

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİYLE
ÇÖZÜMLERİ**

Seda GÜLEN

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Nuran GÜZEL

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	iii
KISALTMA LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
ÇİZELGE LİSTESİ	vi
ÖNSÖZ.....	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
1.1 Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Tanımı ve Kaynak Bildirileri	1
1.2 Gecikmeli Diferansiyel Denklemler İle Adi Diferansiyel Denklemler Arasındaki Farklar	5
1.3 Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı ve Tekliği	7
1.4 Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerle Yapılan Bazı Modellemeler.....	9
1.4.1 Popülasyon Dinamiği.....	9
1.4.2 Enzim-Substrat Kompleksi	13
1.4.3 Kanser Hücrelerinin Çoğalması	14
1.4.4 Kontrol Sistemleri	15
1.4.5 Elektrodinamik Problemi	17
2. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ	18
2.1 Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi.....	18
2.2 Tek Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi.....	18
3. SAYISAL UYGULAMA.....	49
4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	74
KAYNAKLAR.....	75
ÖZGEÇMİŞ.....	77

SİMGE LİSTESİ

C^0	Sürekli fonksiyonlar uzayı
C^1	Birinci mertebeden türevlenebilir sürekli fonksiyonlar uzayı
C^∞	Sonsuz mertebeden türevlenebilir sürekli fonksiyonlar uzayı
D_x	Diferansiyel operatör
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu reel uzay
$\min$	Minimum
t_f	Final noktası
$\ \cdot\ $	Norm
$ \cdot $	Mutlak değer
$\ll$	Çok küçük
$\subseteq$	Alt küme
$\cong$	Yaklaşık
$v^{(n)}(x + a)$	$v(x + a)$ fonksiyonunun n . mertebeden türevi
$u^{(k)}$	u fonksiyonunun k . mertebeden türevi
$\forall$	herhangi bir

KISALTMA LİSTESİ

ADM	Adomian Decomposition Method (Adomian Ayrışım Yöntemi)
DTM	Differential Transform Method (Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi)
VIM	Variational Iteration Method (Varyasyonel İterasyon Yöntemi)

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1 Örnek (1.2.1)' in çözümleri	6
Şekil 1.2 Besin olarak bakteri ve Osterhaut kültürü içeren test tübündeki Paramecium aurelia'nın popülasyon büyümesi	10
Şekil 1.3 Lojistik gecikmeli diferansiyel denklemin salınımlı çözümleri	11
Şekil 1.4 Kararlı çözümlerin çatallanma diyagramı	12
Şekil 1.5 Geminin yan yatması ve kontrolü	16
Şekil 1.6 İki yüklü parçacığın birbirleri üzerindeki etkisi.....	17
Şekil 3.1 Örnek 3.1'in diferansiyel dönüşüm ve gerçek çözümlerinin grafikleri	52
Şekil 3.2 Örnek 3.2'nin diferansiyel dönüşüm ve gerçek çözümlerinin grafikleri	55
Şekil 3.3 Örnek 3.4'ün çözüm grafiği.....	59
Şekil 3.4 Örnek 3.5'in diferansiyel dönüşüm ve gerçek çözümlerinin grafikleri	62
Şekil 3.5 Örnek 3.6'nın diferansiyel dönüşüm ve gerçek çözümlerinin grafikleri	67
Şekil 3.6 Örnek 3.7'nin diferansiyel dönüşüm ve gerçek çözümlerinin grafikleri	70

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 3.1 Örnek 3.1'in çözümleri	51
Çizelge 3.2 Örnek 3.1'in çözümlerinin mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	51
Çizelge 3.3 Örnek 3.2'nin çözümleri	54
Çizelge 3.4 Örnek 3.2'nin çözümlerinin mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	55
Çizelge 3.5 Örnek 3.5'in çözümleri	62
Çizelge 3.6 Örnek 3.6'nın çözümleri	66
Çizelge 3.7 Örnek 3.6'nın çözümlerinin mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	66
Çizelge 3.8 Örnek 3.7'nin çözümleri	70

ÖNSÖZ

Gecikmeli diferansiyel denklemler; fen, mühendislik ve tıp bilimlerinde büyük önem taşımaktadır ve günlük hayatta karşılaşılan birçok olayın matematiksel modellenmesi gecikmeli diferansiyel denklemlerle yapılabilmektedir.

Bu tez çalışmasında, bazı gecikmeli diferansiyel denklemlere diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanarak çözülmüştür.

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Nuran GÜZEL' e saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, tezimin her aşamasında bana olan güvenlerinden ve desteklerinden dolayı aileme teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

Bu tezde, bazı gecikmeli diferansiyel denklemlerin diferansiyel dönüşüm yöntemiyle çözümü incelenmiş ve elde edilen sayısal sonuçlar diğer bazı yöntemlerle elde edilen sonuçlarla ve gerçek çözümleriyle karşılaştırılmıştır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; gecikmeli diferansiyel denklemlerin tanımı ve genel bir literatür özeti verilmiştir. Gecikmeli diferansiyel denklemler ile adi diferansiyel denklemler arasındaki farka değinilmiş, gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlık ve teklik teoremleri incelenmiştir. Son olarak, gecikmeli diferansiyel denklemlerle yapılan matematiksel modellemelere yer verilmiştir.

İkinci bölümde; tek boyutlu diferansiyel dönüşüm yönteminin tanımı yapılarak bu yöntemin özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde; bazı gecikmeli diferansiyel denklemlere diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanmış, sayısal sonuçlar diğer bazı yöntemlerle elde edilen sonuçlarla ve gerçek çözümlerle karşılaştırılmış, yöntemin ele alınan diğer yöntemlere göre etkinliği sayısal olarak incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; çalışmada elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

Anahtar kelimeler: Gecikmeli diferansiyel denklemler, diferansiyel dönüşüm yöntemi, seri çözümü.

ABSTRACT

In the present thesis; the numerical solutions of delay differential equations have been analyzed by differential transform method and compared with other numerical methods.

This thesis consists of four sections. In the first section; definition of delay differential equations have been given and a general literature about these equations and differential transform method have been summarized in detail. Differences of between delay differential equations and ordinary differential equations, uniqueness and existence of solutions of delay differential equations have been presented. Finally, some mathematical models by using delay differential equations have been given.

In the second section; one dimensional differential transform method have been defined and properties of the present method have been given.

In the third section; differential transform method has been applied to delay differential equations and the obtained numerical solutions have been compared with exact and other methods solutions.

In the last section; the obtained results have been summarized.

Keywords : Delay differential equations, differential transform method, series solutions.

1. GİRİŞ

1.1 Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Tanımı ve Kaynak Bildirileri

Gerçek hayatta, fizikte, mühendislikte, biyolojide, tıpta ve ekonomide birçok olay

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

şeklinde verilen başlangıç değer problemiyle modellenenebilir. Burada, t_0 başlangıç noktası ve y_0 başlangıç değeridir.

Gerçek hayatta, birçok olayda gecikmeler de söz konusudur. Adi diferansiyel denklemleri içeren matematiksel modeller kurulurken bu gecikmeler ihmal edilebilir, ancak ele alınan problemlerdeki çok küçük gecikmeler bile sistemin mevcut durumunda büyük değişikliklere yol açabilir. Bu nedenle birçok matematiksel model kurulurken gecikmeli diferansiyel denklemlerden faydalanılır.

Gecikmeli diferansiyel denklem, bilinmeyen fonksiyon $x(t)$ ve $x(t)$ türevlerini (en yüksek türev hariç) t ve t anından önceki anlara (zamanlara) bağlı olarak ifade eden diferansiyel denklemlerdir. Gecikmeli diferansiyel denklemler, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t), x_t)$$

şeklinde ifade edilir, burada $x_t = \{x(\tau): \tau \leq t\}$ başlangıç anından önceki çözümü ifade eder, $f, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times C^1$ 'den $\mathbb{R}^n$ 'e fonksiyonel operatördür. Zaman gecikmeleri göz önüne alınarak bazı özel gecikmeli diferansiyel denklemler;

sürekli gecikme için,

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t), \int_{-\infty}^0 x(t + \tau) d_\mu(\tau))$$

kesikli gecikme için,

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m)), \quad \tau_1 > \tau_2 > \dots \tau_m \geq 0$$

lineer kesikli gecikme için,

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau_1) + \dots + A_mx(t - \tau_m), \quad A_0, \dots, A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

pantograph denklemi için,

$$\frac{d}{dt}x(t) = ax(t) + bx(\lambda t), \quad a, b, \lambda \text{ sabit} \quad 0 < \lambda < 1$$

şeklindedir. Ayrıca, aşağıdaki denklemler de gecikmeli diferansiyel denklemlere örnek olarak verilebilir.

$$x'(t) = f\left(t, x(t), x(t - \tau(t))\right), \quad \tau(t) > 0,$$

$$x''(t) = f\left(t, x(t), x'(t), x(t - \tau(t)), x'(t - \tau(t))\right), \quad \tau(t) \geq 0,$$

$$x''(t) = f\left(t, x\left(\frac{t}{2}\right), x'\left(\frac{t}{2}\right), x(t), x'(t)\right), \quad t \geq 0.$$

Gecikmeli diferansiyel denklemler üzerine literatürde pek çok çalışma mevcuttur. Bu konudaki ilk çalışmalar 1960'lı yıllarda başlamıştır.

Belmann ve Cooke (1963), birinci mertebeden sabit katsayılı gecikmeye sahip diferansiyel fark denklemleri üzerinde çalışmışlardır. Belmann ve Cooke çalışmasında gecikmeli (retarded), neutral diferansiyel denklemlerin varlık ve tekliğini göstermiş, Laplace yöntemiyle çözümlerini ele almışlardır. Yine birinci mertebeden sabit katsayılı gecikmeli diferansiyel denklem sistemlerini ve lineer olmayan durumları incelemişlerdir.

Driver (1977), gecikmeli diferansiyel denklemleri genişletmiş, çözümlerinin varlık ve teklik teorilerini vermiştir.

El'sgol'ts ve Norkin (1971), stokastik (olasılıklı) gecikmeli diferansiyel denklemlerin kararlılığını incelemiş ve gecikmeye sahip denklemlerin kararlı çözümlerini ele almışlardır.

Hale ve Lunel (1977), fonksiyonel diferansiyel denklemlerin karakteristik denklemlerini ele almış ve çözümlerin özelliklerini, otonom ve periyodik süreçleri incelemişler, neutral gecikmeli diferansiyel denklemlerin özellikleri üzerinde durmuşlardır.

Cao (1989), gecikmeli diferansiyel denklemler için kesikli (diskret) Lypunov fonksiyonunu ortaya koymuştur.

Gopalsamy (1992), popülasyon dinamiğinde gecikmeli diferansiyel denklemlerin kararlılığını ve salınımlarını incelemiştir.

Kuang (1993), popülasyon dinamiğinde gecikmeli diferansiyel denklemleri ortaya koymuştur.

Diekmann, Van Gils, Luner ve Walter (1995), sonsuz boyutlu dinamik sistemlerin matematiksel teorisini vermiş, modellerin sınıflandırılmasını, yani, bu modellerin gecikmeli diferansiyel denklemlerle tanımlanmasını göstermişlerdir. Bu çalışmada lineer fonksiyonel analiz, kompleks fonksiyon teorisini ele almış, dinamik sistemlerin niteliğini vermiş ve nonlinear analizini yapmışlardır.

Baker (1999), biyolojik bilimlerde gecikmeli diferansiyel denklemleri kullanarak matematiksel modelleme yapmıştır.

Bochorov (2000), gecikmeli diferansiyel denklemleri kullanarak biyolojik bilimlerde karşılaşılan olayların sayısal modellemesini ele almıştır.

Shampine (2001), gecikmeli diferansiyel denklemlerin MATLAB yardımıyla çözümünü yapmıştır.

Buric (2002), gecikmeli diferansiyel denklemlerle modellenen tümör büyümesinin bağışıklığının dinamiğini ele almıştır.

Nelson (2002), HIV-1 hastalığının gecikmeli diferansiyel denklemlerle modellenmesinin matematiksel analizini incelemiştir.

Bellen ve Zennaro (2003), gecikmeli diferansiyel denklemleri genel olarak incelemiş ve bu denklemlerin sayısal çözümleri üzerine yöntemler vermişlerdir.

Maset (2003), gecikmeli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri üzerinde durmuştur.

Sezer ve Daşcıoğlu (2006), değişken katsayılı diferansiyel fark denklemlerinin çözümünü Taylor polinomlarıyla elde etmiş ve bazı örneklere bu yöntemi uygulamışlardır.

Sezer ve Daşcıoğlu (2007), genelleştirilmiş pantograph denklemlerin sayısal çözümleri için Taylor polinom yaklaşımını öne sürmüş ve bu yöntemi bazı başlangıç değer problemlerine uygulamışlardır.

Bunlardan başka Arino, Hbid ve Dads (2006), gecikmeli diferansiyel denklemlerin uygulamalarına değinmiş, Erneux (2009) ise çalışmasında gecikmeli diferansiyel denklemlerle yapılan modellemelere yer vermiştir.

Bu çalışmada tek boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemine değinilmiş, literatürde yer alan diğer sayısal yöntemlerle çözülen bazı gecikmeli diferansiyel denklemler diferansiyel

dönüşüm yöntemiyle çözülmüş ve elde edilen çözümlerin sayısal sonuçları diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlarla ve gerçek çözümleriyle karşılaştırılmıştır.

Diferansiyel dönüşüm yöntemi ilk kez Zhou (1986) tarafından elektrik devrelerinde ortaya çıkan lineer ve nonlinear başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanılmıştır.

Chen (1996), diferansiyel dönüşüm yöntemini kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulamış, böylece iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemini geliştirmiştir.

Jang (1997), diferansiyel dönüşüm yöntemini güçlü lineer olmayan sönümlü bir sistemin tepkisinin analizinde kullanmış ve sonuçları Runge- Kutta yöntemiyle karşılaştırmıştır.

Abdel-Halim (2002), Sturm-Liouville problemi için özdeğer ve normalleştirilmiş özdeğer fonksiyonunu bulmak amacıyla diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanmıştır.

Ayaz (2003), iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi için bazı teoremler vermiştir. Yine Ayaz (2004), lineer cebirsel diferansiyel denklemler için diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanmıştır.

Arikoğlu ve Özkol (2005), integral denklemler için diferansiyel dönüşüm yöntemini vererek bazı lineer ve lineer olmayan integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmişlerdir.

Kurnaz (2005), kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için n boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemini geliştirmiştir.

Bildik (2006), kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünü hem diferansiyel dönüşüm yöntemiyle hem de Adomian ayrışım yöntemiyle vermiş ve iki yöntemle de elde edilen sonuçları karşılaştırmıştır.

Arikoğlu ve Özkol (2006), diferansiyel fark denklemleri için diferansiyel dönüşüm teorisini vermiş, bu yöntemle elde edilen sayısal sonuçları Taylor polinom yaklaşımıyla karşılaştırmışlardır.

Ertürk (2007), caputo anlamında türevlere sahip kesirli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için diferansiyel dönüşüm yöntemini vermiştir.

Keskin (2007), genelleştirilmiş pantograph denklemlerine diferansiyel dönüşüm yöntemini uygulamıştır.

Karakoç ve Bereketoğlu (2007), gecikmeli diferansiyel denklemler için diferansiyel dönüşüm yönteminin uygulanabilmesini sağlayan bazı teoremler vermiş, lineer ve lineer olmayan bazı gecikmeli diferansiyel denklemlere bu yöntemi uygulamışlardır.

1.2 Gecikmeli Diferansiyel Denklemler ile Adi diferansiyel Denklemler Arasındaki Farklar

Gecikmeli diferansiyel denklem,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_n)), & t \geq t_0 \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

şeklinde verilsin. Burada ele alınan modelin karmaşıklığına göre, $\forall i$ için gecikme miktarları $\tau_i \geq 0$ olmak üzere; sabit $\tau_i \equiv k_i \in \mathbb{R}$ (constant delay case), t 'nin fonksiyonu, $\tau_i = \tau_i(t)$, (time dependent delay case) ya da y ve t 'nin fonksiyonu, $\tau_i = \tau_i(t, y(t))$, (state dependent delay case) şeklinde olabilir. $\phi(t)$ fonksiyonu, $[\rho, t_0]$ aralığında tanımlıdır. Burada,

$$\rho = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \min_{t \geq t_0} (t - \tau_i) \right\}$$

ile ifade edilir.

Genelde, τ_i 'ler $\tau_i = \tau_i(t, y(t))$ şeklinde ise $\phi(t)$ fonksiyonunun tanımlı olduğu aralık için bir başlangıç değeri ρ 'dan söz etmek mümkün değildir.

$n = 2$ ve $\tau_1 \equiv 0$ için (1.2) denklemi,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), & t \geq t_0 \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

şeklinde yazılır. Bazı $t \geq t_0$ için, $t - \tau < t_0$ olabilir.

Çözümün belirlenmesi için, (1.1) başlangıç değer probleminde y_0 başlangıç değeri verilirken (1.3) gecikmeli diferansiyel denklemde $\phi(t)$ başlangıç fonksiyonu verilmektedir. Genel olarak, (1.3) denklemde $y'(t_0)^+$ sağ taraf türevi, yani $f(t_0, \phi(t_0), \phi(t_0 - \tau))$, $\phi'(t_0)^-$ sol taraf türevine eşit değildir ve bundan dolayı t_0 noktasındaki y çözümü, $\phi(t)$ başlangıç fonksiyonuna düzgün olarak bağlı değildir. Dolayısıyla sadece C^0 - sürekliliği sağlanır. Ayrıca, t_0 başlangıç noktasından başlayarak integrasyon aralığı boyunca $y(t)$ fonksiyonunun türevlerinin süreksizlik noktaları mevcuttur ve bu da $y(t)$ çözümünün düzgün ve pürüzsüz olmamasına neden olan süreksizlik noktalarının olmasına yol açar.

Sonuç olarak, $\phi(t), \tau(t, y), f(t, y, x)$ fonksiyonları C^∞ sürekli olsa bile, genelde $y(t)$ çözümü basitçe $[t_0, t_f]$ ' de C^1 - süreklidir.

Örnek 1.2.1 (Bellen ve Zennaro, 2003)

Çözümü Şekil 1.1'de gösterilen

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1), & t \geq 0 \\ y(t) = 1, & t \leq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

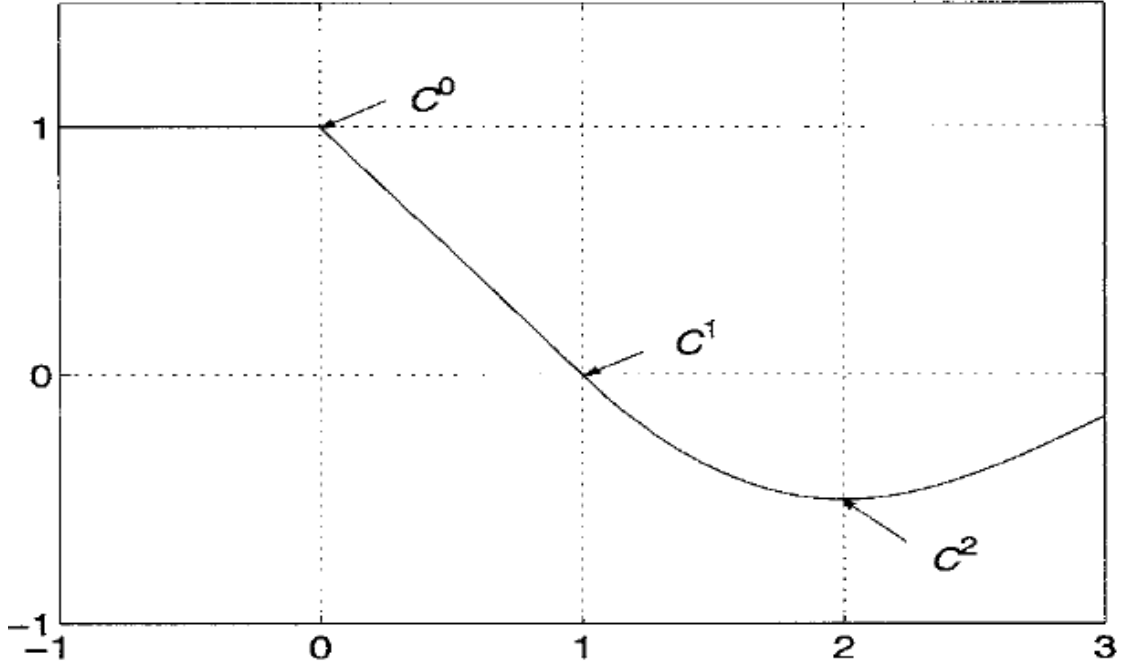
şeklindeki denklem ele alınsın. $y'(0)^- = 0$ ve $y'(0)^+ = -y(-1) = -1$ olduğundan, $y'(t)$ türev fonksiyonu $t = 0$ 'da sıçrayışa sahiptir. $y''(t)$ ikinci türevi,

$$y''(t) = -y'(t-1)$$

ile verilir ve bundan dolayı $t = 1$ 'de sıçrayışa sahip olur. $y'''(t)$ üçüncü türevi,

$$y'''(t) = -y''(t-1) = y'(t-2)$$

ile verilir ve burada sıçrayış noktası $t = 2$ 'dir ve benzeri şekilde $t = 3, 4, \dots$ noktaları sıçrayış noktalarıdır.



Şekil 1. 1 Örnek (1.2.1)' in çözümleri (Bellen ve Zennaro, 2003)

Örnek 1.2.2 (Bellen ve Zennaro, 2003)

Adi diferansiyel denklemlerin aksine, $y(t)$, $t \geq t_0$, çözümler kümesi ve başlangıç veri kümesi arasında injectivite (birebir fakat örten olmayan fonksiyon) yoktur. Gerçekten,

$$y'(t) = y(t-1)(y(t)-1), \quad t \geq 0 \quad (1.5)$$

$[-1,0]$ 'da tanımlı herhangi bir başlangıç fonksiyonu $\phi(t)$ için $[0,+\infty)$ 'da $y(t) = 1$ sabit çözüme sahiptir öyle ki $\phi(0) = 1$.

Örnek 1.2.3 (Bellen ve Zennaro, 2003)

$$\begin{cases} y'(t) = y(t - |y(t)| - 1) + \frac{1}{2}, & t \geq 0 \\ y(t) = \phi(t), & t \leq 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

denklemini verilsin.

Başlangıç fonksiyonu,

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & t < -1 \\ 0, & -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

şeklindedir.

Burada, $[0,2]$ aralığında $y(t) = \frac{3}{2}t$ ve $y(t) = \frac{1}{2}t$ fonksiyonlarının her ikisi de (1.6)'nın çözümüdür.

1.3 Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı ve Tekliği

Adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi,

$$\begin{cases} y'(t) = f\left(t, y(t), y\left(t - \tau(t, y(t))\right)\right), & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_0 \end{cases} \quad (1.7)$$

$f: [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, ile verilen problemlerin varlık ve teklik teoremleri,

$f\left(t, y(t), y\left(t - \tau(t, y(t))\right)\right)$ fonksiyonunun t 'ye göre sürekli olmasına ve $y(t)$,

$y\left(t - \tau(t, y(t))\right)$ fonksiyonlarına göre Lipschitz koşulunu sağlamasına dayalıdır.

Teorem 1.3.1 (Yerel Varlık Teoremi)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t))), & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

gecikmeli diferansiyel denklemi göz önüne alınsın. $f(t, y(t), y(t - \tau(t)))$ fonksiyonu $A \subseteq [t_0, t_f) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ üzerinde sürekli ve $y(t), y(t - \tau(t))$ fonksiyonlarına göre yerel Lipschitz sürekli olsun. Ayrıca, gecikme fonksiyonu $\tau(t) \geq 0$, $[t_0, t_f)$ aralığında sürekli ve $\tau(t_0) = 0$ ve en az bir $\xi > 0$ için $(t_0, t_0 + \xi]$ aralığında, $t - \tau(t) > t_0$ olsun. O halde, (1.8) problemi en az bir $\delta > 0$ için $(t_0, t_0 + \delta]$ aralığında tek bir çözüme sahiptir ve bu çözüm sürekli olarak başlangıç değerine bağlıdır (Bellen ve Zennaro, 2003).

Teorem 1.3.2 (Global Varlık Teoremi)

Eğer, Teorem 1.3.1’de verilen hipotezler altında, (1.8) denkleminin tekil maksimal çözümü sınırlı ise, o halde $[t_0, t_f)$ aralığında çözüm vardır (Bellen ve Zennaro, 2003).

Global varlık teoremini uygulamak için önce çözümün sınırlandırılmasına ihtiyaç duyulur.

Sonuç 1.3.3

Teorem 1.3.1’de verilen hipotezlerin altında, $M(t)$ ve $N(t)$, $[t_0, t_f)$ aralığında sürekli pozitif fonksiyonlar olmak üzere $f(t, y(t), y(t - \tau(t)))$ fonksiyonu, $[t_0, t_f) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ aralığında

$$\|f(t, y(t), y(t - \tau(t)))\| \leq M(t) + N(t)(\|y(t)\| + \|y(t - \tau(t))\|)$$

koşulunu sağlasın. O halde, (1.8)’in çözümü vardır ve $[t_0, t_f)$ aralığında çözüm tektir

(Bellen ve Zenaro, 2003).

Teorem 1.3.4 (Genelleştirilmiş Yerel Varlık Teoremi)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t))))), & t \geq t_0 \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

denklemi göz önüne alınsın. $U \subseteq \mathbb{R}^d$ ve $V \subseteq \mathbb{R}^d$ sırasıyla $\phi(t_0)$ ve $\phi(t_0 - \tau(t_0, \phi(t_0)))$ ’in birer komşuluğu olsun ve $f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t))))$ fonksiyonu $[t_0, t_0 + h] \times U \times V$, en az bir $h > 0$, bölgesinde t ’ye göre sürekli ve $y(t), y(t - \tau(t, y(t)))$ fonksiyonlarına göre

Lipschitz sürekli olsun. Ayrıca $\phi(t)$ başlangıç fonksiyonu $t \leq t_0$ için Lipschitz sürekli olsun ve $\tau(t, y) \geq 0$ gecikme fonksiyonunun t' ye göre sürekli ve $[t_0, t_0 + h] \times U$ bölgesinde y değişkenine göre Lipschitz sürekli olduğu varsayalım. O halde, (1.9) problemi en az bir $\delta > 0$ için $[t_0, t_0 + \delta)$ aralığında tek bir çözüme sahiptir ve bu çözüm sürekli olarak başlangıç değerine bağlıdır (Bellen ve Zennaro, 2003).

1.4 Gecikmeli Diferansiyel Denklemler İle Yapılan Bazı Modellemeler

1.4.1 Popülasyon Dinamiği

Profesör Velhulst ilk olarak ‘lojistik’ denklem adını verdiği denklemle taşıma kapasitesine göre popülasyon yoğunluğunun kıvrık (sigmoidal) büyümesini tanımlamıştır. 1920’de Velhulst’un denklemi Pearl ve Reed tarafından yeniden keşfedilmiştir. Daha sonra 1925’de Lotka matematiksel olarak benzer bir denklem elde etmiş ve buna “popülasyon büyüme yasası” demiştir. Rus biyolog Gause (1934), bu denklemin geçerliliğini laboratuvar deneyleriyle ispatlamıştır. Sürekli lojistik denklem adı verilen denklem

$$\frac{dN}{dt'} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (1.10)$$

ile verilir. Burada r ve K sırasıyla büyüme oranı ve popülasyon taşıma kapasitesidir. (1.10)’un çözümü analitik olarak belirlenebilir çünkü denklem ayrılabilir. $N(0) \ll K$ dan üstel başlayan kıvrık forma sahiptir ve $N = K$ olduğunda doygun hale gelir.

Test tüpünde tek hücreli paramesyumun popülasyon büyümesi tipik bir örnektir (Şekil 1.2). Deney şartları altında, 0.5 ml başına paramesyum sayısı yaklaşık 552 olduğunda popülasyon büyümesi durur. Zaman noktaları bazı saçılmalar gösterir ki bu hem kesin popülasyon büyüklüğü ölçümünde zorluğa hem de zaman içerisinde çevresel değişmelere ve test tüplerinin tekrarlanmasıya neden olur.

(1.10) lojistik denklemi popülasyon büyüklüğündeki organizmanın doğum ve / veya ölüm oranlarıyla oluşan değişimlere hemen cevap verdiğini varsayar. Diğer yandan bazı organizmalar yeniden üremeden önce gecikme zamanına sahip olurlar. Eğer organizmalar hücre döngüsü ya da çevresel şartlardan besin gereksinimini karşılarsa gecikmeler olur. Hutchinson, kuluçka ve olgunlaşma periyotlarını açıklama amaçlı lojistik denklem içinde gecikmeyi tanıtan ilk matematikçidir. Hutchinson, gözlemlenmiş salınımların kalabalık ya da kaynakta sonlu zaman gecikmesiyle açıklanabileceğini belirtmiştir. Özel olarak, Hutchinson

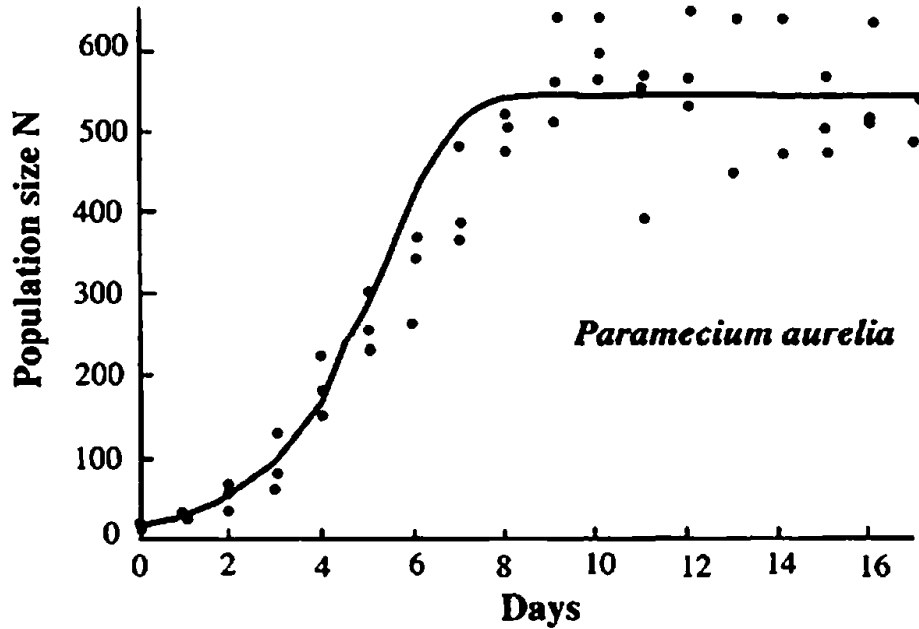
$$\frac{dN}{dt'} = rN \left(1 - \frac{N(t' - \tau)}{K} \right) \quad (1.11)$$

denklemini öne sürmüştür. Bu denklem boyutsuz formda tekrar yazılabilir:

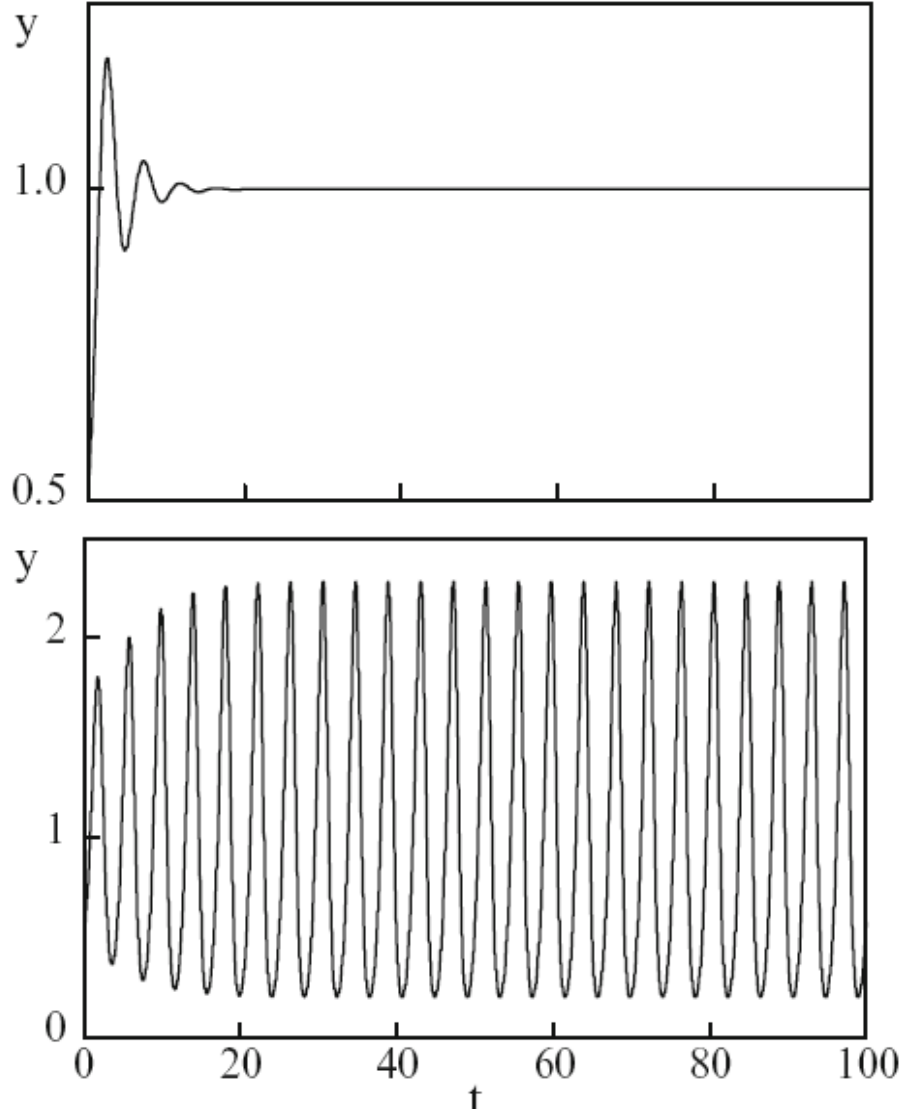
$y \equiv N/K$ ve $t \equiv t'/\tau$ olarak alınırsa, (1.11) denklemi

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y (1 - y(t - 1)) \quad (1.12)$$

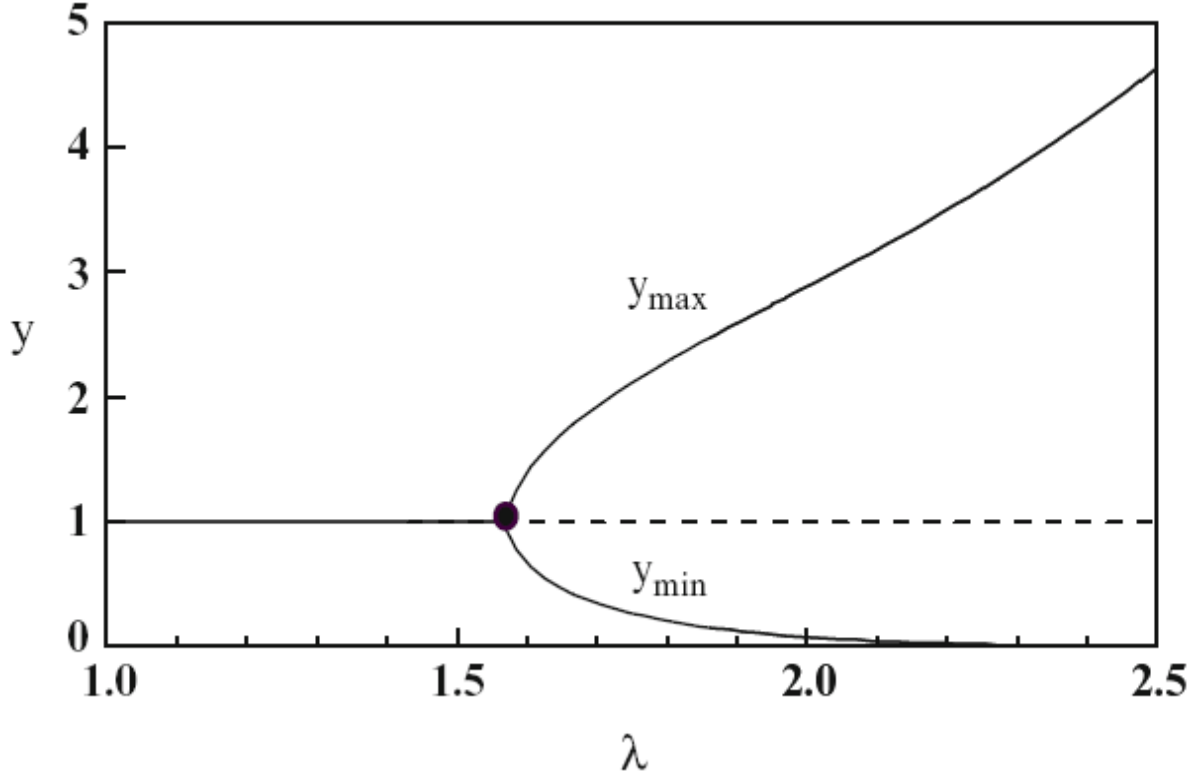
şeklinde yazılır. Burada $\lambda \equiv r\tau$ sadece bir parametredir. Şekil 1.3, λ 'nın iki farklı değeri için (1.11) denkleminin çözümünü gösterir. $\lambda = 1$ ve $\lambda = 1.8$ arasındaki λ 'nın bir değerinde $y = 1$ sabit kararlı durumdan değişken duruma geçer. Gerçekten, $\lambda_c = \pi/2 \cong 1.57$ değerinde kararlılığın değişimi bulunur. $\lambda > \lambda_c$ iken, sistem kararlılığını sabit periyot çözümüne aktarır. λ 'nın fonksiyonu iken y 'nin extremumu gösterilebilir (Şekil 1.4). Burada salınım genliğinin düzgünce sıfırdan büyüdüğü görülebilir. Bu $\lambda = \lambda_c$ 'de Hopf çatallanması ile gösterilen çatallanma diyagramının bir örneğidir.



Şekil 1.2 Besin olarak bakteri ve Osterhaut kültürü içeren test tübündeki *Paramecium aurelia*'nın popülasyon büyümesi. Popülasyon büyümesi her 0.5 ml başına bir sayıdır. (Erneux, 2009)



Şekil 1.3 Lojistik gecikmeli diferansiyel denklemin salınımlı çözümleri. En üst: $\lambda = 1$, çözüm hızlıca $y = 1$ sabit kararlı hale düşer. En alt: $\lambda = 1.8$ salınım artar ve aralıksız hale gelir. Başlangıç fonksiyonu $y = 0.5$ ($-1 \leq s < 0$) (Erneux, 2009)



Şekil 1.4 Kararlı çözümlerin çatallanma diyagramı. $\lambda = \lambda_c \cong 1.57$ 'de aralıksız salınım gözlenmektedir. (Erneux, 2009)

Bundan başka popülasyon dinamiğinde av-avcı sistemlerinin modellenmesi için de gecikmeli diferansiyel denklemler kullanılır. Av-avcı sistemlerinin modellenmesinde literatürde kullanılan denklemlerin başında Lotka-Volterra denklemi gelir. Bu denklem Lotka tarafından 1910 yılında “otokatalizör kimyasal reaksiyonların teorisinde” ileri sürülmüştür. Daha sonra 1920 yılında Lotka, Kalmogorov’un aracılığıyla bitki türleri ve otçul hayvan türlerini örnek alarak modelini “organik sistemler” için genişletmiştir ve 1925’de denklemini av-avcı etkileşimlerini analiz için kullanmıştır. Volterra ise Lotka’dan bağımsız olarak aynı denklemi ileri sürmüştür.

Lotka ve Volterra’nın yaptığı çalışmalara göre, av-avcı etkileşimini modellemek için izole bir ortamda t anındaki av türünün popülasyonu $x(t)$ ile ve avcı türünün popülasyonu $y(t)$ ile gösterilsin. Eğer ortamda avcı türünün hiç bulunmadığı varsayılır ve av türünün popülasyondaki artış oranı $\alpha_{11} > 0$ olarak alınırsa, av türünün popülasyon değişimi

$$x'(t) = \alpha_{11}x(t)$$

denklemiyle gösterilebilir. Fakat bu popülasyonda avcı türünün varlığı da göz önüne alınırsa, avcı popülasyonunun artması av türünün popülasyonunun artmasıyla ters orantılı olacaktır. $\alpha_{12} > 0$ olmak üzere,

$$x'(t) = \alpha_{11}x(t) - \alpha_{12}x(t)y(t)$$

şeklindeki denklemle av popülasyonunun büyümesi verilebilir.

Diğer yandan, yine izole ortamda av türünün bulunmadığı varsayılırsa, avcı türünün popülasyonunda azalma olacaktır. $\alpha_{21} > 0$ olmak üzere,

$$y'(t) = -\alpha_{21}y(t)$$

denklemleri ile bu durum ifade edilebilir. Ortama av türünün eklenmesiyle av türünün popülasyonundaki artış ile avcı türünün popülasyondaki artış doğru orantılı olacaktır. Bu durumda,

$$x'(t) = \alpha_{11}x(t) - \alpha_{12}x(t)y(t)$$

$$y'(t) = -\alpha_{21}y(t) + \alpha_{22}x(t)y(t)$$

denklemler sistemiyle av-avcı sisteminin modellenmesi yapılmış olur. Burada, $x(0) > 0$ ve $y(0) > 0$ 'dır.

Kuang (1993), av-avcı problemlerinde belli bir t anındaki popülasyonları değerlendirirken, her iki türün de bir τ süre önceki popülasyonlarını göz önünde bulundurmıştır. Kuang' ın modellenmesi

$$x'(t) = \alpha_{11} \left[1 - \frac{x(t)}{K} \right] x(t) - \alpha_{12}x(t)y(t)$$

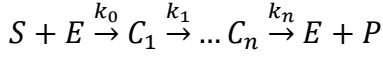
$$y'(t) = -\alpha_{21}y(t) + \alpha_{22}x(t - \tau)y(t - \tau)$$

şeklindedir.

1.4.2 Enzim-Substrat Kompleksi

Kimyacılar 19.yy.'ın ortalarından beri reaksiyon hızı üzerine çalışmalar yapmışlardır. Çoğu, hızlarının reaksiyona giren maddelerin yoğunluklarıyla orantılı olduğunu bulmuştur. Diğer yandan, 1892'de Adrian John Brown sakkaroz fermantasyonun hızının maya varlığında mevcut sakkaroz miktarından bağımsız olduğunu görmüştür. On yıl sonra, bu sonucunu intervaz moleküllerinin sakkarozla birlikte biçimlenmiş mayada bulunduklarını varsayarak açıklamıştır. Brown, enzim-substrat kompleksi olağan birinci mertebe hız kuralından kaynaklanan ayrışmadan ziyade sabit yaşam için ayrışmaya ihtiyaç duydukları fikrini ileri sürmüştür. Bu fikir Brown zamanında popüler olmasa da bugün, monomerin katalizör döngüsü boyunca moleküler düzeyde yer alan uyumlu değişimler sürecini açıklamak amacıyla

göz önüne alınır. Bundan başka, 1990'ların sonlarından beri genellikle indirgeme problemlerinde gecikmeli diferansiyel denklemlerle ilgili çalışmalar yeniden başlamıştır. Aşağıda bir P ürününün içinde modellenen S substratının enzimatik transformasyonunun reaksiyon dizisini ele alınsın.



2004'de Hinch ve Schnell, P 'nin değerinin direkt olarak S 'nin azalmasına bağlı olduğunu göstermiştir.

$$\frac{dS}{dt} = -R(t) \quad \text{ve} \quad \frac{dP}{dt} \cong R(t - \tau)$$

$\tau \equiv \sum_{i=2}^N k_i^{-1} \ll k_1^{-1}$ sağlanır. Gecikmenin hesaba katılması, kinetik modelin matematiksel tanımını kolaylaştırır.

1.4.3 Kanser Hücrelerinin Çoğalması

Bu konuda gecikmeli diferansiyel denklemler kullanarak modelleme ilk Villasana ve Radunskaya (2003) tarafından yapılmıştır. Bu çalışma, kanser hücrelerinin çoğalması ve bağışıklık sistemi hücreleri ile özel bazı ilaçların kanser hücrelerinin çoğalması üzerindeki etkilerini inceleyen bir matematiksel modelleme sunar.

Çalışmaya göre; bir hücre devri, hücrelerin ikiye bölünmesi için gerekli süredir ve bu süreç dört ana fazda gerçekleşir: G_1 evresi, pre-synthetic faz adı verilen aşamadır ve hücrenin kopyalama sürecine başlamadan önceki kuluçka evresidir. Tipik bir hücre için 48 saat sürer. İkinci devre, S fazı ya da synthetic faz olarak adlandırılır. Bu devrede, DNA'nın bir kopyası oluşturulur ve bu işlem yaklaşık 8 ile 20 saat arasında gerçekleşir. DNA'nın kopyası çıkartıldıktan sonra G_2 ya da post-synthetic faz adı verilen ikinci bir bekleme süreci yaşanır. G_2 aşaması Mitoz ya da M adı verilen bir hazırlık dönemidir. Son faz, M , hücreler içinde ikiye katlanan kromozomların birbirinden ayrılarak, iki ayrı hücre oluşumu devresidir. Tipik bir hücre için, hücre devri yaklaşık olarak 24 saattir.

$T_I(t)$, interphase olarak adlandırılan $G_1 + S + G_2$ safhasında herhangi bir t anındaki tümör hücrelerinin popülasyonunu; $T_M(t)$, M fazında herhangi bir t anındaki tümör hücrelerinin popülasyonunu; $I(t)$, t anındaki bağışıklık sistemi hücrelerinin popülasyonunu gösterebilir. $u(t)$, t anında uygulanan ilaç miktarı ve τ hücrelerin arayüz safhasında kalma süresini göstermek üzere aşağıdaki modelleme yapılabilir.

$$T_I' = 2a_4T_M - (c_1I + d_2)T_1 - a_1T_I(t - \tau), \quad t \geq 0$$

$$T_M' = a_1T_I(t - \tau) - d_3T_M - a_4T_M - c_3T_MI - k_1(1 - e^{-k_2u})T_M, \quad t \geq 0$$

$$I' = k + \frac{\rho(T_I + T_M)^n}{\alpha + (T_I + T_M)^n} - c_2IT_I - c_4T_MI - d_1I - k_3(1 - e^{-k_4u})I, \quad t \geq 0$$

$$u' = -\gamma u \quad t \geq 0$$

$$T_I(t) = \phi_1(t) \quad t \in [-\tau, 0]$$

$$T_M(t) = \phi_2(t) \quad t \in [-\tau, 0]$$

$$I(t) = \phi_3(t) \quad t \in [-\tau, 0]$$

$$u(0) = u_0 \quad t \in [-\tau, 0]$$

Burada d_2T_I, d_3T_M ve d_1I doğal hücre ölüm oranlarını, a_1 ve a_4 hücrelerin hücre devirlerini tamamlama yüzdelerini, c_i değerleri ise bağışıklık sistemi hücrelerinin etkisiyle tümör hücrelerinin kaybolma oranını ifade eder. ρ, α ve n değişkenleri ise tümör hücrelerinin tipine bağlı olarak değer alır.

1.4.4 Kontrol Sistemleri

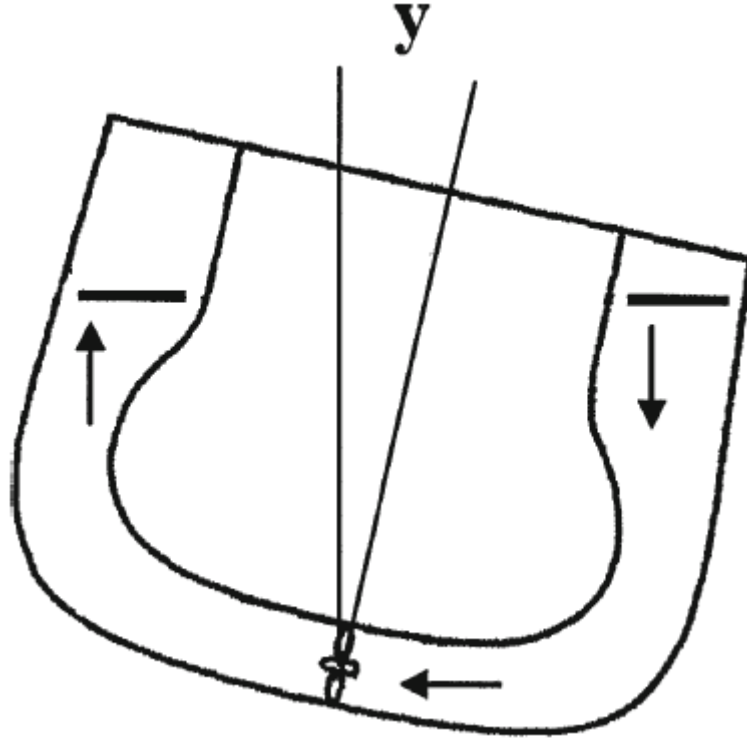
Kontrol mühendisliği hemen İkinci Dünya Savaşını takip eden yıllarda birçok ülkede hızlı bir gelişme göstermiştir. Sanayide, akademide ve devlet laboratuvarlarında araştırma grupları kurulmuştur. Alexandr Alexandrovich Andronov (1901-1952), Eski Sovyetler Birliği'nde kontrol mühendisliğinin gelişmesinde anahtar figürdür. İsmi ve onun kontrol teori ve nonlinear dinamiğe katkıları batıda hak ettiğinden daha az bilinir. Onun çalışmalarındaki ana figürler Solomon Lefschetz ve Nicolas Minorsky' den gelir.

Geri beslemeli kontrol sistemlerinin hemen hemen hepsinde zaman gecikmesi olacağı için gecikmeli diferansiyel denklemler kontrol mühendisliğinde oldukça sık görülür. Gecikmenin rol oynadığı sistemlerin kararlılık çalışmaları 1930 ve 1940'larda başlamıştır (Minorsky).

Örneğin, hareketinin

$$y'' + ay' + y = 0 \quad (1.13)$$

şeklindeki ikinci dereceden lineer denklemle tanımlandığı bir sistem ele alınsın.



Şekil 1.5 Geminin yan yatması ve kontrolü. Geminin her iki tarafındaki tanklar kısmen su ile doldurulur. Servomekanizm pompalama suyun bir tanktan diğerine aktarımını sağlayarak gemiyi dengede tutar. (Erneux, 2009)

Keyfi belirtilmiş başlangıç koşulları ile bu denklemin çözümü sıfıra doğru üstel azalan bir fonksiyondur. Çözüm eksik sönümlü ($a^2 < 4$) olsun ve salınımın azalması için bir şekilde sönüm katsayısı a azalsın. Eğer sistem spring-mass sistemse motor yağı içindeki tüm sistem suya daldırılabilir. Diğer yandan, eğer sistem, Minorsky'in bahsettiği gibi, denizde geminin yalpalaması ve y normal dikey pozisyonundan yan yatma pozisyonuna geçerken çizdiği eğim açısı ise daha ince düşünülmelidir. Örneğin, geminin dengede durması için her iki tarafında içi su dolu tanklar içerdiği varsayılın. Geminin yan yatma durumuna karşı suyun bir tanktan diğerine pompalanmasını sağlayan bir servomekanizma bulunmaktadır. Bu durum,

$$y'' + ay' + by' + y = 0 \quad (1.14)$$

denklemleriyle ifade edilir.

Fakat şimdi, açıkça söylenebilir ki bu mekanizmanın belli bir t anında hemen cevap vermesi mümkün değildir. Çünkü su bir tanktan diğerine pompalanırken belli bir süre geçer. Yani kontrolün cevap vermesi $\tau > 0$ gibi bir zaman alır ve geminin dengede durması, geminin $t - \tau$ anındaki durumuna bağlıdır. O halde (1.14) yerine,

$$y'' + ay' + by'(t - \tau) + y = 0$$

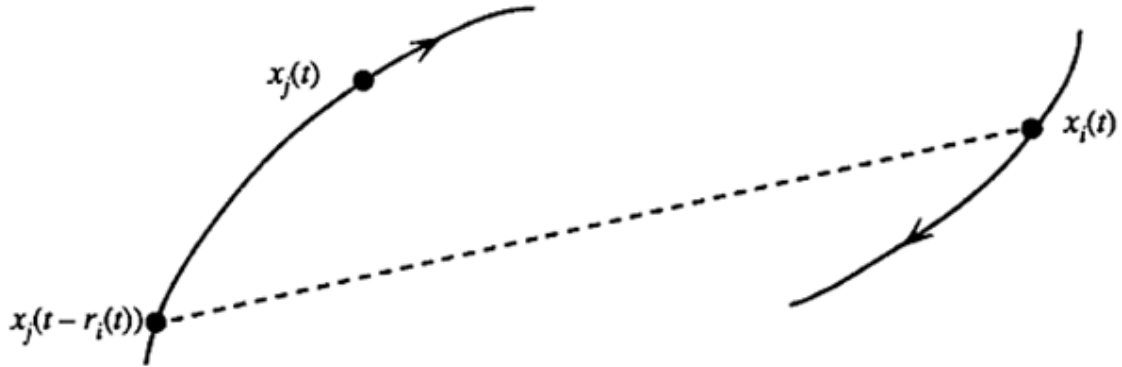
yazılmalıdır.

1.4.5 Elektrodinamik Problemi

Aralarında belli bir mesafe bulunan, her biri birbirinin etkisi altında hareket eden iki yüklü parçacık göz önüne alınsın. Bu parçacıklar ışık hızıyla bir yörünge etrafında hareket etsinler. Yükleri e_1 ve e_2 , durağan kütleleri m_1 ve m_2 olan bu iki parçacığın $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ referans noktaları olsun. O halde, t anında j parçacığının etkisi altındaki i parçacığının hareketi $t - \tau_i(t)$ anından önceki etkiyle üretilir. c ışık hızı olmak üzere, $\tau_i(t)$ gecikmesi aşağıdaki denklemi sağlar.

$$c\tau_i(t) = |x_i(t) - x_j(t - \tau_i(t))| \quad i \neq j$$

Burada, $|\cdot|$, $\mathbb{R}^3$ 'de Öklid normudur.



Şekil 1.6 İki yüklü parçacığın birbiri üzerindeki etkisi. (Kuang, 1993)

Aynı şekilde birinci parçacığın ikinci parçacık üzerindeki etkisi benzer bir denklem üretir. O halde,

$$c\tau_i(t) = |x_i(t) - x_j(t - \tau_i(t))|$$

$$c\tau_j(t) = |x_j(t) - x_i(t - \tau_j(t))|$$

şeklinde modelleme yapılabilir.

2. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

2.1 Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bu yöntem ilk olarak Zhou tarafından tanıtılmıştır (Zhou JK. Differential transformation and its application for electrical circuits. Wuuhahn, China: Hungary University Press; 1986). Daha sonra Chen (1999), lineer ve nonliner başlangıç değer problemleri için kapalı seri çözüm biçimlerini ele alarak bu yöntemi geliştirmiştir. Bu yöntem, diferansiyel denklem ve başlangıç koşulu kullanılarak Taylor serisinin çözümünün katsayılarını hesaplamayı kapsar.

Diferansiyel dönüşüm yöntemi ile diferansiyel denklemler cebirsel denklemlere dönüştürülebilir ve böylece kolaylıkla çözülebilir. Diğer yandan, bu yöntem diğer integral dönüşüm yöntemlerine göre (Laplace ve Fourier gibi) daha kolay bir yöntemdir. Çünkü hem Laplace hem de Fourier dönüşümlerinde karmaşık ifadelerin integrallerinin alınmasında zorluklarla ve ters dönüşümlerin alınmasında problemlerle karşılaşılabilir.

Diferansiyel dönüşüm yöntemi tek boyutlu, iki boyutlu, üç boyutlu ve n boyutlu olmak üzere dört ayrı grupta incelenebilir. Bu çalışmada tek boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemine değinilmiştir.

2.2 Tek Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Tek boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi tek değişkene bağlı diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılır. Bu yöntemi tanımlamadan önce diferansiyel operatör ve özelliklerine değinilmesi gerekir.

Tanım 2.2.1

Diferansiyel operatör türev operatörünün fonksiyonu olarak tanımlanan operatördür.

$\frac{d}{dx}$, D , D_x şeklinde gösterimleri vardır. Diferansiyel operatörün bazı özellikleri,

1. $\frac{d}{dx}(u(x) \mp \alpha v(x)) = \frac{d}{dx}(u(x)) \mp \alpha \frac{d}{dx}(v(x)), \quad \alpha \text{ keyfi sabit}$
2. $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}u(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}u(x)$

$$3. \frac{d^n}{dx^n} (u(x)v(x)) = v(x) \frac{d^n}{dx^n} u(x) + \binom{n}{1} \frac{d}{dx} v(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} u(x) + \dots$$

$$+ \binom{n}{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} v(x) \frac{d}{dx} u(x) + u(x) \frac{d^n}{dx^n} v(x)$$

şeklinde verilebilir.

Tanım 2.2.2

Eğer $u(x) \in \mathbb{R}$, sabit bir x_0 noktası civarında Taylor serisi ile ifade edilebiliyorsa, o halde

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (2.1)$$

ile gösterilebilir.

Tanım 2.2.3

Eğer $u_n(x)$, (2.1) Taylor serisinin n -kısmi toplamlar dizisi ise, o halde

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (2.2)$$

şeklinde yazılır. Burada $u_n(x)$, x_0 civarında $u(x)$ 'nin n . Taylor polinomu olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.4 (Chen,1996)

$u(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k)$ olmak üzere, $u(x)$ 'in diferansiyel dönüşümü

$$U(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0} \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $U(k)$, (2.3) denklemindeki gibi tanımlanırsa, o halde (2.1) denklemi

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k) (x - x_0)^k \quad (2.4)$$

ve (2.2) Taylor serisinin n -kısmi toplamlar dizisi

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^n U(k)(x - x_0)^k + R_n(x) \quad (2.5)$$

şekline dönüşür.

Tanım 2.2.5 (Chen, 1996)

$U(k)$ diferansiyel dönüşüm fonksiyonunun tersi, diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır.

(2.3) denklemi (2.6) denkleminde göz önüne alınırsa,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0} x^k \quad (2.7)$$

eşitliği elde edilir.

Bu tanımlardan da görüldüğü gibi tek boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi Taylor seri açılımından çıkarılır.

Teorem 2.2.1 (Chen, 1996)

$z(x), u(x), v(x)$ tek değişkenli fonksiyonlar ve bu fonksiyonların diferansiyel dönüşümleri sırasıyla $Z(k), U(k), V(k)$ olsun.

$z(x) = u(x) \mp v(x)$ olmak üzere,

$$Z(k) = U(k) \mp V(k)$$

şeklindedir.

İspat

$u(x)$ ' in diferansiyel dönüşümü $U(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0}$ ve $v(x)$ 'in diferansiyel dönüşümü

$V(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0}$ olmak üzere,

$z(x) = u(x) \mp v(x)$ ise,

$$Z(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} (u(x) \mp v(x)) \right]_{x=0}$$

şeklinde yazılır. Diferansiyel operatörün lineerlik özelliğinden,

$$\begin{aligned} Z(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \mp \frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0} \mp \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0} \\ &= U(k) \mp V(k) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 2.2.2 (Chen, 1996)

$u(x)$ ve $z(x)$ tek değişkenli fonksiyonlar olmak üzere, $u(x)$ ve $z(x)$ 'in diferansiyel dönüşüm fonksiyonları sırasıyla $U(k)$ ve $Z(k)$ olsun. $c \in \mathbb{R}$ için,

$$z(x) = cu(x) \text{ ise,}$$

$$Z(k) = cU(k)$$

şeklindedir.

İspat

$u(x)$ ' in diferansiyel dönüşümü $U(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0}$ olduğundan, $z(x) = cu(x)$ ' in diferansiyel dönüşümü

$$Z(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} cu(x) \right]_{x=0}$$

şeklinde yazılır. Diferansiyel operatörün lineerlik özelliğinden,

$$Z(k) = c \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0} = cU(k)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.2.3 (Chen, 1996)

$u(x)$ ve $z(x)$ tek değişkenli fonksiyonlar ve bu fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları sırasıyla $U(k)$ ve $Z(k)$ olsun.

$$z(x) = \frac{d}{dx} u(x) \text{ olmak üzere,}$$

$$Z(k) = (k + 1)U(k + 1)$$

şeklindedir.

İspat

$u(x)$ ' in diferansiyel dönüşümü $U(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0}$ olduğundan,

$$Z(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{d}{dx} u(x) \right) \right]_{x=0}$$

şeklinde yazılır. Buradan,

$$Z(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} u(x) \right]_{x=0} = (k + 1) \frac{1}{(k + 1)!} \left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} u(x) \right]_{x=0} = (k + 1)U(k + 1)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.2.4

$z(x)$ ve $u(x)$ tek değişkenli fonksiyonlar ve bu fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları sırasıyla $Z(k)$ ve $U(k)$ olsun. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$z(x) = \frac{d^m}{dx^m} u(x) \text{ ise,}$$

$$Z(k) = \frac{(k + m)!}{k!} U(k + m)$$

şeklindedir.

İspat

$U(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0}$ olduğundan,

$$Z(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{d^m}{dx^m} u(x) \right) \right]_{x=0} = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{k+m}}{dx^{k+m}} u(x) \right]_{x=0}$$

$$\begin{aligned}
&= (k+m)(k+m-1)(k+m-2) \dots (k+m-(m-1)) \frac{1}{(k+m)!} \left[\frac{d^{k+m}}{dx^{k+m}} u(x) \right]_{x=0} \\
&= \frac{(k+m)!}{k!} U(k+m)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 2.2.5 (Chen, 1996)

$z(x)$, $u(x)$ ve $v(x)$ tek bileşenli fonksiyonlarının diferansiyel dönüşüm fonksiyonları sırasıyla $Z(k)$, $U(k)$, $V(k)$ olsun.

$z(x) = u(x)v(x)$ olmak üzere, $z(x)$ ' in diferansiyel dönüşümü,

$$Z(k) = \sum_{l=0}^k U(l)V(k-l)$$

şeklindedir.

İspat

$u(x)$ ' in diferansiyel dönüşümü $U(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0}$ ve $v(x)$ ' in diferansiyel dönüşümü

$V(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0}$ olmak üzere,

$z(x) = u(x)v(x)$ ise,

$$Z(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} (u(x)v(x)) \right]_{x=0}$$

şeklinde yazılır.

Leibniz çarpım kuralından,

$$\begin{aligned}
Z(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} (u(x)v(x)) \right]_{x=0} \\
&= \frac{1}{k!} \left[v(x) \frac{d^k}{dx^k} u(x) + \binom{k}{1} \frac{d}{dx} v(x) \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} u(x) \right]_{x=0} \\
&\quad + \frac{1}{k!} \left[\binom{k}{2} \frac{d^2}{dx^2} v(x) \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} u(x) + \dots + \binom{k}{k-1} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} v(x) \frac{d}{dx} u(x) + u(x) \frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k!} \left[v(x) \frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0} + \frac{1}{k!} \left[\binom{k}{1} \frac{d}{dx} v(x) \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} u(x) \right]_{x=0} \\
&\quad + \frac{1}{k!} \left[\binom{k}{2} \frac{d^2}{dx^2} v(x) \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} u(x) \right]_{x=0} + \cdots + \frac{1}{k!} \frac{k!}{(k-1)!} \left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} v(x) \frac{d}{dx} u(x) \right]_{x=0} \\
&\quad + \frac{1}{k!} \left[u(x) \frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0} \\
Z(k) &= \frac{1}{k!} \left[\left(\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right) v(x) \right]_{x=0} + \frac{1}{k!} \frac{k!}{(k-1)!} \left[\frac{d}{dx} v(x) \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} u(x) \right]_{x=0} + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{k!} \frac{k!}{(k-1)!} \left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} v(x) \frac{d}{dx} u(x) \right]_{x=0} + \frac{1}{k!} \left[u(x) \frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0} \\
&= U(k)V(0) + U(k-1)V(1) + \cdots + U(1)V(k-1) + U(0)V(k)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan,

$$Z(k) = \sum_{l=0}^k U(l)V(k-l)$$

olduğu bulunur.

Teorem 2.2.6 (Chen, 1996)

$z(x)$ tek değişkenli fonksiyon ve $z(x)$ ' in diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $Z(k)$ olsun.

$m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $z(x) = x^m$ ise,

$$Z(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Burada $k < m$, $k = m$ ve $k > m$ durumlarının incelenmesi gerekir.

$$Z(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0}$$

olduğu bilinmektedir. O halde, bu üç durum için $\left[\frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0}$ ifadesi incelenmelidir.

1. Durum: $k < m$ durumu

$$\left[\frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0} = [m(m-1) \dots (m-k+1)x^{m-k}]_{x=0} = 0$$

olur. O halde buradan,

$$Z(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0} = \frac{0}{k!} = 0$$

elde edilir.

2. Durum: $k = m$ durumu

$$\left[\frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0} = [m(m-1) \dots (m-m+1)x^{m-m}]_{x=0} = m!$$

ise,

$$Z(m) = \frac{1}{m!} \left[\frac{d^m}{dx^m} x^m \right]_{x=0} = \frac{1}{m!} m! = 1$$

şeklinde bulunur.

3. Durum: $k > m$ durumu

$$\left[\frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0} = [m(m-1) \dots (m-m+1)0]_{x=0} = 0$$

ise,

$$Z(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0} = \frac{0}{k!} = 0$$

şeklindedir.

Her üç durum da göz önüne alınırsa, $z(x) = x^m$ in diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$Z(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

ile ifade edilir.

Teorem 2.2.7 (Abdel-Halim, 2004)

$u(x)$ tek değişkenli fonksiyon, $U(k)$, $u(x)$ ' in diferansiyel dönüşüm fonksiyonu ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$u(x) = e^{\lambda x} \text{ ise,}$$

$$U(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$$

şeklindedir.

İspat

$u(x)$ ' in diferansiyel dönüşümünün

$$U(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0}$$

olduğu Tanım 2.2.4'den bilinmektedir. O halde,

$$k = 0 \text{ için, } U(0) = \frac{1}{0!} [e^{\lambda x}]_{x=0} = \frac{1}{0!} = 1$$

$$k = 1 \text{ için, } U(1) = \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{dx} e^{\lambda x} \right]_{x=0} = \frac{1}{1!} [\lambda e^{\lambda x} \ln e]_{x=0} = \frac{1}{1!} \lambda$$

$$k = 2 \text{ için, } U(2) = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dx^2} e^{\lambda x} \right]_{x=0} = \frac{1}{2!} [\lambda^2 (\ln e)^2 e^{\lambda x}]_{x=0} = \frac{1}{2!} \lambda^2$$

$$k = 3 \text{ için, } U(3) = \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{dx^3} e^{\lambda x} \right]_{x=0} = \frac{1}{3!} [\lambda^3 (\ln e)^3 e^{\lambda x}]_{x=0} = \frac{1}{3!} \lambda^3$$

ifadeleri elde edilir.

Böyle devam edilirse, $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$U(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.2.8 (Abdel-Halim, 2004)

$u(x)$ tek değişkenli fonksiyon, $w, \alpha \in \mathbb{R}$ ve $u(x)$ ' in diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k)$ olmak üzere,

$$u(x) = \sin (wx + \alpha) \text{ ise,}$$

$$U(k) = \frac{w^k}{k!} \sin \left(\frac{\pi}{2} k + \alpha \right)$$

şeklindedir.

İspat

$u(x) = \sin (wx + \alpha)$ ise, Tanım 2.2.4 gereęince

$U(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \sin (wx + \alpha) \right]_{x=0}$ şeklindedir. O halde, k 'nın değerlerine göre $U(k)$ fonksiyonu incelenirse,

$k = 0$ için,

$$U(0) = \frac{1}{0!} [\sin (wx + \alpha)]_{x=0} = \frac{1}{0!} \sin \alpha$$

$k = 1$ için,

$$U(1) = \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{dx} \sin (wx + \alpha) \right]_{x=0} = \frac{1}{1!} [w \cos (wx + \alpha)]_{x=0} = \frac{1}{1!} w \cos \alpha = \frac{1}{1!} w \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$$

$k = 2$ için,

$$U(2) = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dx^2} \sin (wx + \alpha) \right]_{x=0} = \frac{1}{2!} [-w^2 \sin (wx + \alpha)]_{x=0} = \frac{1}{2!} w^2 \sin \left(\frac{2\pi}{2} + \alpha \right)$$

$k = 3$ için,

$$U(3) = \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{dx^3} \sin (wx + \alpha) \right]_{x=0} = \frac{1}{3!} [-w^3 \cos (wx + \alpha)]_{x=0} = \frac{1}{3!} w^3 \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right)$$

ifadeleri elde edilir.

Böyle devam edilirse, $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$U(k) = \frac{w^k}{k!} \sin \left(\frac{\pi}{2} k + \alpha \right)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.2.9

$u(x)$ tek değişkenli fonksiyon, $w, \alpha \in \mathbb{R}$ ve $u(x)$ ' in diferansiyel dönüşümü $U(k)$ olmak üzere,

$u(x) = \cos (wx + \alpha)$ ise,

$$U(k) = \frac{w^k}{k!} \cos \left(\frac{\pi}{2} k + \alpha \right)$$

şeklindedir.

İspat

$u(x) = \cos (wx + \alpha)$ ise, Tanım 2.2.4'den

$$U(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \cos(wx + \alpha) \right]_{x=0}$$

şeklindedir. Burada, k 'nın değerlerine göre $U(k)$ fonksiyonu incelenirse,

$$k = 0 \text{ için, } U(0) = \frac{1}{0!} [\cos (wx + \alpha)]_{x=0} = \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} k = 1 \text{ için, } U(1) &= \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{dx} \cos (wx + \alpha) \right]_{x=0} = \frac{1}{1!} [-w \sin (wx + \alpha)]_{x=0} = \frac{1}{1!} (-w \sin \alpha) \\ &= \frac{1}{1!} w \left(\cos \frac{\pi}{2} + \alpha \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 2 \text{ için, } U(2) &= \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dx^2} \cos (wx + \alpha) \right]_{x=0} = \frac{1}{2!} [-w^2 \cos (wx + \alpha)]_{x=0} \\ &= \frac{1}{2!} w^2 \cos \left(\frac{2\pi}{2} + \alpha \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 3 \text{ için, } U(3) &= \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{dx^3} \cos (wx + \alpha) \right]_{x=0} = \frac{1}{3!} [w^3 \sin (wx + \alpha)]_{x=0} \\ &= \frac{1}{3!} w^3 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir.

Bu şekilde devam edilirse, $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$U(k) = \frac{w^k}{k!} \cos \left(\frac{\pi}{2} k + \alpha \right)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.2.10 (Arikoğlu ve Özkol, 2005)

$u(x)$ ve $v_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, tek değişkenli fonksiyonlarının diferansiyel dönüşüm fonksiyonları sırasıyla $U(k)$ ve $V_i(k)$ olsun.

Eğer $u(x) = v_1(x)v_2(x) \dots v_{n-1}(x)v_n(x)$ ise, o halde

$$U(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} V_1(k_1)V_2(k_2 - k_1) \dots V_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2})V_n(k - k_{n-1})$$

şeklindedir.

İspat

Tanım 2.2.4 kullanılarak,

$$U(0) = \frac{1}{0!} [v_1(x)v_2(x) \dots v_{n-1}(x)v_n(x)]_{x=x_0} = V_1(0)V_2(0) \dots V_{n-1}(0)V_n(0)$$

$$\begin{aligned} U(1) &= \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{dx} (v_1(x)v_2(x) \dots v_{n-1}(x)v_n(x)) \right]_{x=x_0} \\ &= [v_1(x)'v_2(x) \dots v_{n-1}(x)v_n(x) + v_1(x)v_2(x)' \dots v_{n-1}(x)v_n(x) \\ &\quad + v_1(x)v_2(x) \dots v_{n-1}(x)'v_n(x) + v_1(x)v_2(x) \dots v_{n-1}(x)v_n(x)']_{x=x_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(1) &= V_1(1)V_2(0) \dots V_{n-1}(0)V_n(0) + V_1(0)V_2(1) \dots V_{n-1}(0)V_n(0) + \dots \\ &\quad + V_1(0)V_2(0) \dots V_{n-1}(1)V_n(0) + V_1(0)V_2(0) \dots V_{n-1}(0)V_n(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(2) &= V_1(1)V_2(1)V_3(0) \dots V_n(0) + V_1(1)V_2(0)V_3(1) \dots V_n(0) + \dots \\ &\quad + V_1(1)V_2(0)V_3(0) \dots V_n(1) + V_1(0)V_2(1)V_3(1) \dots V_n(0) + \dots \\ &\quad + V_1(0)V_2(0) \dots V_{n-1}(1)V_n(1) + V_1(2)V_2(0)V_3(0) \dots V_n(0) \\ &\quad + \dots + V_1(0)V_2(0)V_3(0) \dots V_n(2) \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir.

Bu şekilde devam edilirse,

$$U(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} V_1(k_1) V_2(k_2 - k_1) \dots V_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) V_n(k - k_{n-1})$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.2.11 (Arikoğlu ve Özkol, 2006a)

Eğer $u(x) = v(x + a)$ ise, o halde

$$U(k) = \sum_{h_1=k}^N \binom{h_1}{k} a^{h_1-k} V(h_1), \quad N \rightarrow \infty$$

şeklindedir.

İspat

(2.6) denkleminde verilen ters diferansiyel dönüşüm tanımından,

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} V(k)(x - x_0 + a)^k \\ &= V(0) + aV(1) + V(1)(x - x_0) + a^2V(2) + 2aV(2)(x - x_0) + V(2)(x - x_0)^2 \\ &\quad + a^3V(3) + 3a^2V(3)(x - x_0) + 3aV(3)(x - x_0)^2 + V(3)(x - x_0)^3 \\ &= [V(0) + aV(1) + a^2V(2) + a^3V(3) + \dots] \\ &\quad + [V(1) + 2aV(2) + 3a^2V(3) + \dots](x - x_0) \\ &\quad + [V(2) + 3aV(3) + \dots](x - x_0)^2 + [V(3) + \dots](x - x_0)^3 + \dots \\ &= \sum_{h_1=0}^{\infty} a^{h_1} V(h_1) + \sum_{h_1=1}^{\infty} \frac{h_1!}{1! (h_1 - 1)!} a^{h_1-1} V(h_1)(x - x_0) \\ &\quad + \sum_{h_1=2}^{\infty} \frac{h_1!}{2! (h_1 - 2)!} a^{h_1-2} V(h_1)(x - x_0)^2 \\ &\quad + \sum_{h_1=3}^{\infty} \frac{h_1!}{3! (h_1 - 3)!} a^{h_1-3} V(h_1)(x - x_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

$$+ \sum_{h_1=k}^{\infty} \frac{h_1!}{k! (h_1 - k)!} a^{h_1-k} V(h_1) (x - x_0)^k$$

şeklindedir.

Elde edilen bu seri,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h_1=k}^{\infty} \binom{h_1}{k} a^{h_1-k} V(h_1) (x - x_0)^k$$

olacak şekilde düzenlenir ve (2.6) denklemi göz önüne alınırsa,

$$U(k) = \sum_{h_1=k}^N \binom{h_1}{k} a^{h_1-k} V(h_1), \quad N \rightarrow \infty$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.2.12 (Arikoğlu ve Özkol, 2006a)

Eğer $u(x) = v_1(x + a_1)v_2(x + a_2)$ ise, o halde

$$U(k) = \sum_{k_1=0}^k \sum_{h_1=k_1}^N \sum_{h_2=k-k_1}^N \binom{h_1}{k_1} \binom{h_2}{k-k_1} a_1^{h_1-k_1} a_2^{h_2-k+k_1} V_1(h_1) V_2(h_2), \quad N \rightarrow \infty$$

şeklindedir.

İspat

$x = x_0$ 'da, $v_1(x + a_1)$ 'in diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $C_1(k)$ ve $v_2(x + a_2)$ 'nin diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $C_2(k)$ olsun. Teorem 2.2.5 kullanılarak, $u(x)$ 'in diferansiyel dönüşümü

$$U(k) = \sum_{k_1=0}^k C_1(k_1) C_2(k - k_1)$$

şeklinde elde edilir. Teorem 2.2.11'den,

$$C_1(k_1) = \sum_{h_1=k_1}^{\infty} \binom{h_1}{k_1} a_1^{h_1-k_1} V_1(h_1)$$

$$C_2(k - k_1) = \sum_{h_2=k-k_1}^{\infty} \binom{h_2}{k - k_1} a_2^{h_2-k+k_1} V_2(h_2)$$

ifadeleri elde edilir.

Bu ifadelerden yararlanılarak, $u(x)$ ' in diferansiyel dönüşümü

$$U(k) = \sum_{k_1=0}^k \sum_{h_1=k_1}^N \sum_{h_2=k-k_1}^N \binom{h_1}{k_1} \binom{h_2}{k - k_1} a_1^{h_1-k_1} a_2^{h_2-k+k_1} V_1(h_1) V_2(h_2), \quad N \rightarrow \infty$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.2.13 (Arikoğlu ve Özkol, 2006a)

Eğer $u(x) = v_1(x + a_1) v_2(x + a_2) \dots v_{n-1}(x + a_{n-1}) v_n(x + a_n)$ ise, o halde

$$\begin{aligned} U(k) = & \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{h_1=k_1}^N \sum_{h_2=k_2-k_1}^N \dots \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}}^N \sum_{h_n=k-k_{n-1}}^N \binom{h_1}{k_1} \\ & \times \binom{h_2}{k_2 - k_1} \dots \binom{h_{n-1}}{k_{n-1} - k_{n-2}} \binom{h_n}{k - k_{n-1}} a_1^{h_1-k_1} a_2^{h_2-k_2+k_1} \dots \\ & \times a_{n-1}^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}} a_n^{h_n-k+k_{n-1}} \\ & \times V_1(h_1) V_2(h_2) \dots V_{n-1}(h_{n-1}) V_n(h_n), \quad N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat

$x = x_0$ ' da $v_i(x + a_i)$ ' nin diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $C_i(k)$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, olsun.

Teorem 2.2.10'dan $u(x)$ ' in diferansiyel dönüşümü,

$$U(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} C_1(k_1) C_2(k_2 - k_1) \dots C_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) C_n(k - k_{n-1})$$

şeklinde yazılır.

Teorem 2.2.11'den,

$$C_1(k_1) = \sum_{h_1=k_1}^{\infty} \binom{h_1}{k_1} a_1^{h_1-k_1} V_1(h_1)$$

$$C_2(k_2 - k_1) = \sum_{h_2=k_2-k_1}^{\infty} \binom{h_2}{k_2 - k_1} a_2^{h_2-k_2+k_1} V_2(h_2)$$

⋮

$$C_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) = \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}}^{\infty} \binom{h_{n-1}}{k_{n-1} - k_{n-2}} a_{n-1}^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}} V_{n-1}(h_{n-1})$$

$$C_n(k - k_{n-1}) = \sum_{h_n=k-k_{n-1}}^{\infty} \binom{h_n}{k - k_{n-1}} a_n^{h_n-k+k_{n-1}} V_n(h_n)$$

ifadeleri bulunur.

Bu ifadelerden yararlanılarak,

$$\begin{aligned} U(k) &= \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{h_1=k_1}^{\infty} \binom{h_1}{k_1} a_1^{h_1-k_1} V_1(h_1) \\ &\quad \times \sum_{h_2=k_2-k_1}^{\infty} \binom{h_2}{k_2 - k_1} a_2^{h_2-k_2+k_1} V_2(h_2) \dots \\ &\quad \times \sum_{h_n=k-k_{n-1}}^{\infty} \binom{h_n}{k - k_{n-1}} a_n^{h_n-k+k_{n-1}} V_n(h_n) \end{aligned}$$

elde edilir.

Son ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned} U(k) &= \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{h_1=k_1}^N \sum_{h_2=k_2-k_1}^N \dots \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}}^N \sum_{h_n=k-k_{n-1}}^N \binom{h_1}{k_1} \dots \\ &\quad \times \binom{h_2}{k_2 - k_1} \dots \binom{h_{n-1}}{k_{n-1} - k_{n-2}} \binom{h_n}{k - k_{n-1}} a_1^{h_1-k_1} \\ &\quad \times a_2^{h_2-k_2+k_1} \dots a_{n-1}^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}} a_n^{h_n-k+k_{n-1}} \\ &\quad \times V_1(h_1) V_2(h_2) \dots V_{n-1}(h_{n-1}) V_n(h_n), \quad N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.2.14 (Arikoğlu ve Özkol, 2006a)

Eğer

$$u(x) = v_1(x + a_1)v_2(x + a_2) \dots v_{n-1}(x + a_{n-1})v_n(x + a_n)h_1(x)h_2(x) \dots h_{m-1}(x)h_m(x)$$

ise, o halde

$$\begin{aligned} U(k) = & \sum_{k_{m+n-1}=0}^k \sum_{k_{m+n-2}=0}^{k_{m+n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{h_1=k_1}^N \sum_{h_2=k_2-k_1}^N \dots \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}}^N \sum_{h_n=k_n-k_{n-1}}^N \binom{h_1}{k_1} \\ & \times \binom{h_2}{k_2-k_1} \dots \binom{h_{n-1}}{k_{n-1}-k_{n-2}} \binom{h_n}{k_n-k_{n-1}} a_1^{h_1-k_1} a_2^{h_2-k_2+k_1} \dots \\ & \times a_{n-1}^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}} a_n^{h_n-k_n+k_{n-1}} V_1(h_1)V_2(h_2) \dots V_{n-1}(h_{n-1})V_n(h_n) \\ & \times H_1(k_{n+1}-k_n)H_2(k_{n+2}-k_{n+1}) \dots \\ & \times H_{m-1}(k_{m+n-1}-k_{m+n-2})H_m(k-k_{m+n-1}), \quad N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat

$x = x_0$ ’da $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ve $j = 1, 2, 3, \dots, m$ için $v_i(x + a_i)$ ’nin ve $h_j(x)$ ’in diferansiyel dönüşüm fonksiyonları sırasıyla $C_i(k)$ ve $H_j(k)$ olsun. Teorem 2.2.10’den, $u(x)$ ’in diferansiyel dönüşümü,

$$\begin{aligned} U(k) = & \sum_{k_{m+n-1}=0}^k \sum_{k_{m+n-2}=0}^{k_{m+n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} C_1(k_1)C_2(k_2-k_1) \dots C_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2}) \\ & \times C_n(k_n-k_{n-1})H_1(k_{n+1}-k_n)H_2(k_{n+2}-k_{n+1}) \dots \\ & \times H_{m-1}(k_{m+n-1}-k_{m+n-2})H_m(k-k_{m+n-1}) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

Teorem 2.2.11’den,

$$C_1(k_1) = \sum_{h_1=k_1}^{\infty} \binom{h_1}{k_1} a_1^{h_1-k_1} V_1(h_1)$$

$$C_2(k_2-k_1) = \sum_{h_2=k_2-k_1}^{\infty} \binom{h_2}{k_2-k_1} a_2^{h_2-k_2+k_1} V_2(h_2)$$

⋮

$$C_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) = \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}}^{\infty} \binom{h_{n-1}}{k_{n-1} - k_{n-2}} a_{n-1}^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}} V_{n-1}(h_{n-1})$$

$$C_n(k_n - k_{n-1}) = \sum_{h_n=k_n-k_{n-1}}^{\infty} \binom{h_n}{k_n - k_{n-1}} a_n^{h_n-k_n+k_{n-1}} V_n(h_n)$$

ifadeleri elde edilir.

Bu ifadelerden yararlanılarak, $u(x)$ 'in diferansiyel dönüşümü

$$\begin{aligned} U(k) &= \sum_{k_{m+n-1}=0}^k \sum_{k_{m+n-2}=0}^{k_{m+n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{h_1=k_1}^{\infty} \binom{h_1}{k_1} a_1^{h_1-k_1} V_1(h_1) \\ &\times \sum_{h_2=k_2-k_1}^{\infty} \binom{h_2}{k_2 - k_1} a_2^{h_2-k_2+k_1} V_2(h_2) \dots \\ &\times \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}}^{\infty} \binom{h_{n-1}}{k_{n-1} - k_{n-2}} a_{n-1}^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}} \\ &\times \sum_{h_n=k_n-k_{n-1}}^{\infty} \binom{h_n}{k_n - k_{n-1}} a_n^{h_n-k_n+k_{n-1}} V_n(h_n) H_1(k_{n+1} - k_n) H_2(k_{n+2} - k_{n+1}) \dots \\ &\times H_{m-1}(k_{m+n-1} - k_{m+n-2}) H_m(k - k_{m+n-1}) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Son ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned} U(k) &= \sum_{k_{m+n-1}=0}^k \sum_{k_{m+n-2}=0}^{k_{m+n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{h_1=k_1}^N \sum_{h_2=k_2-k_1}^N \dots \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}}^N \sum_{h_n=k_n-k_{n-1}}^N \binom{h_1}{k_1} \\ &\times \binom{h_2}{k_2 - k_1} \dots \binom{h_{n-1}}{k_{n-1} - k_{n-2}} \binom{h_n}{k_n - k_{n-1}} a_1^{h_1-k_1} a_2^{h_2-k_2+k_1} \dots \\ &\times a_{n-1}^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}} a_n^{h_n-k_n+k_{n-1}} V_1(h_1) V_2(h_2) \dots V_{n-1}(h_{n-1}) V_n(h_n) \\ &\times H_1(k_{n+1} - k_n) H_2(k_{n+2} - k_{n+1}) \dots \end{aligned}$$

$$\times H_{m-1}(k_{m+n-1} - k_{m+n-2})H_m(k - k_{m+n-1}), \quad N \rightarrow \infty$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.2.15 (Arikoğlu ve Özkol, 2006b)

$u(x)$ tek değişkenli fonksiyon ve $u(x)$ ' in diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k)$ olsun.

Eğer $u(x) = \frac{d^n}{dx^n} [v(x + a)]$ ise, o halde

$$U(k) = \frac{(k+n)!}{k!} \sum_{h_1=k+n}^N \binom{h_1}{k+n} a^{h_1-k-n} V(h_1), \quad N \rightarrow \infty$$

şeklindedir.

İspat

$x = x_0$ ' da $v(x + a)$ ' nın diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $C(k)$ olsun. Teorem 2.2.4'den,

$$U(k) = \frac{(k+n)!}{k!} C(k+n)$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 2.2.11'den,

$$C(k+n) = \sum_{h_1=k+n}^N \binom{h_1}{k+n} a^{h_1-k-n} V(h_1)$$

olarak elde edilir. Bu ifadelerden yararlanılarak,

$$U(k) = \frac{(k+n)!}{k!} \sum_{h_1=k+n}^N \binom{h_1}{k+n} a^{h_1-k-n} V(h_1), \quad N \rightarrow \infty$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.2.16 (Arikoğlu ve Özkol, 2006b)

Eğer $u(x) = p(x)v^{(n)}(x + a)$ ise, o halde

$$U(k) = \sum_{k_1=0}^k \sum_{h_1=k-k_1+n}^N \frac{(k-k_1+n)!}{(k-k_1)!} \binom{h_1}{k-k_1+n} a^{h_1-k+k_1-n} P(k_1) V(h_1), \quad N \rightarrow \infty$$

şeklindedir.

İspat

$x = x_0$ ’da $p(x)$ ve $v^{(n)}(x + a)$ ’nın diferansiyel dönüşümleri sırasıyla $P(k)$ ve $C(k)$ olsun.

Teorem 2.2.5’den $u(x)$ ’in diferansiyel dönüşümü,

$$U(k) = \sum_{k_1=0}^k P(k_1)C(k - k_1)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 2.2.15’den,

$$C(k - k_1) = \frac{(k - k_1 + n)!}{(k - k_1)!} \sum_{h_1=k-k_1+n}^N \binom{h_1}{k - k_1 + n} a^{h_1-k+k_1-n} V(h_1)$$

şeklindedir.

Bu ifadeler göz önüne alınırsa,

$$U(k) = \sum_{k_1=0}^k \sum_{h_1=k-k_1+n}^N \frac{(k - k_1 + n)!}{(k - k_1)!} \binom{h_1}{k - k_1 + n} a^{h_1-k+k_1-n} P(k_1)V(h_1), \quad N \rightarrow \infty$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.2.17 (Arikoğlu ve Özkol, 2006b)

Eğer $u(x) = v_1^{(n_1)}(x + a_1)v_2^{(n_2)}(x + a_2)$ ise, o halde

$$U(k) = \sum_{k_1=0}^k \sum_{h_1=k_1+n_1}^N \sum_{h_2=k-k_1+n_2}^N \frac{(k_1 + n_1)!}{k_1!} \frac{(k - k_1 + n_2)!}{(k - k_1)!} \binom{h_1}{k_1 + n_1} \binom{h_2}{k - k_1 + n_2} \\ \times a_1^{h_1-k_1-n_1} a_2^{h_2-k+k_1-n_2} V_1(h_1)V_2(h_2), \quad N \rightarrow \infty$$

şeklindedir.

İspat

$x = x_0$ ’da $v_1^{(n_1)}(x + a_1)$ ve $v_2^{(n_2)}(x + a_2)$ ’nin diferansiyel dönüşümleri sırasıyla $C_1(k)$ ve $C_2(k)$ olsun. $u(x)$ ’in diferansiyel dönüşümü Teorem 2.2.5’den,

$$U(k) = \sum_{k_1=0}^k C_1(k_1)C_2(k - k_1)$$

şeklinde yazılır.

Teorem 2.2.15'den,

$$C_1(k_1) = \frac{(k_1 + n_1)!}{k_1!} \sum_{h_1=k_1+n_1}^N \binom{h_1}{k_1 + n_1} a_1^{h_1-k_1-n_1} V_1(h_1)$$

ve

$$C_2(k - k_2) = \frac{(k - k_1 + n_2)!}{(k - k_1)!} \sum_{h_2=k-k_1+n_2}^N \binom{h_2}{k - k_1 + n_2} a_2^{h_2-k+k_1-n_2} V_2(h_2)$$

ifadeleri elde edilir.

Bu ifadelerden yararlanılarak,

$$U(k) = \sum_{k_1=0}^k \sum_{h_1=k_1+n_1}^N \sum_{h_2=k-k_1+n_2}^N \frac{(k_1 + n_1)!}{k_1!} \frac{(k - k_1 + n_2)!}{(k - k_1)!} \binom{h_1}{k_1 + n_1} \binom{h_2}{k - k_1 + n_2} \\ \times a_1^{h_1-k_1-n_1} a_2^{h_2-k+k_1-n_2} V_1(h_1) V_2(h_2), \quad N \rightarrow \infty$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.2.18 (Arikoğlu ve Özkol, 2006b)

$u(x) = v_1^{(m_1)}(x + a_1) v_2^{(m_2)}(x + a_2) \dots v_{n-1}^{(m_{n-1})}(x + a_{n-1}) v_n^{(m_n)}(x + a_n)$ ise,

$$U(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{h_1=k_1+m_1}^N \sum_{h_2=k_2-k_1+m_2}^N \dots \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}+m_{n-1}}^N \\ \times \sum_{h_n=k-k_{n-1}+m_n}^N \frac{(k_1 + m_1)!}{k_1!} \frac{(k_2 - k_1 + m_2)!}{(k_2 - k_1)!} \dots \frac{(k_{n-1} - k_{n-2} + m_{n-1})!}{(k_{n-1} - k_{n-2})!} \\ \times \frac{(k - k_{n-1} + m_n)!}{(k - k_{n-1})!} \binom{h_1}{k_1 + m_1} \binom{h_2}{k_2 - k_1 + m_2} \dots \binom{h_{n-1}}{k_{n-1} - k_{n-2} + m_{n-1}} \\ \times \binom{h_n}{k - k_{n-1} + m_n} a_1^{h_1-k_1-m_1} a_2^{h_2-k_2+k_1-m_2} \dots a_{n-1}^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}-m_{n-1}} \\ \times a_n^{h_n-k+k_{n-1}-m_n} V_1(h_1) V_2(h_2) \dots V_{n-1}(h_{n-1}) V_n(h_n), \quad N \rightarrow \infty$$

şeklindedir.

İspat

$x = x_0$ ’ da, $v_i^{(m_i)}(x + a_i)$ ’ nin diferansiyel dönüşümü $C_i(k)$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, olsun. O halde Teorem 2.2.10 kullanılarak $u(x)$ ’ in diferansiyel dönüşümü

$$U(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} C_1(k_1) C_2(k_2 - k_1) \dots C_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) C_n(k - k_{n-1})$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 2.2.15’den,

$$C_1(k_1) = \frac{(k_1 + m_1)!}{k_1!} \sum_{h_1=k_1+m_1}^{\infty} \binom{h_1}{k_1 + m_1} a_1^{h_1-k_1-m_1} V_1(h_1)$$

$$C_2(k_2 - k_1) = \frac{(k_2 - k_1 + m_2)!}{(k_2 - k_1)!} \sum_{h_2=k_2-k_1+m_2}^{\infty} \binom{h_2}{k_2 - k_1 + m_2} a_2^{h_2-k_2+k_1-m_2} V_2(h_2)$$

⋮

$$C_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) = \frac{(k_{n-1} - k_{n-2} + m_{n-1})!}{(k_{n-1} - k_{n-2})!} \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}+m_{n-1}}^{\infty} \binom{h_{n-1}}{k_{n-1} - k_{n-2} + m_{n-1}} \\ \times a_{n-1}^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}-m_{n-1}} V_{n-1}(h_{n-1})$$

$$C_n(k - k_{n-1}) = \frac{(k - k_{n-1} + m_n)!}{(k - k_{n-1})!} \sum_{h_n=k-k_{n-1}+m_n}^{\infty} \binom{h_n}{k - k_{n-1} + m_n} a_n^{h_n-k+k_{n-1}-m_n} V_n(h_n)$$

ifadeleri elde edilir.

Bu ifadelerden yararlanılarak,

$$U(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{h_1=k_1+m_1}^N \sum_{h_2=k_2-k_1+m_2}^N \dots \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}+m_{n-1}}^N \\ \times \sum_{h_n=k-k_{n-1}+m_n}^N \frac{(k_1 + m_1)!}{k_1!} \frac{(k_2 - k_1 + m_2)!}{(k_2 - k_1)!} \dots \frac{(k_{n-1} - k_{n-2} + m_{n-1})!}{(k_{n-1} - k_{n-2})!} \\ \times \frac{(k - k_{n-1} + m_n)!}{(k - k_{n-1})!} \binom{h_1}{k_1 + m_1} \binom{h_2}{k_2 - k_1 + m_2} \dots \binom{h_{n-1}}{k_{n-1} - k_{n-2} + m_{n-1}}$$

$$\begin{aligned} & \times \binom{h_n}{k - k_{n-1} + m_n} a_1^{h_1 - k_1 - m_1} a_2^{h_2 - k_2 + k_1 - m_2} \dots a_{n-1}^{h_{n-1} - k_{n-1} + k_{n-2} - m_{n-1}} \\ & \times a_n^{h_n - k + k_{n-1} - m_n} V_1(h_1) V_2(h_2) \dots V_{n-1}(h_{n-1}) V_n(h_n), \quad N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.2.19 (Arikoğlu ve Özkol, 2006b)

$$\begin{aligned} u(x) &= v_1^{(m_1)}(x + a_1) v_2^{(m_2)}(x + a_2) \dots v_{n-1}^{(m_{n-1})}(x + a_{n-1}) v_n^{(m_n)}(x + a_n) \\ & \times p_1(x) p_2(x) \dots p_{m-1}(x) p_m(x) \end{aligned}$$

ise, $u(x)$ 'in diferansiyel dönüşümü,

$$\begin{aligned} U(k) &= \sum_{k_{m+n-1}=0}^k \sum_{k_{m+n-2}=0}^{k_{m+n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{h_1=k_1+m_1}^N \sum_{h_2=k_2-k_1+m_2}^N \dots \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}+m_{n-1}}^N \\ & \times \sum_{h_n=k_n-k_{n-1}+m_n}^N \frac{(k_1 + m_1)!}{k_1!} \frac{(k_2 - k_1 + m_2)!}{(k_2 - k_1)!} \dots \frac{(k_{n-1} - k_{n-2} + m_{n-1})!}{(k_{n-1} - k_{n-2})!} \\ & \times \frac{(k_n - k_{n-1} + m_n)}{(k_n - k_{n-1})!} \binom{h_1}{k_1 + m_1} \binom{h_2}{k_2 - k_1 + m_2} \dots \binom{h_{n-1}}{k_{n-1} - k_{n-2} + m_{n-1}} \\ & \times \binom{h_n}{k_n - k_{n-1} + m_n} a_1^{h_1 - k_1 - m_1} a_2^{h_2 - k_2 + k_1 - m_2} \dots a_{n-1}^{h_{n-1} - k_{n-1} + k_{n-2} - m_{n-1}} \\ & \times a_n^{h_n - k_n + k_{n-1} - m_n} V_1(h_1) V_2(h_2) \dots V_{n-1}(h_{n-1}) V_n(h_n) P_1(k_{n+1} - k_n) \\ & \times P_2(k_{n+2} - k_{n+1}) \dots P_{m-1}(k_{m+n-1} - k_{m+n-2}) P_m(k - k_{m+n-1}), \quad N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat

$x = x_0$ da $v_i^{(m_i)}(x + a_i)$ 'nin diferansiyel dönüşümü $C_i(k), i = 1, 2, 3, \dots, n$, $p_j(x)$ 'in diferansiyel dönüşümü $P_j(k), j = 1, 2, 3, \dots, m$, olsun.

Teorem 2.2.10'dan, $u(x)$ 'in diferansiyel dönüşümü

$$U(k) = \sum_{k_{m+n-1}=0}^k \sum_{k_{m+n-2}=0}^{k_{m+n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} C_1(k_1) C_2(k_2 - k_1) \dots C_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2})$$

$$\begin{aligned} & \times C_n(k_n - k_{n-1})P_1(k_{n+1} - k_n)P_2(k_{n+2} - k_{n+1}) \dots \\ & \times P_{m-1}(k_{m+n-1} - k_{m+n-2})P_m(k - k_{m+n-1}) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.15'den,

$$C_1(k_1) = \frac{(k_1 + m_1)!}{k_1!} \sum_{h_1=k_1+m_1}^N \binom{h_1}{k_1 + m_1} a_1^{h_1-k_1-m_1} V_1(h_1)$$

$$C_2(k_2 - k_1) = \frac{(k_2 - k_1 + m_2)!}{(k_2 - k_1)!} \sum_{h_2=k_2-k_1+m_2}^N \binom{h_2}{k_2 - k_1 + m_2} a_2^{h_2-k_2+k_1-m_2} V_2(h_2)$$

⋮

$$\begin{aligned} C_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) &= \frac{(k_{n-1} - k_{n-2} + m_{n-1})!}{(k_{n-1} - k_{n-2})!} \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}+m_{n-1}}^N \binom{h_{n-1}}{k_{n-1} - k_{n-2} + m_{n-1}} \\ &\times a_{n-1}^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}-m_{n-1}} V_{n-1}(h_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n(k_n - k_{n-1}) &= \frac{(k_n - k_{n-1} + m_n)!}{(k_n - k_{n-1})!} \sum_{h_n=k_n-k_{n-1}+m_n}^N \binom{h_n}{k_n - k_{n-1} + m_n} \\ &\times a_n^{h_n-k_n+k_{n-1}-m_n} V_n(h_n) \end{aligned}$$

ifadeleri bulunur.

Elde edilen ifadelerden yararlanılarak,

$$\begin{aligned} U(k) &= \sum_{k_{m+n-1}=0}^k \sum_{k_{m+n-2}=0}^{k_{m+n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{h_1=k_1+m_1}^N \sum_{h_2=k_2-k_1+m_2}^N \dots \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-1}+m_{n-1}}^N \\ &\times \sum_{h_n=k_n-k_{n-1}+m_n}^N \frac{(k_1 + m_1)!}{k_1!} \frac{(k_2 - k_1 + m_2)!}{(k_2 - k_1)!} \dots \frac{(k_{n-1} - k_{n-2} + m_{n-1})!}{(k_{n-1} - k_{n-2})!} \\ &\times \frac{(k_n - k_{n-1} + m_n)!}{(k_n - k_{n-1})!} \binom{h_1}{k_1 + m_1} \binom{h_2}{k_2 - k_1 + m_2} \dots \binom{h_{n-1}}{k_{n-1} - k_{n-2} + m_{n-1}} \\ &\times \binom{h_n}{k_n - k_{n-1} + m_n} a_1^{h_1-k_1-m_1} a_2^{h_2-k_2+k_1-m_2} \dots a_{n-1}^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}-m_{n-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times a_n^{h_n-k_n+k_{n-1}-m_n} V_1(h_1) V_2(h_2) \dots V_{n-1}(h_{n-1}) V_n(h_n) P_1(k_{n+1}-k_n) \\ & \times P_2(k_{n+2}-k_{n+1}) \dots P_{m-1}(k_{m+n-1}-k_{m+n-2}) P_m(k-k_{m+n-1}), \quad N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.2.20 (Karakoç ve Bereketoğlu, 2009)

$u(x) = f(x/a)$ tek değişkenli fonksiyonun diferansiyel dönüşümü, $a \geq 1$,

$$U(k) = \sum_{h_1=k}^N (-1)^{h_1-k} \frac{(a-1)^{h_1-k}}{a^{h_1}} x_0^{h_1-k} \binom{h_1}{k} F(h_1), \quad N \rightarrow \infty$$

şeklindedir.

İspat

(2.6) denklemindeki ters diferansiyel dönüşüm tanımından,

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} F(k) \left(\frac{x}{a} - x_0 \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} F(k) \frac{1}{a^k} (x - ax_0)^k \\ &= F(0) + \frac{F(1)}{a} (x - ax_0) + \frac{F(2)}{a^2} (x - ax_0)^2 + \frac{F(3)}{a^3} (x - ax_0)^3 + \dots \\ &= \left[F(0) - \frac{a-1}{a} x_0 F(1) + \frac{(a-1)^2}{a^2} x_0^2 F(2) - \frac{(a-1)^3}{a^3} x_0^3 F(3) + \dots \right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{a} F(1) - \frac{2(a-1)}{a^2} x_0 F(2) + \frac{3(a-1)^2}{a^3} x_0^2 F(3) + \dots \right] (x - x_0) \\ &\quad + \left[\frac{1}{a^2} F(2) - \frac{3(a-1)}{a^3} x_0 F(3) + \dots \right] (x - x_0)^2 + \left[\frac{1}{a^3} F(3) + \dots \right] (x - x_0)^3 + \dots \\ &= \sum_{h_1=0}^{\infty} (-1)^{h_1} \frac{(a-1)^{h_1}}{a^{h_1}} x_0^{h_1} F(h_1) \\ &\quad + \sum_{h_1=1}^{\infty} (-1)^{h_1-1} \frac{(a-1)^{h_1-1}}{a^{h_1}} x_0^{h_1-1} \frac{h_1}{1! (h_1-1)!} F(h_1) (x - x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{h_1=2}^{\infty} (-1)^{h_1-2} \frac{(a-1)^{h_1-2}}{a^{h_1}} x_0^{h_1-2} \frac{h_1!}{2! (h_1-2)!} F(h_1) (x-x_0)^2 \\
& + \sum_{h_1=3}^{\infty} (-1)^{h_1-3} \frac{(a-1)^{h_1-3}}{a^{h_1}} x_0^{h_1-3} \frac{h_1!}{3! (h_1-3)!} F(h_1) (x-x_0)^3 + \dots \\
& + \sum_{h_1=k}^{\infty} (-1)^{h_1-k} \frac{(a-1)^{h_1-k}}{a^{h_1}} x_0^{h_1-k} \frac{h_1!}{k! (h_1-k)!} F(h_1) (x-x_0)^k + \dots \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h_1=k}^{\infty} (-1)^{h_1-k} \frac{(a-1)^{h_1-k}}{a^{h_1}} x_0^{h_1-k} \binom{h_1}{k} F(h_1) (x-x_0)^k
\end{aligned}$$

elde edilir.

(2.6) denklemini (2.3) denkleminde göz önüne alırsak,

$$U(k) = \sum_{h_1=k}^N (-1)^{h_1-k} \frac{(a-1)^{h_1-k}}{a^{h_1}} x_0^{h_1-k} \binom{h_1}{k} F(h_1), \quad N \rightarrow \infty$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.2.21 (Karakoç ve Bereketoğlu, 2009)

$u(x) = f_1(x/a_1)f_2(x/a_2)$ ' nin diferansiyel dönüşümü, $a_1 \geq 1$ ve $a_2 \geq 1$,

$$\begin{aligned}
U(k) &= \sum_{k_1=0}^k \sum_{h_1=k_1}^N \sum_{h_2=k-k_1}^N (-1)^{h_1+h_2-k} \frac{(a_1-1)^{h_1-k_1}}{a_1^{h_1}} \frac{(a_2-1)^{h_2-k+k_1}}{a_2^{h_2}} x_0^{h_1+h_2-k} \\
&\quad \times \binom{h_1}{k_1} \binom{h_2}{k-k_1} F_1(h_1) F_2(h_2), \quad N \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat

$x = x_0$ ' da $f_1(x/a_1)$ ' in ve $f_2(x/a_2)$ 'nin diferansiyel dönüşümleri sırasıyla $G_1(k)$ ve $G_2(k)$ olsun. Teorem 2.2.5'den, $u(x)$ 'in diferansiyel dönüşümü

$$U(k) = \sum_{k_1=0}^k G_1(k_1) G_2(k-k_1)$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.20'den,

$$G_1(k_1) = \sum_{h_1=k_1}^N (-1)^{h_1-k_1} \frac{(a_1-1)^{h_1-k_1}}{a_1^{h_1}} x_0^{h_1-k_1} \binom{h_1}{k_1} F_1(h_1), \quad N \rightarrow \infty$$

ve

$$G_2(k-k_1) = \sum_{h_2=k-k_1}^N (-1)^{h_2-k+k_1} \frac{(a_2-1)^{h_2-k+k_1}}{a_2^{h_2}} x_0^{h_2-k+k_1} \binom{h_2}{k-k_1} F_2(h_2), \quad N \rightarrow \infty$$

ifadeleri elde edilir.

Elde edilen bu ifadeler göz önüne alınırsa,

$$U(k) = \sum_{k_1=0}^k \sum_{h_1=k_1}^N \sum_{h_2=k-k_1}^N (-1)^{h_1+h_2-k} \frac{(a_1-1)^{h_1-k_1}}{a_1^{h_1}} \frac{(a_2-1)^{h_2-k+k_1}}{a_2^{h_2}} x_0^{h_1+h_2-k} \\ \times \binom{h_1}{k_1} \binom{h_2}{k-k_1} F_1(h_1) F_2(h_2), \quad N \rightarrow \infty$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.2.22 (Karakoç ve Bereketoğlu, 2009)

$u(x) = f_1(x/a_1)f_2(x/a_2) \dots f_n(x/a_n)$ 'in diferansiyel dönüşümü, $i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i \geq 1$,

$$U(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{h_1=k_1}^N \sum_{h_2=k_2-k_1}^N \dots \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}}^N \\ \times \sum_{h_n=k-k_{n-1}}^N (-1)^{h_1+h_2+\dots+h_n-k} \frac{(a_1-1)^{h_1-k_1}}{a_1^{h_1}} \frac{(a_2-1)^{h_2-k_2+k_1}}{a_2^{h_2}} \dots \\ \times \frac{(a_{n-1}-1)^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}}}{a_{n-1}^{h_{n-1}}} \dots \frac{(a_n-1)^{h_n-k+k_{n-1}}}{a_n^{h_n}} x_0^{h_1+h_2+\dots+h_n-k} \binom{h_1}{k_1} \\ \times \binom{h_2}{k_2-k_1} \dots \binom{h_{n-1}}{k_{n-1}-k_{n-2}} \binom{h_n}{k-k_{n-1}} F_1(h_1) F_2(h_2) \dots F_{n-1}(h_{n-1}) F_n(h_n), \\ N \rightarrow \infty$$

şeklindedir.

İspat

$x = x_0$ 'da $f_i(x/a_i)$ 'nin diferansiyel dönüşümü $G_i(k)$, $i = 1, 2, \dots, n$, olsun. Teorem

2.2.10'dan, $u(x)$ 'in diferansiyel dönüşümü

$$U(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1) G_2(k_2 - k_1) \dots G_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) G_n(k - k_{n-1})$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 2.2.20'den, $N \rightarrow \infty$ için,

$$G_1(k_1) = \sum_{h_1=k_1}^N (-1)^{h_1-k_1} \frac{(a_1-1)^{h_1-k_1}}{a_1^{h_1}} x_0^{h_1-k_1} \binom{h_1}{k_1} F_1(h_1),$$

$$G_2(k_2 - k_1) = \sum_{h_2=k_2-k_1}^N (-1)^{h_2-k_2+k_1} \frac{(a_2-1)^{h_2-k_2+k_1}}{a_2^{h_2}} x_0^{h_2-k_2+k_1} \binom{h_2}{k_2-k_1} F_2(h_2), \dots,$$

$$G_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) = \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}}^N (-1)^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}} x_0^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}} \\ \times \frac{(a_{n-1}-1)^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}}}{a_{n-1}^{h_{n-1}}} \binom{h_{n-1}}{k_{n-1}-k_{n-2}} F_{n-1}(h_{n-1})$$

$$G_n(k - k_{n-1}) = \sum_{h_n=k-k_{n-1}}^N (-1)^{h_n-k+k_{n-1}} \frac{(a_n-1)^{h_n-k+k_{n-1}}}{a_n^{h_n}} \\ \times x_0^{h_n-k+k_{n-1}} \binom{h_n}{k-k_{n-1}} F_n(h_n)$$

ifadeleri elde edilir.

Elde edilen ifadelerden yararlanılarak,

$$U(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{h_1=k_1}^N \sum_{h_2=k_2-k_1}^N \dots \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}}^N$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{h_n=k-k_{n-1}}^N (-1)^{h_1+h_2+\dots+h_n-k} \frac{(a_1-1)^{h_1-k_1}}{a_1^{h_1}} \frac{(a_2-1)^{h_2-k_2+k_1}}{a_2^{h_2}} \dots \\
& \times \frac{(a_{n-1}-1)^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}}}{a_{n-1}^{h_{n-1}}} \dots \frac{(a_n-1)^{h_n-k+k_{n-1}}}{a_n^{h_n}} x_0^{h_1+h_2+\dots+h_n-k} \binom{h_1}{k_1} \\
& \times \binom{h_2}{k_2-k_1} \dots \binom{h_{n-1}}{k_{n-1}-k_{n-2}} \binom{h_n}{k-k_{n-1}} F_1(h_1) F_2(h_2) \dots F_{n-1}(h_{n-1}) F_n(h_n), \\
& N \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.2.23 (Abazari, 2009)

$u(t) = v(qt)$ ise, o halde $U(k) = q^k V(k)$ şeklindedir.

İspat

$$\frac{d^k}{dt^k} u(t) = \frac{d^k}{dt^k} (v(qt)) = q^k \frac{d^k}{d\tilde{t}^k} v(\tilde{t})$$

$\tilde{t} = qt$ olarak alınsın. Böylece,

$$\left[\frac{d^k}{dt^k} u(t) \right]_{t=t_0} = q^k \left[\frac{d^k}{d\tilde{t}^k} v(\tilde{t}) \right]_{t=t_0} = q^k k! V(k)$$

elde edilir. Bu ifade göz önüne alınarak, Tanım 2.2.4'den,

$$U(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} u(t) \right]_{t=t_0} = q^k V(k)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.2.24 (Abazari, 2009)

Eğer, $u(t) = v_1(q_1 t) v_2(q_2 t)$ ise, o halde

$$U(k) = \sum_{l=0}^k q_1^l q_2^{k-l} V_1(l) V_2(k-l)$$

şeklindedir.

İspat

Leibniz formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dt^k} u(t) &= \frac{d^k}{dt^k} [v_1(q_1 t) v_2(q_2 t)] \\ &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{d^l}{dt^l} [v_1(q_1 t)] \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} [v_2(q_2 t)] \\ &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} q_1^l \frac{d^l}{d\tilde{t}^l} v_1(\tilde{t}) q_2^{k-l} \frac{d^{k-l}}{d\hat{t}^{k-l}} v_2(\hat{t})\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Burada, $\tilde{t} = q_1 t$ ve $\hat{t} = q_2 t$ dir.

$$\begin{aligned}\left[\frac{d^k}{dt^k} u(t) \right]_{t=t_0} &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} q_1^l q_2^{k-l} l! (k-l)! V_1(l) V_2(k-l) \\ &= \sum_{l=0}^k k! q_1^l q_2^{k-l} V_1(l) V_2(k-l)\end{aligned}$$

Tanım 2.2.4'den,

$$U(k) = \sum_{l=0}^k q_1^l q_2^{k-l} V_1(l) V_2(k-l)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.2.25 (Abazari, 2009)

$u(t) = \frac{d^n}{dt^n} v_1(q_1 t) \frac{d^m}{dt^m} v_2(q_2 t)$ ise, o halde

$$U(k) = \sum_{l=0}^k q_1^{l+n} q_2^{k-l+m} \frac{(l+n)! (k-l+m)!}{l! (k-l)!} V_1(l+n) V_2(k-l+m)$$

şeklindedir.

İspat

$$\begin{aligned}
\frac{d^k}{dt^k} u(t) &= \frac{d^k}{dt^k} \left[\frac{d^n}{dt^n} v_1(q_1 t) \frac{d^m}{dt^m} v_2(q_2 t) \right] \\
&= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{d^l}{dt^l} \left[\frac{d^n}{dt^n} v_1(q_1 t) \right] \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} \left[\frac{d^m}{dt^m} v_2(q_2 t) \right] \\
&= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} q_1^{l+n} \frac{d^{l+n}}{d\tilde{t}^{l+n}} v_1(\tilde{t}) q_2^{k-l+m} \frac{d^{k-l+m}}{d\hat{t}^{k-l+m}} v_2(\hat{t})
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada, $\tilde{t} = q_1 t$, $\hat{t} = q_2 t$ dir.

Böylece,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d^k}{dt^k} u(t) \right]_{t=t_0} &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} [q_1^{l+n} (l+n)! V_1(l+n)] [q_2^{k-l+m} (k-l+m)! V_2(k-l+m)] \\
&= \sum_{l=0}^k \frac{k! (l+n)! (k-l+m)!}{l! (k-l)!} q_1^{l+n} q_2^{k-l+m} V_1(l+n) V_2(k-l+m)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.2.4'den,

$$U(k) = \sum_{l=0}^k q_1^{l+n} q_2^{k-l+m} \frac{(l+n)! (k-l+m)!}{l! (k-l)!} V_1(l+n) V_2(k-l+m)$$

şeklinde bulunur.

3. SAYISAL UYGULAMA

Bu bölümde, literatürde daha önce varyasyonel iterasyon yöntemi, Taylor yöntemi, collocation yöntemi ve Adomian ayrışım yöntemi ile çözülmüş örnekler diferansiyel dönüşüm yöntemiyle çözülerek sayısal sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Örnek 3.1 (Evans ve Raslan, 2005)

$$u'(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}e^{t/2}u\left(\frac{t}{2}\right), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad u(0) = 1 \quad (3.1)$$

birinci mertebeden lineer gecikmeli diferansiyel denklemine diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulansın.

Çözüm

(3.1) denklemine diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulansın. $u(t)$ 'nin diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k)$ olsun. Teorem 2.2.4'den $u'(t)$ 'ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $(k+1)U(k+1)$ olur. Teorem 2.2.10 ve Teorem 2.2.23'den yararlanarak, (3.1) denkleminin diferansiyel dönüşümü

$$(k+1)U(k+1) = \frac{1}{2}U(k) + \frac{1}{2} \left[\sum_{l=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-l} \frac{(1/2)^l}{l!} U(k-l) \right] \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir.

Başlangıç koşulundan, $U(0) = 1$ elde edilir.

$N = 5$ alınırsa, $k = 0, 1, \dots, 5$,

$k = 0$ için,

$$U(1) = \frac{1}{2}U(0) + \frac{1}{2}U(0) = U(0)$$

$$U(1) = 1$$

$k = 1$ için,

$$2U(2) = \frac{1}{2}U(1) + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{1-l} \frac{(1/2)^l}{l!} U(1-l)$$

$$U(2) = \frac{1}{2}$$

$k = 2$ için,

$$3U(3) = \frac{1}{2}U(2) + \frac{1}{2} \left[\sum_{l=0}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2-l} \frac{(1/2)^l}{l!} U(2-l) \right]$$

$$U(3) = \frac{1}{6}$$

$k = 3$ için,

$$4U(4) = \frac{1}{2}U(3) + \frac{1}{2} \left[\sum_{l=0}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-l} \frac{(1/2)^l}{l!} U(3-l) \right]$$

$$U(4) = \frac{1}{24}$$

$k = 4$ için,

$$5U(5) = \frac{1}{2}U(4) + \frac{1}{2} \left[\sum_{l=0}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-l} \frac{(1/2)^l}{l!} U(4-l) \right]$$

$$U(5) = \frac{1}{120}$$

$k = 5$ için,

$$6U(6) = \frac{1}{2}U(5) + \frac{1}{2} \left[\sum_{l=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-l} \frac{(1/2)^l}{l!} U(5-l) \right]$$

$$U(6) = \frac{1}{720}$$

ifadeleri elde edilir.

O halde, her k için, ifade genellenirse,

$$U(k) = \frac{1}{k!}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 2.2.5'den aranan çözüm,

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k) t^k \tag{3.3}$$

şeklindedir. Elde edilen $U(k)$ değerleri (3.3)'de yerine yazılırsa,

$$u(t) = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \frac{1}{5!}t^5 + \frac{1}{6!}t^6 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}t^k = e^t$$

bulunur ve bu gerçek çözüm ile aynıdır.

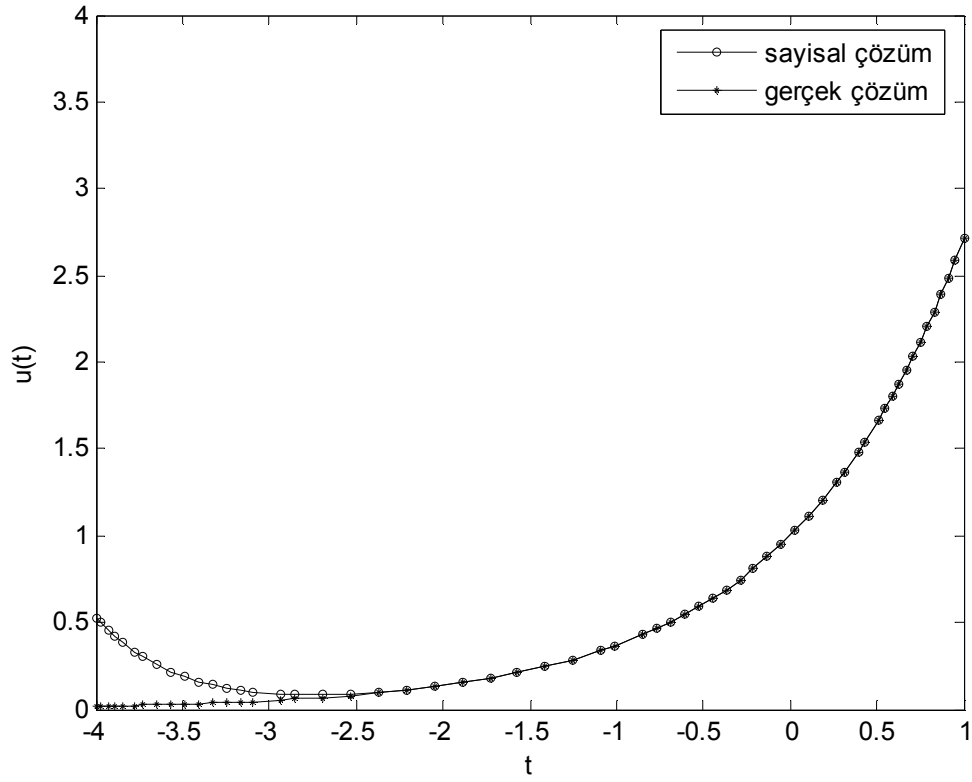
Evans ve Raslan (2004), (3.1) denkleminde Adomian ayrışım yöntemini, Saadatmandi ve Dehghan (2009), varyasyonel iterasyon yöntemini ve Sezer ve Daşcıoğlu (2007), Taylor yöntemini uygulamışlardır. Diğer yandan, (3.1) gecikmeli diferansiyel denkleminde diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulandığında, Çizelge 3.2’de görüldüğü gibi, diğer sayısal yöntemlere göre gerçek çözüme daha yakın sonuçlar elde edilmiştir.

Çizelge 3.1 Örnek 3.1’ in çözümleri

t	Diferansiyel dönüşüm yöntemi $N = 16$	Gerçek çözüm	Mutlak hata
0.2	1.221403	1.221403	0.00
0.4	1.491825	1.491825	0.00
0.6	1.822119	1.822119	0.00
0.8	2.225541	2.225541	0.00
1.0	2.718282	2.718282	$9.77E - 15$

Çizelge 3.2 Örnek 3.1’ in çözümlerinin mutlak hataların karşılaştırılması

t	ADM 13 terim	Taylor yöntemi $N = 16$	VIM $n = 6$	DTM $N = 16$
0.2	0.00	2.22×10^{-16}	2.25×10^{-17}	0.00
0.4	2.22×10^{-16}	2.22×10^{-16}	3.43×10^{-15}	0.00
0.6	2.22×10^{-16}	2.22×10^{-16}	6.99×10^{-14}	0.00
0.8	1.33×10^{-15}	0.00	6.28×10^{-13}	0.00
1.0	4.88×10^{-15}	2.22×10^{-15}	3.55×10^{-12}	9.77×10^{-15}



Şekil 3.1 Örnek 3.1'in diferansiyel dönüşüm ve gerçek çözümlerinin grafikleri ($N = 8$)

Örnek 3.2 (Sezer ve Daşcıoğlu, 2007)

$$u'(t) = -u(t) + \frac{q}{2}u(qt) - \frac{q}{2}e^{-qt}, \quad u(0) = 1 \quad 0 < q < 1 \quad (3.4)$$

birinci mertebeden pantograph denklemin diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulansın.

Çözüm

$u(t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k)$ olsun. Teorem 2.2.3 ve Teorem 2.2.23 göz önüne alınırsa, (3.4) pantograph denkleminin diferansiyel dönüşümü

$$(k+1)U(k+1) = -U(k) + \frac{q}{2}q^k U(k) - \frac{q(-q)^k}{2k!}$$

şeklinde olur.

Başlangıç koşulundan, $U(0) = 1$ olarak elde edilir.

$N = 5$ alınırsa, $k = 0, 1, \dots, 5$,

$k = 0$ için,

$$U(1) = -U(0) + \frac{q}{2}U(0) - \frac{q}{2}$$

$$U(1) = -1$$

$k = 1$ için,

$$2U(2) = -U(1) + \frac{q}{2}qU(1) - \frac{q}{2}(-q)$$

$$U(2) = \frac{1}{2}$$

$k = 2$ için,

$$3U(3) = -U(2) + \frac{q}{2}q^2U(2) - \frac{q}{2}\frac{(-q)^2}{2!}$$

$$U(3) = -\frac{1}{6}$$

$k = 3$ için,

$$4U(4) = -U(3) + \frac{q}{2}q^3U(3) - \frac{q}{2}\frac{(-q)^3}{3!}$$

$$U(4) = \frac{1}{24}$$

$k = 4$ için,

$$5U(5) = -U(4) + \frac{q}{2}q^4U(4) - \frac{q}{2}\frac{(-q)^4}{4!}$$

$$U(5) = -\frac{1}{120}$$

$k = 5$ için,

$$6U(6) = -U(5) + \frac{q}{2}q^5U(5) - \frac{q}{2}\frac{(-q)^5}{5!}$$

$$U(6) = \frac{1}{720}$$

ifadeleri elde edilir.

$U(k)$ için elde edilen ifadeler, her k için genellenirse,

$$U(k) = (-1)^k \frac{1}{k!}$$

şeklinde olur.

Tanım 2.2.5’de verilen ters diferansiyel dönüşümü uygulanırsa,

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)t^k$$

$$u(t) = 1 - t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{720}t^6 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}t^k = e^{-t}$$

elde edilir. Elde elden bu çözüm gerçek çözüm ile çakışır.

Sezer ve Daşcıoğlu (2007), (3.2) pantograph denkleminde Taylor yöntemini, Ishiwata ve Muroya (2007) ise collocation yöntemini uygulamışlardır. Sezer ve Daşcıoğlu çalışmasında, elde ettikleri sayısal sonuçları collocation yöntemiyle karşılaştırmış ve Taylor yönteminin daha iyi sonuçlar verdiğini göstermişlerdir. (3.2) denkleminde diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulandığında, Taylor yönteminden daha etkin olduğu görülmektedir (Çizelge 3.4).

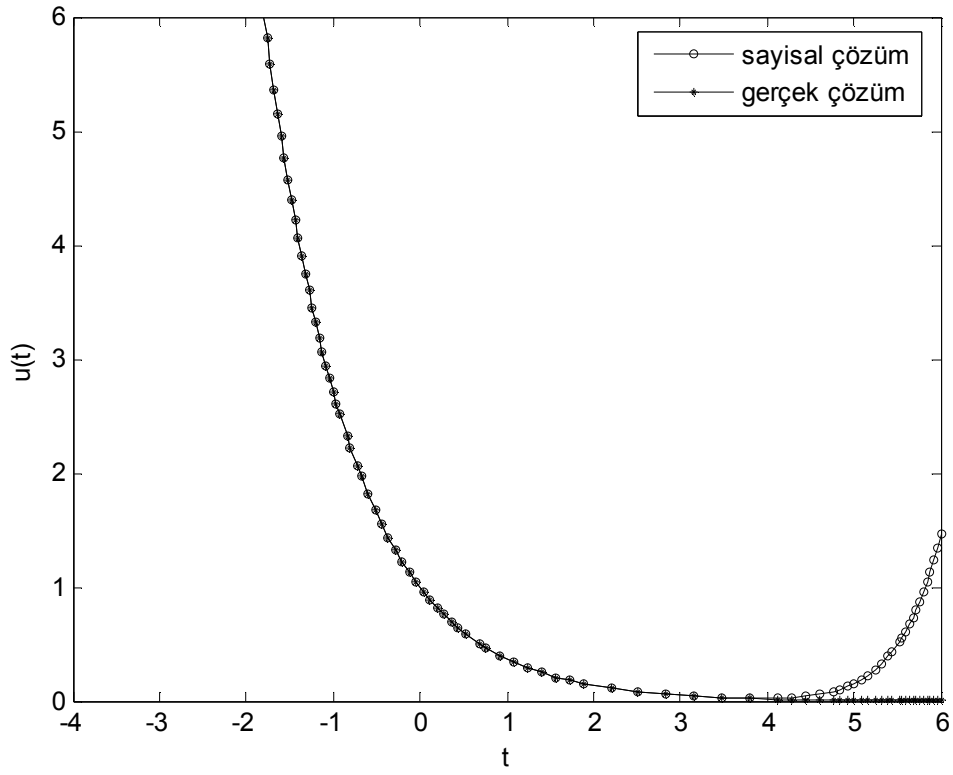
(3.2) denkleminde $N = 12$ alınarak diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulandığında, gerçek çözüme çok yakın sonuçlar elde edildiği görülürken, Taylor yönteminde $N = 16$ alınmasına rağmen hata diferansiyel dönüşüm yönteminde elde edilenden daha büyüktür.

Çizelge 3.3 Örnek 3.2’ in çözümleri

t	Diferansiyel dönüşüm yöntemi $N = 12$	Gerçek çözüm	Mutlak hata
2^{-1}	0.606531	0.606531	$2.00E - 014$
2^{-2}	0.778801	0.778801	0.00
2^{-3}	0.882497	0.882497	0.00
2^{-4}	0.939413	0.939413	0.00
2^{-5}	0.969233	0.969233	0.00

Çizelge 3.4 Örnek 3.2' in çözümlerinin mutlak hatalarının karşılaştırılması

t	Collocation yöntemi $m = 2$	Taylor yöntemi $N = 16$	DTM $N = 12$
2^{-1}	2.71×10^{-5}	7.77×10^{-16}	2.00×10^{-14}
2^{-2}	1.08×10^{-6}	1.11×10^{-16}	0.00
2^{-3}	3.81×10^{-8}	2.22×10^{-16}	0.00
2^{-4}	1.26×10^{-9}	0.00	0.00
2^{-5}	4.09×10^{-11}	1.11×10^{-16}	0.00



Şekil 3.2 Örnek 3.2'nin diferansiyel dönüşüm ve gerçek çözüm grafikleri ($N = 12$)

Örnek 3.3 (Saadatmandi ve Dehghan, 2009)

$$\begin{cases} u''(t) = \frac{3}{4}u(t) + u\left(\frac{t}{2}\right) - t^2 + 2, & 0 \leq t \leq 1 \\ u(0) = 0 & u'(0) = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

ikinci mertebeden pantograph denkleminin diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulansın.

Çözüm

$u(t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k)$ olsun. Teorem 2.2.4'den $u''(t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü $(k+1)(k+2)U(k+2)$, Teorem 2.2.23'den $u\left(\frac{t}{2}\right)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $\left(\frac{1}{2}\right)^k U(k)$ şeklinde elde edilir. Bu ifadelerden ve Teorem 2.2.6'dan yararlanarak (3.5) pantograph denkleminin diferansiyel dönüşümü,

$$\frac{(k+2)!}{k!}U(k+2) = \frac{3}{4}U(k) + \left(\frac{1}{2}\right)^k U(k) - \delta(k-2) + 2\delta(k)$$

şeklinde bulunur.

Başlangıç koşullarından,

$$U(0) = 0 \quad \text{ve} \quad (k+1)U(k+1) = 0 \Rightarrow U(1) = 0$$

olarak elde edilir.

$N = 5$ alınırsa, $k = 0, 1, \dots, 5$,

$k = 0$ için,

$$2U(2) = \frac{3}{4}U(0) + \left(\frac{1}{2}\right)^0 U(0) - 0 + 2$$

$$U(2) = 1$$

$k = 1$ için,

$$6U(3) = \frac{3}{4}U(1) + \left(\frac{1}{2}\right)^1 U(1)$$

$$U(3) = 0$$

$k = 2$ için,

$$12U(4) = \frac{3}{4}U(2) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 U(2) - 1 + 0$$

$$U(4) = 0$$

$k = 3$ için,

$$20U(5) = \frac{3}{4}U(3) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 U(3) + 0 + 0$$

$$U(5) = 0$$

$k = 4$ için,

$$30U(6) = \frac{3}{4}U(4) + \left(\frac{1}{2}\right)^4 U(4)$$

$$U(6) = 0$$

$k = 5$ için,

$$35U(7) = \frac{3}{4}U(5) + \left(\frac{1}{2}\right)^5 U(5)$$

$$U(7) = 0$$

ifadeleri elde edilir.

Elde edilen bu ifadeler (2.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)t^k$$

$$u(t) = t^2$$

olarak bulunur.

(3.3) ikinci mertebeden pantograph denkleminde diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulandığında, Saadatmandi ve Dehghan (2009)'ın varyasyonel iterasyon yöntemiyle elde ettiği sonuçla çakıştığı görülmektedir. Diğer yandan, elde edilen bu çözüm gerçek çözüm ile aynıdır.

Örnek 3.4 (Yu, 2008)

$$\begin{cases} u'(t) = -\frac{5}{6}u(t) + 4u\left(\frac{t}{2}\right) + 9u\left(\frac{t}{3}\right) + t^2 - 1 \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

multi- pantograph denkleminde diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulansın.

Çözüm

$u(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü $U(k)$ olsun. Teorem 2.2.3'den $u'(t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü $(k+1)U(k+1)$, Teorem 2.2.23'den $u\left(\frac{t}{2}\right)$ ve $u\left(\frac{t}{3}\right)$ fonksiyonlarının diferansiyel dönüşümleri sırasıyla $\left(\frac{1}{2}\right)^k U(k)$ ve $\left(\frac{1}{3}\right)^k U(k)$ şeklinde elde edilir. Elde edilen bu ifadelerden ve Teorem 2.2.6'dan yararlanarak (3.6) denkleminin diferansiyel dönüşümü

$$(k+1)U(k+1) = -\frac{5}{6}U(k) + 4\left(\frac{1}{2}\right)^k U(k) + 9\left(\frac{1}{3}\right)^k U(k) + \delta(k-2) - \delta(k)$$

şeklinde yazılabilir.

Başlangıç koşulundan, $U(0) = 1$ şeklinde elde edilir.

$N = 2$ alınırsa, $k = 0, 1, 2$

$k = 0$ için,

$$U(1) = -\frac{5}{6}U(0) + 4U(0) + 9U(0) - 1$$

$$U(1) = \frac{67}{6}$$

$k = 1$ için,

$$2U(2) = -\frac{5}{6}U(1) + 4\left(\frac{1}{2}\right)U(1) + 9\left(\frac{1}{3}\right)U(1)$$

$$U(2) = \frac{1675}{72}$$

$k = 2$ için,

$$3U(3) = -\frac{5}{6}U(2) + 4\left(\frac{1}{4}\right)U(2) + 9\left(\frac{1}{9}\right)U(2) + 1$$

$$U(3) = \frac{12157}{1296}$$

ifadeleri elde edilir.

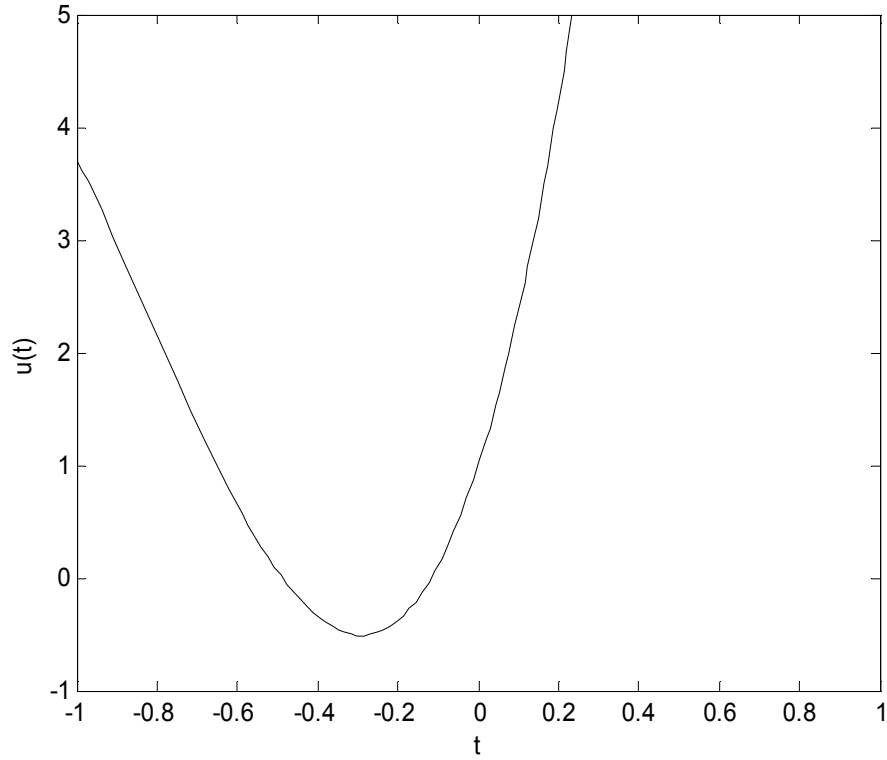
Bu ifadelerden yararlanarak ters diferansiyel dönüşümü uygulanırsa,

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)t^k$$

$$\begin{aligned}
&= U(0) + U(1)t + U(2)t^2 + U(3)t^3 + \dots \\
&= 1 + \frac{67}{6}t + \frac{1675}{72}t^2 + \frac{12157}{1296}t^3 + \dots
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Yu (2008), (3.6) multi- pantograph denkleminde varyasyonel iterasyon yöntemini uygulamıştır. Diferansiyel dönüşüm yöntemi ve varyasyonel iterasyon yöntemiyle elde edilen çözüm aynıdır ve gerçek çözümle çakışır.



Şekil 3.3 Örnek 3.4'ün çözüm grafiği

Örnek 3.5 (Ishiwata ve Muroya, 2007)

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + \frac{1}{2}y\left(\frac{t}{2}\right) + \cos t + \sin t - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right), & 0 \leq t \leq T \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

gecikmeli diferansiyel denkleminde diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulansın.

Çözüm

$y(t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $Y(k)$ olsun. $y'(t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu Teorem 2.2.3'den $(k+1)Y(k+1)$ şeklindedir. Teorem 2.2.23, Teorem 2.2.8'den ve Teorem 2.2.9'dan yararlanarak (3.7) denkleminin diferansiyel dönüşümü,

$$(k+1)Y(k+1) = -Y(k) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^k Y(k) + \frac{1}{k!} \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + \frac{1}{k!} \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) - \frac{1}{2} \frac{(1/2)^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

şeklinde yazılır.

Başlangıç koşulundan,

$$Y(0) = 0$$

elde edilir.

$N = 6$ alınırsa, $k = 0, 1, \dots, 6$,

$k = 0$ için,

$$Y(1) = -Y(0) + \frac{1}{2}Y(0) + 1$$

$$Y(1) = 1$$

$k = 1$ için,

$$2Y(2) = -Y(1) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right) Y(1) + 1 - \frac{1}{4}$$

$$Y(2) = 0$$

$k = 2$ için,

$$3Y(3) = -Y(2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right) Y(2) - \frac{1}{2}$$

$$Y(3) = -\frac{1}{6}$$

$k = 3$ için,

$$4Y(4) = -Y(3) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right) Y(3) - \frac{1}{6} + \frac{1}{96}$$

$$Y(4) = 0$$

$k = 4$ için,

$$5Y(5) = -Y(4) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{16} \right) Y(4) + \frac{1}{24}$$

$$Y(5) = \frac{1}{120}$$

$k = 5$ için,

$$6Y(6) = -Y(5) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{32} \right) Y(5) + \frac{1}{120} - \frac{1}{7680}$$

$$Y(6) = 0$$

$k = 6$ için,

$$7Y(7) = -Y(6) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{64} \right) Y(6) - \frac{1}{720}$$

$$Y(7) = -\frac{1}{5040}$$

ifadeleri elde edilir.

Bu şekilde devam edilirse, $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$Y(2k + 1) = \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!}$$

elde edilir.

Tanım 2.2.5'den aranan çözüm,

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} U(k)t^k \\ &= t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!} t^{2k+1}, = \sin t \end{aligned}$$

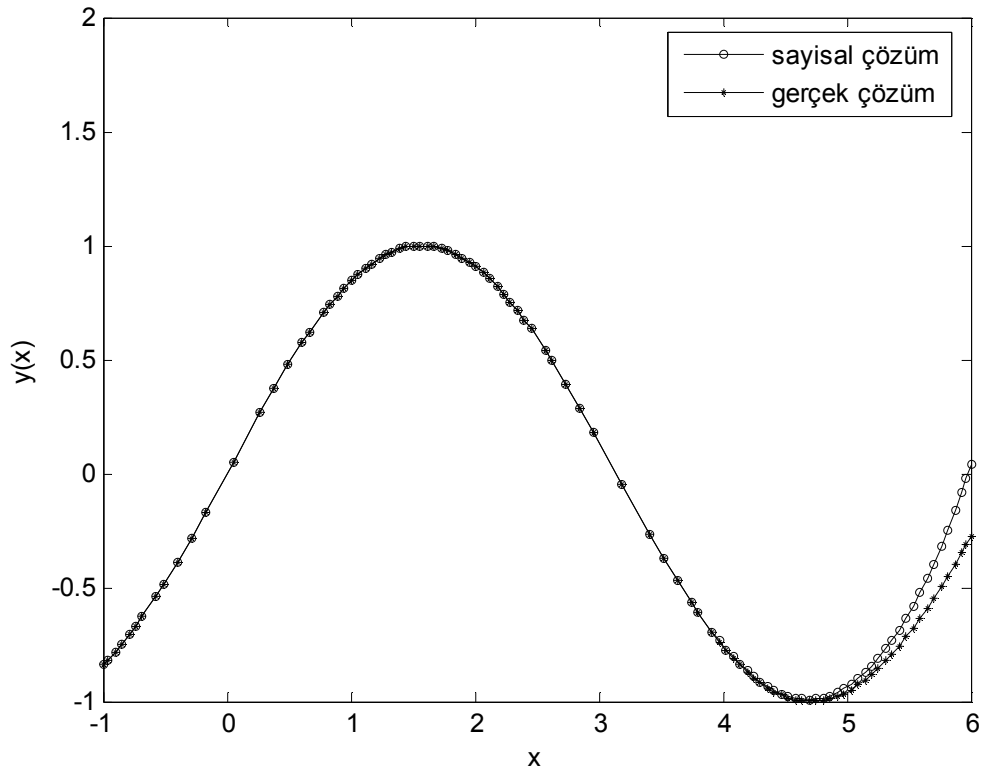
şeklindedir ve bu çözüm gerçek çözüm ile aynıdır.

Ishiwata ve Muroya (2007), (3.7) denklemine rasyonel yaklaşım yöntemini uygulamış, sonuçları collocation yöntemiyle karşılaştırmış ve rasyonel yaklaşım yönteminin collocation yönteminden daha kullanışlı olduğunu ileri sürmüşlerdir.

$N = 16$ alınarak (3.7) gecikmeli diferansiyel denklemine diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulandığında elde edilen çözüm ile gerçek çözümün karşılaştığı görülmektedir (Çizelge 3.5).

Çizelge 3.5 Örnek 3.5' in çözümleri

t	Diferansiyel dönüşüm yöntemi $N = 16$	Gerçek çözüm	Mutlak hata
2^0	0.841471	0.841471	0.00
2^{-1}	0.479425	0.479425	0.00
2^{-2}	0.247404	0.247404	0.00
2^{-3}	0.124675	0.124675	0.00
2^{-4}	0.062459	0.062459	0.00



Şekil 3.4 Örnek 3.5'in diferansiyel dönüşüm ve gerçek çözüm grafikleri ($N = 12$)

Örnek 3.6 (Gülsu ve Sezer, 2005)

$$\begin{cases} 2y''(x) + 2y'(x) - 4y(x) + y''(x-1) + y'(x-1) - 2y(x-1) = -6x^2 + 10x + 8 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 2 \end{cases} \quad (3.8)$$

gecikmeli diferansiyel denklemin diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulansın.

Çözüm

$y(x)$ ' in diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $Y(k)$ olsun. Teorem 2.2.3 ve Teorem 2.2.4'den $y'(x)$ ve $y''(x)$ fonksiyonlarının diferansiyel dönüşüm fonksiyonları sırasıyla

$$(k+1)Y(k+1) \text{ ve } (k+1)(k+2)Y(k+2)$$

şeklindedir.

$y(x-1)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü $C_1(k)$ olsun. Teorem 2.2.11'den,

$$C_1(k) = \sum_{h_1=k}^N \binom{h_1}{k} (-1)^{h_1-k} Y(h_1)$$

şeklinde elde edilir.

$y'(x-1)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $C_2(k)$ olsun. Teorem 2.2.15'den,

$$C_2(k) = \frac{(k+1)!}{k!} C_1(k+1)$$

şeklindedir.

$$C_1(k+1) = \sum_{h_1=k+1}^N \binom{h_1}{k+1} (-1)^{h_1-k-1} Y(h_1)$$

şeklindedir. O halde, $y'(x-1)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$C_2(k) = (k+1) \sum_{h_1=k+1}^N \binom{h_1}{k+1} (-1)^{h_1-k-1} Y(h_1)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde, $y''(x-1)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü de

$$(k+1)(k+2) \sum_{h_1=k+2}^N \binom{h_1}{k+2} (-1)^{h_1-k-2} Y(h_1)$$

şeklindedir.

O halde, diferansiyel dönüşümleri elde edilen ifadeler ve Teorem 2.2.6 göz önüne alınırsa, (3.8) denkleminin diferansiyel dönüşümü,

$$2(k+1)(k+2)Y(k+2) + 2(k+1)Y(k+1) - 4Y(k) + (k+1)(k+2) \sum_{h_1=k+2}^N \binom{h_1}{k+2}$$

$$\times (-1)^{h_1-k-2}Y(h_1) + (k+1) \sum_{h_1=k+1}^N \binom{h_1}{k+1} (-1)^{h_1-k-1}Y(h_1)$$

$$-2 \sum_{h_1=k}^N \binom{h_1}{k} (-1)^{h_1-k}Y(h_1) = -6\delta(k-2) + 10\delta(k-1) + 8\delta(k)$$

şeklinde yazılabilir.

Başlangıç koşullarından,

$$Y(0) = 1, \quad Y(1) = 2$$

elde edilir.

$N = 4$ alınırsa, $k = 0, 1, 2$,

$k = 0$ için,

$$4Y(2) + 2Y(1) - 4Y(0) + 2 \sum_{h_1=2}^4 \binom{h_1}{2} (-1)^{h_1-2}Y(h_1) + \sum_{h_1=1}^4 \binom{h_1}{1} (-1)^{h_1-1}Y(h_1)$$

$$-2 \sum_{h_1=0}^4 \binom{h_1}{0} (-1)^{h_1}Y(h_1) = 8$$

$$4Y(2) + 2Y(1) - 4Y(0) + 2Y(2) - 6Y(3) + 12Y(4) + Y(1) - 2Y(2) + 3Y(3) - 4Y(4)$$

$$-2Y(0) + 2Y(1) - 2Y(2) + 2Y(3) - 2Y(4) = 8$$

$$2Y(2) - Y(3) + 6Y(4) = 4$$

$k = 1$ için,

$$12Y(3) + 4Y(2) - 4Y(1) + 6 \sum_{h_1=3}^4 \binom{h_1}{3} (-1)^{h_1-3}Y(h_1) + 2 \sum_{h_1=2}^4 \binom{h_1}{2} (-1)^{h_1-2}Y(h_1)$$

$$-2 \sum_{h_1=1}^4 \binom{h_1}{1} (-1)^{h_1-1}Y(h_1) = 10$$

$$12Y(3) + 4Y(2) - 4Y(1) + 6Y(3) - 24Y(4) + 2Y(2) - 6Y(3) + 12Y(4) - 2Y(1)$$

$$+4Y(2) - 6Y(3) + 8Y(4) = 10$$

$$10Y(2) + 6Y(3) - 4Y(4) = 22$$

$k = 2$ için,

$$24Y(4) + 6Y(3) - 4Y(2) + 12 \sum_{h_1=4}^4 \binom{h_1}{4} (-1)^{h_1-4} Y(h_1) + 3 \sum_{h_1=3}^4 \binom{h_1}{3} (-1)^{h_1-3} Y(h_1)$$

$$-2 \sum_{h_1=2}^4 \binom{h_1}{2} (-1)^{h_1-2} Y(h_1) = -6$$

$$24Y(4) + 6Y(3) - 4Y(2) + 12Y(4) + 3Y(3) - 12Y(4) - 2Y(2) + 6Y(3) - 12Y(4) = -6$$
$$-6Y(2) + 15Y(3) + 12Y(4) = -6$$

ifadeleri elde edilir.

$$2Y(2) - Y(3) + 6Y(4) = 4$$

$$10Y(2) + 3Y(3) - 4Y(4) = 22$$

$$-6Y(2) + 15Y(3) + 12Y(4) = -6$$

lineer denklem sistemi çözülürse,

$$Y(4) = \frac{7}{123}, \quad Y(3) = \frac{44}{123}, \quad Y(2) = \frac{247}{123}$$

olarak bulunur.

Bu ifadeler (2.6)'da verilen ters diferansiyel dönüşüm denkleminde yerine yazılırsa,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k$$
$$= 1 + 2x + \frac{247}{123}x^2 + \frac{44}{123}x^3 + \frac{7}{123}x^4 + \dots$$

olarak bulunur. Gerçek çözüm $2e^x + x^2 - 1$ dir.

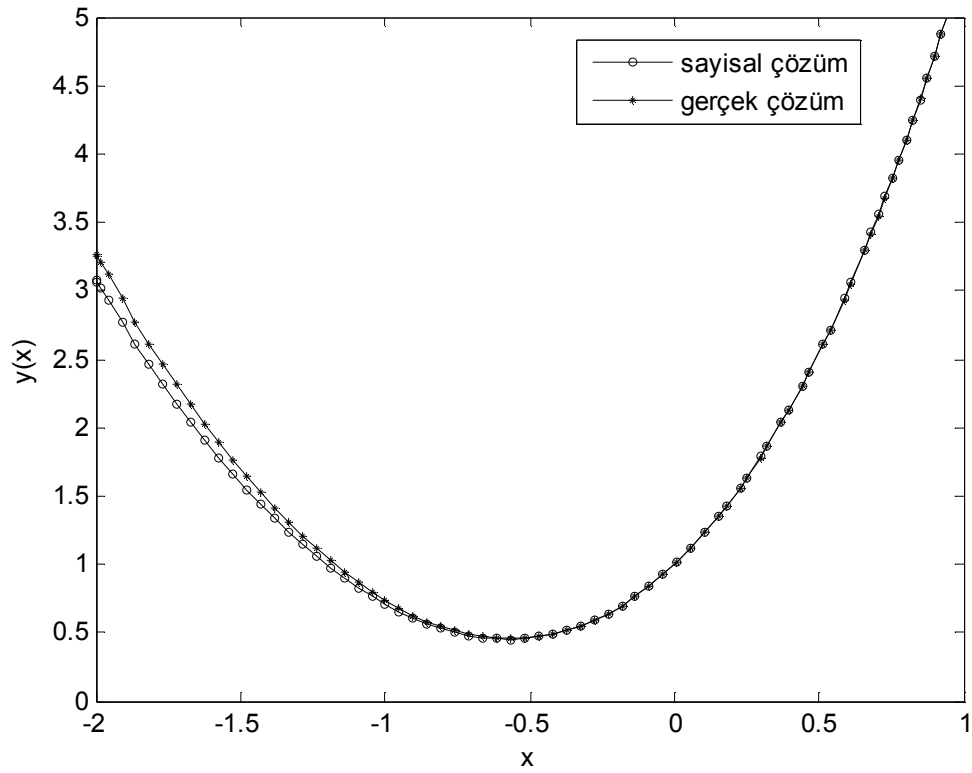
Gülsu ve Sezer (2006), (3.8) gecikmeli diferansiyel denkleminde Taylor polinom yaklaşımını uygulamışlardır. Aynı denklem $N = 4$ alınarak diferansiyel dönüşüm yöntemiyle çözüldüğünde, Taylor polinom yaklaşımından daha iyi sonuçlar verdiği Çizelge 3.7'de gösterilmiştir.

Çizelge 3.6 Örnek 3.6' nın çözümleri

t	Diferansiyel dönüşüm yöntemi $N = 4$	Gerçek çözüm	Mutlak hata
0.0	1.000000	1.000000	0.00
-0.2	0.677554	0.677461	$9.30E - 005$
-0.4	0.499863	0.500640	$7.76E - 004$
-0.6	0.453034	0.457623	0.004589
-0.8	0.525359	0.538658	0.013298
-1.0	0.707318	0.735759	0.028442

Çizelge 3.7 Örnek 3.6' nın çözümlerinin mutlak hatalarının karşılaştırılması

x	Taylor polinom yaklaşımı $N = 4$	DTM $N = 4$
0	0.000000	0.000000
-0.2	$0.929E - 4$	$0.930E - 6$
-0.4	$0.776E - 3$	$0.776E - 5$
-0.6	$0.458E - 2$	$0.458E - 2$
-0.8	$0.132E - 1$	$0.132E - 1$
-1.0	$0.284E - 1$	$0.284E - 1$



Şekil 3.5 Örnek 3.6'nın diferansiyel dönüşüm ve gerçek çözüm grafikleri

Örnek 3.7 (Evans ve Raslan, 2004)

$$\frac{dy(x)}{dx} = 1 - 2y^2\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0 \quad (3.9)$$

birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli diferansiyel denklemine diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulansın.

Çözüm

$y(x)$ ' in diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $Y(k)$ olsun. Teorem 2.2.6, Teorem 2.2.10 ve Teorem 2.2.24'den yararlanarak (3.9) denkleminin diferansiyel dönüşümü,

$$(k+1)Y(k+1) = \delta(k) - 2 \sum_{l=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k Y(l)Y(k-l)$$

şeklinde yazılabilir.

Başlangıç koşulundan,

$$Y(0) = 0$$

elde edilir.

$N = 6$ alınırsa, $k = 0, 1, \dots, 6$,

$k = 0$ için,

$$Y(1) = 1 - 2 \sum_{l=0}^0 Y(l)Y(0-l)$$

$$Y(1) = 1$$

$k = 1$ için,

$$2Y(2) = -2 \sum_{l=0}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 Y(l)Y(1-l) = -[Y(0)Y(1) + Y(1)Y(0)]$$

$$Y(2) = 0$$

$k = 2$ için,

$$3Y(3) = -2 \sum_{l=0}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 Y(l)Y(2-l) = -\frac{1}{2}[Y(0)Y(2) + Y(1)Y(1) + Y(2)Y(0)]$$

$$Y(3) = -\frac{1}{6}$$

$k = 3$ için,

$$4Y(4) = -2 \sum_{l=0}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 Y(l)Y(3-l) = -\frac{1}{4}[Y(0)Y(3) + Y(1)Y(2) + Y(2)Y(1) + Y(3)Y(0)]$$

$$Y(4) = 0$$

$k = 4$ için,

$$\begin{aligned} 5Y(5) &= -2 \sum_{l=0}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 Y(l)Y(4-l) \\ &= -\frac{1}{8}[Y(0)Y(4) + Y(1)Y(3) + Y(2)Y(2) + Y(3)Y(1) + Y(4)Y(0)] \end{aligned}$$

$$Y(5) = \frac{1}{120}$$

$k = 5$ için,

$$\begin{aligned} 6Y(6) &= -2 \sum_{l=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 Y(l)Y(5-l) \\ &= -\frac{1}{16} [Y(0)Y(5) + Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3) + Y(3)Y(2) + Y(4)Y(1) + Y(5)Y(0)] \end{aligned}$$

$$Y(6) = 0$$

$k = 6$ için,

$$\begin{aligned} 7Y(7) &= -2 \sum_{l=0}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 Y(l)Y(6-l) \\ &= -\frac{1}{32} [Y(0)Y(6) + Y(1)Y(5) + Y(2)Y(4) + Y(3)Y(3) + Y(4)Y(2) + Y(5)Y(1) \\ &\quad + Y(6)Y(0)] \end{aligned}$$

$$Y(7) = -\frac{1}{5040}$$

ifadeleri elde edilir.

Bu şekilde devam edilirse, $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$Y(2k+1) = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

elde edilir.

Tanım 2.2.5'den aranan çözüm,

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \sin x \end{aligned}$$

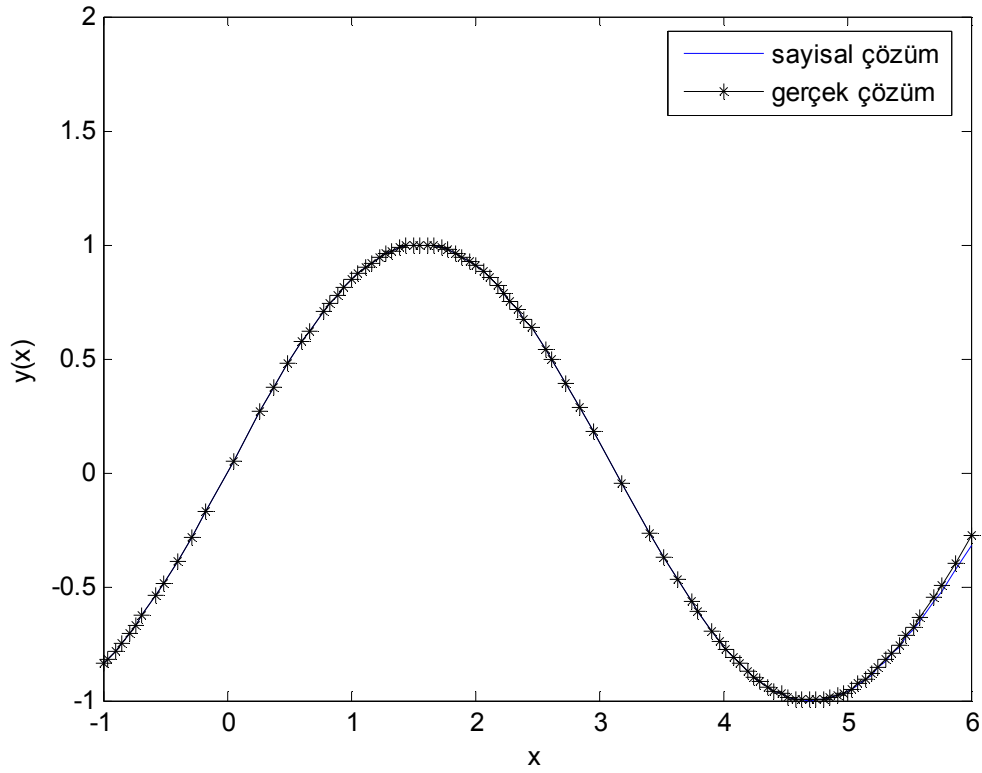
şeklinde bulunur. (3.9) başlangıç değer probleminin gerçek çözümünün $y(x) = \sin x$ olduğu göz önüne alınırsa, elde edilen çözüm ile gerçek çözümün çakıştığı görülür.

Evans ve Raslan, (3.9) denklemin Adomian ayrışım yöntemini uygulamış, Taylor serisini kullanarak gerçek çözümü $y(x) = \sin x$ olarak elde etmişlerdir.

Örnek 3.5'de $N = 12$, Örnek 3.7'de $N = 14$ alınarak çözümlerin grafikleri çizilmiştir. Şekil 3.6'da görüldüğü gibi N arttırıldıkça gerçek çözüme yaklaşılmaktadır.

Çizelge 3.8 Örnek 3.7' nin çözümleri

x	Diferansiyel dönüşüm yöntemi	Gerçek çözüm	Mutlak hata $N = 12$	Mutlak hata $N = 16$
0.0	0.000000	0.000000	0.00	0.00
0.2	0.198669	0.198669	0.00	0.00
0.4	0.389418	0.389418	0.00	0.00
0.6	0.564642	0.564642	0.00	0.00
0.8	0.717356	0.717356	$3.00E - 014$	0.00
1.0	0.841471	0.841471	$7.60E - 013$	0.00



Şekil 3.6 Örnek 3.7'nin diferansiyel dönüşüm ve gerçek çözüm grafikleri($N = 14$)

Örnek 3.8 (Karakoç ve Bereketoğlu, 2009)

$$\begin{cases} \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -y\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^3}{8} + 6x \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 3 \end{cases} \quad (3.10)$$

sınırsız gecikmeli lineer gecikmeli diferansiyel denkleminde diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulansın.

Çözüm

$y(x)$ 'in diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $Y(k)$, x^3 ve x ' in $x_0 = 1$ 'de diferansiyel dönüşüm fonksiyonları sırasıyla $F_1(k)$ ve $F_2(k)$ olsun. Diferansiyel dönüşüm tanımından,

$$F_1(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} x^3 \right]_{x=1}$$

ve

$$F_2(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} x \right]_{x=1}$$

şeklindedir. O halde,

$k = 0$ için,

$$F_1(k) = x^3|_{x=1} = 1 \quad \text{ve} \quad F_2(k) = x|_{x=1} = 1$$

$k = 1$ için,

$$F_1(k) = \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{dx} x^3 \right]_{x=1} = 3 \quad \text{ve} \quad F_2(k) = \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{dx} x \right]_{x=1} = 1$$

$k = 2$ için,

$$F_1(k) = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dx^2} x^3 \right]_{x=1} = 3 \quad \text{ve} \quad F_2(k) = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dx^2} x \right]_{x=1} = 0$$

$k = 3$ için,

$$F_1(k) = \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{dx^3} x^3 \right]_{x=1} = 1$$

$k = 4$ için,

$$F_1(k) = \frac{1}{4!} \left[\frac{d^4}{dx^4} x^3 \right]_{x=1} = 0$$

$$F_1(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 3, & k = 1 \\ 3, & k = 2 \\ 1, & k = 3 \\ 0, & k \geq 4 \end{cases} \quad F_2(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$$

ifadeleri elde edilir.

Teorem 2.2.5, Teorem 2.2.20 ve diferansiyel dönüşüm tanımı kullanılarak (3.10) denkleminin diferansiyel dönüşümü,

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) = - \sum_{h_1=k}^N (-1)^{h_1-k} \frac{1}{2^{h_1}} \binom{h_1}{k} Y(h_1) + \frac{1}{8} F_1(k) + 6F_2(k)$$

şeklinde yazılabilir.

Başlangıç koşullarından,

$$Y(0) = 1 \text{ ve } (k+1)Y(k+1) = 3 \Rightarrow Y(1) = 3$$

elde edilir.

$N = 3$ alınsın, $k = 0, \dots, 3$,

$k = 0$ için,

$$\begin{aligned} 2Y(2) &= - \sum_{h_1=0}^3 (-1)^{h_1} \frac{1}{2^{h_1}} \binom{h_1}{0} Y(h_1) + \frac{1}{8} F_1(0) + 6F_2(0) \\ &= - \left[Y(0) - \frac{1}{2} Y(1) + \frac{1}{4} Y(2) - \frac{1}{8} Y(3) \right] + \frac{1}{8} \cdot 1 + 6 \cdot 1 \end{aligned}$$

$$2.25Y(2) - 0.125Y(3) = 6.625$$

$k = 1$ için,

$$6Y(3) = - \sum_{h_1=1}^3 (-1)^{h_1-1} \frac{1}{2^{h_1}} \binom{h_1}{1} Y(h_1) + \frac{1}{8} F_1(1) + 6F_2(1)$$

$$= -\left[\frac{1}{2}Y(1) - \frac{1}{2}Y(2) + \frac{3}{8}Y(3)\right] + \frac{51}{8}$$

$$6.375Y(3) - 0.5Y(2) = 4.875$$

$k = 2$ için,

$$12Y(4) = -\sum_{h_1=2}^3 (-1)^{h_1-2} \frac{1}{2^{h_1}} \binom{h_1}{2} Y(h_1) + \frac{1}{8}F_1(2) + 6F_2(2)$$

$$= -\left[\frac{1}{4}Y(2) - \frac{3}{8}Y(3)\right] + \frac{3}{8}$$

$$12Y(4) = 0 \Rightarrow Y(4) = 0$$

$k = 3$ için,

$$20Y(5) = -\sum_{h_1=3}^3 (-1)^{h_1-3} \frac{1}{2^{h_1}} \binom{h_1}{3} Y(h_1) + \frac{1}{8}F_1(3) + 6F_2(3)$$

$$= -\frac{1}{8}Y(3) + \frac{1}{8}$$

$$20Y(5) = 0 \Rightarrow Y(5) = 0$$

$$2.25Y(2) - 0.125Y(3) = 6.625$$

$$-0.5Y(2) + 6.375Y(3) = 4.875$$

lineer denklem sistemi çözülürse,

$Y(2) = 3, Y(3) = 1$ olarak bulunur.

Ters diferansiyel dönüşüm yardımıyla,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)(x-1)^k$$

$$= Y(0)(x-1)^0 + Y(1)(x-1)^1 + Y(2)(x-1)^2 + Y(3)(x-1)^3$$

$$= 1 + 3x + 3(x-1)^2 + (x-1)^3 = x^3$$

şeklinde elde ederiz. (3.10) denkleminin gerçek çözümü $y(x) = x^3$ ile elde edilen çözüm çakışır.

4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Fizik, tıp, biyoloji, kimya, ekonomi gibi özellikle uygulamalı bilimler ve mühendislikte karşılaşılan birçok matematiksel modelin çözümlerinin araştırılmasında sayısal yöntemler oldukça önemlidir. Özellikle ele alınan yöntemin hızlı ve etkin sonuç vermesi, bilgisayara kolay uygulanabilir olması hem zamandan hem de maliyetten tasarruf sağlamaktadır.

Bu tezde, gecikmeli diferansiyel denklemler ve diferansiyel dönüşüm yöntemi incelenmiş, bazı gecikmeli diferansiyel denklemlere diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanmıştır. Diferansiyel dönüşüm yöntemi hem kullanım açısından hem de bilgisayara uygulanabilirlik açısından kolay bir yöntemdir. Diğer dönüşüm yöntemlerinde karşılaşılabilecek integrallerin zorluğuna karşın diferansiyel dönüşüm yönteminde kolay türevler kullanılarak cebirsel denklemler elde edilmektedir.

Adomian ayrışım yöntemi, varyasyonel iterasyon yöntemi, collocation yöntemi ve Taylor yöntemiyle ele alınan problemler diferansiyel dönüşüm yöntemiyle de çözüldüğünde, diferansiyel dönüşüm yönteminin hem hassasiyet hem hesaplama kolaylığı hem de algoritmasının kolay oluşturulması açısından etkin olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra, literatüre bakıldığında bu yöntem üzerine yapılan çalışmaların diğer yöntemlerden daha az olduğu göze çarpmaktadır. Diğer yöntemlere göre hem zamandan hem de maliyetten tasarruf sağlayan diferansiyel dönüşüm yöntemi özellikle lineer olmayan matematiksel modeller için geliştirilip uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- Abazari, N. ve Abazari, R., (2009), "Solution of Nonlinear Second-Order Pantograph Equations via Differential Transformation Method", World Academy of Science, Engineering and Technology 58 2009.
- Agorwal, R.P. ve Perera, K., (2006), Differential & Difference Equations and Applications, Hindawi Publishing Corporation, New York.
- Arikoğlu, A. ve Özkol, İ., (2005), "Solution of Boundary Value Problems for İntegro-Differential Equations by Using Differential Transform Method", Applied Mathematics and Computation, 168:1145-1158
- Arikoğlu, A. ve Özkol, İ., (2006a), "Solution of Difference Equations by Using Differential Transform Method", Applied Mathematics and Computation, 174:1216-1228.
- Arikoğlu, A. ve Özkol, İ., (2006b), "Solution of Differential- Difference Equations by Using Differential Transform Method", Applied Mathematics and Computation, 181:153-162.
- Arino, O., Hbid, M.L. ve Dads, E.A., (2002), Delay Differential Equations and Applications, Springer, The Netherlands.
- Avbelez, N.V., Maksimov, V.P. ve Rakhmatullina, L.F.,(2007), Introduction the Theory of Functional Differential Equations Methods and Applications, Hindawi Publishing Corporation, Egypt.
- Baker, C.T.H., Paul C.A.H. ve Willé, D.R., (1995), A Bibliography on The Numerical Solutions of Delay Differential Equations, Numerical Annalysis Report 269, University of Manchester / UMIST, Manchester Centre for Computational Mathematics.
- Balachandran, B., Nagy, K.T. ve Gilsinn, D.E., (2009), Delay Differential Equations, Springer Science+Business Media, New York.
- Bellen, A. ve Zennaro, M., (2003), Numerical Methods for Delay Differential Equations, Oxford University Press, New York.
- Bochorov, G.A. ve Rihan, A.F., (2000), "Numerical Modelling in Biosciences Using Delay Differential Equations", Journal of Computational and Applied Mathematics, 125:183-199.
- Chen, C.K. ve Ho, S.C., (1996), "Application of Differential Transformation to Eigenvalue Problems", Applied Mathematics and Computation, 79:173-188.
- Erneux, T., (2009), Applied Delay Differential Equations, Springer Science+Business Media, New York.
- Evans, D.J. ve Raslan, K.R., (2004), "The Adomian Decomposition Method for Solving Delay Differential Equations", International Journal of Computer Mathematics, 00:1-6.
- Günel, K., (2006), Zaman Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Adnan Menderes Üniversitesi.
- Györ, I. ve Ladas,G., (1991), Oscillation Theory of Delay Differential Equations With Applications, Oxford University Press, New York.
- Ishiwata, E. ve Muroya, Y., (2007), "Rational Approximation Method for Delay Differential Equations With Proportional Delay", Applied Mathematics and Computation, 187:741-747.

Karakoç, F. ve Bereketoğlu, H., (2009), “Solution of Delay Differential Equations by Using Differential Transform Method”, International Journal Of Computer Mathematics, 86:914-923.

Keskin, Y., (2005), Diferansiyel Dönüşüm yöntemiyle Diferansiyel Denklemlerin Çözülmesi, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi.

Kuang, Y., (1993), Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics, Academic Press, Inc., San Diego.

Saadatmandi, A. ve Dehghan, M., (2009), “Variational Iteration Method for Solving A Generalized Pantograph Equation”, Computers and Mathematics With Applications, 58:2190-2196.

Sezer, M. ve Daşcıoğlu, A.A., (2006), “Taylor Polynomial Solutions of General Linear Differential-Difference Equations With Variable Coefficients”, Applied Mathematics and Computation, 174:1526-1538.

Sezer, M. ve Daşcıoğlu, A.A., (2007), “A Taylor Method for Numerical Solution of Generalized Pantograph Equations With Linear Functional Argument”, Journal of Computational and Applied Mathematics, 200:217-225.

Yu, Z.H., (2008), “Variational Iteration Method for Solving The Multi-Pantograph Equation”, Physics Letter A, 372:6475-6479.

Zhou, J.K., (1986), Differential Transformation and Its Application for Electrical Circuits, Huazhang University Press, Wuhan China.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 21.08.1985

Doğum yeri İstanbul

Lise Bayrampaşa Anadolu Lisesi

Lisans Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü