

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İKİ REGÜLER STURM-LİOUVILLE OPERATÖRÜNÜN
ÖZDEĞERLER FARKININ TOPLAMI HAKKINDA**

Matematikçi Bora ERGENGİL

FBE Matematik Anabilim Dalında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ehliman ADIGÜZELOV (YTÜ)

İSTANBUL, 2008

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
ÖNSÖZ	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	3
2.1 Mutlak Sürekli Fonksiyonlar.....	3
2.2 Lineer Operatörün Spektrumu.....	7
2.3 Eşlenik Operatörün Genel Tanımı ve Kendine Eş Operatörler.....	8
2.4 Kapalı Operatörler	13
2.5 Tam Sürekli Operatörler	15
2.6 Çekirdek Operatör	20
3. İKİ REGÜLER STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLER FARKININ TOPLAMI HAKKINDA	23
3.1 Kendine Eş Regüler Sturm-Liouville Operatörleri.....	23
3.2 B Operatörünün Spektrumunun Özellikleri	27
3.3 B ve A Operatörlerinin Özdeğerler Farkının Toplamı İçin Formül	45
3.4 Örnek	64
4. SONUÇLAR	66
KAYNAKLAR.....	67
ÖZGEÇMİŞ.....	69

SİMGE LİSTESİ

$B(X, Y)$	X ten Y ye tüm sınırlı lineer operatörler
$\dim X$	X lineer uzayının boyutu
$D(A)$	A operatörünün tanım kümesi
$R(A)$	A operatörünün görüntü kümesi
$R_\lambda(A)$	A operatörünün rezolventi
$\text{tr}A$	A çekirdek operatörünün matris izi
$(.,.)$	İç çarpım
$\ .\ $	Norm
$\rho(A)$	A operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma(A)$	A operatörünün spektrumu
$\sigma_\infty(H)$	H den H ye tüm tam sürekli operatörler

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1 $O(s^{-1})$ ve $\cos s\pi$ fonksiyonlarının grafiği.	39
---	----

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında bana her konuda destek olan ve yardımlarını esirgemeyen sayın Hocam Prof. Dr. Ehliman ADIGÜZELOV' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

“İki Regüler Sturm-Liouville Operatörünün Özdeğerler Farkının Toplamı Hakkında” adlı bu tez çalışmasında $L_2[0, \pi]$ uzayında sırasıyla

$$\ell_0(y) = -y''(x)$$

$$\ell(y) = -y''(x) + q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadeleri ve aynı $y'(0) = y(\pi) = 0$ sınır koşulları ile üretilen kendine eş A ve B operatörlerinin çeşitli spektral özellikleri incelenmiştir. Ayrıca $\mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n < \dots$ ve $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ sırasıyla A ve B operatörlerinin özdeğerleri olmak üzere, bu operatörlerin özdeğerler farkının toplamı için

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \frac{1}{4} [q(0) - q(\pi)]$$

formülünün sağlandığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kendine eş operatör, özdeğer, çekirdek operatör, matris izi, rezolvent, spektrum.

ABSTRACT

In this thesis, entitled “On the Sum of Differences of Eigenvalues of Two Regular Sturm-Liouville Operators”, some particular spectral properties have been examined of two self-adjoint operators A and B generated by the differential statements

$$\ell_0(y) = -y''(x)$$

$$\ell(y) = -y''(x) + q(x)y(x)$$

and with the same boundary conditions $y'(0) = y(\pi) = 0$ in the space $L_2[0, \pi]$. Moreover it has been shown that the formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \frac{1}{4} [q(0) - q(\pi)]$$

held for the sum of differences of eigenvalues of these operators. Here, $\mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n < \dots$ and $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ were assumed to be the eigenvalues of A and B, respectively.

Key Words: Self adjoint operator, eigenvalue, kernel operator, trace of matrix, resolvent, spectrum.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada $L_2[0, \pi]$ uzayında sırasıyla

$$\ell_0(y) = -y''(x) \quad (1.1)$$

$$\ell(y) = -y''(x) + q(x)y(x) \quad (1.2)$$

diferansiyel ifadeleri ve aynı

$$y'(0) = y(\pi) = 0$$

sınır koşulları ile oluşturulan A ve B operatörlerinin spektral özellikleri incelenmiş ve bu operatörlerin özdeğerler farkının toplamı için bir formülün gerçekleştiği gösterilmiştir.

A ve B operatörlerinin tanım kümesi $L_2[0, \pi]$ uzayının

1. $y(x)$ ve $y'(x)$ fonksiyonları $[0, \pi]$ aralığında mutlak süreklidir,
2. $y'(0) = y(\pi) = 0$,
3. $y''(x) \in L_2[0, \pi]$

koşullarını sağlayan tüm $y = y(x)$ fonksiyonlarının kümesidir. (1.2) ifadesinde yer alan $q(x)$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığında tanımlı, ikinci mertebeden sürekli türeve sahip olan reel değerli bir fonksiyon olduğu ve

$$\int_0^{\pi} q(x) dx = 0$$

koşulunu sağladığı varsayılmıştır.

A ve B operatörlerinin kendine eş, sınırsız ve saf ayırık spektruma sahip olan operatörler oldukları gösterilmiştir.

$\mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n < \dots$ ve $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ sırasıyla A ve B operatörlerinin özdeğerleri olsun. A operatörünün özdeğerleri

$$\mu_n = \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ve bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özfonksiyonları

$$\varphi_n = \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

şeklindedir.

Bu çalışmada B operatörünün $\{\lambda_n\}_0^\infty$ özdeğerleri için

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(x) dx + O(n^{-2})$$

şeklinde bir asimtotik formül bulunmuştur. Ayrıca B ve A operatörlerinin özdeğerler farkından oluşan $\sum_{n=0}^\infty (\lambda_n - \mu_n)$ serisinin toplamının

$$\sum_{n=0}^\infty (\lambda_n - \mu_n) = \frac{1}{4} [q(0) - q(\pi)]$$

formülünü sağladığı gösterilmiştir.

Saf ayrık spektruma sahip olan iki diferansiyel operatörün özdeğerler farkının toplamı için formül ilk olarak Gelfand ve Levitan' ın (1953) çalışmasında bulunmuştur. Bu çalışmadan sonra Dikiy (1953, 1955, 1958); Gelfand (1956); Gasimov ve Levitan (1963); Lidskiy ve Sadovniçiy (1967); Sadovniçiy (1967, 1974); Halilova (1976); Marchenko (1977); Maksudov, Bayramoğlu ve Adıgüzelov (1984, 1993); Bayramoğlu (1987); Almamedov, Bayramoğlu ve Katanova (1991); Bayramoğlu ve Adıgüzelov (1997); Adıgüzelov, Avcı ve Gül (2001); Adıgüzelov, Baykal ve Bayramov (2001); Adıgüzelov ve Bakşi (2004); Adıgüzelov, Bakşi ve Baykal (2004) çalışmalarında ve birçok başka çalışmalarda çeşitli diferansiyel operatörlerin özdeğerleri için formüller bulunmuştur.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Mutlak Sürekli Fonksiyonlar

Tanım 2.1.1: f sonlu bir $[a, b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $[a, b]$ aralığının ikişerli ayrık açık alt aralıklarının

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$$

koşulunu sağlayan her sonlu $\{(a_i, b_i)\}_1^n$ topluluğu için

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ pozitif sayısı varsa f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidır denir.

Bu tanımdan her mutlak sürekli fonksiyonun düzgün sürekli olduğu görülmektedir. Oysa her düzgün sürekli fonksiyon mutlak sürekli değildir. $[a, b]$ aralığında Lipschitz koşulunu sağlayan her fonksiyonun bu aralıkta mutlak sürekli olduğu açıktır.

Teorem 2.1.1: Bir f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $[a, b]$ aralığının ikişerli ayrık açık alt aralıklarının

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \tag{2.1}$$

koşulunu sağlayan her sonlu $\{(a_i, b_i)\}_1^n$ topluluğu için

$$\left| \sum_{i=1}^n [f(b_i) - f(a_i)] \right| < \varepsilon \tag{2.2}$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısının var olmasıdır.

İspat:

Gereklilik: $\left| \sum_{i=1}^n [f(b_i) - f(a_i)] \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)|$ olduğundan gereklik açıktır.

Yeterlilik: Her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $[a, b]$ aralığının ikişerli ayrık açık alt aralıklarının

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \text{ koşulunu sağlayan her sonlu } \{(a_i, b_i)\}_1^n \text{ topluluğu için } \left| \sum_{i=1}^n [f(b_i) - f(a_i)] \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısının var olduğunu kabul edelim. $f(b_i) - f(a_i) \geq 0$ olacak

şekilde (a_i, b_i) aralıklarının topluluğu A, geri kalan aralıkların topluluğu B olsun.

$$\sum_A (b_i - a_i) < \delta \text{ ve } \sum_B (b_i - a_i) < \delta \text{ olduğundan}$$

$$\sum_A |f(b_i) - f(a_i)| = \left| \sum_A [f(b_i) - f(a_i)] \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.3)$$

$$\sum_B |f(b_i) - f(a_i)| = -\sum_B [f(b_i) - f(a_i)] = \left| \sum_B [f(b_i) - f(a_i)] \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.4)$$

dır. (2.3) ve (2.4) ten

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

elde edilir. ■

Teorem 2.1.2: f ve g sonlu bir $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli herhangi iki fonksiyon olmak

üzere $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ ve her $x \in [a, b]$ için $g(x) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonları da $[a, b]$

aralığında mutlak süreklidir.

İspat: Önce $f + g$ fonksiyonunun mutlak sürekli olduğunu gösterelim. f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli olduklarından her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $[a, b]$ aralığının ikişerli

ayrık açık alt aralıklarının $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ koşulunu sağlayan her sonlu $\{(a_i, b_i)\}_1^n$ topluluğu

için $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\sum_{i=1}^n |g(b_i) - g(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı

vardır. Dolayısıyla

$$\sum_{i=1}^n |[f(b_i) + g(b_i)] - [f(a_i) + g(a_i)]| = \sum_{i=1}^n |[f(b_i) - f(a_i)] + [g(b_i) - g(a_i)]|$$

$$\sum_{i=1}^n | [f(b_i) + g(b_i)] - [f(a_i) + g(a_i)] | \leq \sum_{i=1}^n | f(b_i) - f(a_i) | + \sum_{i=1}^n | g(b_i) - g(a_i) | < \varepsilon$$

elde edilir.

Benzer şekilde $f - g$ fonksiyonunun da $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli olduğu gösterilebilir.

Bu kez $f.g$ fonksiyonunun mutlak sürekli olduğunu gösterelim. f ve g fonksiyonlarından biri sıfır ise $f.g \equiv 0$ olup mutlak sürekli. $f \neq 0$ ve $g \neq 0$ olduğunu varsayalım. Ayrıca

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x)| = A \text{ ve } \max_{x \in [a, b]} |g(x)| = B \text{ olsun. } A > 0 \text{ ve } B > 0 \text{ dır. Her } \varepsilon > 0 \text{ verildiğinde } [a, b]$$

aralığının ikişerli ayrık açık alt aralıklarının $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ koşulunu sağlayan her sonlu

$\{(a_i, b_i)\}_1^n$ topluluğu için

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2B} \quad (2.5)$$

ve

$$\sum_{i=1}^n |g(b_i) - g(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2A} \quad (2.6)$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

$$\begin{aligned} |f(b_i)g(b_i) - f(a_i)g(a_i)| &= |f(b_i)g(b_i) - f(b_i)g(a_i) + f(b_i)g(a_i) - f(a_i)g(a_i)| \\ &\leq |f(b_i)| \cdot |g(b_i) - g(a_i)| + |g(a_i)| \cdot |f(b_i) - f(a_i)| \\ &\leq A |g(b_i) - g(a_i)| + B |f(b_i) - f(a_i)|. \end{aligned}$$

(2.5), (2.6) ve son bağıntıdan

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i)g(b_i) - f(a_i)g(a_i)| \leq A \sum_{i=1}^n |g(b_i) - g(a_i)| + B \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

bulunur.

$\frac{f}{g}$ fonksiyonunu f ve $\frac{1}{g}$ fonksiyonlarının çarpımı olarak düşünebiliriz. Şu halde $\frac{f}{g}$

fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli olduğunu göstermek için yukarıdaki ispattan

dolayı $\frac{1}{g}$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli olduğunu göstermek yeterlidir.

Hipotez gereğince her $x \in [a, b]$ için $g(x) \neq 0$ olduğundan, $|g(x)| \geq C > 0$ ($x \in [a, b]$) olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır. $g(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli olduğundan,

$[a, b]$ aralığının ikişerli ayırık açık alt aralıklarının $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ koşulunu sağlayan her sonlu $\{(a_i, b_i)\}_1^n$ topluluğu için

$$\sum_{i=1}^n |g(b_i) - g(a_i)| < \varepsilon \cdot C^2 \quad (2.7)$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. Öte yandan

$$\left| \frac{1}{g(b_i)} - \frac{1}{g(a_i)} \right| = \frac{|g(b_i) - g(a_i)|}{|g(b_i)g(a_i)|} \leq \frac{|g(b_i) - g(a_i)|}{C^2} \quad (2.8)$$

dır. (2.7) ve (2.8) den

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{g(b_i)} - \frac{1}{g(a_i)} \right| \leq \frac{1}{C^2} \sum_{i=1}^n |g(b_i) - g(a_i)| < \varepsilon$$

elde edilir. ■

Teorem 2.1.3: f $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve değerleri $[A, B]$ aralığına ait olan bir fonksiyon olsun. Eğer $F(y)$, $[A, B]$ aralığında Lipschitz koşulunu sağlayan bir fonksiyon ise $F[f(x)]$ bileşke fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidir.

İspat: F fonksiyonu $[A, B]$ aralığında Lipschitz koşulunu sağladığından dolayı her $y', y'' \in [A, B]$ için $|F(y'') - F(y')| \leq K \cdot |y'' - y'|$ olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti vardır.

Dolayısıyla $[a, b]$ aralığının ikişerli ayırık açık alt aralıklarının her sonlu $\{(a_i, b_i)\}_1^n$ topluluğu için

$$\sum_{i=1}^n |F[f(b_i)] - F[f(a_i)]| \leq K \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)|$$

dır. Bu eşitsizlikten ve f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli olmasından, $F[f(x)]$ fonksiyonunun da $[a, b]$ aralığında mutlak sürekliliği elde edilir. ■

Tanım 2.1.2: Verilen bir özellik ölçülebilir bir E kümesinin sıfır ölçümlü bir alt kümesi dışında her noktasında sağlanıyorsa bu özellik E kümesinde hemen hemen her yerde (hhhhy) sağlanıyor denir.

Teorem 2.1.4: $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli bir f fonksiyonunun hemen hemen her $x \in [a, b]$ noktasında sonlu türevi vardır ve $f'(x)$ $[a, b]$ aralığında Lebesgue anlamında integre edilebilirdir.

Teorem 2.1.5: f $[a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ aralığında integre edilebilir bir fonksiyon ise

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (a \leq x \leq b)$$

fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli.

Teorem 2.1.6: f $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon ise her $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ için

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(t)dt = f(\beta) - f(\alpha)$$

dır.

Teorem 2.1.7: f ve g $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli herhangi iki fonksiyon ise

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

dır.

2.2 Lineer Operatörün Spektrumu

Tanım 2.2.1: X bir lineer uzay ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow X$ bir lineer operatör olsun. $Ax_0 = \lambda_0 x_0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $x_0 \in D(A)$ ve bir λ_0 sayısı varsa, λ_0 a A operatörünün bir özdeğeri ve x_0 a da bu özdeğere karşılık gelen bir özvektörü denir.

Tanım 2.2.2: Bir A lineer operatörünün bir λ özdeğerine karşılık gelen tüm özvektörlerin ve sıfır elemanının oluşturduğu N_{λ} lineer manifolduna A nın λ özdeğerine karşılık gelen özuzayı denir.

Tanım 2.2.3: Bir A lineer operatörünün bir λ özdeğerine karşılık gelen N_λ özuzayının boyutuna λ özdeğerinin katlılığı denir.

Teorem 2.2.1: A bir lineer operatör ve λ herhangi bir sayı olsun. $A - \lambda I$ operatörünün tersinin varlığı için gerek ve yeter koşul λ sayısının A nın bir özdeğeri olmamasıdır.

Tanım 2.2.4: X kompleks bir Banach uzayı ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow X$ herhangi bir lineer operatör olsun. Bir $\lambda \in \mathbb{C}$ için $A - \lambda I$ operatörünün $(A - \lambda I)^{-1}$ tersi var, sınırlı ve $\overline{D((A - \lambda I)^{-1})} = X$ ise bu λ sayısına A operatörünün bir regüler değeri veya bir regüler noktası denir. A operatörünün tüm regüler değerlerinin kümesine A operatörünün rezolvent kümesi denir ve $\rho(A)$ ile gösterilir. $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ kümesinde tanımlı $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ operatör fonksiyonuna A nın rezolventi denir.

Tanım 2.2.5: X kompleks bir Banach uzayı ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow X$ bir lineer operatör olsun. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ kümesine A operatörünün spektrumu denir.

Teorem 2.2.1, tanım 2.2.4 ve tanım 2.2.5 ten bir A lineer operatörünün özdeğerlerinin A nın spektrumuna ait olduğu görülmektedir. Sonlu boyutlu uzaylarda her lineer operatörün spektrumu sadece özdeğerlerden ibarettir.

Tanım 2.2.6: (Dunford ve Schwartz, 1957) X kompleks bir Banach uzayı ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow X$ bir lineer operatör olsun. $A - \lambda I$ operatörünün tersinin var olmadığı tüm $\lambda \in \mathbb{C}$ sayılarının kümesine bir başka deyişle A nın tüm özdeğerlerinden oluşan kümeye A nın spektrumunun noktasal kısmı denir.

$A - \lambda I$ operatörünün $(A - \lambda I)^{-1}$ tersinin var, sınırsız ve $\overline{D((A - \lambda I)^{-1})} = X$ olduğu tüm $\lambda \in \mathbb{C}$ sayılarının kümesine A nın spektrumunun sürekli kısmı denir.

$A - \lambda I$ operatörünün tersinin var ve $\overline{D((A - \lambda I)^{-1})} \neq X$ olduğu tüm $\lambda \in \mathbb{C}$ sayılarının kümesine A nın spektrumunun kalan kısmı denir.

2.3 Eşlenik Operatörün Genel Tanımı ve Kendine Eş Operatörler

Teorem 2.3.1: Bir H Hilbert uzayının bir M lineer manifoldunun H de yoğun ($\overline{M} = H$) olması için gerek ve yeter koşul H nin M ye ortogonal olan sıfırdan farklı bir elemana sahip olmamasıdır.

Tanım 2.3.1: H bir Hilbert uzayı ve $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow H$ bir lineer operatör olsun. $x \in D(A)$ ve $y \in H$ olmak üzere (Ax, y) ifadesini göz önüne alalım. $\exists y \in H$ elemanları vardır ki

$$(Ax, y) = (x, y^*) \quad (\forall x \in D(A)) \quad (2.9)$$

dır. Burada y^* , H nin y ye bağlı olan bir elemanıdır. (2.9) bağıntısını sağlayan y elemanlarının kümesini E ile gösterelim. $E \subset H$ kümesi boştan farklıdır. Gerçekten

$$(Ax, 0) = (x, 0) \quad (\forall x \in D(A))$$

dır. Yani $0 \in E$ dir. Her $y \in E$ için (2.9) bağıntısını sağlayan y^* elemanının tek olduğunu gösterelim. $y_1^*, y_2^* \in H$ için

$$(Ax, y) = (x, y_1^*) \quad (\forall x \in D(A))$$

$$(Ax, y) = (x, y_2^*) \quad (\forall x \in D(A))$$

olsun. Son iki eşitlikten

$$(x, y_1^* - y_2^*) = 0 \quad (\forall x \in D(A))$$

yani $y_1^* - y_2^* \perp D(A)$ bulunur. O halde teorem 2.3.1 gereğince $y_1^* - y_2^* = 0$ veya $y_1^* = y_2^*$ dır.

Burada her $y \in E$ elemanına (2.9) koşulunu sağlayan bir y^* elemanını karşılık getiren bir A^* operatörünün tanımlandığı görülmektedir. Dolayısıyla

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad (\forall x \in D(A) \text{ ve } \forall y \in E) \quad (2.10)$$

dir. Bu A^* operatörüne A nın eşlenik operatörü denir.

$A^* : D(A^*) \rightarrow H$ ($D(A^*) = E$) operatörünün lineer olduğunu gösterelim. Her $y_1, y_2 \in D(A^*)$ ve her $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} (Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) &= \overline{\alpha_1} (Ax, y_1) + \overline{\alpha_2} (Ax, y_2) \\ &= \overline{\alpha_1} (x, A^* y_1) + \overline{\alpha_2} (x, A^* y_2) \end{aligned}$$

$$(Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = (x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2) \quad (\forall x \in D(A)) \quad (2.11)$$

dır. (2.11) den eşlenik operatörünün tanımı gereğince

$$A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2 .$$

Tanım 2.3.2: H bir Hilbert uzayı ve $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow H$ bir lineer operatör olsun. Eğer

$$A = A^*$$

ise A ya kendine eş operatör denir.

Tanım 2.3.3: H bir Hilbert uzayı ve $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow H$ bir lineer operatör olsun. Eğer her $x, y \in D(A)$ için

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

ise A ya simetrik operatör denir.

Tanım 2.3.2 ve tanım 2.3.3 ten her kendine eş operatörün aynı zamanda simetrik olduğu görülmektedir. Ancak, her simetrik operatörün kendine eş olması gerekmez. Ayrıca A simetrik bir operatör ise $A \subset A^*$ dır. Yani A^* , A operatörünün bir genişlemesidir.

Teorem 2.3.2: H bir Hilbert uzayı $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow H$ bir lineer operatör ve $B : H \rightarrow H$ sınırlı lineer bir operatör olsun. O zaman

$$(A + B)^* = A^* + B^*$$

dir.

İspat: $x \in D(A) = D(A + B)$ ve $y \in D((A + B)^*)$ olsun.

$$\begin{aligned} ((A + B)x, y) &= (Ax, y) + (Bx, y) \\ &= (Ax, y) + (x, B^* y) \\ &= (x, (A + B)^* y) \quad \left(\forall x \in D(A) \text{ ve } \forall y \in D((A + B)^*) \right) . \end{aligned}$$

Bu son ifadeden

$$(Ax, y) = (x, (A + B)^* y) - (x, B^* y)$$

$$(Ax, y) = (x, (A + B)^* y - B^* y) \quad \left(\forall x \in D(A) \text{ ve } \forall y \in D((A + B)^*) \right) \quad (2.12)$$

bulunur. (2.12) den $y \in D(A^*)$ ve $A^* y = (A + B)^* y - B^* y$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla

$$D((A + B)^*) \subset D(A^*) \quad (2.13)$$

ve

$$(A + B)^* y = A^* y + B^* y = (A^* + B^*) y \quad \left(\forall y \in D((A + B)^*) \right) \quad (2.14)$$

dır. (2.13) ve (2.14) ten

$$(A + B)^* \subset A^* + B^*$$

elde edilir. Bu kez $x \in D(A)$ ve $y \in D(A^*)$ olduğunu varsayalım.

$$\begin{aligned} ((A + B)x, y) &= (Ax, y) + (Bx, y) \\ &= (x, A^* y) + (x, B^* y) \\ &= (x, A^* y + B^* y) \quad \left(\forall x \in D(A) \text{ ve } \forall y \in D(A^*) \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

(2.15) ten $y \in D((A + B)^*)$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla

$$D(A^*) \subset D((A + B)^*) \quad (2.16)$$

dır. (2.13), (2.14) ve (2.16) dan

$$(A + B)^* = A^* + B^*$$

bulunur. ■

Teorem 2.3.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 2.3.1: H bir Hilbert uzayı ve $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow H$, $B : H \rightarrow H$ herhangi iki kendine eş operatör ise $A + B : D(A) \rightarrow H$ operatörü de kendine eştir.

Teorem 2.3.3: (Smirnov, 1964) H bir Hilbert uzayı ve $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow H$ simetrik bir operatör olsun. Eğer $R(A - \lambda I) = R(A - \bar{\lambda} I) = H$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı

varsa A operatörü kendine eştir.

H bir Hilbert uzayı ve $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow H$ kendine eş bir operatör olsun. Her $x \in D(A)$, $x \neq 0$ için $(Ax, x) > 0$ ($(Ax, x) < 0$) ise A ya pozitif (negatif) operatör denir ve bu $A > 0$ ($A < 0$) şeklinde yazılır. Her $x \in D(A)$ için $(Ax, x) \geq 0$ ($(Ax, x) \leq 0$) ise A ya negatif olmayan (pozitif olmayan) bir operatör denir ve bu $A \geq 0$ ($A \leq 0$) şeklinde gösterilir.

A ve B kendine eş herhangi iki operatör olsun. $D(A) \subset D(B)$ ve $D(A)$ dan H ye $A - B$ operatörü pozitif (negatif olmayan) bir operatör ise A ya B den büyüktür (küçük değildir) denir ve $A > B$ ($A \geq B$) olarak yazılır.

Tanım 2.3.4: A negatif olmayan kendine eş bir operatör ve B de $B^2 = A$ olacak şekilde kendine eş bir operatör ise B ye A nın karekökü denir.

Teorem 2.3.4: Negatif olmayan kendine eş bir $A : H \rightarrow H$ operatörünün bir tek negatif olmayan kendine eş B karekökü vardır. Eğer $C : H \rightarrow H$

$$AC = CA \quad (2.17)$$

olacak şekilde herhangi bir sınırlı lineer operatör ise

$$BC = CB \quad (2.18)$$

dir (Lysternik ve Sobolev, 1955).

Tanım 2.3.5: H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı ve $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow H$ kendine eş bir operatör olsun. Eğer A operatörünün spektrumu sadece her birinin katlılığı sonlu olan

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots \quad (2.19)$$

özdeğerlerinden ibaret ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$$

ise A operatörü saf ayrık spektruma sahiptir denir.

(2.19) da her özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır.

2.4 Kapalı Operatörler

Tanım 2.4.1: X ve Y herhangi iki Banach uzayı ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$$

koşullarını sağlayan her $\{x_n\} \subset D(A)$ dizisi için $x \in D(A)$ ve $Ax = y$ oluyorsa A ya kapalı operatör denir.

Teorem 2.4.1: Kapalı bir A operatörünün A^{-1} tersi varsa A^{-1} operatörü de kapalıdır.

Teorem 2.4.2: X ve Y herhangi iki Banach uzayı $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow Y$ kapalı bir operatör ve $B : X \rightarrow Y$ sınırlı lineer bir operatör olsun. O takdirde $A + B : D(A) \rightarrow Y$ operatörü kapalıdır.

Teorem 2.4.3: H bir Hilbert uzayı ve $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow H$ herhangi bir lineer operatör olsun. A operatörünün eşleniği olan A^* operatörü kapalıdır.

İspat: $\{y_n\} \subset D(A^*)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} A^* y_n = z$ koşullarını sağlayan herhangi bir dizi olsun. Bu durumda $y \in D(A^*)$ ve $A^* y = z$ olduğunu göstermek gerekir. İç çarpımın sürekli fonksiyon olmasından yararlanarak her $x \in D(A)$ için

$$(Ax, y) = (Ax, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (Ax, y_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (x, A^* y_n)$$

$$= (x, \lim_{n \rightarrow \infty} A^* y_n)$$

$$= (x, z)$$

bulunur. Buradan eşlenik operatörün tanımı gereğince $y \in D(A^*)$ ve $A^* y = z$ dir. ■

Teorem 2.4.3 ten aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 2.4.1: Her kendine eş operatör kapalıdır.

Teorem 2.4.4: X kompleks bir Banach uzayı ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow X$ kapalı bir operatör olsun. O takdirde her $\lambda \in \rho(A)$ için $(A - \lambda I)^{-1}$ operatörü tüm X te tanımlıdır.

Teorem 2.4.5: X kompleks bir Banach uzayı ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow X$ kapalı bir operatör ise $\forall \lambda, \mu \in \rho(A)$ için

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu$$

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$$

dır.

Teorem 2.4.6: X bir Banach uzayı ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow X$ bir kapalı operatör olsun. Eğer A nın A^{-1} tersi varsa

$$\sigma(A^{-1}) \setminus \{0\} = \{ \lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\} \}$$

dır.

İspat: $\lambda \in \rho(A) \setminus \{0\}$ olsun.

$$A^{-1} - \lambda^{-1}I = \lambda^{-1}(\lambda I - A)A^{-1}$$

dır. Buradan

$$(A^{-1} - \lambda^{-1}I)^{-1} = -\lambda A(A - \lambda I)^{-1} = -\lambda(A - \lambda I + \lambda I)(A - \lambda I)^{-1} = -\lambda I - \lambda^2(A - \lambda I)^{-1} \quad (2.20)$$

elde edilir. (2.20) den $A^{-1} - \lambda^{-1}I$ operatörünün $(A^{-1} - \lambda^{-1}I)^{-1}$ tersinin var ve sınırlı olduğu görülmektedir. Öte yandan teorem 2.4.4 gereğince $D((A - \lambda I)^{-1}) = X$ tir. Dolayısıyla $(A^{-1} - \lambda^{-1}I)^{-1}$ operatörü tüm X te tanımlıdır. O halde

$$\lambda^{-1} \in \rho(A^{-1})$$

dır. Teorem 2.4.1 gereğince $A^{-1} : R(A) \rightarrow X$ operatörü kapalıdır ve $(A^{-1})^{-1} = A$ olduğu göz önüne alınırsa yukarıdaki ispattan dolayı $\lambda \in \rho(A^{-1}) \setminus \{0\}$ ise $\lambda^{-1} \in \rho(A)$ dır. Bu nedenle

$\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ ise $\lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1})$ ve $\mu \in \sigma(A^{-1}) \setminus \{0\}$ ise $\mu^{-1} \in \sigma(A)$ dır. Sonuç olarak

$$\sigma(A^{-1}) \setminus \{0\} = \{ \lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\} \}$$

dır. ■

2.5 Tam Sürekli Operatörler

Tanım 2.5.1: X ve Y herhangi iki normlu lineer uzay olsun. Bir $A : X \rightarrow Y$ lineer operatörü X in her sınırlı alt kümesini Y nin rölatif kompakt bir alt kümesine dönüştürürse A ya tam sürekli (kompakt) bir operatör denir.

Bu tanımdan her tam sürekli operatörün sınırlı yani sürekli olduğu görülmektedir. X ve Y herhangi iki normlu lineer uzay olmak üzere X ten Y ye tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesini $B(X, Y)$ ile göstereceğiz.

Teorem 2.5.1: Bir $A : X \rightarrow Y$ lineer operatörünün tam sürekli olması için gerek ve yeter koşul her sınırlı $\{x_n\} \subset X$ dizisi için $\{Ax_n\} \subset Y$ dizisinin yakınsak bir alt diziye sahip olmasıdır.

İspat:

Gereklilik: A nın tam sürekli olduğunu kabul edelim ve $\{x_n\} \subset X$ sınırlı bir dizi olsun. Tam sürekli operatörün tanımından $\{Ax_n\} \subset Y$ kümesi rölatif kompakttır. Öte yandan rölatif kompaktlığın tanımından $\{Ax_n\}$ dizisi yakınsak bir alt diziye sahiptir.

Yeterlilik: Her sınırlı $\{x_n\} \subset X$ dizisi için $\{Ax_n\} \subset Y$ dizisinin yakınsak bir alt diziye sahip olduğunu varsayalım. $E \subset X$ sınırlı bir küme olsun. Bu durumda $A(E) = \{Ax : x \in E\}$ kümesinin rölatif kompakt olduğunu göstermek gerekir. $\{y_n\} \subset A(E)$ olsun. O takdirde

$$y_n = Ax_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

olacak şekilde bir $\{x_n\} \subset E$ dizisi vardır. E kümesi sınırlı olduğundan $\{x_n\}$ dizisi sınırlıdır. Varsayım gereği $\{Ax_n\}$ dizisi yani $\{y_n\} \subset A(E)$ dizisi yakınsak bir alt diziye sahiptir. Dolayısıyla $A(E) = \{Ax : x \in E\}$ kümesi rölatif kompakttır. ■

Teorem 2.5.2: X ve Y herhangi iki lineer uzay ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $A : D(A) \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer $\dim D(A) < \infty$ ise $\dim R(A) \leq \dim D(A)$ dır.

Teorem 2.5.3: X ve Y herhangi iki normlu lineer uzay ve $T: X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer

a) T sınırlı ve $\dim R(T) < \infty$ ise T operatörü tam süreklidir.

b) $\dim X < \infty$ ise T tam süreklidir.

İspat:

a) $\{x_n\} \subset X$ herhangi bir sınırlı dizi olsun. T operatörü sınırlı olduğundan $\{Tx_n\} \subset Y$ dizisi de sınırlıdır. Öte yandan varsayım gereği $\dim R(T) < \infty$ dır. Dolayısıyla $\{Tx_n\}$ sonlu boyutlu $R(T)$ uzayında sınırlı bir dizidir. Lineer cebirden böyle bir dizinin yakınsak bir alt diziye sahip olduğu bilinmektedir. O halde teorem 2.5.1 den dolayı T operatörü tam süreklidir.

b) $\dim X = \dim D(T) < \infty$ olduğundan teorem 2.5.2 gereğince $\dim R(T) < \infty$ dır. Dolayısıyla T sonlu boyutlu uzaydan sonlu boyutlu uzaya bir lineer operatördür. Bu tür operatörlerin sınırlı olduğu bilinmektedir. O halde bu teoremin a) şikkından dolayı T tam süreklidir. ■

Yardımcı Teorem 2.5.1: (Riesz, 1965) X herhangi bir normlu lineer uzay ve M, X in X ten farklı herhangi bir alt uzayı ($M = \overline{M}$) olsun. O taktirde her $\varepsilon > 0$ için X in $\|x\| = 1$ ve $\rho(x, M) = \inf_{u \in M} \|x - u\| > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde bir x elemanı vardır.

Teorem 2.5.4: X sonsuz boyutlu normlu lineer bir uzay ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ X in sonsuz ve lineer bağımsız bir alt kümesi olsun. O halde $E_n = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\{y_n\} \subset X$ dizisi vardır:

$$1. y_n \in E_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$2. \|y_n\| = 1 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$3. \rho(y_{n+1}, E_n) > \frac{1}{2}.$$

İspat: $y_1 \in E_1$ ve $\|y_1\| = 1$ olsun. $E_n \subset E_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) olduğu açıktır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesi lineer bağımsız olduğundan $E_n \neq E_{n+1}$ dir. Yardımcı teorem 2.5.1 gereğince

$$y_{n+1} \in E_{n+1}, \|y_{n+1}\| = 1 \text{ ve } \rho(y_{n+1}, E_n) > \frac{1}{2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

olacak şekilde y_{n+1} elemanı vardır. ■

Teorem 2.5.4 ten aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 2.5.1: X sonsuz boyutlu normlu lineer bir uzay ve $B[0,1] = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ olsun.

$B[0,1]$ kapalı birim yuvarı rölatif kompakt değildir.

İspat: $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ X in sonsuz ve lineer bağımsız bir alt kümesi olsun. Teorem 2.5.4 gereğince $E_n = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) olmak üzere

$$1. y_n \in E_n,$$

$$2. \|y_n\| = 1,$$

$$3. \rho(y_{n+1}, E_n) > \frac{1}{2}$$

olacak şekilde bir $\{y_n\} \subset B[0,1]$ dizisi vardır. $n > m$ olmak üzere

$$\rho(y_n, y_m) \geq \rho(y_n, E_m) = \inf_{u \in E_m} \|y_n - u\| \geq \inf_{u \in E_{n-1}} \|y_n - u\| > \frac{1}{2} \quad (n \geq 2).$$

Böylece her $n \neq m$ için

$$\rho(y_n, y_m) > \frac{1}{2} \quad (2.21)$$

dir. (2.21) den $\{y_n\} \subset B[0,1]$ dizisinin yakınsak bir alt diziye sahip olmadığı görülmektedir.

Sonuç olarak $B[0,1]$ kapalı birim yuvarı rölatif kompakt değildir. ■

Sonuç 2.5.2: X sonsuz boyutlu normlu lineer bir uzay ise $Ix = x$ ($x \in X$) birim operatörü tam sürekli değildir.

Açıklama: I operatörü sınırlı $B[0,1] = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ birim yuvarını kendisine yani rölatif kompakt olmayan $B[0,1]$ birim yuvarına dönüştürdüğünden dolayı tam sürekli değildir.

Teorem 2.5.5: X, Y, Z herhangi üç normlu lineer uzay ve $A : X \rightarrow Y, T : Y \rightarrow Z$ herhangi iki sınırlı lineer operatör olsun. Eğer A ve T operatörlerinden biri tam sürekli ise $TA : X \rightarrow Z$ operatörü tam süreklidir.

İspat: $A : X \rightarrow Y$ operatörü tam sürekli olsun. $\{x_n\} \subset X$ herhangi bir sınırlı dizi ise teorem

2.5.1 gereğince $\{Ax_n\} \subset Y$ dizisi yakınsak bir $\{Ax_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ alt dizisine sahiptir.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Ax_{n_i} = y$$

olsun. T operatörü sürekli olduğundan

$$\lim_{i \rightarrow \infty} TA x_{n_i} = Ty$$

dir. Böylece her sınırlı $\{x_n\} \subset X$ dizisi için $\{TAx_n\} \subset Z$ dizisinin yakınsak bir $\{TAx_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ alt dizisine sahip olduğunu gösterdik. O halde teorem 2.5.1 den dolayı $TA : X \rightarrow Z$ operatörü tam süreklidir.

Bu kez T nin tam sürekli olduğunu kabul edelim. $\{x_n\} \subset X$ herhangi bir sınırlı dizi olsun. A operatörü sınırlı olduğundan $\{Ax_n\}$ dizisi de sınırlıdır. T tam sürekli olduğundan $\{TAx_n\} \subset Z$ dizisi teorem 2.5.1 gereğince yakınsak bir $\{TAx_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisine sahip olacaktır. Yine teorem 2.5.1 gereğince TA operatörü tam süreklidir. ■

Teorem 2.5.6: X, Y herhangi iki normlu lineer uzay ve $A : X \rightarrow Y$, $B : X \rightarrow Y$ herhangi iki tam sürekli operatör olsun. O taktirde her α, β sayıları için $\alpha A + \beta B : X \rightarrow Y$ operatörü de tam süreklidir.

Tanım 2.5.2: (X, ρ) herhangi bir metrik uzay, E ve M de bu uzayın herhangi iki alt kümesi ve $B(x, \epsilon) = \{y \in X : \rho(y, x) < \epsilon\}$ olsun. Eğer bir $\epsilon > 0$ için

$$E \subset \bigcup_{x \in M} B(x, \epsilon)$$

ise M ye E nin bir ϵ -ağı denir.

Bir başka deyişle her $y \in E$ için $\rho(y, x) < \epsilon$ olacak şekilde bir $x \in M$ varsa M ye E nin ϵ -ağı denir.

Teorem 2.5.7: X herhangi bir tam metrik uzay olsun. Bir $E \subset X$ kümesi her $\epsilon > 0$ için rölâtif kompakt bir ϵ -ağı sahipse E kümesi rölâtif kompaktır.

Teorem 2.5.8: X normlu lineer bir uzay, Y bir Banach uzayı ve $\{A_n\}$ X ten Y ye tam sürekli operatörlerin bir dizisi olsun. $A \in B(X, Y)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$ ise A operatörü de tam süreklidir.

İspat: $\varepsilon > 0$ herhangi bir sayı ve $E \subset X$ sınırlı bir küme olsun. E kümesi sınırlı olduğundan her $x \in E$ için

$$\|x\| < c \quad (2.22)$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti vardır. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$ olduğundan

$$\|A_i - A\| < \frac{\varepsilon}{c} \quad (2.23)$$

olacak şekilde bir $i \in \mathbb{N}$ vardır. Ax , $A(E)$ kümesinin keyfi bir elemanı olsun. (2.22) ve (2.23) ten

$$\|Ax - A_i x\| = \|(A - A_i)x\| \leq \|A - A_i\| \cdot \|x\| < \varepsilon \quad (\forall x \in E)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi $A_i(E)$, $A(E)$ kümesinin bir ε -ağıdır. Öte yandan A_i operatörü tam sürekli olduğundan $A_i(E)$ kümesi rölatif kompakttır. Böylece $A(E)$ kümesinin her $\varepsilon > 0$ için rölatif kompakt ε -ağa sahip olduğunu göstermiş olduk. O halde teorem 2.5.7 gereğince $A(E)$ kümesi rölatif kompakttır. Sonuç olarak A operatörü tam süreklidir. ■

Teorem 2.5.9: H bir Hilbert uzayı ve $A: H \rightarrow H$ sınırlı lineer bir operatör olsun. $A^*A: H \rightarrow H$ operatörü tam sürekli ise A operatörü de tam süreklidir.

Teorem 2.5.10: H bir Hilbert uzayı olsun. $A: H \rightarrow H$ operatörü tam sürekli ise $A^*: H \rightarrow H$ operatörü de tam süreklidir.

Teorem 2.5.11: X bir Banach uzayı ve $A: X \rightarrow X$ tam sürekli bir operatör olsun. A operatörünün spektrumunun sıfırdan farklı her noktası A nın ayrık bir özdeğeridir.

Teorem 2.5.12: X bir normlu lineer uzay ve $A: X \rightarrow X$ tam sürekli bir operatör olsun. A nın sıfırdan farklı her özdeğerinin katlılığı sonludur.

Teorem 2.5.13: X bir normlu lineer uzay ve $A: X \rightarrow X$ tam sürekli bir operatör olsun. O taktirde her $\varepsilon > 0$ için A nın $|\lambda| > \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan farklı λ özdeğerlerinin sayısı sonludur.

Teorem 2.5.13 ten şöyle bir sonuç elde edilir:

Sonuç 2.5.3: Tam sürekli bir operatörün özdeğerler kümesi bir tek sıfır yığılma noktasına

sahip olabilir.

2.6 Çekirdek Operatör

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. H den H ye tüm tam sürekli operatörlerin kümesini $\sigma_{\infty}(H)$ ile göstereceğiz.

A operatörünün pozitif karekökü $A^{\frac{1}{2}}$ şeklinde gösterilir. $A \in \sigma_{\infty}(H)$ olsun. Bu durumda A^*A kendine eş negatif olmayan bir operatördür ve $(A^*A)^{\frac{1}{2}} \in \sigma_{\infty}(H)$ dır (Gohberg ve Krein, 1969). $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ operatörünün sıfırdan farklı özdeğerleri $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k$ ($0 \leq k \leq \infty$) olsun. Burada her özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır. $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ negatif olmayan bir operatör olduğundan $s_1, s_2, \dots, s_k$ pozitif sayılardır. Bu sayılara A operatörünün s sayıları denir. Eğer $k < \infty$ ise $s_j = 0$; $j = k+1, k+2, \dots$ kabul edilir. A nın s sayıları bazen $s_j(A)$ ($j=1,2,\dots$) şeklinde de yazılabilir. $s_1(A) = \|A\|$ olduğunu belirtelim. Eğer A normal operatör yani $A^*A = AA^*$ ise o taktirde

$$s_j(A) = |\lambda_j(A)| \quad (j=1,2,\dots) \quad (2.24)$$

dır (Gohberg ve Krein, 1969). Burada

$|\lambda_1(A)| \geq |\lambda_2(A)| \geq \dots \geq |\lambda_k(A)|$, A operatörünün sıfırdan farklı özdeğerleridir.

s sayıları

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) < \infty, \quad (p \geq 1) \quad (2.25)$$

koşulunu sağlayan tüm $A \in \sigma_{\infty}(H)$ operatörlerinin kümesini σ_p veya $\sigma_p(H)$ simgesiyle göstereceğiz. Burada

σ_p ($p \geq 1$)

$$\|A\|_{\sigma_p(H)} = \left[\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (A \in \sigma_p(H)) \quad (2.26)$$

fonksiyonu ile ayrılabilir bir Banach uzayıdır (Gohberg ve Krein, 1969).

Tanım 2.6.1: σ_1 uzayına ait olan, başka bir deyişle s sayıları

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) < \infty \quad (2.27)$$

özellğine sahip olan $A \in \sigma_1(H)$ operatörüne çekirdek operatörü denir.

$A \in \sigma_p(H)$ ve $B : H \rightarrow H$ sınırlı lineer bir operatör ise $AB, BA \in \sigma_p(H)$ ve

$$\|AB\|_{\sigma_p(H)} \leq \|B\| \cdot \|A\|_{\sigma_p(H)} \quad (2.28)$$

$$\|BA\|_{\sigma_p(H)} \leq \|B\| \cdot \|A\|_{\sigma_p(H)} \quad (2.29)$$

dır. Ayrıca $p_1 < p_2$ ise $\sigma_{p_1} \subset \sigma_{p_2}$ dir (Gohberg ve Krein, 1969).

Tanım 2.6.2: $A : H \rightarrow H$ bir sınırlı lineer operatör olsun. Eğer her $\{e_j\}_1^{\infty}$ ortonormal tabanı

için $\sum_{j=1}^{\infty} (Ae_j, e_j)$ serisi yakınsak ise A operatörü sonlu matris izine sahiptir denir.

Teorem 2.6.1: A bir çekirdek operatörü ise her $\{e_j\}_1^{\infty}$ ortonormal tabanı için $\sum_{j=1}^{\infty} (Ae_j, e_j)$ serisi

yakınsaktır ve bu serinin toplamı $\{e_j\}_1^{\infty}$ tabanının seçimine bağlı değildir (Gohberg ve Krein, 1969).

Bu $\sum_{j=1}^{\infty} (Ae_j, e_j)$ toplamına A operatörünün matris izi denir ve $\text{tr}A$ ile gösterilir.

A ve B herhangi iki çekirdek operatörü ve α, β herhangi iki sayı ise

$$\text{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{tr}A + \beta \text{tr}B \quad (2.30)$$

$$\text{tr}A^* = \overline{\text{tr}A} \quad (2.31)$$

dir.

Teorem 2.6.2: $A \in \sigma_{\infty}(H)$, $B : H \rightarrow H$ sınırlı lineer bir operatör ve $AB, BA \in \sigma_1(H)$ ise

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad (2.32)$$

dır (Gohberg ve Krein, 1969).

Tanım 2.6.3: $A : H \rightarrow H$ bir sınırlı lineer operatör olsun. Bir $\varphi \in H$, $\varphi \neq 0$ vektörü ve λ sayısı için

$$(A - \lambda I)^n \varphi = 0 \quad (2.33)$$

olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa φ ye A operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen esas vektörü denir.

Tanım 2.6.4: Sınırlı lineer bir $A : H \rightarrow H$ operatörünün bir λ özdeğerine karşılık gelen tüm esas vektörlerin ve $0 \in H$ elemanının oluşturduğu K_λ lineer manifolduna söz konusu operatörün λ özdeğerine karşılık gelen esas lineer manifoldu denir.

Tanım 2.6.5: Sınırlı lineer bir $A : H \rightarrow H$ operatörünün bir λ özdeğerine karşılık gelen K_λ esas lineer manifoldunun boyutuna λ özdeğerinin cebirsel katlılığı denir.

Teorem 2.6.3: A çekirdek operatörünün matris izi için

$$\text{tr} A = \sum_{j=1}^{v(A)} \lambda_j(A) \quad (2.34)$$

dır. Burada her λ_k özdeğeri kendi cebirsel katlılık sayısı kadar toplanmıştır. $v(A)$ sıfırdan farklı özdeğerlerin cebirsel katlılıklarının toplamıdır (Gohberg ve Krein, 1969).

Eğer $A \in \sigma_p(H)$, $(1 \leq p < \infty)$ ve $\{e_j\}_1^\omega$ ($1 \leq \omega \leq \infty$) H de bir ortonormal elemanlar sistemi ise

$$\sum_{j=1}^{\omega} |(Ae_j, e_j)|^p \leq \left(\|A\|_{\sigma_p(H)} \right)^p \quad (2.35)$$

dır. Bu eşitsizlikten özel olarak A çekirdek operatörü için

$$\|\text{tr} A\| \leq \|A\|_{\sigma_1(H)} \quad (2.36)$$

elde edilir (Gohberg ve Krein, 1969).

3. İKİ REGÜLER STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLER FARKININ TOPLAMI HAKKINDA

3.1 Kendine Eş Regüler Sturm-Liouville Operatörleri

$H = L_2[0, \pi]$ uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan tüm $y = y(x)$ fonksiyonlarının kümesini $D(A)$ ile gösterelim:

1. $y(x)$ ve $y'(x)$ fonksiyonları $[0, \pi]$ aralığında mutlak süreklidir.
2. $y'(0) = y(\pi) = 0$.
3. $y''(x) \in L_2[0, \pi]$.

$A : D(A) \rightarrow L_2[0, \pi]$ ve $B : D(A) \rightarrow L_2[0, \pi]$ olmak üzere

$$(Ay)(x) = -y''(x)$$

$$(By)(x) = -y''(x) + q(x)y(x)$$

gibi iki lineer diferansiyel operatörü göz önüne alalım. Burada $q(x)$ $[0, \pi]$ aralığında tanımlı, reel değerli, 2. mertebeden sürekli türeve sahip olan ve

$$\int_0^{\pi} q(x) dx = 0 \quad (3.1)$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyondur. q fonksiyonunun normunu

$$\|q\| = \max_{0 \leq x \leq \pi} |q(x)| \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlayalım. A ve B regüler Sturm-Liouville operatörleridir. Ayrıca $D(A) = D(B)$ ve $\overline{D(A)} = L_2[0, \pi]$ dir.

Teorem 3.1.1: A ve B operatörleri kendine eştir.

İspat: Önce A operatörünün kendine eş olduğunu gösterelim. y ve z $D(A)$ nın herhangi iki fonksiyonu olsun. O zaman

$$y'(0) = y(\pi) = z'(0) = z(\pi) = 0$$

dır. Bu bağıntıdan yararlanarak

$$\begin{aligned}
(Ay, z) &= -\int_0^{\pi} y''(x) \overline{z(x)} dx \\
&= -\left[\overline{z(\pi)} y'(\pi) - \overline{z(0)} y'(0) \right] + \int_0^{\pi} y'(x) \overline{z'(x)} dx \\
&= \int_0^{\pi} y'(x) \overline{z'(x)} dx \\
&= \left[\overline{z'(\pi)} y(\pi) - \overline{z'(0)} y(0) \right] - \int_0^{\pi} y(x) \overline{z''(x)} dx \\
&= -\int_0^{\pi} y(x) \overline{z''(x)} dx = (y, Az)
\end{aligned}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi A operatörü simetriktir. Bu kez $R(A) = L_2[0, \pi]$ olduğunu gösterelim. $f = f(x) \in L_2[0, \pi]$ nin herhangi bir fonksiyonu olmak üzere

$$(Ay)(x) = -y''(x) = f(x) \quad (y = y(x) \in D(A)) \quad (3.3)$$

denklemini göz önüne alalım. $f(x)$ fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında integre edilebilirdir. Gerçekten

$$\int_0^{\pi} |f(x)| dx = \int_0^{\pi} 1 \cdot |f(x)| dx \leq \left(\int_0^{\pi} 1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} \|f\|$$

dır. (3.3) ten

$$y'(x) = -\int_0^x f(t) dt + c_1 \quad (3.4)$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}
y(x) &= \int_0^x \left[-\int_0^t f(\tau) d\tau + c_1 \right] dt + c_2 \\
&= -\int_0^x \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] dt + c_1 x + c_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(x) &= -\int_0^x \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] t' dt + c_1 x + c_2 \\
&= -\int_0^t f(\tau) d\tau \cdot t \Big|_0^x + \int_0^x t \cdot f(t) dt + c_1 x + c_2 \\
&= -x \int_0^x f(\tau) d\tau + \int_0^x t \cdot f(t) dt + c_1 x + c_2 \\
&= -x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t \cdot f(t) dt + c_1 x + c_2 \tag{3.5}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.4) ve (3.5) ten teorem 2.1.5 gereğince keyfi c_1 ve c_2 sabitleri için $y(x)$ ve $y'(x)$ fonksiyonlarının mutlak sürekli olduğu elde edilir. (3.4) ten ve $y'(0) = 0$ koşulundan $c_1 = 0$, (3.5) ten ve $y(\pi) = 0$ koşulundan

$$y(\pi) = -\pi \int_0^\pi f(t) dt + \int_0^\pi t \cdot f(t) dt + c_2 = 0$$

bulunur. Buradan

$$c_2 = \int_0^\pi (\pi - t) f(t) dt \tag{3.6}$$

elde edilir. $c_1 = 0$ olduğu göz önüne alınırsa (3.5) ve (3.6) dan

$$\begin{aligned}
y(x) &= -x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t \cdot f(t) dt + \int_0^\pi (\pi - t) f(t) dt \\
&= \int_0^x (t - x) f(t) dt + \int_0^\pi (\pi - t) f(t) dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi her $f = f(x) \in L_2[0, \pi]$ için

$$Ay = f$$

olacak şekilde bir $y \in D(A)$ elemanı vardır. Bu nedenle $R(A) = L_2[0, \pi]$ dır. A nın simetrik bir operatör olduğu göz önüne alınırsa A operatörü kendine eştir (Smirnov, 1964).

Öte yandan $T : L_2[0, \pi] \rightarrow L_2[0, \pi]$

$$(Ty)(x) = q(x)y(x)$$

sınırlı lineer operatörü kendine eş olduğundan sonuç 2.3.1 den dolayı

$$B = A + T : D(A) \rightarrow L_2[0, \pi]$$

operatörü kendine eştir. ■

Teorem 3.1.2: $B : D(A) \rightarrow L_2[0, \pi]$

$$(By)(x) = -y''(x) + q(x)y(x)$$

operatörü sınırsızdır.

İspat: $\varphi_n(x) = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \quad (n = 1, 2, \dots)$

fonksiyon dizisini göz önüne alalım. Her φ_n fonksiyonu sonsuz türetilbilir bir fonksiyon olup

$$\varphi'_n(x) = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x,$$

$$\varphi'_n(0) = 0, \quad \varphi_n(\pi) = 0$$

dır. Dolayısıyla $\{\varphi_n\} \subset D(A)$ dır. $q(x)$ $[0, \pi]$ aralığında sürekli olduğundan $|q(x)| < c$ olacak şekilde bir $c \in (0, \infty)$ sabiti vardır. Ayrıca

$$\varphi''_n = -\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x = -\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \varphi_n$$

dir. Bu son bağıntıdan yararlanarak

$$\|B\varphi_n\| = \|\varphi''_n(x) + q(x)\varphi_n(x)\| \geq \|\varphi''_n(x)\| - \|q(x)\varphi_n(x)\|$$

$$> \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \|\varphi_n\| - c\|\varphi_n\|$$

ve buradan da

$$\|B\varphi_n\| > \left[\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 - c \right] \|\varphi_n\| \quad (n = 1, 2, \dots)$$

elde edilir. Son bağıntıdan B operatörünün sınırsız olduğu görülmektedir. ■

3.2 B Operatörünün Spektrumunun Özellikleri

$q(x)$ $[0, \pi]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve 2. mertebeden sürekli türeve sahip olan bir fonksiyon olmak üzere

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) \quad (0 \leq x \leq \pi, y''(x) \in C[0, \pi]) \quad (3.7)$$

$$y'(0) = y(\pi) = 0 \quad (3.8)$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. (3.7), (3.8) probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının B operatörünün de özdeğer ve özfonksiyonları olduğu açıktır.

Teorem 3.2.1: (3.7), (3.8) probleminin özdeğerler kümesi alttan sınırlıdır.

İspat: λ_1 (3.7), (3.8) probleminin bir özdeğeri $y_1 = y_1(x)$ de λ_1 özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyonu olsun. $L_2[0, \pi]$ uzayında

$$\ell(y) = -y''(x) + q(x)y(x) \quad (0 \leq x \leq \pi, y''(x) \in C[0, \pi]) \quad (3.9)$$

diferansiyel ifadesini göz önüne alalım.

$$(\ell y_1, y_1) = \int_0^\pi \ell y_1 \overline{y_1} dx = \lambda_1 \int_0^\pi |y_1(x)|^2 dx = \lambda_1 \|y_1\|^2. \quad (3.10)$$

Öte yandan (3.9) dan ve kısmi integrasyondan yararlanarak

$$\begin{aligned} (\ell y_1, y_1) &= \int_0^\pi \ell y_1 \overline{y_1} dx = \int_0^\pi (-y_1''(x) + q(x)y_1(x)) \overline{y_1(x)} dx \\ &= -\int_0^\pi y_1''(x) \overline{y_1(x)} dx + \int_0^\pi q(x)y_1(x) \overline{y_1(x)} dx \\ &= -\left[\overline{y_1(x)} y_1'(x) \right]_0^\pi - \int_0^\pi y_1'(x) \overline{y_1'(x)} dx + \int_0^\pi q(x)y_1(x) \overline{y_1(x)} dx \end{aligned}$$

$$(\ell y_1, y_1) = \int_0^\pi |y_1'(x)|^2 dx + \int_0^\pi q(x) |y_1(x)|^2 dx$$

elde edilir. Burada $\int_0^\pi |y_1'(x)|^2 dx \geq 0$ olduğu göz önüne alınırsa son bağıntıdan

$$(\ell y_1, y_1) \geq \int_0^\pi q(x) |y_1(x)|^2 dx \geq \min_{x \in [0, \pi]} q(x) \|y_1\|^2 \quad (3.11)$$

bulunur. (3.10) ve (3.11) den

$$(\ell y_1, y_1) = \lambda_1 \|y_1\|^2 \geq \min_{x \in [0, \pi]} q(x) \|y_1\|^2$$

ve buradan da

$$\lambda_1 \geq \min_{x \in [0, \pi]} q(x) \quad (3.12)$$

elde edilir. λ_1 keyfi bir özdeğer olduğundan (3.12) eşitsizliği tüm özdeğerler için sağlanır. ■

(3.7), (3.8) problemini incelemek için (3.7),

$$\begin{aligned} y'(0) &= 0, \quad y(0) = 1 \\ y(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

(3.13) problemini göz önüne alalım. (3.7), (3.8) ve (3.7), (3.13) problemlerinin özdeğer ve özfonksiyonları arasında aşağıdaki ilişkiler vardır:

I. λ_0 (3.7), (3.13) probleminin bir özdeğeri ve y_0 bu özdeğere karşılık gelen bir özfonksiyonu olsun. λ_0 in (3.7), (3.8) probleminin de bir özdeğeri ve y_0 in da bu özdeğere karşılık gelen bir özfonksiyonu olduğu açıktır.

II. λ_1 in (3.7), (3.8) probleminin bir özdeğeri ve y_1 in de bu özdeğere karşılık gelen bir özfonksiyonu olduğunu varsayalım. O zaman

$$-y_1''(x) + q(x)y_1(x) = \lambda_1 y_1(x) \quad (0 \leq x \leq \pi, y_1'' \in C[0, \pi])$$

$$y_1'(0) = y_1(\pi) = 0$$

dır. $y_1(x)$ özdeş olarak sıfır olmadığından $y_1(0) \neq 0$ olmalıdır.

$$z_1(x) = \frac{y_1(x)}{y_1(0)} \text{ olsun. } z_1'(x) = \frac{y_1'(x)}{y_1(0)} \text{ ve } z_1'(0) = 0,$$

$$z_1(\pi) = \frac{y_1(\pi)}{y_1(0)} = 0, \quad z_1(0) = \frac{y_1(0)}{y_1(0)} = 1$$

dir. Görüldüğü gibi λ_1 (3.7), (3.13) probleminin bir özdeğeri ve $z_1(x) = \frac{y_1(x)}{y_1(0)}$ bu özdeğere karşılık gelen bir özfonksiyonudur.

III. λ_2 (3.7), (3.8) probleminin bir özdeğeri ve y_2, z_2 de bu özdeğere karşılık gelen herhangi iki özfonksiyonu olsun. **II** de gösterildiği gibi λ_2 (3.7), (3.13) probleminin de bir özdeğeri ve

$$y_3(x) = \frac{y_2(x)}{y_2(0)}, \quad z_3(x) = \frac{z_2(x)}{z_2(0)} \text{ fonksiyonları bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlarıdır.}$$

Hem y_3 , hem de z_3 fonksiyonu

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda_2 y(x)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Cauchy probleminin çözümü olduğundan $y_3 = z_3$ yani $\frac{y_2(x)}{y_2(0)} = \frac{z_2(x)}{z_2(0)}$ ya da

$$z_2(x) = \frac{z_2(0)}{y_2(0)} y_2(x) \text{ dır. Yani } y_2 \text{ ve } z_2 \text{ fonksiyonları lineer bağımlıdır. Dolayısıyla (3.7),}$$

(3.8) probleminin her özdeğerinin katlılığı birdir.

I, II ve III ten aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.2.1: (3.7), (3.8) problemi yerine (3.7), (3.13) probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimtotik davranışını incelemek yeterlidir.

$\varphi(x, \lambda)$ (3.7) denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'_x(0, \lambda) = 0 \tag{3.14}$$

koşullarını sağlayan bir çözümü olsun.

Teorem 3.2.2: $\lambda = s^2$ ($s \neq 0$) olmak üzere

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x - \tau) q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau$$

dır.

İspat: $\varphi(x, \lambda)$ (3.7) denkleminin bir çözümü olduğundan

$$-\varphi_x''(x, \lambda) + q(x)\varphi(x, \lambda) = s^2\varphi(x, \lambda)$$

dır. Buradan

$$q(x)\varphi(x, \lambda) = s^2\varphi(x, \lambda) + \varphi_x''(x, \lambda) \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.15) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin s(x - \tau) q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau &= \int_0^x \sin s(x - \tau) [s^2\varphi(\tau, \lambda) + \varphi_\tau''(\tau, \lambda)] d\tau \\ &= s^2 \int_0^x \sin s(x - \tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau + \int_0^x \sin s(x - \tau) \varphi_\tau''(\tau, \lambda) d\tau \end{aligned} \quad (3.16)$$

bulunur. Ayrıca kısmi integrasyondan yararlanarak

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin s(x - \tau) \varphi_\tau''(\tau, \lambda) d\tau &= \sin s(x - \tau) \varphi'_\tau(\tau, \lambda) \Big|_{\tau=0}^x + s \int_0^x \cos s(x - \tau) \varphi'_\tau(\tau, \lambda) d\tau \\ &= s \int_0^x \cos s(x - \tau) \varphi'_\tau(\tau, \lambda) d\tau \\ &= s \left[\cos s(x - \tau) \varphi(\tau, \lambda) \Big|_{\tau=0}^x - s \int_0^x \sin s(x - \tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \right], \\ \int_0^x \sin s(x - \tau) \varphi_\tau''(\tau, \lambda) d\tau &= s\varphi(x, \lambda) - s \cos sx - s^2 \int_0^x \sin s(x - \tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \end{aligned} \quad (3.17)$$

bulunur. (3.16) ve (3.17) den

$$\int_0^x \sin s(x - \tau) q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau = s\varphi(x, \lambda) - s \cos sx$$

bulunur. Son ifadeden

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x - \tau) q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \quad (3.18)$$

formülüne ulaşılır. ■

Teorem 3.2.3: $s = \sigma + it$ ($\sigma, t \in (-\infty, \infty); s \neq 0$) olsun. O takdirde öyle bir $s_0 > 0$ sabiti vardır ki $\forall |s| \geq s_0$ ve $\forall x \in [0, \pi]$ için

$$\varphi(x, \lambda) = O(e^{|t|x})$$

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + O(|s|^{-1} e^{|t|x})$$

dır. Yani $\forall |s| \geq s_0$ ve $\forall x \in [0, \pi]$ için

$$|\varphi(x, \lambda)| \leq A_1 e^{|t|x}$$

$$|\varphi(x, \lambda) - \cos sx| \leq A_2 |s|^{-1} e^{|t|x}$$

olacak şekilde $A_1, A_2 > 0$ sabitleri vardır.

İspat: $\varphi(x, \lambda) = h(x) e^{|t|x}$ olsun. O zaman teorem 3.2.2 den

$$h(x) = e^{-|t|x} \left[\cos sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x - \tau) q(\tau) h(\tau) e^{|t|\tau} d\tau \right] \quad (3.19)$$

elde edilir. Öte yandan

$$\cos sx = \frac{e^{isx} + e^{-isx}}{2} = \frac{e^{i(\sigma+it)x} + e^{-i(\sigma+it)x}}{2} = \frac{e^{i\sigma x} \cdot e^{-tx} + e^{-i\sigma x} \cdot e^{tx}}{2}$$

dır. Buradan

$$|\cos sx| \leq \frac{1}{2} \left[|e^{i\sigma x}| \cdot e^{|t|x} + |e^{-i\sigma x}| \cdot e^{|t|x} \right] = e^{|t|x} \quad (3.20)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$|\sin sx| \leq e^{|t|x} \quad (3.21)$$

olduğu gösterilebilir. (3.19), (3.20) ve (3.21) den

$$\begin{aligned}
 |h(x)| &\leq e^{-|t|x} |\cos sx| + e^{-|t|x} \frac{1}{|s|} \int_0^x |\sin s(x-\tau)| \cdot |q(\tau)| \cdot |h(\tau)| \cdot e^{|t|\tau} d\tau \\
 &\leq e^{-|t|x} \cdot e^{|t|x} + \frac{1}{|s|} \int_0^x e^{|t|(x-\tau)} |q(\tau)| \cdot |h(\tau)| \cdot e^{-|t|(x-\tau)} d\tau \\
 &= 1 + \frac{1}{|s|} \int_0^x |q(\tau)| \cdot |h(\tau)| d\tau
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

dır. $\max_{0 \leq x \leq \pi} |h(x)| = \alpha$ olsun. O halde (3.22) den

$$|h(x)| \leq 1 + \frac{\alpha}{|s|} \int_0^\pi |q(\tau)| d\tau,$$

$$\alpha \leq 1 + \frac{\alpha}{|s|} \int_0^\pi |q(\tau)| d\tau$$

ve buradan da

$$\alpha \left(1 - \frac{1}{|s|} \int_0^\pi |q(\tau)| d\tau \right) \leq 1$$

elde edilir. Burada $|s| \geq 2 \int_0^\pi |q(\tau)| d\tau + 1$ olduğu varsayılırsa son ifadeden

$$\alpha \leq 2 \tag{3.23}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$|\varphi(x, \lambda)| = |h(x)| e^{|t|x} \leq \alpha e^{|t|x} \leq 2 e^{|t|x} \tag{3.24}$$

ve O-simgenin tanımı gereğince (3.24) ten

$$\varphi(x, \lambda) = O(e^{|t|x}) \tag{3.25}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2 den

$$\begin{aligned}
|\varphi(x, \lambda) - \cos sx| &\leq \frac{1}{|s|} \int_0^x |\sin s(x - \tau)| \cdot |q(\tau)| \cdot |h(\tau)| e^{|\tau|} d\tau \\
&\leq \frac{1}{|s|} \int_0^\pi e^{|\tau|(x-\tau)} |q(\tau)| \cdot |h(\tau)| e^{|\tau|} d\tau \\
&\leq \frac{\alpha e^{|\tau|x}}{|s|} \int_0^\pi |q(\tau)| d\tau.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

(3.23) ve (3.26) dan

$$|\varphi(x, \lambda) - \cos sx| \leq \frac{2e^{|\tau|x}}{|s|} \int_0^\pi |q(\tau)| d\tau \leq A_2 |s|^{-1} e^{|\tau|x}$$

ve buradan da

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + O(|s|^{-1} e^{|\tau|x}) \quad (|s| \geq s_0) \tag{3.27}$$

dır. ■

Şimdi (3.7), (3.13) probleminin özdeğerleri için bir asimtotik formül bulalım. Bunun için öncelikle $\varphi(x, \lambda)$ için asimtotik formüller elde edeceğiz.

Teorem 3.2.3 ten $s \geq s_0 > 0$ olmak üzere

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + O(s^{-1}) \tag{3.28}$$

bulunur. Teorem 3.2.2 ve (3.28) den

$$\begin{aligned}
\varphi(x, \lambda) &= \cos sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x - \tau) q(\tau) [\cos s\tau + O(s^{-1})] d\tau \\
&= \cos sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x - \tau) q(\tau) (\cos s\tau) d\tau + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x - \tau) q(\tau) O(s^{-1}) d\tau
\end{aligned} \tag{3.29}$$

dır. Burada

$$\frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x - \tau) q(\tau) O(s^{-1}) d\tau = O(s^{-2})$$

olduğu göz önüne alınırsa (3.29) dan

$$\begin{aligned}
\varphi(x, \lambda) &= \cos sx + \frac{1}{s} \int_0^x (\sin sx \cos s\tau - \sin s\tau \cos sx) q(\tau) (\cos s\tau) d\tau + O(s^{-2}) \\
&= \cos sx + \frac{\sin sx}{s} \int_0^x (\cos^2 s\tau) q(\tau) d\tau - \frac{\cos sx}{s} \int_0^x (\sin s\tau \cos s\tau) q(\tau) d\tau + O(s^{-2}) \\
&= \cos sx + \frac{\sin sx}{2s} \int_0^x (1 + \cos 2s\tau) q(\tau) d\tau - \frac{\cos sx}{2s} \int_0^x (\sin 2s\tau) q(\tau) d\tau + O(s^{-2}), \\
\varphi(x, \lambda) &= \cos sx + \frac{\sin sx}{2s} \int_0^x q(\tau) d\tau + \frac{\sin sx}{2s} \int_0^x (\cos 2s\tau) q(\tau) d\tau - \\
&\quad \frac{\cos sx}{2s} \int_0^x (\sin 2s\tau) q(\tau) d\tau + O(s^{-2}) \tag{3.30}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $q(x)$ fonksiyonunun sürekli türe ve sahip olduğu göz önüne alınırsa kısmi integrasyondan yararlanarak

$$\int_0^x (\cos 2s\tau) q(\tau) d\tau = O(s^{-1}) \tag{3.31}$$

$$\int_0^x (\sin 2s\tau) q(\tau) d\tau = O(s^{-1}) \tag{3.32}$$

olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla (3.30), (3.31) ve (3.32) den

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{\sin sx}{2s} \int_0^x q(\tau) d\tau + O(s^{-2}) \tag{3.33}$$

elde edilir. Burada

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(\tau) d\tau \tag{3.34}$$

olarak tanımlanırsa (3.33) formülü

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + f(x) \frac{\sin sx}{s} + O(s^{-2}) \tag{3.35}$$

şeklini alır.

Bu kez $\varphi(x, \lambda)$ için başka bir asimtotik formül bulalım. Teorem 3.2.2 ve (3.35) ten

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x - \tau) q(\tau) \left[\cos s\tau + f(\tau) \frac{\sin s\tau}{s} + O(s^{-2}) \right] d\tau. \quad (3.36)$$

Burada

$$\frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x - \tau) q(\tau) O(s^{-2}) d\tau = O(s^{-3})$$

dır. Son iki ifadeden

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x - \tau) q(\tau) (\cos s\tau) d\tau + \frac{1}{s^2} \int_0^x \sin s(x - \tau) q(\tau) f(\tau) (\sin s\tau) d\tau + O(s^{-3}) \quad (3.37)$$

elde edilir.

$$\frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x - \tau) q(\tau) (\cos s\tau) d\tau = \frac{\sin sx}{2s} \int_0^x q(\tau) d\tau + \frac{\sin sx}{2s} \int_0^x (\cos 2s\tau) q(\tau) d\tau -$$

$$\frac{\cos sx}{2s} \int_0^x (\sin 2s\tau) q(\tau) d\tau \quad (3.38)$$

dır. Öte yandan

$$\int_0^x (\cos 2s\tau) q(\tau) d\tau = \frac{1}{2s} \left[q(x) \sin 2sx - \int_0^x q'(\tau) (\sin 2s\tau) d\tau \right] \quad (3.39)$$

$$\int_0^x (\sin 2s\tau) q(\tau) d\tau = -\frac{1}{2s} \left[q(x) \cos 2sx - q(0) - \int_0^x q'(\tau) (\cos 2s\tau) d\tau \right] \quad (3.40)$$

olduğu bilinmektedir. (3.34), (3.38), (3.39) ve (3.40) tan

$$\frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x - \tau) q(\tau) (\cos s\tau) d\tau = f(x) \frac{\sin sx}{s} + \frac{\sin sx}{2s} \left(\frac{1}{2s} \right) \left[q(x) \sin 2sx - \int_0^x q'(\tau) (\sin 2s\tau) d\tau \right] -$$

$$\frac{\cos sx}{2s} \left(-\frac{1}{2s} \right) \left[q(x) \cos 2sx - q(0) - \int_0^x q'(\tau) (\cos 2s\tau) d\tau \right],$$

$$\frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-\tau) q(\tau) (\cos s\tau) d\tau = f(x) \frac{\sin sx}{s} + \frac{\sin sx}{4s^2} q(x) \sin 2sx - \frac{\sin sx}{4s^2} \int_0^x q'(\tau) (\sin 2s\tau) d\tau +$$

$$\frac{\cos sx}{4s^2} [q(x) \cos 2sx - q(0)] - \frac{\cos sx}{4s^2} \int_0^x q'(\tau) (\cos 2s\tau) d\tau \quad (3.41)$$

bulunur. $q(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden sürekli türeve sahip olduğu göz önüne alınırsa kısmi integrasyondan yararlanarak

$$\frac{\sin sx}{4s^2} \int_0^x q'(\tau) (\sin 2s\tau) d\tau = O(s^{-3}) \quad (3.42)$$

$$\frac{\cos sx}{4s^2} \int_0^x q'(\tau) (\cos 2s\tau) d\tau = O(s^{-3}) \quad (3.43)$$

olduğu gösterilebilir. (3.41), (3.42) ve (3.43) ten

$$\frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-\tau) q(\tau) (\cos s\tau) d\tau = f(x) \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{4s^2} [(\sin sx \sin 2sx + \cos sx \cos 2sx) q(x) -$$

$$q(0) \cos sx] + O(s^{-3})$$

bulunur. Son bağıntıdan

$$\frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-\tau) q(\tau) (\cos s\tau) d\tau = f(x) \frac{\sin sx}{s} + \left(\frac{q(x) - q(0)}{4} \right) \frac{\cos sx}{s^2} + O(s^{-3}) \quad (3.44)$$

elde edilir. Öte yandan

$$\frac{1}{s^2} \int_0^x \sin s(x-\tau) q(\tau) f(\tau) (\sin s\tau) d\tau = \frac{1}{s^2} \int_0^x (\sin sx \cos s\tau - \sin s\tau \cos sx) q(\tau) f(\tau) (\sin s\tau) d\tau$$

$$= \frac{\sin sx}{s^2} \int_0^x (\cos s\tau \sin s\tau) q(\tau) f(\tau) d\tau - \frac{\cos sx}{s^2} \int_0^x (\sin^2 s\tau) q(\tau) f(\tau) d\tau$$

$$= \frac{\sin sx}{2s^2} \int_0^x (\sin 2s\tau) q(\tau) f(\tau) d\tau - \frac{\cos sx}{2s^2} \int_0^x (1 - \cos 2s\tau) q(\tau) f(\tau) d\tau \quad (3.45)$$

dır. (3.45) ten

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2} \int_0^x \sin s(x-\tau) q(\tau) f(\tau) (\sin s\tau) d\tau &= \frac{\sin sx}{2s^2} \int_0^x (\sin 2s\tau) q(\tau) f(\tau) d\tau - \frac{\cos sx}{2s^2} \int_0^x q(\tau) f(\tau) d\tau + \\ &\frac{\cos sx}{2s^2} \int_0^x (\cos 2s\tau) q(\tau) f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.46)$$

elde edilir. Burada

$$\frac{\sin sx}{2s^2} \int_0^x (\sin 2s\tau) q(\tau) f(\tau) d\tau = O(s^{-3}) \quad (3.47)$$

$$\frac{\cos sx}{2s^2} \int_0^x (\cos 2s\tau) q(\tau) f(\tau) d\tau = O(s^{-3}) \quad (3.48)$$

olduğu dikkate alınırsa (3.46), (3.47) ve (3.48) den

$$\frac{1}{s^2} \int_0^x \sin s(x-\tau) q(\tau) f(\tau) (\sin s\tau) d\tau = -\frac{\cos sx}{2s^2} \int_0^x q(\tau) f(\tau) d\tau + O(s^{-3}) \quad (3.49)$$

bulunur. (3.37), (3.44) ve (3.49) dan

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + f(x) \frac{\sin sx}{s} + g(x) \frac{\cos sx}{s^2} + O(s^{-3}) \quad (3.50)$$

asimtotik formülü bulunur. Burada

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \int_0^x q(\tau) d\tau \\ g(x) &= \frac{q(x) - q(0)}{4} - \frac{1}{2} \int_0^x q(\tau) f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.51)$$

dır. Diğer yandan

$$\int_0^x q(\tau) f(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^x q(\tau) \left[\int_0^\tau q(t) dt \right] d\tau$$

$$\begin{aligned}
\int_0^x q(\tau) f(\tau) d\tau &= \frac{1}{4} \int_0^x \left[\left(\int_0^\tau q(t) dt \right)^2 \right]' d\tau \\
&= \frac{1}{4} \left[\int_0^\tau q(t) dt \right]^2 \Big|_{\tau=0}^x \\
&= \frac{1}{4} \left[\int_0^x q(t) dt \right]^2
\end{aligned} \tag{3.52}$$

olduğundan (3.51) ve (3.52) den

$$g(x) = \frac{q(x) - q(0)}{4} - \frac{1}{8} \left(\int_0^x q(t) dt \right)^2 \tag{3.53}$$

bulunur.

(3.7), (3.13) probleminin özdeğerleri

$$\varphi(\pi, \lambda) = 0 \tag{3.54}$$

denkleminin çözümleridir. $\varphi(\pi, \lambda) = \varphi(\pi, s^2) = \omega(s)$ olsun. O zaman özdeğerler

$$\omega(s) = 0$$

denkleminin çözümlerinin kareleri olacaktır. $\omega(s)$ nin tam fonksiyon olduğu bilinmektedir (Levitan ve Sargsjan, 1991). Öte yandan $\omega(s)$ özdeş olarak sıfır olmadığından kompleks analizden $\omega(s) = 0$ denkleminin her $d \in (0, \infty)$ için

$$B[0, d] = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq d \}$$

kapalı dairesine ait olan çözümlerinin sayısının sonlu olduğu bilinmektedir. Özdeğerler reel sayılar olduğundan $\omega(s) = 0$ denkleminin herhangi bir çözümü ya reel sayıdır ya da $s = it$ ($t \in (-\infty, \infty)$) şeklindedir. Özdeğerler kümesinin alttan sınırlı olduğu göz önüne alınırsa negatif özdeğerlerin sayısının sonlu olduğu ortaya çıkar. Ayrıca $\omega(s)$ çift fonksiyon olduğundan $\omega(s) = 0$ denkleminin pozitif çözümlerinin asimtotik davranışının incelenmesi

yeterlidir.

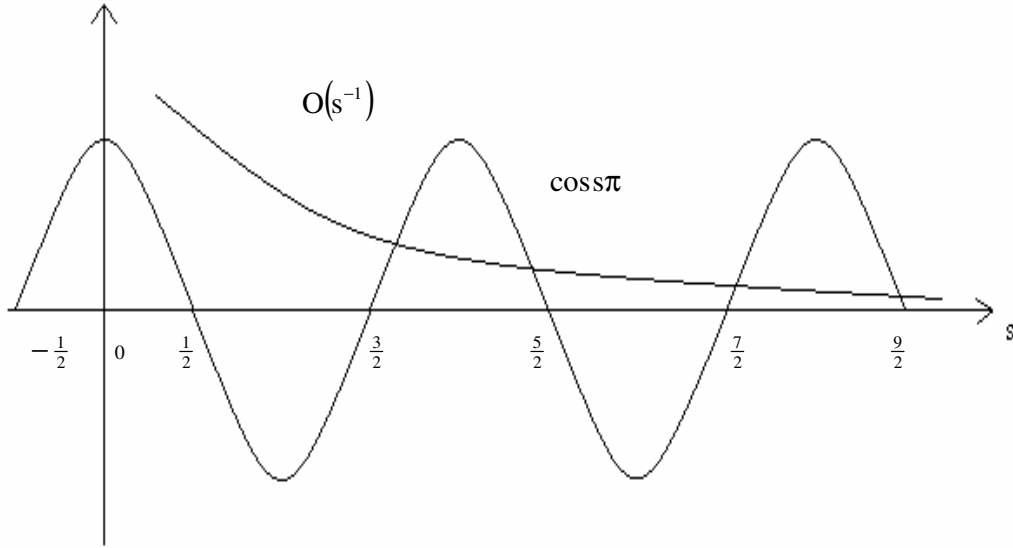
(3.50) ve (3.54) ten

$$\cos s\pi + f(\pi)\frac{\sin s\pi}{s} + g(\pi)\frac{\cos s\pi}{s^2} + O(s^{-3}) = 0 \quad (3.55)$$

elde edilir. (3.55) ten

$$\cos s\pi = O(s^{-1}) \quad (s \geq s_0 > 0) \quad (3.56)$$

bulunur. (3.56) denkleminin sol ve sağ tarafındaki fonksiyonların grafiğini çizelim.



Şekil 3.1 $O(s^{-1})$ ve $\cos s\pi$ fonksiyonlarının grafiği.

Bu şekilden görülüyor ki; öyle bir m doğal sayısı vardır ki (3.55) denkleminin m den büyük

çözümleri $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ bir sabit olmak üzere

$$\left(n + \frac{1}{2} - \varepsilon_0, n + \frac{1}{2} + \varepsilon_0\right) \quad (n = m, m+1, m+2, \dots)$$

aralıklarına aittir. Her $\left(n + \frac{1}{2} - \varepsilon_0, n + \frac{1}{2} + \varepsilon_0\right)$ aralığına ait olan çözümün tek olduğunu

gösterelim.

(3.55) denkleminin sol tarafındaki fonksiyonun türevi için

$$\frac{d}{ds} \left[\cos s\pi + f(\pi) \frac{\sin s\pi}{s} + g(\pi) \frac{\cos s\pi}{s^2} + O(s^{-3}) \right] = \sin s\pi + O(s^{-1})$$

formülünün sağlandığı gösterilebilir. $\sin s\pi + O(s^{-1})$ fonksiyonunun n doğal sayısının büyük değerleri için $\left(n + \frac{1}{2} - \epsilon_0, n + \frac{1}{2} + \epsilon_0 \right)$ aralığına ait olan sıfırı yoktur. Dolayısıyla

$\cos s\pi + f(\pi) \frac{\sin s\pi}{s} + g(\pi) \frac{\cos s\pi}{s^2} + O(s^{-3})$ fonksiyonu $\left(n + \frac{1}{2} - \epsilon_0, n + \frac{1}{2} + \epsilon_0 \right)$ aralığında ya

artan ya da azalandır. Bu nedenle n doğal sayısının büyük değerleri için (3.55) denkleminin

her $\left(n + \frac{1}{2} - \epsilon_0, n + \frac{1}{2} + \epsilon_0 \right)$ aralığına ait olan bir tek çözümü vardır.

(3.55) denkleminin çözümlerini

$$S_n = n + \frac{1}{2} + \delta_n \tag{3.57}$$

şeklinde arayalım. O halde

$$\cos \left(n + \frac{1}{2} + \delta_n \right) \pi + f(\pi) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} + \delta_n \right) \pi}{n + \frac{1}{2} + \delta_n} + g(\pi) \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} + \delta_n \right) \pi}{\left(n + \frac{1}{2} + \delta_n \right)^2} +$$

$$O \left(\left(n + \frac{1}{2} + \delta_n \right)^{-3} \right) = 0 \tag{3.58}$$

dır. Öte yandan

$$\sin \left(n + \frac{1}{2} + \delta_n \right) \pi = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \cdot \cos \delta_n \pi = (-1)^n \cos \delta_n \pi \tag{3.59}$$

$$\cos \left(n + \frac{1}{2} + \delta_n \right) \pi = -\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \cdot \sin \delta_n \pi = (-1)^{n+1} \sin \delta_n \pi \tag{3.60}$$

ve n nin büyük değerleri için $|\delta_n| < \frac{1}{4}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\left| \sin\left(n + \frac{1}{2} + \delta_n\right)\pi \right| > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.61)$$

dir. (3.58), (3.59), (3.60) ve (3.61) den

$$-\tan \delta_n \pi + \frac{f(\pi)}{n + \frac{1}{2} + \delta_n} - \frac{g(\pi)}{\left(n + \frac{1}{2} + \delta_n\right)^2} \tan \delta_n \pi + O(n^{-3}) = 0 \quad (3.62)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{f(\pi)}{n + \frac{1}{2} + \delta_n} - \frac{f(\pi)}{n + \frac{1}{2}} &= \frac{f(\pi) \left(n + \frac{1}{2} - n - \frac{1}{2} - \delta_n\right)}{\left(n + \frac{1}{2} + \delta_n\right) \left(n + \frac{1}{2}\right)} \\ &= -\frac{\delta_n f(\pi)}{n^2} \cdot \frac{n^2}{\left(n + \frac{1}{2} + \delta_n\right) \left(n + \frac{1}{2}\right)} \\ &= -\frac{f(\pi) \delta_n}{n^2} O(1) \end{aligned} \quad (3.63)$$

dir. Buradan

$$\frac{f(\pi)}{n + \frac{1}{2} + \delta_n} = \frac{f(\pi)}{n + \frac{1}{2}} - \frac{f(\pi) \delta_n}{n^2} O(1)$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \frac{g(\pi)}{\left(n + \frac{1}{2} + \delta_n\right)^2} - \frac{g(\pi)}{n^2} &= \frac{g(\pi) \left(n^2 - n^2 - 2n \left(\frac{1}{2} + \delta_n\right) - \left(\frac{1}{2} + \delta_n\right)^2\right)}{n^2 \left(n + \frac{1}{2} + \delta_n\right)^2} \\ &= O(n^{-3}) \end{aligned}$$

dir. Buradan da

$$\frac{g(\pi)}{\left(n + \frac{1}{2} + \delta_n\right)^2} = \frac{g(\pi)}{n^2} + O(n^{-3}) \quad (3.64)$$

bulunur. (3.62), (3.63) ve (3.64) ten

$$-\tan \delta_n \pi + \frac{f(\pi)}{n + \frac{1}{2}} - \frac{f(\pi)\delta_n}{n^2} O(1) - \frac{g(\pi)}{n^2} \tan \delta_n \pi + O(n^{-3}) = 0 \quad (3.65)$$

elde edilir. (3.65) ten

$$\tan \delta_n \pi = O(n^{-1}) \quad \left(|\delta_n| < \frac{1}{4} \right) \quad (3.66)$$

bulunur. Bu formülden yararlanarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ olduğunu gösterelim.

Aksini varsayıp $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n$ limitinin var olmadığını ya da varsa $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O takdirde $\{\delta_n\}$ dizisinin

$$|\delta_{n_m}| \geq \delta_0 > 0$$

olacak şekilde bir $\{\delta_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi ve bir $\delta_0 > 0$ sayısı vardır.

$$0 < \delta_0 \leq |\delta_{n_m}| < \frac{1}{4}$$

dır. Buradan

$$\delta_0 \pi \leq |\delta_{n_m} \pi| < \frac{\pi}{4}$$

elde edilir. Bu bağıntıdan

$$\tan |\delta_{n_m} \pi| \geq \tan \delta_0 \pi > 0,$$

$$|\tan \delta_{n_m} \pi| \geq \tan \delta_0 \pi > 0$$

bulunur. Bu sonuç

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan \delta_{n_m} \pi = 0$$

eşitliğine aykırıdır. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0 \quad (3.67)$$

olmalıdır.

(3.65) ve (3.66) dan

$$\tan \delta_n \pi = \frac{f(\pi)}{n + \frac{1}{2}} - \frac{f(\pi) \delta_n}{n^2} O(1) + O(n^{-3}) = 0 \quad (3.68)$$

elde edilir. Ayrıca (3.66) ve (3.67) den

$$\delta_n \pi = \frac{\delta_n \pi}{\tan \delta_n \pi} O(n^{-1})$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_n \pi}{\tan \delta_n \pi} = 1$$

bulunur. Son iki bağıntıdan

$$\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.69)$$

elde edilir. x in küçük değerleri için

$$\tan x = x + O(x^3)$$

formülünden yararlanarak

$$\tan \delta_n \pi = \delta_n \pi + O((\delta_n \pi)^3) = \delta_n \pi + O(n^{-3}) \quad (3.70)$$

bulunur. (3.68), (3.69) ve (3.70) ten

$$\delta_n \pi = \frac{f(\pi)}{n + \frac{1}{2}} + O(n^{-3}),$$

$$\delta_n = \frac{f(\pi)}{\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)} + O(n^{-3}) \quad (3.71)$$

elde edilir. (3.57) ve (3.71) den

$$S_n = n + \frac{1}{2} + \frac{f(\pi)}{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)} + O(n^{-3})$$

bulunur. Buradan

$$\lambda_n = S_n^2 = \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \frac{f(\pi)}{\pi} + O(n^{-2}) \quad (3.72)$$

formülüne ulaşılır. (3.34) ve (3.72) den (3.7), (3.13) probleminin yani B operatörünün özdeğerleri için

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(x) dx + O(n^{-2}) \quad (3.73)$$

asimtotik formülü elde edilir.

Teorem 3.2.4: B operatörü saf ayrık spektruma sahiptir.

İspat: $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ (3.7), (3.8) probleminin özdeğerleri ve $V_0(x), V_1(x), \dots, V_n(x), \dots$ sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen reel değerli ortonormal özfonksiyonları olsun. Burada her $f \in L_2[0, \pi]$ için

$$\int_0^\pi |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_0^\pi f(x) V_n(x) dx \right|^2$$

Parseval eşitliğinin sağlandığı bilinmektedir (Levitan ve Sargsjan, 1991). Bu nedenle $\{V_n\}_0^\infty \subset L_2[0, \pi]$ dizisi tamdır, yani $L_2[0, \pi]$ uzayının ortonormal bir tabanıdır. $\{\lambda_n\}_0^\infty$ B operatörünün de özdeğerleri ve $\{V_n\}_0^\infty$ de sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlarıdır. B kendine eş bir operatör olduğundan sonuç 2.4.1 gereğince kapalıdır. Teorem 2.4.2 den $B - \lambda I$ operatörünün ve teorem 2.4.1 den $(B - \lambda I)^{-1}$ operatörünün kapalı olduğu elde edilir. Ayrıca teorem 2.4.4 gereğince her $\lambda \in \rho(B)$ için $D((B - \lambda I)^{-1}) = L_2[0, \pi]$ dir. O taktirde her $\lambda \in \rho(B)$ için $R_\lambda(B) : L_2[0, \pi] \rightarrow L_2[0, \pi]$ sınırlı lineer bir operatördür. Dolayısıyla her $y = y(x) \in L_2[0, \pi]$ için

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (y, V_n) V_n$$

ve

$$R_{\lambda}(B)y = \sum_{n=0}^{\infty} (y, V_n) R_{\lambda}(B) V_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y, V_n)}{\lambda_n - \lambda} V_n \quad (3.74)$$

dir. Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} = 0$ olduğu göz önüne alınırsa teorem 2.5.8 ve (3.74) ten yararlanarak

her $\lambda \in \rho(B)$ için $R_{\lambda}(B)$ nin tam sürekli bir operatör olduğu gösterilebilir. $R_{\lambda}(B)$ operatörünün spektrumu

$$\left\{ 0, \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}, \frac{1}{\lambda_1 - \lambda}, \dots, \frac{1}{\lambda_n - \lambda}, \dots \right\}$$

kümesidir. Her $\frac{1}{\lambda_n - \lambda}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) sayısı $R_{\lambda}(B)$ operatörünün katlılığı 1 olan özdeğeridir.

Teorem 2.4.6 gereğince $B - \lambda I$ operatörünün spektrumu $\{\lambda_n - \lambda\}_0^{\infty}$ kümesidir. Dolayısıyla B operatörünün spektrumu $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ kümesidir. Her λ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) sayısı B nin katlılığı bir olan özdeğeri ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ olduğundan B operatörü saf ayrık spektruma sahiptir. ■

A operatörü, B operatörünün ifadesinde yer alan $q(x)$ fonksiyonunun $q(x) \equiv 0$ ($x \in [0, \pi]$) alınması ile elde edildiğinden teorem 3.1.2 ve teorem 3.2.4 ten aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 3.2.2: A operatörü sınırsızdır.

Sonuç 3.2.3: A operatörü saf ayrık spektruma sahiptir.

3.3 B ve A Operatörlerinin Özdeğerler Farkının Toplamı İçin Formül

A operatörünün özdeğerleri

$$\mu_n = \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.75)$$

ve bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özfonksiyonları

$$\varphi_n = \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.76)$$

şeklindedir. $\{\varphi_n\}_0^{\infty}$ dizisi $L_2[0, \pi]$ uzayının bir ortonormal tabanıdır.

Ayrıca $q \geq n+1$ için

$$\mu_q - \mu_n = \left(q + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = q^2 + q + \frac{1}{4} - n^2 - n - \frac{1}{4} > q^2 - n^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.77)$$

dir.

$q(x)$ fonksiyonu (3.1) koşulunu sağladığından (3.73) formülünden B ve A operatörlerinin $\lambda_n - \mu_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) özdeğerler farkından oluşan

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n)$$

serisinin yakınsak olduğu elde edilir. Bu çalışmada bu serinin toplamı için bir formülün sağlandığı gösterilmiştir.

Teorem 3.3.1: m nin büyük değerleri için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} \right) \quad \text{ve} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu_n - \lambda} \right)$$

serileri $|\lambda| = b_m = (m+1)^2$ çemberi üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat: m nin büyük değerleri için

$$\lambda_m < b_m < \lambda_{m+1} \quad (3.78)$$

dır. Öte yandan $n \leq m$ için $\lambda_n \leq \lambda_m$ ve $n > m$ için $\lambda_n \geq \lambda_{m+1}$ olduğu göz önüne alınırsa (3.78) den

$$|\lambda_n| \neq b_m \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda}$ fonksiyonları m nin büyük değerleri için $|\lambda| = b_m$ çemberi

üzerinde tanımlıdır ve

$$\left| \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} \right| \leq \frac{|\lambda|}{|\lambda_n| - |\lambda|} = \frac{b_m}{|\lambda_n| - b_m}$$

olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda}$ serisinin $|\lambda| = b_m$ çemberi üzerinde düzgün yakınsaklığını göstermek

için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left| |\lambda_n| - b_m \right|}$ serisinin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$

olduğundan keyfi $n > N$ için

$$\lambda_n > 2b_m$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır. Bu nedenle $n > N$ için

$$\left| |\lambda_n| - b_m \right| = \lambda_n - b_m > \lambda_n - \frac{\lambda_n}{2} = \frac{\lambda_n}{2} \quad (3.79)$$

dir. Ayrıca (3.73) ten $n \rightarrow \infty$ iken

$$\lambda_n \sim n^2$$

dir. Dolayısıyla keyfi $n > N$ için

$$\lambda_n > d_1 n^2 \quad (3.80)$$

olacak şekilde bir $d_1 > 0$ sabiti vardır. (3.79) ve (3.80) den

$$\frac{1}{\left| |\lambda_n| - b_m \right|} < \frac{2}{d_1 n^2} \quad (n > N) \quad (3.81)$$

elde edilir. Öte yandan $\sum_{n=1}^{\infty} 2d_1^{-1} n^{-2}$ serisinin yakınsak olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla

(3.81) den $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left| |\lambda_n| - b_m \right|}$ serisinin yakınsak olduğu yani $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left| |\lambda_n| - b_m \right|}$ serisinin yakınsak

olduğu elde edilir. Benzer şekilde $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu_n - \lambda} \right)$ serisinin de $|\lambda| = b_m = (m+1)^2$ çemberi

üzerinde düzgün yakınsak olduğu gösterilebilir. ■

Her $\lambda \in \rho(A)$ için $R_\lambda(A)$ operatörünü R_λ^0 , her $\lambda \in \rho(B)$ için $R_\lambda(B)$ operatörünü R_λ ile göstereceğiz.

(3.73) ve (3.75) ten $n \rightarrow \infty$ iken

$$\lambda_n, \mu_n \sim n^2$$

bulunur. Buradan görülüyor ki $\lambda \neq \lambda_n, \mu_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\mu_n - \lambda|} \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda|}$$

serileri yakınsaktır. Dolayısıyla R_λ^0 ve R_λ çekirdek operatörleridir ve

$$\text{tr}(R_\lambda - R_\lambda^0) = \text{tr}R_\lambda - \text{tr}R_\lambda^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n - \lambda} - \frac{1}{\mu_n - \lambda} \right)$$

dır (Gohberg ve Krein, 1969). Bu eşitliği $\frac{\lambda}{2\pi i}$ ile çarpıp $|\lambda| = b_m = (m+1)^2$ çemberi üzerinde integre edersek

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \text{tr}(R_\lambda - R_\lambda^0) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} \right) d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda}{\mu_n - \lambda} \right) d\lambda \quad (3.82)$$

elde edilir. Teorem 3.3.1 gereğince

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} \right) \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu_n - \lambda} \right) \text{ serileri } |\lambda| = b_m \text{ çemberi üzerinde düzgün yakınsak serilerdir.}$$

Dolayısıyla (3.82) den

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \text{tr}(R_\lambda - R_\lambda^0) d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} d\lambda - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \frac{\lambda}{\mu_n - \lambda} d\lambda \quad (3.83)$$

bulunur. m nin büyük değerleri için

$\lambda_m < b_m < \lambda_{m+1}$ ve $\mu_m < b_m < \mu_{m+1}$ olduğundan

$$\{\lambda_n, \mu_n\}_0^m \subset B(0, b_m) = \{\lambda : |\lambda| < b_m\}$$

$$\lambda_n, \mu_n \notin B[0, b_m] = \{\lambda : |\lambda| \leq b_m\} \quad (n = m+1, m+2, \dots)$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \frac{\lambda}{\lambda - \mu_n} d\lambda = \begin{cases} \mu_n & , \quad n \leq m \quad \text{ise} \\ 0 & , \quad n \geq m+1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_n} d\lambda = \begin{cases} \lambda_n, & n \leq m \\ 0, & n \geq m+1 \end{cases} \text{ ise}$$

olur. Bu değerler (3.83) te yerine konursa

$$\sum_{n=0}^m (\lambda_n - \mu_n) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \operatorname{tr} (R_\lambda - R_\lambda^0) d\lambda \quad (3.84)$$

bulunur. Aşağıdaki formülün sağlandığı bilinmektedir:

$$R_\lambda = R_\lambda^0 - R_\lambda q R_\lambda^0 \quad (\lambda \in \rho(B) \cap \rho(A)).$$

Buradan $p \geq 2$ herhangi bir doğal sayı olmak üzere

$$R_\lambda - R_\lambda^0 = \sum_{j=1}^p (-1)^j R_\lambda^0 (q R_\lambda^0)^j + (-1)^{p+1} R_\lambda (q R_\lambda^0)^{p+1}$$

formülü elde edilir. Bu da (3.84) bağıntısında yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^m (\lambda_n - \mu_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \operatorname{tr} \left(\sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} R_\lambda^0 (q R_\lambda^0)^j + (-1)^p R_\lambda (q R_\lambda^0)^{p+1} \right) d\lambda$$

veya

$$\sum_{n=0}^m (\lambda_n - \mu_n) = \sum_{j=1}^p D_{mj} + D_m^{(p)} \quad (3.85)$$

bulunur. Burada

$$D_{mj} = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \operatorname{tr} [R_\lambda^0 (q R_\lambda^0)^j] d\lambda \quad (j=1,2,\dots) \quad (3.86)$$

$$D_m^{(p)} = \frac{(-1)^p}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \operatorname{tr} [R_\lambda (q R_\lambda^0)^{p+1}] d\lambda \quad (3.87)$$

dır.

Teorem 3.3.2: qR_λ^0 operatör fonksiyonu $\rho(A)$ bölgesinde $\sigma_1(H)$ uzayındaki norma göre analitiktir ve

$$(qR_\lambda^0)' = q(R_\lambda^0)^2$$

dir.

İspat: Her $\lambda \in \rho(A)$ için R_λ^0 çekirdek operatörü olduğundan ve

$$R_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - R_\lambda^0 = \Delta\lambda R_{\lambda+\Delta\lambda}^0 R_\lambda^0$$

formülünden yararlanarak

$$\begin{aligned} \left\| \frac{qR_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - qR_\lambda^0}{\Delta\lambda} - q(R_\lambda^0)^2 \right\|_{\sigma_1(H)} &= \left\| qR_{\lambda+\Delta\lambda}^0 R_\lambda^0 - q(R_\lambda^0)^2 \right\|_{\sigma_1(H)} \\ &= \left\| qR_\lambda^0 R_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - q(R_\lambda^0)^2 \right\|_{\sigma_1(H)} \\ &= \left\| (qR_\lambda^0)(R_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - R_\lambda^0) \right\|_{\sigma_1(H)} \\ &\leq \left\| qR_\lambda^0 \right\|_{\sigma_1(H)} \cdot \left\| R_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - R_\lambda^0 \right\| \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left\| R_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - R_\lambda^0 \right\| = 0$$

olduğundan buradan

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left\| \frac{qR_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - qR_\lambda^0}{\Delta\lambda} - q(R_\lambda^0)^2 \right\|_{\sigma_1(H)} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $\sigma_1(H)$ uzayındaki norma göre

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{qR_{\lambda+\Delta\lambda}^0 - qR_\lambda^0}{\Delta\lambda} = q(R_\lambda^0)^2$$

veya

$$\left(qR_{\lambda}^0\right)' = q\left(R_{\lambda}^0\right)^2$$

dir. ■

Teorem 3.3.3: $B(\lambda)$ kompleks düzlemin bir açık G bölgesinde tanımlı, değerleri $\sigma_1(H)$ uzayına ait ve bu uzayın normuna göre analitik bir operatör fonksiyon ise her n doğal sayısı için

$$\operatorname{tr}\left[\left(B^n(\lambda)\right)'\right] = \operatorname{tr}\left[\frac{dB^n(\lambda)}{d\lambda}\right] = n \cdot \operatorname{tr}\left[B'(\lambda)B^{n-1}(\lambda)\right]$$

dır.

İspat: Teoremi ispatlamak için önce tümevarımla

$$\left(B^n(\lambda)\right)' = \sum_{i=0}^{n-1} B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{n-1-i}(\lambda) \quad (3.88)$$

formülünün sağlandığını gösterelim. Bu formülün $n=1$ için sağlandığı açıktır. $n=2$ olduğunda

$$\left(B^2(\lambda)\right)' = \left(B(\lambda)B(\lambda)\right)' = B'(\lambda)B(\lambda) + B(\lambda)B'(\lambda)$$

veya

$$\left(B^2(\lambda)\right)' = \sum_{i=0}^1 B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{1-i}(\lambda)$$

dır. (3.88) formülünün $n=m$ için sağlandığını yani

$$\left(B^m(\lambda)\right)' = \sum_{i=0}^{m-1} B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{m-1-i}(\lambda) \quad (3.89)$$

olduğunu varsayıp $n=m+1$ için sağlandığını göstermek gerekir.

$$\left(B^{m+1}(\lambda)\right)' = \left(B^m(\lambda)B(\lambda)\right)' = \left(B^m(\lambda)\right)' B(\lambda) + B^m(\lambda)B'(\lambda)$$

dır. $\left(B^m(\lambda)\right)'$ nün (3.89) ifadesi burada yerine yazılırsa

$$\left(B^{m+1}(\lambda)\right)' = \left[\sum_{i=0}^{m-1} B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{m-1-i}(\lambda)\right] B(\lambda) + B^m(\lambda)B'(\lambda)$$

$$\left(B^{m+1}(\lambda)\right)' = \sum_{i=0}^{m-1} B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{m-i}(\lambda) + B^m(\lambda)B'(\lambda)$$

veya

$$\left(B^{m+1}(\lambda)\right)' = \sum_{i=0}^m B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{m-i}(\lambda)$$

elde edilir ki bununla da (3.88) formülü ispatlanmıř olur.

Varsayım gereği her $\lambda \in G$ için $B(\lambda) \in \sigma_1(H)$ olduğundan (3.88) den

$$\text{tr} \left[\left(B^n(\lambda)\right)' \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \text{tr} \left[B^i(\lambda)B'(\lambda)B^{n-1-i}(\lambda) \right]$$

elde edilir. $B'(\lambda) \in \sigma_1(H)$ ve her $i \geq 0$ tamsayısı için $B^i(\lambda) \in \sigma_1(H)$ olduğundan bu son eşitlikten

$$\text{tr} \left[\left(B^n(\lambda)\right)' \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \text{tr} \left[B'(\lambda)B^{n-1-i}(\lambda)B^i(\lambda) \right]$$

veya

$$\text{tr} \left[\left(B^n(\lambda)\right)' \right] = n \cdot \text{tr} \left[B'(\lambda)B^{n-1}(\lambda) \right]$$

bulunur (Gohberg ve Krein, 1969). ■

Teorem 3.3.4: Eğer değerleri $\sigma_1(H)$ uzayına ait olan bir $B(\lambda)$ operatör fonksiyonu bir $\lambda = \lambda_0$ noktasında $\sigma_1(H)$ uzayındaki norma göre analitikse $\text{tr}B(\lambda)$ skaler fonksiyonu da bu $\lambda = \lambda_0$ noktasında analiktir ve

$$\text{tr}B'(\lambda_0) = \left[\text{tr}B(\lambda) \right]'_{\lambda=\lambda_0}$$

dir.

İspat: $B(\lambda)$ λ_0 noktasında $\sigma_1(H)$ uzayındaki norma göre analitik olduğundan

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left\| \frac{B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - B'(\lambda_0) \right\|_{\sigma_1(H)} = 0 \quad (3.90)$$

dır. Öte yandan

$$\left| \operatorname{tr} \left[\frac{B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - B'(\lambda_0) \right] \right| \leq \left\| \frac{B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - B'(\lambda_0) \right\|_{\sigma_1(H)}$$

veya

$$\left| \frac{\operatorname{tr} B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - \operatorname{tr} B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - \operatorname{tr} B'(\lambda_0) \right| \leq \left\| \frac{B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - B'(\lambda_0) \right\|_{\sigma_1(H)}$$

olduğundan (3.90) dan

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left| \frac{\operatorname{tr} B(\lambda_0 + \Delta\lambda) - \operatorname{tr} B(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - \operatorname{tr} B'(\lambda_0) \right| = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\operatorname{tr} B'(\lambda_0) = \left[\operatorname{tr} B(\lambda) \right]_{\lambda=\lambda_0}'$$

dır. ■

Teorem 3.3.5:

$$D_{mj} = \frac{(-1)^j}{2\pi i j} \int_{|\lambda|=b_m} \operatorname{tr} \left[(qR_\lambda^0)^j \right] d\lambda$$

dır.

İspat: Teorem 3.3.2 ye göre her j doğal sayısı için $(qR_\lambda^0)^j$ operatör fonksiyonu $\rho(A)$ bölgesinde $\sigma_1(H)$ uzayındaki norma göre analitiktir. O taktirde teorem 3.3.3 e göre

$$\operatorname{tr} \left\{ \left[(qR_\lambda^0)^j \right]' \right\} = j \cdot \operatorname{tr} \left[(qR_\lambda^0)' (qR_\lambda^0)^{j-1} \right]$$

dır. Teorem 3.3.2 gereğince

$$(qR_\lambda^0)' = q(R_\lambda^0)^2$$

dır. Son iki eşitlikten

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} \left\{ \left[\left(qR_{\lambda}^0 \right)^j \right]' \right\} &= j \cdot \operatorname{tr} \left[q \left(R_{\lambda}^0 \right)^2 \left(qR_{\lambda}^0 \right)^{j-1} \right] \\
&= j \cdot \operatorname{tr} \left[\left(qR_{\lambda}^0 \right)^{j-1} q \left(R_{\lambda}^0 \right)^2 \right] \\
&= j \cdot \operatorname{tr} \left[\left(qR_{\lambda}^0 \right)^j R_{\lambda}^0 \right] \\
&= j \cdot \operatorname{tr} \left[R_{\lambda}^0 \left(qR_{\lambda}^0 \right)^j \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Bu bağıntı D_{mj} nin (3.86) ifadesinde yerine yazılırsa

$$D_{mj} = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i j} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \operatorname{tr} \left\{ \left[\left(qR_{\lambda}^0 \right)^j \right]' \right\} d\lambda$$

elde edilir. Bu formül

$$\begin{aligned}
D_{mj} &= \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i j} \int_{|\lambda|=b_m} \operatorname{tr} \left\{ \left[\lambda \left(qR_{\lambda}^0 \right)^j \right]' - \left(qR_{\lambda}^0 \right)^j \right\} d\lambda \\
&= \frac{(-1)^j}{2\pi i j} \int_{|\lambda|=b_m} \operatorname{tr} \left[\left(qR_{\lambda}^0 \right)^j \right] d\lambda + \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i j} \int_{|\lambda|=b_m} \operatorname{tr} \left\{ \left[\lambda \left(qR_{\lambda}^0 \right)^j \right]' \right\} d\lambda
\end{aligned} \tag{3.91}$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 3.3.4 ten dolayı

$$\operatorname{tr} \left\{ \left[\lambda \left(qR_{\lambda}^0 \right)^j \right]' \right\} = \left\{ \operatorname{tr} \left[\lambda \left(qR_{\lambda}^0 \right)^j \right] \right\}'$$

dir. Buradan

$$\int_{|\lambda|=b_m} \operatorname{tr} \left\{ \left[\lambda \left(qR_{\lambda}^0 \right)^j \right]' \right\} d\lambda = \int_{|\lambda|=b_m} \left\{ \operatorname{tr} \left[\lambda \left(qR_{\lambda}^0 \right)^j \right] \right\}' d\lambda$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki integrali aşağıdaki gibi iki eğri integralin toplamı şeklinde gösterelim:

$$\int_{|\lambda|=b_m} \left\{ \operatorname{tr} \left[\lambda (qR_\lambda^0)^j \right] \right\}' d\lambda = \int_{\substack{|\lambda|=b_m \\ \operatorname{Im} \lambda \geq 0}} \left\{ \operatorname{tr} \left[\lambda (qR_\lambda^0)^j \right] \right\}' d\lambda + \int_{\substack{|\lambda|=b_m \\ \operatorname{Im} \lambda \leq 0}} \left\{ \operatorname{tr} \left[\lambda (qR_\lambda^0)^j \right] \right\}' d\lambda. \quad (3.92)$$

ε_0 , $b_m + \varepsilon_0 < \mu_{m+1}$ olacak şekilde bir pozitif sayı olmak üzere $\operatorname{tr} \left[\lambda (qR_\lambda^0)^j \right]$ fonksiyonu

$$G_1 = \left\{ \lambda : b_m - \varepsilon_0 < |\lambda| < b_m + \varepsilon_0, \operatorname{Im} \lambda > -\varepsilon_0 \right\}$$

$$G_2 = \left\{ \lambda : b_m - \varepsilon_0 < |\lambda| < b_m + \varepsilon_0, \operatorname{Im} \lambda < \varepsilon_0 \right\}$$

basit bağlantılı bölgelerinde analitiktir. Ayrıca

$$\left\{ \lambda : |\lambda| = b_m, \operatorname{Im} \lambda \geq 0 \right\} \subset G_1$$

$$\left\{ \lambda : |\lambda| = b_m, \operatorname{Im} \lambda \leq 0 \right\} \subset G_2$$

olduğu dikkate alınırsa Leibnitz formülünü kullanarak (3.92) bağıntısından

$$\begin{aligned} \int_{|\lambda|=b_m} \left\{ \operatorname{tr} \left[\lambda (qR_\lambda^0)^j \right] \right\}' d\lambda &= \left\{ \operatorname{tr} \left[-b_m (qR_{-b_m}^0)^j \right] - \operatorname{tr} \left[b_m (qR_{b_m}^0)^j \right] \right\} + \\ &\left\{ \operatorname{tr} \left[b_m (qR_{b_m}^0)^j \right] - \operatorname{tr} \left[-b_m (qR_{-b_m}^0)^j \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (3.91) den ve bu son bağıntıdan

$$D_{mj} = \frac{(-1)^j}{2\pi i j} \int_{|\lambda|=b_m} \operatorname{tr} \left[(qR_\lambda^0)^j \right] d\lambda$$

bulunur. ■

Theorem 3.3.6:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_{m1} = \frac{1}{4} [q(0) - q(\pi)]$$

dir.

İspat: Teorem 3.3.5 gereğince

$$D_{m1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \text{tr}(qR_\lambda^0) d\lambda \quad (3.93)$$

dır. qR_λ^0 her $\lambda \in \rho(A)$ için çekirdek operatörü ve $\{\varphi_n\}_0^\infty$ $H = L_2[0, \pi]$ uzayının bir ortonormal tabanı olduğundan

$$\text{tr}(qR_\lambda^0) = \sum_{n=0}^{\infty} (qR_\lambda^0 \varphi_n, \varphi_n) \quad (3.94)$$

dir (Gohberg ve Krein, 1969). Öte yandan

$$R_\lambda^0 \varphi_n = (A - \lambda I)^{-1} \varphi_n = (\mu_n - \lambda)^{-1} \varphi_n \quad (3.95)$$

olduğundan (3.93), (3.94) ve (3.95) ten

$$\begin{aligned} D_{m1} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (qR_\lambda^0 \varphi_n, \varphi_n) \right] d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n - \lambda} (q\varphi_n, \varphi_n) \right] d\lambda \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (q\varphi_n, \varphi_n) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu_n} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.76) dan ve

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu_n} = \begin{cases} 1, & n \leq m \text{ ise} \\ 0, & n > m \text{ ise} \end{cases}$$

formülünden yararlanarak

$$\begin{aligned} D_{m1} &= \sum_{n=0}^m (q\varphi_n, \varphi_n) = \sum_{n=0}^m (q(x)\varphi_n(x), \varphi_n(x)) \\ &= \sum_{n=0}^m \left(q(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x, \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{m1} &= \sum_{n=0}^m \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) \cos^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) x dx \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^m \int_0^{\pi} q(x) (1 + \cos(2n+1)x) dx
\end{aligned} \tag{3.96}$$

elde edilir. $q(x)$ fonksiyonunun (3.1) koşulunu sağladığı göz önüne alınırsa (3.96) dan

$$D_{m1} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^m \int_0^{\pi} q(x) \cos(2n+1)x dx$$

bulunur. Bu son eşitlikte $m \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_{m1} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} q(x) \cos(2n+1)x dx \tag{3.97}$$

elde edilir. (3.97) ifadesi

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} D_{m1} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^{\pi} q(x) \cos nx dx - (-1)^n \int_0^{\pi} q(x) \cos nx dx \right] \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) \cos nx dx \right] \cos n0 \right\} - \\
&\quad \frac{1}{4} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) \cos nx dx \right] \cos n\pi \right\}
\end{aligned}$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada (3.1) koşulunun sağlandığı tekrar hatırlanacak olursa son eşitliğin sağ tarafındaki toplamalar, ikinci mertebeden sürekli türevelere sahip olan $q(x)$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığında kosinüs serisine açılımının sırasıyla 0 ve π noktalarındaki değerleridir. Dolayısıyla

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_{m1} = \frac{1}{4} [q(0) - q(\pi)]$$

dir. ■

Yardımcı Teorem 3.3.1: $\Omega_m = \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j - \mu_m}$ olsun. Ω_m için

$$\Omega_m < m^{-1} + m^{-\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (3.77) eşitsizliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j - \mu_m} < \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^2 - m^2} \\ &= \frac{1}{(m+1)^2 - m^2} + \sum_{j=m+2}^{\infty} \frac{1}{j^2 - m^2} \\ &< \frac{1}{m} + \sum_{j=m+2}^{\infty} \frac{1}{j^2 - m^2} \end{aligned} \tag{3.98}$$

bulunur. Ayrıca

$$\sum_{j=m+2}^{\infty} \frac{1}{j^2 - m^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{m+i}^{m+i+1} \frac{dx}{(m+i+1)^2 - m^2}$$

dir. m nin büyük değerleri ve $x \in [m+i, m+i+1]$ için

$$\frac{1}{(m+i+1)^2 - m^2} \leq \frac{1}{x^2 - m^2}$$

olduğundan

$$\int_{m+i}^{m+i+1} \frac{dx}{(m+i+1)^2 - m^2} \leq \int_{m+i}^{m+i+1} \frac{dx}{x^2 - m^2}$$

ve buradan da

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{m+i}^{m+i+1} \frac{dx}{(m+i+1)^2 - m^2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{m+i}^{m+i+1} \frac{dx}{x^2 - m^2} = \int_{m+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - m^2}$$

bulunur. Son bağıntı (3.98) de göz önüne alınırsa

$$\Omega_m < \frac{1}{m} + \int_{m+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - m^2} \tag{3.99}$$

elde edilir. Burada yer alan $\int_{m+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - m^2}$ integralini sınırlandırmak için

$$x^2 - m^2 = t$$

değişken dönüşümünü yapalım. O takdirde

$$\int_{m+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - m^2} = \int_{2m+1}^{\infty} \frac{1}{2t} (t + m^2)^{-\frac{1}{2}} dt \quad (3.100)$$

bulunur. (3.100) den

$$\begin{aligned} \int_{m+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - m^2} &< \frac{1}{2} \int_{2m+1}^{\infty} t^{-1-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} (-2) t^{-\frac{1}{2}} \Big|_{2m+1}^{\infty} \\ &= - \left[\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{1}{2}} - (2m+1)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ &= (2m+1)^{-\frac{1}{2}} \\ &< m^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.101)$$

elde edilir. (3.99) ve (3.101) den

$$\Omega_m < m^{-1} + m^{-\frac{1}{2}}$$

bulunur. ■

Teorem 3.3.7: $|\lambda| = b_m$ çemberi üzerinde

$$\|R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H)} < \text{const}$$

dır.

İspat: $\lambda \notin \{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ için R_λ^0 normal operatör olduğundan

$$\|R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\mu_n - \lambda|}$$

dır (Gohberg ve Krein, 1969). m nin büyük değerleri için $|\lambda| = b_m = (m+1)^2$ çemberi üzerinde

$$\|R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\mu_n - |\lambda||} = \sum_{n=0}^m \frac{1}{b_m - \mu_n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n - b_m} \quad (3.102)$$

bulunur. Burada

$$\sum_{n=0}^m \frac{1}{b_m - \mu_n} \leq \frac{m+1}{b_m - \mu_m} = \frac{m+1}{(m+1)^2 - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{m+1}{m + \frac{3}{4}} < \frac{m+1}{m} = 1 + \frac{1}{m} \quad (3.103)$$

dir. Öte yandan

$$\begin{aligned} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n - b_m} &< \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n - \left(\frac{\mu_m + \mu_{m+1}}{2}\right)} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2}{2\mu_n - \mu_m - \mu_{m+1}} \\ &\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n - \mu_m} \\ &= 2\Omega_m \end{aligned} \quad (3.104)$$

dir. Yardımcı teorem 3.3.1 ve (3.104) ten yararlanarak

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n - b_m} < 2 \left(m^{-1} + m^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (3.105)$$

elde edilir. (3.102), (3.103) ve (3.105) ten

$$\|R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H)} < 1 + 3m^{-1} + 2m^{-\frac{1}{2}} < 6 \quad (3.106)$$

bulunur. ■

Teorem 3.3.8: $|\lambda| = b_m$ çemberi üzerinde

$$\|R_\lambda\| < \text{const} \cdot m^{-1}$$

dir.

İspat: $|\lambda| = b_m$ için

$$|\lambda_n - \lambda| = |\lambda_n - b_m| \quad (3.107)$$

dir. $n \leq m$ ve m nin büyük değerleri için $|\lambda_n| \leq \lambda_m$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} b_m - |\lambda_n| &\geq b_m - \lambda_m = b_m - \mu_m + (\mu_m - \lambda_m) \\ &\geq b_m - \mu_m - |\mu_m - \lambda_m| \end{aligned} \quad (3.108)$$

bulunur. Ayrıca $q(x)$ fonksiyonu (3.1) koşulunu sağladığından (3.73) formülünden her $m \in \mathbb{N}$ için

$$|\lambda_m - \mu_m| \leq d_0 \quad (3.109)$$

olacak şekilde bir $d_0 > 0$ sabitinin varlığı elde edilir. (3.108) ve (3.109) dan

$$b_m - |\lambda_n| > m - d_0 \quad (3.110)$$

elde edilir. Öte yandan $n \geq m+1$ için $|\lambda_n| = \lambda_n \geq \lambda_{m+1}$ olduğundan

$$\begin{aligned} |\lambda_n| - b_m &\geq \lambda_{m+1} - b_m = \mu_{m+1} - b_m + (\lambda_{m+1} - \mu_{m+1}) \\ &\geq \mu_{m+1} - b_m - |\lambda_{m+1} - \mu_{m+1}| \end{aligned}$$

dır. Burada (3.109) eşitsizliği bir kez daha kullanılırsa son ifadede $n \geq m+1$ için

$$|\lambda_n| - b_m > m - d_0 \quad (3.111)$$

elde edilir. $\lim_{m \rightarrow \infty} (m - d_0) = \infty$ olduğu dikkate alınırsa $|\lambda| = b_m$ ve m nin büyük değerleri için

$$|\lambda_n - \lambda| > \frac{m}{4} \quad (3.112)$$

bulunur. R_λ operatörünün s sayıları $\left\{ |\lambda_n - \lambda|^{-1} \right\}_{n=0}^{\infty}$ olduğundan

$$\|R_\lambda\| = \max_n \left\{ |\lambda_n - \lambda|^{-1} \right\} \quad (3.113)$$

dir (Gohberg ve Krein, 1969). Dolayısıyla (3.112) ve (3.113) ten

$$\|R_\lambda\| < 4m^{-1}$$

bulunur. ■

Teorem 3.3.9: $j \geq 2$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_{mj} = 0$$

dır.

İspat: Bakşi (1999) çalışmasındakine benzer şekilde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_{m2} = \lim_{m \rightarrow \infty} D_{m3} = 0 \quad (3.114)$$

olduğu gösterilebilir. $j > 3$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} D_{mj} = 0$ olduğunu gösterelim.

Bunun için teorem 3.3.5 ten yararlanarak D_{mj} yi sınırlandıracağız.

$$\begin{aligned} |D_{mj}| &\leq \frac{1}{2\pi j} \int_{|\lambda|=b_m} \left| \text{tr}(qR_\lambda^0)^j \right| \cdot |d\lambda| \\ &\leq \frac{1}{2\pi j} \int_{|\lambda|=b_m} \left\| (qR_\lambda^0)^j \right\|_{\sigma_1(H)} \cdot |d\lambda| \\ &\leq \frac{1}{2\pi j} \int_{|\lambda|=b_m} \left\| (qR_\lambda^0)^{j-1} \right\| \cdot \|qR_\lambda^0\|_{\sigma_1(H)} \cdot |d\lambda| \\ &\leq \frac{1}{2\pi j} \int_{|\lambda|=b_m} \|q\|^{j-1} \cdot \|R_\lambda^0\|^{j-1} \cdot \|q\| \cdot \|R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H)} \cdot |d\lambda| \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{|\lambda|=b_m} \|q\|^j \cdot \|R_\lambda^0\|^{j-1} \cdot \|R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H)} \cdot |d\lambda| \end{aligned} \quad (3.115)$$

dır. $q(x) \equiv 0$ olması halinde $R_\lambda = R_\lambda^0$ olduğundan teorem 3.3.8 den

$$\|R_\lambda^0\| < 4m^{-1} \quad (3.116)$$

bulunur. Teorem 3.3.7, (3.115) ve (3.116) dan

$$|D_{mj}| \leq \text{const.} \int_{|\lambda|=b_m} (m^{-1})^{j-1} \cdot |d\lambda| \leq \text{const.} \cdot b_m \cdot m^{-j+1} \quad (3.117)$$

elde edilir. Burada $b_m = (m+1)^2 \leq \text{const.} \cdot m^2$ olduğu göz önüne alınırsa (3.117) bağıntısından

$$|D_{mj}| \leq \text{const.} \cdot m^{-j+3} \quad (3.118)$$

bulunur. (3.118) den $j > 3$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_{mj} = 0$$

elde edilir. ■

Bu çalışmanın temel sonuçlarından birini aşağıdaki teoremle ifade edelim:

Teorem 3.3.10: B ve A operatörlerinin özdeğerler farkının toplamı için

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \frac{1}{4} [q(0) - q(\pi)]$$

formülü sağlanır.

İspat: Teorem 3.3.6 ve teorem 3.3.9 kullanılarak (3.85) formülünden B ve A operatörlerinin özdeğerler farkının toplamı

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \frac{1}{4} [q(0) - q(\pi)] + \lim_{m \rightarrow \infty} D_m^{(p)} \quad (3.119)$$

elde edilir. Burada

$$D_m^{(p)} = \frac{(-1)^p}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_m} \lambda \text{tr} \left[R_\lambda (qR_\lambda^0)^{p+1} \right] d\lambda$$

dır. $D_m^{(p)}$ için şunlar yazılabilir:

$$\begin{aligned} |D_m^{(p)}| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda|=b_m} |\lambda| \cdot \left| \text{tr} \left[R_\lambda (qR_\lambda^0)^{p+1} \right] \right| \cdot |d\lambda| \\ &\leq b_m \int_{|\lambda|=b_m} \left\| R_\lambda (qR_\lambda^0)^{p+1} \right\|_{\sigma_1(H)} \cdot |d\lambda| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|D_m^{(p)}| &\leq b_m \int_{|\lambda|=b_m} \|R_\lambda\| \cdot \left\| (qR_\lambda^0)^{p+1} \right\|_{\sigma_1(H)} \cdot |d\lambda| \\
&\leq b_m \int_{|\lambda|=b_m} \|R_\lambda\| \cdot \left\| (qR_\lambda^0)^p \right\| \cdot \|qR_\lambda^0\|_{\sigma_1(H)} \cdot |d\lambda| \\
&\leq b_m \int_{|\lambda|=b_m} \|R_\lambda\| \cdot \|q\|^p \cdot \|R_\lambda^0\|^p \cdot \|q\| \cdot \|R_\lambda^0\|_{\sigma_1(H)} \cdot |d\lambda|
\end{aligned}$$

Teorem 3.3.7, teorem 3.3.8 ve (3.116) dan

$$|D_m^{(p)}| \leq \text{const} \cdot b_m^2 \cdot (m^{-1})^{p+1}$$

bulunur. Burada $b_m \leq \text{const} \cdot m^2$ olduğu bir kez daha kullanılacak olursa

$$|D_m^{(p)}| \leq \text{const} \cdot m^4 \cdot m^{-p-1} = \text{const} \cdot m^{-p+3} \quad (3.120)$$

elde edilir. (3.120) eşitsizliğinden $p > 3$ iken

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_m^{(p)} = 0$$

olduğu görülmektedir. (3.119) formülünden ve bu son eşitlikten

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \frac{1}{4} [q(0) - q(\pi)]$$

bulunur. ■

3.4 Örnek

$[0, \pi]$ aralığında tanımlı

$$q(x) = x^2 + \pi x - \frac{5\pi^2}{6}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon her mertebeden sürekli türevelere sahiptir, reel değerlidir ve

$$\int_0^\pi q(x) dx = \int_0^\pi \left(x^2 + \pi x - \frac{5\pi^2}{6} \right) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{\pi}{2} x^2 - \frac{5\pi^2}{6} x \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{2} - \frac{5\pi^3}{6} = 0$$

dır. O halde teorem 3.3.10 gereğince $L_2[0, \pi]$ uzayında sırasıyla

$$\ell_0(y) = -y''(x)$$

$$\ell(y) = -y''(x) + \left(x^2 + \pi x - \frac{5\pi^2}{6} \right) y(x)$$

diferansiyel ifadeleri ve aynı $y'(0) = y(\pi) = 0$ sınır koşulları ile oluşturulan A ve B operatörlerinin $\mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n < \dots$ ve $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ özdeğerleri için

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \frac{1}{4} [q(0) - q(\pi)] = -\frac{\pi^2}{2}$$

formülü sağlanır.

4. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında $D(A) \subset L_2[0, \pi]$ uzayının belirli koşulları sağlayan bir lineer manifoldu olmak üzere $D(A)$ dan $L_2[0, \pi]$ ye kendine eş

$$(Ay)(x) = -y''(x)$$

ve

$$(By)(x) = -y''(x) + q(x)y(x)$$

operatörlerinin bazı spektral özellikleri incelenmiştir. Ayrıca $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ sırasıyla A ve B operatörlerinin özdeğerleri olmak üzere bu operatörlerin özdeğerlerinin $\lambda_n - \mu_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) farkından oluşan $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n)$ serisinin toplamı için bir formülün sağlandığı gösterilmiştir. Burada $q(x)$ $[0, \pi]$ aralığında 2. mertebeden sürekli türeve sahip olan reel değerli bir fonksiyondur.

KAYNAKLAR

- Adıgüzelov, E. E., Avcı, H. ve Gül, E., (2001), “The Trace Formula for Sturm-Liouville Operator with Operator Coefficient”, J. Math. Phys., 42 (6): 1611-1624.
- Adıgüzelov, E. E., Baykal, O. ve Bayramov, A., (2001), “On the Spectrum and Regularized Trace of the Sturm-Liouville Problem with Spectral Parameter on the Boundary Condition and with the Operator Coefficient”, International Journal of Differential Equations and Applications, 2 (3): 317-333.
- Adıgüzelov, E. E., Bakşi, Ö. ve Baykal, O., (2004), “On a Regularized Trace of a Differential Operator with Bounded Operator Coefficient”, International Math. Journal, 5 (3): 273-286.
- Adıgüzelov, E. E. ve Bakşi, Ö., (2004), “On the Regularized Trace of the Differential Operator Equation Given in a Finite Interval”, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 1: 47-55.
- Almamedov, M. S., Bayramoğlu, M. ve Katanova, V. I., (1991), “Çift Mertebeden Sınırsız Operatör Katsayılı Bir Diferansiyel Denklem için İz Formülleri”, Dokl. AN SSSR, 317 (3): 521-525 (R)*.
- Bakşi, Ö., (1999), Sınırsız Operatör Katsayılı Sturm-Liouville Denkleminin İz Formülü, Doktora Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Bayramoğlu, M., (1987), “Sınırsız Operatör Katsayılı Diferansiyel Denklemin Düzenli İzi Üzerine”, Spectral Theory and Its Applications, Bakü, 7: 15-40.
- Bayramoğlu, M. ve Adıgüzelov, E. E., (1997), “On a Regularized Trace Formula for the Sturm-Liouville Operator with a Bounded Operator Coefficient and with a Singularity”, Differential Equations, 32 (1996), No: 12, 1581-1585.
- Dikiy, L. A., (1953), “Gelfand-Levitan’ın Bir Formülü Hakkında”, Uspeki Matem. Nauk, 8 (2): 119-123 (R).
- Dikiy, L. A., (1955), “Sonlu Aralıkta Verilmiş Bir Adi Diferansiyel Denklemin Dzeta-Fonksiyonu”, İzv. AN SSSR, ser Matem., 19 (4): 187-200 (R).
- Dikiy, L. A., (1958), “Sturm-Liouville Diferansiyel Operatörleri için İz Formülleri”, Uspeki Matem. Nauk, 13 (3): 111-143 (R).
- Dunford, N. ve Schwartz, J. T., (1957), Linear Operators – Part I: General Theory, Interscience Publishers, Inc., New York.
- Gasimov, M. G. ve Levitan, B. M., (1963), “İki Singüler Sturm-Liouville Operatörünün Özdeğerlerinin Farklarının Toplamı Hakkında”, Dokl. AN SSSR, 151 (5): 1014-1017 (R).
- Gelfand, I. M. ve Levitan, B. M., (1953), “İkinci Mertebeden Bir Diferansiyel Operatörün Özdeğerleri için Bir Formül Hakkında”, Dokl. AN SSSR, 88 (4): 593-596 (R).
- Gelfand, I. M., (1956), “İkinci Mertebeden Bir Diferansiyel Operatörün Özdeğerleri için Formüller”, Uspeki Matem. Nauk, 11: 191-198 (R).

* : R, kaynağın Rusça olduğunu göstermektedir.

- Gohberg, I. C. ve Krein, M. G., (1969), Introduction to the Theory of Linear Non-Self Adjoint Operators, Translation of Mathematical Monographs, Vol. 18, AMS, Providence, R. I.
- Halilova, R. Z., (1976), “Sturm-Liouville Operatör Denkleminin İzinin Düzenlenmesi Hakkında”, Funks. Aaliz, Teoriya Funktsii i ik Pril Mahaçkala, No:3, 1. Bölüm, 154-161 (R).
- Levitan, B. M. ve Sargsjan, I. S., (1991), Sturm-Liouville and Dirac Operators (Çev. O. Efimov), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Lidskiy, V. B. ve Sadovniçiy, V. A., (1967), “Bir Sınıf Tam Fonksiyonların Sıfırlarının Düzenli Toplamı”, Dokl. AN SSSR, 176 (2): 259-262 (R).
- Lysternik, L. A. ve Sobolev, V. I., (1955), Elements of Functional Analysis, Frederick Ungar Publishing Co., New York.
- Maksudov, F. G., Bayramoğlu, M. ve Adıgüzelov, E. E., (1984), “On a Regularized Trace of the Sturm-Liouville Operator on a Finite Interval with the Unbounded Operator Coefficient”, Dokl. AN SSSR, English Translation Soviet Math., Dokl, 30, No:1, 169-173.
- Maksudov, F. G., Bayramoğlu, M. ve Adıgüzelov, E. E., (1993), “On Asymptotics of Spectrum and Trace of High Order Differential Operator Coefficients”, Doğa- Tr. J. of Mathematics, 17: 113-128, © TÜBİTAK.
- Marchenko, V. A., (1977), “Operatory Shturma-Liuvillya i ikh Prilozheniya (Sturm-Liouville Operators and Their Applications)”, Akademija Nauk Ukrainskoi SSR. Fiziko-Tehnicoskii Institut Nizkih Temperatur. Kiev: “Naukova Dumka”. 331 p. R 3.30 (1977). Zbl 0399.34022.
- Riesz, F. ve Sz.-Nagy, B., (1965), Functional Analysis (Çev., L. F. Baron), Frederick Ungar Publishing Co., New York.
- Sadovniçiy, V. A., (1967), “Adi Diferansiyel Operatörler için İz Formülleri”, Matem. Zametki, 1 (2): 179-188 (R).
- Sadovniçiy, V. A., (1974), “Diferansiyel Operatörlerin Dzeta-Fonksiyonu ve Özdeğerleri”, Differens. Uravneniya, 10 (7): 1276-1285 (R).
- Smirnov, V. I., (1964), A Course of Higher Mathematics (Çev., D. E. Brown), Vol. 5, Pergamon Press, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	17.05.1983	
Doğum Yeri	İstanbul	
Lise	1998-2001	Bakırköy Hasan Polatkan Lisesi (Y.D.A)
Lisans	2001-2005	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2005-Devam ediyor.	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı