



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

düzlemsel homotetik hareketler alt..

Yüksek Lisans Tezi

serdal şahin

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÜZLEMSEL HOMOTETİK HAREKETLER ALTINDA
YÜKSEK MERTEBEDEN İVMELER VE POLLER**

1181

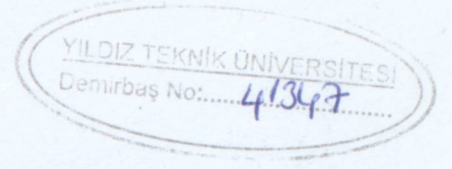
Serdal ŞAHİN

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Salim YÜCE

İSTANBUL, 2009



**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÜZLEMSEL HOMOTETİK HAREKETLER ALTINDA
YÜKSEK MERTEBEDEN İVMELER VE POLLER**

Serdal ŞAHİN

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Salim YÜCE

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU

Prof. Dr. Ziya SOYUÇOK

İSTANBUL, 2009

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1 Afın Uzay ve İzometri.....	2
2.2 1- Parametrelî Düzlemsel Hareket	5
Hızlar ve Hızların Terkibi	8
Dönme Polü ve Pol Eğrileri	9
İvmeler ve İvmelerin Terkibi	12
2.3 Düzlemsel Hareketlerin Kompleks Sayılarla İfadesi	16
Hızlar ve Hızların Terkibi	17
Dönme Polü ve Pol Eğrileri	18
İvmeler ve İvmelerin Terkibi	22
2.4 Yüksek Mertebeden İvmeler ve İvme Polleri	26
Parametre Olarak Dönme Açısı	32
2.5 1-Parametrelî Düzlemsel Homotetik Hareket	34
Hızlar ve Hızların Terkibi	35
Pol Noktaları ve Pol Eğrileri	36
İvmeler ve İvmelerin Terkibi	40
2.6 Kompleks Düzlemde 1-Parametrelî Homotetik Hareket	42
Hızlar ve Hızların Terkibi	43
Pol Noktaları ve Pol Eğrileri	45
İvmeler ve İvmelerin Terkibi	50
3. BULGULAR.....	53
3.1 Kompleks Düzlemde Bir Parametrelî Homotetik Hareketler Altında Yüksek Mertebeden İvmeler ve Poller.....	53
Yüksek Mertebeden Poller.....	56
3.2 Parametre Olarak Dönme Açısı	62
4. SONUÇ	64
KAYNAKLAR	65
ÖZGEÇMİŞ	66

ÖNSÖZ

Kinematik; kuvvet ve kütle kavramlarının hiç rol oynamadığı mekaniğin bir alt dalıdır. Bir diğer ifadeyle, kinematik sadece bir nokta veya bir sistemin (cismin) zamana bağlı meydana getirdiği yer değiştirmeleri inceler. Bu tezde düzlemsel kinematığın özellikle geometriyi ilgilendiren kısmını inceleyeceğiz ve elde edilen verilerin geometrik sonuçlarını vereceğiz.

Bu çalışmada tamamen düzlemsel kinematik ele alınacaktır. Yani bir düzlem parçasının düzlemsel bir yüzey üzerindeki hareketini inceleyeceğiz. Ayrıca kompleks sayılar yardımıyla düzlemsel kinematik ele alınacaktır.

Bu çalışmanın hazırlanmasında hiçbir yardımı benden esirgemeyen çok değerli Saygıdeğer Hocam Sayın **Doç. Dr. Salim YÜCE**' ye en içten duygularıyla sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2009

Serdal ŞAHİN

ÖZET

DÜZLEMSEL HOMOTETİK HAREKETLER ALTINDA YÜKSEK MERTEBEDEN İVMELER VE POLLER

Serdal ŞAHİN

Matematik, Yüksek Lisans Tezi

Bu tezde, kompleks düzlemde 1-parametrelili homotetik hareketler altında yüksek mertebeden hız ve ivmeler ile yüksek mertebeden poller incelenmiştir.

Ayrıca, özel olarak hareketin “ t ” parametresi yerine hareketin dönme açısı alınması durumunda yüksek mertebeden hız ve poller yeniden düzenlenmiştir.

Hareketin “ h ” homotetik oranı $h \equiv 1$ olması durumunda ise (Müller, 1956, 1963) tarafından verilen sonuçlar özel hal olarak elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Homotetik hareket, Relatif hız, Mutlak hız, Sürüklenme hızı, Pol noktası, Pol eğrileri, Açısal hız, Yüksek mertebeden hız ve ivme.

JÜRİ:

1. Doç. Dr. Salim YÜCE
2. Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU
3. Prof. Dr. Ziya SOYUÇOK

Kabul Tarihi: 02.07.2009

Sayfa Sayısı: 66

ABSTRACT

HIGH-ORDER ACCELERATIONS AND POLES ON THE 1-PARAMETER PLANAR HOMOTHETIC MOTIONS

Serdal ŞAHİN

Mathematics, M.S. Thesis

In this work, high ordered velocities, accelerations and poles are analyzed under the 1-parameter homothetic motions on the complex plane.

Also, particularly high ordered velocities and accelerations are presented by taking the angle of the rotation instead of the “ t ” parameter of the motion.

In the case of the homothetic rate $h \equiv 1$, same results, which were given by (Müller, 1956, 1963) are obtained.

Keywords: Homothetic motions, Relative velocity, Absolute velocity, Sliding velocity, Pole point, Pole curves, Angular velocity, High order velocity and acceleration.

JURY:

1. Doç. Dr. Salim YÜCE
2. Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU
3. Prof. Dr. Ziya SOYUÇOK

Date Of Acceptance: 02.07.2009

Number Of Pages: 66

1. GİRİŞ

Öklid düzleminde 1-parametrelî hareketler altında hızlar ve ivmeler ile ilgili bağıntı ve sonuçlar ile kompleks düzlemde 1-parametrelî hareketler altında hız ve ivmeler ve aynı zamanda kompleks düzlemde 1-parametrelî hareketler altında yüksek mertebeden ivmeler ve ivme polleri; (Müller, 1956, 1963) tarafından incelenmiştir.

Öklid düzleminde 1-parametrelî homotetik hareketler altında hızlar ve ivmeler ile ilgili bağıntı ve sonuçlar (Tutar ve Kuruoğlu, 1999) tarafından elde edilmiş ve h homotetik oranı " $h \equiv 1$ " olması durumunda (Müller, 1956, 1963) tarafından verilen sonuçlar özel bir durum olarak elde edilmiştir. Aynı şekilde kompleks düzlemde 1-parametrelî homotetik hareketlerde hız ve ivmeler ise (Kuruoğlu vd., 2001) tarafından verilmiş ve homotetik oranın " $h \equiv 1$ " olması durumunda ise (Müller, 1956, 1963) tarafından verilen sonuçlar özel bir durum olarak bulunmuştur.

Bu çalışmada ise kompleks düzlemde 1-parametrelî homotetik hareketler altında yüksek mertebeden ivmeler ve ivme polleri için genel bir ifade bulunmuş ve " $h \equiv 1$ " olması durumunda (Müller, 1956, 1963) tarafından verilen sonuçlar elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin orijinal kısmında kullanacağımız bazı temel bilgiler verilecektir.

2.1 Afin Uzay ve İzometri

2.1.1. Tanım

$A \neq \emptyset$ bir cümle ve V ; K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$f: A \times A \rightarrow V$$

$$(P, Q) \rightarrow f(P, Q)$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleşen bir afin **Afin Uzay** denir.

$$i. \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$ii. \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha \text{ olacak şekilde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır.}$$

2.1.2. Tanım

V n-boyutlu reel vektör uzayı ve A da V ile birleşen bir afin uzay olsun. Eğer V bir iç-çarpım uzayı ise A ya **Öklid Uzay** denir ve E^n ile gösterilir.

2.1.3. Tanım

K cismi üzerinde iki vektör uzayı V_1 ve V_2 olsun. V_1 ve V_2 ile birleşen afin uzaylar A_1 ve A_2 olmak üzere $f: A_1 \rightarrow A_2$ dönüşümü $P, Q \in A_1$ için

$$\psi_p: V_1 \rightarrow V_2$$

$$PQ \rightarrow \psi_p(PQ) = f(P)f(Q).$$

şeklinde tanımlansın. Burada ψ_p dönüşümüne f ile birleşen dönüşüm adı verilir. Eğer ψ_p dönüşümü lineer ise f ye bir **Afin Dönüşüm** denir.

2.1.4. Tanım

E_1^n ve E_2^n , sırasıyla V_1 ve V_2 n -boyutlu iç-çarpım uzayları ile birleşen birer Öklid uzayı olsun. Bir

$$f: E_1^n \rightarrow E_2^n$$

afin dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in V_1$ için

$$\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

olacak şekilde bir

$$\psi: V_1 \rightarrow V_2$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa f ye bir **izometri** denir.

2.1.5. Tanım

f , n -boyutlu E^n Öklid uzayı üzerinde bir izometri olsun. E^n deki bir dik koordinat sistemine göre f nin matrisel ifadesi; $A \in O(n)$, (yani $AA^T = A^T A = I_n$, $\det A = \pm 1$)

ve $C \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} x' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

formundadır. f ye E^n de bir **hareket** adı verilir. Eğer, $\det A = 1$ ise f hareketine **direkt hareket**, $\det A = -1$ ise **karşıt hareket** denir.

2.1.6. Tanım

E^n , n -boyutlu Öklid uzayının bir f izometrisi için $f(O) = O$ olacak şekilde bir $O \in E^n$ noktası varsa f ye O noktası etrafında E^n nin bir **dönmesi** adı verilir. Eğer hareket direkt hareket ise f ye **direkt dönme**, karşıt hareket ise **karşıt dönme** denir.

E^n de başlangıç noktası O olan bir dik koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. $f: E^n \rightarrow E^n$ izometrisi O noktası etrafındaki bir dönme ise f nin bu dik koordinat sistemine göre ifadesi

$$\begin{bmatrix} x' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya,

$$x' = Ax$$

şeklindedir. Burada $A \in O(n)$ ve $x, x' \in \mathbb{R}^n$ dir.

2.1.7. Tanım

E^n , n -boyutlu Öklid uzayının bir f izometrisi ve $\forall X \in E^n$ için $f(X) = X + t$ olacak şekilde bir tek $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in E^n$ noktası varsa f ye E^n in t ile belirtilen bir **ötelemesi** denir.

E^n de başlangıç noktası O olan bir dik koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. $f: E^n \rightarrow E^n$ izometrisi $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ noktası ile belli olan bir öteleme olmak üzere, f nin dik koordinat sistemine göre ifadesi

$$\begin{bmatrix} x' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$x' = x + t$$

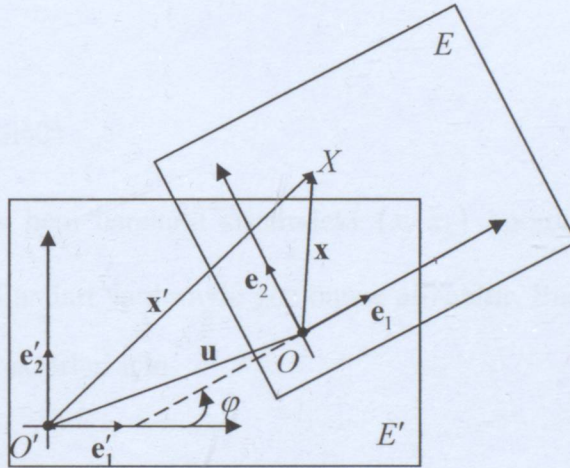
dir.

2.2 1- Parametrel Düzlemsel Hareket

$E = E' = E^2$ Öklid düzlemlerinde sırasıyla $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ve $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ koordinat sistemlerini tespit edelim. Eğer $t \in I \subset \mathbb{R}$ için,

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2(t)$$

ise bu takdirde $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ koordinat sisteminin, $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ koordinat sistemine göre hareket ettiği kabul edilir. Bundan dolayı $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ koordinat sistemine hareketli koordinat sistemi, $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ koordinat sistemine ise sabit koordinat sistemi denir. Dolayısıyla E düzlemi, E' düzlemi üzerinde hareket ediyor kabul edilir. $\mathbf{e}_1$ ile $\mathbf{e}'_1$ arasındaki açı φ olmak üzere φ ye **dönme açısı** denir. $\mathbf{OO}' = \mathbf{u}$ hareketin **öteleme vektörü** olmak üzere:



Şekil-1

$$\mathbf{OO}' = \mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 \quad (2.2.1)$$

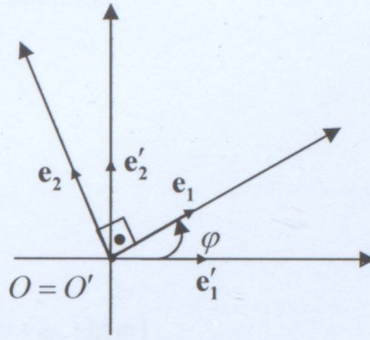
yazılabilir. Eğer,

$$u_1 = u_1(t)$$

$$u_2 = u_2(t)$$

$$\varphi = \varphi(t)$$

şeklinde reel bir t parametresinin sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonları iseler, E nin E' ne göre hareketine 1-parametrel düzlemsel hareket denir ve $B = E / E'$ ile gösterilir. Buradaki “ t ” parametresi genel olarak ‘**zaman**’ parametresi olarak alınır.



Şekil-2

$O = O'$ olduğu zaman, $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}_2$ vektörleri, $\mathbf{e}'_1$ ve $\mathbf{e}'_2$ doğrultularında bileşenlerine ayrılabilir ve buradan

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \cos \varphi \mathbf{e}'_1 + \sin \varphi \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_2 &= -\sin \varphi \mathbf{e}'_1 + \cos \varphi \mathbf{e}'_2\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

eşitlikleri elde edilir, (şekil-2).

Düzlemin bir X noktası hem hareketli sistemdeki (x_1, x_2) koordinatları ve hem de sabit sistemdeki (x'_1, x'_2) koordinatları yardımıyla göz önüne alınabilir. Buna göre her iki sistemde, X noktasına ait konum vektörleri için

$$\mathbf{x} = \mathbf{O}\mathbf{X} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{O}'\mathbf{X} = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2$$

yazılabilir. Böylece

$$\mathbf{O}'\mathbf{X} = \mathbf{O}'\mathbf{O} + \mathbf{O}\mathbf{X} = -\mathbf{O}\mathbf{O}' + \mathbf{O}\mathbf{X}$$

veya

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{u} = (x_1 - u_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 - u_2)\mathbf{e}_2\tag{2.2.3}$$

vektörel denklemi elde edilir. Bu denkleme 1-parametrelili düzlemsel hareketin **vektörel denklemi** denir. Buradan,

$$x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 = (x_1 - u_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 - u_2)\mathbf{e}_2$$

eşitliğinin $\mathbf{e}_1'$ ve $\mathbf{e}_2'$ ile iç-çarpımı sonucunda,

$$\begin{cases} x_1' = (x_1 - u_1) \cos \varphi - (x_2 - u_2) \sin \varphi \\ x_2' = (x_1 - u_1) \sin \varphi + (x_2 - u_2) \cos \varphi \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} x_1' = (x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi) + (-u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi) \\ x_2' = (x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi) + (-u_1 \sin \varphi - u_2 \cos \varphi) \end{cases} \quad (2.2.4)$$

bulunur. Bu ifadeye $B = E / E'$ hareketinin kartezyen denklemi denir. Bu son eşitlik

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

veya

$$X' = AX + C$$

şeklinde matris formunda da gösterilebilir.

Türev Denklemleri

Hareket esnasında bir $X \in E$ noktasının her iki E ve E' -düzlemlerine göre hızlarını araştırmak için önce hareketimizin türev denklemlerini teşkil edeceğiz. Bunun için (2.2.2) denklemlerinin, $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ vektörlerini sabit kabul ederek, t zamanına göre türev alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_1'}{dt} &= \dot{\mathbf{e}}_1 = -\dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_1' + \dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{e}_2' = \dot{\varphi} (-\sin \varphi \mathbf{e}_1' + \cos \varphi \mathbf{e}_2') \\ \frac{d\mathbf{e}_2'}{dt} &= \dot{\mathbf{e}}_2 = -\dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{e}_1' - \dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_2' = -\dot{\varphi} (\cos \varphi \mathbf{e}_1' + \sin \varphi \mathbf{e}_2') \end{aligned}$$

bulunur. Buradan kısaca

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \dot{\varphi} \mathbf{e}_2, \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_1 \quad (2.2.5)$$

yazılabilir.

Benzer şekilde (2.2.1) denkleminin t ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}} = \dot{u}_1 \mathbf{e}_1 + u_1 \dot{\mathbf{e}}_2 + \dot{u}_2 \mathbf{e}_2 + u_2 \dot{\mathbf{e}}_2$$

elde edilir. $\dot{\mathbf{e}}_1$ ve $\dot{\mathbf{e}}_2$ nin (2.2.5) deki değerleri burada yerine yazılırsa

$$\dot{\mathbf{u}} = (\dot{u}_1 - u_2 \dot{\phi}) \mathbf{e}_1 + (\dot{u}_2 + u_1 \dot{\phi}) \mathbf{e}_2 \quad (2.2.6)$$

bulunur. (2.2.5) ve (2.2.6) denklemlerine $B = E / E'$ hareketinin **türev denklemleri** denir.

Hızlar ve Hızların Terkibi

E -düzlemi E' -düzlemine göre 1-parametrelili hareket yaparken, bir X noktası da hareketli E -düzlemindeki yerini t zamanı ile değiştirsin. Bu durumda, bu iki hareket esnasında noktanın hızlarının nasıl terkip edildiğini araştıracacağız.

2.2.1. Tanım

X noktasının E -düzleminde hareket ederken sahip olduğu hız vektörüne, yani X noktası E -deki yörüngesini çizerken sahip olduğu vektörel hıza X noktasının **relatif (izafi) hızı** denir ve $\mathbf{V}_r$ ile gösterilir. Bu hız

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$$

denkleminde $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}_2$ yi sabit tutup türev alarak

$$\mathbf{V}_r = \dot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{e}_2 \quad (2.2.7)$$

şeklinde bulunur. Eğer X noktası E -de sabit ise $\mathbf{V}_r$ relatif hızı sıfırdır.

2.2.2. Tanım

X noktasının E' -düzlemine göre sahip olduğu hız vektörüne X noktasının **mutlak hızı** denir ve $\mathbf{V}_a$ ile gösterilir. (2.2.3) denkleminin t ye göre türevini alırsak $\mathbf{V}_a$ için aşağıdaki ifade bulunur:

$$\mathbf{V}_a = (\dot{x}_1 - \dot{u}_1) \mathbf{e}_1 + (x_1 - u_1) \dot{\mathbf{e}}_1 + (\dot{x}_2 - \dot{u}_2) \mathbf{e}_2 + (x_2 - u_2) \dot{\mathbf{e}}_2.$$

Burada $\dot{\mathbf{e}}_1$ ve $\dot{\mathbf{e}}_2$ nin (2.2.5) deki değerleri dikkate alınır

$$\mathbf{V}_a = \{-\dot{u}_1 + (u_2 - x_2) \dot{\phi}\} \mathbf{e}_1 + \{-\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1) \dot{\phi}\} \mathbf{e}_2 + \dot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{e}_2$$

veya

$$\mathbf{V}_a = \{-\dot{u}_1 + (u_2 - x_2) \dot{\phi}\} \mathbf{e}_1 + \{-\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1) \dot{\phi}\} \mathbf{e}_2 + \mathbf{V}_r$$

elde edilir. Burada

$$\mathbf{V}_f = \{-\dot{u}_1 + (u_2 - x_2)\dot{\phi}\}\mathbf{e}_1 + \{-\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1)\dot{\phi}\}\mathbf{e}_2 \quad (2.2.8)$$

vektörüne X noktasının **sürüklenme hız vektörü** denir.

O halde hızların terkbine ait şu teorem verilebilir:

2.2.1. Teorem

$B = E / E'$; 1-parametrel düzlemsel hareketi esnasında eğer $X \in E$ noktası her iki sisteme göre hareketli ise $X \in E$ noktasının hız vektörleri arasında

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_f + \mathbf{V}_r \quad (2.2.9)$$

bağıntısı vardır.

2.2.3. Tanım

Dönme açısının $\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$ türevine B hareketinin **açısal hızı** denir.

Bundan sonra sırf öteleme hareketinden kaçınmak için $\dot{\phi} \neq 0$ kabul edeceğiz.

Dönme Polü ve Pol Eğrileri

Şimdi B hareketinin her t anında sürüklenme hızı sıfır olan noktaları araştıralım:

Böyle noktalar, t anında, yalnız hareketli E -düzleminde değil aynı zamanda sabit E' -düzleminde de sabit bulunmak zorundadır. O halde

$$\mathbf{V}_f = 0$$

olacağından (2.2.8) denkleminde

$$-\dot{u}_1 + (u_2 - x_2)\dot{\phi} = 0 \quad , \quad -\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1)\dot{\phi} = 0$$

elde edilir. $\dot{\phi} \neq 0$ olduğuna göre bu iki denklem her zaman tek türlü çözülebilir. Bu çözümler

p_1 ve p_2 olmak üzere,

$$\begin{aligned} p_1 = x_1 = u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\phi}} &= u_1 + \frac{du_2}{d\phi} \\ p_2 = x_2 = u_2 - \frac{\dot{u}_1}{\dot{\phi}} &= u_2 - \frac{du_1}{d\phi} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

bulunur.

2.2.4. Tanım

$$\mathbf{OP} = \mathbf{p} = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2$$

yer vektörüne karşılık gelen $P = (p_1, p_2)$ noktasına $B = E/E'$ hareketinin t anındaki **pol(kutup) noktası, dönme polü veya ani dönme merkezi** denir.

Bundan dolayı şu teorem verilebilir:

2.2.2. Teorem

Açısal hızı sıfır olmayan bir 1-parametrelî düzlemsel hareket esnasında, her t anında sürüklenme hızı sıfır olan yani her iki düzlemde de sabit kalan bir tek nokta (pol noktası) vardır. $\square$

P pol noktası yardımı ile herhangi bir X noktasının $\mathbf{V}_f$ sürüklenme hızı aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

Bunun için (2.2.10) denkleminde

$$\dot{u}_1 = (u_2 - p_2) \dot{\phi} \quad , \quad \dot{u}_2 = -(u_1 - p_1) \dot{\phi}$$

ifadeleri hesaplanır ve (2.2.8) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\mathbf{V}_f = \{-(x_2 - p_2) \mathbf{e}_1 + (x_1 - p_1) \mathbf{e}_2\} \dot{\phi} \quad (2.2.11)$$

elde edilir.

X noktasının sürüklenme hızının bu son ifadesi kullanılarak aşağıdaki önemli sonuç ve teoremler verilebilir:

2.2.1. Sonuç

P polünden X noktasına giden pol ışınının

$$\mathbf{PX} = (x_1 - p_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 - p_2)\mathbf{e}_2$$

vektörü $\mathbf{V}_f$ ye diktir; çünkü

$$\langle \mathbf{PX}, \mathbf{V}_f \rangle = -(x_2 - p_2)(x_1 - p_1) + (x_1 - p_1)(x_2 - p_2) = 0$$

dır. Yani pol ışını, hareketin her t anında sürüklenme hızına diktir.

2.2.2. Sonuç

$\mathbf{V}_f$ vektörünün uzunluğu için şu bağıntı vardır:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}_f\| &= \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2} \dot{\phi} \\ &= \|\mathbf{PX}\| \dot{\phi} \end{aligned}$$

2.2.3. Teorem

$B = E / E'$; 1-parametrelî düzlemsel hareket esnasında hareketli E -düzleminin her X noktası, t anında, P (pol noktası) merkezli ve $\dot{\phi}$ açısal hızlı bir anî dönme hareketi yapar.

2.2.3. Teorem

$B = E / E'$; 1-parametrelî düzlemsel hareket t anında, hareketli E -düzleminin P anî dönme polü etrafında $\dot{\phi}$ açısal hızı ile dönmesinden oluşur.

2.2.4. Teorem

$B = E / E'$ 1-parametrelî düzlemsel hareket esnasında E -düzleminin X noktaları, E' -düzleminde yörünge normalleri, P dönme polünden geçen, yörüngeler çizerler.

2.2.5. Tanım

Her t anında bir P dönme polü olacağından B hareketi esnasında P pol noktası her iki E ve E' -düzlemlerinde çeşitli konumlarda bulunur. P noktasının hareketli E -düzlemindeki yeri genel olarak bir eğridir. Bu eğriye **hareketli pol eğrisi** denir ve (P) ile gösterilir. P noktasının E' -düzlemindeki geometrik yerine ise **sabit pol eğrisi** denir ve (P') ile gösterilir. $\square$

Şimdi pol hızlarını, yani (P) ve (P') pol eğrilerini çizen P noktasının hızlarının araştırılalım:

Dönme polünün $V_r = 0$ olduğu noktalar olduğunu daha önce söylemiştik. Buna göre (2.2.1) teoreminden, $X = P$ noktası için

$$V_a = V_r$$

bulunur.

Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir:

2.2.5. Teorem

E' -sabit ve E -hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen P dönme polünün her t anındaki hızları birbirinin aynısıdır. $\square$

Bu teoremden dolayı, her t anında (P) ve (P') pol eğrileri P ani dönme polünde birbirine teğettir ve

$$ds' = |V_a| dt = |V_r| dt = ds$$

olduğundan P dönme polü dt zaman aralığında her iki pol eğrisi üzerinde eşit uzaklıklar kat eder.

Böylece aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

2.2.6. Teorem

1- parametrelili düzlemsel $B = E / E'$ hareketinde E -düzleminin (P) hareketli pol eğrisi E' -sabit düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

İvmeler ve İvmelerin Terkibi

$B = E / E'$; 1- parametrelili düzlemsel hareket esnasında X noktasının E -düzlemine göre olan ivme vektörüne **relatif ivme vektörü** denir. Bu ivme vektörü V_r relatif hızının t ye göre türevi alınarak bulunur ve b_r ile gösterilir:

$$b_r = \dot{V}_r = \ddot{x}_1 e_1 + \ddot{x}_2 e_2, \quad (2.2.12)$$

Burada $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}_2$ sabit olarak kabul edilmiştir.

X noktasının E' -düzlemine göre olan ivme vektörüne **mutlak ivme vektörü** denir ve $\mathbf{b}_a$ ile gösterilir. Ayrıca $\mathbf{V}_a$ nın t ye göre türevi alınarak,

$$\mathbf{b}_a = \dot{\mathbf{V}}_a = \left\{ -(\dot{x}_2 - \dot{p}_2)\mathbf{e}_1 - (x_2 - p_2)\dot{\mathbf{e}}_1 + (\dot{x}_1 - \dot{p}_1)\mathbf{e}_2 + (x_1 - p_1)\dot{\mathbf{e}}_2 \right\} \dot{\phi} \\ + \left\{ -(x_2 - p_2)\mathbf{e}_1 + (x_1 - p_1)\mathbf{e}_2 \right\} \ddot{\phi} + \ddot{x}_1\mathbf{e}_1 + \dot{x}_1\dot{\mathbf{e}}_1 + \ddot{x}_2\mathbf{e}_2 + \dot{x}_2\dot{\mathbf{e}}_2$$

bulunur. Burada (2.2.5) denklemindeki $\dot{\mathbf{e}}_1$ ve $\dot{\mathbf{e}}_2$ değerleri yerine yazılırsa,

$$\mathbf{b}_a = \left\{ \dot{p}_2\dot{\phi} - (x_1 - p_1)\dot{\phi}^2 - (x_2 - p_2)\ddot{\phi} \right\} \mathbf{e}_1 + \left\{ -\dot{p}_1\dot{\phi} - (x_2 - p_2)\dot{\phi}^2 + (x_1 - p_1)\ddot{\phi} \right\} \mathbf{e}_2 \\ + 2\dot{\phi} \left\{ -\dot{x}_2\mathbf{e}_1 + \dot{x}_1\mathbf{e}_2 \right\} + \mathbf{b}_r \quad (2.2.13)$$

elde edilir. (2.2.13) denklemindeki

$$\mathbf{b}_r = \left\{ \dot{p}_2\dot{\phi} - (x_1 - p_1)\dot{\phi}^2 - (x_2 - p_2)\ddot{\phi} \right\} \mathbf{e}_1 + \left\{ -\dot{p}_1\dot{\phi} - (x_2 - p_2)\dot{\phi}^2 + (x_1 - p_1)\ddot{\phi} \right\} \mathbf{e}_2 \quad (2.2.14)$$

vektörüne X noktasının **sürüklenme ivme vektörü** ve

$$\mathbf{b}_c = 2\dot{\phi} \left\{ -\dot{x}_2\mathbf{e}_1 + \dot{x}_1\mathbf{e}_2 \right\} \quad (2.2.15)$$

vektörüne de **Coriolis-ivme vektörü** denir.

Buna göre ivmelerin terkibi şu teoremle ifade edilebilir:

2.2.7. Teorem

$B = E / E'$ 1- parametrelili düzlemsel hareketi esnasında bir noktanın mutlak ivme vektörü, sürüklenme ivme vektörü ile Coriolis-ivme vektörü ve relatif ivme vektörünün toplamına eşittir. Buna göre

$$\mathbf{b}_a = \mathbf{b}_r + \mathbf{b}_c + \mathbf{b}_r \quad (2.2.16)$$

dir.

2.2.3. Sonuç

$\mathbf{b}_c$ Coriolis-ivmesi ve $\mathbf{V}_r$ relatif hızının iç-çarpımı

$$\langle \mathbf{b}_c, \mathbf{V}_r \rangle = 2\dot{\phi}(-\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_1\dot{x}_2) = 0$$

olduğundan $\mathbf{b}_c$ Coriolis-ivmesi, $\mathbf{V}_r$ relatif hızına diktir. $\square$

E -de sabit olmayan bir X noktasının Coriolis-ivmesinin sıfır olması ancak ve ancak $\dot{\phi} = 0$ olmasıyla sağlanır. $\dot{\phi} = 0$ ise B hareketi bir kaymadan (ötelemeyen) ibarettir. Böylece

$\mathbf{b}_c = 0$ ise ivmeler arasında,

$$\mathbf{b}_a = \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_r$$

bağıntısı bulunur. Yani, ancak bir kayma hareketinde ivmeler hızlar gibi terkip edilirler.

Şimdi bir B hareketinde, herhangi bir t anında sürüklenme ivmesi sıfır olan noktaları araştıralım:

$\mathbf{b}_f = 0$ için

$$\begin{aligned} (x_1 - p_1)\dot{\phi}^2 + (x_2 - p_2)\ddot{\phi} &= \dot{p}_2\dot{\phi} \\ (x_1 - p_1)\ddot{\phi} - (x_2 - p_2)\dot{\phi}^2 &= \dot{p}_1\dot{\phi} \end{aligned}$$

elde edilir. $\dot{\phi} \neq 0$ ise $(x_1 - p_1)$ ve $(x_2 - p_2)$ ye göre homojen olmayan denklem sisteminin Δ katsayılar determinanı

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dot{\phi}^2 & \ddot{\phi} \\ \ddot{\phi} & -\dot{\phi}^2 \end{vmatrix} = -(\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2) \neq 0$$

dır. Buna göre yukarıdaki sistemin Cramer yöntemi ile bir tek çözümü bulunur.

2.2.6. Tanım

$\dot{\phi} \neq 0$ olmak üzere, herhangi bir t anında sürüklenme ivmesi sıfır olan bir tek nokta vardır.

Bu noktaya **ivme polü** denir. $\square$

İvme polünün koordinatları

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + \frac{\dot{\phi}(\dot{p}_2\dot{\phi}^2 + \dot{p}_1\ddot{\phi})}{\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2} \\ x_2 &= p_2 - \frac{\dot{\phi}(\dot{p}_1\dot{\phi}^2 + \dot{p}_2\ddot{\phi})}{\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2} \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

şeklinde bulunur, Döldül, M.(2000).

2.3 Düzlemsel Hareketlerin Kompleks Sayılarla İfadesi

E ve E' ($E = E' = E^2$) sırasıyla hareketli ve sabit düzlemler olsun. $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ve $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ de E ve E' -düzlemlerinde tespit edilen koordinat sistemleri olsun. Bir X noktasının her iki sistemdeki koordinatlarını sırasıyla,

$$x = x_1 + ix_2, \quad x' = x'_1 + ix'_2$$

kompleks sayıları ile ve $\mathbf{O'O}$ vektörünü de sabit sistemde

$$\mathbf{u}' = u'_1 + iu'_2$$

kompleks sayısı ile gösterelim. Buna göre,

$$-\mathbf{u} = -u_1 - iu_2$$

dir. O halde $+\mathbf{u}$, $\mathbf{O'O}$ vektörüne karşılık olan vektördür. (2.2.4) denkleminde x'_1 ve x'_2 ifadeleri, $\mathbf{x}' = x'_1 + ix'_2$ de yerine yazılırsa

$$\mathbf{x}' = (x_1 + ix_2)(\cos \varphi + i \sin \varphi) - (u_1 + iu_2)(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

veya

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}e^{i\varphi} - \mathbf{u}e^{i\varphi}$$

elde edilir.

$$\mathbf{u}' = -\mathbf{u}e^{i\varphi} \tag{2.3.1}$$

olmak üzere

$$\mathbf{x}' = \mathbf{u}' + \mathbf{x}e^{i\varphi} \tag{2.3.2}$$

yazılabilir. Böylece $\varphi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'$ bir t (zaman) reel parametresine bağlı olmak üzere, (2.3.2) denklemi ile tanımlanan harekete kompleks düzlemde **1-parametrelî düzlemsel hareket** denir ve $B = E/E'$ ile gösterilir.

Hızlar ve Hızların Terkibi

E -düzlemi, E' -düzlemine göre 1-parametrelili hareket yaparken, bir X noktası da hareketli E -düzlemindeki yerini t zamanı ile değiştirsin. Böylece iki hareketi bir araya getirerek hızların nasıl terkip edileceğini araştıracağız:

$X \in E$ noktasının hareketli sistemine göre $\mathbf{X}_r$ relatif hızı;

$$\mathbf{X}_r = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} \quad (2.3.3)$$

dir.

X noktasının E -düzleminde sahip olduğu $\mathbf{X}_r$ relatif hız vektörünün sabit sisteme göre ifadesi için,

$$\mathbf{X}'_r = \mathbf{X}_r e^{i\varphi} = \dot{\mathbf{x}} e^{i\varphi} \quad (2.3.4)$$

yazılabilir. X noktasının E' düzleminde sahip olduğu $\mathbf{X}'_a$ mutlak hızı, sabit sistemine göre;

$$\mathbf{X}'_a = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \dot{\mathbf{x}}' = \dot{\mathbf{u}}' + i\dot{\varphi} \mathbf{x} e^{i\varphi} + \dot{\mathbf{x}} e^{i\varphi}$$

veya

$$\mathbf{X}'_a = \dot{\mathbf{u}}' + i\dot{\varphi}(\mathbf{x}' - \mathbf{u}') + \dot{\mathbf{x}} e^{i\varphi} \quad (2.3.5)$$

şeklinde bulunur. Buna göre, X noktasının $\mathbf{X}'_r$ sürüklenme hızı, sabit sistemine göre;

$$\mathbf{X}'_r = \dot{\mathbf{u}}' + i\dot{\varphi}(\mathbf{x}' - \mathbf{u}') \quad (2.3.6)$$

şeklindedir.

Şimdi, (2.3.5) ve (2.3.6) denklemleri ile verilen, düzlemsel hareket esnasında $X \in E$ noktasının E' düzleminde sahip olduğu hız vektörlerinin E hareketli düzleminde ki karşılıklarını ifade edelim:

X noktasının E -düzleminde sahip olduğu $\mathbf{X}_r$ relatif hızını (2.3.3) denkleminde vermiştik.

X noktasının hareket esnasında E' -düzleminde sahip olduğu mutlak hız vektörünün E -düzlemindeki ifadesi için

$$\mathbf{X}_a = \mathbf{X}'_a e^{-i\varphi} = \dot{\mathbf{u}}' e^{-i\varphi} + i\dot{\varphi} \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}$$

yazılabilir. $\dot{\mathbf{u}}' = -(\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi})e^{i\varphi}$ olduğundan,

$$\mathbf{X}_a = -(\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi}) + i\dot{\varphi} \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} \quad (2.3.7)$$

elde edilir. Bu durumda X noktasının $\mathbf{X}_f$ sürüklenme hızı,

$$\mathbf{X}_f = -\dot{\mathbf{u}} + i\dot{\varphi}(\mathbf{x} - \mathbf{u}) = \dot{\mathbf{u}}' e^{-i\varphi} + i\dot{\varphi} \mathbf{x} \quad (2.3.8)$$

şeklinde ifade edilir.

(2.3.4), (2.3.5), (2.3.6) ve (2.3.3), (2.3.7), (2.3.8) ifadelerinden aşağıdaki teorem verilebilir:

2.3.1. Teorem

Kompleks düzlemde, $B = E / E'$ 1-parametrelili düzlemsel hareket esnasında bir X noktasının mutlak hızı, sürüklenme hızı ile relatif hızının toplamına eşittir, yani hızlar kanunu korunur:

$$\begin{cases} \mathbf{X}'_a = \mathbf{X}'_f + \mathbf{X}'_r \\ \text{ve} \\ \mathbf{X}_a = \mathbf{X}_f + \mathbf{X}_r \end{cases} \quad (2.3.9)$$

□

Dönme Polü ve Pol Eğrileri

Şimdi B hareketinin her t anındaki sabit düzlemde ki sürüklenme hızı sıfır olan noktaları, yani pol noktalarını araştıralım:

$$\mathbf{X}'_f = \dot{\mathbf{u}}' + i\dot{\varphi}(\mathbf{x}' - \mathbf{u}') = 0$$

olmak üzere

$$\mathbf{x}' = \mathbf{p}' = \mathbf{u}' + i \frac{\dot{\mathbf{u}}'}{\dot{\varphi}} \quad (2.3.10)$$

elde edilir. Ayrıca bu son denklemden elde edilen

$$\dot{\mathbf{u}}' = i\dot{\phi}(\mathbf{u}' - \mathbf{p}')$$

ifadeyi (2.3.6) denkleminde yerine yazarsak sürüklenme hız vektörünü pol noktası cinsinden

$$\mathbf{X}_f = i\dot{\phi}(\mathbf{x}' - \mathbf{p}') \quad (2.3.11)$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi, (2.3.10) denklemi ile verilen, düzlemsel hareket esnasında E' düzleminde ki pol noktasının ve (2.3.11) denklemi ile verilen sürüklenme hız vektörünün E hareketli düzleminde ki karşılıklarını ifade edelim:

$\mathbf{X}_f = 0$ olan noktaları araştıracağız: O halde (2.3.8) denkleminden

$$\dot{\mathbf{u}}' e^{-i\phi} + i\dot{\phi} \mathbf{x} = 0$$

olmak üzere

$$\mathbf{p} = \frac{-\dot{\mathbf{u}}'}{i\dot{\phi}} e^{-i\phi} = \mathbf{u} - i \frac{\dot{\mathbf{u}}}{\dot{\phi}} \quad (2.3.12)$$

elde edilir. Burada $\dot{\mathbf{u}}'$ nın değeri $\mathbf{p}$ cinsinden bulup (2.3.8) de yerine yazılırsa sürüklenme hızın $\mathbf{p}$ pol noktası cinsinden E -düzlemindeki ifadesi,

$$\mathbf{X}_f = i\dot{\phi}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \quad (2.3.13)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. $\square$

X noktasının sürüklenme hızının (2.3.11) ve (2.3.13) ifadelerinden aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

2.3.1. Sonuç

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{X}'_f, \mathbf{P}'\mathbf{X}' \rangle &= \langle i\dot{\phi}(\mathbf{x}' - \mathbf{p}'), (\mathbf{x}' - \mathbf{p}') \rangle \\
 &= \left\langle \left(-(x'_2 - p'_2), x'_1 - p'_1 \right), \left(x'_1 - p'_1, x'_2 - p'_2 \right) \right\rangle \dot{\phi} \\
 &= \left[-(x'_2 - p'_2)(x'_1 - p'_1) + (x'_1 - p'_1)(x'_2 - p'_2) \right] \dot{\phi} = 0.
 \end{aligned}$$

Benzer şekilde E hareketli düzleminde $\mathbf{X}_f = i\dot{\phi}(\mathbf{x} - \mathbf{p})$ sürüklenme hız vektörü ve $\mathbf{P}\mathbf{X}$ pol ışını için,

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{X}_f, \mathbf{P}\mathbf{X} \rangle &= \langle i\dot{\phi}(\mathbf{x} - \mathbf{p}), (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \rangle \\
 &= \left\langle \left(-(x_2 - p_2), x_1 - p_1 \right), \left(x_1 - p_1, x_2 - p_2 \right) \right\rangle \dot{\phi} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

olduğundan pol ışını hareketin her t anında sürüklenme hızına diktir.

2.3.2. Sonuç

$\mathbf{X}'_f$ vektörünün uzunluğu için,

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{X}'_f\| &= \sqrt{\langle \mathbf{X}'_f, \mathbf{X}'_f \rangle} \\
 &= \sqrt{\langle i\dot{\phi}(\mathbf{x}' - \mathbf{p}'), i\dot{\phi}(\mathbf{x}' - \mathbf{p}') \rangle} \\
 &= \sqrt{\left\langle \left(-(x'_2 - p'_2), x'_1 - p'_1 \right), \left(-(x'_2 - p'_2), x'_1 - p'_1 \right) \right\rangle \dot{\phi}^2} \\
 &= \sqrt{\dot{\phi}^2 \left[(x'_2 - p'_2)^2 + (x'_1 - p'_1)^2 \right]} \\
 &= \dot{\phi} \|\mathbf{P}'\mathbf{X}'\|
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, E hareketli düzlemde $\mathbf{X}_f$ sürüklenme hız vektörünün uzunluğu için;

$$\|\mathbf{X}_f\| = \sqrt{\langle \mathbf{X}_f, \mathbf{X}_f \rangle}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\langle i\dot{\phi}(\mathbf{x}-\mathbf{p}), i\dot{\phi}(\mathbf{x}-\mathbf{p}) \rangle} \\
&= \sqrt{\dot{\phi}^2 [(x_2 - p_2)^2 + (x_1 - p_1)^2]} \\
&= \dot{\phi} \|\mathbf{PX}\|
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Şimdi (P) ve (P') pol eğrilerini çizen P pol noktasının hızlarını araştıralım:

Pol noktası $\mathbf{X}_r' = 0$ ile tanımlandığından (2.3.9) eşitliğinden $X = P$ için

$$\mathbf{X}_a' = \mathbf{X}_r' = \dot{\mathbf{p}} e^{i\varphi}$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki teoremleri ispatsız verebiliriz.

2.3.1. Teorem

Sabit ve hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen P pol noktasının her t anındaki hızları birbirinin aynısıdır.

2.3.2. Teorem

Kompleks düzlemde, $B = E / E'$; 1-parametrelili düzlemsel hareket esnasında E -düzleminin (P) hareketli pol eğrisi E' -düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

İspat:

Teorem(2.3.1)' e göre her t anında (P) ve (P') pol eğrileri P pol noktasında birbirine teğettir. Ayrıca, (P) nin t_0 ve t_1 parametrelerine karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$ds = \|\mathbf{X}_r'\| dt$$

dir. (P') nün t_0 ve t_1 parametrelerine karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$ds' = \|X'_a\| dt$$

olur. P pol noktası için $X'_r = X'_a$ olduğundan

$$ds' = ds$$

bulunur. O halde (P) ve (P') pol eğrileri her t anında birbirine teğet ve aldıkları yollar aynı olduğundan (P) hareketli pol eğrisi (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

İvmeler ve İvmelerin Terkibi

Kompleks düzlemde 1-parametrelî düzlemsel hareket esnasında X noktasının relatif ivme vektörü, X noktasının E -düzlemine göre olan ivme vektörüdür ve X in E -düzlemine göre X_r vektörel hızının t zamanına göre türevi alınarak bulunur. O halde (2.3.3) denkleminde

$$b_r = \dot{X}_r = \ddot{x} \quad (2.3.14)$$

elde edilir. Bu vektör sabit koordinat sistemine göre,

$$b'_r = b_r e^{i\varphi} = \ddot{x} e^{i\varphi} \quad (2.3.15)$$

şeklinde ifade edilebilir. X noktasının mutlak ivme vektörü, X noktasının E' -düzlemine göre ivme vektörüdür. Buna göre bu ivme vektörü

$$X'_a = X'_r + X'_r = i\dot{\varphi}(x-p)e^{i\varphi} + \dot{x}e^{i\varphi}$$

mutlak hızının t ye göre türevi alınarak

$$\begin{aligned} b'_a = \dot{X}'_a &= i\ddot{\varphi}(x-p)e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}(\dot{x}-\dot{p})e^{i\varphi} - \dot{\varphi}^2(x-p)e^{i\varphi} + \ddot{x}e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}\dot{x}e^{i\varphi} \\ &= (x-p)(i\ddot{\varphi}-\dot{\varphi}^2)e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}\dot{x}e^{i\varphi} - i\dot{\varphi}\dot{p}e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}\dot{x}e^{i\varphi} + \ddot{x}e^{i\varphi} \end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitliği düzenlersek

$$b'_a = (x-p)(i\ddot{\varphi}-\dot{\varphi}^2)e^{i\varphi} - i\dot{\varphi}\dot{p}e^{i\varphi} + 2i\dot{\varphi}\dot{x}e^{i\varphi} + b'_r \quad (2.3.16)$$

elde edilir. Buradaki

$$b'_r = (x-p)(i\ddot{\varphi}-\dot{\varphi}^2)e^{i\varphi} - i\dot{\varphi}\dot{p}e^{i\varphi} \quad (2.3.17)$$

vektörüne X noktasının **sürüklenme ivme vektörü** ve

$$\mathbf{b}'_c = 2i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} \quad (2.3.18)$$

vektörüne de **Coriolis-ivme vektörü** denir.

O halde ivmelerin terkibi şu teoremle ifade edilebilir:

2.3.3. Teorem

Kompleks düzlemde, 1-parametrelî düzlemsel hareket esnasında, bir noktanın mutlak ivme vektörü; sürüklenme ivme vektörü, Coriolis-ivme vektörü ve relatif ivme vektörünün toplamına eşittir:

$$\mathbf{b}'_a = \mathbf{b}'_f + \mathbf{b}'_c + \mathbf{b}'_r. \quad (2.3.19)$$

□

(2.3.16), (2.3.17) ve (2.3.18) ile verilen ivme vektörleri hareketli sisteme göre sırasıyla

$$\mathbf{b}_a = \mathbf{b}'_a e^{-i\varphi} = (\mathbf{x} - \mathbf{p})(i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2) - i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}} + 2i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_r \quad (2.3.20)$$

$$\mathbf{b}_f = \mathbf{b}'_f e^{-i\varphi} = (\mathbf{x} - \mathbf{p})(i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2) - i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}} \quad (2.3.21)$$

$$\mathbf{b}_c = \mathbf{b}'_c e^{-i\varphi} = 2i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}} \quad (2.3.22)$$

vektörleri ile ifade edilir.

2.3.3. Sonuç

(2.3.4) ve (2.3.18) denklemleri kullanarak $\langle \mathbf{X}'_r, \mathbf{b}'_c \rangle = \langle \dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi}, 2i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} \rangle$ iç-çarpımını hesaplayalım:

$\mathbf{a} = a_1 + ia_2$, $\mathbf{b} = b_1 + ib_2$ kompleks sayıları için,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}e^{i\varphi}, \mathbf{b}e^{i\varphi} \rangle &= \langle (a_1 + ia_2)(\cos \varphi + i \sin \varphi), (b_1 + ib_2)(\cos \varphi + i \sin \varphi) \rangle \\ &= \langle (a_1 \cos \varphi - a_2 \sin \varphi, a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi), (b_1 \cos \varphi - b_2 \sin \varphi, b_1 \sin \varphi + b_2 \cos \varphi) \rangle \end{aligned}$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2$$

olduğundan

$$\langle \mathbf{a}e^{i\varphi}, \mathbf{b}e^{i\varphi} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \quad (2.3.23)$$

bulunur.

O halde (2.3.23) denklemini kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}'_r, \mathbf{b}'_c \rangle &= \langle \dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi}, 2i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} \rangle \\ &= \langle \dot{\mathbf{x}}, 2i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}} \rangle \\ &= 2 \langle (\dot{x}_1 + i\dot{x}_2), i\dot{\varphi}(\dot{x}_1 + i\dot{x}_2) \rangle \\ &= 2 \langle (\dot{x}_1, \dot{x}_2), (-\dot{\varphi}\dot{x}_2, \dot{\varphi}\dot{x}_1) \rangle \\ &= 2(-\dot{\varphi}\dot{x}_2\dot{x}_1 + \dot{\varphi}\dot{x}_2\dot{x}_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Yani $\mathbf{b}'_c$ Coriolis-ivmesi $\mathbf{X}'_r$ relatif hızına diktir. $\square$

(2.3.19) eşitliği ile ivmelerin hızlardan farklı bir yapı ile birbirleri arasındaki ilişki verilmektedir. E düzlemindeki X noktasının Coriolis-ivmesi sıfır olduğunda ancak ivmelerde hızlardaki gibi benzer şekilde

$$\mathbf{b}'_a = \mathbf{b}'_f + \mathbf{b}'_r$$

eşitliğine sahip olurlar. Bununla ilgili şu sonuç verilebilir:

2.3.4. Sonuç

Kompleks düzlemde, E/E' 1-parametrelili düzlemsel hareket esnasında E -hareketli düzleminde hareketli X noktasının Coriolis-ivmesi sıfır ise E/E' hareketi bir kayma (öteleme) hareketidir ve bu ifadenin tersi de doğrudur.

İspat:

$$\mathbf{b}'_c = 2i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} = 0$$

olsun. Bu durumda

$$\dot{\varphi} = 0$$

elde edilir. Bu ise φ nin sabit olduğunu, dolayısıyla E/E' hareketinin bir kayma hareketi olduğunu gösterir.

Tersine, E/E' hareketi sadece bir kayma hareketi olsun. Buna göre $\varphi = \text{sabit}$ olacağından

$$\mathbf{b}'_c = 0 \text{ olacaktır.} \square$$

Şimdi de bir E/E' hareketi esnasında, herhangi bir t anında, sabit düzlemde sürüklenme ivmesinin sıfır olduğu noktaları yani ivme pollerini araştıralım:

Buna göre

$$\mathbf{b}'_r = 0$$

olmak üzere

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p})(i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2)e^{i\varphi} - i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}e^{i\varphi} = 0$$

eşitliğinden

$$\mathbf{x} - \mathbf{p} = \frac{i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}}{i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2}$$

elde edilir. Böylece ivme polü için,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \frac{i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}}{i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2} \tag{2.3.24}$$

veya

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \frac{\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}}{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4} - i \frac{\dot{\varphi}^3\dot{\mathbf{p}}}{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4}$$

elde edilir.

2.4 Yüksek Mertebeden İvmeler ve İvme Polleri

Yüksek Mertebeden İvmeler

Kompleks düzlemde, E/E' 1-parametrelî düzlemsel hareket esnasında X , E -hareketli düzleminde sabit bir nokta olsun. Bu noktayı kompleks $\mathbf{x}$ sayısı ile gösterelim. Bu nokta hareketli düzlemde sabit olduğundan E' -sabit düzleme göre hızı (mutlak hızı) sürüklenme hızına eşittir. Bu hız ise,

$$\dot{\mathbf{x}}' = \dot{\mathbf{u}}' + i\dot{\phi}(\mathbf{x}' - \mathbf{u}') \quad (2.4.1)$$

bağıntısı ile ifade edilir. Bu ifadenin t ye göre türevini alarak X noktasının

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \ddot{\mathbf{u}}' + i\ddot{\phi}(\mathbf{x}' - \mathbf{u}') + i\dot{\phi}(\dot{\mathbf{x}}' - \dot{\mathbf{u}}')$$

sürüklenme ivmesini buluruz. (2.4.1) denklemindeki $\dot{\mathbf{x}}'$ nın değerini bu eşitlikte yerine yazarsak

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \ddot{\mathbf{u}}' + (i\ddot{\phi} + i\dot{\phi}i\dot{\phi})(\mathbf{x}' - \mathbf{u}') \quad (2.4.2)$$

bulunur. (2.4.2) eşitliğinin bir defa daha türevini alarak 3.mertebeden hız (2. mertebeden ivme) vektörü için

$$\dddot{\mathbf{x}}' = \dddot{\mathbf{u}}' + (i\ddot{\phi} - 2\dot{\phi}\ddot{\phi})(\mathbf{x}' - \mathbf{u}') + (i\ddot{\phi} + i\dot{\phi}i\dot{\phi})(\dot{\mathbf{x}}' - \dot{\mathbf{u}}')$$

elde edilir. Eğer (2.4.1) denklemindeki $\dot{\mathbf{x}}'$ nın değerini bu eşitlikte yerine yazarsak,

$$\dddot{\mathbf{x}}' = \dddot{\mathbf{u}}' + ((i\ddot{\phi} - 2\dot{\phi}\ddot{\phi}) + (i\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2)i\dot{\phi})(\mathbf{x}' - \mathbf{u}') \quad (2.4.3)$$

elde edilir. (2.4.3) ifadesinin bir defa daha türevini alarak 4.mertebeden hız (3. mertebeden ivme) vektörü

$$\mathbf{x}^{(4)} = \mathbf{u}^{(4)} + \left((i\dot{\phi} - 3\dot{\phi}^2 - 3\dot{\phi}\ddot{\phi} - 3i\dot{\phi}^2\ddot{\phi}) + (i\ddot{\phi} - 3\dot{\phi}\ddot{\phi} - i\dot{\phi}^3)i\dot{\phi} \right) (\mathbf{x}' - \mathbf{u}') \quad (2.4.4)$$

şeklinde elde edilir. (2.4.1) denklemindeki $(\mathbf{x}' - \mathbf{u}')$ nün katsayısına ϕ_1' denilirse;

$$\phi_1' = i\dot{\phi} \neq 0,$$

(2.4.2) denkleminde $(\mathbf{x}' - \mathbf{u}')$ nün katsayısına ϕ_2' denilirse;

$$\phi_2' = i\ddot{\phi} + i\dot{\phi} \quad i\dot{\phi} = \dot{\phi}_1' + \phi_1' \phi_1' \neq 0,$$

(2.4.3) denkleminde $(\mathbf{x}' - \mathbf{u}')$ nün katsayısına ϕ_3' denilirse;

$$\phi_3' = (i\ddot{\phi} - 2\dot{\phi}\ddot{\phi}) + (i\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2)i\dot{\phi} = \dot{\phi}_2' + \phi_2' \phi_1' \neq 0,$$

ve (2.4.4) denkleminde $(\mathbf{x}' - \mathbf{u}')$ nün katsayısına ϕ_4' denilirse,

$$\phi_4' = \left(i\phi - 3\ddot{\phi}^2 - 3\dot{\phi}\ddot{\phi} - 3i\dot{\phi}^2\ddot{\phi} \right) + (i\ddot{\phi} - 3\dot{\phi}\ddot{\phi} - i\dot{\phi}^3)i\dot{\phi} = \dot{\phi}_3' + \phi_3' \phi_1' \neq 0,$$

elde edilir.

Benzer şekilde ardışık türevler alarak yüksek mertebeden ivmeler elde edilir. (n-1). mertebeden ivme n. mertebeden hıza eşittir. Dolayısıyla yüksek mertebeden ivmelere aynı zamanda yüksek mertebeden hız da denilebilir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

2.4.1. Teorem

Kompleks düzlemde E/E' ; φ dönme açılı, 1-parametrelî düzlemsel hareket olsun.

$$\phi_1' = i\dot{\phi}, \quad \phi_0' = 1, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}'^{(0)} \quad \text{ve}$$

$$\phi_n' = \dot{\phi}_{n-1}' + \phi_{n-1}' \phi_1' \neq 0, \quad (2.4.5)$$

olmak üzere hareketli düzlemdeki sabit bir $\mathbf{x}$ noktasının yüksek mertebeden ivmeleri için

$$\mathbf{x}'^{(n)} = \mathbf{u}' + \phi_n' (\mathbf{x}' - \mathbf{u}') \quad (2.4.6)$$

bağıntısı mevcuttur.

İspat

İspatımızı tümevarım yoluyla yapalım.

$n=1, n=2, n=3$ ve $n=4$ için teoremin doğru olduğu yukarıda gösterilmiştir.

Şimdi $n=k$ için (2.4.5) ve (2.4.6) eşitliklerinin doğru olduğunu kabul edip $n=k+1$ için

doğruluğunu gösterelim. Yani $\phi_k' = \dot{\phi}_{k-1}' + \phi_{k-1}' \phi_1'$ ve $\mathbf{x}'^{(k)} = \mathbf{u}' + \phi_k' (\mathbf{x}' - \mathbf{u}')$ olsun.

Eğer bu son denklemin bir defa daha türevi alınırsa

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{x}'} = \overset{(k+1)}{\mathbf{u}'} + \dot{\phi}'_k (\mathbf{x}' - \mathbf{u}') + \phi'_k (\dot{\mathbf{x}}' - \dot{\mathbf{u}}')$$

elde edilir. Ayrıca (2.4.1) denkleminde $\dot{\mathbf{x}}'$ nın değeri bu eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{x}'} = \overset{(k+1)}{\mathbf{u}'} + (\dot{\phi}'_k + \phi'_k \phi'_1) (\mathbf{x}' - \mathbf{u}')$$

elde edilir. Buradan,

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{x}'} = \overset{(k+1)}{\mathbf{u}'} + \phi'_{k+1} (\mathbf{x}' - \mathbf{u}')$$

olduğu görülür. $\square$

Yüksek Mertebeden Poller

$\mathbf{p}' = \mathbf{p}'_1$ dönme polünü sürüklenme hızının sıfır olmasıyla yani, X noktası E -düzleminde sabit olmak üzere $\mathbf{X}'_r = \dot{\mathbf{x}}' = 0$ olmasıyla tarif etmiştik. Buradan ($\phi'_n \neq 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{p}'_1 = \mathbf{u}' - \frac{\dot{\mathbf{u}}'}{\phi'_1}$$

olduğunu biliyoruz.

$\mathbf{p}'_2$ ivme polü ise, $\ddot{\mathbf{x}}' = 0$

veya

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \ddot{\mathbf{u}}' + (i\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2) (\mathbf{x}' - \mathbf{u}') = 0$$

olmak üzere

$$\mathbf{x}' = \mathbf{u}' - \frac{\ddot{\mathbf{u}}'}{i\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mathbf{p}'_2$ ivme polüne

$$\mathbf{p}'_2 = \mathbf{u}' - \frac{\ddot{\mathbf{u}}'}{\phi'_2}$$

kompleks sayısı karşılık gelir.

Benzer şekilde $(n-1)$. mertebeden ivmenin sıfır olduğu $\mathbf{p}'_n$ noktasına $(n-1)$. mertebeden ivme polü (yada n . mertebeden hız polü) denir ve bu pol $\mathbf{x}'^{(n)} = 0$ olmak üzere

$$\mathbf{p}'_n = \mathbf{u}' - \frac{\mathbf{u}'}{\phi'_n} \quad (2.4.7)$$

elde edilir. Buradan $\mathbf{u}'^{(n)}$ nin değeri bulunup (2.4.6) denkleminde yerine yazılırsa, (2.4.6) denklemi pol noktaları cinsinden

$$\mathbf{x}' = \phi'_n (\mathbf{x}' - \mathbf{p}'_n) \quad (2.4.8)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir.

Şimdi, (2.4.7) denklemi ile verilen, düzlemsel hareket esnasında E' düzleminde ki yüksek mertebeden ivme polü ve (2.4.8) denklemi ile verilen yüksek mertebeden hız vektörünün E hareketli düzleminde ki karşılıklarını ifade edelim:

$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$ dönme polünü sürüklenme hızının sıfır olmasıyla yani, X noktası E -düzleminde sabit olmak üzere $\mathbf{X}_f = 0$ olmasıyla tarif etmiştik.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_f = \dot{\mathbf{u}}' e^{-i\varphi} + i\dot{\varphi} \mathbf{x}$$

olmak üzere

$$\dot{\mathbf{u}}' e^{-i\varphi} + i\dot{\varphi} \mathbf{x} = 0$$

eşitliğinden,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_1 = \frac{-\dot{\mathbf{u}}'}{\dot{\varphi}_1} e^{-i\varphi}$$

elde edilir.

$\mathbf{p}_2$ ivme polü ise $\ddot{\mathbf{x}} = 0$ olmasıyla elde edilir.

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}' e^{-i\varphi} = \ddot{\mathbf{u}}' e^{-i\varphi} + (i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2)(\mathbf{x}' - \mathbf{u}') e^{-i\varphi}$$

ve $\mathbf{x} = (\mathbf{x}' - \mathbf{u}') e^{-i\varphi}$ olduğundan, $\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}' e^{-i\varphi} = \ddot{\mathbf{u}}' e^{-i\varphi} + \phi_2' \mathbf{x}$ bulunur. Buradan,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_2 = \frac{-\ddot{\mathbf{u}}'}{\phi_2'} e^{-i\varphi}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $(n-1)$. mertebeden ivmenin sıfır olduğu $\mathbf{p}_n$ noktası yada $(n-1)$. mertebeden ivme polünü $\mathbf{x} = 0$ olmasıyla elde edilir:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' e^{-i\varphi} = \mathbf{u}' e^{-i\varphi} + \phi_n' (\mathbf{x}' - \mathbf{u}') e^{-i\varphi}$$

ve $\mathbf{x} = (\mathbf{x}' - \mathbf{u}') e^{-i\varphi}$ olduğundan, $\mathbf{x} = \mathbf{u}' e^{-i\varphi} + \phi_n' \mathbf{x}$ bulunur. Buradan,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_n = -\frac{\mathbf{u}'}{\phi_n'} e^{-i\varphi} \quad (2.4.9)$$

elde edilir. Böylece (2.3.13) formülünün genelleştirilmesinde (2.4.8) yerine

$$\mathbf{x} = \phi_n' (\mathbf{x} - \mathbf{p}_n) \quad (2.4.10)$$

ifadesi yazılabilir. $\square$

(2.4.8) bağıntısındaki kompleks büyüklüklerimizin mutlak değerini alır, X noktasının $\mathbf{P}_n$ polünden uzaklığının $|\mathbf{x}' - \mathbf{p}_n'|$ ile ifade edilirse aşağıdaki teoremi ispatsız verebiliriz:

2.4.2. Teorem

Yüksek mertebeden ivmelerin mutlak değeri, X noktasının ilgili mertebeden ivme polünden uzaklığı ile orantılıdır ve merkezleri bu pol olan daireler üzerinde aynı değeri alır. $\square$

(2.4.8) de $\mathbf{P}'\mathbf{X}'$ vektörüne karşılık gelen $\mathbf{x}' - \mathbf{p}'_n$ kompleks sayısı X noktasından bağımsız olan ϕ'_n kompleks sayısı ile çarpıldığı için aşağıdaki teorem verilebilir:

2.4.3. Teorem

Her t anında hareketli düzlemin bütün X noktalarının yüksek mertebeden ivme vektörleri pol ışınları ile aynı açıyı teşkil ederler.

İspat:

Kompleks bir çarpan ile çarpma koordinat sisteminin ilk durumundan bir dönme-uzama (dönme+uzama) sına karşılık gelir.

Her bir X noktasında bu noktaya ait yüksek mertebeden ivme vektörlerini oluşturur ve bu vektörleri X noktaları etrafında sabit açı kadar döndürürsek, bu takdirde dönmüş olan bu vektörlerin hepsi, ilgili mertebeden ivme polünü gösterir. $\square$

(2.4.2) ve (2.4.3) teoremlerini $n=1$ ve $n=2$ özel durumları için açıklayalım:

i) $n=1$ için $\phi'_1 = i\dot{\phi}$ tam sanal olup hızlar pol ışınlarına diktirler.

ii) $n=2$ için hareketli düzlemimizin X noktalarının 1.mertebeden ivmeleri elde edilir. Bu ivmelerin dağılımı aşağıdaki şekilde verilmiştir:

a) $\mathbf{p}_2$ ivme polünde ivme sıfırdır.

b) $\mathbf{p}_2$ merkezli daireler üzerindeki ivmeler aynı mutlak değere sahip ve dairenin yarıçapı ile orantılıdır.

c) İvmelerin $\mathbf{P}_2\mathbf{X}$ pol ışını ile teşkil ettikleri ψ açısı $\phi'_2 = i\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2$ kompleks sayısının argümenti ile tanımlanır ve genel olarak t zamanına bağlı olup

$$\tan \psi = -\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{\phi}} \right)$$

ile verilir.

Parametre Olarak Dönme Açısı

Parametre olarak ϕ açısının seçilmesiyle yukarıda elde edilen denklemlerde büyük sadelikler elde edilir. Bu takdirde ϕ dönme açısı hareketimizin bir doğal parametresi rolünü almış olur.

$\phi'_1 = i\phi$ olmak üzere, $\phi = t$ için $\dot{\phi} = 1$ olduğundan,

$$\phi'_1 = i$$

elde edilir. Benzer şekilde işlemlere devam edilirse

$$\phi'_2 = -1 = i^2,$$

$$\phi'_3 = i^3$$

ve

$$\phi'_n = i^n \quad (2.4.11)$$

olduğu görülür. Buna göre $\mathbf{p}'_n$ ivme polü için, (2.4.7) denkleminde

$$\mathbf{p}'_n = \mathbf{u}' - \frac{{}^{(n)}\mathbf{u}'}{\phi'_n} = \mathbf{u}' - i^{-n} {}^{(n)}\mathbf{u}'$$

veya

$$\mathbf{p}'_n = \mathbf{u}' + i^{2-n} {}^{(n)}\mathbf{u}' \quad (2.4.12)$$

yazılabilir. $\mathbf{p}_n$ ivme polü için ise, (2.4.9) denkleminde

$$\mathbf{p}_n = -\frac{{}^{(n)}\mathbf{u}'}{\phi'_n} e^{-i\phi} = -i^{-n} {}^{(n)}\mathbf{u}' e^{-i\phi} \quad (2.4.13)$$

ifadesi elde edilir. Böylece $\mathbf{x}'$ için,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{u}' + i^n (\mathbf{x}' - \mathbf{u}') \quad (2.4.14)$$

yazılabilir. Bu ifadeyi $\mathbf{p}'_n$ cinsinden tekrar düzenlersek

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}}' = i^n (\mathbf{x}' - \mathbf{p}_n') \quad (2.4.15)$$

elde edilir. Buradan

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}}' = i^{n-2} (\mathbf{p}_n' - \mathbf{x}')$$

veya

$$\mathbf{p}_n' = \mathbf{x}' + i^{2-n} \overset{(n)}{\mathbf{x}}' \quad (2.4.16)$$

bulunur.

Bir vektörü i ile çarpmanın, başlangıç etrafında $+\pi/2$ açısı kadar dönmeye karşılık geldiğini düşünürsek aşağıdaki teoremi verilebilir:

2.4.4. Teorem

Dönme açısı parametre olarak seçilen bir 1-parametrelî düzlemsel kompleks hareket esnasında hareketli düzlemin herhangi bir sabit X noktasına $(2-n)\pi/2$ açısı kadar

döndürülmüş n . mertebeden $\overset{(n)}{\mathbf{x}}'$ türev vektörü eklenirse, bu toplam vektörünün uç noktası $(n-1)$. mertebeden $\mathbf{p}_n'$ ivme polüne karşılık gelir.

2.5 1-Parametrelî Düzlemsel Homotetik Hareket

E -düzleminde hareketli koordinat sistemi $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ve E' -düzleminde sabit koordinat sistemi $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ olsun. E -düzleminde alınan bir X noktasının herhangi bir t anında,

$$\mathbf{x}' = h\mathbf{x} - \mathbf{u} = (hx_1 - u_1)\mathbf{e}_1 + (hx_2 - u_2)\mathbf{e}_2 \quad (2.5.1)$$

denklemleri ile tanımlanan harekete **1-parametrelî düzlemsel homotetik hareket** denir ve $H = E/E'$ ile gösterilir. Burada h, u_1, u_2 t reel parametresinin sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere h ya hareketin **homotetik oranı** denir.

Hareketli düzlemin başlangıç noktasından, sabit düzlemin başlangıç noktasına giden $\mathbf{OO}' = \mathbf{u}$ öteleme vektörü

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 \quad (2.5.2)$$

şeklindedir. Ayrıca $t = t_0$ gibi bir an için iki koordinat sistemini çakışacak şekilde kaydırılmış olarak düşünelim. Bu durumda $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}'_1$ arasındaki dönme açısı φ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos \varphi \mathbf{e}'_1 + \sin \varphi \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_2 &= -\sin \varphi \mathbf{e}'_1 + \cos \varphi \mathbf{e}'_2 \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

yazılabilir. 1-parametrelî düzlemsel homotetik hareketin vektörel denklemi $\mathbf{x}' = h\mathbf{x} - \mathbf{u}$ olduğundan ve $X \in E$ noktasının E' -düzlemindeki koordinatları (x'_1, x'_2) olmak üzere,

$$x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 = (hx_1 - u_1)\mathbf{e}_1 + (hx_2 - u_2)\mathbf{e}_2$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğin $\mathbf{e}'_1$ ve $\mathbf{e}'_2$ ile iç-çarpımı sonucunda,

$$\begin{cases} x'_1 = (hx_1 - u_1)\cos \varphi - (hx_2 - u_2)\sin \varphi \\ x'_2 = (hx_1 - u_1)\sin \varphi + (hx_2 - u_2)\cos \varphi \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} x'_1 = h(x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi) + (-u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi) \\ x'_2 = h(x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi) + (-u_1 \sin \varphi - u_2 \cos \varphi) \end{cases} \quad (2.5.4)$$

elde edilir. Bu son eşitlik,

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

veya

$$X' = hAX + C$$

şeklinde matrisel olarak gösterilebilir.

Hızlar ve Hızların Terkibi

X noktasının hareketli ve sabit düzlemlere göre hızlarını hesaplamak için önce H hareketinin türev denklemlerini bulalım. Bunun için (2.2.5) ve (2.2.6) denklemlerinden

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \dot{\varphi} \mathbf{e}_2, \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_1$$

ve

$$\dot{\mathbf{u}} = (\dot{u}_1 - u_2 \dot{\varphi}) \mathbf{e}_1 + (\dot{u}_2 + u_1 \dot{\varphi}) \mathbf{e}_2$$

olduğunu biliyoruz. İşte bu denklemlere H hareketinin **türev denklemleri** denir.

$X \in E$ noktasının hareketli sistemdeki koordinatları (x_1, x_2) olmak üzere,

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 \quad (2.5.5)$$

yazılabilir.

H hareketinin relatif hızı, (2.5.5) denkleminde türev alarak

$$\mathbf{V}_r = \dot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{e}_2 \quad (2.5.6)$$

bulunur. Mutlak hız ise (2.5.1) denkleminde türev alarak

$$\mathbf{V}_a = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left\{ -\dot{u}_1 + (u_2 - hx_2) \dot{\varphi} + \dot{h}x_1 \right\} \mathbf{e}_1 + \left\{ -\dot{u}_2 + (-u_1 + hx_1) \dot{\varphi} + \dot{h}x_2 \right\} \mathbf{e}_2 + h(\dot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{e}_2)$$

veya

$$\mathbf{V}_a = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left\{ -\dot{u}_1 + (u_2 - hx_2) \dot{\varphi} + \dot{h}x_1 \right\} \mathbf{e}_1 + \left\{ -\dot{u}_2 + (-u_1 + hx_1) \dot{\varphi} + \dot{h}x_2 \right\} \mathbf{e}_2 + h\mathbf{V}_r \quad (2.5.7)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu eşitlikte

$$\mathbf{V}_f = \left\{ -\dot{u}_1 + (u_2 - hx_2)\dot{\phi} + \dot{h}x_1 \right\} \mathbf{e}_1 + \left\{ -\dot{u}_2 + (-u_1 + hx_1)\dot{\phi} + \dot{h}x_2 \right\} \mathbf{e}_2 \quad (2.5.8)$$

vektörüne X noktasının **sürüklenme hız vektörü** denir. Eğer X noktası E -de tesbit edilmiş ise $\mathbf{V}_f = 0$ olacaktır. Bu durumda mutlak hız sürüklenme hızına eşit olur.

2.5.1. Teorem

$H = E / E'$ homotetik hareketinde bir X noktasının hız vektörleri arasında

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_f + h\mathbf{V}_r \quad (2.5.9)$$

bağıntısı vardır. $\square$

Çalışmamız boyunca, yalnızca öteleme yada yalnızca dönme durumlarından kaçınmak için $\dot{\phi} \neq 0$ ve $h = h(t) \neq \text{sabit}$, kabul edeceğiz.

Pol Noktaları ve Pol Eğrileri

Şimdi sürüklenme hızının sıfır olduğu noktaları yani, pol noktalarını araştıralım:

Bu noktalar sadece hareketli düzlemde değil, sabit düzlemde de sabit olmalıdır. Buna göre,

$$\mathbf{V}_f = 0$$

ise (2.5.8) denkleminde,

$$-\dot{u}_1 + (u_2 - hx_2)\dot{\phi} + \dot{h}x_1 = 0$$

$$-\dot{u}_2 + (-u_1 + hx_1)\dot{\phi} + \dot{h}x_2 = 0$$

yazılabilir. Bu denklemleri x_1 ve x_2 ye göre düzenlersek

$$\dot{h}x_1 - h\dot{\phi}x_2 = \dot{u}_1 - u_2\dot{\phi}$$

$$h\dot{\phi}x_1 + \dot{h}x_2 = \dot{u}_2 + u_1\dot{\phi}$$

elde edilir. Bu sistemin çözümleri p_1 ve p_2 ile gösterilir ve $\dot{h}^2 + h^2\dot{\phi}^2 \neq 0$ olarak kabul edilirse,

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\dot{h}(\dot{u}_1 - u_2\dot{\phi}) + h\dot{\phi}(\dot{u}_2 + u_1\dot{\phi})}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\phi}^2} \\
p_2 &= \frac{\dot{h}(\dot{u}_2 + u_1\dot{\phi}) - h\dot{\phi}(\dot{u}_1 - u_2\dot{\phi})}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\phi}^2}
\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

bulunur. Bu durumda,

$$\mathbf{OP} = \mathbf{p} = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2$$

yer vektörüne karşılık gelen $P = (p_1, p_2)$ noktasına $H = E/E'$ homotetik hareketinin t anındaki **pol noktası** denir. Bu pol noktasından faydalanarak bir X noktasının (2.5.8) de verilen sürüklenme hız vektörü aşağıdaki şekilde ifade edilir. Bunun için (2.5.10) denkleminde $\dot{u}_1$ ve $\dot{u}_2$ nin değerleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= p_1\dot{h} - p_2h\dot{\phi} + u_2\dot{\phi} \\
\dot{u}_2 &= p_1h\dot{\phi} + p_2\dot{h} - u_1\dot{\phi}
\end{aligned}$$

bulunur. Bunları (2.5.8) denkleminde yerine yazarsak

$$\mathbf{V}_f = \{(x_1 - p_1)\dot{h} - (x_2 - p_2)h\dot{\phi}\}\mathbf{e}_1 + \{(x_1 - p_1)h\dot{\phi} + (x_2 - p_2)\dot{h}\}\mathbf{e}_2 \tag{2.5.11}$$

elde edilir, (Tutar ve Kuruoğlu, 1999; Döldül, 2000).

Sürüklenme hızının bu ifadesinden aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

2.5.1. Sonuç

P polünden X noktasına giden

$$\mathbf{PX} = (x_1 - p_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 - p_2)\mathbf{e}_2$$

pol ışıını ile $\mathbf{V}_f$ nin iç-çarpımı

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{V}_f, \mathbf{PX} \rangle &= (x_1 - p_1)(x_1 - p_1)\dot{h} - (x_1 - p_1)(x_2 - p_2)h\dot{\phi} \\
&\quad + (x_2 - p_2)(x_1 - p_1)h\dot{\phi} + (x_2 - p_2)(x_2 - p_2)\dot{h}
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{V}_f, \mathbf{PX} \rangle &= \left[(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 \right] \dot{h} \\ &= \|\mathbf{PX}\|^2 \dot{h}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

2.5.1. Özel Durum

$h = 1$ alınır,

$$\langle \mathbf{V}_f, \mathbf{PX} \rangle = 0$$

bulunur, (Müler, 1956, 1963).

2.5.2. Sonuç

$\mathbf{V}_f$ vektörünün uzunluğu için

$$\begin{aligned}\|\mathbf{V}_f\| &= \sqrt{(\dot{h}^2 + h^2 \dot{\varphi}^2) \left[(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 \right]} \\ &= \sqrt{\dot{h}^2 + h^2 \dot{\varphi}^2} \|\mathbf{PX}\|\end{aligned}$$

bulunur.

2.5.2. Özel Durum

Bu son eşitlikte $h = 1$ olarak alınır,

$$\|\mathbf{V}_f\| = \dot{\varphi} \|\mathbf{PX}\|$$

elde edilir, (Müller, 1956, 1963).

Ayrıca, düzlemsel homotetik hareketler ile ilgili ayrıntılı bilgi için (Tutar ve Kuruoğlu 1999; Kuruoğlu ve Yüce, 2001; Yüce ve Kuruoğlu, 2002; Kuruoğlu vd, 2003) çalışmalara bakınız.

Şimdi (P) ve (P') pol eğrilerini çizen P pol noktasının hızlarını araştıralım:

Pol noktası $V_r = 0$ ile tanımlandığından (2.5.9) eşitliğinden $X = P$ için

$$V_a = hV_r \quad (2.5.12)$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

2.5.2. Teorem

$H = E / E'$; 1-parametrelili düzlemsel homotetik hareket esnasında sabit ve hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen P dönme polünün her t anındaki hızları birbirinden farklıdır.

2.5.3. Teorem

$H = E / E'$; 1-parametrelili düzlemsel homotetik hareket esnasında E düzleminin (P) hareketli pol eğrisi E' düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kayarak yuvarlanır.

İspat:

(P) nin t_0 ve t_1 parametrelerine karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$ds = \|V_r\| dt$$

dir. (P') nün t_0 ve t_1 parametrelerine karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$ds' = \|V_a\| dt$$

olur. P pol noktası için $V_a = hV_r$ olduğundan

$$ds' \neq ds$$

dir. O halde (P) hareketli pol eğrisi (P') sabit pol eğrisi üzerinde kayarak yuvarlanır, (Düldül, 2000).

2.5.3. Özel Durum

$h=1$ olması durumunda $ds' = ds$ elde edilir. Bu durumda pol eğrileri birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanır, (Müller, 1956, 1963).

İvmeler ve İvmelerin Terkibi

X noktasının relatif ivme vektörü (2.5.6) ile verilen relatif hızın t ye göre türevi alınmasıyla

$$\mathbf{b}_r = \ddot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \ddot{x}_2 \mathbf{e}_2 \quad (2.5.13)$$

elde edilir.

X noktasının E' -düzlemine göre olan ivme vektörüne **mutlak ivme vektörü** denir ve $\mathbf{b}_a$ ile gösterilir. Ayrıca $\mathbf{V}_a$ nın t ye göre türevi alınarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_a = \dot{\mathbf{V}}_a = & \left\{ (x_1 - p_1)(\ddot{h} - h\dot{\phi}^2) - (x_2 - p_2)(2\dot{h}\dot{\phi} - h\ddot{\phi}) - \dot{p}_1\dot{h} + \dot{p}_2h\dot{\phi} \right\} \mathbf{e}_1 \\ & + \left\{ (x_1 - p_1)(2\dot{h}\dot{\phi} - h\ddot{\phi}) + (x_2 - p_2)(\ddot{h} - h\dot{\phi}^2) - \dot{p}_2\dot{h} - \dot{p}_1h\dot{\phi} \right\} \mathbf{e}_2 \\ & + 2(\dot{h}\dot{x}_1 - h\dot{x}_2\dot{\phi})\mathbf{e}_1 + 2(h\dot{\phi}\dot{x}_1 + \dot{h}\dot{x}_2)\mathbf{e}_2 + h\mathbf{b}_r \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

bulunur. Bu son ifadede

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_f = & \left\{ (x_1 - p_1)(\ddot{h} - h\dot{\phi}^2) - (x_2 - p_2)(2\dot{h}\dot{\phi} - h\ddot{\phi}) - \dot{p}_1\dot{h} + \dot{p}_2h\dot{\phi} \right\} \mathbf{e}_1 \\ & + \left\{ (x_1 - p_1)(2\dot{h}\dot{\phi} - h\ddot{\phi}) + (x_2 - p_2)(\ddot{h} - h\dot{\phi}^2) - \dot{p}_2\dot{h} - \dot{p}_1h\dot{\phi} \right\} \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

vektörüne X noktasının **sürüklenme ivme vektörü** ve

$$\mathbf{b}_c = 2(\dot{h}\dot{x}_1 - h\dot{x}_2\dot{\phi})\mathbf{e}_1 + 2(h\dot{\phi}\dot{x}_1 + \dot{h}\dot{x}_2)\mathbf{e}_2 \quad (2.5.16)$$

vektörüne de **Coriolis-ivme vektörü** denir.

Buna göre ivmelerin terkibi şu teoremle ifade edilebilir:

2.5.4. Teorem

$H = E/E'$ 1- parametrelili düzlemsel homotetik hareketi esnasında bir noktanın mutlak ivme vektörü, sürüklenme ivme vektörü ile Coriolis-ivme vektörü ve relatif ivme vektörünün h katının toplamına eşittir. Buna göre

$$\mathbf{b}_a = \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_c + h\mathbf{b}_r \quad (2.5.17)$$

dir.□

Şimdi bir $H = E/E'$ hareketi esnasında, herhangi bir t anında sürüklenme ivmesinin sıfır olduğu noktaları yani ivme pollerini araştıralım:

(2.5.15) denkleminde $\mathbf{b}_f = 0$ için

$$\begin{aligned} (x_1 - p_1)(\ddot{h} - h\dot{\phi}^2) - (x_2 - p_2)(2\dot{h}\dot{\phi} - h\ddot{\phi}) &= \dot{p}_1\dot{h} - \dot{p}_2h\dot{\phi} \\ (x_1 - p_1)(2\dot{h}\dot{\phi} - h\ddot{\phi}) + (x_2 - p_2)(\ddot{h} - h\dot{\phi}^2) &= \dot{p}_2\dot{h} + \dot{p}_1h\dot{\phi} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise homojen olmayan bir lineer denklem sistemidir. $\dot{h} \neq 0$ ve $\dot{\phi} \neq 0$ olduğundan sisteminin katsayılar determinantı sıfırdan farklıdır. O halde sistem çözülürse ivme polünün koordinatları

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + \frac{p_1\ddot{h}\dot{h} + \dot{p}_1h\dot{h}\dot{\phi}^2 - \dot{p}_2h\ddot{h}\dot{\phi} + \dot{p}_2h^2\dot{\phi}^3 + 2\dot{p}_2\dot{h}^2\dot{\phi} + h^2\dot{p}_1\dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{p}_2h\dot{h}\ddot{\phi}}{(\ddot{h} - h\dot{\phi}^2)^2 + (2\dot{h}\dot{\phi} + h\ddot{\phi})^2} \\ x_2 &= p_2 - \frac{\dot{p}_2\ddot{h}\dot{h} + \dot{p}_1h\ddot{h}\dot{\phi} - \dot{p}_1h^2\dot{\phi}^3 + \dot{p}_2h\dot{h}\dot{\phi}^2 - 2\dot{p}_1\dot{h}^2\dot{\phi} - h\dot{p}_1\dot{h}\ddot{\phi} + \dot{p}_2h^2\dot{\phi}\ddot{\phi}}{(\ddot{h} - h\dot{\phi}^2)^2 + (2\dot{h}\dot{\phi} + h\ddot{\phi})^2} \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

şeklinde elde edilir.

2.5.4. Özel Durum

(2.5.18) eşitliğinde $h=1$ alınması durumunda 1-parametrelili düzlemsel hareketin (2.2.17) eşitliği ile verilen ivme polünün koordinatları elde edilir, (Düldül, 2000).

2.6 Kompleks Düzlemde 1-Parametrel Homotetik Hareket

E ve E' ($E = E' = E^2$) sırasıyla hareketli ve sabit düzlemler olsun. $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ve $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ de E ve E' -düzlemlerinde tespit edilen koordinat sistemleri olsun. Bir X noktasının her iki sistemdeki koordinatları sırasıyla,

$$x = x_1 + ix_2, \quad x' = x'_1 + ix'_2$$

kompleks sayıları ile gösterelim. $\mathbf{O'O}$ vektörünü de sabit sistemdeki kompleks gösterimi

$$\mathbf{u}' = u'_1 + iu'_2$$

olmak üzere

$$-\mathbf{u} = -u_1 - iu_2$$

dir. O halde $+\mathbf{u}$, $\mathbf{O'O}$ vektörüne karşılık olan vektördür. (2.5.4) denkleminde x'_1 ve x'_2 ifadeleri $\mathbf{x}' = x'_1 + ix'_2$ kompleks sayısında yerine yazılırsa

$$\mathbf{x}' = h(x_1 + ix_2)(\cos \varphi + i \sin \varphi) - (u_1 + iu_2)(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

veya

$$\mathbf{x}' = h\mathbf{x}e^{i\varphi} - \mathbf{u}e^{i\varphi}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\mathbf{u}' = -\mathbf{u}e^{i\varphi}$$

olmak üzere

$$\mathbf{x}' = \mathbf{u}' + h\mathbf{x}e^{i\varphi} \quad (2.6.1)$$

elde edilir. Eğer h homotetik oran, φ dönme açısı ve $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{u}'$ vektörleri reel bir t parametresinin sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonları ise, (2.6.1) dönüşümü ile tanımlanan harekete kompleks düzlemde **1-parametrel düzlemsel homotetik hareket** denir ve $H = E / E'$ ile gösterilir.

Çalışmamız boyunca, yalnızca öteleme yada yalnızca dönme durumlarından kaçınmak için $\dot{\varphi} \neq 0$ ve $h = h(t) \neq \text{sabit}$, kabul edeceğiz.

Hızlar ve Hızların Terkibi

Kompleks düzlemde, $H = E / E'$ 1-parametrelili düzlemsel homotetik hareketi esnasında X , E düzleminde bir nokta olsun. X noktasının $\mathbf{X}_r$ **relatif hızı**, X in hareketli E düzlemine göre hızıdır. Bu hız hareketli sistemine göre

$$\mathbf{X}_r = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} \quad (2.6.2)$$

dir.

X noktasının E -düzleminde sahip olduğu $\mathbf{X}_r$ relatif hız vektörünün sabit sisteme göre ifadesi için,

$$\mathbf{X}'_r = \mathbf{X}_r e^{i\varphi} = \dot{\mathbf{x}} e^{i\varphi} \quad (2.6.3)$$

yazılabilir. X noktasının E' 'de sahip olduğu $\mathbf{X}'_a$ mutlak hızı, sabit sisteme göre;

$$\mathbf{X}'_a = (\dot{h} + ih\dot{\varphi})\mathbf{x}e^{i\varphi} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi})e^{i\varphi} + h\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi}$$

veya

$$\mathbf{X}'_a = (\dot{h} + ih\dot{\varphi})\mathbf{x}e^{i\varphi} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi})e^{i\varphi} + h\mathbf{X}'_r \quad (2.6.4)$$

şeklinde bulunur. Buna göre, X noktasının $\mathbf{X}'_r$ sürüklenme hızı, sabit sistemine göre;

$$\mathbf{X}'_r = (\dot{h} + ih\dot{\varphi})\mathbf{x}e^{i\varphi} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi})e^{i\varphi} \quad (2.6.5)$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca, $\mathbf{u}' = -\mathbf{u}e^{i\varphi}$ olduğundan

$$\dot{\mathbf{u}}' = -(\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi})e^{i\varphi}$$

yazılabilir. Bu son eşitlik ve (2.6.1) denkleminde $\mathbf{x}e^{i\varphi}$ nin değeri (2.6.5) denkleminde yerine yazılırsa $\mathbf{X}'_r$ için,

$$\mathbf{X}'_r = \dot{\mathbf{u}}' + \left(\frac{\dot{h}}{h} + i\dot{\varphi} \right) (\mathbf{x}' - \mathbf{u}'), \quad \forall t \in I \text{ için } h(t) \neq 0 \quad (2.6.6)$$

bulunur.

Şimdi, (2.6.4) ve (2.6.6) denklemleri ile verilen, düzlemsel homotetik hareket esnasında $X \in E$ noktasının E' düzleminde sahip olduğu hız vektörlerinin E hareketli düzleminde ki karşılıklarını ifade edelim:

X noktasının E -düzleminde sahip olduğu $\mathbf{X}_r$ relatif hızını (2.6.2) denkleminde vermiştik.

X noktasının hareket esnasında E' -düzleminde sahip olduğu mutlak hız vektörünün E -düzlemindeki ifadesi için

$$\mathbf{X}_a = \mathbf{X}_a' e^{-i\varphi} = (\dot{h} + ih\dot{\varphi})\mathbf{x} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi}) + h\mathbf{X}_r \quad (2.6.7)$$

elde edilir. Bu durumda (2.6.5) denklemini kullanılırsa X noktasının $\mathbf{X}_r$ sürüklenme hızı,

$$\mathbf{X}_r = \mathbf{X}_r' e^{-i\varphi} = (\dot{h} + ih\dot{\varphi})\mathbf{x} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi}) \quad (2.6.8)$$

şeklinde ifade edilir.

(2.6.3), (2.6.4), (2.6.5) ile (2.6.2), (2.6.7), (2.6.8) denklemleri kullanılarak aşağıdaki teorem ispatsız verilebilir:

2.6.1. Teorem

Kompleks düzlemde, $H = E/E'$ 1-parametrelili düzlemsel homotetik hareketi esnasında bir X noktasının mutlak hızı, sürüklenme hızı ile relatif hızının h katının toplamına eşittir, yani

$$\begin{cases} \mathbf{X}_a' = \mathbf{X}_r' + h\mathbf{X}_r' \\ \text{ve} \\ \mathbf{X}_a = \mathbf{X}_r + h\mathbf{X}_r \end{cases} \quad (2.6.9)$$

dir. $\square$

Bundan sonra, çalışmamız boyunca sırf dönme ve sırf öteleme durumlarından kaçmak için

$\dot{\varphi}(t) \neq 0$ ve $h = h(t) \neq \text{sabit}$, kabul edeceğiz.

Pol Noktaları ve Pol Eğrileri

Şimdi H hareketinin her t anındaki sabit düzlemde sürüklenme hızı sıfır olan noktaları, yani pol noktalarını araştıralım:

Böyle noktalar, t anında, sadece E hareketli düzleminde değil, aynı zamanda E' sabit düzleminde de sabit olmak zorundadır.

$$\mathbf{X}'_t = 0$$

olan noktaları araştıracağız:

(2.6.6) denkleminde

$$\dot{\mathbf{u}}' + \left(\frac{\dot{h}}{h} + i\dot{\phi} \right) (\mathbf{x}' - \mathbf{u}') = 0$$

olup, buradan

$$\mathbf{x}' = \mathbf{p}' = \mathbf{u}' - \frac{\dot{\mathbf{u}}'}{\left(\frac{\dot{h}}{h} + i\dot{\phi} \right)} \quad (2.6.10)$$

elde edilir. (Burada, H hareketi esnasında $\forall t \in I$ için $h(t) \neq 0$ kabul edilmiştir.)

Ayrıca (2.6.10) denklemden $\dot{\mathbf{u}}'$ nın değeri bulunup, (2.6.6) denkleminde yerine yazılırsa sürüklenme hız vektörü, pol noktası cinsinden

$$\mathbf{X}'_t = \left(\frac{\dot{h}}{h} + i\dot{\phi} \right) (\mathbf{x}' - \mathbf{p}') \quad (2.6.11)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir.

Şimdi, (2.6.10) denklemini ile verilen, düzlemsel homotetik hareket esnasında E' düzleminde ki pol noktasının ve (2.6.11) denklemini ile verilen sürüklenme hız vektörünün E hareketli düzleminde ki karşılıklarını ifade edelim:

Şimdi $X_r = 0$ olan noktaları araştıracağız:

(2.6.8) denkleminde,

$$(\dot{h} + ih\dot{\varphi})\mathbf{x} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi}) = 0$$

olmak üzere

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} = \frac{\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi}}{\dot{h} + ih\dot{\varphi}} \quad (2.6.12)$$

elde edilir.

Burada $\dot{\mathbf{u}}$ 'nın değeri $\mathbf{p}$ cinsinden bulunup (2.6.8) de yerine yazılırsa sürüklenme hızının E -düzlemindeki ifadesi, $\mathbf{p}$ pol cinsinden

$$\mathbf{X}_r = (\dot{h} + ih\dot{\varphi})(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \quad (2.6.13)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

2.6.1. Özel Durum

$h=1$ özel hali için (2.6.10) ve (2.6.12) denklemlerinden (Müller, 1978) tarafından verilen (2.3.10) ve (2.3.12) eşitlikleri elde edilir.

X noktasının sürüklenme hızının (2.6.11), (2.6.13) ifadelerinden aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

2.6.1. Sonuç

P' polünden X' noktasına giden

$$\mathbf{P}'\mathbf{X}' = (\mathbf{x}' - \mathbf{p}')$$

pol ışını ile $\mathbf{X}'_r$ sürüklenme hızının iç çarpımı

$$\langle \mathbf{X}'_r, \mathbf{P}'\mathbf{X}' \rangle = \left\langle \left(\frac{\dot{h}}{h} + i\dot{\varphi} \right) (\mathbf{x}' - \mathbf{p}'), (\mathbf{x}' - \mathbf{p}') \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \left(\frac{\hbar}{h} (x'_1 - p'_1) - \dot{\phi}(x'_2 - p'_2), \frac{\hbar}{h} (x'_2 - p'_2) + \dot{\phi}(x'_1 - p'_1) \right), (x'_1 - p'_1, x'_2 - p'_2) \right\rangle \\
&= \frac{\hbar}{h} \left[(x'_1 - p'_1)^2 + (x'_2 - p'_2)^2 \right] \\
&= \frac{\hbar}{h} \|\mathbf{P}'\mathbf{X}'\|^2
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $\mathbf{P}$ polünden, X noktasına giden pol ışınının $\mathbf{X}_f$ ile iç çarpımı için

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{X}_f, \mathbf{P}\mathbf{X} \rangle &= \left\langle \left(\hbar + i\hbar\dot{\phi} \right) (\mathbf{x} - \mathbf{p}), (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \right\rangle \\
&= \hbar \left[(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 \right] \\
&= \hbar \|\mathbf{P}\mathbf{X}\|^2
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

2.6.2. Özel Durum

Sonuç (2.6.1) deki her iki eşitlik için $\hbar = 1$ olması durumunda Sonuç(2.3.1) de verilen

$$\langle \mathbf{X}'_f, \mathbf{P}'\mathbf{X}' \rangle = 0$$

ve

$$\langle \mathbf{X}_f, \mathbf{P}\mathbf{X} \rangle = 0$$

eşitlikleri bulunur, (Düldül, 2000).

2.6.2. Sonuç

$\mathbf{X}'_f$ vektörünün uzunluğu için

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{X}'_f\| &= \sqrt{\langle \mathbf{X}'_f, \mathbf{X}'_f \rangle} \\
&= \sqrt{\left\langle \left(\frac{\hbar}{h} + i\dot{\phi} \right) (\mathbf{x}' - \mathbf{p}'), \left(\frac{\hbar}{h} + i\dot{\phi} \right) (\mathbf{x}' - \mathbf{p}') \right\rangle}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(\frac{\dot{h}^2}{h^2} + \dot{\varphi}^2\right) \langle (\mathbf{x}' - \mathbf{p}'), (\mathbf{x}' - \mathbf{p}') \rangle} \\
&= \sqrt{\left(\frac{\dot{h}^2}{h^2} + \dot{\varphi}^2\right)} \sqrt{\langle (\mathbf{x}' - \mathbf{p}'), (\mathbf{x}' - \mathbf{p}') \rangle} \\
&= \sqrt{\left(\frac{\dot{h}^2}{h^2} + \dot{\varphi}^2\right)} \|\mathbf{P}'\mathbf{X}'\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\mathbf{X}_f$ vektörünün uzunluğu

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{X}_f\| &= \sqrt{\langle \mathbf{X}_f, \mathbf{X}_f \rangle} \\
&= \sqrt{\langle (\dot{h} + ih\dot{\varphi})(\mathbf{x} - \mathbf{p}), (\dot{h} + ih\dot{\varphi})(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \rangle} \\
&= \sqrt{\dot{h}^2 + h^2\dot{\varphi}^2} \|\mathbf{P}\mathbf{X}\|
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

2.6.3. Özel Durum

Sonuç (2.6.2) de $h = 1$ alınır, sonuç (2.3.2) de verilen

$$\|\mathbf{X}'_f\| = \dot{\varphi} \|\mathbf{P}'\mathbf{X}'\|$$

ve

$$\|\mathbf{X}_f\| = \dot{\varphi} \|\mathbf{P}\mathbf{X}\|$$

eşitlikleri bulunur, (Düldül, 2000).

Şimdi (P) ve (P') pol eğrilerini çizen P pol noktasının hızlarını araştıralım:

Pol noktası $\mathbf{X}'_f = 0$ ile tanımlandığından (2.6.9) eşitliğinden $X = P$ için

$$\mathbf{X}'_a = h\mathbf{X}'_r = h\mathbf{p}e^{i\varphi} \quad (2.6.14)$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

2.6.2. Teorem

Kompleks düzlemde, $H = E / E'$ 1-parametrelî düzlemsel homotetik hareketi esnasında sabit ve hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen P dönme polünün her t anındaki hızları birbirinden farklıdır.

2.6.3. Teorem

Kompleks düzlemde, $H = E / E'$ 1-parametrelî düzlemsel homotetik hareketi esnasında E düzleminin (P) hareketli pol eğrisi E' düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kayarak yuvarlanır.

İspat:

(P) nin t_0 ve t_1 parametrelerine karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$ds = \| \mathbf{X}'_r \| dt$$

dir. (P') nün t_0 ve t_1 parametrelerine karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$ds' = \| \mathbf{X}'_a \| dt$$

olur. P pol noktası için $\mathbf{X}'_a = h\mathbf{X}'_r$ olduğundan

$$ds' \neq ds$$

dir. O halde (P) hareketli pol eğrisi (P') sabit pol eğrisi üzerinde kayarak yuvarlanır, (Düldül, 2000).

2.6.3. Sonuç

$h=1$ olması durumunda $ds' = ds$ elde edilir. Bu durumda pol eğrileri birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanır, (Müller, 1956, 1963).

İvmeler ve İvmelerin Terkibi

X noktasının relatif ivme vektörü (2.6.2) ile verilen relatif hızın t ye göre türevi alınmasıyla

$$\mathbf{b}_r = \dot{\mathbf{X}}_r = \ddot{\mathbf{x}} \quad (2.6.15)$$

elde edilir. Bu vektör sabit koordinat sisteminde

$$\mathbf{b}'_r = \mathbf{b}_r e^{i\varphi} = \ddot{\mathbf{x}} e^{i\varphi} \quad (2.6.16)$$

ile ifade edilir.

X noktasının mutlak ivme vektörü, mutlak hızın t ye göre türevi alınarak bulunur. O halde,

$$\mathbf{X}'_a = \mathbf{X}'_r + h\mathbf{X}'_r = (\dot{h} + ih\dot{\varphi})(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi} + h\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi}$$

mutlak hızının t ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'_a = \dot{\mathbf{X}}'_a &= (\ddot{h} + i\dot{h}\dot{\varphi} + ih\ddot{\varphi})(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi} + (\dot{h} + ih\dot{\varphi})(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{p}})e^{i\varphi} \\ &\quad + (\dot{h} + ih\dot{\varphi})(\mathbf{x} - \mathbf{p})i\dot{\varphi}e^{i\varphi} + \dot{h}\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} + h\ddot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} + ih\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} \\ &= (\ddot{h} + i\dot{h}\dot{\varphi} + ih\ddot{\varphi})(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi} + (\dot{h} + ih\dot{\varphi})\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} - (\dot{h} + ih\dot{\varphi})\dot{\mathbf{p}}e^{i\varphi} \\ &\quad + (\dot{h} + ih\dot{\varphi})(\mathbf{x} - \mathbf{p})i\dot{\varphi}e^{i\varphi} + \dot{\mathbf{x}}(\dot{h} + ih\dot{\varphi})e^{i\varphi} + h\ddot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\mathbf{b}'_a = \left[\ddot{h} - h\dot{\varphi}^2 + i(h\ddot{\varphi} + 2\dot{h}\dot{\varphi}) \right] (\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi} - (\dot{h} + ih\dot{\varphi})\dot{\mathbf{p}}e^{i\varphi} + 2\dot{\mathbf{x}}(\dot{h} + ih\dot{\varphi})e^{i\varphi} + h\ddot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} \quad (2.6.17)$$

elde edilir. Bu son eşitlikteki

$$\mathbf{b}'_r = \left[\ddot{h} - h\dot{\varphi}^2 + i(h\ddot{\varphi} + 2\dot{h}\dot{\varphi}) \right] (\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi} - (\dot{h} + ih\dot{\varphi})\dot{\mathbf{p}}e^{i\varphi} \quad (2.6.18)$$

vektörüne X noktasının **sürüklenme ivme vektörü** ve

$$\mathbf{b}'_c = 2\dot{\mathbf{x}}(\dot{h} + ih\dot{\varphi})e^{i\varphi} \quad (2.6.19)$$

vektörüne X noktasının **Coriolis-ivme vektörü** denir. O halde sürüklenme ivme vektörü, hareketli sistemdeki sabit noktaların sabit sisteme göre ivmesidir.

(2.6.17), (2.6.18) ve (2.6.19) denklemlerinden ivmelerin terkbine ait aşğıdaki teorem ispatsız verilebilir:

2.6.4. Teorem

Kompleks düzlemde, bir parametrelî düzlemsel homotetik hareket esnasında bir noktanın mutlak ivme vektörü, sürüklenme ivme vektörü ile Coriolis-ivme vektörü ve relatif ivme vektörünün h katının toplamına eşittir:

$$\mathbf{b}'_a = \mathbf{b}'_f + \mathbf{b}'_c + h\mathbf{b}'_r. \quad (2.6.20)$$

□

(2.6.17), (2.6.18) ve (2.6.19) eşitlikleri ile verilen ivme vektörleri hareketli sistemde sırasıyla,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_a = \mathbf{b}'_a e^{-i\varphi} = & \left[\ddot{h} - h\dot{\varphi}^2 + i(h\ddot{\varphi} + 2\dot{h}\dot{\varphi}) \right] (\mathbf{x} - \mathbf{p}) - (\dot{h} + ih\dot{\varphi})\dot{\mathbf{p}} \\ & + 2\dot{\mathbf{x}}(\dot{h} + ih\dot{\varphi}) + h\mathbf{b}_r \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

$$\mathbf{b}_f = \mathbf{b}'_f e^{-i\varphi} = \left[\ddot{h} - h\dot{\varphi}^2 + i(h\ddot{\varphi} + 2\dot{h}\dot{\varphi}) \right] (\mathbf{x} - \mathbf{p}) - (\dot{h} + ih\dot{\varphi})\dot{\mathbf{p}} \quad (2.6.22)$$

$$\mathbf{b}_c = \mathbf{b}'_c e^{-i\varphi} = 2\dot{\mathbf{x}}(\dot{h} + ih\dot{\varphi}) \quad (2.6.23)$$

vektörleri ile ifade edilir.

2.6.4. Sonuç

(2.3.23), (2.6.3) ve (2.6.19) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}'_r, \mathbf{b}'_c \rangle &= \langle \dot{\mathbf{x}} e^{i\varphi}, 2\dot{\mathbf{x}}(\dot{h} + ih\dot{\varphi}) e^{i\varphi} \rangle \\ &= \langle \dot{\mathbf{x}}, 2\dot{\mathbf{x}}(\dot{h} + ih\dot{\varphi}) \rangle \\ &= \langle (\dot{x}_1 + i\dot{x}_2), 2(\dot{x}_1 + i\dot{x}_2)(\dot{h} + ih\dot{\varphi}) \rangle \\ &= 2\dot{h}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \end{aligned}$$

bulunur.

2.6.4. Özel Durum

Sonuç (2.6.4) de $h=1$ alınır (Kuruoğlu vd., 2001) tarafından verilen (2.3.3) sonucu elde edilir. $\square$

Şimdide $H = E / E'$, kompleks düzlemde 1-parametrelili homotetik hareket esnasında sürüklenme ivmesinin sıfır olduğu, yani ivme polünü araştıralım:

(2.6.18) denkleminde,

$$\left[\ddot{h} - h\dot{\varphi}^2 + i(h\ddot{\varphi} + 2\dot{h}\dot{\varphi}) \right] (\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi} - (\dot{h} + ih\dot{\varphi})\dot{\mathbf{p}}e^{i\varphi} = 0$$

olmak üzere

$$\mathbf{x} - \mathbf{p} = \frac{(\dot{h} + ih\dot{\varphi})\dot{\mathbf{p}}e^{i\varphi}}{\left[\ddot{h} - h\dot{\varphi}^2 + i(h\ddot{\varphi} + 2\dot{h}\dot{\varphi}) \right] e^{i\varphi}}$$

veya

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \frac{(\dot{h} + ih\dot{\varphi})\dot{\mathbf{p}}}{\ddot{h} - h\dot{\varphi}^2 + i(h\ddot{\varphi} + 2\dot{h}\dot{\varphi})}$$

elde edilir, (Kuruoğlu vd., 2001).

2.6.4. Özel Durum

Teorem 2.6.5 de özel olarak $h=1$ alınır 1-parametrelili düzlemsel hareketler için (2.3.24) denklemini ile verilen

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \frac{i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}}{i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2}$$

ivme polü elde edilir, (Kuruoğlu vd., 2001).

Ayrıca Kompleks düzlemde 1-parametrelili düzlemsel homotetik hareketler ile ilgili ayrıntılı bilgi için (Düldül, 2000) ve (Kuruoğlu vd., 2001) çalışmalara bakınız.

3. BULGULAR

Tezimizin orijinal kısmı olan bu bölümde, (Müller, 1956, 1963) tarafından verilen kompleks düzlemde 1-parametrelili düzlemsel hareketler altında yüksek mertebeden ivme ve poller, homotetik hareketlere genelleştirilmiştir. Ayrıca "homotetik oranın" $h \equiv 1$ olması durumunda (Müller, 1956, 1963) tarafından verilen sonuçlar özel bir durum olarak elde edilmiştir.

Ayrıca özel olarak hareketin dönme açısı t parametresi olarak alınarak kompleks düzlemde, 1-parametrelili hareket esnasında yüksek mertebeden ivme ve poller tekrardan düzenlenmiştir.

3.1 Kompleks Düzlemde Bir Parametrelili Homotetik Hareketler Altında Yüksek Mertebeden İvmeler ve Poller

$H = E/E'$; kompleks düzlemde homotetik oranı $\forall t \in I$ için $h(t) \neq 0$ olan 1-parametrelili düzlemsel homotetik hareket ve $X \in E$ de hareketli düzleminde sabit bir nokta olsun. Bu noktayı kompleks x sayısı ile gösterelim.

Bu noktanın E' -sabit düzlemine göre hızı (mutlak hızı) sürüklenme hızına eşittir. Bu hız ise;

$$\dot{x}' = \dot{u}' + \left(\frac{\dot{h}}{h} + i\dot{\phi} \right) (x' - u') \quad (3.1.1)$$

bağıntısı ile ifade edilir.

Bu ifadenin bir defa daha t ye göre türevini alarak homotetik hareketler altında 2.mertebeden hız vektörü (1. mertebeden ivme vektörü) için

$$\ddot{x}' = \ddot{u}' + \left(\left(\frac{\ddot{h}}{h} - \frac{\dot{h}^2}{h^2} + i\ddot{\phi} \right) + \left(\frac{\dot{h}}{h} + i\dot{\phi} \right) \left(\frac{\dot{h}}{h} + i\dot{\phi} \right) \right) (x' - u') \quad (3.1.2)$$

bulunur. (3.1.1) deki $(x' - u')$ nin katsayısına Φ'_1 denilirse,

$$\Phi'_1 = \left(\frac{\dot{h}}{h} + i\dot{\phi} \right) \neq 0$$

yazılabilir. (3.1.2) deki ifadede $(x' - u')$ nin katsayısına Φ'_2 denilirse,

$$\Phi'_2 = \left(\left(\frac{\ddot{h}}{h} - \frac{\dot{h}^2}{h^2} + i\ddot{\phi} \right) + \left(\frac{\dot{h}}{h} + i\dot{\phi} \right) \left(\frac{\dot{h}}{h} + i\dot{\phi} \right) \right) \neq 0$$

olmak üzere Φ'_2 için,

$$\Phi'_2 = \dot{\Phi}'_1 + \Phi'_1 \Phi'_1$$

ifadesi elde edilir.

Buna göre,

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \ddot{\mathbf{u}}' + \Phi'_2 (\mathbf{x}' - \mathbf{u}')$$

eşitliğinin bir defa daha türevi alınırsa,

$$\overset{(3)}{\mathbf{x}'} = \overset{(3)}{\mathbf{u}'} + \dot{\Phi}'_2 (\mathbf{x}' - \mathbf{u}') + \Phi'_2 (\dot{\mathbf{x}}' - \dot{\mathbf{u}}')$$

elde edilir. (3.1.1) denkleminde $\dot{\mathbf{x}}'$ nın değeri bu son eşitlikte yazılırsa

$$\overset{(3)}{\mathbf{x}'} = \overset{(3)}{\mathbf{u}'} + \left(\dot{\Phi}'_2 + \Phi'_2 \Phi'_1 \right) (\mathbf{x}' - \mathbf{u}')$$

elde edilir. Ayrıca $\dot{\Phi}'_2 + \Phi'_2 \Phi'_1 = \Phi'_3 \neq 0$, denilirse

$$\overset{(3)}{\mathbf{x}'} = \overset{(3)}{\mathbf{u}'} + \Phi'_3 (\mathbf{x}' - \mathbf{u}')$$

yazılabilir.

Bu son ifadeye 3. mertebeden hız vektörü (veya 2. mertebeden ivme vektörü) denir.

Buradan bir defa daha türev alarak,

$$\overset{(4)}{\mathbf{x}'} = \overset{(4)}{\mathbf{u}'} + \dot{\Phi}'_3 (\mathbf{x}' - \mathbf{u}') + \Phi'_3 (\dot{\mathbf{x}}' - \dot{\mathbf{u}}')$$

elde edilir. (3.1.1) denkleminde $\dot{\mathbf{x}}'$ nın değeri bu son eşitlikte yazılır ve $\dot{\Phi}'_3 + \Phi'_3 \Phi'_1 = \Phi'_4 \neq 0$, denilirse

$$\overset{(4)}{\mathbf{x}'} = \overset{(4)}{\mathbf{u}'} + \Phi'_4 (\mathbf{x}' - \mathbf{u}')$$

bulunur. Bu son ifadeye 4. mertebeden hız vektörü (veya 3. mertebeden ivme vektörü) denir.

Ardışık türevler alarak devam edilirse yüksek mertebeden ivmeler elde edilir. (n-1). mertebeden ivme n. mertebeden hıza eşittir. Dolayısıyla yüksek mertebeden ivmelere aynı zamanda yüksek mertebeden hız da denilebilir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

3.1.1. Teorem

Kompleks düzlemde homotetik oranı $\forall t \in I$ için $h(t) \neq 0$ olan, φ dönme açılı $H = E/E'$, 1-parametrel düzlemsel homotetik hareket esnasında

$$\Phi'_1 = \left(\frac{\dot{h}}{h} + i\dot{\varphi} \right), \quad \Phi'_0 = 1, \quad \overset{(0)}{\mathbf{x}'} = \mathbf{x}' \quad \text{ve}$$

$$\Phi'_n = \dot{\Phi}'_{n-1} + \Phi'_{n-1}\Phi'_1 \neq 0 \quad (3.1.3)$$

olmak üzere, hareketli düzlemdeki sabit $\mathbf{x}$ noktalarının yüksek mertebeden ivmeleri için

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}'} = \overset{(n)}{\mathbf{u}'} + \Phi'_n (\mathbf{x}' - \mathbf{u}') \quad (3.1.4)$$

ifadesi mevcuttur.

İspat:

İspatımızı tümevarım yöntemi ile yapalım.

$n=1, n=2, n=3$ ve $n=4$ için teoremin doğru olduğu yukarıda gösterilmiştir.

Şimdi $n=k$ için (3.1.3) ve (3.1.4) nin doğru olduğunu kabul edip $n=k+1$ için doğruluğunu

gösterelim. Yani $\overset{(k)}{\mathbf{x}'} = \overset{(k)}{\mathbf{u}'} + \Phi'_k (\mathbf{x}' - \mathbf{u}')$ ve $\Phi'_k = \dot{\Phi}'_{k-1} + \Phi'_{k-1}\Phi'_1$ olsun.

Bu son eşitliğin bir defa daha türevi alınır

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{x}'} = \overset{(k+1)}{\mathbf{u}'} + \dot{\Phi}'_k (\mathbf{x}' - \mathbf{u}') + \Phi'_k (\dot{\mathbf{x}}' - \dot{\mathbf{u}}')$$

elde edilir. Burada (3.1.1) denkleminde $\dot{\mathbf{x}}'$ nin değeri yerine yazılırsa

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{x}'} = \overset{(k+1)}{\mathbf{u}'} + (\dot{\Phi}'_k + \Phi'_k \Phi'_1) (\mathbf{x}' - \mathbf{u}')$$

bulunur. Burada $\dot{\Phi}'_k + \Phi'_k \Phi'_1 = \Phi'_{k+1} \neq 0$ olmak üzere

$$\dot{\mathbf{x}}^{(k+1)} = \dot{\mathbf{u}}^{(k+1)} + \Phi'_{k+1}(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{u}})$$

elde edilir. $\square$

3.1.1. Özel Durum

Teorem (3.1.1) de özel olarak $h = 1$ alınırsa, teorem (2.4.1.) de verilen

$$\Phi'_1 = \phi'_1 = i\dot{\phi},$$

$$\Phi'_2 = \phi'_2 = i\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2$$

ve

$$\Phi'_n = \phi'_n$$

sonuçları bulunur, (Müller, 1956, 1963).

Yüksek Mertebeden Poller

$\mathbf{p}' = \mathbf{p}'_1$ dönme polünü için X noktası E -de sabit olduğundan ($\Phi'_n \neq 0$ olduğu göz önünde alınarak)

$$\dot{\mathbf{x}}' = \dot{\mathbf{u}}' + \Phi'_1(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{u}}) = 0$$

olmak üzere

$$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{p}'_1 = \dot{\mathbf{u}}' - \frac{\dot{\mathbf{u}}'}{\Phi'_1}$$

elde edilir.

$\ddot{\mathbf{x}}' = 0$ olmak üzere $\mathbf{p} = \mathbf{p}'_2$ dönme polü için

$$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{p}'_2 = \dot{\mathbf{u}}' - \frac{\ddot{\mathbf{u}}'}{\Phi'_2}$$

bulunur.

Benzer şekilde (3.1.4) denkleminin kullanılmasıyla $(n-1)$. mertebeden ivme polünü $\dot{\mathbf{x}}^{(n)} = 0$ için,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{p}'_n = \mathbf{u}' - \frac{\mathbf{u}'^{(n)}}{\Phi'_n} \quad (3.1.5)$$

şeklinde elde edilir.

(3.1.5) ifadesinden $\mathbf{u}'^{(n)}$ nin değeri (3.1.4) denkleminde yerine yazılırsa (3.1.4) denklemi ile verilen n . mertebeden hız vektörü pol noktaları cinsinden tekrardan

$$\mathbf{x}' = \Phi'_n (\mathbf{x}' - \mathbf{p}'_n) \quad (3.1.6)$$

şeklinde yazılabilir.

3.1.2. Özel Durum

$h=1$ ve $n=1$ olması durumunda (Müller, 1956, 1963) tarafından (2.3.10) denklemi ile verilen

$$\Phi'_1 = \phi'_1 = i\dot{\phi}$$

ve

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{u}' - \frac{\dot{\mathbf{u}}'}{i\dot{\phi}} = \mathbf{u}' + i \frac{\dot{\mathbf{u}}'}{\dot{\phi}}$$

ifadeleri elde edilir.

3.1.3. Özel Durum

$h \neq sbt.$ ve $n=1$ olması durumunda,

$$\Phi'_1 = \left(\frac{\dot{h}}{h} + i\dot{\phi} \right)$$

ve

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{u}' - \frac{h\dot{\mathbf{u}}'}{\dot{h} + ih\dot{\phi}}, \quad \mathbf{u}' = -\mathbf{u}e^{i\phi}$$

olduğuna göre, daha önce $\mathbf{p}'_1$ için elde edilen,

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = \frac{\dot{\mathbf{u}}\dot{h} + \mathbf{u}h\dot{\phi}^2 + i(\mathbf{u}\dot{h}\dot{\phi} - \dot{\mathbf{u}}h\dot{\phi})}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\phi}^2}$$

elde edilir, (Kuruoğlu vd., 2001).

Şimdi, (3.1.5) denklemi ile verilen, düzlemsel homotetik hareket esnasında E' düzleminde ki yüksek mertebeden ivme polü ve (3.1.6) denklemi ile verilen yüksek mertebeden hız vektörünün E hareketli düzleminde ki karşılıklarını ifade edelim:

$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$ dönme polünü sürüklenme hızının sıfır olmasıyla yani, X noktası E -düzleminde sabit olmak üzere $\mathbf{X}_f = 0$ olmasıyla tarif etmiştik. (2.6.8) denkleminde

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_f = \mathbf{X}'_f e^{-i\varphi} = (\dot{h} + ih\dot{\phi})\mathbf{x} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\phi})$$

olmak üzere

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_1 = \frac{\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\phi}}{\dot{h} + ih\dot{\phi}} = -\frac{\dot{\mathbf{u}}'}{h\Phi'_1} e^{-i\varphi}$$

elde edilir.

$\mathbf{p}_2$ ivme polü ise $\ddot{\mathbf{x}} = 0$ olmasıyla elde edilir.

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}' e^{-i\varphi} = \ddot{\mathbf{u}}' e^{-i\varphi} + \Phi'_2 (\mathbf{x}' - \mathbf{u}') e^{-i\varphi}$$

ve $\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{u}') e^{-i\varphi}}{h}$ olduğundan, $\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}' e^{-i\varphi} = \ddot{\mathbf{u}}' e^{-i\varphi} + h\Phi'_2 \mathbf{x}$ bulunur. Buradan,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_2 = -\frac{\ddot{\mathbf{u}}'}{h\Phi'_2} e^{-i\varphi}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $(n-1)$. mertebeden ivmenin sıfır olduğu $\mathbf{p}_n$ noktası yada $(n-1)$. mertebeden

ivme polü $\mathbf{x} = 0$ olmasıyla elde edilir:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' e^{-i\varphi} = \mathbf{u}' e^{-i\varphi} + \Phi'_n (\mathbf{x}' - \mathbf{u}') e^{-i\varphi}$$

ve $\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{u}')e^{-i\varphi}}{h}$ olduğundan, $\mathbf{x} = \mathbf{u}' e^{-i\varphi} + h\Phi'_n \mathbf{x}$ bulunur. Buradan,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_n = -\frac{\mathbf{u}'}{h\Phi'_n} e^{-i\varphi} \quad (3.1.7)$$

elde edilir. Böylece (2.4.10) formülünün genelleştirilmesinde (3.1.6) yerine

$$\mathbf{x} = h\Phi'_n (\mathbf{x} - \mathbf{p}_n) \quad (3.1.8)$$

ifadesi yazılabilir.

(3.1.6) bağıntısındaki kompleks büyüklüklerimizin mutlak değeri alınır ve X noktasının $\mathbf{p}_n$ polünden uzaklığının $|\mathbf{x}' - \mathbf{p}'_n|$ ile ifade ifade edildiğine dikkat edilirse, şu teoremi ispatsız verebiliriz:

3.1.2. Teorem

Kompleks düzlemde 1-parametrelî düzlemsel homotetik hareket esnasında n . mertebeden ivmelerin mutlak değeri, X noktasının n . mertebeden ivme polünden uzaklığı ile orantılıdır ve merkezleri bu pol olan daireler üzerinde aynı değeri alır. $\square$

(3.1.6) de $\mathbf{p}'\mathbf{x}'$ vektörüne karşılık gelen $\mathbf{x}' - \mathbf{p}'_n$ kompleks büyüklüğü X noktasından bağımsız olan Φ'_n kompleks çarpanı ile çarpıldığı için aşağıdaki teorem verilebilir:

3.1.3. Teorem

Kompleks düzlemde 1-parametrelî düzlemsel homotetik hareketler esnasında her t anında hareketli düzlemin bütün X noktalarının yüksek mertebeden ivme vektörleri pol ışınları ile aynı açıyı yaparlar.

İspat:

Kompleks bir çarpan ile çarpma koordinat sisteminin ilk durumundan bir dönme-uzama (dönme+uzama) sına tekabül eder.

Her bir X noktasında bu noktaya ait yüksek mertebeden ivme vektörleri oluşturulur ve bu vektörleri X noktaları etrafında sabit açı kadar döndürürsek, bu durumda dönmüş olan bu vektörlerin hepsi ilgili ivme polünü verir. $\square$

(3.1.2) ve (3.1.3) teoremlerini $n=1,2$ özel durumları için tekrar açıklayalım:

i) $n=1$ için $\Phi'_1 = \left(\frac{\dot{h}}{h} + i\dot{\phi} \right)$ bulunur. Bu durumda hızlar pol ışınlarına dik değildir, (Düldül, 2000). Ancak $h=1$ olması durumunda diktir, (Müller, 1956, 1963).

ii) $n=2$ için hareketli düzlemin X noktalarının 1.mertebeden ivmelerini elde ederiz. Bu ivmelerin dağılımı aşağıdaki tarzda verilmiştir:

a) $\mathbf{p}_2$ ivme polünde 1.mertebeden ivme sıfırdır.

b) $\mathbf{p}_2$ merkezli daireler üzerindeki ivmeler aynı mutlak değere sahip ve dairenin yarıçapı ile orantılıdır.

c) İvmelerin $\mathbf{P}_2\mathbf{X}$ pol ışını ile teşkil ettikleri ψ açısı

$$\Phi'_2 = \left(\frac{\ddot{h}}{h} - \frac{\dot{h}^2}{h^2} + i\ddot{\phi} \right) + \left(\frac{\dot{h}}{h} + i\dot{\phi} \right) \left(\frac{\dot{h}}{h} + i\dot{\phi} \right) = \frac{\ddot{h}}{h} - \dot{\phi}^2 + i \left(\ddot{\phi} + 2\dot{\phi} \frac{\dot{h}}{h} \right)$$

kompleks sayısının ψ argümenti ile belirtilir ve genel olarak t zamanına olup

$$\tan \psi = \frac{\ddot{\phi} + 2\dot{\phi} \frac{\dot{h}}{h}}{\frac{\ddot{h}}{h} - \dot{\phi}^2}$$

ile verilir.

3.1.4. Özel Durum

$h = 1$ alınması durumunda (Müller, 1956, 1963) tarafından verilen

$$\tan \psi = -\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{\phi}} \right)$$

sonucu elde edilir.

3.2 Parametre Olarak Dönme Açısı

Şimdi, kompleks düzlemde 1-parametrelili düzlemsel homotetik hareket esnasında hareketin φ dönme açısını hareketin t parametresi seçerek daha önce (3.1.4) ve (3.1.5) ile verilen ifadeleri daha sade olarak elde etmek istiyoruz:

$\varphi = t$ ise $\dot{\varphi} = 1$ olduğundan,

$$\Phi'_1 = \left(\frac{\dot{h}}{h} + i\dot{\varphi} \right) = \frac{\dot{h}}{h} + i$$

yazılabilir. Φ'_2 için,

$$\Phi'_2 = \left(\frac{\ddot{h}}{h} + 2i\frac{\dot{h}}{h} \right) + (-1)$$

elde edilir. Φ'_3 için ise,

$$\Phi'_3 = \left(\frac{\ddot{\ddot{h}}}{h} + 3i\frac{\ddot{h}}{h} - 3\frac{\dot{h}}{h} \right) + (-i)$$

bulunur. Bu şekilde devam edilirse,

$$\Phi'_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{h^{(n-k)}}{h} \right) (i)^k + i^n \quad (3.2.1)$$

elde edilir. Buna göre (3.1.4) denkleminde verilen, $\mathbf{x}'$ için

$$\mathbf{x}' = \mathbf{u}' + \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{h^{(n-k)}}{h} \right) (i)^k + i^n \right] (\mathbf{x}' - \mathbf{u}') \quad (3.2.2)$$

ve (3.1.5) deklemini ile verilen $\mathbf{p}'_n$ için ise,

$$\mathbf{p}'_n = \mathbf{u}' - \frac{\mathbf{u}'}{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{h^{(n-k)}}{h} \right) (i)^k + i^n} \quad (3.2.3)$$

ifadesi elde edilir.

Buradan $\mathbf{u}^{(n)}$ nin değerini bulup (3.2.2) de yerine yazarsak $\mathbf{x}'^{(n)}$ n . mertebeden ivme vektörü tekrardan

$$\mathbf{x}'^{(n)} = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{h}{h} \right)^{(n-k)} (i)^k + i^n \right] (\mathbf{x}' - \mathbf{p}'_n)$$

şeklinde düzenlenebilir.

Ayrıca bu son eşitlikten

$$\mathbf{x}' + \left[- \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{h}{h} \right)^{(n-k)} (i)^k + i^n \right\} \right]^{-1} \mathbf{x}' = \mathbf{p}'_n \quad (3.2.4)$$

yazılabilir. Burada $\left[- \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{h}{h} \right)^{(n-k)} (i)^k + i^n \right\} \right]^{-1}$ ifadesine $a + ib$ şeklinde bir kompleks sayı

karşılık geleceğinden aşağıdaki teorem verilebilir:

3.2.1. Teorem

Kompleks düzlemde, 1-parametrelî düzlemsel homotetik hareket esnasında dönme açısı parametre olarak seçilir ve hareketli düzlemin herhangi bir sabit X noktasında $\arg(a + ib)$

açısı kadar dönmüş, $a + ib$ nin modülü kadar uzamış (yada kısalmış) n . mertebeden $\mathbf{x}'^{(n)}$ türev vektörü ile $\mathbf{x}'$ vektörünün toplamı $(n-1)$. mertebeden $\mathbf{p}'_n$ ivme polünü verir.

3.2.1. Özel Durum

Özel olarak (3.2.1) denkleminde $h \equiv 1$ alınırsa (2.4.11) denkleminde verilen

$$\left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{h}{h} \right)^{(n-k)} (i)^k + i^n \right] = i^n$$

ifadesi ve Teorem (3.2.1) de ise $a + ib = i^{2-n}$

elde edilir, (Müller, 1956, 1963).

4. SONUÇ

Bu çalışmada, kompleks düzlemde 1-parametrelî homotetik hareketler altında yüksek mertebeden hız ve ivmeler ile yüksek mertebeden poller incelenmiş ve geometrik olarak yorumlanmıştır. Ayrıca, özel olarak hareketin “ t ” parametresi yerine hareketin dönme açısı alınması durumunda yüksek mertebeden hız ve poller için daha sade ifadeler elde edilmiştir. Hareketin “ h ” homotetik oranı $h \equiv 1$ olması durumunda ise (Müller, 1956, 1963) tarafından verilen sonuçlar özel hal olarak elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Müller, H.R. (1963), "Kinematik Derleri", Ankara Üniversitesi, Ankara.

Müller, H.R. (1956), "Ebene Kinematik", Verlag von R. Oldenbourg, München.

Müller, H.R. (1978), "Verallgemeinerung einer Formel von Steiner", Abh.d.Brschw. Wiss. Ges. Bd.,107-113.

Düldül, M. (2000), "Kompleks Düzlemde 1-Parametrel Hareketler ve Holditch Teoremi", Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun.

Tutar, A., Kuruoğlu, N., (1999), "The Steiner Formula and the Holditch Theorem for the Homothetic Motions on Planar Kinematics", Mechanism and Machine Theory, 34, 1-6.

Kuruoğlu, N., Tutar, A., Düldül, M., (2001), "On the 1-Parameter Homothetic Motions on The Complex Plane", International Journal of Applied Mathematics, 6, No.4, 439-447.

Kuruoğlu, N., Düldül, M., Tutar, A., (2003), "Generalization of Steiner Formula for the Homothetic Motions on the Planar Kinematics", Applied Mathematics and Mechanics, 24, no. 8, 835-838.

Kuruoğlu, N., Yüce, S., (2001), "The Generalization Holditch Theorem for the Homothetic Motions on the Planar Kinematics", Czechoslovak Mathematical Journal, 54(129), 337-340.

Yüce, S., Kuruoğlu, N., (2002), "A Generalization of the Holditch Theorem for the Homothetic Motions", Applications Mathematics, 50, No.2, 87-91.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 10.01.1984

Doğum yeri Hatay

Lise 1997–2001

Lisans 2001-2006

Yüksek Lisans 2007–2009

Çalıştığı kurumlar

2006–2009 Özel Dershane Matematik Öğretmenliği

2009-Devam ediyor YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi

