

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI FARK DENKLEMLERİNİN KARARLILIĞI,
PERİYODİKLİĞİ ve SINIRLILIĞI ÜZERİNE**

Yüksek Matematikçi Sebahat Ebru DAŞ

**FBE Matematik Ana Bilim Dalında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 25 Şubat 2010

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mustafa BAYRAM (FÜ)

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Fatma TİRYAKİ (YTÜ)

: Prof. Dr. Mustafa SİVRİ (YTÜ)

: Prof. Dr. Müfit GİRESUNLU (İÜ)

: Doç. Dr. Cevdet CERİT (İTÜ)

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER	7
3. $x_{n+1} = \frac{x_n + y_{n-2}}{1 + x_n y_{n-2}}, y_{n+1} = \frac{y_n + x_{n-2}}{1 + y_n x_{n-2}}$ DENKLEM SİSTEMİ	15
4. $x_{n+1} = \frac{1}{y_{n-1}}, y_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}$ DENKLEM SİSTEMİ	47
5. $x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}^b + x_{n-3}^b + x_{n-1}^b + a}{x_n x_{n-3}^b + x_{n-2}^b + x_{n-1}^b + a}$ FARK DENKLEMİ.....	52
6. $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-(2m+1)}}{x_n^k}$ FARK DENKLEMİ.....	61
7. SONUÇLAR.....	69
KAYNAKLAR.....	69
ÖZGEÇMİŞ.....	72

SİMGE LİSTESİ

$\bar{x}$	Denge noktası
J_F	F fonksiyonunun Jakobiye matrisi
$\text{tr } J_F$	F fonksiyonunun Jakobiye matrisinin köşegen elemanlarının toplamı
$\det J_F$	F fonksiyonunun Jakobiye matrisinin determinanı
$\ x\ $	x'in normu
$\mathbb{R}^+$	Pozitif Reel sayılar kümesi

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı hazırlamam sırasında bana yardımcı olan değerli hocam Prof. Dr. Mustafa BAYRAM'a, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Cengiz ÇINAR'a, çalışmalarım sırasında beni manevi açıdan destekleyen ve yanımda olan sevgili eşim ve oğluma teşekkür ederim.

BAZI FARK DENKLEMLERİNİN KARARLILIĞI, PERİYODİKLİĞİ ve SINIRLILIĞI ÜZERİNE

Sebahat Ebru DAŞ
Matematik, Doktora Tezi

Bu çalışmanın amacı, fark denklemlerinin çözümlerinin sınırlılığını, periyodikliğini ve kararlılığını incelemek ve bu konudaki çalışmalara katkıda bulunmaktır.

Tez yedi bölümden oluşmaktadır. I. bölümde şu ana kadar yapılmış olan bir takım çalışmalar kısaca tanıtılmıştır. II. bölümde gerekli olan bazı tanım ve teoremler verilmiştir. III. bölümde üçüncü dereceden bir fark denklem sistemi incelenmiştir. IV. bölümde ikinci dereceden bir fark denklem sistemi incelenmiştir. V. bölümde dördüncü dereceden nonlinear bir fark denklemi incelenmiştir. VI. bölümde k. dereceden bir fark denklemi incelenmiştir. VII. bölümde ise yapılan çalışmaların sonuçları kısaca özetlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kararlılık, Sınırlılılık, Fark Denklemleri, Periyodiklik

STABILITY, PERIODICITY and BOUNDEDNESS of SOME DIFFERENCE EQUATIONS

Sebahat Ebru DAŞ

Mathematics, Ph.D. Thesis

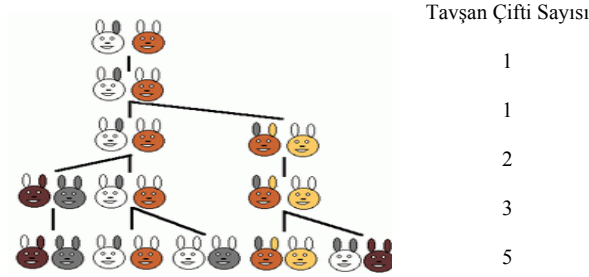
Purpose of this work is to investigate boundedness, periodicity and stability of the solutions of some rational difference equations and to make contribution to works about this subject.

Thesis consists of seven chapters. In I. chapter, a number of studies up till now are introduced shortly. In II. chapter, some necessary definitions and theorems are given. In III. chapter, a third-order difference equation system is investigated. In IV. chapter, a second-order difference equation system is investigated. In V. chapter, a fourth-order nonlinear difference equation is investigated. In VI. chapter, a k th-order difference equation is investigated. In VII. chapter, the results of the works are briefly summarized.

Keywords: Stability, Boundedness, Difference Equations, Periodicity

1.GİRİŞ

Fark denklemleri, biyoloji, ekoloji, ekonomi, fizik gibi uygulama alanları olan diferansiyel ve geciktirici diferansiyel denklemlerinin nümerik çözümlerinde karşımıza çıkar. En bilinen fark denklemlerinden birisi Fibonacci'nin biyolojideki ilk matematiksel modeli olan $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $F_1 = F_2 = 1$, $n = 2, 3, \dots$ fark denklemdir. Fibonacci'nin modeline göre, yeni doğmuş biri dişi biri erkek olan bir çift tavşanı ele alalım. Tavşanlar ilk ayın sonunda çoğalmaya hazır oluyorlar. Tavşanların hiç ölmediğini ve yeni tavşan çiftinin birinin dişi diğeri de erkek olduğunu varsayalım. Buna göre,



olur. Bu konulardaki belli başlı bazı çalışmalar aşağıda iki bölüm halinde kısaca özetlenmiştir.

1.1. Denklem Sistemleri ile İlgili Çalışmalar

D. Clark ve M. R. S. Kulenović yaptıkları çalışmada a, b, c, d pozitif sayılar ve x_0, y_0 keyfi negatif olmayan sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{a + cy_n} , \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{b + dx_n} , \quad n = 0, 1, \dots$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin asimptotik davranışlarını ve global kararlılığını incelemiştir (Clark ve Kulenović, 2002).

C. Çınar yaptığı çalışmada $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 \in \mathbb{R}^+$ başlangıç koşulları altında

$$x_{n+1} = \frac{1}{y_n} , \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{x_{n-1}y_{n-1}} , \quad n = 0, 1, \dots$$

fark denklem sisteminin periyodikliğini incelemiştir (Çınar, 2004).

E. Camouzis ve G. Papaschinopoulos yaptıkları çalışmada m pozitif bir tamsayı ve x_i, y_i ($i = -m, -m+1, \dots, 0$) pozitif başlangıç koşulları altında

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{y_{n-m}}, \quad y_{n+1} = 1 + \frac{y_n}{x_{n-m}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını, sürekliliğini ve global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir (Camouzis ve Papaschinopoulos, 2004).

C. A. Clark., M. R. S. Kulenović ve J. F. Selgrade yaptıkları çalışmada a, b, h pozitif sayılar ve negatif olmayan başlangıç koşulları için

$$x_{n+1} = \frac{h + x_n}{a + y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{b + x_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin global karakterlerini incelemişlerdir (Clark vd., 2005).

X. Yang, Y. Liu ve S. Bai yaptıkları çalışmada p ve q , $p \leq q$ olan pozitif tamsayılar ve a, b pozitif sabitler olmak üzere

$$x_n = \frac{a}{y_{n-p}}, \quad y_n = \frac{by_{n-p}}{x_{n-q}y_{n-q}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir (Yang vd., 2005).

A. Y. Özban yaptığı çalışmada k negatif olmayan bir tamsayı, m pozitif bir tamsayı ve $x_{-m}, x_{-m+1}, \dots, x_0, y_{-m-k}, y_{-m-k+1}, \dots, y_0 \in \mathbb{R}^+$ başlangıç koşulları altında

$$x_{n+1} = \frac{1}{y_{n-k}}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{x_{n-m}y_{n-m-k}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir (Özban, 2006).

Y. Zhang, X. Yang, G. M. Megson ve D. J. Evans yaptıkları çalışmada $p, r, s \geq 1$, $A \geq 0$, $x_{1-r}, x_{2-r}, \dots, x_0 \in \mathbb{R}^+$ ve $y_{1-\max\{p,s\}}, y_{2-\max\{p,s\}}, \dots, y_0 \in \mathbb{R}^+$ başlangıç koşulları altında

$$x_{n+1} = A + \frac{1}{y_{n-p}}, \quad y_{n+1} = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir (Zhang vd., 2006).

I. Yalçınkaya, C. Çınar ve D. Şimşek yaptıkları çalışmada $a \in (0, \infty)$ ve $(z_k, t_k) \in (0, \infty)$,

$k = -1, 0$ başlangıç koşulları altında

$$z_{n+1} = \frac{z_n t_{n-1} + a}{z_n + t_{n-1}}, \quad t_{n+1} = \frac{t_n z_{n-1} + a}{t_n + z_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

fark denklem sisteminin global asimptotik kararlı olması için yeterli olan koşulu saptamışlardır (Yalçinkaya vd., 2008).

1.2. Rasyonel Fark Denklemleri ile İlgili Çalışmalar

A. M. Amleh, N. Kruse ve G. Ladas'ın yaptıkları çalışmada $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in \mathbb{R}^+$ başlangıç koşulları altında

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}x_{n-2}}{x_n x_{n-1} + x_{n-2}}, \quad x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + x_n x_{n-2}}{x_n x_{n-1} + x_{n-2}}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}x_{n-2}}{x_n x_{n-2} + x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

fark denklemlerinin bütün pozitif çözümlerinin $n \rightarrow \infty$ iken 1'e yakınsadığını ispatladılar (Amleh vd., 1999).

L. Xianyi ve Z. Deming yaptıkları çalışmada $a \in [0, \infty)$ ve $x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ başlangıç koşulları altında

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} + a}{x_n + x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

fark denkleminin global asimptotik kararlı olması için yeterli olan koşulu bulmuşlardır (Xianyi ve Deming, 2003).

L. Xianyi ve Z. Deming yaptıkları çalışmada $a, b \in [0, \infty)$ ve $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ başlangıç koşulları altında

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1}^b + x_{n-2}^b + a}{x_{n-1}^b + x_n x_{n-2}^b + a}, \quad n = 0, 1, \dots$$

nonlineer rasyonel fark denkleminin global asimptotik kararlı olması için yeterli olan koşulu saptamışlardır (Xianyi ve Deming, 2004).

J. Feuer yaptığı çalışmada, p pozitif bir sayı ve $x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ başlangıç koşulları altında

$$x_{n+1} = p + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

fark denkleminin çözümlerinin davranışlarını incelemiştir (Feuer, 2004).

C. Çınar yaptığı çalışmada x_{-1}, x_0 ve a negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + ax_n x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

fark denkleminin pozitif çözümlerini incelemiştir (Çınar, 2004).

H. M. El-Owaidy, A. M. Ahmed ve M. S. Mousa yaptıkları çalışmada özel başlangıç koşulları altında

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin global kararlılığını ve periyodikliğini incelemiştir (El-Owaidy vd., 2004).

X. Li yaptığı çalışmada $a \in [0, \infty)$ ve $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ başlangıç koşulları altında

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} x_{n-3} + x_n + x_{n-1} + x_{n-3} + a}{x_n x_{n-1} + x_n x_{n-3} + x_{n-1} x_{n-3} + 1 + a}, \quad n = 0, 1, \dots$$

dördüncü dereceden rasyonel fark denkleminin çözümlerini bilinen yoldan farklı bir yolla incelemeye çalışmıştır (Li, 2005a).

X. Li yaptığı çalışmada $a \in [0, \infty)$ ve $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ başlangıç koşulları altında

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} x_{n-2} x_{n-3} + x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} + a}{x_{n-1} x_{n-2} + x_{n-1} x_{n-3} + x_{n-2} x_{n-3} + 1 + a}, \quad n = 0, 1, \dots$$

dördüncü dereceden rasyonel fark denkleminin çözümlerinin global davranışını bilinen yoldan farklı bir yolla incelemeye çalışmıştır (Li, 2005b).

E. M. Elabbasy, H. El-Metwally ve E. M. Elsayed yaptıkları çalışmada a, b, c, d pozitif sabitler ve $x_{-1}, x_0 \in \mathbb{R}$ başlangıç koşulları altında

$$x_{n+1} = \alpha x_n - \frac{bx_n}{cx_n - dx_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

fark denkleminin çözümlerinin belli başlı özelliklerini incelemişlerdir (Elabbasy, 2006).

K. S. Berenhaut, J. D. Foley ve S. Stević yaptıkları çalışmada

$$y_{n+1} = \frac{y_{n-k} + y_{n-m}}{1 + y_{n-k} + y_{n-m}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

fark denkleminin $\bar{y}=1$ tek pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir (Berenhaut vd., 2007).

R. Abu-Saris, C. Çınar ve I. Yalçınkaya yaptıkları çalışmada $a \in [0, \infty)$, k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $x_{-k}, \dots, x_0 \in \mathbb{R}^+$ başlangıç koşulları altında

$$y_{n+1} = \frac{y_n y_{n-k} + a}{y_n + y_{n-k}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

fark denkleminin denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu ispatlamışlardır (Abu-Saris vd., 2008).

A. E. Hamza ve A. Morsy yaptıkları çalışmada $x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$, $\alpha \in (0, \infty)$ ve $k \in (0, \infty)$ başlangıç koşulları altında

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n^k}, \quad n = 0, 1, \dots$$

fark denkleminin global davranışını incelemişlerdir (Hamza ve Morsy, 2009).

E. M. Elsayed yaptığı çalışmada a, b, c, d pozitif sabitler ve $x_{-1}, x_0 \in \mathbb{R}^+$ başlangıç koşulları altında

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \frac{bx_n^2}{cx_n + dx_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

fark denkleminin çözümlerinin belli başlı özelliklerini incelemiştir (Elsayed, 2009).

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmamızda bize yardımcı olacak bir takım tanım ve teoremler iki bölüm halinde verilmiştir.

2.1. Rasyonel Fark Denklemleri ile İlgili Ön Bilgiler

Tanım 2.1. $J \subset \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $f: J^{k+1} \rightarrow J$ tanımlı, sürekli, diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. O zaman $(k+1)$. dereceden bir fark denklemi

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) \quad , \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

formunda bir denklemdir. (2.1) denkleminin çözümü, tüm $n \geq 0$ değerleri için (2.1) denklemini sağlayan bir $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisidir. Yani,

$$x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0 \in J \quad (2.2)$$

başlangıç koşulları olmak üzere, tüm $n \geq -k$ değerleri için $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisi

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0, x_{-1}, \dots, x_{-k}) \\ x_2 &= f(x_1, x_0, \dots, x_{-k+1}) \\ x_3 &= f(x_2, x_1, \dots, x_{-k+2}) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.3)$$

şeklindedir.

Tanım 2.2. (2.1) denklemini ele alalım. Eğer tüm $n \geq -k$ değerleri için

$$x_n = \bar{x} \quad (2.4)$$

ise, o zaman $\bar{x}$ 'ye (2.1) denkleminin denge noktası denir.

Tanım 2.3. (Kararlılık)

(i) Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$|x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-k+1} - \bar{x}| + \dots + |x_0 - \bar{x}| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan bütün $x_{-k}, \dots, x_0$ başlangıç koşulları için

$$|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ varsa o zaman (2.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası yerel kararlıdır denir.

(ii) Eğer $\bar{x}$ denge noktası yerel kararlı ve $\delta > 0$ için

$$|x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-k+1} - \bar{x}| + \dots + |x_0 - \bar{x}| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan bütün $x_{-k}, \dots, x_0$ başlangıç koşulları için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$$

ise, o zaman (2.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası yerel asimptotik kararlıdır denir.

(iii) Eğer tüm $x_{-k}, \dots, x_0$ başlangıç koşulları için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$$

ise, o zaman (2.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası global çekicidir denir.

(iv) Eğer (2.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası hem yerel kararlı hem de global çekici ise o zaman $\bar{x}$ denge noktasına global asimptotik kararlıdır denir.

(v) Eğer (2.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası yerel kararlı değil ise, o zaman $\bar{x}$ denge noktasına kararsızdır denir.

(vi) Eğer tüm $x_{-k}, \dots, x_0$ başlangıç koşulları için

$$0 < |x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < r$$

olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa; o zaman (2.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktasına kaynak noktası denir ve

$$|x_N - \bar{x}| \geq r$$

olacak şekilde bir $N \geq -1$ sayısı vardır.

Tanım 2.4. $J \subset \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $f : J^{k+1} \rightarrow J$ fonksiyonunu ele alalım. P_i ,

$$P_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0, u_1, \dots, u_k) \Big|_{\bar{x}}, \quad i = 0, \dots, k \quad (2.5)$$

ile tanımlanmış, f fonksiyonunun u_i 'ye göre kısmi türevinin $\bar{x}$ denge noktasındaki değerleri olsun. O zaman

$$z_{n+1} = P_0 z_n + P_1 z_{n-1} + \dots + P_k z_{n-k} \quad (2.6)$$

denklemine (2.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktasındaki lineerleştirilmiş denklemi denir.

$$\lambda^{k+1} - P_0 \lambda^k - P_1 \lambda^{k-1} - \dots - P_k = 0 \quad (2.7)$$

denklemine ise (2.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktasındaki karakteristik denklemi denir.

Teorem 2.5. $P_0, P_1, \dots, P_k \in \mathbb{R}$ ve $k \in \{0, 1, \dots\}$ olsun. Eğer

$$|P_0| + |P_1| + \dots + |P_k| < 1 \quad (2.8)$$

ise, o zaman (2.7) denkleminin köklerinin tamamı mutlak değerce 1'den küçüktür.

Teorem 2.6. (Lineerleştirilmiş Kararlılık Teoremi)

$J \subset \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $f : J^{k+1} \rightarrow J$ tanımlı, sürekli, diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (i) Eğer (2.7) denkleminin köklerinin tamamı mutlak değerce 1'den küçük ise, o zaman (2.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası yerel asimptotik kararlıdır. $\bar{x}$ denge noktasına çukur denir.
- (ii) Eğer (2.7) denkleminin köklerinden en az birisi bile mutlak değerce 1'den büyük ise, o zaman (2.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.
- (iii) Eğer (2.7) denkleminin köklerinin tamamı mutlak değerce 1'den büyük ise, o zaman (2.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası bir kaynak noktadır.
- (iv) Eğer (2.7) denkleminin hiçbir kökü mutlak değerce 1'e eşit değilse, o zaman (2.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası hiperboliktir. Eğer mutlak değerce 1'e eşit bir kökü bile varsa $\bar{x}$ denge noktası non-hiperboliktir.
- (v) Eğer (2.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası hiperbolik ve (2.7) denkleminin köklerinden biri mutlak değerce 1'den küçük ve diğer köklerinden biri mutlak değerce 1'den büyük ise, o zaman (2.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktasına eyer(semer) noktası denir.

Tanım 2.7. Eğer tüm $n \geq -k$ değerleri için,

$$x_{n+p} = x_n \quad (2.9)$$

olacak şekilde bir $p \geq 1$ tamsayısı varsa, (2.1) denkleminin $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne p periyotludur denir. Eğer p , (2.9) denklemini sağlayan tamsayıların en küçüğü ise, $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne asal p periyotludur denir. Eğer $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ çözümü p periyotlu olacak şekilde; yani,

$$x_{n+p} = x_n, \quad \forall n \geq -k \quad (2.10)$$

bir $N \geq -k$ tamsayısı varsa, (2.1) denkleminin $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne ergeç p periyotludur denir.

Tanım 2.8. $\bar{x}$ (2.1) denkleminin denge noktası ve $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ (2.1) denkleminin bir çözümü olsun. (2.1) denkleminin çözümlerinin bir parçası için $L \geq -k$ ve $M \leq \infty$ olmak üzere, $\{x_L, x_{L+1}, \dots, x_M\}$ dizisinin terimlerinin tamamı $\bar{x}$ denge noktasından büyük yada eşitse ve

$$x_{L-1} < \bar{x} \text{ ve } x_{M+1} < \bar{x}$$

oluyorsa $\{x_L, x_{L+1}, \dots, x_M\}$ dizisine (2.1) denkleminin $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün pozitif bir yarı dönmesi denir.

(2.1) denkleminin çözümlerinin bir parçası için $L \geq -k$ ve $M \leq \infty$ olmak üzere, $\{x_L, x_{L+1}, \dots, x_M\}$ dizisinin terimlerinin tamamı $\bar{x}$ denge noktasından küçük ise ve

$$x_{L-1} \geq \bar{x} \text{ ve } x_{M+1} \geq \bar{x}$$

oluyorsa $\{x_L, x_{L+1}, \dots, x_M\}$ dizisine (2.1) denkleminin $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün negatif bir yarı dönmesi denir.

Tanım 2.9. Tüm $n \geq N$ değerleri için

$$x_n < \bar{x} \text{ ya da } x_n > \bar{x}$$

olacak şekilde bir $N \geq -k$ sayısı varsa, (2.1) denkleminin $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne salınımsız denir. Diğer durumda ise salınımlı denir.

Her $N \geq -k$ değeri için

$$x_m < \bar{x} \text{ ve } x_n > \bar{x}$$

olacak şekilde $m, n \geq N$ sayıları varsa, (2.1) denkleminin $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne kesin salınımlı denir.

2.2. Fark Denklem Sistemleri ile İlgili Ön Bilgiler

Tanım 2.10. $J \subset \mathbb{R}$ ve $f, g: J \times J \rightarrow J$ tanımlı, sürekli, diferansiyellenebilen birer fonksiyon olsun.

$$\forall (x_k, y_k) \in J \times J, \quad k = -2, -1, 0 \quad (2.11)$$

başlangıç koşulları için $\{(x_n, y_n)\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümüne

$$(a) \quad x_{n+1} = f(x_n, y_{n-2}), \quad y_{n+1} = g(y_n, x_{n-2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

$$(b) \quad x_{n+1} = f(x_{n-2}, y_{n-2}), \quad y_{n+1} = g(y_{n-2}, x_{n-2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

fark denklem sistemlerinin tek çözümü denir.

Aşağıda verilen tanım ve teoremler (2.13) denklem sistemi için de geçerlidir.

Tanım 2.11. (2.12) fark denklem sistemini ele alalım. Eğer

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{y}) \text{ ve } \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{y}) \quad (2.14)$$

olacak şekilde bir $(\bar{x}, \bar{y})$ noktası varsa bu noktaya (2.12) fark denklem sisteminin bir denge noktası denir.

Tanım 2.12. $(\bar{x}, \bar{y})$ (2.12) denklem sisteminin bir denge noktası olsun.

(i) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\|(x_{-2}, y_{-2}) - (\bar{x}, \bar{y})\| + \|(x_{-1}, y_{-1}) - (\bar{x}, \bar{y})\| + \|(x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta \quad (2.15)$$

eşitsizliğini sağlayan her $(x_{-2}, y_{-2}), (x_{-1}, y_{-1}), (x_0, y_0)$ başlangıç koşulu için

$$\|(x_n, y_n) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \varepsilon \quad (2.16)$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ varsa (2.12) denklem sisteminin $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktası kararlıdır denir.

$$(ii) \left\| (x_{-2}, y_{-2}) - (\bar{x}, \bar{y}) \right\| + \left\| (x_{-1}, y_{-1}) - (\bar{x}, \bar{y}) \right\| + \left\| (x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y}) \right\| < r \quad (2.17)$$

eşitsizliğini sağlayan tüm $(x_{-2}, y_{-2}), (x_{-1}, y_{-1}), (x_0, y_0)$ başlangıç koşulları için

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } (x_n, y_n) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \quad (2.18)$$

olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, (2.12) denklem sisteminin $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktası yerel asimptotik kararlıdır denir.

Tanım 2.13. (2.12) denklem sistemini ele alalım. $(\bar{x}, \bar{y})$, $F = (f, g)$ fonksiyonunun bir denge noktası olsun. Burada f ve g fonksiyonları $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktasında tanımlı, sürekli, diferansiyellenebilen fonksiyonlardır. Buna göre, F fonksiyonunun $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktasındaki Jakobiye Matrisi

$$J_F(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

dir.

$$J_F(p, q)(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})x & \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})y \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})x & \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})y \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

ile tanımlanan $J_F(p, q)(\bar{x}, \bar{y}): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineer tasvirine ise F fonksiyonunun $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktasındaki lineerleştirilmesi denir.

Teorem 2.14. (Lineerleştirilmiş Kararlılık Teoremi)

$F = (f, g)$, $I \subset \mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı, sürekli, diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $(\bar{x}, \bar{y})$, F fonksiyonunun bir denge noktası olsun.

(i) Eğer $J_F(\bar{x}, \bar{y})$ Jakobiye matrisinin tüm özdeğerlerinin modülü 1'den küçük ise, F fonksiyonunun $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

(ii) Eğer $J_F(\bar{x}, \bar{y})$ Jakobiyen matrisinin özdeğerlerinden en az bir tanesinin modülü 1'den büyük ise, F fonksiyonunun $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktası kararsızdır.

(iii) F fonksiyonunun $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktasının yerel asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\lambda^2 - \text{tr} J_F(\bar{x}, \bar{y}) \lambda + \det J_F(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad (2.21)$$

karakteristik denkleminin her çözümünün birim çember içinde kalmasıdır. Yani,

$$|\text{tr} J_F(\bar{x}, \bar{y})| < 1 + \det J_F(\bar{x}, \bar{y}) < 2 \quad (2.22)$$

olmasıdır.

Tanım 2.15. $(\bar{x}, \bar{y})$, (2.12) denklem sisteminin bir denge noktası ve $\{(x_n, y_n)\}_{n=-2}^{\infty}$ (2.12) denklem sisteminin bir çözümü olsun. (2.12) denklem sisteminin çözümlerinin bir parçası için $s \geq -2$ ve $m \leq \infty$ olmak üzere,

$$x_i \geq \bar{x} \quad , \quad i \in \{s, \dots, m\} \quad \text{ve} \quad x_{s-1} < \bar{x} \quad , \quad x_{m+1} < \bar{x}$$

oluyorsa, $\{x_s, x_{s+1}, \dots, x_m\}$ dizisine (2.12) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün pozitif bir yarı dönmesi denir.

Aynı şekilde, $s \geq -2$ ve $m \leq \infty$ olmak üzere,

$$y_i \geq \bar{y} \quad , \quad i \in \{s, \dots, m\} \quad \text{ve} \quad y_{s-1} < \bar{y} \quad , \quad y_{m+1} < \bar{y}$$

oluyorsa, $\{y_s, y_{s+1}, \dots, y_m\}$ dizisine (2.12) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün pozitif bir yarı dönmesi denir.

$s \geq -2$ ve $m \leq \infty$ olmak üzere,

$$x_i < \bar{x} \quad , \quad i \in \{s, \dots, m\} \quad \text{ve} \quad x_{m+1} \geq \bar{x}$$

oluyorsa, $\{x_s, x_{s+1}, \dots, x_m\}$ dizisine (2.12) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün negatif bir yarı dönmesi denir.

Aynı şekilde, $s \geq -2$ ve $m \leq \infty$ olmak üzere,

$$y_i < \bar{y} \quad , \quad i \in \{s, \dots, m\} \quad \text{ve} \quad y_{m+1} \geq \bar{y}$$

oluyorsa, $\{y_s, y_{s+1}, \dots, y_m\}$ dizisine (2.12) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün negatif bir yarı dönmesi denir.

Eğer $\{x_s, x_{s+1}, \dots, x_m\}$ ve $\{y_s, y_{s+1}, \dots, y_m\}$ pozitif birer yarı dönme ise, $\{(x_s, y_s), \dots, (x_m, y_m)\}$ dizisi pozitif bir yarı dönmedir.

Eğer $\{x_s, x_{s+1}, \dots, x_m\}$ ve $\{y_s, y_{s+1}, \dots, y_m\}$ negatif birer yarı dönme ise, $\{(x_s, y_s), \dots, (x_m, y_m)\}$ dizisi negatif bir yarı dönmedir.

$$3. \quad x_{n+1} = \frac{x_n + y_{n-2}}{1 + x_n y_{n-2}}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n + x_{n-2}}{1 + y_n x_{n-2}} \quad \text{DENKLEM SİSTEMİ}$$

Bu bölümde,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_{n-2}}{1 + x_n y_{n-2}}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n + x_{n-2}}{1 + y_n x_{n-2}} \quad (3.1)$$

fark denklem sistemini

$$x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0 \in \mathbb{R}^+ \quad (3.2)$$

başlangıç koşulları altında inceleyeceğiz. (3.1) denklem sisteminin denge noktaları

$$\bar{x} = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{1 + \bar{x} \bar{y}}, \quad \bar{y} = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{1 + \bar{y} \bar{x}} \quad (3.3)$$

denklem sisteminin çözümü ile bulunur. Buna göre, (3.1) denklem sistemi $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ sıfır denge noktası ile $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ pozitif denge noktasına sahiptir. (3.1) denklem sisteminin $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ ve $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ denge noktalarındaki Jakobiyen matrisleri sırasıyla,

$$J_F(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_F(1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

dir. Karakteristik denklemleri ile kökleri de sırasıyla,

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2 \quad (3.5)$$

ve

$$\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ 'dir.} \quad (3.6)$$

Teorem 3.1. $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ ve $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ (3.1) denklem sisteminin denge noktaları olsun.

Buna göre,

(a) (3.1) denklem sistemi $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ sıfır denge noktasında kararsızdır.

(b) (3.1) denklem sistemi $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ pozitif denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

İspat. (a) (3.5) karakteristik denkleminin köklerinden birisi 1' den büyük olduğu için Teorem 2.6. (ii)'ye göre (3.1) denklem sistemi $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ sıfır denge noktasında kararsızdır.

(b) (3.6) karakteristik denkleminin her iki kökü de 1' den küçük olduğu için Teorem 2.6(i)'ye göre (3.1) denklem sistemi $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ pozitif denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

Lemma 3.2. (3.1) denklem sisteminin pozitif bir $\{(x_n, y_n)\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümünün er geç $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ pozitif denge noktasına eşit olması için gerek ve yeter koşul

$$(x_{-2} - 1)(x_0 - 1)(y_{-2} - 1)(y_0 - 1) = 0 \quad (3.7)$$

olmasıdır.

İspat. Öncelikle (3.7) koşulunun doğru olduğunu kabul edelim.

(a) $x_{-2} = 1$ olsun. (3.1) denklem sisteminden

$$n = 1 \text{ için } y_1 = \frac{y_0 + x_{-2}}{1 + y_0 x_{-2}} = \frac{y_0 + 1}{1 + y_0} = 1 \text{ dir.}$$

$n - 1$ için $y_{n-1} = 1$ olsun. Buna göre,

$$y_n = \frac{y_{n-1} + x_{n-3}}{1 + y_{n-1} x_{n-3}} = \frac{1 + x_{n-3}}{1 + x_{n-3}} = 1 \quad (3.8)$$

olduğundan $n = k$ için de doğrudur. Aynı şekilde

$$n = 4 \text{ için } x_4 = \frac{x_3 + y_1}{1 + x_3 y_1} = \frac{x_3 + 1}{1 + x_3} = 1 \text{ dir.}$$

$n - 1$ için $x_{n-1} = 1$ olsun. Buna göre,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-3}}{1 + x_{n-1} y_{n-3}} = \frac{1 + y_{n-3}}{1 + y_{n-3}} = 1 \quad (3.9)$$

olur. $x_{-2} = 1$ olması durumunda $j = 4, 5, \dots$ için $(x_j, y_j) = (1, 1)$ olur.

(b) $x_0 = 1$ olsun. (3.1) denklem sisteminden

$$n = 1 \text{ için } x_1 = \frac{x_0 + y_{-2}}{1 + x_0 y_{-2}} = \frac{1 + y_{-2}}{1 + y_{-2}} = 1 \text{ dir.}$$

$n - 1$ için $x_{n-1} = 1$ olsun. Buna göre,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-3}}{1 + x_{n-1}y_{n-3}} = \frac{1 + y_{n-3}}{1 + y_{n-3}} = 1 \quad (3.10)$$

olduğundan $n = k$ için de doğrudur. Aynı şekilde

$$n = 4 \text{ için } y_4 = \frac{y_3 + x_1}{1 + y_3x_1} = \frac{y_3 + 1}{1 + y_3} = 1 \text{ dir.}$$

$n - 1$ için $y_{n-1} = 1$ olsun. Buna göre,

$$y_n = \frac{y_{n-1} + x_{n-3}}{1 + y_{n-1}x_{n-3}} = \frac{1 + x_{n-3}}{1 + x_{n-3}} = 1 \quad (3.11)$$

olur. $x_0 = 1$ olması durumunda $j = 4, 5, \dots$ için $(x_j, y_j) = (1, 1)$ olur.

(c) $y_{-2} = 1$ olsun. (3.1) denklem sisteminden

$$n = 1 \text{ için } x_1 = \frac{x_0 + y_{-2}}{1 + x_0y_{-2}} = \frac{1 + y_{-2}}{1 + y_{-2}} = 1 \text{ dir.}$$

$n - 1$ için $x_{n-1} = 1$ olsun. Buna göre,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-3}}{1 + x_{n-1}y_{n-3}} = \frac{1 + y_{n-3}}{1 + y_{n-3}} = 1 \quad (3.12)$$

olduğundan $n = k$ için de doğrudur. Aynı şekilde

$$n = 4 \text{ için } y_4 = \frac{y_3 + x_1}{1 + y_3x_1} = \frac{y_3 + 1}{1 + y_3} = 1 \text{ dir.}$$

$n - 1$ için $y_{n-1} = 1$ olsun. Buna göre,

$$y_n = \frac{y_{n-1} + x_{n-3}}{1 + y_{n-1}x_{n-3}} = \frac{1 + x_{n-3}}{1 + x_{n-3}} = 1 \quad (3.13)$$

olur. $y_{-2} = 1$ olması durumunda $j = 4, 5, \dots$ için $(x_j, y_j) = (1, 1)$ olur.

(d) $y_0 = 1$ olsun. O zaman (3.1) denklem sisteminden

$$n = 1 \text{ için } y_1 = \frac{y_0 + x_{-2}}{1 + y_0x_{-2}} = \frac{y_0 + 1}{1 + y_0} = 1 \text{ dir.}$$

$n-1$ için $y_{n-1} = 1$ olsun. Buna göre,

$$y_n = \frac{y_{n-1} + x_{n-3}}{1 + y_{n-1}x_{n-3}} = \frac{1 + x_{n-3}}{1 + x_{n-3}} = 1 \quad (3.14)$$

olduğundan $n = k$ için de doğrudur. Aynı şekilde

$$n = 4 \text{ için } x_4 = \frac{x_3 + y_1}{1 + x_3y_1} = \frac{x_3 + 1}{1 + x_3} = 1 \text{ dir.}$$

$n-1$ için $x_{n-1} = 1$ olsun. Buna göre,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-3}}{1 + x_{n-1}y_{n-3}} = \frac{1 + y_{n-3}}{1 + y_{n-3}} = 1 \quad (3.15)$$

olur. $y_0 = 1$ olması durumunda $j = 4, 5, \dots$ için $(x_j, y_j) = (1, 1)$ olur.

Tersine, $\ell \in \{0, -2\}$ için

$$x_\ell \neq 1 \vee y_\ell \neq 1 \quad (3.16)$$

olduğunu kabul edelim. Lemmayı ispatlamak için

$$x_n \neq 1 \text{ ve } y_n \neq 1, \quad n \geq 1 \quad (3.17)$$

olduğunu göstermemiz gerekli.

$$N \geq 1 \text{ için } x_N = y_N = 1 \quad (3.18)$$

ve

$$-1 \leq n \leq N-1 \text{ için } x_n \neq 1, y_n \neq 1 \quad (3.19)$$

olduğunu varsayalım.

$$1 = x_N = \frac{x_{N-1} + y_{N-3}}{1 + x_{N-1}y_{N-3}} \Rightarrow x_{N-1} + y_{N-3} = 1 + x_{N-1}y_{N-3} \Rightarrow (x_{N-1} - 1)(1 - y_{N-3}) = 0 \quad (3.20)$$

olur. Bu durumda $x_{N-1} = 1$ ya da $y_{N-3} = 1$ olur ki bu durum (3.19) koşulu ile çelişir.

Aynı yöntemle

$$1 = y_N = \frac{y_{N-1} + x_{N-3}}{1 + y_{N-1}x_{N-3}} \Rightarrow y_{N-1} + x_{N-3} = 1 + y_{N-1}x_{N-3} \Rightarrow (y_{N-1} - 1)(1 - x_{N-3}) = 0 \quad (3.21)$$

olur. Bu durumda da $y_{N-1} = 1$ ya da $x_{N-3} = 1$ olur ki bu durum da (3.19) koşulu ile çelişir.

Lemma 3.3. $\{(x_n, y_n)\}_{n=-2}^{\infty}$ (3.1) denklem sisteminin $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ pozitif denge noktasına eşit olmayan pozitif bir çözümü olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(a) $(x_{n+1} - x_n)(x_n - 1) < 0$ ve $(y_{n+1} - y_n)(y_n - 1) < 0$, $n \geq 0$ için

(b) $(x_{n+1} - 1)(x_n - 1)(1 - y_{n-2}) > 0$ ve $(y_{n+1} - 1)(y_n - 1)(1 - x_{n-2}) > 0$, $n \geq 0$ için

İspat.

(a) (3.1) denklem sisteminden kolaylıkla görüldüğü gibi

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + y_{n-2} - x_n^2 y_{n-2} - x_n}{1 + x_n y_{n-2}} = \frac{y_{n-2}(1 - x_n)(1 + x_n)}{1 + x_n y_{n-2}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.22)$$

Burada y_{n-2} , $(1 + x_n)$ ve $(1 + x_n y_{n-2})$ ifadeleri pozitif olduklarından $(x_{n+1} - x_n)(x_n - 1) < 0$ elde edilir. Aynı yöntemle

$$y_{n+1} - y_n = \frac{y_n + x_{n-2} - y_n^2 x_{n-2} - y_n}{1 + y_n x_{n-2}} = \frac{x_{n-2}(1 - y_n)(1 + y_n)}{1 + y_n x_{n-2}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.23)$$

Burada x_{n-2} , $(1 + y_n)$ ve $(1 + y_n x_{n-2})$ ifadeleri pozitif olduklarından $(y_{n+1} - y_n)(y_n - 1) < 0$ elde edilir.

(b) (3.1) denklem sisteminden

$$x_{n+1} - 1 = \frac{x_n + y_{n-2} - x_n y_{n-2} - 1}{1 + x_n y_{n-2}} = \frac{(x_n - 1)(1 - y_{n-2})}{1 + x_n y_{n-2}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.24)$$

olur. $(1 + x_n y_{n-2})$ ifadesi pozitif olduğundan $(x_{n+1} - 1)(x_n - 1)(1 - y_{n-2}) > 0$ elde edilir.

Aynı yöntemle

$$y_{n+1} - 1 = \frac{y_n + x_{n-2} - y_n x_{n-2} - 1}{1 + y_n x_{n-2}} = \frac{(y_n - 1)(1 - x_{n-2})}{1 + y_n x_{n-2}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.25)$$

olur. $(1 + y_n x_{n-2})$ ifadesi pozitif olduğundan $(y_{n+1} - 1)(y_n - 1)(1 - x_{n-2}) > 0$ elde edilir.

Lemma 3.4. $k = -2, -1, 0$ için $x_k, y_k < 1$ ise, $\{(x_n, y_n)\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü sonsuz terimli negatif bir yarı dönmeye sahiptir ve monoton olarak $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ pozitif denge noktasına yakınsar.

İspat. $k = -2, -1, 0$ için $x_k, y_k < 1$ ise, Lemma 3.3. (b)'ye göre $n \geq 0$ için $x_n, y_n < 1$ sonsuz terimli negatif bir yarı dönmeye sahiptir. Yani,

$$\begin{aligned}
 (x_1 - 1)(x_0 - 1)(1 - y_{-2}) &> 0 \Rightarrow x_1 < 1 & (y_1 - 1)(y_0 - 1)(1 - x_{-2}) &> 0 \Rightarrow y_1 < 1 \\
 (x_2 - 1)(x_1 - 1)(1 - y_{-1}) &> 0 \Rightarrow x_2 < 1 & (y_2 - 1)(y_1 - 1)(1 - x_{-1}) &> 0 \Rightarrow y_2 < 1 \\
 (x_3 - 1)(x_2 - 1)(1 - y_0) &> 0 \Rightarrow x_3 < 1 & (y_3 - 1)(y_2 - 1)(1 - x_0) &> 0 \Rightarrow y_3 < 1 \\
 (x_4 - 1)(x_3 - 1)(1 - y_1) &> 0 \Rightarrow x_4 < 1 & (y_4 - 1)(y_3 - 1)(1 - x_1) &> 0 \Rightarrow y_4 < 1 \\
 \dots & & \dots & \\
 (x_n - 1)(x_{n-1} - 1)(1 - y_{n-3}) &> 0 \Rightarrow x_n < 1 & (y_n - 1)(y_{n-1} - 1)(1 - x_{n-3}) &> 0 \Rightarrow y_n < 1
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

elde edilir. Lemma 3.3. (a)'ya göre ise $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned}
 (x_1 - x_0)(x_0 - 1) &< 0 \Rightarrow x_0 < x_1 \\
 (x_2 - x_1)(x_1 - 1) &< 0 \Rightarrow x_0 < x_1 < x_2 \\
 (x_3 - x_2)(x_2 - 1) &< 0 \Rightarrow x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \\
 \dots & \\
 (x_n - x_{n-1})(x_{n-1} - 1) &< 0 \Rightarrow x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

ve

$$\begin{aligned}
 (y_1 - y_0)(y_0 - 1) &< 0 \Rightarrow y_0 < y_1 \\
 (y_2 - y_1)(y_1 - 1) &< 0 \Rightarrow y_0 < y_1 < y_2 \\
 (y_3 - y_2)(y_2 - 1) &< 0 \Rightarrow y_0 < y_1 < y_2 < y_3 \\
 \dots & \\
 (y_n - y_{n-1})(y_{n-1} - 1) &< 0 \Rightarrow y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

olur. (3.26), (3.27) ve (3.28)'den $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n < 1$ ve $y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n < 1$ elde edilir. Bu iki ifadeden $\{(x_n, y_n)\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümünün $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ pozitif denge noktasına monoton olarak yakınsadığı açıktır.

Lemma 3.5. $\{(x_n, y_n)\}_{n=-2}^{\infty}$ (3.1) denklem sisteminin bir çözümü olsun.

Durum 1: $x_0 > 1$ ve $x_{-2}, x_{-1}, y_{-2}, y_{-1}, y_0 < 1$

Durum 2: $y_{-2} > 1$ ve $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 < 1$

Durum 3: $y_{-1} > 1$ ve $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_0 < 1$

Durum 4: $x_{-2}, x_{-1} > 1$ ve $x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0 < 1$

Durum 5: $x_{-1}, x_0 > 1$ ve $x_{-2}, y_{-2}, y_{-1}, y_0 < 1$

Durum 6: $x_{-2}, y_0 > 1$ ve $x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1} < 1$

Durum 7: $x_0, y_{-1} > 1$ ve $x_{-2}, x_{-1}, y_{-2}, y_0 < 1$

Durum 8: $x_0, y_{-2} > 1$ ve $x_{-2}, x_{-1}, y_{-1}, y_0 < 1$

Durum 9: $x_{-2}, x_{-1}, x_0 > 1$ ve $y_{-2}, y_{-1}, y_0 < 1$

Durum 10: $x_{-2}, x_{-1}, y_{-1} > 1$ ve $x_0, y_{-2}, y_0 < 1$

Durum 11: $x_{-1}, x_0, y_{-2} > 1$ ve $x_{-2}, y_{-1}, y_0 < 1$

Durum 12: $x_{-2}, y_{-2}, y_0 > 1$ ve $x_{-1}, x_0, y_{-1} < 1$

Durum 13: $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_0 > 1$ ve $y_{-2}, y_{-1} < 1$

Durum 14: $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-1} > 1$ ve $y_{-2}, y_0 < 1$

Durum 15: $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_0 > 1$ ve $y_{-1} < 1$

Yukarıdaki durumlardan herhangi birisi sağlanırsa,

(i) (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün her pozitif yarı dönmesi altı ya da iki terimden oluşur;

(ii) (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün her negatif yarı dönmesi dört ya da iki terimden oluşur;

(iii) (3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün her pozitif yarı dönmesi bir terimden oluşur;

(iv) (3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün her negatif yarı dönmesi beş, üç ya da bir terimden oluşur;

(v) (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $6^+, 2^-, 2^+, 4^-$ formundadır;

(vi) (3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $1^+, 3^-, 1^+, 5^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-$ formundadır.

Lemma 3.6. $\{(x_n, y_n)\}_{n=-2}^{\infty}$ (3.1) denklem sisteminin bir çözümü olsun.

Durum 16: $x_{-2}, x_0 > 1$ ve $x_{-1}, y_{-2}, y_{-1}, y_0 < 1$

Durum 17: $x_{-1}, y_{-2} > 1$ ve $x_{-2}, x_0, y_{-1}, y_0 < 1$

Durum 18: $x_{-2}, x_{-1}, y_0 > 1$ ve $x_0, y_{-2}, y_{-1} < 1$

Durum 19: $x_{-1}, x_0, y_0 > 1$ ve $x_{-2}, y_{-2}, y_{-1} < 1$

Durum 20: $x_0, y_{-2}, y_{-1} > 1$ ve $x_{-2}, x_{-1}, y_0 < 1$

Durum 21: $x_0, y_{-2}, y_0 > 1$ ve $x_{-2}, x_{-1}, y_{-1} < 1$

Durum 22: $x_{-2}, y_{-2}, y_{-1} > 1$ ve $x_{-1}, x_0, y_0 < 1$

Durum 23: $x_{-2}, x_0, y_{-1} > 1$ ve $x_{-1}, y_{-2}, y_0 < 1$

Durum 24: $x_{-1}, y_{-1}, y_0 > 1$ ve $x_{-2}, x_0, y_{-2} < 1$

Durum 25: $x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_0 > 1$ ve $x_{-2}, y_{-1} < 1$

Durum 26: $x_{-2}, y_{-2}, y_{-1}, y_0 > 1$ ve $x_{-1}, x_0 < 1$

Durum 27: $x_{-2}, x_{-1}, y_{-1}, y_0 > 1$ ve $x_0, y_{-2} < 1$

Durum 28: $x_{-2}, x_{-1}, y_{-2}, y_0 > 1$ ve $x_0, y_{-1} < 1$

Durum 29: $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 > 1$ ve $y_{-2} < 1$

Durum 30: $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1} > 1$ ve $y_0 < 1$

Yukarıdaki durumlardan herhangi birisi sağlanırsa,

(i) (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün her pozitif yarı dönmesi dört, iki ya da bir terimden oluşur;

- (ii) (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün her negatif yarı dönmesi iki ya da bir terimden oluşur;
- (iii) (3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün her pozitif yarı dönmesi üç, iki ya da bir terimden oluşur;
- (iv) (3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün her negatif yarı dönmesi üç ya da bir terimden oluşur;
- (v) (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $4^+, 1^-, 2^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 1^-$ formundadır;
- (vi) (3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $3^+, 3^-, 2^+, 1^-, 1^+, 1^-, 2^+, 1^-$ formundadır.

Lemma 3.7. $\{(x_n, y_n)\}_{n=-2}^{\infty}$ (3.1) denklem sisteminin bir çözümü olsun.

Durum 31: $x_{-2}, y_{-1} > 1$ ve $x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_0 < 1$

Durum 32: $y_{-2}, y_0 > 1$ ve $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-1} < 1$

Durum 33: $x_{-2}, x_{-1}, y_{-2} > 1$ ve $x_0, y_{-1}, y_0 < 1$

Durum 34: $x_{-1}, x_0, y_{-1} > 1$ ve $x_{-2}, y_{-2}, y_0 < 1$

Durum 35: $x_0, y_{-1}, y_0 > 1$ ve $x_{-2}, x_{-1}, y_{-2} < 1$

Durum 36: $x_{-2}, x_0, y_0 > 1$ ve $x_{-1}, y_{-2}, y_{-1} < 1$

Durum 37: $x_{-1}, y_{-2}, y_0 > 1$ ve $x_{-2}, x_0, y_{-1} < 1$

Durum 38: $x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1} > 1$ ve $x_{-2}, y_0 < 1$

Durum 39: $x_{-2}, x_0, y_{-1}, y_0 > 1$ ve $x_{-1}, y_{-2} < 1$

Durum 40: $x_{-2}, x_0, y_{-2}, y_{-1} > 1$ ve $x_{-1}, y_0 < 1$

Durum 41: $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2} > 1$ ve $y_{-1}, y_0 < 1$

Durum 42: $x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0 > 1$ ve $x_{-2} < 1$

Durum 43: $x_{-2}, x_{-1}, y_{-2}, y_{-1}, y_0 > 1$ ve $x_0 < 1$

Yukarıdaki durumlardan herhangi birisi sağlanırsa,

- (i) (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün her pozitif yarı dönmesi üç, iki ya da bir terimden oluşur;
- (ii) (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün her negatif yarı dönmesi üç ya da bir terimden oluşur;
- (iii) (3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün her pozitif yarı dönmesi dört, iki ya da bir terimden oluşur;
- (iv) (3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün her negatif yarı dönmesi iki ya da bir terimden oluşur;
- (v) (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $3^+, 3^-, 2^+, 1^-, 1^+, 1^-, 2^+, 1^-$ formundadır;
- (vi) (3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $4^+, 1^-, 2^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 1^-$ formundadır.

Lemma 3.8. $\{(x_n, y_n)\}_{n=-2}^{\infty}$ (3.1) denklem sisteminin bir çözümü olsun.

Durum 44: $x_{-2}, y_{-2} > 1$ ve $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 < 1$

Durum 45: $x_{-1}, y_{-1} > 1$ ve $x_{-2}, x_0, y_{-2}, y_0 < 1$

Durum 46: $x_0, y_0 > 1$ ve $x_{-2}, x_{-1}, y_{-2}, y_{-1} < 1$

Durum 47: $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 > 1$ ve $x_{-2}, y_{-2} < 1$

Durum 48: $x_{-2}, x_0, y_{-2}, y_0 > 1$ ve $x_{-1}, y_{-1} < 1$

Durum 49: $x_{-2}, x_{-1}, y_{-2}, y_{-1} > 1$ ve $x_0, y_0 < 1$

Durum 50: $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0 > 1$

Yukarıdaki durumlardan herhangi birisi sağlanırsa,

- (i) (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün her pozitif yarı dönmesi üç ya da bir terimden oluşur;

- (ii) (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün her negatif yarı dönmesi iki ya da bir terimden oluşur;
- (iii) (3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün her pozitif yarı dönmesi üç ya da bir terimden oluşur;
- (iv) (3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün her negatif yarı dönmesi iki ya da bir terimden oluşur;
- (v) (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $3^+, 1^-, 1^+, 2^-$, $3^+, 1^-, 1^+, 2^-$ formundadır;
- (vi) (3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $3^+, 1^-, 1^+, 2^-$, $3^+, 1^-, 1^+, 2^-$ formundadır.

Lemma 3.9. $\{(x_n, y_n)\}_{n=-2}^{\infty}$ (3.1) denklem sisteminin bir çözümü olsun.

Durum 51: $x_{-2} > 1$ ve $x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0 < 1$

Durum 52: $x_{-1} > 1$ ve $x_{-2}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0 < 1$

Durum 53: $y_0 > 1$ ve $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1} < 1$

Durum 54: $x_{-1}, y_0 > 1$ ve $x_{-2}, x_0, y_{-2}, y_{-1} < 1$

Durum 55: $y_{-2}, y_{-1} > 1$ ve $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_0 < 1$

Durum 56: $y_{-1}, y_0 > 1$ ve $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2} < 1$

Durum 57: $y_{-2}, y_{-1}, y_0 > 1$ ve $x_{-2}, x_{-1}, x_0 < 1$

Durum 58: $x_{-1}, y_{-2}, y_{-1} > 1$ ve $x_{-2}, x_0, y_0 < 1$

Durum 59: $x_{-2}, x_0, y_{-2} > 1$ ve $x_{-1}, y_{-1}, y_0 < 1$

Durum 60: $x_{-2}, y_{-1}, y_0 > 1$ ve $x_{-1}, x_0, y_{-2} < 1$

Durum 61: $x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0 > 1$ ve $x_{-2}, x_{-1} < 1$

Durum 62: $x_{-1}, y_{-2}, y_{-1}, y_0 > 1$ ve $x_{-2}, x_0 < 1$

Durum 63: $x_{-2}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0 > 1$ ve $x_{-1} < 1$

Yukarıdaki durumlardan herhangi birisi sağlanırsa,

- (i) (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün her pozitif yarı dönmesi bir terimden oluşur;
- (ii) (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün her negatif yarı dönmesi beş, üç ya da bir terimden oluşur;
- (iii) (3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün her pozitif yarı dönmesi altı ya da iki terimden oluşur;
- (iv) (3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün her negatif yarı dönmesi dört ya da iki terimden oluşur;
- (v) (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $1^+, 5^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 3^-$ formundadır;
- (vi) (3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $6^+, 2^-, 2^+, 4^-$ formundadır.

Denklem Sisteminin Kararlılığı

Teorem 3.1.'e göre (3.1) denklem sistemi $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ sıfır denge noktasında kararsız ve $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ pozitif denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır. (3.1) denklem sisteminin $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ pozitif denge noktasında global asimptotik kararlı olması için her pozitif $\{(x_n, y_n)\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümünün $n \rightarrow \infty$ iken $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ pozitif denge noktasına yakınsaması gerekir. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{y} = 1 \quad (3.29)$$

olmalıdır.

(1) (3.1) denklem sisteminin $\{(x_n, y_n)\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ pozitif denge noktasında salınımsız ise, Lemma 3.2. ve Lemma 3.4'e göre, ya $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ 'dir ya da $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ pozitif denge noktasına monoton olarak yakınsayan ve sonsuz sayıda terime sahip pozitif bir çözümdür. Her iki durumda da (3.29) denklemi sağlanır.

(2) (3.1) denklem sisteminin $\{(x_n, y_n)\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ pozitif denge noktasında kesin salınımlı olsun.

(i) Lemma 3.5'deki başlangıç koşullarını ele alalım. (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $6^+, 2^-, 2^+, 4^-$ şeklindedir.

Buna göre $n = 0, 1, \dots$ için aşağıdaki diziyi elde ederiz:

$$\left\{x_{p+14n}, x_{p+14n+1}, x_{p+14n+2}, x_{p+14n+3}, x_{p+14n+4}, x_{p+14n+5}\right\}^+, \left\{x_{p+14n+6}, x_{p+14n+7}\right\}^-, \left\{x_{p+14n+8}, x_{p+14n+9}\right\}^+, \left\{x_{p+14n+10}, x_{p+14n+11}, x_{p+14n+12}, x_{p+14n+13}\right\}^- \quad (3.30)$$

(3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri ise $1^+, 3^-, 1^+, 5^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-$ şeklindedir. $n = 0, 1, \dots$ için de aşağıdaki diziyi elde ederiz:

$$\left\{y_{p+14n}\right\}^+, \left\{y_{p+14n+1}, y_{p+14n+2}, y_{p+14n+3}\right\}^-, \left\{y_{p+14n+4}\right\}^+, \left\{y_{p+14n+5}, y_{p+14n+6}, y_{p+14n+7}, y_{p+14n+8}, y_{p+14n+9}\right\}^-, \left\{y_{p+14n+10}\right\}^+, \left\{y_{p+14n+11}\right\}^-, \left\{y_{p+14n+12}\right\}^+, \left\{y_{p+14n+13}\right\}^- \quad (3.31)$$

Buna göre, aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(a) $x_{p+14n} > x_{p+14n+1} > x_{p+14n+2} > x_{p+14n+3} > x_{p+14n+4} > x_{p+14n+5}$, $x_{p+14n+7} > x_{p+14n+6}$,

$x_{p+14n+8} > x_{p+14n+9}$, $x_{p+14n+13} > x_{p+14n+12} > x_{p+14n+11} > x_{p+14n+10}$ ve

$y_{p+14n+3} > y_{p+14n+2} > y_{p+14n+1}$, $y_{p+14n+9} > y_{p+14n+8} > y_{p+14n+7} > y_{p+14n+6} > y_{p+14n+5}$ 'dir.

(b) $x_{p+14n+5} x_{p+14n+6} > 1$, $x_{p+14n+7} x_{p+14n+8} < 1$, $x_{p+14n+9} x_{p+14n+10} > 1$, $x_{p+14n+13} x_{p+14n+14} < 1$ ve

$y_{p+14n} y_{p+14n+1} > 1$, $y_{p+14n+3} y_{p+14n+4} < 1$, $y_{p+14n+4} y_{p+14n+5} > 1$, $y_{p+14n+9} y_{p+14n+10} < 1$,

$y_{p+14n+10} y_{p+14n+11} > 1$, $y_{p+14n+11} y_{p+14n+12} < 1$, $y_{p+14n+12} y_{p+14n+13} > 1$, $y_{p+14n+13} y_{p+14n+14} < 1$ 'dir.

(a) Lemma 3.3. (a) 'dan yararlanırsak $n = 0, 1, \dots$ için

- $(x_{p+14n+1} - x_{p+14n})(x_{p+14n} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n} > 1$ olduğundan $x_{p+14n} > x_{p+14n+1}$ 'dir.
- $(x_{p+14n+2} - x_{p+14n+1})(x_{p+14n+1} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+1} > 1$ olduğundan $x_{p+14n+1} > x_{p+14n+2}$ 'dir.
- $(x_{p+14n+3} - x_{p+14n+2})(x_{p+14n+2} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+2} > 1$ olduğundan $x_{p+14n+2} > x_{p+14n+3}$ 'dir.
- $(x_{p+14n+4} - x_{p+14n+3})(x_{p+14n+3} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+3} > 1$ olduğundan $x_{p+14n+3} > x_{p+14n+4}$ 'dir.

- $(x_{p+14n+5} - x_{p+14n+4})(x_{p+14n+4} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+4} > 1$ olduğundan $x_{p+14n+4} > x_{p+14n+5}$ 'dir.

Buna göre $x_{p+14n} > x_{p+14n+1} > x_{p+14n+2} > x_{p+14n+3} > x_{p+14n+4} > x_{p+14n+5}$ elde edilir.

- $(x_{p+14n+7} - x_{p+14n+6})(x_{p+14n+6} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+6} < 1$ olduğundan $x_{p+14n+7} > x_{p+14n+6}$ 'dir.
- $(x_{p+14n+9} - x_{p+14n+8})(x_{p+14n+8} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+8} > 1$ olduğundan $x_{p+14n+8} > x_{p+14n+9}$ 'dir.
- $(x_{p+14n+11} - x_{p+14n+10})(x_{p+14n+10} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+10} < 1$ olduğundan $x_{p+14n+11} > x_{p+14n+10}$ 'dir.
- $(x_{p+14n+12} - x_{p+14n+11})(x_{p+14n+11} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+11} < 1$ olduğundan $x_{p+14n+12} > x_{p+14n+11}$ 'dir.
- $(x_{p+14n+13} - x_{p+14n+12})(x_{p+14n+12} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+12} < 1$ olduğundan $x_{p+14n+13} > x_{p+14n+12}$ 'dir.

Buna göre $x_{p+14n+13} > x_{p+14n+12} > x_{p+14n+11} > x_{p+14n+10}$ elde edilir. Aynı yöntemle

- $(y_{p+14n+2} - y_{p+14n+1})(y_{p+14n+1} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+1} < 1$ olduğundan $y_{p+14n+2} > y_{p+14n+1}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+3} - y_{p+14n+2})(y_{p+14n+2} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+2} < 1$ olduğundan $y_{p+14n+3} > y_{p+14n+2}$ 'dir.

Buna göre, $y_{p+14n+3} > y_{p+14n+2} > y_{p+14n+1}$ elde edilir.

- $(y_{p+14n+6} - y_{p+14n+5})(y_{p+14n+5} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+5} < 1$ olduğundan $y_{p+14n+6} > y_{p+14n+5}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+7} - y_{p+14n+6})(y_{p+14n+6} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+6} < 1$ olduğundan $y_{p+14n+7} > y_{p+14n+6}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+8} - y_{p+14n+7})(y_{p+14n+7} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+7} < 1$ olduğundan $y_{p+14n+8} > y_{p+14n+7}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+9} - y_{p+14n+8})(y_{p+14n+8} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+8} < 1$ olduğundan $y_{p+14n+9} > y_{p+14n+8}$ 'dir.

Buna göre, $y_{p+14n+9} > y_{p+14n+8} > y_{p+14n+7} > y_{p+14n+6} > y_{p+14n+5}$ elde edilir.

(b) $n = 0, 1, \dots$ için

- $$x_{p+14n+6} = \frac{x_{p+14n+5} + y_{p+14n+3}}{1 + x_{p+14n+5}y_{p+14n+3}} > \frac{x_{p+14n+5} + y_{p+14n+3}}{x_{p+14n+5}(1 + y_{p+14n+3})} > \frac{1}{x_{p+14n+5}}$$

- $$x_{p+14n+8} = \frac{x_{p+14n+7} + y_{p+14n+5}}{1 + x_{p+14n+7}y_{p+14n+5}} < \frac{x_{p+14n+7} + y_{p+14n+5}}{x_{p+14n+7}(1 + y_{p+14n+5})} < \frac{1}{x_{p+14n+7}}$$

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad x_{p+14n+10} &= \frac{x_{p+14n+9} + y_{p+14n+7}}{1 + x_{p+14n+9}y_{p+14n+7}} > \frac{x_{p+14n+9} + y_{p+14n+7}}{x_{p+14n+9}(1 + y_{p+14n+7})} > \frac{1}{x_{p+14n+9}} \\
\blacksquare \quad x_{p+14n+14} &= \frac{x_{p+14n+13} + y_{p+14n+11}}{1 + x_{p+14n+13}y_{p+14n+11}} < \frac{x_{p+14n+13} + y_{p+14n+11}}{x_{p+14n+13}(1 + y_{p+14n+11})} < \frac{1}{x_{p+14n+13}} \\
\blacksquare \quad y_{p+14n+1} &= \frac{y_{p+14n} + x_{p+14n-2}}{1 + y_{p+14n}x_{p+14n-2}} > \frac{y_{p+14n} + x_{p+14n-2}}{y_{p+14n}(1 + x_{p+14n-2})} > \frac{1}{y_{p+14n}} \\
\blacksquare \quad y_{p+14n+4} &= \frac{y_{p+14n+3} + x_{p+14n+1}}{1 + y_{p+14n+3}x_{p+14n+1}} < \frac{y_{p+14n+3} + x_{p+14n+1}}{y_{p+14n+3}(1 + x_{p+14n+1})} < \frac{1}{y_{p+14n+3}} \\
\blacksquare \quad y_{p+14n+5} &= \frac{y_{p+14n+4} + x_{p+14n+2}}{1 + y_{p+14n+4}x_{p+14n+2}} > \frac{y_{p+14n+4} + x_{p+14n+2}}{y_{p+14n+4}(1 + x_{p+14n+2})} > \frac{1}{y_{p+14n+4}} \\
\blacksquare \quad y_{p+14n+10} &= \frac{y_{p+14n+9} + x_{p+14n+7}}{1 + y_{p+14n+9}x_{p+14n+7}} < \frac{y_{p+14n+9} + x_{p+14n+7}}{y_{p+14n+9}(1 + x_{p+14n+7})} < \frac{1}{y_{p+14n+9}} \\
\blacksquare \quad y_{p+14n+11} &= \frac{y_{p+14n+10} + x_{p+14n+8}}{1 + y_{p+14n+10}x_{p+14n+8}} > \frac{y_{p+14n+10} + x_{p+14n+8}}{y_{p+14n+10}(1 + x_{p+14n+8})} > \frac{1}{y_{p+14n+10}} \\
\blacksquare \quad y_{p+14n+12} &= \frac{y_{p+14n+11} + x_{p+14n+9}}{1 + y_{p+14n+11}x_{p+14n+9}} < \frac{y_{p+14n+11} + x_{p+14n+9}}{y_{p+14n+11}(1 + x_{p+14n+9})} < \frac{1}{y_{p+14n+11}} \\
\blacksquare \quad y_{p+14n+13} &= \frac{y_{p+14n+12} + x_{p+14n+10}}{1 + y_{p+14n+12}x_{p+14n+10}} > \frac{y_{p+14n+12} + x_{p+14n+10}}{y_{p+14n+12}(1 + x_{p+14n+10})} > \frac{1}{y_{p+14n+12}} \\
\blacksquare \quad y_{p+14n+14} &= \frac{y_{p+14n+13} + x_{p+14n+11}}{1 + y_{p+14n+13}x_{p+14n+11}} < \frac{y_{p+14n+13} + x_{p+14n+11}}{y_{p+14n+13}(1 + x_{p+14n+11})} < \frac{1}{y_{p+14n+13}}
\end{aligned}$$

olduğu açıktır.

(a) ve (b) eşitsizliklerinden yararlanırsak,

$$\begin{aligned}
x_{p+14n+14} &< \frac{1}{x_{p+14n+13}} < \frac{1}{x_{p+14n+12}} < \frac{1}{x_{p+14n+11}} < \frac{1}{x_{p+14n+10}} < x_{p+14n+9} < x_{p+14n+8} < \\
\frac{1}{x_{p+14n+7}} &< \frac{1}{x_{p+14n+6}} < x_{p+14n+5} < x_{p+14n+4} < x_{p+14n+3} < x_{p+14n+2} < x_{p+14n+1} < x_{p+14n}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

ve

$$\begin{aligned}
y_{p+14n+14} &< \frac{1}{y_{p+14n+13}} < y_{p+14n+12} < \frac{1}{y_{p+14n+11}} < y_{p+14n+10} < \frac{1}{y_{p+14n+9}} < \frac{1}{y_{p+14n+8}} < \\
\frac{1}{y_{p+14n+7}} &< \frac{1}{y_{p+14n+6}} < \frac{1}{y_{p+14n+5}} < y_{p+14n+4} < \frac{1}{y_{p+14n+3}} < \frac{1}{y_{p+14n+2}} < \frac{1}{y_{p+14n+1}} < y_{p+14n}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

olur. Denklem (3.32) ve (3.33)'den kolaylıkla görüldüğü gibi $\{x_{p+14n}\}_{n=0}^{\infty}$ ile $\{y_{p+14n}\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır. Bu yüzden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n} = L_1 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n} = L_2 \tag{3.34}$$

limitleri mevcut ve sonludur. Denklem (3.32)'ye göre

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+14} &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+9} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+8} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+3} = \\
\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+1} = L_1
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+13} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+12} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+11} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+10} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+6} = \frac{1}{L_1}$$

dir.

Aynı şekilde denklem (3.33)'e göre

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+14} &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+12} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+10} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+4} = L_2 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+13} &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+11} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+9} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+8} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+6} = \\
\lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+1} = \frac{1}{L_2}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

dir.

$$x_{p+14n+14} = \frac{x_{p+14n+13} + y_{p+14n+11}}{1 + x_{p+14n+13}y_{p+14n+11}} \text{ ve } y_{p+14n+14} = \frac{y_{p+14n+13} + x_{p+14n+11}}{1 + y_{p+14n+13}x_{p+14n+11}} \tag{3.37}$$

denklemlerinin her iki tarafının limitleri alınır,

$$L_1 = \frac{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}{1 + \frac{1}{L_1} \cdot \frac{1}{L_2}} \text{ ve } L_2 = \frac{\frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_1}}{1 + \frac{1}{L_2} \cdot \frac{1}{L_1}} \text{ olur. İki denklemin çözümünden } L_1 = L_2 = 1 \text{ elde edilir.}$$

Böylece (3.34) denklemi sağlanır.

(ii) Lemma 3.6'daki başlangıç koşullarını ele alalım. (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $4^+, 1^-, 2^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 1^-$ şeklindedir. Buna göre $n = 0, 1, \dots$ için aşağıdaki diziyi elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \left\{ x_{p+14n}, x_{p+14n+1}, x_{p+14n+2}, x_{p+14n+3} \right\}^+, \left\{ x_{p+14n+4} \right\}^-, \left\{ x_{p+14n+5}, x_{p+14n+6} \right\}^+, \left\{ x_{p+14n+7}, x_{p+14n+8} \right\}^-, \\ & \left\{ x_{p+14n+9} \right\}^+, \left\{ x_{p+14n+10}, x_{p+14n+11} \right\}^-, \left\{ x_{p+14n+12} \right\}^+, \left\{ x_{p+14n+13} \right\}^- \end{aligned} \quad (3.38)$$

(3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri ise $3^+, 3^-, 2^+, 1^-, 1^+, 1^-, 2^+, 1^-$ şeklindedir. $n = 0, 1, \dots$ için de aşağıdaki diziyi elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \left\{ y_{p+14n}, y_{p+14n+1}, y_{p+14n+2} \right\}^+, \left\{ y_{p+14n+3}, y_{p+14n+4}, y_{p+14n+5} \right\}^-, \left\{ y_{p+14n+6}, y_{p+14n+7} \right\}^+, \left\{ y_{p+14n+8} \right\}^-, \\ & \left\{ y_{p+14n+9} \right\}^+, \left\{ y_{p+14n+10} \right\}^-, \left\{ y_{p+14n+11}, y_{p+14n+12} \right\}^+, \left\{ y_{p+14n+13} \right\}^- \end{aligned} \quad (3.39)$$

Buna göre, aşağıdaki ifadeler doğrudur:

$$(a) \ x_{p+14n} > x_{p+14n+1} > x_{p+14n+2} > x_{p+14n+3}, \ x_{p+14n+5} > x_{p+14n+6}, \ x_{p+14n+8} > x_{p+14n+7},$$

$$x_{p+14n+11} > x_{p+14n+10} \text{ ve } y_{p+14n} > y_{p+14n+1} > y_{p+14n+2}, \ y_{p+14n+5} > y_{p+14n+4} > y_{p+14n+3},$$

$$y_{p+14n+6} > y_{p+14n+7}, \ y_{p+14n+11} > y_{p+14n+12}$$

$$(b) \ x_{p+14n+3} x_{p+14n+4} > 1, \ x_{p+14n+4} x_{p+14n+5} < 1, \ x_{p+14n+6} x_{p+14n+7} > 1, \ x_{p+14n+8} x_{p+14n+9} < 1,$$

$$x_{p+14n+9} x_{p+14n+10} > 1, \ x_{p+14n+11} x_{p+14n+12} < 1, \ x_{p+14n+12} x_{p+14n+13} > 1, \ x_{p+14n+13} x_{p+14n+14} < 1 \text{ ve}$$

$$y_{p+14n+2} y_{p+14n+3} > 1, \ y_{p+14n+5} y_{p+14n+6} < 1, \ y_{p+14n+7} y_{p+14n+8} > 1, \ y_{p+14n+8} y_{p+14n+9} < 1,$$

$$y_{p+14n+9} y_{p+14n+10} > 1, \ y_{p+14n+10} y_{p+14n+11} < 1, \ y_{p+14n+12} y_{p+14n+13} > 1, \ y_{p+14n+13} y_{p+14n+14} < 1 \text{ 'dir.}$$

(a) Lemma 3.3. (a) 'den yararlanırsak $n = 0, 1, \dots$ için

$$\blacksquare \quad (x_{p+14n+1} - x_{p+14n})(x_{p+14n} - 1) < 0 \text{ ve } x_{p+14n} > 1 \text{ olduğundan } x_{p+14n} > x_{p+14n+1} \text{ 'dir.}$$

- $(x_{p+14n+2} - x_{p+14n+1})(x_{p+14n+1} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+1} > 1$ olduğundan $x_{p+14n+1} > x_{p+14n+2}$ 'dir.
- $(x_{p+14n+3} - x_{p+14n+2})(x_{p+14n+2} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+2} > 1$ olduğundan $x_{p+14n+2} > x_{p+14n+3}$ 'dir.

Buna göre $x_{p+14n} > x_{p+14n+1} > x_{p+14n+2} > x_{p+14n+3}$ elde edilir.

- $(x_{p+14n+6} - x_{p+14n+5})(x_{p+14n+5} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+5} > 1$ olduğundan $x_{p+14n+5} > x_{p+14n+6}$ 'dir.
- $(x_{p+14n+8} - x_{p+14n+7})(x_{p+14n+7} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+7} < 1$ olduğundan $x_{p+14n+8} > x_{p+14n+7}$ 'dir.
- $(x_{p+14n+11} - x_{p+14n+10})(x_{p+14n+10} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+10} < 1$ olduğundan $x_{p+14n+11} > x_{p+14n+10}$ 'dir.

Aynı yöntemle

- $(y_{p+14n+1} - y_{p+14n})(y_{p+14n} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n} > 1$ olduğundan $y_{p+14n} > y_{p+14n+1}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+2} - y_{p+14n+1})(y_{p+14n+1} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+1} > 1$ olduğundan $y_{p+14n+1} > y_{p+14n+2}$ 'dir.

Buna göre, $y_{p+14n} > y_{p+14n+1} > y_{p+14n+2}$ elde edilir.

- $(y_{p+14n+4} - y_{p+14n+3})(y_{p+14n+3} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+3} < 1$ olduğundan $y_{p+14n+4} > y_{p+14n+3}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+5} - y_{p+14n+4})(y_{p+14n+4} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+4} < 1$ olduğundan $y_{p+14n+5} > y_{p+14n+4}$ 'dir.

Buna göre, $y_{p+14n+5} > y_{p+14n+4} > y_{p+14n+3}$ elde edilir.

- $(y_{p+14n+7} - y_{p+14n+6})(y_{p+14n+6} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+6} > 1$ olduğundan $y_{p+14n+6} > y_{p+14n+7}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+12} - y_{p+14n+11})(y_{p+14n+11} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+11} > 1$ olduğundan $y_{p+14n+11} > y_{p+14n+12}$ 'dir.

(b) $n = 0, 1, \dots$ için

- $$x_{p+14n+4} = \frac{x_{p+14n+3} + y_{p+14n+1}}{1 + x_{p+14n+3}y_{p+14n+1}} > \frac{x_{p+14n+3} + y_{p+14n+1}}{x_{p+14n+3}(1 + y_{p+14n+1})} > \frac{1}{x_{p+14n+3}}$$
- $$x_{p+14n+5} = \frac{x_{p+14n+4} + y_{p+14n+2}}{1 + x_{p+14n+4}y_{p+14n+2}} < \frac{x_{p+14n+4} + y_{p+14n+2}}{x_{p+14n+4}(1 + y_{p+14n+2})} < \frac{1}{x_{p+14n+4}}$$
- $$x_{p+14n+7} = \frac{x_{p+14n+6} + y_{p+14n+4}}{1 + x_{p+14n+6}y_{p+14n+4}} > \frac{x_{p+14n+6} + y_{p+14n+4}}{x_{p+14n+6}(1 + y_{p+14n+4})} > \frac{1}{x_{p+14n+6}}$$

- $x_{p+14n+9} = \frac{x_{p+14n+8} + y_{p+14n+6}}{1 + x_{p+14n+8}y_{p+14n+6}} < \frac{x_{p+14n+8} + y_{p+14n+6}}{x_{p+14n+8}(1 + y_{p+14n+6})} < \frac{1}{x_{p+14n+8}}$
- $x_{p+14n+10} = \frac{x_{p+14n+9} + y_{p+14n+7}}{1 + x_{p+14n+9}y_{p+14n+7}} > \frac{x_{p+14n+9} + y_{p+14n+7}}{x_{p+14n+9}(1 + y_{p+14n+7})} > \frac{1}{x_{p+14n+9}}$
- $x_{p+14n+12} = \frac{x_{p+14n+11} + y_{p+14n+9}}{1 + x_{p+14n+11}y_{p+14n+9}} < \frac{x_{p+14n+11} + y_{p+14n+9}}{x_{p+14n+11}(1 + y_{p+14n+9})} < \frac{1}{x_{p+14n+11}}$
- $x_{p+14n+13} = \frac{x_{p+14n+12} + y_{p+14n+10}}{1 + x_{p+14n+12}y_{p+14n+10}} > \frac{x_{p+14n+12} + y_{p+14n+10}}{x_{p+14n+12}(1 + y_{p+14n+10})} > \frac{1}{x_{p+14n+12}}$
- $x_{p+14n+14} = \frac{x_{p+14n+13} + y_{p+14n+11}}{1 + x_{p+14n+13}y_{p+14n+11}} < \frac{x_{p+14n+13} + y_{p+14n+11}}{x_{p+14n+13}(1 + y_{p+14n+11})} < \frac{1}{x_{p+14n+13}}$
- $y_{p+14n+3} = \frac{y_{p+14n+2} + x_{p+14n}}{1 + y_{p+14n+2}x_{p+14n}} > \frac{y_{p+14n+2} + x_{p+14n}}{y_{p+14n+2}(1 + x_{p+14n})} > \frac{1}{y_{p+14n+2}}$
- $y_{p+14n+6} = \frac{y_{p+14n+5} + x_{p+14n+3}}{1 + y_{p+14n+5}x_{p+14n+3}} < \frac{y_{p+14n+5} + x_{p+14n+3}}{y_{p+14n+5}(1 + x_{p+14n+3})} < \frac{1}{y_{p+14n+5}}$
- $y_{p+14n+8} = \frac{y_{p+14n+7} + x_{p+14n+5}}{1 + y_{p+14n+7}x_{p+14n+5}} > \frac{y_{p+14n+7} + x_{p+14n+5}}{y_{p+14n+7}(1 + x_{p+14n+5})} > \frac{1}{y_{p+14n+7}}$
- $y_{p+14n+9} = \frac{y_{p+14n+8} + x_{p+14n+6}}{1 + y_{p+14n+8}x_{p+14n+6}} < \frac{y_{p+14n+8} + x_{p+14n+6}}{y_{p+14n+8}(1 + x_{p+14n+6})} < \frac{1}{y_{p+14n+8}}$
- $y_{p+14n+10} = \frac{y_{p+14n+9} + x_{p+14n+7}}{1 + y_{p+14n+9}x_{p+14n+7}} > \frac{y_{p+14n+9} + x_{p+14n+7}}{y_{p+14n+9}(1 + x_{p+14n+7})} > \frac{1}{y_{p+14n+9}}$
- $y_{p+14n+11} = \frac{y_{p+14n+10} + x_{p+14n+8}}{1 + y_{p+14n+10}x_{p+14n+8}} < \frac{y_{p+14n+10} + x_{p+14n+8}}{y_{p+14n+10}(1 + x_{p+14n+8})} < \frac{1}{y_{p+14n+10}}$
- $y_{p+14n+13} = \frac{y_{p+14n+12} + x_{p+14n+10}}{1 + y_{p+14n+12}x_{p+14n+10}} > \frac{y_{p+14n+12} + x_{p+14n+10}}{y_{p+14n+12}(1 + x_{p+14n+10})} > \frac{1}{y_{p+14n+12}}$
- $y_{p+14n+14} = \frac{y_{p+14n+13} + x_{p+14n+11}}{1 + y_{p+14n+13}x_{p+14n+11}} < \frac{y_{p+14n+13} + x_{p+14n+11}}{y_{p+14n+13}(1 + x_{p+14n+11})} < \frac{1}{y_{p+14n+13}}$

olduğu açıktır.

(a) ve (b) eşitsizliklerinden yararlanırsak,

$$\begin{aligned} x_{p+14n+14} &< \frac{1}{x_{p+14n+13}} < x_{p+14n+12} < \frac{1}{x_{p+14n+11}} < \frac{1}{x_{p+14n+10}} < x_{p+14n+9} < \frac{1}{x_{p+14n+8}} < \\ &\frac{1}{x_{p+14n+7}} < x_{p+14n+6} < x_{p+14n+5} < \frac{1}{x_{p+14n+4}} < x_{p+14n+3} < x_{p+14n+2} < x_{p+14n+1} < x_{p+14n} \end{aligned} \quad (3.40)$$

ve

$$\begin{aligned} y_{p+14n+14} &< \frac{1}{y_{p+14n+13}} < y_{p+14n+12} < y_{p+14n+11} < \frac{1}{y_{p+14n+10}} < y_{p+14n+9} < \frac{1}{y_{p+14n+8}} < \\ &y_{p+14n+7} < y_{p+14n+6} < \frac{1}{y_{p+14n+5}} < \frac{1}{y_{p+14n+4}} < \frac{1}{y_{p+14n+3}} < y_{p+14n+2} < y_{p+14n+1} < y_{p+14n} \end{aligned} \quad (3.41)$$

olur. Denklem (3.40) ve (3.41)'den kolaylıkla görüldüğü gibi $\{x_{p+14n}\}_{n=0}^{\infty}$ ile $\{y_{p+14n}\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır. Bu yüzden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n} = L_3 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n} = L_4 \quad (3.42)$$

limitleri mevcut ve sonludur. Denklem (3.40)'a göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+14} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+12} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+9} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+6} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+3} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+1} = L_3 \quad (3.43)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+13} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+11} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+10} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+8} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+4} = \frac{1}{L_3}$$

dir. Aynı şekilde denklem (3.41)'e göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+14} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+12} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+11} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+9} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+6} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+1} = L_4 \quad (3.44)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+13} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+10} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+8} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+3} = \frac{1}{L_4}$$

dir.

$$x_{p+14n+14} = \frac{x_{p+14n+13} + y_{p+14n+11}}{1 + x_{p+14n+13} y_{p+14n+11}} \text{ ve } y_{p+14n+14} = \frac{y_{p+14n+13} + x_{p+14n+11}}{1 + y_{p+14n+13} x_{p+14n+11}} \quad (3.45)$$

denklemlerinin her iki tarafının limitleri alınırsa,

$$L_3 = \frac{\frac{1}{L_3} + L_4}{1 + \frac{1}{L_3} L_4} \text{ ve } L_4 = \frac{\frac{1}{L_4} + \frac{1}{L_3}}{1 + \frac{1}{L_4} \frac{1}{L_3}} \text{ olur. İki denklemin çözümünden } L_3 = L_4 = 1 \text{ elde edilir.}$$

Böylece (3.34) denklemi sağlanır.

(iii) Lemma 3.7'deki başlangıç koşullarını ele alalım. (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $3^+, 3^-, 2^+, 1^-, 1^+, 1^-, 2^+, 1^-$ şeklindedir. Buna göre $n = 0, 1, \dots$ için aşağıdaki diziyi elde ederiz:

$$\left\{x_{p+14n}, x_{p+14n+1}, x_{p+14n+2}\right\}^+, \left\{x_{p+14n+3}, x_{p+14n+4}, x_{p+14n+5}\right\}^-, \left\{x_{p+14n+6}, x_{p+14n+7}\right\}^+, \left\{x_{p+14n+8}\right\}^-, \\ \left\{x_{p+14n+9}\right\}^+, \left\{x_{p+14n+10}\right\}^-, \left\{x_{p+14n+11}, x_{p+14n+12}\right\}^+, \left\{x_{p+14n+13}\right\}^- \quad (3.46)$$

(3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri ise $4^+, 1^-, 2^+, 2^-, 1^+, 2^-, 1^+, 1^-$ şeklindedir. $n = 0, 1, \dots$ için de aşağıdaki diziyi elde ederiz:

$$\left\{y_{p+14n}, y_{p+14n+1}, y_{p+14n+2}, y_{p+14n+3}\right\}^+, \left\{y_{p+14n+4}\right\}^-, \left\{y_{p+14n+5}, y_{p+14n+6}\right\}^+, \left\{y_{p+14n+7}, y_{p+14n+8}\right\}^-, \\ \left\{y_{p+14n+9}\right\}^+, \left\{y_{p+14n+10}, y_{p+14n+11}\right\}^-, \left\{y_{p+14n+12}\right\}^+, \left\{y_{p+14n+13}\right\}^- \quad (3.47)$$

Buna göre, aşağıdaki ifadeler doğrudur:

$$(a) x_{p+14n} > x_{p+14n+1} > x_{p+14n+2}, x_{p+14n+5} > x_{p+14n+4} > x_{p+14n+3}, x_{p+14n+6} > x_{p+14n+7},$$

$$x_{p+14n+11} > x_{p+14n+12} \text{ ve } y_{p+14n} > y_{p+14n+1} > y_{p+14n+2} > y_{p+14n+3}, y_{p+14n+5} > y_{p+14n+6},$$

$$y_{p+14n+8} > y_{p+14n+7}, y_{p+14n+11} > y_{p+14n+10}$$

$$(b) x_{p+14n+2} x_{p+14n+3} > 1, x_{p+14n+5} x_{p+14n+6} < 1, x_{p+14n+7} x_{p+14n+8} > 1, x_{p+14n+8} x_{p+14n+9} < 1,$$

$$x_{p+14n+9} x_{p+14n+10} > 1, x_{p+14n+10} x_{p+14n+11} < 1, x_{p+14n+12} x_{p+14n+13} > 1, x_{p+14n+13} x_{p+14n+14} < 1 \text{ ve}$$

$$y_{p+14n+3} y_{p+14n+4} > 1, y_{p+14n+4} y_{p+14n+5} < 1, y_{p+14n+6} y_{p+14n+7} > 1, y_{p+14n+8} y_{p+14n+9} < 1,$$

$$y_{p+14n+9} y_{p+14n+10} > 1, y_{p+14n+11} y_{p+14n+12} < 1, y_{p+14n+12} y_{p+14n+13} > 1, y_{p+14n+13} y_{p+14n+14} < 1 \text{ 'dir.}$$

(a) Lemma 3.3. (a) 'dan yararlanırsak $n = 0, 1, \dots$ için

- $(x_{p+14n+1} - x_{p+14n})(x_{p+14n} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n} > 1$ olduğundan $x_{p+14n} > x_{p+14n+1}$ 'dir.
- $(x_{p+14n+2} - x_{p+14n+1})(x_{p+14n+1} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+1} > 1$ olduğundan $x_{p+14n+1} > x_{p+14n+2}$ 'dir.

Buna göre $x_{p+14n} > x_{p+14n+1} > x_{p+14n+2}$ elde edilir.

- $(x_{p+14n+4} - x_{p+14n+3})(x_{p+14n+3} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+3} < 1$ olduğundan $x_{p+14n+4} > x_{p+14n+3}$ 'dir.
- $(x_{p+14n+5} - x_{p+14n+4})(x_{p+14n+4} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+4} < 1$ olduğundan $x_{p+14n+5} > x_{p+14n+4}$ 'dir.

Buna göre $x_{p+14n+5} > x_{p+14n+4} > x_{p+14n+3}$ elde edilir.

- $(x_{p+14n+7} - x_{p+14n+6})(x_{p+14n+6} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+6} > 1$ olduğundan $x_{p+14n+6} > x_{p+14n+7}$ 'dir.
- $(x_{p+14n+12} - x_{p+14n+11})(x_{p+14n+11} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+11} > 1$ olduğundan $x_{p+14n+11} > x_{p+14n+12}$ 'dir.

Aynı yöntemle

- $(y_{p+14n+1} - y_{p+14n})(y_{p+14n} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n} > 1$ olduğundan $y_{p+14n} > y_{p+14n+1}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+2} - y_{p+14n+1})(y_{p+14n+1} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+1} > 1$ olduğundan $y_{p+14n+1} > y_{p+14n+2}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+3} - y_{p+14n+2})(y_{p+14n+2} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+2} > 1$ olduğundan $y_{p+14n+2} > y_{p+14n+3}$ 'dir.

Buna göre, $y_{p+14n} > y_{p+14n+1} > y_{p+14n+2} > y_{p+14n+3}$ elde edilir.

- $(y_{p+14n+6} - y_{p+14n+5})(y_{p+14n+5} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+5} > 1$ olduğundan $y_{p+14n+5} > y_{p+14n+6}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+8} - y_{p+14n+7})(y_{p+14n+7} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+7} < 1$ olduğundan $y_{p+14n+8} > y_{p+14n+7}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+11} - y_{p+14n+10})(y_{p+14n+10} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+10} < 1$ olduğundan $y_{p+14n+11} > y_{p+14n+10}$ 'dir.

(b) $n = 0, 1, \dots$ için

- $$x_{p+14n+3} = \frac{x_{p+14n+2} + y_{p+14n}}{1 + x_{p+14n+2}y_{p+14n}} > \frac{x_{p+14n+2} + y_{p+14n}}{x_{p+14n+2}(1 + y_{p+14n})} > \frac{1}{x_{p+14n+2}}$$
- $$x_{p+14n+6} = \frac{x_{p+14n+5} + y_{p+14n+3}}{1 + x_{p+14n+5}y_{p+14n+3}} < \frac{x_{p+14n+5} + y_{p+14n+3}}{x_{p+14n+5}(1 + y_{p+14n+3})} < \frac{1}{x_{p+14n+5}}$$
- $$x_{p+14n+8} = \frac{x_{p+14n+7} + y_{p+14n+5}}{1 + x_{p+14n+7}y_{p+14n+5}} > \frac{x_{p+14n+7} + y_{p+14n+5}}{x_{p+14n+7}(1 + y_{p+14n+5})} > \frac{1}{x_{p+14n+7}}$$

- $x_{p+14n+9} = \frac{x_{p+14n+8} + y_{p+14n+6}}{1 + x_{p+14n+8}y_{p+14n+6}} < \frac{x_{p+14n+8} + y_{p+14n+6}}{x_{p+14n+8}(1 + y_{p+14n+6})} < \frac{1}{x_{p+14n+8}}$
- $x_{p+14n+10} = \frac{x_{p+14n+9} + y_{p+14n+7}}{1 + x_{p+14n+9}y_{p+14n+7}} > \frac{x_{p+14n+9} + y_{p+14n+7}}{x_{p+14n+9}(1 + y_{p+14n+7})} > \frac{1}{x_{p+14n+9}}$
- $x_{p+14n+11} = \frac{x_{p+14n+10} + y_{p+14n+8}}{1 + x_{p+14n+10}y_{p+14n+8}} < \frac{x_{p+14n+10} + y_{p+14n+8}}{x_{p+14n+10}(1 + y_{p+14n+8})} < \frac{1}{x_{p+14n+10}}$
- $x_{p+14n+13} = \frac{x_{p+14n+12} + y_{p+14n+10}}{1 + x_{p+14n+12}y_{p+14n+10}} > \frac{x_{p+14n+12} + y_{p+14n+10}}{x_{p+14n+12}(1 + y_{p+14n+10})} > \frac{1}{x_{p+14n+12}}$
- $x_{p+14n+14} = \frac{x_{p+14n+13} + y_{p+14n+11}}{1 + x_{p+14n+13}y_{p+14n+11}} < \frac{x_{p+14n+13} + y_{p+14n+11}}{x_{p+14n+13}(1 + y_{p+14n+11})} < \frac{1}{x_{p+14n+13}}$
- $y_{p+14n+4} = \frac{y_{p+14n+3} + x_{p+14n+1}}{1 + y_{p+14n+3}x_{p+14n+1}} > \frac{y_{p+14n+3} + x_{p+14n+1}}{y_{p+14n+3}(1 + x_{p+14n+1})} > \frac{1}{y_{p+14n+3}}$
- $y_{p+14n+5} = \frac{y_{p+14n+4} + x_{p+14n+2}}{1 + y_{p+14n+4}x_{p+14n+2}} < \frac{y_{p+14n+4} + x_{p+14n+2}}{y_{p+14n+4}(1 + x_{p+14n+2})} < \frac{1}{y_{p+14n+4}}$
- $y_{p+14n+7} = \frac{y_{p+14n+6} + x_{p+14n+4}}{1 + y_{p+14n+6}x_{p+14n+4}} > \frac{y_{p+14n+6} + x_{p+14n+4}}{y_{p+14n+6}(1 + x_{p+14n+4})} > \frac{1}{y_{p+14n+6}}$
- $y_{p+14n+9} = \frac{y_{p+14n+8} + x_{p+14n+6}}{1 + y_{p+14n+8}x_{p+14n+6}} < \frac{y_{p+14n+8} + x_{p+14n+6}}{y_{p+14n+8}(1 + x_{p+14n+6})} < \frac{1}{y_{p+14n+8}}$
- $y_{p+14n+10} = \frac{y_{p+14n+9} + x_{p+14n+7}}{1 + y_{p+14n+9}x_{p+14n+7}} > \frac{y_{p+14n+9} + x_{p+14n+7}}{y_{p+14n+9}(1 + x_{p+14n+7})} > \frac{1}{y_{p+14n+9}}$
- $y_{p+14n+12} = \frac{y_{p+14n+11} + x_{p+14n+9}}{1 + y_{p+14n+11}x_{p+14n+9}} < \frac{y_{p+14n+11} + x_{p+14n+9}}{y_{p+14n+11}(1 + x_{p+14n+9})} < \frac{1}{y_{p+14n+11}}$
- $y_{p+14n+13} = \frac{y_{p+14n+12} + x_{p+14n+10}}{1 + y_{p+14n+12}x_{p+14n+10}} > \frac{y_{p+14n+12} + x_{p+14n+10}}{y_{p+14n+12}(1 + x_{p+14n+10})} > \frac{1}{y_{p+14n+12}}$
- $y_{p+14n+14} = \frac{y_{p+14n+13} + x_{p+14n+11}}{1 + y_{p+14n+13}x_{p+14n+11}} < \frac{y_{p+14n+13} + x_{p+14n+11}}{y_{p+14n+13}(1 + x_{p+14n+11})} < \frac{1}{y_{p+14n+13}}$

olduğu aıktır.

(a) ve (b) eşitsizliklerinden yararlanırsak,

$$\begin{aligned} x_{p+14n+14} &< \frac{1}{x_{p+14n+13}} < x_{p+14n+12} < x_{p+14n+11} < \frac{1}{x_{p+14n+10}} < x_{p+14n+9} < \frac{1}{x_{p+14n+8}} < \\ x_{p+14n+7} &< x_{p+14n+6} < \frac{1}{x_{p+14n+5}} < \frac{1}{x_{p+14n+4}} < \frac{1}{x_{p+14n+3}} < x_{p+14n+2} < x_{p+14n+1} < x_{p+14n} \end{aligned} \quad (3.48)$$

ve

$$\begin{aligned} y_{p+14n+14} &< \frac{1}{y_{p+14n+13}} < y_{p+14n+12} < \frac{1}{y_{p+14n+11}} < \frac{1}{y_{p+14n+10}} < y_{p+14n+9} < \frac{1}{y_{p+14n+8}} < \\ \frac{1}{y_{p+14n+7}} &< y_{p+14n+6} < y_{p+14n+5} < \frac{1}{y_{p+14n+4}} < y_{p+14n+3} < y_{p+14n+2} < y_{p+14n+1} < y_{p+14n} \end{aligned} \quad (3.49)$$

olur. Denklem (3.48) ve (3.49)'dan kolaylıkla görüldüğü gibi $\{x_{p+14n}\}_{n=0}^{\infty}$ ile $\{y_{p+14n}\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır. Bu yüzden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n} = L_5 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n} = L_6 \quad (3.50)$$

limitleri mevcut ve sonludur. Denklem (3.48)'e göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+14} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+12} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+11} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+9} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+6} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+1} = L_5 \quad (3.51)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+13} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+10} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+8} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+3} = \frac{1}{L_5}$$

dir. Aynı şekilde denklem (3.50)'ye göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+14} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+12} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+9} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+6} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+3} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+1} = L_6 \quad (3.52)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+13} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+11} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+10} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+8} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+4} = \frac{1}{L_6}$$

dir.

$$x_{p+14n+14} = \frac{x_{p+14n+13} + y_{p+14n+11}}{1 + x_{p+14n+13}y_{p+14n+11}} \text{ ve } y_{p+14n+14} = \frac{y_{p+14n+13} + x_{p+14n+11}}{1 + y_{p+14n+13}x_{p+14n+11}} \quad (3.53)$$

denklemlerinin her iki tarafının limitleri alınır,

$$L_5 = \frac{\frac{1}{L_5} + \frac{1}{L_6}}{1 + \frac{1}{L_5} \frac{1}{L_6}} \text{ ve } L_6 = \frac{\frac{1}{L_6} + L_5}{1 + \frac{1}{L_6} L_5} \text{ olur. İki denklemin çözümünden } L_5 = L_6 = 1 \text{ elde edilir.}$$

Böylece (3.34) denklemi sağlanır.

(iv) Lemma 3.8'deki başlangıç koşullarını ele alalım. (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $3^+, 1^-, 1^+, 2^-, 3^+, 1^-, 1^+, 2^-$ şeklindedir. Buna göre $n = 0, 1, \dots$ için aşağıdaki diziyi elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \left\{ x_{p+14n}, x_{p+14n+1}, x_{p+14n+2} \right\}^+, \left\{ x_{p+14n+3} \right\}^-, \left\{ x_{p+14n+4} \right\}^+, \left\{ x_{p+14n+5}, x_{p+14n+6} \right\}^-, \\ & \left\{ x_{p+14n+7}, x_{p+14n+8}, x_{p+14n+9} \right\}^+, \left\{ x_{p+14n+10} \right\}^-, \left\{ x_{p+14n+11} \right\}^+, \left\{ x_{p+14n+12}, x_{p+14n+13} \right\}^- \end{aligned} \quad (3.54)$$

(3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri ise $3^+, 1^-, 1^+, 2^-, 3^+, 1^-, 1^+, 2^-$ şeklindedir. $n = 0, 1, \dots$ için de aşağıdaki diziyi elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \left\{ y_{p+14n}, y_{p+14n+1}, y_{p+14n+2} \right\}^+, \left\{ y_{p+14n+3} \right\}^-, \left\{ y_{p+14n+4} \right\}^+, \left\{ y_{p+14n+5}, y_{p+14n+6} \right\}^-, \\ & \left\{ y_{p+14n+7}, y_{p+14n+8}, y_{p+14n+9} \right\}^+, \left\{ y_{p+14n+10} \right\}^-, \left\{ y_{p+14n+11} \right\}^+, \left\{ y_{p+14n+12}, y_{p+14n+13} \right\}^- \end{aligned} \quad (3.55)$$

Buna göre, aşağıdaki ifadeler doğrudur:

$$(a) \ x_{p+14n} > x_{p+14n+1} > x_{p+14n+2}, \ x_{p+14n+6} > x_{p+14n+5}, \ x_{p+14n+7} > x_{p+14n+8} > x_{p+14n+9},$$

$$x_{p+14n+13} > x_{p+14n+12} \text{ ve } y_{p+14n} > y_{p+14n+1} > y_{p+14n+2}, y_{p+14n+6} > y_{p+14n+5}, y_{p+14n+7} > y_{p+14n+8} > y_{p+14n+9}$$

$$y_{p+14n+13} > y_{p+14n+12}$$

$$(b) \ x_{p+14n+2} x_{p+14n+3} > 1, \ x_{p+14n+3} x_{p+14n+4} < 1, \ x_{p+14n+4} x_{p+14n+5} > 1, \ x_{p+14n+6} x_{p+14n+7} < 1,$$

$$x_{p+14n+9} x_{p+14n+10} > 1, \ x_{p+14n+10} x_{p+14n+11} < 1, \ x_{p+14n+11} x_{p+14n+12} > 1, \ x_{p+14n+13} x_{p+14n+14} < 1 \text{ ve}$$

$$y_{p+14n+2} y_{p+14n+3} > 1, \ y_{p+14n+3} y_{p+14n+4} < 1, \ y_{p+14n+4} y_{p+14n+5} > 1, \ y_{p+14n+6} y_{p+14n+7} < 1,$$

$$y_{p+14n+9} y_{p+14n+10} > 1, \ y_{p+14n+10} y_{p+14n+11} < 1, \ y_{p+14n+11} y_{p+14n+12} > 1, \ y_{p+14n+13} y_{p+14n+14} < 1 \text{ 'dir.}$$

(a) Lemma 3.3. (a) 'dan yararlanırsak,

$$\blacksquare \ (x_{p+14n+1} - x_{p+14n})(x_{p+14n} - 1) < 0 \text{ ve } x_{p+14n} > 1 \text{ olduğundan } x_{p+14n} > x_{p+14n+1} \text{ 'dir.}$$

$$\blacksquare \ (x_{p+14n+2} - x_{p+14n+1})(x_{p+14n+1} - 1) < 0 \text{ ve } x_{p+14n+1} > 1 \text{ olduğundan } x_{p+14n+1} > x_{p+14n+2} \text{ 'dir.}$$

Buna göre $x_{p+14n} > x_{p+14n+1} > x_{p+14n+2}$ elde edilir.

- $(x_{p+14n+6} - x_{p+14n+5})(x_{p+14n+5} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+5} < 1$ olduğundan $x_{p+14n+6} > x_{p+14n+5}$ 'dir.
- $(x_{p+14n+8} - x_{p+14n+7})(x_{p+14n+7} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+7} > 1$ olduğundan $x_{p+14n+7} > x_{p+14n+8}$ 'dir.
- $(x_{p+14n+9} - x_{p+14n+8})(x_{p+14n+8} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+8} > 1$ olduğundan $x_{p+14n+8} > x_{p+14n+9}$ 'dir.

Buna göre $x_{p+14n+7} > x_{p+14n+8} > x_{p+14n+9}$ elde edilir.

- $(x_{p+14n+13} - x_{p+14n+12})(x_{p+14n+12} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+12} < 1$ olduğundan $x_{p+14n+13} > x_{p+14n+12}$ 'dir.

Aynı yöntemle

- $(y_{p+14n+1} - y_{p+14n})(y_{p+14n} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n} > 1$ olduğundan $y_{p+14n} > y_{p+14n+1}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+2} - y_{p+14n+1})(y_{p+14n+1} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+1} > 1$ olduğundan $y_{p+14n+1} > y_{p+14n+2}$ 'dir.

Buna göre $y_{p+14n} > y_{p+14n+1} > y_{p+14n+2}$ elde edilir.

- $(y_{p+14n+6} - y_{p+14n+5})(y_{p+14n+5} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+5} < 1$ olduğundan $y_{p+14n+6} > y_{p+14n+5}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+8} - y_{p+14n+7})(y_{p+14n+7} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+7} > 1$ olduğundan $y_{p+14n+7} > y_{p+14n+8}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+9} - y_{p+14n+8})(y_{p+14n+8} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+8} > 1$ olduğundan $y_{p+14n+8} > y_{p+14n+9}$ 'dir.

Buna göre $y_{p+14n+7} > y_{p+14n+8} > y_{p+14n+9}$ elde edilir.

- $(y_{p+14n+13} - y_{p+14n+12})(y_{p+14n+12} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+12} < 1$ olduğundan $y_{p+14n+13} > y_{p+14n+12}$ 'dir.

(b) $n = 0, 1, \dots$ için

- $x_{p+14n+3} = \frac{x_{p+14n+2} + y_{p+14n}}{1 + x_{p+14n+2}y_{p+14n}} > \frac{x_{p+14n+2} + y_{p+14n}}{x_{p+14n+2}(1 + y_{p+14n})} > \frac{1}{x_{p+14n+2}}$
- $x_{p+14n+4} = \frac{x_{p+14n+3} + y_{p+14n+1}}{1 + x_{p+14n+3}y_{p+14n+1}} < \frac{x_{p+14n+3} + y_{p+14n+1}}{x_{p+14n+3}(1 + y_{p+14n+1})} < \frac{1}{x_{p+14n+3}}$
- $x_{p+14n+5} = \frac{x_{p+14n+4} + y_{p+14n+2}}{1 + x_{p+14n+4}y_{p+14n+2}} > \frac{x_{p+14n+4} + y_{p+14n+2}}{x_{p+14n+4}(1 + y_{p+14n+2})} > \frac{1}{x_{p+14n+4}}$

- $x_{p+14n+7} = \frac{x_{p+14n+6} + y_{p+14n+4}}{1 + x_{p+14n+6}y_{p+14n+4}} < \frac{x_{p+14n+6} + y_{p+14n+4}}{x_{p+14n+6}(1 + y_{p+14n+4})} < \frac{1}{x_{p+14n+6}}$
- $x_{p+14n+10} = \frac{x_{p+14n+9} + y_{p+14n+7}}{1 + x_{p+14n+9}y_{p+14n+7}} > \frac{x_{p+14n+9} + y_{p+14n+7}}{x_{p+14n+9}(1 + y_{p+14n+7})} > \frac{1}{x_{p+14n+9}}$
- $x_{p+14n+11} = \frac{x_{p+14n+10} + y_{p+14n+8}}{1 + x_{p+14n+10}y_{p+14n+8}} < \frac{x_{p+14n+10} + y_{p+14n+8}}{x_{p+14n+10}(1 + y_{p+14n+8})} < \frac{1}{x_{p+14n+10}}$
- $x_{p+14n+12} = \frac{x_{p+14n+11} + y_{p+14n+9}}{1 + x_{p+14n+11}y_{p+14n+9}} > \frac{x_{p+14n+11} + y_{p+14n+9}}{x_{p+14n+11}(1 + y_{p+14n+9})} > \frac{1}{x_{p+14n+11}}$
- $x_{p+14n+14} = \frac{x_{p+14n+13} + y_{p+14n+11}}{1 + x_{p+14n+13}y_{p+14n+11}} < \frac{x_{p+14n+13} + y_{p+14n+11}}{x_{p+14n+13}(1 + y_{p+14n+11})} < \frac{1}{x_{p+14n+13}}$
- $y_{p+14n+3} = \frac{y_{p+14n+2} + x_{p+14n}}{1 + y_{p+14n+2}x_{p+14n}} > \frac{y_{p+14n+2} + x_{p+14n}}{y_{p+14n+2}(1 + x_{p+14n})} > \frac{1}{y_{p+14n+2}}$
- $y_{p+14n+4} = \frac{y_{p+14n+3} + x_{p+14n+1}}{1 + y_{p+14n+3}x_{p+14n+1}} < \frac{y_{p+14n+3} + x_{p+14n+1}}{y_{p+14n+3}(1 + x_{p+14n+1})} < \frac{1}{y_{p+14n+3}}$
- $y_{p+14n+5} = \frac{y_{p+14n+4} + x_{p+14n+2}}{1 + y_{p+14n+4}x_{p+14n+2}} > \frac{y_{p+14n+4} + x_{p+14n+2}}{y_{p+14n+4}(1 + x_{p+14n+2})} > \frac{1}{y_{p+14n+4}}$
- $y_{p+14n+7} = \frac{y_{p+14n+6} + x_{p+14n+4}}{1 + y_{p+14n+6}x_{p+14n+4}} < \frac{y_{p+14n+6} + x_{p+14n+4}}{y_{p+14n+6}(1 + x_{p+14n+4})} < \frac{1}{y_{p+14n+6}}$
- $y_{p+14n+10} = \frac{y_{p+14n+9} + x_{p+14n+7}}{1 + y_{p+14n+9}x_{p+14n+7}} > \frac{y_{p+14n+9} + x_{p+14n+7}}{y_{p+14n+9}(1 + x_{p+14n+7})} > \frac{1}{y_{p+14n+9}}$
- $y_{p+14n+11} = \frac{y_{p+14n+10} + x_{p+14n+8}}{1 + y_{p+14n+10}x_{p+14n+8}} < \frac{y_{p+14n+10} + x_{p+14n+8}}{y_{p+14n+10}(1 + x_{p+14n+8})} < \frac{1}{y_{p+14n+10}}$
- $y_{p+14n+12} = \frac{y_{p+14n+11} + x_{p+14n+9}}{1 + y_{p+14n+11}x_{p+14n+9}} > \frac{y_{p+14n+11} + x_{p+14n+9}}{y_{p+14n+11}(1 + x_{p+14n+9})} > \frac{1}{y_{p+14n+11}}$
- $y_{p+14n+14} = \frac{y_{p+14n+13} + x_{p+14n+11}}{1 + y_{p+14n+13}x_{p+14n+11}} < \frac{y_{p+14n+13} + x_{p+14n+11}}{y_{p+14n+13}(1 + x_{p+14n+11})} < \frac{1}{y_{p+14n+13}}$

olduğu aıktır.

(a) ve (b) eşitsizliklerinden yararlanırsak,

$$\begin{aligned} x_{p+14n+14} &< \frac{1}{x_{p+14n+13}} < \frac{1}{x_{p+14n+12}} < x_{p+14n+11} < \frac{1}{x_{p+14n+10}} < x_{p+14n+9} < x_{p+14n+8} < x_{p+14n+7} < \\ \frac{1}{x_{p+14n+6}} &< \frac{1}{x_{p+14n+5}} < x_{p+14n+4} < \frac{1}{x_{p+14n+3}} < x_{p+14n+2} < x_{p+14n+1} < x_{p+14n} \end{aligned} \quad (3.56)$$

ve

$$\begin{aligned} y_{p+14n+14} &< \frac{1}{y_{p+14n+13}} < \frac{1}{y_{p+14n+12}} < y_{p+14n+11} < \frac{1}{y_{p+14n+10}} < y_{p+14n+9} < y_{p+14n+8} < y_{p+14n+7} < \\ \frac{1}{y_{p+14n+6}} &< \frac{1}{y_{p+14n+5}} < y_{p+14n+4} < \frac{1}{y_{p+14n+3}} < y_{p+14n+2} < y_{p+14n+1} < y_{p+14n} \end{aligned} \quad (3.57)$$

olur. Denklem (3.56) ve (3.57)'dan kolaylıkla görüldüğü gibi $\{x_{p+14n}\}_{n=0}^{\infty}$ ile $\{y_{p+14n}\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır. Bu yüzden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n} = L_7 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n} = L_8 \quad (3.58)$$

limitleri mevcut ve sonludur. Denklem (3.56)'ya göre

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+14} &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+11} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+9} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+8} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+4} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+1} = L_7 \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+13} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+12} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+10} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+6} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+3} = \frac{1}{L_7}$$

dir. Aynı şekilde denklem (3.57)'ye göre

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+14} &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+11} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+9} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+8} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+4} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+1} = L_8 \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+13} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+12} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+10} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+6} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+3} = \frac{1}{L_8}$$

dir.

$$x_{p+14n+14} = \frac{x_{p+14n+13} + y_{p+14n+11}}{1 + x_{p+14n+13}y_{p+14n+11}} \text{ ve } y_{p+14n+14} = \frac{y_{p+14n+13} + x_{p+14n+11}}{1 + y_{p+14n+13}x_{p+14n+11}} \quad (3.61)$$

denklemlerinin her iki tarafının limitleri alınır,

$$L_7 = \frac{\frac{1}{L_7} + L_8}{1 + \frac{1}{L_7} L_8} \quad \text{ve} \quad L_8 = \frac{\frac{1}{L_8} + L_7}{1 + \frac{1}{L_8} L_7} \quad \text{olur. İki denklemin çözümünden } L_7 = L_8 = 1 \text{ elde edilir.}$$

Böylece (3.34) denklemi sağlanır.

(v) Lemma 3.9'daki başlangıç koşullarını ele alalım. (3.1) denklem sisteminin $\{x_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri $1^+, 5^-, 1^+, 1^-, 1^+, 1^-, 1^+, 3^-$ şeklindedir. Buna göre $n = 0, 1, \dots$ için aşağıdaki diziyi elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \left\{ x_{p+14n} \right\}^+, \left\{ x_{p+14n+1}, x_{p+14n+2}, x_{p+14n+3}, x_{p+14n+4}, x_{p+14n+5} \right\}^-, \left\{ x_{p+14n+6} \right\}^+, \left\{ x_{p+14n+7} \right\}^-, \left\{ x_{p+14n+8} \right\}^+, \\ & \left\{ x_{p+14n+9} \right\}^-, \left\{ x_{p+14n+10} \right\}^+, \left\{ x_{p+14n+11}, x_{p+14n+12}, x_{p+14n+13} \right\}^- \end{aligned} \quad (3.62)$$

(3.1) denklem sisteminin $\{y_n\}$ çözümünün pozitif ve negatif yarı dönmeleri ise $6^+, 2^-, 2^+, 4^-$ şeklindedir. $n = 0, 1, \dots$ için de aşağıdaki diziyi elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \left\{ y_{p+14n}, y_{p+14n+1}, y_{p+14n+2}, y_{p+14n+3}, y_{p+14n+4}, y_{p+14n+5} \right\}^+, \left\{ y_{p+14n+6}, y_{p+14n+7} \right\}^-, \left\{ y_{p+14n+8}, y_{p+14n+9} \right\}^+, \\ & \left\{ y_{p+14n+10}, y_{p+14n+11}, y_{p+14n+12}, y_{p+14n+13} \right\}^- \end{aligned} \quad (3.63)$$

Buna göre, aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(a) $x_{p+14n+5} > x_{p+14n+4} > x_{p+14n+3} > x_{p+14n+2} > x_{p+14n+1}, x_{p+14n+13} > x_{p+14n+12} > x_{p+14n+11}$ ve

$y_{p+14n} > y_{p+14n+1} > y_{p+14n+2} > y_{p+14n+3} > y_{p+14n+4} > y_{p+14n+5}, y_{p+14n+7} > y_{p+14n+6}, y_{p+14n+8} > y_{p+14n+9},$

$y_{p+14n+13} > y_{p+14n+12} > y_{p+14n+11} > y_{p+14n+10}$

(b) $x_{p+14n} x_{p+14n+1} > 1, x_{p+14n+5} x_{p+14n+6} < 1, x_{p+14n+6} x_{p+14n+7} > 1, x_{p+14n+7} x_{p+14n+8} < 1,$

$x_{p+14n+8} x_{p+14n+9} > 1, x_{p+14n+9} x_{p+14n+10} < 1, x_{p+14n+10} x_{p+14n+11} > 1, x_{p+14n+13} x_{p+14n+14} < 1$ ve

$y_{p+14n+5} y_{p+14n+6} > 1, y_{p+14n+7} y_{p+14n+8} < 1, y_{p+14n+9} y_{p+14n+10} > 1, y_{p+14n+14} y_{p+14n+13} < 1$ 'dir.

(a) Lemma 3.3. (a) 'dan yararlanırsak $n = 0, 1, \dots$ için

- $(x_{p+14n+2} - x_{p+14n+1})(x_{p+14n+1} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+1} < 1$ olduğundan $x_{p+14n+2} > x_{p+14n+1}$ 'dir.
- $(x_{p+14n+3} - x_{p+14n+2})(x_{p+14n+2} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+2} < 1$ olduğundan $x_{p+14n+3} > x_{p+14n+2}$ 'dir.
- $(x_{p+14n+4} - x_{p+14n+3})(x_{p+14n+3} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+3} < 1$ olduğundan $x_{p+14n+4} > x_{p+14n+3}$ 'dir.

- $(x_{p+14n+5} - x_{p+14n+4})(x_{p+14n+4} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+4} < 1$ olduğundan $x_{p+14n+5} > x_{p+14n+4}$ 'dir.

Buna göre, $x_{p+14n+5} > x_{p+14n+4} > x_{p+14n+3} > x_{p+14n+2} > x_{p+14n+1}$ elde edilir.

- $(x_{p+14n+12} - x_{p+14n+11})(x_{p+14n+11} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+11} < 1$ olduğundan $x_{p+14n+12} > x_{p+14n+11}$ 'dir.
- $(x_{p+14n+13} - x_{p+14n+12})(x_{p+14n+12} - 1) < 0$ ve $x_{p+14n+12} < 1$ olduğundan $x_{p+14n+13} > x_{p+14n+12}$ 'dir.

Buna göre, $x_{p+14n+13} > x_{p+14n+12} > x_{p+14n+11}$ elde edilir.

Aynı yöntemle

- $(y_{p+14n+1} - y_{p+14n})(y_{p+14n} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n} > 1$ olduğundan $y_{p+14n+1} > y_{p+14n}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+2} - y_{p+14n+1})(y_{p+14n+1} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+1} > 1$ olduğundan $y_{p+14n+2} > y_{p+14n+1}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+3} - y_{p+14n+2})(y_{p+14n+2} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+2} > 1$ olduğundan $y_{p+14n+3} > y_{p+14n+2}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+4} - y_{p+14n+3})(y_{p+14n+3} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+3} > 1$ olduğundan $y_{p+14n+4} > y_{p+14n+3}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+5} - y_{p+14n+4})(y_{p+14n+4} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+4} > 1$ olduğundan $y_{p+14n+5} > y_{p+14n+4}$ 'dir.

Buna göre $y_{p+14n} > y_{p+14n+1} > y_{p+14n+2} > y_{p+14n+3} > y_{p+14n+4} > y_{p+14n+5}$ elde edilir.

- $(y_{p+14n+7} - y_{p+14n+6})(y_{p+14n+6} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+6} < 1$ olduğundan $y_{p+14n+7} > y_{p+14n+6}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+9} - y_{p+14n+8})(y_{p+14n+8} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+8} > 1$ olduğundan $y_{p+14n+9} > y_{p+14n+8}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+11} - y_{p+14n+10})(y_{p+14n+10} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+10} < 1$ olduğundan $y_{p+14n+11} > y_{p+14n+10}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+12} - y_{p+14n+11})(y_{p+14n+11} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+11} < 1$ olduğundan $y_{p+14n+12} > y_{p+14n+11}$ 'dir.
- $(y_{p+14n+13} - y_{p+14n+12})(y_{p+14n+12} - 1) < 0$ ve $y_{p+14n+12} < 1$ olduğundan $y_{p+14n+13} > y_{p+14n+12}$ 'dir.

Buna göre $y_{p+14n+13} > y_{p+14n+12} > y_{p+14n+11} > y_{p+14n+10}$ elde edilir.

(b) $n = 0, 1, \dots$ için

- $x_{p+14n+1} = \frac{x_{p+14n} + y_{p+14n-2}}{1 + x_{p+14n}y_{p+14n-2}} > \frac{x_{p+14n} + y_{p+14n-2}}{x_{p+14n}(1 + y_{p+14n-2})} > \frac{1}{x_{p+14n}}$

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad x_{p+14n+6} &= \frac{x_{p+14n+5} + y_{p+14n+3}}{1 + x_{p+14n+5}y_{p+14n+3}} < \frac{x_{p+14n+5} + y_{p+14n+3}}{x_{p+14n+5}(1 + y_{p+14n+3})} < \frac{1}{x_{p+14n+5}} \\
\blacksquare \quad x_{p+14n+7} &= \frac{x_{p+14n+6} + y_{p+14n+4}}{1 + x_{p+14n+6}y_{p+14n+4}} > \frac{x_{p+14n+6} + y_{p+14n+4}}{x_{p+14n+6}(1 + y_{p+14n+4})} > \frac{1}{x_{p+14n+6}} \\
\blacksquare \quad x_{p+14n+8} &= \frac{x_{p+14n+7} + y_{p+14n+5}}{1 + x_{p+14n+7}y_{p+14n+5}} < \frac{x_{p+14n+7} + y_{p+14n+5}}{x_{p+14n+7}(1 + y_{p+14n+5})} < \frac{1}{x_{p+14n+7}} \\
\blacksquare \quad x_{p+14n+9} &= \frac{x_{p+14n+8} + y_{p+14n+6}}{1 + x_{p+14n+8}y_{p+14n+6}} > \frac{x_{p+14n+8} + y_{p+14n+6}}{x_{p+14n+8}(1 + y_{p+14n+6})} > \frac{1}{x_{p+14n+8}} \\
\blacksquare \quad x_{p+14n+10} &= \frac{x_{p+14n+9} + y_{p+14n+7}}{1 + x_{p+14n+9}y_{p+14n+7}} < \frac{x_{p+14n+9} + y_{p+14n+7}}{x_{p+14n+9}(1 + y_{p+14n+7})} < \frac{1}{x_{p+14n+9}} \\
\blacksquare \quad x_{p+14n+11} &= \frac{x_{p+14n+10} + y_{p+14n+8}}{1 + x_{p+14n+10}y_{p+14n+8}} > \frac{x_{p+14n+10} + y_{p+14n+8}}{x_{p+14n+10}(1 + y_{p+14n+8})} > \frac{1}{x_{p+14n+10}} \\
\blacksquare \quad x_{p+14n+14} &= \frac{x_{p+14n+13} + y_{p+14n+11}}{1 + x_{p+14n+13}y_{p+14n+11}} < \frac{x_{p+14n+13} + y_{p+14n+11}}{x_{p+14n+13}(1 + y_{p+14n+11})} < \frac{1}{x_{p+14n+13}} \\
\blacksquare \quad y_{p+14n+6} &= \frac{y_{p+14n+5} + x_{p+14n+3}}{1 + y_{p+14n+5}x_{p+14n+3}} > \frac{y_{p+14n+5} + x_{p+14n+3}}{y_{p+14n+5}(1 + x_{p+14n+3})} > \frac{1}{y_{p+14n+5}} \\
\blacksquare \quad y_{p+14n+8} &= \frac{y_{p+14n+7} + x_{p+14n+5}}{1 + y_{p+14n+7}x_{p+14n+5}} < \frac{y_{p+14n+7} + x_{p+14n+5}}{y_{p+14n+7}(1 + x_{p+14n+5})} < \frac{1}{y_{p+14n+7}} \\
\blacksquare \quad y_{p+14n+10} &= \frac{y_{p+14n+9} + x_{p+14n+7}}{1 + y_{p+14n+9}x_{p+14n+7}} > \frac{y_{p+14n+9} + x_{p+14n+7}}{y_{p+14n+9}(1 + x_{p+14n+7})} > \frac{1}{y_{p+14n+9}} \\
\blacksquare \quad y_{p+14n+14} &= \frac{y_{p+14n+13} + x_{p+14n+11}}{1 + y_{p+14n+13}x_{p+14n+11}} < \frac{y_{p+14n+13} + x_{p+14n+11}}{y_{p+14n+13}(1 + x_{p+14n+11})} < \frac{1}{y_{p+14n+13}}
\end{aligned}$$

olduğu açıktır.

(a) ve (b) eşitsizliklerinden yararlanırsak,

$$\begin{aligned}
x_{p+14n+14} &< \frac{1}{x_{p+14n+13}} < \frac{1}{x_{p+14n+12}} < \frac{1}{x_{p+14n+11}} < x_{p+14n+10} < \frac{1}{x_{p+14n+9}} < x_{p+14n+8} < \frac{1}{x_{p+14n+7}} < \\
x_{p+14n+6} &< \frac{1}{x_{p+14n+5}} < \frac{1}{x_{p+14n+4}} < \frac{1}{x_{p+14n+3}} < \frac{1}{x_{p+14n+2}} < \frac{1}{x_{p+14n+1}} < x_{p+14n}
\end{aligned} \tag{3.64}$$

ve

$$\begin{aligned} y_{p+14n+14} &< \frac{1}{y_{p+14n+13}} < \frac{1}{y_{p+14n+12}} < \frac{1}{y_{p+14n+11}} < \frac{1}{y_{p+14n+10}} < y_{p+14n+9} < y_{p+14n+8} < \frac{1}{y_{p+14n+7}} < \\ &\frac{1}{y_{p+14n+6}} < y_{p+14n+5} < y_{p+14n+4} < y_{p+14n+3} < y_{p+14n+2} < y_{p+14n+1} < y_{p+14n} \end{aligned} \quad (3.65)$$

olur. Denklem (3.64) ve (3.65)'den kolaylıkla görüldüğü gibi $\{x_{p+14n}\}_{n=0}^{\infty}$ ile $\{y_{p+14n}\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri azalandır ve alttan 1 ile sınırlıdır. Bu yüzden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n} = L_9 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n} = L_{10} \quad (3.66)$$

limitleri mevcut ve sonludur. Denklem (3.64)'e göre

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+14} &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+10} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+8} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+6} = L_9 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+13} &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+12} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+11} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+9} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+7} = \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+14n+1} = \frac{1}{L_9}$$

dir. Aynı şekilde

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+14} &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+9} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+8} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+4} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+1} = L_{10} \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+13} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+12} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+11} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+10} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{p+14n+6} = \frac{1}{L_{10}}$$

$$x_{p+14n+14} = \frac{x_{p+14n+13} + y_{p+14n+11}}{1 + x_{p+14n+13}y_{p+14n+11}} \text{ ve } y_{p+14n+14} = \frac{y_{p+14n+13} + x_{p+14n+11}}{1 + y_{p+14n+13}x_{p+14n+11}} \quad (3.69)$$

denklemlerinin her iki tarafının limitleri alınırsa,

$$L_9 = \frac{\frac{1}{L_9} + \frac{1}{L_{10}}}{1 + \frac{1}{L_9} \frac{1}{L_{10}}} \text{ ve } L_{10} = \frac{\frac{1}{L_{10}} + \frac{1}{L_9}}{1 + \frac{1}{L_{10}} \frac{1}{L_9}} \text{ olur. İki denklemin çözümünden } L_9 = L_{10} = 1 \text{ elde edilir.}$$

Böylece (3.34) denklemini sağlanır.

$$4. \quad x_{n+1} = \frac{1}{y_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} \quad \text{DENKLEM SİSTEMİ}$$

Bu bölümde,

$$x_{n+1} = \frac{1}{y_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.1)$$

fark denklem sistemini

$$x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 \in \mathbb{R}^+ \quad (4.2)$$

başlangıç koşulları altında inceleyeceğiz. (4.1) denklem sisteminin denge noktaları

$$\bar{x} = \frac{1}{\bar{y}}, \quad \bar{y} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \quad (4.3)$$

denklem sisteminin çözümü ile bulunur. (4.1) denklem sistemi sadece $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ pozitif denge noktasına sahiptir. (4.1) denklem sisteminin $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ denge noktasındaki Jakobiye matrisi,

$$J_F(1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

dir. Karakteristik denklemi ise

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \text{ 'dir.} \quad (4.5)$$

Teorem 4.1. $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$, (4.1) denklem sisteminin pozitif denge noktası olsun. Buna göre, (4.1) denklem sistemi $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ pozitif denge noktasında kararsızdır.

İspat. Teorem 2.17 (iii)'ye göre $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktasının yerel asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul $|\text{tr} J_F(\bar{x}, \bar{y})| < 1 + \det J_F(\bar{x}, \bar{y}) < 2$ olmasıdır.

$$\text{tr} J_F(\bar{x}, \bar{y}) = 1 \text{ ve } \det J_F(\bar{x}, \bar{y}) = -1 \text{ olduğundan}$$

$$1 \not< 0 < 2 \quad (4.6)$$

dir. Buna göre, teoremin koşulu sağlanmaz. Bu nedenle (4.1) denklem sistemi $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ pozitif denge noktasında kararsızdır.

Teorem 4.2. (4.1) denklem sistemi ile (4.2) başlangıç koşullarını ele alalım. $k \geq 1$ olan bir tamsayı ve $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty}$ (4.1) denklem sisteminin bir çözümü olsun. O zaman (4.1) denklem sisteminin tüm çözümleri periyodiktir ve periyodu da 6'dır.

İspat. (4.2) başlangıç koşullarının hepsi pozitif olduklarından, (4.1) denklem sisteminin tüm çözümleri pozitifdir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= \frac{1}{y_{n-1}} & y_{n+1} &= \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} \\
 x_{n+2} &= \frac{1}{y_n} & y_{n+2} &= \frac{x_n}{y_n} \\
 x_{n+3} &= \frac{1}{y_{n+1}} = \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} & y_{n+3} &= \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{1}{x_{n-1}} \\
 x_{n+4} &= \frac{y_n}{x_n} & y_{n+4} &= \frac{1}{x_n} \\
 x_{n+5} &= \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = x_{n-1} & y_{n+5} &= \frac{1}{x_{n+1}} = y_{n-1} \\
 x_{n+6} &= x_n & y_{n+6} &= y_n
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

olur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.3. (4.1) denklem sistemi ile (4.2) başlangıç koşullarını ele alalım. $k \geq 1$ olan bir tamsayı ve (4.1) denklem sisteminin $x_{-1} = a_0$, $x_0 = a_1$ ve $y_{-1} = b_0$, $y_0 = b_1$ başlangıç koşulları altındaki bir çözümü $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. $n = 0, 1, 2, \dots$ için (4.1) denklem sisteminin tüm çözümleri:

$$\begin{aligned}
 x_{6n+1} &= \frac{1}{b_0} & y_{6n+1} &= \frac{a_0}{b_0} \\
 x_{6n+2} &= \frac{1}{b_1} & y_{6n+2} &= \frac{a_1}{b_1} \\
 x_{6n+3} &= \frac{b_0}{a_0} & y_{6n+3} &= \frac{1}{a_0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{6n+4} &= \frac{b_1}{a_1} & y_{6n+4} &= \frac{1}{a_1} \\
x_{6n+5} &= a_0 & y_{6n+5} &= b_0 \\
x_{6n+6} &= a_1 & y_{6n+6} &= b_1
\end{aligned} \tag{4.8}$$

İspat. (4.2) başlangıç koşullarının hepsi pozitif olduklarından (4.1) denklem sisteminin tüm çözümleri pozitifdir. (4.8) denkleminin $n-1$ için sağlandığını varsayalım. Şimdi denklemin n için de sağlandığını göstermeye çalışacağız.

$n-1$ için:

$$\begin{aligned}
x_{6n-5} &= \frac{1}{b_0} & y_{6n-5} &= \frac{a_0}{b_0} \\
x_{6n-4} &= \frac{1}{b_1} & y_{6n-4} &= \frac{a_1}{b_1} \\
x_{6n-3} &= \frac{b_0}{a_0} & y_{6n-3} &= \frac{1}{a_0} \\
x_{6n-2} &= \frac{b_1}{a_1} & y_{6n-2} &= \frac{1}{a_1} \\
x_{6n-1} &= a_0 & y_{6n-1} &= b_0 \\
x_{6n} &= a_1 & y_{6n} &= b_1
\end{aligned} \tag{4.9}$$

dir. n için,

$$\begin{aligned}
x_{6n+1} &= \frac{1}{y_{6n-1}} = \frac{1}{b_0} & y_{6n+1} &= \frac{x_{6n-1}}{y_{6n-1}} = \frac{a_0}{b_0} \\
x_{6n+2} &= \frac{1}{y_{6n}} = \frac{1}{b_1} & y_{6n+2} &= \frac{x_{6n}}{y_{6n}} = \frac{a_1}{b_1} \\
x_{6n+3} &= \frac{1}{y_{6n+1}} = \frac{b_0}{a_0} & y_{6n+3} &= \frac{x_{6n+1}}{y_{6n+1}} = \frac{1}{a_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{6n+4} &= \frac{1}{y_{6n+2}} = \frac{b_1}{a_1} & y_{6n+4} &= \frac{x_{6n+2}}{y_{6n+2}} = \frac{1}{a_1} \\
x_{6n+5} &= \frac{1}{y_{6n+3}} = a_0 & y_{6n+5} &= \frac{x_{6n+3}}{y_{6n+3}} = b_0 \\
x_{6n+6} &= \frac{1}{y_{6n+4}} = a_1 & y_{6n+6} &= \frac{x_{6n+4}}{y_{6n+4}} = b_1
\end{aligned} \tag{4.10}$$

olur.

Lemma 4.4. (4.1) denklem sisteminin pozitif bir $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün er geç $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ pozitif denge noktasına eşit olması için gerek ve yeter koşul

$$x_{-1} = x_0 = y_{-1} = y_0 = 1 \tag{4.11}$$

olmasıdır.

İspat. (4.11) koşulunun doğru olduğunu kabul edelim.

$x_{-1} = x_0 = y_{-1} = y_0 = 1$ olsun. O zaman (4.1) denklem sisteminden

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{y_{-1}} = 1, \quad y_1 = \frac{x_{-1}}{y_{-1}} = 1 \\
x_2 &= \frac{1}{y_0} = 1, \quad y_1 = \frac{x_0}{y_0} = 1 \\
x_3 &= \frac{y_{-1}}{x_{-1}} = 1, \quad y_3 = \frac{1}{x_{-1}} = 1 \\
x_4 &= \frac{y_0}{x_0} = 1, \quad y_4 = \frac{1}{x_0} = 1
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$x_5 = x_{-1} = 1, \quad y_5 = y_{-1} = 1$$

$$x_6 = x_0 = 1, \quad y_6 = y_0 = 1$$

olur. Görüldüğü gibi $x_{-1} = x_0 = y_{-1} = y_0 = 1$ olması durumunda $j = 1, 2, \dots$ için $(x_j, y_j) = (1, 1)$

olur.

Tersine, $\ell \in \{-1, 0\}$ için

$$x_\ell \neq 1 \vee y_\ell \neq 1 \quad (4.13)$$

olduğunu kabul edelim. Lemmayı ispatlamak için

$$x_n \neq 1 \text{ ve } y_n \neq 1, \quad n \geq 1 \quad (4.14)$$

olduğunu göstermemiz gerekli.

$$N \geq 1 \text{ için } x_N = y_N = 1 \quad (4.15)$$

ve

$$-2 \leq n \leq N-1 \text{ için } x_n \neq 1, y_n \neq 1 \quad (4.16)$$

olduğunu varsayalım.

$$1 = x_N = \frac{1}{y_{N-2}} \Rightarrow (y_{N-2} - 1) = 0 \quad (4.17)$$

olur. Bu durumda $y_{N-2} = 1$ olur ki bu durum (4.16) koşulu ile çelişir. Aynı yöntemle

$$1 = y_N = \frac{x_{N-2}}{y_{N-2}} \Rightarrow (x_{N-2} - y_{N-2}) = 0 \Rightarrow (x_{N-2} - 1) = 0 \quad (4.18)$$

olur. Bu durumda da $x_{N-2} = 1$ olur ki bu durum da (4.16) koşulu ile çelişir.

$$5. \quad x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}^b + x_{n-3}^b + x_{n-1}^b + a}{x_n x_{n-3}^b + x_{n-2}^b + x_{n-1}^b + a} \quad \text{FARK DENKLEMİ}$$

Bu bölümde ise

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}^b + x_{n-3}^b + x_{n-1}^b + a}{x_n x_{n-3}^b + x_{n-2}^b + x_{n-1}^b + a}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.1)$$

fark denklemini

$$x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty), a, b \in [0, \infty) \quad (5.2)$$

başlangıç koşulları altında inceleyeceğiz. (5.1) fark denkleminin denge noktaları

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}^{b+1} + 2\bar{x}^b + a}{\bar{x}^{b+1} + 2\bar{x}^b + a} \quad (5.3)$$

denkleminin çözümü ile bulunur. Buna göre, $\bar{x} = 1$ (5.1) denkleminin tek denge noktasıdır.

Tanım 2.4'e göre,

$$f(u_0, u_1, u_2, u_3) = \frac{u_0 u_2^b + u_3^b + u_1^b + a}{u_0 u_3^b + u_2^b + u_1^b + a} \quad (5.4)$$

fonksiyonunu ele alalım. Buna göre,

$$P_0 = \frac{\partial f}{\partial u_0} \Big|_{\bar{x}=1} = \frac{(u_2^b - u_3^b)(u_2^b + u_3^b + u_1^b + a)}{(u_0 u_3^b + u_2^b + u_1^b + a)^2} \Big|_{\bar{x}=1} = 0$$

$$P_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1} \Big|_{\bar{x}=1} = \frac{b u_1^{b-1} (u_2^b - u_3^b)(1 - u_0)}{(u_0 u_3^b + u_2^b + u_1^b + a)^2} \Big|_{\bar{x}=1} = 0$$

$$P_2 = \frac{\partial f}{\partial u_2} \Big|_{\bar{x}=1} = \frac{b u_2^{b-1} (u_0 - 1)(u_1^b + u_0 u_3^b + u_3^b + a)}{(u_0 u_3^b + u_2^b + u_1^b + a)^2} \Big|_{\bar{x}=1} = 0$$

$$P_3 = \frac{\partial f}{\partial u_3} \Big|_{\bar{x}=1} = \frac{b u_3^{b-1} [u_2^b (1 + u_0) + u_1^b + a](1 - u_0)}{(u_0 u_3^b + u_2^b + u_1^b + a)^2} \Big|_{\bar{x}=1} = 0$$

(5.5)

olur.

(5.1) denkleminin $\bar{x} = 1$ denge noktasındaki lineerleştirilmiş denklemi

$$z_{n+1} = 0 \quad (5.6)$$

ve karakteristik denklemi ise

$$\lambda^4 = 0 \text{ 'dır.} \quad (5.7)$$

Teorem 5.1. $\bar{x} = 1$ (5.1) denkleminin denge noktası olsun. (5.1) denklemi $\bar{x} = 1$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

İspat. Teorem 2.5. ve (5.5) denklemine göre,

$|P_0| + |P_1| + |P_2| + |P_3| = 0 < 1$ olduğundan, (5.1) denklemi $\bar{x} = 1$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

Lemma 5.2. $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ (5.1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Bu çözümün er geç $\bar{x} = 1$ denge noktasına eşit olması için gerek ve yeter koşul

$$(x_0 - 1)(x_{-2} - x_{-3}) = 0 \quad (5.8)$$

olmasıdır.

İspat. Öncelikle (5.8) koşulunun doğru olduğunu kabul edelim.

(a) $x_0 = 1$ olsun. O zaman (5.1) denkleminde

$$x_1 = \frac{x_0 x_{-2}^b + x_{-3}^b + x_{-1}^b + a}{x_0 x_{-3}^b + x_{-2}^b + x_{-1}^b + a} = \frac{x_{-2}^b + x_{-3}^b + x_{-1}^b + a}{x_{-3}^b + x_{-2}^b + x_{-1}^b + a} = 1$$

$$x_2 = \frac{x_1 x_{-1}^b + x_{-2}^b + x_0^b + a}{x_1 x_{-2}^b + x_{-1}^b + x_0^b + a} = \frac{x_{-1}^b + x_{-2}^b + 1 + a}{x_{-2}^b + x_{-1}^b + 1 + a} = 1$$

$$x_3 = \frac{x_2 x_0^b + x_{-1}^b + x_1^b + a}{x_2 x_{-1}^b + x_0^b + x_1^b + a} = \frac{x_{-1}^b + 2 + a}{x_{-1}^b + 2 + a} = 1 \quad (5.9)$$

$$x_4 = \frac{x_3 x_1^b + x_0^b + x_2^b + a}{x_3 x_0^b + x_1^b + x_2^b + a} = \frac{3 + a}{3 + a} = 1$$

.....

olur. Görüldüğü gibi $x_0 = 1$ olması durumunda $i = 1, 2, \dots$ için $x_i = 1$ olur.

(b) $(x_{-2} - x_{-3}) = 0$ olsun. O zaman (5.1) denkleminde

$$x_1 = \frac{x_0 x_{-2}^b + x_{-3}^b + x_{-1}^b + a}{x_0 x_{-3}^b + x_{-2}^b + x_{-1}^b + a} = \frac{x_0 x_{-2}^b + x_{-2}^b + x_{-1}^b + a}{x_0 x_{-2}^b + x_{-2}^b + x_{-1}^b + a} = 1$$

$$x_2 = \frac{x_1 x_{-1}^b + x_{-2}^b + x_0^b + a}{x_1 x_{-2}^b + x_{-1}^b + x_0^b + a} = \frac{x_{-1}^b + x_{-2}^b + x_0^b + a}{x_{-2}^b + x_{-1}^b + x_0^b + a} = 1$$

$$x_3 = \frac{x_2 x_0^b + x_{-1}^b + x_1^b + a}{x_2 x_{-1}^b + x_0^b + x_1^b + a} = \frac{x_0^b + x_{-1}^b + 1 + a}{x_{-1}^b + x_0^b + 1 + a} = 1$$

$$x_4 = \frac{x_3 x_1^b + x_0^b + x_2^b + a}{x_3 x_0^b + x_1^b + x_2^b + a} = \frac{x_0^b + 2 + a}{x_0^b + 2 + a} = 1$$

$$x_5 = \frac{x_4 x_2^b + x_1^b + x_3^b + a}{x_4 x_1^b + x_2^b + x_3^b + a} = \frac{3 + a}{3 + a} = 1$$

$$x_6 = \frac{x_5 x_3^b + x_2^b + x_4^b + a}{x_5 x_2^b + x_3^b + x_4^b + a} = \frac{3 + a}{3 + a} = 1$$

(5.10)

.....

olur. Görüldüğü gibi $(x_{-2} - x_{-3}) = 0$ olması durumunda $i = 1, 2, \dots$ için $x_i = 1$ olur.

Tersine, $\ell \in \{0\}$ için

$$x_\ell \neq 1 \tag{5.11}$$

olduğunu kabul edelim. Lemmayı ispatlamak için

$$x_n \neq 1, \quad n \geq 1 \tag{5.12}$$

olduğunu göstermemiz gerekli.

$$N \geq 1 \text{ için } x_N = 1 \tag{5.13}$$

ve

$$-1 \leq n \leq N-1 \text{ için } x_n \neq 1 \tag{5.14}$$

olduğunu varsayalım.

$$1 = x_N = \frac{x_{N-1}x_{N-3}^b + x_{N-4}^b + x_{N-2}^b + a}{x_{N-1}x_{N-4}^b + x_{N-3}^b + x_{N-2}^b + a} \Rightarrow (x_{N-1} - 1)(x_{N-3} - x_{N-4}) = 0 \quad (5.15)$$

olur.

- Eğer $x_{N-1} = 1$ ise (5.14) koşulu ile çelişir.
- Eğer $x_{N-3} = x_{N-4}$ ise

$$x_{N-4} = x_{N-3} = \frac{x_{N-4}x_{N-6}^b + x_{N-7}^b + x_{N-5}^b + a}{x_{N-4}x_{N-7}^b + x_{N-6}^b + x_{N-5}^b + a} \Rightarrow (x_{N-4} - 1)(x_{N-7}^b(x_{N-4} + 1) + x_{N-5}^b + a) = 0$$

olur. $(x_{N-7}^b(x_{N-4} + 1) + x_{N-5}^b + a) \neq 0$ olacağından $x_{N-4} = 1$ olur ki bu da yine (5.14) koşulu ile çelişir. O zaman $x_\ell = 1$ 'dir.

Lemma 5.3. $\{x_n\}_{n=-3}^\infty$ (5.1) denkleminin $\bar{x} = 1$ pozitif denge noktasına eşit olmayan pozitif bir çözümü olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (a) $(x_{n+1} - x_n)(x_n - 1) < 0$, $n \geq 0$ için
- (b) $(x_{n+1} - 1)(x_n - 1)(x_{n-2} - x_{n-3}) > 0$, $n \geq 0$ için
- (c) $(x_{n+1} - 1)(x_n - 1)(x_{n-3} - 1) < 0$, $n \geq 3$

İspat.

(a) (5.1) denkleminde

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{x_n x_{n-2}^b + x_{n-3}^b + x_{n-1}^b + a - x_n^2 x_{n-3}^b - x_n x_{n-2}^b - x_n x_{n-1}^b - a x_n}{x_n x_{n-3}^b + x_{n-2}^b + x_{n-1}^b + a} \\ &= \frac{(1 - x_n)[a + (1 + x_n)x_{n-3}^b + x_{n-1}^b]}{x_n x_{n-3}^b + x_{n-2}^b + x_{n-1}^b + a} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Olur. Burada $[a + (1 + x_n)x_{n-3}^b + x_{n-1}^b]$ ve $[x_n x_{n-3}^b + x_{n-2}^b + x_{n-1}^b + a]$ ifadeleri pozitif olduklarından

$(x_{n+1} - x_n)(x_n - 1) < 0$ elde edilir.

(b) (5.1) denkleminde

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} - 1 &= \frac{x_n x_{n-2}^b + x_{n-3}^b + x_{n-1}^b + a - x_n x_{n-3}^b - x_{n-2}^b - x_{n-1}^b - a}{x_n x_{n-3}^b + x_{n-2}^b + x_{n-1}^b + a} \\
 &= \frac{(x_n - 1)(x_{n-2} - x_{n-3}) \left(x_{n-2}^{b-1} + x_{n-2}^{b-2} x_{n-3} + \dots + x_{n-2} x_{n-3}^{b-2} + x_{n-3}^{b-1} \right)}{x_n x_{n-3}^b + x_{n-2}^b + x_{n-1}^b + a}
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

olur. Burada $(x_{n-2}^{p-1} + x_{n-2}^{p-2} x_{n-3} + \dots + x_{n-2} x_{n-3}^{p-2} + x_{n-3}^{p-1})$ ve $(x_n x_{n-3}^b + x_{n-2}^b + x_{n-1}^b + a)$ ifadeleri pozitif olduğundan $(x_{n+1} - 1)(x_n - 1)(x_{n-2} - x_{n-3}) > 0$ elde edilir.

(c) (a) ve (b) şıklarından yararlanırsak,

$$(x_{n-2} - x_{n-3})(x_{n-3} - 1) < 0, \quad n \geq 3 \quad \text{ve} \quad (x_{n+1} - 1)(x_n - 1)(x_{n-2} - x_{n-3}) > 0, \quad n \geq 0 \quad \text{olur.}$$

Bu iki ifadeden, $(x_{n+1} - 1)(x_n - 1)(x_{n-2} - x_{n-3})^2 (x_{n-3} - 1) < 0$ elde edilir. $(x_{n-2} - x_{n-3})^2 > 0$ olduğundan,

$$(x_{n+1} - 1)(x_n - 1)(x_{n-3} - 1) < 0, \quad n \geq 3 \tag{5.18}$$

olur.

Lemma 5.4. $x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < 1$ ise, $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ çözümü sonsuz terimli negatif bir yarı dönmeye sahiptir ve monoton olarak pozitif $\bar{x} = 1$ denge noktasına yakınsar.

İspat. $x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < 1$ ise, Lemma 5.3. (a) ve (b)'ye göre $n \geq -3$ için

$$\begin{aligned}
 (x_1 - 1)(x_0 - 1)(x_{-2} - x_{-3}) > 0 &\Rightarrow x_1 < 1 & ; & \quad (x_1 - x_0)(x_0 - 1) < 0 \Rightarrow x_0 < x_1 \\
 (x_2 - 1)(x_1 - 1)(x_{-1} - x_{-2}) > 0 &\Rightarrow x_2 < 1 & ; & \quad (x_2 - x_1)(x_1 - 1) < 0 \Rightarrow x_1 < x_2 \\
 (x_3 - 1)(x_2 - 1)(x_0 - x_{-1}) > 0 &\Rightarrow x_3 < 1 & ; & \quad (x_3 - x_2)(x_2 - 1) < 0 \Rightarrow x_2 < x_3 \\
 (x_4 - 1)(x_3 - 1)(x_1 - x_0) > 0 &\Rightarrow x_4 < 1 & ; & \quad (x_4 - x_3)(x_3 - 1) < 0 \Rightarrow x_3 < x_4 \\
 \dots\dots\dots & & & \dots\dots\dots \\
 (x_n - 1)(x_{n-1} - 1)(x_{n-3} - x_{n-4}) > 0 &\Rightarrow x_n < 1 & ; & \quad (x_n - x_{n-1})(x_{n-1} - 1) < 0 \Rightarrow x_{n-1} < x_n
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

elde edilir. (5.19) 'den kolaylıkla görüldüğü gibi

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n < 1 \tag{5.20}$$

olur. Bu ifadeden $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ çözümünün sonsuz terimli negatif bir yarı dönmeye sahip olduğu ve monoton olarak pozitif $\bar{x} = 1$ denge noktasına yakınsadığı görülür.

Lemma 5.5. $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ (5.1) denkleminin denge noktasından küçük ya da eşit olmayan pozitif bir çözümü olsun. Uygun sayıda bazı ilk yarı dönmeler hariç aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (i) (5.1) denkleminin her pozitif yarı dönmesi dört, iki ya da bir terimden oluşur;
- (ii) (5.1) denkleminin her negatif yarı dönmesi üç, iki ya da bir terimden oluşur;
- (iii) (5.1) denkleminin pozitif ve negatif yarı dönmeleri $4^+, 1^-, 1^+, 1^-, 2^+, 2^-, 1^+, 3^-$ formundadır.

Denklemin Kararlılığı

Teorem 5.1.'e göre (5.1) denkleminin $x = 1$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır. (5.1) denkleminin $x = 1$ denge noktasında global asimptotik kararlı olması için her pozitif $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ çözümünün $n \rightarrow \infty$ iken $x = 1$ denge noktasına yakınsaması gerekir. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = 1 \quad (5.21)$$

olmasıdır.

- (1) (5.1) denkleminin $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ çözümü $x = 1$ denge noktasında salınımsız ise

Lemma 5.2. ve Lemma 5.4'e göre ya $x = 1$ 'dir ya da $x = 1$ pozitif denge noktasına monoton olarak yakınsayan ve sonsuz sayıda terime sahip pozitif bir çözümdür. Her iki durumda da (5.21) denklemini sağlar.

- (2) (5.1) denkleminin $\{x_n\}_{n=-3}^{\infty}$ çözümü $x = 1$ pozitif denge noktasında kesin salınımlı olsun.

Lemma 5.5'e göre, (5.1) denkleminin pozitif ve negatif yarı dönmeleri $4^+, 1^-, 1^+, 1^-, 2^+, 2^-, 1^+, 3^-$ şeklindedir. Buna göre $n = 0, 1, \dots$ için aşağıdaki diziyi elde ederiz:

$$\begin{aligned} &\{x_{t+15n}, x_{t+15n+1}, x_{t+15n+2}, x_{t+15n+3}\}^+, \{x_{t+15n+4}\}^-, \{x_{t+15n+5}\}^+, \{x_{t+15n+6}\}^-, \{x_{t+15n+7}, x_{t+15n+8}\}^+, \\ &\{x_{t+15n+9}, x_{t+15n+10}\}^-, \{x_{t+15n+11}\}^+, \{x_{t+15n+12}, x_{t+15n+13}, x_{t+15n+14}\}^- \end{aligned} \quad (5.22)$$

Buna göre, aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (a) $x_{t+15n} > x_{t+15n+1} > x_{t+15n+2} > x_{t+15n+3}, x_{t+15n+7} > x_{t+15n+8}, x_{t+15n+10} > x_{t+15n+9},$
 $x_{t+15n+14} > x_{t+15n+13} > x_{t+15n+12}$

(b) $x_{t+15n+3} x_{t+15n+4} > 1$, $x_{t+15n+4} x_{t+15n+5} < 1$, $x_{t+15n+5} x_{t+15n+6} > 1$, $x_{t+15n+6} x_{t+15n+7} < 1$,
 $x_{t+15n+8} x_{t+15n+9} > 1$, $x_{t+15n+10} x_{t+15n+11} < 1$, $x_{t+15n+11} x_{t+15n+12} > 1$, $x_{t+15n+14} x_{t+15n+15} < 1$ 'dir.

(a) Lemma 5.3. (a) 'dan yararlanırsak $n = 0, 1, \dots$ için

- $(x_{t+15n+1} - x_{t+15n})(x_{t+15n} - 1) < 0$ ve $x_{t+15n} > 1$ olduğundan $x_{t+15n} > x_{t+15n+1}$ 'dir.
- $(x_{t+15n+2} - x_{t+15n+1})(x_{t+15n+1} - 1) < 0$ ve $x_{t+15n+1} > 1$ olduğundan $x_{t+15n+1} > x_{t+15n+2}$ 'dir.
- $(x_{t+15n+3} - x_{t+15n+2})(x_{t+15n+2} - 1) < 0$ ve $x_{t+15n+2} > 1$ olduğundan $x_{t+15n+2} > x_{t+15n+3}$ 'dir.

Buna göre, $x_{t+15n} > x_{t+15n+1} > x_{t+15n+2} > x_{t+15n+3}$ 'dir.

- $(x_{t+15n+8} - x_{t+15n+7})(x_{t+15n+7} - 1) < 0$ ve $x_{t+15n+7} > 1$ olduğundan $x_{t+15n+7} > x_{t+15n+8}$ 'dir.
- $(x_{t+15n+10} - x_{t+15n+9})(x_{t+15n+9} - 1) < 0$ ve $x_{t+15n+9} < 1$ olduğundan $x_{t+15n+10} > x_{t+15n+9}$ 'dir.
- $(x_{t+15n+13} - x_{t+15n+12})(x_{t+15n+12} - 1) < 0$ ve $x_{t+15n+12} < 1$ olduğundan $x_{t+15n+13} > x_{t+15n+12}$ 'dir.
- $(x_{t+15n+14} - x_{t+15n+13})(x_{t+15n+13} - 1) < 0$ ve $x_{t+15n+13} < 1$ olduğundan $x_{t+15n+14} > x_{t+15n+13}$ 'dir.

Buna göre, $x_{t+15n+14} > x_{t+15n+13} > x_{t+15n+12}$ 'dir.

(b) $n = 0, 1, \dots$ için

$$x_{t+15n+4} = \frac{x_{t+15n+3}x_{t+15n+1}^b + x_{t+15n}^b + x_{t+15n+2}^b + a}{x_{t+15n+3}x_{t+15n}^b + x_{t+15n+1}^b + x_{t+15n+2}^b + a} >$$

▪

$$\frac{x_{t+15n+3}x_{t+15n+1}^b + x_{t+15n}^b + x_{t+15n+2}^b + a}{x_{t+15n}^b x_{t+15n+3}^2 + x_{t+15n+3}x_{t+15n+1}^b + x_{t+15n+3}x_{t+15n+2}^b + ax_{t+15n+3}} = \frac{1}{x_{t+15n+3}}$$

$$x_{t+15n+5} = \frac{x_{t+15n+4}x_{t+15n+2}^b + x_{t+15n+1}^b + x_{t+15n+3}^b + a}{x_{t+15n+4}x_{t+15n+1}^b + x_{t+15n+2}^b + x_{t+15n+3}^b + a} <$$

▪

$$\frac{x_{t+15n+4}x_{t+15n+2}^b + x_{t+15n+1}^b + x_{t+15n+3}^b + a}{x_{t+15n+1}^b x_{t+15n+4}^2 + x_{t+15n+4}x_{t+15n+2}^b + x_{t+15n+4}x_{t+15n+3}^b + ax_{t+15n+4}} = \frac{1}{x_{t+15n+4}}$$

$$x_{t+15n+6} = \frac{x_{t+15n+5}x_{t+15n+3}^b + x_{t+15n+2}^b + x_{t+15n+4}^b + a}{x_{t+15n+5}x_{t+15n+2}^b + x_{t+15n+3}^b + x_{t+15n+4}^b + a} >$$

▪

$$\frac{x_{t+15n+5}x_{t+15n+3}^b + x_{t+15n+2}^b + x_{t+15n+4}^b + a}{x_{t+15n+2}^b x_{t+15n+5}^2 + x_{t+15n+5}x_{t+15n+3}^b + x_{t+15n+5}x_{t+15n+4}^b + ax_{t+15n+5}} = \frac{1}{x_{t+15n+5}}$$

$$x_{t+15n+7} = \frac{x_{t+15n+6}x_{t+15n+4}^b + x_{t+15n+3}^b + x_{t+15n+5}^b + a}{x_{t+15n+6}x_{t+15n+3}^b + x_{t+15n+4}^b + x_{t+15n+5}^b + a} <$$

■

$$\frac{x_{t+15n+6}x_{t+15n+4}^b + x_{t+15n+3}^b + x_{t+15n+5}^b + a}{x_{t+15n+3}^b x_{t+15n+6}^2 + x_{t+15n+6}x_{t+15n+4}^b + x_{t+15n+6}x_{t+15n+5}^b + ax_{t+15n+6}} = \frac{1}{x_{t+15n+6}}$$

$$x_{t+15n+9} = \frac{x_{t+15n+8}x_{t+15n+6}^b + x_{t+15n+5}^b + x_{t+15n+7}^b + a}{x_{t+15n+8}x_{t+15n+5}^b + x_{t+15n+6}^b + x_{t+15n+7}^b + a} >$$

■

$$\frac{x_{t+15n+8}x_{t+15n+6}^b + x_{t+15n+5}^b + x_{t+15n+7}^b + a}{x_{t+15n+5}^b x_{t+15n+8}^2 + x_{t+15n+8}x_{t+15n+6}^b + x_{t+15n+8}x_{t+15n+7}^b + ax_{t+15n+8}} = \frac{1}{x_{t+15n+8}}$$

$$x_{t+15n+11} = \frac{x_{t+15n+10}x_{t+15n+8}^b + x_{t+15n+7}^b + x_{t+15n+9}^b + a}{x_{t+15n+10}x_{t+15n+7}^b + x_{t+15n+8}^b + x_{t+15n+9}^b + a} <$$

■

$$\frac{x_{t+15n+10}x_{t+15n+8}^b + x_{t+15n+7}^b + x_{t+15n+9}^b + a}{x_{t+15n+7}^b x_{t+15n+10}^2 + x_{t+15n+10}x_{t+15n+8}^b + x_{t+15n+10}x_{t+15n+9}^b + ax_{t+15n+10}} = \frac{1}{x_{t+15n+10}}$$

$$x_{t+15n+12} = \frac{x_{t+15n+11}x_{t+15n+9}^b + x_{t+15n+8}^b + x_{t+15n+10}^b + a}{x_{t+15n+11}x_{t+15n+8}^b + x_{t+15n+9}^b + x_{t+15n+10}^b + a} >$$

■

$$\frac{x_{t+15n+11}x_{t+15n+9}^b + x_{t+15n+8}^b + x_{t+15n+10}^b + a}{x_{t+15n+8}^b x_{t+15n+11}^2 + x_{t+15n+11}x_{t+15n+9}^b + x_{t+15n+11}x_{t+15n+10}^b + ax_{t+15n+11}} = \frac{1}{x_{t+15n+11}}$$

$$x_{t+15n+15} = \frac{x_{t+15n+14}x_{t+15n+12}^b + x_{t+15n+11}^b + x_{t+15n+13}^b + a}{x_{t+15n+14}x_{t+15n+11}^b + x_{t+15n+12}^b + x_{t+15n+13}^b + a} <$$

■

$$\frac{x_{t+15n+14}x_{t+15n+12}^b + x_{t+15n+11}^b + x_{t+15n+13}^b + a}{x_{t+15n+11}^b x_{t+15n+14}^2 + x_{t+15n+14}x_{t+15n+12}^b + x_{t+15n+14}x_{t+15n+13}^b + ax_{t+15n+14}} = \frac{1}{x_{t+15n+14}}$$

elde edilir.

(a) ve (b) eşitsizliklerinden yararlanırsak,

$$\begin{aligned} x_{t+15n+15} &< \frac{1}{x_{t+15n+14}} < \frac{1}{x_{t+15n+13}} < \frac{1}{x_{t+15n+12}} < x_{t+15n+11} < \frac{1}{x_{t+15n+10}} < \frac{1}{x_{t+15n+9}} < x_{t+15n+8} < \\ x_{t+15n+7} &< \frac{1}{x_{t+15n+6}} < x_{t+15n+5} < \frac{1}{x_{t+15n+4}} < x_{t+15n+3} < x_{t+15n+2} < x_{t+15n+1} < x_{t+15n} \end{aligned} \quad (5.23)$$

olur. Denklem (5.23)'den kolaylıkla görüldüğü gibi $\{x_{t+15n}\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi azalan ve alttan 1 ile sınırlıdır.

Bu yüzden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{t+15n} = L_1 \quad (5.24)$$

limiti mevcut ve sonludur. Denklem (5.23)'e göre

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{t+15n+15} &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{t+15n+11} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{t+15n+8} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{t+15n+7} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_{t+15n+5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{t+15n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{t+15n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{t+15n+1} = L_1 \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{t+15n+14} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{t+15n+13} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{t+15n+12} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{t+15n+10} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{t+15n+9} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{t+15n+6} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{t+15n+4} = \frac{1}{L_1}$$

dir.

$$x_{t+15n+15} = \frac{x_{t+15n+14}x_{t+15n+12}^b + x_{t+15n+11}^b + x_{t+15n+13}^b + a}{x_{t+15n+14}x_{t+15n+11}^b + x_{t+15n+12}^b + x_{t+15n+13}^b + a} \quad (5.26)$$

denkleminde her iki tarafın limitleri alınır

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\frac{1}{L_1} \cdot \frac{1}{L_1^b} + L_1^b + \frac{1}{L_1^b} + a}{\frac{1}{L_1} \cdot L_1^b + \frac{1}{L_1^b} + \frac{1}{L_1^b} + a} \\ \Rightarrow L_1^b + \frac{2}{L_1^{b-1}} + aL_1 &= \frac{1}{L_1^{b+1}} + L_1^b + \frac{1}{L_1^b} + a \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\Rightarrow (L_1 - 1) \left[a + \frac{(2L_1 + 1)}{L_1^{b+1}} \right] = 0$$

elde edilir. (5.27) denkleminde $\left[a + \frac{(2L_1 + 1)}{L_1^{b+1}} \right]$ ifadesi her zaman pozitif olacağından $L_1 = 1$

elde edilir . Böylece (5.21) sağlanmış olur.

$$6. \quad x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-(2m+1)}}{x_n^k} \quad \text{FARK DENKLEMİ}$$

Bu bölümde ise

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-(2m+1)}}{x_n^k}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.1)$$

fark denklemini

$$x_{-2m-1}, x_{-2m}, \dots, x_0 \in \mathbb{R}^+, \quad m = 0, 1, \dots, \alpha \in (0, \infty), \text{ ve } k \in (0, \infty) \quad (6.2)$$

başlangıç koşulları altında inceleyeceğiz. (6.1) denkleminin denge noktası

$$g(x) = x - x^{1-k} - \alpha \quad (6.3)$$

fonksiyonunun bir köküdür.

Lemma 6.1. (6.1) denklemini ele alalım. Buna göre aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(a) $k = 1$ ise, (6.1) denkleminin $\bar{x} = \alpha + 1$ denge noktasına sahiptir.

(b) $k \neq 1$ ise, (6.1) denkleminin $\bar{x} > 1$ denge noktasına sahiptir.

İspat.

(a) $k = 1$ ise, (6.3) denkleminin

$$g(\bar{x}) = \bar{x} - 1 - \alpha = 0 \Rightarrow \bar{x} = \alpha + 1 \quad (6.4)$$

olduğu kolaylıkla görülür.

