığı ile ilgili bir belirsiz anlam oluşturmuştur. 1 sayısını asal sayılar listesinden çıkarabilmek için “yalnızca 1’e ve kendine bölünebilir” tanımı daha doğru kabul edilmiştir.

Aşağıdaki Tablo–4.3.2’de de öğrencilerin asal olmayan sayılarla ilgili verdikleri tanımlar ve tanımı veren öğrenci sayıları bulunmaktadır.

Tablo–4.3.2

3. Soru Grubu, 1. Soruya Verilen Cevapların Özeti (Asal Olmayan Sayı Tanımı)

1 ve kendisinden başka en az bir böleni daha olan sayılardır.	20
1 ve kendisinden başka en az bir çarpanı daha olan sayılardır.	6
Asal olan sayıların dışındaki sayılardır.	4
Asal sayılara ve asal sayıların katlarına bölünebilen sayılardır.	2
Tanımlanamamış	18

Tablo–4.3.2’de görüldüğü gibi öğrencilerin %40 kadarı “1 ve kendisinden başka en az bir böleni daha olan sayılardır” tanımını vermiştir. Burada ilginç olan, *asal sayı* tanımını vermiş olan 43 öğrencinin yaklaşık olarak yarısı *asal olmayan sayı* tanımını verememiştir.

Örneğin;

Asal sayı $\Rightarrow$ 1 ve kendisinden başka hiçbir sayıya bölünemeyen sayıya asal sayı denir.
 Asal olmayan sayı $\Rightarrow$ Bir veya birden fazla bölünebilen sayıya denir.

2.soruda öğrencilere $F = 151 \times 157$ şeklinde verilen F sayısının asallığı 73 tane öğrenciye sorulmuştur. Öğrencilerin cevapları Tablo–4.3.3’te özet olarak verilmiştir. Öğrencilerden cevaplarını işaretlemeleri istenmiştir (EVET/HAYIR). Bu durum öğrencilerin verdiği cevapları doğru ya da yanlış olarak ayırmada kolaylık sağlamıştır.

Tablo–4.3.3’te doğrular (D) ile, yanlışlar (Y) ile gösterilmiştir. Cevaplarını destekleyici nedenleri de kısaca verilmiştir. Devam eden bölümde, cevapların kategorileri tartışılmıştır.

Tablo-4.3.3

3. Soru Grubu, 2. Soruya Verilen Cevapların Özeti

F = 151 × 157 olarak alalım. F sayısı asal mıdır? Cevabınızı işaretleyiniz (EVET/HAYIR)

Doğru cevaplar (HAYIR)			59
Gerekçeler:	D(1)	Asal sayıların tanımı	28
	D(2)	Asal olmayan sayıların tanımı	13
	D(3)	Uygulama	6
	D(4)	Kapalılık Özelliği	8
	D(5)	Örneklerle cevaplandırma	1
	D(6)	Diğerleri	3
Yanlış Cevaplar (EVET)			14
Gerekçeler:	Y(1)	Asal sayıların çarpımı	4
	Y(2)	Uygulama hatası	2
	Y(3)	Yanlış bölünebilme kuralları	3
	Y(4)	Cevapsız	5

Tablo-4.3.3 te görüldüğü gibi 73 öğrencinin 59 tanesi soruyu doğru cevaplayarak F sayısının asal sayı olmadığını söylemişlerdir (%80). Bununla birlikte verilen her doğru cevap doğru bir açıklamaya sahip değildir. Verilerin çoğunda (n=41) asal sayıların tanımı (n=28; D(1) tabloda) veya asal olmayan sayıların tanımı (n=13, D(2) tabloda) kullanılmıştır. Bu iki kategoriyi örneklendirecek olursak:

D(1): Asal sayının yalnız iki çarpanı vardır. $F=151 \times 157 = 23707$, bu sayı asal değildir çünkü 1 ve sayının kendisi olan 23707'nin yanında 151 ve 157 çarpanları da vardır.

D(1): Asal sayılar sadece 1'e ve kendine bölünebilir. F sayısı sadece 1'e ve kendine bölünmez, ayrıca 151 ve 157'ye de bölünür. F asal değildir.

D(2): 151 ve 157 sayılarının ikisi de asaldır. Ancak iki sayının çarpımından oluşan sayı asal olmayan bir sayıdır.

D(2): F, 1 ve kendisinden başka 151 ve 157 gibi 2 sayıya daha bölünebildiği için asal olmayan bir sayıdır.

D(2): 1 ve kendisinden başka en az 2 çarpanı daha vardır. Bu nedenle asal olmayan sayıdır.

Asal olan ve asal olmayan sayının tanımını veren 41 katılımcıdan 12 tanesi bu soruyu aslında tam anlamıyla cevaplandıramamıştır. Çünkü F sayısının asal olup olmadığını söyleyebilmek için bu sayının hesaplanmasına gerek olmadığını söyleyememişlerdir. Burada 151 ve 157 sayılarının asal sayılar olduklarını söylemek de asıl amaçla çok ilgili değildir.

F sayısının asal olup olmadığını cevaplandırmak için işlemler yapmaya çalışan 6 öğrenci olmuştur. D(3) olarak adlandırdığımız bu kategoride matematiksel uygulama da doğru cevapların alınmasını sağlayabilmiştir.

D(3): $151=a$

$$157=a+6$$

$$F= a(a+6)= a^2+6a$$

olduğundan F sayısının tam bölenleri sadece 1 ve kendisinden oluşmamaktadır. Öyleyse asal sayı değildir.

D(3): $\sqrt{151} < 13$ ve $\sqrt{157} < 13$ olduğundan 151 ve 157 asaldır ama asal olan iki sayının çarpımı asal değildir.

Bu durumda, uygulama doğru bir sonuca ulaştırmıştır ancak uygulamaya gerek duyulması rahatsızlık vericidir çünkü bu durum öğrencinin F sayısının asal olmadığını, F sayısının bir çarpım olarak verilmesinden elde edememiştir, asal iki sayının çarpımı olduğundan asal değildir demiştir.

Diğer bir kategori olan D(4)'te asal sayıların çarpma işlemine göre kapalılık durumu kullanılmıştır. Bu kategoriye örnek verecek olursak:

D(4): 151 ve 157 sayıları asal sayılardır ancak asal sayıların çarpımları asal değildir: Çünkü asal sayılar çarpma işlemine göre kapalı değildir.

Soruya örnek vererek cevaplandıran yalnızca 1 öğrenci olmuştur. Öğrenci düşündüklerini bu şekilde ifade etmeye çalışmıştır.

D(5): $2 \times 3 = 6$, $5 \times 7 = 35$, $2 \times 5 = 10$, $5 \times 3 = 15$. Bütün bu örneklerle bakacak olursak, bir asal sayının başka bir asal sayıyla çarpılmasıyla oluşan sonuç asal olmayan bir sayıdır. Asal sayılar 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... Hiçbirinin çarpımları asal değildir.

Bu ifade deneyimsel tümevarımla şematik ispat için akıllıca bir örneklemedir (Harel & Sowder, 1998). Öğrenci sonlu sayıda ve benzer küçük sayılarla bir örneklendirme yapmış ve doğru sonuca ulaşmıştır.

Şimdi de F sayısı asaldır yanlış cevabını veren gruba dönelim. Tablo-4.3.3 te görüldüğü gibi 73 katılımcıdan 14 tanesi yanlış cevap vermiştir (%20).

14 öğrencinin 4 tanesi F sayısı asal sayıların çarpımı olduğu için asaldır cevabını vermiştir. Y(1) dediğimiz bu kategoriye örnek olarak;

Y(1): F asaldır. Çünkü 151 ve 157 asal sayılar oldukları için çarpımları da asaldır.

Öğrenciler burada asal sayılar çarpma işlemine göre kapalıdır gibi yanlış bir düşünceye sahiptir. Ayrıca bu öğrenciler arasında “Asal sayılar yalnızca 2 çarpanı olan sayılardır.” tanımını yapan öğrenciler de bulunmaktadır.

Uygulama hatası yapan yalnızca 2 öğrenci vardır ve ikisi de benzer düşüncelerle hata yapmışlardır. Bu kategoriye Y(2) olarak adlandırılan bu kategoriye örnek verecek olursak:

Y(2): $151 \times 157 = 23707$, $\sqrt{23707} = 153,97$, 153 sayısından küçük bütün asal sayılardan

23707 sayısını bölen bulunamazsa sayı asaldır.

Öğrenci bölünebilme özelliklerini kullanarak 23707 sayısının asallığını bulmaya çalışmıştır. Bildiği bölünebilme kurallarını 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 denemiştir ve F sayısı asaldır demiştir.

Buradan anladığımıza göre eğer bir sayı asal değilse bu sayı küçük asal sayılara bölünmelidir. Bu düşünce ayrıca “çok büyük” asal sayıların ve sonsuz sayıda asal sayı olabileceğini engellemiştir.

3.soru, 2.soruda olduğu gibi çarpımdan oluşan bir sayının asallığını sormaktadır. Fakat cebirsel sembol kullanımı katılımcıların bazı bildikleri kuralları kullanmalarını zorlaştırmıştır. 3.soru grubunun 3.sorusu toplamda 50 öğrenciye sorulmuştur. 50 öğrencinin 34 tanesi genel olarak “m ve k’nın aldığı değerlere göre asallığı değişir” ifadesini kullanmışlardır. 10 öğrencinin geneli hiçbir açıklama yapmadan doğrudan “asal değildir” demişlerdir, açıklama yapmaya çalışan 3 öğrenci ise “1 ve kendi dışında iki çarpanı daha vardır: m ve $(2k+1)$, bu sebeple asal değildir” açıklamasını yapmışlardır. Yalnız 1 öğrenci “ $m(2k+1)$ ifadesi asaldır” demiştir. 50 öğrenci arasından 5 öğrenci ise soruya hiç cevap verememiştir.

Öğrenci sayılarının daha net görünmesi için öğrencilerin verdikleri cevapları ve cevabı veren öğrenci sayılarını tablolastırarak olursak:

Tablo-4.3.4

3. Soru Grubu, 3. Soruya Verilen Cevapların Özeti

Öğrencilerin Cevapları	Öğrenci Sayıları
m ve k değerlerine göre asallığı değişir	34
Asal değildir	10
Asaldır	1
Cevapsız	5

Soruya doğru cevap veren öğrenciler, m ve k yerine değerler koyarak asal sayı veya asal olmayan sayılar elde etmişlerdir ve bu işlemlerden sonra “ m ve k ’nın aldığı değerlere göre asallığı değişir” açıklaması yapmışlardır. Şimdi öğrencilerin çalışma kâğıtlarında m ve k yerine farklı değerler koyarak elde ettikleri bazı sonuçlara bakalım:

- Fatih:* $m(2k+1)$ ifadesi asal olabilir. $m=1$, $k=1$ alırsak;
 $m(2k+1)=1 \cdot 3=3$ olur. Yani asal oldu. Fakat diğer değerler için asal olmaz.
- Gamze:* M ve k değerlerine göre asallığı araştırılabilir. $m=1$ için ve $k=5$ için bu sayı asaldır. $m \neq 1$ için asal değildir. Çünkü bu ifade o zaman m sayısına bölünür.
- Müberra:* Hemen asal sayıdır diyemeyiz. Ancak $m=1$ ve $k=0$ olursa asal olabilir. Yoksa asal değildir.
- Fatma:* m asal sayı ve $k=0$ olursa $m(2k+1)$ sayısı asal olur. m asal sayı değil ise k ’nın her değeri için asal sayı değildir.
- Tuğba:* Belli koşullarda asal olabilir. $m=13$ ve $k=0$ durumunda sayı asaldır.
- Gürkan:* Bu ifadede, $k=0$ ve $m= 2, 3, 5, \dots$ (asal sayılar) olduğu zaman $m(2k+1)$ asal sayıdır. Bunların dışında asal olmayabilir.
- Yusuf:* $m(2k+1)$ ifadesi m ve k ’nın alacağı değerlere bağlı olarak asal sayı veya asal olmayan sayı olabilir. $m=2$ ve $k=0$ değerlerinde asal olurken, $k=2$ ve $m=3$ değerlerinde asal olmayan sayı olur.

Öğrencilerin çoğu buradaki örneklerle benzer şekillerde cevaplar vermişlerdir. Örneklerden de anlaşılacağı gibi öğrenciler m ve k sayıları için genelleme yapmadan m ve k ’nın özel bazı

değerleri için $m(2k+1)$ ifadesi asal sayıdır veya asal olmayan sayıdır demişlerdir. Örnekler arasında sadece Gürkan, “ $k=0$ ve $m= 2, 3, 5, \dots$ (asal sayılar) olduğu zaman $m(2k+1)$ asal sayıdır” şeklinde bir açıklama yaparken m sayısının “asal sayılar” olması şeklinde bir genellemede bulunmuştur.

2.soruda,

Eda:

b) $F= 151 \times 157$ olarak alalım. F bir asal sayı mıdır? Cevabınızı işaretleyiniz (EVET/HAYIR). Açıklayınız.

$$F = n \cdot (n+b)$$

$$= n^2 + bn$$

$\xrightarrow{\text{6n'nin n'den başka 6 çarpanı var.}} \quad \xrightarrow{\text{Asal sayı değil}} \quad \xrightarrow{\text{Asal sayı değil}}$

şeklinde cevap veren Eda; bu soru için de benzer bir yöntem uygulamıştır:

Eda:

c) $m(2k+1)$ ifadesini alalım (m ve k tam sayılar). Bu sayı asal mıdır? Hiç asal olabilir mi? Açıklayınız.

$2mk + m$ bu sayının 1 ve kendisinden başka bir m çarpanı vardır. Ama

Asal olabilir $\Rightarrow$ O halde $m=1$ için m 1'de olabilir.

asaldır $m \neq 1$ asal değildir.

Biraz dolaylı da olsa Eda, soruya doğru cevap vermiştir. Ancak asal sayı tanımını doğru yapmış olmasına rağmen (Asal sayılar yalnızca 2 çarpanı olan sayılardır), bunu yerinde kullanamamış olması büyük eksikliklerdir.

Soruyu yanlış cevaplandıran öğrencilere bakacak olursak, bu grupta asal sayı ve asal olmayan sayıların tanımını yapabilen, ayrıca $F = 151 \times 157$ sayısının asallığı ile ilgili doğru cevaplar verebilen öğrencilerin olması ilginçtir. F sayısının çarpanları asal sayılardan oluşmuştur ve $m(2k+1)$ sayısı da verdiğimiz değerlere göre asal çarpanlardan veya asal olmayan çarpanlardan oluşur.

Bu soru, öğrencilerin karşısına cebirsel sembollerle çıktığı için ve hemen $F=151 \times 157$ sayısı ile ilgili olan sorunun ardından sorulması sebebiyle öğrencilerin bu durumdan etkilendikleri

açıkça görülmektedir.

$F = 151 \times 157$ sayısının asallığı sorulduğunda, “151 ve 157 asal olduğundan çarpımları da asaldır” şeklinde cevap veren bir öğrenci yine aynı düşünceyi bu soruya da taşımış ve “Eğer m ve $(2k+1)$ sayıları asal ise bu sayıların çarpımlarından oluşan $m(2k+1)$ sayısı da asaldır.” demiştir.

Soruya “asal sayı değildir” şeklinde cevap veren yani diğer türlü yanlış cevap veren öğrencilerin cevaplarına bakacak olursak:

Rıdvan: Asal değildir. m ve $(2k+1)$ bu sayının iki ayrı bölenidir.

Tolga: Asal sayı olamaz. Asal sayı olabilmesi için kendisinden ve 1’den başka hiçbir sayıya bölünmemesi gerekir. Fakat bu sayı hem m sayısı ile hem de $(2k+1)$ sayısı ile tam bölünür.

Sacide: $m(2k+1)$ sayısı iki sayının çarpımından oluştuğu için asal değildir. Yani 1 ve kendisi dışında iki çarpanı daha vardır.

Bazı öğrencilerin bu soru üzerinde yanılmaları m ve k sayıları için değerler alıp tek tek denemek istememelerinden kaynaklanmaktadır. m ve k birer “tam sayı” olarak özellikle tanımlanmıştır ancak öğrenciler bu soruyu birinci ve ikinci sorunun etkisinde kalarak çözmeye çalışmışlardır. Yine öğrencilerin bazıları m ve $(2k+1)$ çarpanlarının verilen değerlere göre şekillendiğini değil de ikinci soruda olduğu gibi sabit sayı hatta asal sayı olduğunu düşünmüşlerdir.

Çalışma kağıdında bu soruyu cevapsız bırakan öğrencilerin kağıtları incelendiğinde, öğrencilerin genel olarak asal sayı ve asal olmayan sayı tanımı yapamadıkları ve F sayısının asallığı hakkında da cevapsız kaldıkları görülmektedir.

4.4 Dördüncü Soru Grubuna Ait Bulgular ve Yorumlar

Soru:

Aşağıdaki her sayının tek veya çift olduğuna karar verip cevabınızı işaretleyin (tek/çift). Kısaca açıklayınız.

1. 1234567

2. 3^{100}

3. 3^{99}

4. $2^{100}+3$

5. 6^{71}

6. $7^{50} \cdot 3^{40}$

7. $1234567 \cdot 2^{40}$

Cevaplandırılması istenen dördüncü soruda öğrencilere verilen tam sayıların teklik-çiftlik durumları sorulmuştur. Bu soru, Soyut Matematik 1 Dersi'ni almakta olan toplamda 50 öğrenciye sorulmuştur.

Öğrenciler arasında bu sorulara cevap veremeyen ya da yanlış cevap veren olmamıştır. Zaten sorunun amacı da öğrencilerin bu soruları çözüp çözemediğini belirlemek değil, tek ve çift sayılar hakkında bildiklerini aktarmak için seçeceği tanımlama yöntemini görmektir. Yani, öğrenci sayının tek veya çift olmasını çok iyi ayırt ediyor olabilir ancak nasıl ayırt ettiğini ve bunu nasıl ifade edebildiğini görmek bu sorunun amacı için esastır.

Çalışma kâğıtlarında bu sorularla karşılaşan öğrencilerin ilk tepkisi, çok basit sayıların teklik-çiftlik durumlarının sorulduğu yönünde olmuştur. Ancak öğrencilerden verdikleri cevaplarla ilgili açıklama yapmaları istendiğinde yani sorulara neye dayanarak cevap verdikleri sorulduğunda öğrencilerin daha dikkatli düşünmeye başladıkları görülmüştür.

Öğrencilerin verdikleri cevapların yöntemlerine göre başlıklar oluşturup bu başlıklarda yer alan öğrencilerin sayılarını belirleyelim.

Öğrenciler, ilk soru için 5 farklı tanım kullanarak cevap vermişlerdir. Tablo–4.4.1’te kısaca verilen cevaplar ve cevapları veren öğrenci sayıları gösterilmiştir.

Tablo–4.4.1

4. Soru Grubu, 1. Soruya Verilen Cevapların Özeti

Öğrencilerin Tanımları	Öğrenci Sayısı
Son basamağı tek sayı olduğundan sayı tektir.	20
Sayı 2 ile tam bölünemediğinden tektir.	10
$n=2k+1$ şeklinde yazılabildiğinden tektir.	5
$1234567 \equiv 1 \pmod{2}$	3
Sayının içinde 2 çarpanı yoktur.	1
Herhangi bir açıklama yok	11

Sayının son rakamına bakmak birçok öğrencinin uygulamayı düşündüğü ilk yöntemdir. En sıradan haliyle verilmiş bir sayı için bu en kolay yöntemdir. Çoğu öğrenci 1234567 sayısının teklik-çiftlik özelliği için hemen sayının son rakamına bakıp tek olduğunu söylemiştir. 50 öğrenci arasından 20 öğrenci ilk soruya bu şekilde cevap vermiştir (%40). 10 öğrenci ise 2 ile tam bölünemediğini söylemiştir (%20). Aslında bu cevap da son basamağa bakılıp da verilmiş bir cevaptır ancak ifade şekli farklıdır.

1) 1234567 (tek/çift)
sayının son hanesi tek olduğundan

1) 1234567 (tek/çift)
Son basamağı tek sayıdır.

1) 1234567 (tek/çift)
sayı 2 ye bölünmez. Bu sebeple tektir.

5 öğrenci sayının tek olduğunu görüp daha matematiksel bir açıklama yaparak genel anlamda tek sayıların $2k+1$ şeklinde ifade edildiği yöntemini kullanmıştır (%10). Bu öğrenciler arasından sadece biri farklı olarak tek sayıları $2k-1$ şeklinde ifade etmiştir.

1) 1234567 (tek/çift)

Tektir. Çünkü sayı sonundaki $7=2n+1$ teklik kuralına uyar.

Soruya cevap veren 3 öğrenci cevabını açıklamak için modüler aritmetiği kullanmayı tercih etmiştir.

$M=3^3 \times 5^2 \times 7$ sayısının çarpanlarıyla ilgili sorunun (Soru grubu 1) hemen ardından sorulan bu soru için “2 çarpanı” ifadesinin daha çok kullanılması beklenirdi. Ancak yalnız 1 öğrenci “içinde 2 çarpanı yok” demiştir.

1234567 sayısı için “tektir” cevabını veren 11 öğrenci herhangi bir açıklama yapma gereği duymamış ya da ifade zorluğu yaşamış olabilir. 11 öğrencinin 5 tanesi ilerleyen sorularda sayıların teklik-çiftlik durumlarıyla ilgili açıklamalarda bulunmuştur. Bu öğrenciler için açıklama yapma gereği duymamıştır diyebiliyoruz ancak diğer 6 öğrenci için bu ifadeyi kullanmak yanlış olabilir.

2. ve 3. sorular 3’ün kuvvetleri olarak verilmiş sayılardan oluşmaktadır. 2.soru çift kuvvet 3.soru tek kuvvet içermektedir. İkisinin aynı anda verilmesinin tek sebebi kafa karıştırmak içindir.

Bu sorular için öğrenciler daha farklı açılmalarda bulunmuştur. Aşağıda çalışma kağıtlarından alınan açıklamalardan bazılarına yer verilmiştir.

1) (8 öğrenci)

2) 3^{100} (tek/çift)

Tek sayıların bütün kuvvetleri tektir.

3) 3^{99} (tek/çift)

Tek sayıların bütün kuvvetleri tektir.

2)

2) 3^{100} (tek/çift)

$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \dots 3}_{100} \rightarrow$ tek'tir. Çünkü bir sayının çift olması için en az 2 tane çift çarpanı olmalıdır.

3) 3^{99} (tek/çift)

$\underbrace{3 \cdot 3 \dots 3}_{99} \rightarrow$ tek'tir. Üstteki açıklama geçerli.

3) (14 öğrenci)

2) 3^{100} (tek/çift)

tek sayıların çarpımı her zaman tektir.

3) 3^{99} (tek/çift)

tek sayıların çarpımı her zaman tektir.

4) (6 öğrenci)

2) 3^{100} (tek/çift)

$$T^G = T$$

3) 3^{99} (tek/çift)

$$T^T = 7$$

Öğrencilerin tamamı soruya doğru cevap vermiştir. Ancak 12 öğrenci herhangi bir açıklama yapmamıştır. Açıklama yapan öğrenciler arasından yine sadece 1 öğrenci “İçinde 2 çarpanı yok” demiştir.

4.soruda da öğrenciler 2. ve 3. soruda yaptıkları açıklamayı yapmışlardır. Yani, “Çift sayıların bütün kuvvetleri çifttir.” Bu durumda 2^{100} sayısının çift olduğunu ve 3 ile toplandığında ise sonucun tek olacağını söylemişlerdir.

“ $2^{100} \rightarrow$ çift ve $3 \rightarrow$ tek olduğundan $\mathbb{C} + \mathbb{T} = \mathbb{T}$ olur.”

“Çift sayılar $2k$ ile temsil edilir. $2k+3$ ise tek sayıdır.”

“ $\mathbb{C}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} + \mathbb{T} = \mathbb{T}$ ”

Şeklindeki ifadeler öğrencilerin verdikleri cevapları açıklamak için genel olarak kullandıkları ifadelerdir.

6^{71} sayısı için öğrencilerin verdikleri cevaplar biraz daha çeşitlenmiştir. 2^{100} sayısı için “çift sayıların bütün kuvvetleri çifttir” diyen bazı öğrenciler bu özelliği 6^{71} sayısı için kullanamamışlardır.

50 öğrenci arasından 19 tanesi “Çift sayıların bütün kuvvetleri çifttir.” ifadesini kullanmıştır. Yalnız bunlar arasından 1 öğrenci özellikle “sıfır hariç” demiştir.

2 öğrenci yine bu düşüncenin aynısını “ $\mathbb{C}^{\mathbb{T}} = \mathbb{C}$ ” ifadesiyle belirtmiştir.

11 öğrenci sayıyı biraz daha detaylı incelemeye gerek görmüştür. Bu grup, 6’yı asal çarpanlarına ayırarak işlemler yapmayı tercih etmiştir. Temsil olarak seçilen bir öğrenci:

Fatih: $6^{71} = (2 \cdot 3)^{71} = 2^{71} \cdot 3^{71}$
 $2^{71} \rightarrow \mathbb{C}$
 $3^{71} \rightarrow \mathbb{T}$
 $\mathbb{C} \cdot \mathbb{T} = \mathbb{C}$

Bu öğrencilerden yalnızca bir tanesi biraz daha farklı ve matematiksel bir metodla devam etmiştir.

Elif: $6^{71} \rightarrow (2 \cdot 3)^{71} \rightarrow 2^{71} \cdot 3^{71} \rightarrow (2k)^{71} \cdot (2k+1)^{71} \rightarrow (4k^2 + 2k)^{71}$
 Elde ettik. Parantezin içi çift olduğundan çift sayının bütün kuvvetleri çift olur.
 Bu sebeple 6^{71} çift sayıdır.

Bu soruda diğerlerinden farklı olarak “2 çarpanı vardır” ifadesi 6 öğrenci tarafından kullanılmıştır. Diğer sorularda fark edilmeyen bu özellik 6^{71} sayısında daha fazla öğrenci tarafından fark edilmiştir.

$$5) 6^{71} \text{ (tek/çift)} \\ (2 \cdot 3)^{71} \rightarrow \text{çift çarpanları olduğu için bu sayı çifttir.}$$

6. ve 7. sorularda yine üslü sayılar ve üslü sayıların çarpımlarının teklik-çiftlik durumları sorulmuştur.

Diğer sorularda olduğu gibi $7^{50} \cdot 3^{40}$ çarpımının teklik-çiftlik durumu için öğrenciler “Tek sayıların bütün kuvvetleri yine tektir.” açıklaması yapıp ardından da “Tek sayıların çarpımları yine tektir.” ifadesini eklemişlerdir.

$$\text{İrem: } T^C \cdot T^C = T \cdot T = T$$

Bunun dışında Elif yine tek ve çift sayıların genel gösterimleriyle işlemler yapmış ve uzun bir yöntemle de olsa sonuca ulaşmıştır:

$$\text{Elif: } 7^{50} \cdot 3^{40} \rightarrow (7^{40} \cdot 3^{40}) \cdot 7^{10} \rightarrow (7 \cdot 3)^{40} \cdot 7^{10} \\ \rightarrow [(2k+1) \cdot (2k+1)]^{40} \cdot (2k+1)^{10} \rightarrow T \cdot T = T$$

Bu soruda da “2 çarpanı yoktur” ya da “çift çarpan yoktur” ifadelerini kullanarak sayının tek olduğunu belirten öğrenciler olmuştur. Örneğin Burcu;

$$6) 7^{50} \cdot 3^{40} \text{ (tek/çift)} \\ 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \rightarrow \text{İçinde çift bir çarpan olmadığından} \\ \text{çift değildir, tektir.}$$

Ancak bir öğrenci bu soruda daha önce hiç kullanmadığı “2’nin katı değildir” ifadesini kullanarak açıklamada bulunmuştur.

$1234567 \cdot 2^{40}$ sayısının teklik-çiftlik durumuyla ilgili öğrencilerden farklı bir cevap gelmemiştir. Yine:

7) $1234567 \cdot 2^{40}$ (tek/çift)
 Tek sayı $\rightarrow$ Çift sayı

Tek ile Çift sayının çarpımı çifttir.

7) $1234567 \cdot 2^{40}$ (tek/çift)
 $\downarrow$ 7 tek olduğundan sayı tek, çarpanlar 2 den oluştuğundan sayı çifttir.
 $\rightarrow$ Tek $\cdot$ Çift = Çifttir.

7) $1234567 \cdot 2^{40}$ (tek/çift)
 $\downarrow$ T , Ç = Ç

7) $1234567 \cdot 2^{40}$ (tek/çift)
 hangi sayı olursa olsun çift sayı ile çarpıldığında çift olur.

gibi cevaplar verilmiştir.

Bu soru sonrasında elde edilen en önemli bulgu birçok öğrenciye göre bir sayının 2'ye bölünebilmesi ve o sayının çift olması ayrı kavramlar olarak algılanması olmuştur. Çiftlik genelde sayının son rakamına bağlı bir özellik olarak düşünülmüştür. Sayı, 2 çarpanı varsa çift olarak tanımlanmıştır, fakat yoksa tek olarak tanımlanamamıştır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu çalışmanın amacı doğrultusunda, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde öğrenim gören ve Analiz 1, Soyut Matematik 1 ve İntegral Denklemler Derslerini almakta olan öğrencilere, araştırmacı tarafından daha önceden hazırlanan çalışma kâğıtları dağıtılmıştır. Çalışma kâğıtları, öğrencilerin verdikleri cevaplara göre gruplandırılmıştır ve her gruptan temsil olarak seçilen öğrencilerle birebir görüşmeler yapılmıştır. Bu bölümde çalışma kâğıtlarından ve görüşmelerden elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Araştırma esnasında;

1. Bölünebilme kurallarının ne seviyede kavrandığı ve bu kuralların herhangi bir sayıda ya da asal çarpanlarına ayrılmış bir sayıda uygulanmasının ne ölçüde olduğu;
2. Asal sayı ve asal olmayan sayıların tanımlanabilmesi ayrıca asal sayıların büyük sayılar da olabileceği ve sonsuz sayıda asal sayının varlığının kavranabilmesinin ne seviyede olduğu;
3. Sayının teklik-çiftlik durumunun tayin edilmesi için hangi yöntemlerin kullanıldığı ve sayıların bölünebilme özellikleri incelenirken teklik-çiftlik durumlarının nasıl kullanıldığı;

sorularına cevaplar aranmıştır.

1.soru için iki farklı soru grubu kullanılmıştır. Ancak iki soru grubu da aynı amaç doğrultusunda hazırlanmıştır. Rina Zazkis ve Stephen Campbell'in (1996) çalışmalarında elde ettiği bulgularla kıyaslandığında bu çalışmada, sorulara yanlış cevap veren ya da cevaplarını doğru cümlelerle ifade edemeyen öğrenci sayısı daha azdır.

1. ve 2. soru gruplarında çarpanlarına ayrılmış olarak verilen M sayısının verilen sayılarla bölünüp bölünemediği sorulduğunda öğrenciler *kat*, *bölen*, *çarpan* gibi ifadeler kullanmışlardır. Bununla alakalı sorularda (Soru Grubu 1, Soru Grubu 2 (a), (b)) öğrenciler, çarpanlarına ayrılmış M sayısını bölmesi için verilen sayıları M sayısının çarpanları arasında rahatlıkla seçebilmişlerdir. Ancak ilerleyen sorularda (Soru Grubu 2 (c)), öğrenciler ilk sorularda gösterdikleri performansı gösterememişlerdir. $M+5$ sayısının 10 ile bölümü

sorulunca “10 ile bölünebilme kuralı” akla gelen ilk yöntem olmuştur. Bu sebeple öğrencilerin bir kısmı $M+5$ sayısının son rakamını hesaplamaya çalışmıştır, bir kısmı da 10 sayısının asal çarpanlarını (2 ve 5), $M+5$ sayısı içerisinde elde etmeye çalışmıştır.

$M < X < M+10$ aralığında 8 ile bölünebilen sayı var mıdır sorusuna öğrencilerin geneli doğru cevap vermiştir. Bu sorunun kolay algılanmasındaki en önemli sebep aralığın yeterince geniş verilmesidir. Öğrenciler de bu özelliği kullanarak “aralıkta 8 taneden fazla sayı var” ifadesiyle soruyu doğru cevaplamışlardır.

Araştırmanın ilk iki soru grubundan anlaşılacağı gibi öğrenciler bölünebilme konusuyla alakalı ciddi bir problem yaşamamaktadırlar. Ayrıca bu konuyla alakalı düşüncelerini genel olarak doğru kelimelerle ifade edebilmektedirler.

2.soru için öğrencilere Soru Grubu 3’te yer alan sorular sorulmuştur. Bu gruptaki sorular daha önce üzerinde çalışma yapmış olan Rina Zazkis ve Peter Liljedahl ‘ın (2004) makalesinden alınmıştır.

Öğrencilerden asal sayıların tanımı ile ilgili “Yalnızca 1 ve kendine bölünebilen sayılar” ve “Yalnızca iki çarpanı olan sayılar” şeklinde iki tür cevap alınmıştır. Ancak 1 sayısı asal sayı değildir ve 1 sayısını asal sayı tanımının dışında bırakabilmek için “Yalnızca 1 ve kendine bölünebilen sayılar” tanımı Zazkis tarafından daha doğru bir cevap olarak kabul edilmiştir.

Bu çalışmadaki öğrencilerin büyük bir kısmı asal sayılar için “Yalnızca 1 ve kendine bölünebilen sayılardır” tanımını vermiştir. 50 öğrenci arasından 43 tanesi doğru kabul ettiğimiz cevabı vermiştir. Genel olarak baktığımızda öğrencilerin hepsi asal sayılarla ilgili aşağı yukarı bir fikre sahip. Ancak bu durum asal olmayan sayıların tanımında pek geçerli olmamıştır. Öğrencilerden ilginç cevaplar da gelmiştir. Örneğin; “Asal olan sayıların dışındaki sayılardır” veya “Asal sayılara ve asal sayıların katlarına bölünebilen sayılardır” gibi. Buradaki en önemli nokta ise bu öğrencilerin asal sayı tanımıyla ilgili bir sorun yaşamamasıdır.

Bu soruya cevap vermesi istenen 43 öğrencinin yarıya yakını ise asal olmayan sayı tanımını hiç yapmamıştır. Bu sonuçlar da gösteriyor ki öğrenciler kendilerine tanım olarak verilen cümleler dışındaki ifadelerde tanımlama yapamamaktadırlar. Ayrıca, $F=151 \times 157$ şeklinde verilen F sayısının asal olup olmadığının sorulduğu soruya verdikleri cevaplardan da yapmış oldukları tanımları ezberci bir yöntemle yaptıkları anlaşılmaktadır.

Sorunun bu bölümüne açıklamalar yetersiz olsa da çoğunlukla doğru cevap verilmiştir. Bir

grup öğrenci tarafından F sayısının asal çarpanlarının açıkça verilmiş olması kolaylığı kullanılamamıştır. 151 ve 157 sayıları çarpanlarına ayrılmaya çalışılmıştır. Bu da asal sayılarla ilgili farklı bir sorunu ortaya çıkarmaktadır. Bunu yapan öğrenciler asal sayıların yalnızca küçük sayılar olabileceğini düşünmektedirler. Yani bu öğrencilere göre asal sayılar sonsuz sayıda olamazlar.

Aynı hatalar, $m(2k+1)$ ifadesinin asallığı ile ilgili bölümde de yapılmıştır. Burada sayıların değil de cebirsel sembollerin kullanılmış olması hata yapan grubun sayısını arttırmıştır. Öğrencilere bu ifade daha karmaşık gelmiştir. Doğru cevaplayan öğrenciler de, m ve k tam sayılarına değerler vererek elde ettikleri asal sayı ve asal olmayan sayılara birer örnekle soruyu yanıtlamışlardır.

Dördüncü soru grubunda verilen sayıların teklik-çiftlik durumları sorulmuştur. Bu sorular, Rina Zazkis'in (1998) daha önce konuyla alakalı yapmış olduğu araştırmasından alınmıştır. Zazkis'in çalışmasında katılımcılar tarafından oldukça farklı ve yanlış cevaplar verilmiştir. Ancak bu çalışmada, bu gruptaki sorulara yanlış cevap veren öğrenci olmamıştır. Bu nedenle, sonuç olarak yalnızca ifade farklılıklarını inceleyebiliriz.

Öğrencilerin sayıların teklik-çiftlik durumları belirlerken ilk eğilimleri sayının son rakamına bakmak olmuştur. Ancak bu grupta yalnızca ilk sorunun son rakamı açıkça verilmiştir. Diğer soruların hepsinde üslü sayılar ve çarpımları bulunmaktadır. Öğrenciler üslü sayıların teklik-çiftlik durumlarıyla ilgili cevaplarında genelde; eğer sayının tabanı tekse “tek sayıların çarpımları hep tektir”, tabanı çiftse çift sayıların çarpımları hep çifttir” düşünceleriyle hareket etmişlerdir. Bu doğru bir mantıktır. Ancak bu çalışmada asıl hedeflenen 2 çarpanının farkına varılarak teklik-çiftlik durumunun belirlenmesidir. Yani sayı çiftse 2 çarpanını içeriyor demektir, ya da sayı 2 çarpanına sahipse çifttir. Bunun tersi gibiyse, yani 2 çarpanı yoksa sayı tektir. Bu ifadeler çok az sayıda öğrenci tarafından kullanılmıştır.

5.2 Öneriler

Yapılan araştırmadan elde edilen sonuçlar ışığında bazı önerilerde bulunmak istersek;

Öğrencilere ilkokul yıllarından itibaren öğretilmeye başlanan sayılar teorisi konularının öğrencilere iyi bir şekilde kavratılmasının yanında, öğrencilerin kavradıkları bu konuları ifade etme yetenekleri de geliştirilmelidir.

Tezde yapılan benzer çalışmalar İlköğretim II. Kademesinde ve Ortaöğretimde de yapılmalıdır.

Bu konuda yapılacak çalışmalarda kavram yanılgıları üzerinde durulmalı ve ona yönelik çalışmalar yapılmalıdır.

Öğrencilere, matematiksel düşünceyi kazandırabilmek için matematiksel teknik, kavram ve yöntemlerin problem çözme sürecinde dolaylı olarak ya da doğrudan kullanılması öğretilmelidir.

Her problemin kendine has, farklı yönleri vardır. Bu nedenle, öğrencinin belirli bir bağlamda tecrübe ettiği bir problemi başka bir bağlamda anlamlandırmakta ve dolayısıyla çözmekte güçlük çekebileceği için öğrenciye mümkün olan bütün yöntemler öğrencinin seviyesine uygun bir biçimde öğretilmelidir.

Bölünebilme kuralları öğrencilere iyi bir şekilde kavratılmalı ve bu kurallar her türlü sayıda rahatlıkla kullanılabilmelidir.

Asal ve asal olmayan sayıları doğru bir biçimde ifade etme şekli öğrencilere iyi bir şekilde öğretilmelidir. Aynı zamanda asal sayıların sonsuz tane olduğu ve dolayısıyla büyük sayıların da asal sayılar olabilecekleri kavratılmalıdır.

Üniversitede verilen Sayılar Teorisi dersinin o konuda Doktora yapmış kişiler tarafından verilmesine özen gösterilmelidir.

Zazkis (1998)'e göre çiftlik ve başka bir sayı tarafından bölünebilme arasındaki boşluk çiftlik ve 2'ye bölünebilmenin denkliğini anlayarak ve vurgulayarak oluşacak köprüyle kapatılabilir. Skemp'e göre "Bir şeyi anlamanın anlamı onu uygun şema içerisinde sindirmektir" (Skemp, 1971). Zazkis de anlaşılmış olan şeyi daha iyi anlamının sindirmek demek olduğunu söylemiştir. Skemp'in iddiasını genişletmek istemiş ve "bir şeyi daha iyi anlamak onu daha zengin ve daha soyut bir şema içerisinde sindirmektir" demiştir.

KAYNAKLAR

- Alkan, H. ve Altun, M., (1998), "Matematik Öğretimi", Anadolu Üniversitesi Yayınları, No: 1072.
- Altun, M., (1998), Matematik Öğretimi, Alfa Yayınları, Bursa.
- Altun, M., (2008), "Eğitim Fakülteleri ve Matematik Öğretmenleri İçin Ortaöğretimde Matematik Öğretimi", Bursa: Aktüel Alfa Akademi.
- Ardahan, A., (1990), "Matematik Öğretimi", Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, Sayı:4.
- Arıkan, R., (2005), Araştırma Teknikleri ve Rapor Hazırlama, Asil Yayınları, Ankara.
- Aydın, B., (2003), "Bilgi Toplumu Oluşumunda Bireylerin Yetiştirilmesi ve Matematik Öğretimi", Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (2), Sayı:14.
- Balcı, A., (2007), Sosyal Bilimlerde Araştırma, Pegem Yayınları, Ankara.
- Baş, T., (2005), Anket, Nasıl Hazırlanır? Nasıl Seçilir? Nasıl Uygulanır?, Seçkin Yayınları, İstanbul.
- Blaxter, L., Hughes, C. ve Tight, M., (2003), "How to Research", 2nd edn., Open University Press, Philadelphia.
- Bransford, J. D., Brown, S. J. ve Cocking, R., (1999), How People Learn, D.C.: National Academy Press, Washington.
- Carter, G. ve Norwood K. S., (1997), "The Relationship Between Teacher and Student Beliefs About Mathematics", School Science and Mathematics, 97(2): 62-67.
- Cohen, L., Manion, L. ve Morrison, K., (2000), Research Methods in Education, (5th edition), London: Routledge, 181-182.
- Çakar, M., Muratoğlu, B., Okay, N. C. ve Yaman, A., (2002), "Asal sayı nedir?" (Kimin umurunda?), Pivolka, 1(2), 7.
- Çelik, D., (2007), "Öğretmen Adaylarının Cebirsel Düşünme Becerilerinin Analitik İncelenmesi", Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı Doktora Tezi, Trabzon.
- Çepni, S., (2001), Araştırma ve Proje Çalışmalarına Giriş, Erol Ofset Matbaacılık ve Ambalaj Sanayi, Trabzon, 46.
- Denzin, N. K. ve Lincoln, Y. S., (1998), Introduction: Entering the Field of Qualitative Research, London: Sage.
- Devadas, S. ve Lehman, E., (2005), "Mathematics for Computer Science", 6.042/18.062J.
- Dursun, Ş. ve Dede, Y., (2004), "Öğrencilerin Matematikte Başarısını Etkileyen Faktörler", Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24(2).
- Erdoğan, İ., (2003), Pozitivist metodoloji, Erk Yayınları, İstanbul.
- Frank, M. L., (1988), "Problem Solving and Mathematical Beliefs", Arithmetic Teacher, 35(5):32-34.

- Frey, J. H. ve Oishi, S. M., (1995), *How to Conduct Interviews by Telephone and in Person*, Thousand Oaks: Sage Publications.
- Gillham, B., (2000), *Case Study Research Methods*, London: Continuum.
- Göker, L., (1997), *Matematik Tarihi ve Türk İslam Matematikçilerinin Yeri*, MEB Yayınları, İstanbul, 22-23.
- Hacısalıhoğlu, H. H., Mirasyedioğlu, Ş. ve Akpınar, A., (2003), *Matematik Öğretimi*, Asil Yayıncılık, Ankara.
- Hatch, C., (2002), *Doing Qualitative Research in Educational Settings*, Albany: State University of New York Press, 147-210.
- Henderson, P.B., Marion, B. Fritz, S. J., Riedesel, C., Hamer, J., Scharf, C. ve Hitchner, L., (2004), "Materials Development in Support of Mathematical Thinking", <http://www.cs.geneseo.edu/~baldwin/math-thinking/iticse2002-paper.pdf>.
- İşıkoğlu, N., (2005), "Eğitimde Nitel Araştırma", *Eğitim Araştırmaları*, 20:158-165.
- Kaplan, H. A., (2008), "İlköğretim Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Basamak ve Basamak Değeri Kavramları ile İlgili Zihinsel Yapılarının İncelenmesi", *Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi*, Ankara.
- Kılcan, F., (2005), "6. Sınıflarda Ölçüler Konusunun Öğretiminde Tematik Öğretimin Öğrencilerin Matematik Başarısına Etkisi", *Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı İ.Ö. Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul.
- Kuş, E., (2007), *Nitel-Nitel Araştırma Teknikleri*, Anı Yayınları, Ankara.
- Leron, U., (1985), "A Direct Approach to Indirect Proofs", *Educational Studies in Mathematics*, 16:321-325.
- Lester, F. K. Jr. ve Mau, S. M., (1993), "Teaching Mathematics Via Problem Solving: A Course for Prospective Elementary Teachers. For the Learning of Mathematics", 13(2):8-11.
- Martin, W. G. ve Harel, G., (1989), "Proof Frames of Preservice Elementary Teachers", *Journal for Research in Mathematics Education*, 20: 41-51.
- Mason, J., Burton, L. ve Stacey, K., (1998), *Thinking Mathematically*, Addison-Wesley Longman Limited, Malaysia.
- MEB., (2009), *Öğretmen Yetiştirme ve Eğitimi Genel Müdürlüğü*.
- Merriam, S. B., (1998), *Qualitative Research and Case Study Applications in Education*, California: Jossey-Bass, 6.
- Movshovitz-Hadar, N. ve Hadass, R., (1990), "Preservice Education of Math Teachers Using Paradoxes", *Educational Studies in Mathematics*, 21:265-287.
- National Council of Teachers of Mathematics., (2000), "Principles and Standards for School Mathematics", Reston, VA: Author.
- Niss, M., (1999), "Aspects of The Nature and State of Research in Mathematics Education", *Educational Studies in Mathematics*, 40:1-24.

Özdemir, A. Ş., (1997), Ders Notları.

Özdemir, A. Ş. ve Sert, Y., (2010), "The Effect of Project Supported Education in Elementary Number Theory Course on Student Achievement" *Journal of Systemics, Cybernetics and Informatics*, 8(3):15-17. ISSN: 1690-4524, Indexed in EBSCO.

Özgüven, İ. E., (1992), "Görüşme İlke ve Teknikleri", Odak Ofset Matbaacılık, Ankara.

Özsoy, O., (2004), Etkin Eğitim, Hayat Yayınları, İstanbul.

Patton, M. Q., (1990), *Qualitative Education and Research Methods*, (2nd ed.), United States of America: Sage Publication.

Ribenboim, P., (1996), *The New Book of Prime Number Records*, (2nd ed.), New York: Springer-Verlag.

Rosen, K. H., (2005), *Elementary Number Theory and its Application*, (Fifth Edition), America: Pearson Addison Wesley.

Skemp, R. R., (1971), *The Psychology of Learning Mathematics*, Penguin Books.

Tanrıöğen, A., (2009), *Bilimsel Araştırma Yöntemleri*, Anı Yayıncılık, Ankara.

Türkdoğan, O., (2000), *Bilimsel Araştırma Metodolojisi*, Timaş Yayınları, İstanbul.

Underhill, R. G., (1988), "Focus on Research into Practice in Diagnostic and Prescriptive Mathematics", *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 10(3): 43-58.

Van De Walle, J. A., (2003), "Designing and Selecting Problem-Based Tasks", In F. K. Lester ve R. Charles (Eds.) *Teaching Mathematics Through Problem Solving: Prekindergarten-grade 6*, 67-80. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

van der Waerden, B. L., (1955), *Science Awakening* (Dresden, Arnold, Trans.), Groningen, Holland: P. Noordhoff.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H., (2005), *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*, (5.Baskı), Seçkin Yayıncılık, Ankara.

Yıldırım, C., (2000), *Matematiksel Düşünme*, 3. Basım, Remzi Kitapevi, İstanbul.

Yıldırım, K., (2010), "Nitel Araştırmalarda Niteliği Artırma", *Elementary Education Online*, 9(1): 79-92.

Yin, R. K., (1994), *Case Study Research: Design and Methods*, (2nd edition), London: Sage.

Zazkis, R., (1998), "Odds and Ends of Odds and Evens: An Inquiry into Students' Understanding of Even and Odds Numbers. *Educational Studies in Mathematics*", 36: 73-89.

Zazkis, R., (2005), "Representing Numbers: Prime and Irrational", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2-3): 207-218.

Zazkis, R. ve Campbell, S., (1996), "Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice Teachers' Understanding", *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5): 540-563.

Zazkis, R. ve Liljedahl, P., (2004), "Understanding Primes: The Role of Representation", *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(3): 164-186.

EKLER**EK-1**

SORU 1) $M = 3^4 \times 5^3 \times 7^6 \times 19^8$ olarak alalım.

a) M sayısı 63 ile bölünebilir mi?

b) M sayısı 18 ile bölünebilir mi?

c) $(M + 5)$ sayısı 10 ile bölünebilir mi?

d) $M < X < M+10$ aralığında 8 ile bölünebilen bir X sayısı var mıdır?

SORU 2) $F = 151 \times 157$ olarak alalım.

F bir asal sayı mıdır? Cevabınızı işaretleyiniz (EVET/HAYIR). Açıklayınız.

EK-2

SORU 1) Aşağıdaki her sayı için tek veya çift olduğuna karar verip cevabınızı işaretleyiniz (tek/çift). Kısaca açıklayınız.

1) 1234567 (tek/çift)

2) 3^{100} (tek/çift)

3) 3^{99} (tek/çift)

4) $2^{100}+3$ (tek/çift)

5) 6^{71} (tek/çift)

6) $7^{50} \cdot 3^{40}$ (tek/çift)

7) $1234567 \cdot 2^{40}$ (tek/çift)

EK-3**SORU 1)**

a) Asal sayıları ve asal olmayan sayıları tanımlayınız.

b) $F = 151 \times 157$ olarak alalım. F bir asal sayı mıdır? Cevabınızı işaretleyiniz (EVET/HAYIR). Açıklayınız.

c) $m(2k+1)$ ifadesini alalım (m ve k tam sayılar). Bu sayı asal mıdır? Hiç asal olabilir mi? Açıklayınız.

SORU 2) $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ olarak alalım.

a) M sayısı, 7 ile bölünebilir mi? Açıklayınız.

b) M sayısı, 2, 5, 9, 63, 11, 15 sayıları ile bölünebilir mi? Açıklayınız.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 31.07.1985

Doğum yeri İstanbul

Lise 2000–2003

Gülbahar Hatun Lisesi

Lisans 2003–2007

Mimar Sinan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

2007–2009

Sirus Dershanesi