(b) $k \neq 1$ ise, iki durum söz konusudur:

(i) $0 < k < 1$ ise

(6.3) fonksiyonu $\left[0, (1-k)^{\frac{1}{k}}\right]$ aralığında azalan ve $\left((1-k)^{\frac{1}{k}}, \infty\right)$ aralığında ise artan bir

fonksiyondur. $g(1) = -\alpha < 0$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ olduğundan g fonksiyonu $\bar{x} > 1$ olan bir denge noktasına sahiptir.

(ii) $1 < k$ ise

(6.3) fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında artan bir fonksiyondur. $g(1) = -\alpha < 0$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$

olduğundan g fonksiyonu $\bar{x} > 1$ olan bir denge noktasına sahiptir.

Tanım 2.4.'e göre,

$$f(u_0, u_1) = \alpha + \frac{u_1}{u_0^k} \quad (6.5)$$

fonksiyonunu ele alalım. Buna göre,

$$P_0 = \frac{\partial f}{\partial u_0} \Big|_{\bar{x}} = \frac{-k}{\bar{x}^k} \quad (6.6)$$

$$P_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1} \Big|_{\bar{x}} = \frac{1}{\bar{x}^k}$$

olmak üzere (6.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktasındaki lineerleştirilmiş denklemi

$$z_{n+1} = \frac{-k}{\bar{x}^k} z_n + \frac{1}{\bar{x}^k} z_{n-(2m+1)} \quad (6.7)$$

ve karakteristik denklemi ise,

$$\lambda^{2m+2} + \frac{k}{\bar{x}^k} \lambda^{2m+1} - \frac{1}{\bar{x}^k} = 0 \text{ 'dır.} \quad (6.8)$$

Teorem 6.2. $\bar{x}$ (6.1) denkleminin denge noktası olsun.

(i) α ,

$$k(1+k)^{\frac{1-k}{k}} < \alpha \quad (6.9)$$

koşulunu sağlıyorsa, $\bar{x}$ denge noktası yerel asimptotik kararlıdır.

(ii) α ,

$$k(1+k)^{\frac{1-k}{k}} > \alpha \quad (6.10)$$

koşulunu sağlıyorsa, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

İspat. (i) Teorem 2.5.'e göre,

$$|P_0| + |P_1| < 1 \Rightarrow \left| \frac{-k}{\bar{x}^k} \right| + \left| \frac{1}{\bar{x}^k} \right| = \frac{(k+1)}{\bar{x}^k} < 1 \Rightarrow (k+1)^{\frac{1}{k}} < \bar{x} \quad (6.11)$$

koşulu sağlanırsa $\bar{x}$ denge noktası yerel asimptotik kararlıdır. (6.9) koşulunun sağlandığını varsayalım.

$$g\left((1+k)^{\frac{1}{k}}\right) = (1+k)^{\frac{1}{k}} - (1+k)^{\frac{1-k}{k}} - \alpha = (1+k)^{\frac{1}{k}} \left(1 - \frac{1}{1+k}\right) - \alpha \quad (6.12)$$

$$g\left((1+k)^{\frac{1}{k}}\right) = k(1+k)^{\frac{1-k}{k}} - \alpha < 0$$

ve $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ olduğundan, $(k+1)^{\frac{1}{k}} < \bar{x}$ 'dir. (6.11) koşulu sağlandığından $\bar{x}$ denge noktası yerel asimptotik kararlıdır.

(ii) Teorem 2.6.'ya göre $(k+1)^{\frac{1}{k}} > \bar{x}$ koşulu sağlanırsa $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır. (6.10) koşulunun sağlandığını varsayalım.

$$g\left((1+k)^{\frac{1}{k}}\right) = k(1+k)^{\frac{1-k}{k}} - \alpha > 0 \quad (6.13)$$

ve. $g(0) < 0$ olduğundan, $\bar{x} < (k+1)^{\frac{1}{k}}$ 'dır ve dolayısıyla $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

Lemma 6.3. $\alpha \neq 1$ ise, (6.1) denkleminin her $\{x_n\}_{n=-(2m+1)}^{\infty}$ çözümü aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar:

$$\alpha < x_{2(m+1)n} < \alpha \frac{1-\beta^n}{1-\beta} + \beta^n x_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\alpha < x_{2(m+1)n+1} < \alpha \frac{1-\beta^n}{1-\beta} + \beta^n x_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

(6.14)

.....

$$\alpha < x_{2(m+1)n+2m+1} < \alpha \frac{1-\beta^n}{1-\beta} + \beta^n x_{2m+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Burada $\beta = \frac{1}{\alpha^k}$ 'dır.

İspat. $\forall n = 0, 1, \dots$ için, $\alpha < x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-(2m+1)}}{x_n^k} < \alpha + \frac{x_{n-(2m+1)}}{\alpha^k}$ 'dır. $\beta = \frac{1}{\alpha^k}$ olarak alırsak

$$\alpha < x_{n+1} < \alpha + \beta x_{n-(2m+1)} \quad (6.15)$$

elde edilir. Tümevarım yöntemi ile,

$$\alpha < x_1 < \alpha + \beta x_{-(2m+1)}$$

$$\alpha < x_2 < \alpha + \beta x_{-(2m+1)+1}$$

.....

$$\alpha < x_{(2m+1)+1} < \alpha + \beta x_0$$

$$\alpha < x_{(2m+1)+2} < \alpha + \beta x_1$$

$$\alpha < x_{(2m+1)+3} < \alpha + \beta x_2$$

.....

$$\alpha < x_{4(m+1)} < \alpha + \beta x_{(2m+1)+1} < \alpha + \alpha\beta + \beta^2 x_0$$

$$\alpha < x_{4(m+1)+1} < \alpha + \beta x_{(2m+1)+2} < \alpha + \alpha\beta + \beta^2 x_1$$

.....

$$\alpha < x_{6(m+1)-1} < \alpha + \beta x_{2(m+1)+1} < \alpha(1+\beta) + \beta^2 x_{(2m+1)}$$

$$\alpha < x_{6(m+1)} < \alpha + \beta x_{4(m+1)} < \alpha(1+\beta+\beta^2) + \beta^3 x_0$$

$$\alpha < x_{6(m+1)+1} < \alpha + \beta x_{4(m+1)+1} < \alpha(1+\beta+\beta^2) + \beta^3 x_1$$

.....

$$\alpha < x_{2n(m+1)} < \alpha + \beta x_{2(n-1)(m+1)} < \alpha \frac{1-\beta^n}{1-\beta} + \beta^n x_0$$

$$\alpha < x_{2n(m+1)+1} < \alpha + \beta x_{2(n-1)(m+1)+1} < \alpha \frac{1-\beta^n}{1-\beta} + \beta^n x_1$$

(6.16)

.....

$$\alpha < x_{2n(m+1)+2m+1} < \alpha + \beta x_{2(n-1)(m+1)+2m+1} < \alpha \frac{1-\beta^n}{1-\beta} + \beta^n x_{2m+1}$$

elde edilir.

Teorem 6.4. $\bar{x}$, (6.1) denkleminin denge noktası olsun. $1 \leq k^{\frac{1}{k}} < \alpha$ ise, $\bar{x}$ global asimptotik kararlıdır.

İspat. $k \geq 1$ olduğundan,

$$k(1+k)^{\frac{1-k}{k}} < k^{\frac{1}{k}} \quad (6.17)$$

dir ve $k^{\frac{1}{k}} < \alpha$ olduğundan $k(1+k)^{\frac{1-k}{k}} < \alpha$ elde edilir. Teorem 6.2.(a)'dan $\bar{x}$ denge noktası yerel asimptotik kararlıdır.

$\{x_n\}_{n=-(2m+1)}^{\infty}$ (6.1) denkleminin bir çözümü olsun. Lemma 6.3.'den $\{x_n\}_{n=-(2m+1)}^{\infty}$ çözümünün sınırlı olduğunu biliyoruz.

$$\lambda = \liminf x_n \text{ ve } \Lambda = \limsup x_n \quad (6.18)$$

olarak tanımlayalım. Buna göre tüm $\varepsilon \in (0, \lambda)$ 'lar için

$$\lambda - \varepsilon < x_n < \Lambda + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \quad (6.19)$$

koşulunu sağlayan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Bu

$$\alpha + \frac{\lambda - \varepsilon}{(\Lambda + \varepsilon)^k} < x_{n+1} < \alpha + \frac{\Lambda + \varepsilon}{(\lambda - \varepsilon)^k}, \quad \forall n \geq n_0 + 1 \quad (6.20)$$

olduğunu gösterir.

$$\alpha + \frac{\lambda - \varepsilon}{(\Lambda + \varepsilon)^k} < \lambda \leq \Lambda < \alpha + \frac{\Lambda + \varepsilon}{(\lambda - \varepsilon)^k}, \text{dir.} \quad (6.21)$$

(6.21) eşitsizliğinde $\varepsilon \rightarrow 0$ giderse

$$\begin{aligned} \alpha + \frac{\lambda}{\Lambda^k} &\leq \lambda \leq \Lambda \leq \alpha + \frac{\Lambda}{\lambda^k} \\ \Rightarrow \alpha \lambda^k \Lambda^k + \lambda^{k+1} &\leq \lambda^{k+1} \Lambda^k \leq \lambda^k \Lambda^{k+1} \leq \alpha \Lambda^k \lambda^k + \Lambda^{k+1} \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\Rightarrow (\alpha \Lambda^k \lambda^{k-1} + \lambda^k) \leq (\Lambda^k \lambda^k) \leq (\alpha \Lambda^{k-1} \lambda^k + \Lambda^k)$$

$$\Rightarrow (\alpha \Lambda^{k-1} \lambda^{k-1})(\Lambda - \lambda) \leq (\Lambda^k - \lambda^k)$$

olur. $\Lambda \neq \lambda$ olduğundan

$$\alpha \Lambda^{k-1} \lambda^{k-1} \leq \frac{\Lambda^k - \lambda^k}{\Lambda - \lambda} \quad (6.23)$$

elde edilir.

$$\frac{\Lambda^k - \lambda^k}{\Lambda - \lambda} = (\Lambda^{k-1} + \Lambda^{k-2} \lambda + \dots + \Lambda \lambda^{k-2} + \lambda^{k-1}) \leq k \Lambda^{k-1} \quad (6.24)$$

'dir. Bu ise $\alpha^k \leq k$ kabulümüze aykırıdır.

Teorem 6.5. $\{x_n\}_{n=-(2m+1)}^\infty$ (6.1) denkleminin bir çözümü olsun.

$$(i) \ x_{-2m-1}, x_{-2m+1}, \dots, x_{-1} \geq \bar{x} \text{ ve } x_{-2m}, x_{-2m+2}, \dots, x_0 < \bar{x} \quad (6.25)$$

ya da

$$(ii) \ x_{-2m-1}, x_{-2m+1}, \dots, x_{-1} < \bar{x} \text{ ve } x_{-2m}, x_{-2m+2}, \dots, x_0 \geq \bar{x} \quad (6.26)$$

doğru ise, $\{x_n\}_{n=-(2m+1)}^\infty$ çözümü $\bar{x}$ denge noktası civarında 1 uzunluğunda yarı dönme salınımına sahiptir.

İspat. (6.1) denklemini ele alalım.

(i) $x_{-2m-1}, x_{-2m+1}, \dots, x_{-1} \geq \bar{x}$ ve $x_{-2m}, x_{-2m+2}, \dots, x_0 < \bar{x}$ olduğunu varsayalım. O zaman

$$x_1 = \alpha + \frac{x_{-2m-1}^k}{x_0^k} \geq \alpha + \frac{\bar{x}}{x_0^k} > \alpha + \frac{1}{\bar{x}^{k-1}} = \bar{x}$$

$$x_2 = \alpha + \frac{x_{-2m}^k}{x_1^k} < \alpha + \frac{\bar{x}}{x_1^k} \leq \alpha + \frac{1}{\bar{x}^{k-1}} = \bar{x}$$

$$x_3 = \alpha + \frac{x_{-2m+1}^k}{x_2^k} \geq \alpha + \frac{\bar{x}}{x_2^k} > \alpha + \frac{1}{\bar{x}^{k-1}} = \bar{x} \quad (6.27)$$

$$x_4 = \alpha + \frac{x_{-2m+2}^k}{x_3^k} < \alpha + \frac{\bar{x}}{x_3^k} \leq \alpha + \frac{1}{\bar{x}^{k-1}} = \bar{x}$$

.....

elde edilir. Bu şekilde iterasyona devam edildiği takdirde salınımın aynı olacağı açıktır.

(6.27) denkleminde (6.1) denklemini (6.25) koşulu altında

$x_1 > \bar{x}$, $x_2 < \bar{x}$, $x_3 > \bar{x}$, $x_4 < \bar{x}$,... şeklinde 1 uzunluğunda bir yarı dönme salınımına sahiptir.

(ii) Aynı şekilde $x_{-2m-1}, x_{-2m+1}, \dots, x_{-1} < \bar{x}$ ve $x_{-2m}, x_{-2m+2}, \dots, x_0 \geq \bar{x}$ olsun. Buna göre,

$$x_1 = \alpha + \frac{x_{-2m-1}^k}{x_0^k} < \alpha + \frac{\bar{x}}{x_0^k} \leq \alpha + \frac{1}{\bar{x}^{k-1}} = \bar{x}$$

$$x_2 = \alpha + \frac{x_{-2m}^k}{x_1^k} \geq \alpha + \frac{\bar{x}}{x_1^k} > \alpha + \frac{1}{\bar{x}^{k-1}} = \bar{x}$$

$$x_3 = \alpha + \frac{x_{-2m+1}^k}{x_2^k} < \alpha + \frac{\bar{x}}{x_2^k} \leq \alpha + \frac{1}{\bar{x}^{k-1}} = \bar{x} \quad (6.28)$$

$$x_4 = \alpha + \frac{x_{-2m+2}^k}{x_3^k} \geq \alpha + \frac{\bar{x}}{x_3^k} > \alpha + \frac{1}{\bar{x}^{k-1}} = \bar{x}$$

.....

elde edilir. Bu şekilde iterasyona devam edildiği takdirde salınımın aynı olacağı açıktır.

(6.28) denkleminde (6.1) denklemini (6.26) koşulu altında

$x_1 < \bar{x}$, $x_2 > \bar{x}$, $x_3 < \bar{x}$, $x_4 > \bar{x}$,... şeklinde 1 uzunluğunda bir yarı dönme salınımına sahiptir.

Teorem 6.6. $\alpha = 1$ olsun. (6.1) denkleminin iki periyotlu bir çözüme sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul $k = 1$ olmasıdır.

İspat. $\alpha = 1$, $k \in \{2, 3, \dots\}$ ve

$$\phi, \psi, \phi, \psi, \phi, \psi, \dots \quad (\phi \neq \psi), (\phi \neq 1, \psi \neq 1) \quad (6.29)$$

(6.1) denkleminin iki periyotlu bir çözümü olsun. Buna göre,

$$\phi = 1 + \frac{\phi}{\psi^k}, \quad \psi = 1 + \frac{\psi}{\phi^k} \text{ 'dır.} \quad (6.30)$$

Bu iki denklemden

$$\left. \begin{aligned} \phi\psi^k &= \psi^k + \phi \\ \psi\phi^k &= \phi^k + \psi \end{aligned} \right\} \phi\psi(\psi^{k-1} - \phi^{k-1}) = (\psi^k - \phi^k) - (\psi - \phi) \quad (6.31)$$

elde edilir.

$$\phi\psi(\psi - \phi)(\psi^{k-2} + \psi^{k-3}\phi + \dots + \psi\phi^{k-3} + \phi^{k-2}) = (\psi - \phi)(\psi^{k-1} + \psi^{k-2}\phi + \dots + \psi\phi^{k-2} + \phi^{k-1} - 1)$$

denkleminde $\psi \neq \phi$ olduğundan

$$\begin{aligned} (\phi - 1)\psi^{k-1} + (\phi - 1)\phi\psi^{k-2} + \dots + (\phi - 1)\phi^{k-3}\psi^2 + (\phi - 1)\phi^{k-2}\psi &= \phi^{k-1} - 1 \\ (\phi - 1)[\psi^{k-1} + \phi\psi^{k-2} + \dots + \phi^{k-3}\psi^2 + \phi^{k-2}\psi] &= (\phi - 1)[\phi^{k-2} + \phi^{k-3} + \dots + 1] \end{aligned} \quad (6.32)$$

dir. (6.32) denkleminde $\phi \neq 1$ olduğundan

$$\phi^{k-2}(\psi - 1) + \phi^{k-3}(\psi - 1)(\psi + 1) + \dots + \phi(\psi - 1)(\psi^{k-3} + \psi^{k-4} + \dots + 1) + \psi^{k-1} - 1 = 0 \text{ 'dır.}$$

Yine $\psi \neq 1$ olduğundan

$$\phi^{k-2} + \phi^{k-3}(\psi + 1) + \dots + \phi(\psi^{k-3} + \psi^{k-4} + \dots + 1) + (\psi^{k-2} + \psi^{k-3} + \dots + 1) = 0 \quad (6.33)$$

bulunur. ϕ ve ψ pozitif olduklarından (6.33) denklemi hiçbir zaman sıfıra eşit olmaz. Bu bir çelişkidir. Buna göre $k \notin \{2, 3, \dots\} \Rightarrow k = 1$ 'dir.

7. SONUÇLAR

Bu çalışmada, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_{n-2}}{1 + x_n y_{n-2}}$, $y_{n+1} = \frac{y_n + x_{n-2}}{1 + y_n x_{n-2}}$ fark denklem sisteminin global asimptotik

kararlı olduğu gösterildi ve yarı dönme analizi yapıldı. Daha sonra $x_{n+1} = \frac{1}{y_{n-1}}$, $y_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}$

fark denklem sisteminin kararsız olduğu ve 6 periyotlu çözümlere sahip olduğu ispatlandı.

Bundan başka, $x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}^b + x_{n-3}^b + x_{n-1}^b + a}{x_n x_{n-3}^b + x_{n-2}^b + x_{n-1}^b + a}$ rasyonel fark denklemi incelendi. Global

asipmtotik kararlı olduğu ispatlandı. Ayrıca yarı dönme analizi yapıldı. Son olarak da

$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-(2m+1)}}{x_n^k}$ rasyonel fark denkleminin global asimptotik kararlı olması için gerek ve

yeter koşulu saptandı. Yarı dönme analizi yapıldı.

KAYNAKLAR

- Abu-Saris, R., Çınar, C. ve Yalçinkaya I., (2008), “On the Asymptotic Stability of $x_{n+1} = (a + x_n x_{n-k}) / (x_n + x_{n-k})$ ”, *Compt. Math. Appl.*, 56:1172-1175.
- Amleh, A. M., Kruse, N. ve Ladas, G., (1999), “On a Class of Difference Equations with Strong Negative Feedback”, *Jour. Diff. Appl.*, 5:497-515.
- Bayram, M. ve Daş, S.E., (2010), “Global Asymptotic Stability of a Nonlinear Recursive Sequence”, *Int. Math.For.*, 5(22):1083-1089.
- Bayram, M. ve Daş, S.E., (2010), “On the Positive Solutions of the Difference Equation System”, *Appl. Math. Sci.*, 4(17):817-821.
- Berenhaut, K. S., Foley, J. D. ve Stević S., (2007), “The Global Attractivity of the Rational Difference Equation $y_n = (y_{n-k} + y_{n-m}) / (1 + y_{n-k} y_{n-m})$ ”, *Appl. Math. Lett.*, 20:54-58.
- Camouzis, E. ve Papaschinopoulos, G., (2004), “Global Asymptotic Behavior of Positive Solutions on the System of Rational Difference Equations”, *Appl. Math. Lett.* 17:733-737.
- Clark, C. A., Kulenović, M. R. S. ve Selgrade, J. F., (2005), “On a System of Rational Difference Equations”, *Jour. Diff. Equ. Appl.*, 11(7): 565-580.
- Clark, D. ve Kulenović, M. R. S., (2002), “A Coupled System of Rational Difference Equations”, *Comp. Math. Appl.*, 43:849-867.
- Çınar, C., (2004), “On the Positive Solutions of the Difference Equation System $x_{n+1} = 1/y_n$, $y_{n+1} = y_n / x_{n-1} y_{n-1}$ ”, *Appl. Math. Compt.*, 158:303-305.
- Çınar, C., (2004), “On the Positive Solutions of the Difference Equation $x_{n+1} = x_{n-1} / (1 + ax_n x_{n-1})$ ”, *Appl. Math. Compt.*, 158:809-812.
- Elabbasy, E. M., El-Metwally, H. ve Elsayed, E. M., (2006), “On the Difference Equation $x_{n+1} = \alpha x_n - bx_n / (cx_n - dx_{n-1})$ ”, *Adv. Diff. Equ.*, 82579:1-10.
- El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. ve Mousa, M. S., (2004), “On Asymptotic Behaviour of the difference equation $x_{n+1} = \alpha + x_{n-k} / x_n$ ”, *Appl. Math. Compt.*, 147:163-167.
- Elsayed, E. M., (2009), “Qualitative Behavior of Difference Equation of Order Two”, *Math. Compt. Modell.*, 50:1130-1141.
- Feuer, J., (2004), “On the Behavior of Solutions of $x_{n+1} = p + x_{n-1} / x_n$ ”, *Appl. Anal.*, 83(6):599-606.
- Hamza, A. E. ve Morsy, A., (2009), “On the Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha + x_{n-1} / x_n^k$ ”, *Appl. Math. Lett.*, 22:91-95.
- Özban, A. Y., (2006), “On the Positive Solutions of the System of Rational Difference Equations $x_{n+1} = 1/y_{n-k}$, $y_{n+1} = y_n / x_{n-m} y_{n-m-k}$ ”, *J. Math. Anal. Appl.*, 323:26-32.
- Xianyi, L. ve Deming, Z., (2003), “Global Asymptotic Stability in a Rational Equation”, *J. Diff. Equa. Appl.*, 9(9):833-839.
- Xianyi, L. ve Deming, Z., (2004), “Global Asymptotic Stability of a Nonlinear Recursive Sequence”, *Compt. Math. Appl.*, 17:833-838.
- Xianyi, L., (2005a), “Qualitative Properties for a Fourth-order Rational Difference Equation”, *J. Math. Anal. Appl.*, 311:103-111.

Xianyi, L., (2005b), "Global Behavior for a Fourth-order Rational Difference Equation", J. Math. Anal. Appl., 312:555-563.

Yalçınkaya, I., Çınar, C. ve Şimşek, D., (2008), "Global Asymptotic Stability of a System of a Difference Equations", Appl. Anly., 87(6):677-687.

Yang, X., Liu, Y. ve Bai, S., (2005), "On the System of High Order Rational Difference Equations $x_n = a / y_{n-p}$, $y_n = by_{n-p} / x_{n-q}y_{n-q}$ ", Appl. Math. Comp., 171:853-856.

Zhang, Y., Yang, X., Megson, G. M. ve Evans, D. J., (2006), "On the System of Rational Difference Equations", Appl. Math. Comp., 176:403-408.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 10.06.1979

Doğum yeri İstanbul

Lise 1993–1997 Çemberlitaş Kız Lisesi

Lisans 1997–2001 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak.
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 2001–2004 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Bölümü

Çalıştığı kurum

2001-Devam ediyor YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Araştırma Görevlisi