

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İÇİ BOŞ YEREL EĞRİLİKLİ TEK LİF İÇEREN SONSUZ ELASTİK
ORTAMDA GERİLME YAYILIMI**

Mat. Müh. Fatma ÇOBAN

FBE Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı Matematik Mühendisliği Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Reşat KÖŞKER

İSTANBUL,2009

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İÇİ BOŞ YEREL EĞRİLİKLİ TEK LİF İÇEREN SONSUZ ELASTİK
ORTAMDA GERİLME YAYILIMI**

Mat. Müh. Fatma ÇOBAN

FBE Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı Matematik Mühendisliği Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Reşat KÖŞKER



Yrd. Doç. Dr. Elif TARIM



İSTANBUL, 2009

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ŞEKİL LİSTESİ.....	iii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	v
ÖNSÖZ.....	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Nanoteknoloji.....	1
1.1.1 Nanoboyutun Farkı.....	2
1.1.2 Türkiye’de Nanoteknoloji.....	2
1.1.3 Nanoteknolojinin Kullanım Alanları.....	3
1.2 Nanokompozitler.....	3
1.3 Karbon Nanotüpler.....	4
1.3.1 Karbon Nanotüp Çeşitleri.....	5
1.3.2 Mekanik Özellikler.....	8
1.4 Tek Yönlü Eğrisel Yapıya Sahip Lifli Kompozitlerin Gerilme Durumuna Ait Çalışmaların Kısa Özeti.....	10
1.5 Konunun Gerekliliği ve Güncelliği.....	11
2. İÇİ BOŞ YEREL EĞRİLİKLİ TEK LİF İÇEREN SONSUZ ELASTİK ORTAMDA GERİLME YAYILIMI.....	13
2.1 Problemin Formülasyonu.....	13
2.2 Çözüm Yönteminin Geliştirilmesi.....	19
2.3 Araştırma Yönteminin Gerektirdiği Sınır Değer Probleminin Çözümü.....	25
2.4 Sayısal Sonuçlar.....	34
3. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME.....	59
KAYNAKLAR.....	61
İNTERNET KAYNAĞI.....	64
ÖZGEÇMİŞ.....	65

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1	İçi boş tek lif içeren sonsuz elastik cismin geometrisi ve seçilen koordinat takımları.....	13
Şekil 2.2	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nn}/ p $ ile h/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $x_3/L = 0$, $\varepsilon = 0.07$, $\theta=0$).....	37
Şekil 2.3	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ne}/ p $ ile h/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $x_3/L = 0$, $\varepsilon = 0.07$, $\theta=0$).....	38
Şekil 2.4	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nt}/ p $ ile h/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $x_3/L = 0$, $\varepsilon = 0.07$, $\theta=\frac{\pi}{2}$).....	39
Şekil 2.5	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nn}/ p $ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $ak = 0.25$, $\varepsilon = 0.07$, $\theta=0$).....	40
Şekil 2.6	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nt}/ p $ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $ak = 0.25$, $\varepsilon = 0.07$, $\theta=\frac{\pi}{2}$).....	41
Şekil 2.7	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ne}/ p $ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $ak = 0.25$, $\varepsilon = 0.07$, $\theta=0$).....	42
Şekil 2.8	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nn}/ p $ ile R_2/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $x_3/L = 0$, $\varepsilon = 0.07$, $\theta=0$).....	43
Şekil 2.9	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nt}/ p $ ile R_2/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $x_3/L = 0$, $\varepsilon = 0.07$, $\theta=\frac{\pi}{2}$).....	44
Şekil 2.10	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ne}/ p $ ile R_2/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $x_3/L = 0.0$, $\varepsilon = 0.07$, $\theta=0$).....	45
Şekil 2.11	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nn}/ p $ ile θ arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $x_3/L = 0$, $\frac{h}{L} = 0.5$, $\varepsilon = 0.07$).....	46
Şekil 2.12	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nt}/ p $ ile θ arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $x_3/L = 0.7$, $\frac{h}{L} = 0.5$, $\varepsilon = 0.07$).....	47
Şekil 2.13	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ne}/ p $ ile θ arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $x_3/L = 0$, $\frac{h}{L} = 0.5$, $\varepsilon = 0.07$).....	48
Şekil 2.14	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nn}/ p $ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 500$, $\theta = 0$, $\frac{h}{L} = 0.1$, $\varepsilon = 0.07$).....	49

Şekil 2.15	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nr}/ p $ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 500, \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{h}{L} = 0.1, \varepsilon = 0.07$) 50
Şekil 2.16	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ne}/ p $ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 500, \theta = 0, \frac{h}{L} = 0.1, \varepsilon = 0.07$) 51
Şekil 2.17	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nn}/ p $ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 300, \theta = 0, \frac{h}{L} = 0.1, \varepsilon = 0.07$) 52
Şekil 2.18	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nr}/ p $ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 300, \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{h}{L} = 0.1, \varepsilon = 0.07$) 53
Şekil 2.19	Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ne}/ p $ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$ ($E^{(2)}/E^{(1)} = 300, \theta = 0, \frac{h}{L} = 0.1, \varepsilon = 0.07$) 54

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 1.1	CNT' ler de Mekanik Özelliklerin Karşılaştırılması.....	9
Çizelge 2.1	Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α 'lar için $\sigma_{nn}/ p $ 'nın birinci yaklaşım değerleri ($x_3/L = 0, h/L = 0.25, \varepsilon = 0.07$).....	55
Çizelge 2.2	Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α 'lar için $\sigma_{nr}/ p $ 'nın birinci ve ikinci yaklaşım değerleri ($x_3/L = 0.7, h/L = 0.25, \varepsilon = 0.07$).....	56
Çizelge 2.3	Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α 'lar için $\sigma_{ne}/ p $ 'nın birinci ve ikinci yaklaşım değerleri ($x_3/L = 0, h/L = 0.25, \varepsilon = 0.07$).....	57
Çizelge 2.4	$E=500$, $m=0$ ve $\alpha=0.00005$ ve $\alpha=-0.00005$ $\sigma_{nn}/ p , \sigma_{nr}/ p $ ve $\sigma_{ne}/ p $ 'nın birinci yaklaşım değeri	58

ÖZET

Tek yönlü lifli kompozit malzemelerdeki liflerin eğriliği ya dizayn gereksiniminden ya da teknolojik işlemlerin uyumsuzluğu nedeniyle ortaya çıkmaktadır. Genellikle dizayn gereksiniminden ortaya çıkan eğrisellikler periyodik eğrilikler, teknolojik işlemler sırasında ortaya çıkanlar ise yerel eğrilikler olarak modellenirler. Bu çalışmada, sonsuz ortamda düşük yoğunluklu sonsuz uzunluklu içi boş yerel eğrilikli tek lif olması durumu ele alınmış ve gerilme dağılımı incelenmiştir. Böylece nanokompozit alanına uygulanabilecek bir çalışma yapılmıştır. Bu incelemeler parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin üç boyutlu kesin geometrik nonlinear denklemleri kullanılarak yapılmıştır. Ayrıca sonsuzda lif yönünde düzgün yayılmış normal kuvvetler etki gösterdiği ve lif yüzeyine dik kesitlerin yarıçapı lif boyunca değişmeyen daireler olduğu kabul edilmiştir.

Uygun sınır-değer problemlerinin çözümü için sınır formu pertürbasyon yönteminden yararlanılarak yaklaşık analitik bir metod kullanılmıştır.

Ele alınan ortamdaki gerilme yayılımına ve bu yayılıma geometrik nonlinearitenin etkisi ile ilgili çok sayıda sayısal sonuç elde edilmiş ve yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lifli kompozit, gerilme yayılımı, geometrik nonlinearite, yerel eğrilik

ABSTRACT

The curvature of the fibers of the unidirectional fibrous composite materials is occurred due to design requirements or technological processes. Usually the curvature caused by design features is modeled as a periodical, whereas the curvature caused by the technological process is modeled as a local one. In this study, the case where a single locally curved and hollow fiber with an infinite length contained by an infinite body with low concentration of fibers is considered and stress distribution in that is investigated. In this way, a study was made can be used in the field of nanocomposite. The investigations are carried out within the framework of the piecewise homogeneous body model with the use of three-dimensional geometrical nonlinear exact equations of the theory of elasticity. Furthermore, it is assumed that the body is loaded at infinity by uniformly distributed normal forces which act along the fibers and the crosssection of the fibers and normal to its axial line, is a circle of constant radius along the entire fiber length.

For the solution of considered boundary value problem, an approximate analytical method is developed by using the boundary form perturbation method.

The numerous numerical results related to the stress distribution in considered body and the influence of geometrical nonlinearity to this distribution are obtained and interpreted.

Keywords: Fibrous composite, stress distribution, geometrical nonlinearity, local curvature

1 GİRİŞ

1.1 Nanoteknoloji

Nanoteknoloji maddeyi atomik ve moleküler seviyede kontrol etme bilimidir. Genel olarak 100 nm ve daha küçük boyutta malzeme ve aygıt geliştirmekle ilgilidir. 1 nm, metrenin milyarda biridir.

Nanoteknoloji birçok alanı kapsayan bir bilim dalıdır. Aygıt fiziği, malzeme bilimi, elektronik, kimya, biyoloji gibi bilim dallarından araştırmacılar, nanoteknoloji çalışmaları yapmaktadır.

Nanoteknolojinin etkileri üzerinde çok tartışma olmuştur. Nanoteknolojinin tıp, elektronik ve enerji üretimi gibi alanlarda uygulanma potansiyeli vardır. Bunun yanında, her yeni teknolojide olduğu gibi, nanomalzemelerin de sağlık ve çevre üzerindeki etkileri merak edilmektedir.

Nanoteknoloji kelimesini ilk defa kullanan Tokyo Bilim Üniversitesi'nden Norio Taniguchi olmuştur. 1974'de yayınlanan bir makalede Taniguchi'nin tanımı şöyledir: " Nano-teknoloji, genel olarak malzemelerin atom atom ya da molekül molekül işlenmesi, ayrılması, birleştirilmesi ve bozulmasıdır." Nanoteknoloji kelimesinin ortaya çıkmasından önce, fikir olarak dile getirilmiştir. Bu fikrin ilk dile getirildiği yer Richard Feynman'ın "Aşağıda Daha Çok Yer Var" adlı konuşmasıdır. Feynman bu konuşmasında atomları ve molekülleri kontrol etmeyi becerebileceğimizden, bunu yapabilmek için de yeni aletlere ihtiyacımız olduğundan bahsetmiştir. Atomik seviyede yer çekimi kuvvetinin öneminin azalacağına, Van der Waals gibi zayıf kuvvetlerin öneminin artacağını da belirtmiştir. Feynman'ın yanında bir başka fikir adamı ise Eric Drexler' dır. 1986' da yayınladığı " Yaratma Motorları: Nanoteknolojin Yaklaşan Devri" ve " Nanosistemler: Moleküler Mekanizmalar, Üretim ve Hesaplama" kitaplarında istediğimiz maddeyi atom atom dizerek oluşturan nanorobotların varolabileceğini ispat etmeye ve bu teknolojinin etkilerini ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Ayrıca "Yaratma Motorları: Nanoteknolojin Yaklaşan Devri" yayınlanan ilk nanoteknoloji kitabıdır.

Nanoteknolojinin gelişmesini sağlayan buluş ise Tarama Tünelleme Mikroskobu'nun keşfedilmesidir. Bu mikroskop sayesinde iletken bir yüzeydeki atomların yerleri değiştirilebilmektedir. Bu gelişmeyi 1986'da fullerene'lerin ve karbon nanotüplerin keşfi izledi. 2000'de ABD'nin nanoteknolojiye yatırım yapması sonucu tüm Dünya'nın birçok ülkesinde nanoteknoloji araştırmaları başlamış oldu.

1.1.1 Nanoboyutun Farkı

Nanoteknolojiyi bu kadar ilginç kılan unsur, malzemeler nanoboyutta makrodünyadan farklı davranmalarıdır. Külçe şeklindeki altın başka maddelerle reaksiyona girmek istemezken, nanoboyuttaki altında bu durumun tam tersi gözlemlenmektedir. Kuantum etkileri yüzünden maddeler, nanoboyutta farklı özellikler göstermektedir. Bu özellik yüzünden, bilim adamları malzemelerin nanoboyuttaki hallerini araştırıp, sorunlara çözüm bulmaya çalışmaktadırlar.

1.1.2 Türkiye'de Nanoteknoloji

Nanoteknolojinin 2025 yılı itibariyle hayatımızı büyük ölçüde etkileyeceği düşünülmektedir. Türkiye de şimdiden nanoteknolojiyi üretir hale gelebilmek için uygun adımlar atmaya başlamıştır. Tübitak'ın 2023 Vizyon Programı'nda nanoteknoloji yer almış ve yol haritası oluşturulmuştur. En önemli gelişme Bilkent Üniversitesi'nde Ulusal Nanoteknoloji Araştırma Merkezi'nin (UNAM) kurulmasıdır. Bu merkezin amacı, Türkiye'de nanoteknolojinin araştırma merkezi olmaktır. Devlet Planlama Teşkilatı (DPT) tarafından 28 milyon YTL yatırım yapılan merkez son derece modern aletlerle donatılmıştır. Türkiye'nin her yerinden araştırmacılar UNAM'ın bu imkanlarından yararlanabilmektedir. Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, TÜBİTAK MAM, gibi merkezler de nanoteknoloji araştırması yapılan yerlerdendir. Ülkemizde nanoteknoloji ile ilgili etkinlikler de yapılmaktadır. Bunlardan bazıları 4 yıldan beri yapılan NANO TR konferansları, 22-23 Aralık 2008 tarihleri arasında Sabancı Center' daki " Nanoteknoloji Pazarı" dır. Şu anda Türkiye'de yeni kurulan 13 tane nanoteknoloji şirketi vardır. Büyük şirketlerin de nanoteknolojik ürünleri piyasaya sürülmüştür.

1.1.3 Nanoteknolojinin Kullanım Alanları

Nanoteknoloji yavaş yavaş hayatımıza girmektedir. Şu an nanoteknolojinin 2. devresinin sonlarındayız. 2010 yılı itibari ile 3. nesil, 2020 yılı itibari ile de 4. nesil nanoteknolojik ürünlerin çıkması bekleniyor. ABD'de de bulunan Project On Emerging Nanotechnologies adlı kurumun internette yayınladığı listede Ocak 2009 itibari ile 803 nanoteknolojik ürün bulunmaktadır. Listede sağlık, tekstil, elektronik, otomotiv, gıda ürünlerinden örnekler bulunmaktadır. Günümüzdeki nanoürünlerin çoğu varolan bir malzemeye nanoyapılarla suyu itme, güzel koku salma gibi ek özellikler eklenmiş halidir.

1.2 Nanokompozitler

Nanokompozitler, fazlarından biri 100 nanometreden az bir, iki yada üç boyut çoklu fazda katı malzemeler yada nano-ölçeğe sahip, malzemeleri oluşturan farklı fazlar arasındaki uzaklığı tekrar ettiği yapılar olarak tanımlanır. En geniş anlamıyla, bu tanım, geçirgen ortam, koloidler (tutkal), jeller, kopolimerleri içerir fakat daha sık anlaşıldığı şekilde yığın matrislerin katı bileşimler yada yapısal ve kimyasal açıdan benzemedikleri için özellikleri açısından farklılık gösteren nanoboyutlu faz(lar)dır. Mekaniksel, elektriksel, ısısal, optiksel, elektrokimyasal, nanokompozitlerin katalitik özellikleri belirgin şekilde bileşen malzemelerden farklılık gösterecektir. O etkiler için boyut sınırı katalitik aktivite için 5 nm' den küçük, sert manyetik malzemenin yumuşatılması için 20 nm' den küçük, sapma indeksinin değişmesi için 50 nm' den küçük, süperparamanyetizme, mekanik sağlamlaştırıcı yada kısıtlayıcı matris dislokasyon hareketine ulaşılması için 100 nm' den küçük olarak planlanmıştır.

Nanokompozitler doğada bulunur, örneğin abalone kabuk ve kemik yapısı. Nanotanecikli zengin malzemelerin kullanımı, bu fiziksel ve kimyasal doğal malzemelerin anlaşılmasından daha önce gelir. Jose-Yacaman, renklerin derinliğinin kökenini ve asitlere direnişi ve Maya mavisi boyanın biyo-korozyonunu nanotanecikli bir mekanizmaya yükleyerek inceledi. 1950lerin ortalarından nanoölçekli organik çamur polimer çözümlerin akışını(örneğin boya viskosiferi) ya da jellerin tabiatını (örneğin kozmetik içinde kalınlaşan bir malzeme, homojen form içinde tutulan hazırlamalar) kontrol etmek için kullanıldı. 1970' lere kadar,

“nanokompozit” terimi yaygın olarak kullanımda olmasa da polimer/kil kompozitler ders kitaplarının başlığı olarak yer aldı.

Mekaniksel olarak, nanokompozitler destekleme(takviye) faz hacmi oranı için son derece yüksek yüzeyinden ve son derece yüksek en/boy oranından dolayı geleneksel kompozit malzemelerden farklılık gösterir. Takviye malzemeler taneciklerden(örneğin minareller), tabakalardan (örneğin pulpul dökülen kil yığınlarından), liflerden(örneğin karbon nanotüpler ya da elektrospun lifler) oluşturulur. Destekleme faz(ları)yla matrisler arasında ara yüzey alanı, tipik olarak geleneksel kompozit malzemeler için daha büyük bir çaptadır. Matris malzemenin özellikleri önemli ölçüde destek çevresinden etkilenir.

Büyük miktarda destek yüzey alanı, göreceli bir küçük miktarda nanoölçekli destekleme kompozitlerin makroölçekli özelliklerinde gözlemlenebilir bir etkiye sahip olabileceği anlamına gelir. Örneğin eklenen karbon nanotüpler elektrik ve ısı iletkenliklerini geliştirir. Öteki nanopartikül çeşitleri geliştirilmiş optik özelliklerle, dialektik özelliklerle, ısı direnciyle ya da katılık, kuvvet gibi mekanik özelliklerle, yıpranma ve hasar direnciyle sonuçlanabilir. Genel olarak, nano destek işlem sırasında matrisin içine yayılır. Tanıtılmış nanopartiküllerinin ağırlık yüzdesi (kütle parçasıda denilen) düşük tıkaç sızma eşiğinden dolayı çok düşük artış gösterir, özellikle çok yaygın kullanılan küresel olmayan yüksek en/boy oranı tıkaç (örneğin nanometre-ince trombositler, killer ya da nanometer-diametre silindirleri , karbon nanotüpleri).

1.3 Karbon Nanotüpler

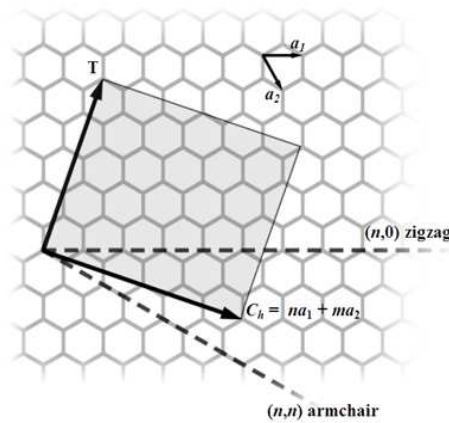
Karbon nanotüpler (CNTs), herhangi diğer maddelerden daha büyük olup 28,000,000:1'e kadar en-boya sahip olabilen bir nano yapıları karbonun allotroplarıdır. Bu silindirik karbon molekülleri, bunları, mimari alanlarındaki potansiyel kullanımı kadar nanoteknoloji, optik ve madde biliminin diğer alanlarındaki birçok uygulamada da potansiyel olarak kullanışlı yapan yeni özelliklere sahiplerdir. Onlar olağanüstü güç, tek elektriksel özellikler gösterirler ve etkin ısı ileticisidirler. Ancak, son kullanımları potansiyel zehirliliklerinden dolayı sınırlandırılabilir.

Nanotüpler, aynı zamanda küresel buckyball (karbon molekülleri, 60 tane karbon atomunun bir futbol topu şeklinde biraraya gelmesinden oluşan yapı) içeren küre şeklindeki karbon molekülleri (fullerene) yapısal ailesinin üyeleridirler. Bir nanotüpün sonu buckyball yapısının bir yarıküresiyle kapatılabilir. Bir nanotüpün boyu çeşitli milimetrelerde olabilirken (2008’den itibaren) eninin birkaç nanometre (yaklaşık bir insan saçı kalınlığının 1/50000’i) olmasından dolayı isimleri boyutlarından türemiştir. Nanotüpler tek-duvarlı (SWNTs) ve çok-duvarlı (MWNTs) nanotüpler olarak sınıflandırılabilir.

1.3.1 Karbon Nanotüp Çeşitleri

1.3.1.1 Tek-duvarlı Nanotüpler

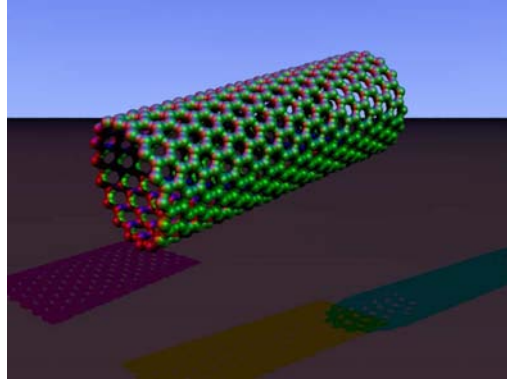
Birçok tek-duvarlı nanotüpün, eni 1 nanometreye yakındır ve boyu milyonlarca kat daha uzun olabilir. Bir tek-duvarlı nanotüpün yapısı, grafen olarak adlandırılan grafitin bir atom kalınlıklı bir katmanı dikişsiz bir silindirin içine sarılarak canlandırılabilir. Grafen katmanını sarmanın yolu chiral vektör olarak bilinen (n,m) indis çiftleriyle gösterilir. n ve m tamsayıları grafenin petek şeklindeki kristal kafesindeki iki yön boyunca olan birim vektörlerin sayısını ifade eder. Eğer $m=0$ ise, nanotüpler ‘zigzag’ olarak adlandırılır. Eğer $n=m$ ise, nanotüpler ‘koltuk-armchair’ olarak adlandırılır. Diğer hallerde, ‘chiral’ olarak isimlendirilir.



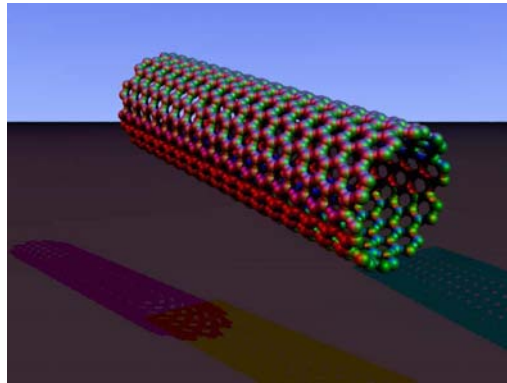
Şekil 1.1 Chiral Vektör

Tek-duvarlı nanotüpler karbon nanotüplerin önemli bir  e sididir. Çünkü bunlar, çok-duvarlı karbon nanotüp  e itleri tarafından payla ılmayan elektrik özellikleri gösterirler. Tek-duvarlı nanotüpler, elektronikte mevcut olarak kullanılan mikro elektromekaniksel ölçeğin arkasındaki elektroniği küçültmeye yakın bir adaydır. Bu sistemin en temel yapı taşı elektrik kablolarıdır ve SWNT’ler m kemm l iletkenler olabilirler. SWNT’lerin bir uygulaması, ilk i  moleküler alan etki transistörlerinin (AET) geliştirilmesinde yapılmıştır. SWNT AET’ler kullanarak ilk i  moleküler lojik kapısının üretimi de mümkün olmuştur.

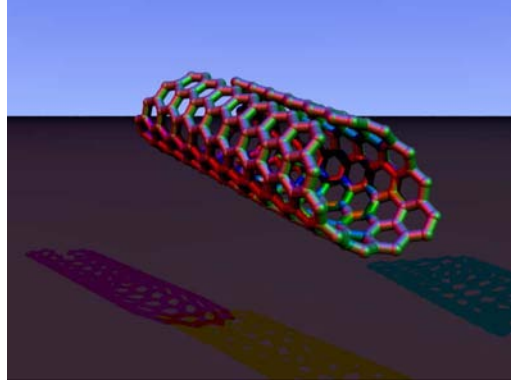
Tek-duvarlı nanotüplerin üretimi, hala (gramı \$1500, \$2000’den itibaren)  ok maliyetlidir ve bu yüzden maddi açıdan daha rahat karşılanabilir sentez tekniklerinin geliştirilmesi karbon nanoteknolojinin geleceği açısından hayati önem taşır. Eğer sentezin daha ucuz anlamı ke fedilemezse, bu teknolojiyi ticari-ölçek uygulamalarında kullanmak finansal olarak imkansız olacaktır.



Şekil 1.2 Zigzag Nanotüp



Şekil 1.3 Armchair Nanotüp



Şekil 1.4 Chiral Nanotüp

1.3.1.2 Çok-duvarlı Nanotüpler

Çok-duvarlı nanotüpler (MWNT) çoklu yuvarlanmış grafit katmanlardan (ortak merkezli tüpler) oluşmaktadır. Çok-duvarlı nanotüplerin yapılarını tanımlamak için iki model kullanılabilir. *Russian Doll* modelinde, grafit tabakaları ortak merkezli silindirler şeklinde, örneğin (0,8) tek-duvarlı nanotüp (SWNT) daha geniş (0,10) tek-duvarlı nanotüp içinde, düzenlenmiştir. *Parchment* modelinde ise, parşömen tomarı veya yuvarlanmış gazeteye benzer şekilde tek bir grafit tabakası kendisi etrafında yuvarlanmıştır. Çok-duvarlı nanotüplerde ara katman uzaklığı grafitteki grafen (graphene) katmanları arasında uzaklığa yakındır ve yaklaşık olarak 3.3 Å (330 pm)'dır.

Çift-duvarlı karbon nanotüplerin (DWNT) özel yeri burada vurgulanmalıdır çünkü onların morfolojisi ve özellikleri SWNT'e benzerdir ama kimyasallara dayanıklılıkları anlamlı derecede geliştirilmiştir. Bu özellik, CNT'ye yeni özellikler eklemek için fonksiyonallizasyon gerektiğinde önemli olmaktadır (bu, kimyasal fonksiyonların nanotüplerin yüzeyinde aşılması (grafting) anlamına gelmektedir). SWNT durumunda, eşdeğerli fonksiyonallizasyon bazı C=C çift tahvilleri bozup nanotüpün yapısında “delikler” bırakmaktadır ve bu yüzden hem mekanik hem de elektrik özelliklerini değiştirmektedir. DWNT durumunda ise, sadece dış duvar değişmektedir. DWNT sentezi gram-ölçeğinde ilk olarak 2003'te, metan ve hidrojenle oksit çözeltilerinin seçmeli indirgemesindeki CCVD tekniği vasıtasıyla ileri sürülmüştür.

1.3.2 Mekanik Özellikler

Karbon nanotüpler sırasıyla gerilme kuvveti ve elastikiyet modülü(young modülü) terimleri bakımından yeni keşfedilen maddeler arasında en kuvvetlisi ve en katıdır. Bu kuvvet, birbirinden ayrı karbon atomlarının arasında oluşan eşdeğer sp^2 tahvillerinden ileri gelmektedir. 2000 yılında çok-duvarlı bir karbon nanotüp test edilmiştir ve gerilme kuvveti 63 gigapascal (GPa) bulunmuştur. (Bu, örnek olarak, 1 mm²'lik enine kesit bir kablo üzerinde 6300 kg'lık bir ağırlığa katlanma yeteneği olarak tercüme edilebilir.) Karbon nanotüpler 1.3-1.4 g·cm⁻³'lik bir katı için düşük yoğunluğa sahip olduğu halde, kendine özgü kuvveti 48,000 kN·m·kg⁻¹'den daha fazladır ve 154 kN·m·kg⁻¹ yüksek-karbon çeliğe kıyasla, bilinen maddelerin arasında en iyisidir.

Çok fazla bir gerilme basıncı altında, tüpler plastik deformasyona uğrayacaktır, ve bu deformasyon kalıcı olacaktır. Yaklaşık olarak %5 gerilmelerde deformasyon başlar ve tüpler kırılmadan önce gerilme enerjisini serbest bırakarak katlandığı maksimum gerilme artabilir.

CNT'ler sıkıştırma altında yeteri kadar kuvvetli değildir. Delikli yapıları ve yüksek en-boy oranı yüzünden, sıkıştıran, burulmayla ilgili veya eğilme gerilmesi altına yerleştirildiklerinde burulmaya katlanma eğilimi gösterirler.

Çizelge 1.1 CNT' ler de Mekanik Özelliklerin Karşılaştırılması

Mekanik Özelliklerin Karşılaştırılması			
Madde	Young Modülü(TPa)	Gerilme Kuvveti(GPa)	Kopma Esnemesi(%)
SWNT	~1 (1'den 5'e kadar)	13-53 ^D	16
Armchair SWNT	0.94 ^T	126.2 ^T	
Zigzag SWNT	0.94 ^T	94.5 ^T	15.6-17.5
Chiral SWNT	0.92		
MWNT	0.8-0.9 ^D	150	
Paslanmaz Çelik	~0.2	~0.65-1	15-50
Kevlar	~0.15	~3.5	~2
Kevlar ^T	0.25	29.6	

^D Deneysel gözlem

^T Teorik tahmin.

Yukarıdaki tartışma nanotüpün eksen özellikleri ile ilgilidir, oysa basit geometrik varsayımlar karbon nanotüplerin tüp eksenini boyunca olmalarının yerine radyal yönde daha yumuşak olmaları gerektiğini önermektedir. Gerçekten, radyal elastisite ile ilgili TEM gözlemi, Van Der Waals kuvvetlerinin bile iki bitişik nanotüpü deforme edebileceğini önermiştir. Çok-duvarlı karbon nanotüplerin üzerinde değişik gruplar tarafından yapılan nanoindentation (sertlik testi) deneyleri, CNT'lerin gerçekten radyal yönde oldukça yumuşak olduklarını, sırayla farklı GPa için elastikiyet katsayısı (Young'ın modülü) ile kanıtlamıştır.

1.4 Tek Yönlü Eğrisel Yapıya sahip Lifli Kompozitlerin Gerilme Durumuna Ait Çalışmaların Kısa Özeti

Günümüzde kompozit malzemelerin üretimi artmaya başlamıştır. Çünkü kompozit malzemeler alüminyum, bakır, çelik vb. mühendislik malzemelerine göre daha fazla avantaja sahiptirler. Yüksek özgül mukavemet ve yüksek özgül modüle sahip olmaları nedeniyle rijit fakat hafif ve mukavemetli malzemedirler. Böylesi özellikler nedeniyle kompozit malzemeler uygulamada etkin bir şekilde kullanılması bu malzemelerin farklı dış etkiler altındaki mekanik davranışlarının matematiksel modellenmesini ve teoriksel açıdan incelenmesini gerektirmektedir. Bilindiği üzere, kompozit malzemelerin geniş bir alanını oluşturan tek yönlü lifli kompozitlerin mukavemeti, önemli ölçüde bu malzemelerin yapısal özelliklerine bağlıdır. Tek yönlü lifli kompozitlerin en önemli yapısal özelliklerinden biri ise liflerin eğrilidir.

Başlangıç eğriliğe sahip lifler ve levhalarla güçlendirilmiş kompozitler eğrisel yapıya sahip kompozitler olarak adlandırılır. Genellikle, eğrilikli olarak dizayn edilen kompozit malzemeler periyodik eğrilikli, teknolojik işlemler sırasında oluşan eğrilikler ise yerel eğrilikli kompozitler olarak modellenir. Üretilen kompozit malzemelerin uygulamada başarıyla kullanılması, sözü edilen bu eğriliği hesaba katarak bu malzemedeki gerilme-şekil değiştirme durumunun belirlenmesine de bağlıdır. Akbarov (1981b, 1998), Akbarov ve Guz (1985a, 1985b, 2000, 2002, 2004), Akbarov ve Kocatürk (1997), Akbarov ve Kosker (2001, 2003a, 2003b, 2003c, 2004), Akbarov ve Novruzov (1987), Akbarov vd. (1982, 1997, 1999, 2001, 2004, 20005) kaynaklarından görüldüğü gibi bu eğrilikler kendi kendini dengeleyen gerilme durumlarının oluşmasına neden olmaktadır. Bu gerilmeler eğrilik ve mekanik parametrelere bağlı olarak çok büyük boyutlara ulaşarak kompozitin yapışma mukavemet sınırını aşabilmektedir. Bu ve diğer nedenlerden dolayı uygun mekanik problemlerin matematik modellerinin yapılıp ve teoriksel açıdan incelenmesi hem teorik ve hemde kompozitlerin uygulaması açısından çok önemlidir. Bu alanda yapılan çalışmaların kısa özetini ele alalım.

Bu tezde yapılan araştırmalar parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde olduğundan bu kapsamda yapılmış olan çalışmaların üzerinde duralım.

Parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde yapılan araştırmalarda kompozit malzemelerin her bir bileşeni ile ilgili denklem ve ifadeler yazılır ve bu bileşenler arasındaki ortak sınırdaki temas koşulları yazılarak sınır-değer problemi elde edilir. Tek yönlü lifli kompozit malzemelerde yapılan çalışmalar malzeme yapısındaki liflerin yerleşim yapısı açısından ele alınmıştır. Bu çalışmalara kısaca değinelim.

Akbarov ve Guz (1985a, 1985b, 1986b) makalelerinde kompozitteki lif yoğunluğunun düşük olduğu ve lifler arasındaki etkileşimin ihmal edildiği durum ele alınmış, lif boyunca sonsuzda düzgün yayılmış normal kuvvetlerin etkisindeki periyodik eğrilikli tek lif içeren sonsuz elastik cisimde gerilme dağılımı araştırılmıştır. Bu araştırmalarda matris ve lif malzemelerinin homojen, izotrop ve lineer elastik olduğu kabul edilmiştir. Bütün bu araştırmalar lineer elastisite teorisinin üç boyutlu kesin denklemleri kullanılarak parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde uygulanmıştır. Bu kabuller dahilinde, Akbarov ve Guz (1985a)'da verilen metod kompozit malzemenin lif yoğunluğunun çok olması ve dolayısıyla lifler arasındaki etkileşimin dikkate alındığı durumlara genişletilmesine Akbarov ve Guz (2000)'de değinilmiş olsa da bunlarla ilgili sayısal sonuçlar Akbarov ve Kosker (2001, 2003a, 2003c), Kosker ve Akbarov (2003b), Akbarov vd. (2004) makalelerinde verilmiştir. Akbarov ve Kosker (2001, 2003a) makalelerinde periyodik eğrilikli iki komşu lif içeren sonsuz ortamda gerilme dağılımı, elastisite teorisinin üç boyutlu geometrik nonlinear denklemleri kullanılarak incelenmişken, Kosker ve Akbarov (2003b), Akbarov ve Kosker (2003c) makalelerinde ise yine iki komşu lif içeren sonsuz elastik ortamda gerilme dağılımı elastisite teorisinin üç boyutlu geometrik lineer denklemleri kullanılarak parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde incelenmiştir. Sözü edilen çalışmalar sonsuz ortam içindeki komşu liflerin birbirine göre farklı yerleşim şekillerinde ve sonsuzda lifler yönünde düzgün dağılmış yük etkisi altında incelenmiştir. Buradaki yaklaşım, Akbarov vd. (2004) çalışmasında tek yönde periyodik dizilmiş periyodik eğrilikli lifler içeren elastik ortamda gerilme dağılımı incelenmesine geliştirilmiştir. Akbarov, S.D. , Kosker, R. , Simsek, K. (2005) makalesinde sonsuz ortamda düşük yoğunluklu sonsuz uzunluklu yerel eğrilikli tek lif olması durumunu ele alınmış ve gerilme dağılımı parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin üç boyutlu kesin geometrik nonlinear denklemleri kullanılarak incelenmiştir. Bu çalışmada ise sonsuz ortamda düşük yoğunluklu sonsuz uzunluklu içi boş yerel eğrilikli tek lif olması durumu ele alınmış ve gerilme dağılımı incelenmiştir. Böylece nanokompozit alanında kullanılabilecek bir çalışma yapılmıştır.

1.5 Konunun Gerekliliği ve Güncelliği

Kompozit malzemeler, günümüzde uzay ve havacılık başta olmak üzere pek çok mühendislik alanlarında kullanılmaktadır. Bunların geniş bir alanı da tek yönlü lifli kompozit malzemelerdir. Böyle malzemelerde liflerin yerel eğrilığe sahip olması durumunda az sayıda çalışma vardır. Günümüzde dünya hızla nanoteknoloji konusunda çalışmaya başlamış ve

gerekli araştırmaların yapılabilmesi için bu konuda ciddi yatırımlar yapmaktadır. Önümüzdeki on-on beş yıl içerisinde nanoteknolojinin hayatımıza daha çok gireceği öngörülmektedir. Dolayısıyla, nanokompozit malzemelerin (örneğin nanotüpler) önemi hızla artmaktadır. Bu tezde sonsuz ortamda düşük yoğunluklu sonsuz uzunluklu içi boş yerel eğrilikli tek lif olması durumu ele alınmış ve gerilme dağılımı incelenmiştir. Böylece malzemelerde liflerin yerel eğriliğe sahip olması durumu ele alınmış hem de nanokompozit alanında kullanılabilecek bir çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin üç boyutlu kesin geometrik nonlinear denklemleri kullanılarak yapılmıştır ve sonsuzda lif yönünde düzgün yayılmış normal kuvvetler etki gösterdiği ve lif yüzeyine dik kesitlerin yarıçapı lif boyunca değişmeyen daireler olduğu kabul edilmiştir.

Bu çalışmada yapılan araştırmaların amaçları:

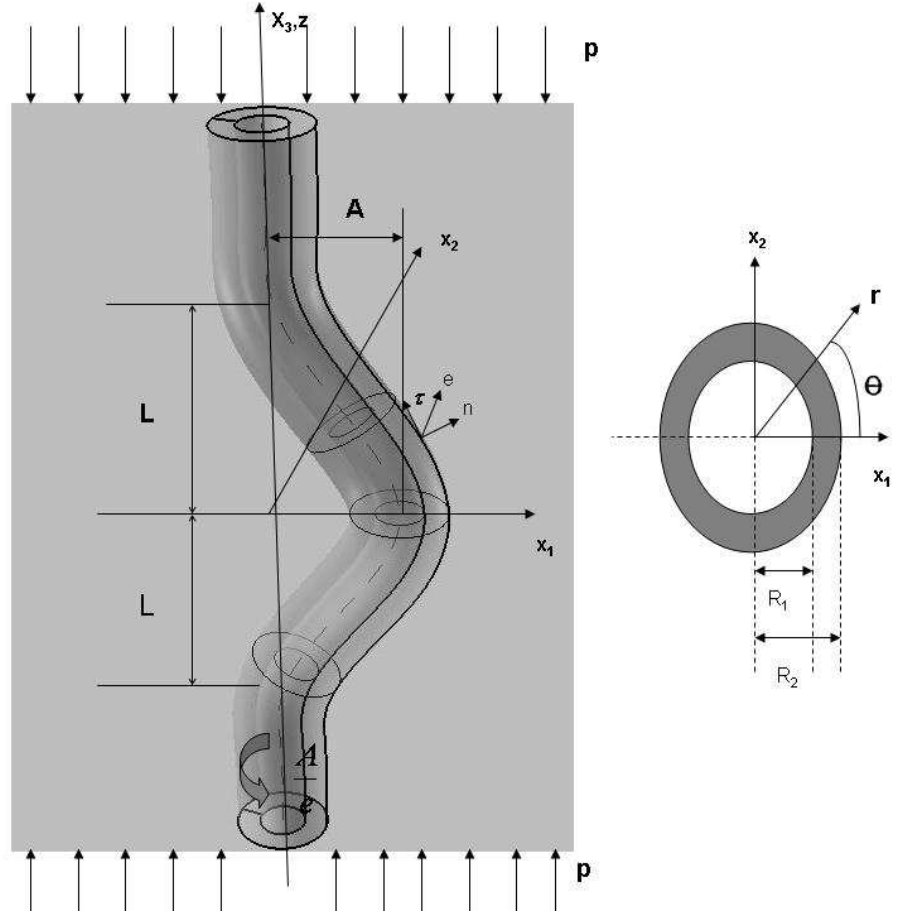
1. Yerel eğrilikli içi boş tek lif içeren sonsuz ortamların gerilme dağılımının parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin üç boyutlu geometrik nonlinear denklemleri kullanılarak incelenmesi için gerekli yöntemin geliştirilmesi ve bu incelemenin sıfırıncı ve birinci yaklaşımının yapılması,
2. Matematiksel formülasyonu elde edilmiş olan sınır-değer probleminin incelenmesi için gerekli metotların geliştirilmesi;
3. Ele alınan sınır-değer problemlerinin incelenmesinde uygulanan yöntemlerin esaslandırılması ve sayısal sonuçların elde edilmesi için gereken algoritmaların ve programların yapılması;
4. Elde edilen sayısal sonuçların bazı mekaniksel yorumlarının yapılması.

şeklinde özetlenebilir.

2 İÇİ BOŞ YEREL EĞRİLİKLİ TEK LİF İÇEREN SONSUZ ELASTİK ORTAMDA GERİLME YAYILIMI

2.1 Problemin Formülasyonu

Sonsuz uzunlukta düşük yoğunluklu içi boş yerel eğrilikli tek bir lif içeren sonsuz elastik bir ortam ele alalım. Model olarak Şekil 2.1’de görüldüğü gibi başlangıç küçük yerel eğrilığe sahip içi boş tek lif içeren sonsuz bir cisim söz konusudur. Bu cisme sonsuzda lif yönünde düzgün yayılmış normal kuvvetler etki gösterdiği ve lif yüzeyine dik kesitlerin yarıçapı lif boyunca değişmeyen daireler olduğu kabul edilecektir.



Şekil 2.1 İçi boş tek lif içeren sonsuz elastik cismin geometrisi ve seçilen koordinat takımları

Şekil 2.1’de gösterilen başlangıç lifin orta çizgisi üzerinde olan $Ox_1x_2x_3$ kartezyen, $Or\theta z$ silindirik koordinat takımlarını seçelim ve bu koordinatların Lagrange koordinatları olduğunu varsayalım. Cismin sonsuzda lif yönünde (Ox_3 (Oz) yönünde) p yoğunluklu düzgün

yayılmış normal kuvvetler etkisinde olduğu düşünülecektir. Ayrıca lifin orta çizgisine dik olan kesitlerinin R_1 ve R_2 yarıçaplı daireler olduğu ve R_1 ile R_2 'nin lif boyunca değişmediği kabul edilecektir.

Lif ve matrisin farklı lineer elastik malzemelerden oluştuğunu varsayıp, sürekli ortamlar mekaniğinin kesin üç boyutlu geometrik nonlinear denklemlerini uygulayarak incelemelerimizi yapalım. Şekil 2.1' deki cismin geometrisini göz önüne alarak lifin orta çizgisinin denklemini

$$x_1 = F(x_3) = \varepsilon \delta(x_3), \quad x_2 = 0 \quad (2.1)$$

biçiminde ele alalım. Burada ε , ($0 \leq \varepsilon < 1$) lifin eğilme genliğini belirten küçük bir parametredir. $\delta(x_3)$ fonksiyonu ise lifin yüklemmeden önceki eğilmesinin formunu göstermektedir. (2.1) denkleminde görüldüğü gibi başlangıç yerel eğrilığe sahip lifin orta çizgisi $x_2=0$ düzlemi üzerindedir. Yüklemmeden sonra da lifin orta çizgisinin bu düzlem üzerinde kaldığını varsayacağız. (2.1) ile verilen denklemden ve lif-en kesitinin sağladığı koşullardan yararlanarak, Akbarov ve Guz (2000) kaynağında olduğu gibi lif ve matris arayüzeyi olan S 'nin denklemini aşağıdaki gibi elde ediyoruz.

$$r(\theta, t_3) = \frac{\varepsilon \delta(t_3) (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2) \cos \theta}{1 + (\delta'(t_3))^2 \varepsilon^2 \cos^2 \theta} + \left\{ \frac{\varepsilon^2 (\delta(t_3))^2 (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2)^2 \cos \theta}{(1 + (\delta'(t_3))^2 \varepsilon^2 \cos^2 \theta)^2} + R^2 - (\delta(t_3))^2 \varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2) \right\}^{1/2},$$

$$x_3(\theta, t_3) = t_3 - \varepsilon \delta'(t_3) (r(\theta, t_3) - \varepsilon \delta(t_3)) \quad \delta'(t_3) = \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \quad (2.2)$$

Burada t_3 bir parametredir ve $t_3 \in (-\infty, +\infty)$ dir. (2.2) denklemlerinden yararlanarak S yüzeyinin birim dış normalinin bileşenleri için aşağıdaki denklemleri elde ediyoruz.

$$n_r = r(\theta, t_3) \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} [A(\theta, z)]^{-1} \quad n_\theta = \left[\frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} - \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right] [A(\theta, z)]^{-1}$$

$$n_z = -r(\theta, t_3) \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} [A(\theta, t_3)]^{-1} \quad (2.3)$$

Burada,

$$A(\theta, t_3) = \left[\left(r(\theta, t_3) \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} - \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial \theta} \right)^2 + \left(r(\theta, t_3) \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.4)$$

şeklinde. Bundan sonra matris malzemesi ile ilgili büyüklükleri (1), lif ile ilgili büyüklükleri ise (2) üst indisleriyle göstereceğiz. Bunun dışında gerilme-şekil değiştirme tansörleri ve yer değiştirme vektörünün kovaryant ve kontravaryant bileşenleri ile bu tansörler ve vektörün fiziksel bileşenlerinden faydalanacağız. Ayrıca tekrarlanan indislere göre Einstein toplam uyluşımı sağlanacaktır fakat altı çizili tekrarlanan indisler için bu uyluşım sağlanmayacaktır.

Lif ve matris malzemelerinin herbirinde sağlanmak koşuluyla denge denklemleri, şekil değiştirme-yer değiştirme ilişkileri ve bünye denklemlerinin sağlandığını varsayalım.

$$\nabla_i \left[\sigma^{(k)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(k)j} \right) \right] = 0, \quad k=1,2 \quad (2.5)$$

$$2\varepsilon_{jm}^{(k)} = \nabla_j u_m^{(k)} + \nabla_m u_j^{(k)} + \nabla_j u^{(k)n} \nabla_m u_n^{(k)} \quad (2.6)$$

$$\sigma_{(in)}^{(k)} = (\lambda^{(k)} e^{(k)}) \delta_i^n + 2(\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k)}) \quad e^{(k)} = \varepsilon_{(11)}^{(k)} + \varepsilon_{(22)}^{(k)} + \varepsilon_{(33)}^{(k)} \quad (2.7)$$

(2.5) ile verilen denge denklemlerinin silindirik koordinatlardaki ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(k)} & \left(\frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \sigma_{r\theta}^{(k)} \left(2 \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial r \partial \theta} - 2 \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r} - u_r^{(k)} - \frac{1}{r} u_\theta^{(k)} \right) \\ & + \sigma_{rz}^{(k)} \left(2 \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta}^{(k)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_r^{(k)} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{r} \sigma_{\theta z}^{(k)} \left(\frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z} \right) + \sigma_{zz}^{(k)} \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial z^2} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \left(\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial z} \right) \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)}}{\partial z} \right) \\
& - \frac{1}{r} u_\theta^{(k)} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial z} = 0 \\
& \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k)} \left(\frac{\partial^2 u_\theta^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r} \right) + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k)}}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k)} \left(2 \frac{\partial^2 u_\theta^{(k)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z} \right) \\
& + \frac{1}{r^3} \sigma_{\theta\theta}^{(k)} \left(\frac{\partial^2 u_\theta^{(k)}}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(k)} \right) + \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta z}^{(k)} \left(\frac{\partial^2 u_\theta^{(k)}}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \sigma_{zz}^{(k)} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k)}}{\partial z^2} \\
& + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r} - u_\theta^{(k)} \right) \left(\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial z} \right) \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{r} u_r^{(k)} \right) \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial z} \right) \\
& + \frac{1}{r^2} u_\theta^{(k)} \left(\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial z} \right) = 0 \\
& \sigma_{rr}^{(k)} \left(\frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \right) + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k)} \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial r \partial \theta} + \sigma_{rz}^{(k)} \left(2 \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k)} \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial \theta^2} \\
& + \frac{2}{r} \sigma_{\theta z}^{(k)} \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial \theta \partial z} + \sigma_{zz}^{(k)} \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial z^2} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \left(\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial z} \right) \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial z} \right) + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)}}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k)} = 0 \quad (2.8)$$

(2.6) ile verilen şekil değiştirme ve yerdeğiştirme ilişkilerinin silindirik koordinat takımındaki ifadeleri:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{rr}^{(k)} &= 2 \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \right)^2 \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(k)} &= \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta^{(k)} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(k)} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r} \left(\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta} + u_r^{(k)} \right) \\ &\quad + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial \theta} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(k)} &= \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \\ 2\varepsilon_{\theta\theta}^{(k)} &= \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} u_r^{(k)} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(k)} \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta} - u_r^{(k)} \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial \theta} \right)^2 \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(k)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} \left[\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(k)} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z} \left[\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta} - u_r^{(k)} \right] \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \\ 2\varepsilon_{zz}^{(k)} &= 2 \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} + \left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Burada (2.7) ile verilen denklemde $\sigma_{(in)}^{(k)}$ 'lar ve $\varepsilon_{(in)}^{(k)}$ 'lar sırasıyla gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin fiziksel bileşenlerini göstermektedir. Aynı zamanda lif ve matris arayüzeyi olan S yüzeyinde ideal temas koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu koşullar aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\sigma^{(1)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(1)j} \right) \Big|_{S_1} n_j = 0,$$

$$\sigma^{(1)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(1)j} \right) \Big|_{S_2} n_j = \sigma^{(2)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(2)j} \right) \Big|_{S_2} n_j, \quad u^{(1)j} \Big|_{S_2} = u^{(2)j} \Big|_{S_2} \quad (2.10)$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} p, \quad \sigma_{ij}^{(1)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad (ij) \neq zz \quad (2.11)$$

Gerilme ve şekil değiştirmenin fiziksel bileşenleri için aşağıdaki formüllerden yararlanılacaktır.

$$\sigma_{(ij)} = \sigma^{ij} H_i H_j = \sigma_{ij} \frac{1}{H_i H_j}, \quad \varepsilon_{(ij)} = \varepsilon_{ij} \frac{1}{H_i H_j} = \varepsilon^{ij} H_i H_j, \quad u_{(i)} = u^i H_i = u_i \frac{1}{H_i} \quad (2.12)$$

Burada $(ij) = rr, \theta\theta, zz, r\theta, rz, z\theta$, $(i) = r, \theta, z$ dir. σ^{ij} , ε^{ij} ve σ_{ij} , ε_{ij} gerilme (σ) ve şekil değiştirme (ε) tansörlerinin ele alınan silindirik koordinat takımındaki kovaryant ve kontravaryant bileşenlerini, u^i , u_i 'ler ise yer değiştirme ($\mathbf{u}$) vektörünün bu koordinat takımındaki kovaryant ve kontravaryant bileşenlerini göstermektedir. (2.12) formülleri tansör ve vektörlerin fiziksel bileşenleri arasındaki ilişkileri göstermektedir. Bu formüllerdeki H_i 'ler ise bilinen Lamé sabitleridir. Şekil değiştirme vektörü ve gerilme tansörünün silindirik koordinatlardaki fiziksel bileşenlerinin bu vektör ve tansörlerin kovaryant ve kontravaryant bileşenlerine bağlı ifadeleri (2.13)' deki gibidir. Kısalık amacıyla bundan sonra fiziksel bileşenler için parantezler kullanılmayacaktır.

$$H_r = r, \quad H_\theta = 1, \quad H_z = 1$$

$$u_{(r)} = u^r = u_r, \quad u_{(\theta)} = r u^\theta = \frac{1}{r} u_\theta, \quad u_{(z)} = u_z = u^z \quad \sigma_{(rr)} = \sigma_{rr} = \sigma^{rr}, \quad \sigma_{(r\theta)} = \frac{1}{r} \sigma_{r\theta} = r \sigma^{r\theta},$$

$$\sigma_{(rz)} = \sigma_{rz} = \sigma^{rz}, \quad \sigma_{(\theta r)} = \frac{1}{r} \sigma_{\theta r} = r \sigma^{\theta r}$$

$$\sigma_{(\theta\theta)} = \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta\theta} = r^2 \sigma^{\theta\theta}, \quad \sigma_{(\theta z)} = \frac{1}{r} \sigma_{\theta z} = r \sigma^{\theta z}, \quad \sigma_{(zr)} = \sigma_{zr} = \sigma^{zr}, \quad \sigma_{(z\theta)} = \frac{1}{r} \sigma_{z\theta} = r \sigma^{z\theta}$$

$$\sigma_{(zz)} = \sigma_{zz} = \sigma^{zz} \quad (2.13)$$

Bu şekilde, sonsuz elastik bir ortamda başlangıç küçük yerel eğrilikli sonsuz uzun içi boş tek lifin olması ve sonsuzda lif yönünde etki gösteren düzgün yayılmış normal kuvvetler olması durumunda gerilmenin araştırılması (2.5)-(2.7) denklemler takımının (2.10) temas koşulları çerçevesinde incelenmesine getirilerek ele alınan problemin matematiksel formülasyonu genel bir biçimde yapılmış olur.

2.2 Çözüm Yönteminin Geliştirilmesi

Formülasyonu yukarıda verilen problem, nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklemler takımı için verilmiş bir sınır-değer problemidir. Bu problemin incelenmesinde Akbarov ve Guz (1985b, 2000)' de verilmiş sınır formu pertürbasyon yöntemini uygulayalım. Bu yöntemle göre aranan büyüklükler lifin orta çizgisinin denklemine dahil olan ve onun eğilme derecesini gösteren küçük ε parametresinin serisi halinde ele alınır.

$$\sigma_{rr}^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \sigma_{rr}^{(k),q}, \dots, \varepsilon_{rr}^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \varepsilon_{rr}^{(k),q}, \dots, u_r^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q u_r^{(k),q} \quad (2.14)$$

Ayrıca lif-matris arayüzeyi olan S 'nin (2.2) ile verilen denklemler ve bu yüzeyin birim normalinin bileşenlerini gösteren (2.3) ifadeleri de ε cinsinden seri halde aşağıdaki gibi elde edilir.

$$r = R + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k a_{rk}(\theta, t_3), \quad z = t_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k a_{zk}(\theta, t_3),$$

$$n_r = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k b_{rk}(\theta, t_3), \quad n_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k b_{\theta k}(\theta, t_3), \quad n_z = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k b_{zk}(\theta, t_3) \quad (2.15)$$

(2.15)'deki ifadelerde yer alan ε^k 'ların katsayıları kolayca elde edilebileceğinden kısalık amacıyla burada verilmemektedir. (2.14) ifadeleri (2.5) denkleminde yerine yazılarak (2.14)'deki her bir yaklaşım için uygun denklemler takımı elde edilir. (2.7)'deki bünye denklemleri lineer olduğundan (2.14)'deki her bir yaklaşım için ayrı ayrı sağlanan bünye denklemleri elde edilir. Birinci ve daha sonraki yaklaşımlar için elde edilen denklemler önceki yaklaşımların büyüklüklerini de içerirler. Bundan başka (2.10) temas koşullarında (2.14) ifadelerini yerine yazar ve (2.15)'den yararlanarak (2.14)'deki ε^k 'nın katsayılarını (R, θ, t_3)

civarında seriye açar ve daha sonra ε 'nın aynı derecelerine göre gruplandırırsak, herbir yaklaşım için $r=R_1$ ve $r=R_2$ yüzeylerinde sağlanan uygun temas koşullarını elde ederiz. Bu işlemler ayrıntılı olarak Akbarov ve Guz (2000) kaynağında verilmektedir. Şimdi sıfıncı ve birinci yaklaşımlar için elde edilen uygun denklem takımlarının ve temas koşullarının ifadelerini ele alalım.

Sıfıncı Yaklaşım

Bu yaklaşım için (2.5)-(2.7) denklemleri aynen sağlanacaktır. (2.10) temas koşulları ise $n_r=1$, $n_\theta=0$, $n_z=0$ oldukları gözönüne alınarak $r=R_1$ ve $r=R_2$ 'de aynen sağlanacaktır. Bundan başka (2.11) koşulları sıfıncı yaklaşım için

$$\sigma_{zz}^{(1),0} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} p, \quad \sigma_{zz}^{(1),0} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad (ij) \neq zz \quad (2.16)$$

şeklinde sınır koşulları yazılırlar. Buradan sıfıncı yaklaşım için elde edilen denklem ve temas koşulları nonlinear olur. Sıfıncı yaklaşım, modelimizdeki lifin eğriliksiz düz olması durumunda ortaya çıkan gerilme ve şekil değiştirmelerin belirlenmesi için incelenmesi gereken sınır değer problemidir. İlgili mekaniksel görüşler bu durumda sıfıncı yaklaşım için elde edilen denklemlerdeki nonlinear terimlerin çok önemsiz etkiler vereceğini ifade etmektedir. Bu varsayımın geçerli olması için $\nabla_n u^{(k),j,0} \ll 1$ koşulunun sağlandığını kabul ederek $g_n^j + \nabla_n u^{(k),j,0}$ terimlerini Kronecer sembolleri olan δ_n^j 'lerle yer değiştireceğiz. Böylece sıfıncı yaklaşımın belirlenmesi için

$$\begin{aligned} \nabla_i \sigma^{(k),ij,0} &= 0, \quad 2\varepsilon_{jm}^{(k),0} = \nabla_j u_i^{(k),0} + \nabla_m u_j^{(k),0} \\ \sigma_{(ij)}^{(k)} &= (\lambda^{(k)} e^{(k),0}) \delta_i^n + 2(\mu^{(k)} \varepsilon_{(ij)}^{(k),0}), \quad e^{(k),0} = \varepsilon_{(rr)}^{(k),0} + \varepsilon_{(\theta\theta)}^{(k),0} + \varepsilon_{(zz)}^{(k),0} \end{aligned} \quad (2.17)$$

denklemler takımını ve

$$\sigma_{(ij)}^{(2),0} \Big|_{r_q=R_1} = \sigma_{(ij)}^{(1),0} \Big|_{r_q=R_1}, \quad u_{(i)}^{(2),0} \Big|_{r_q=R_1} = u_{(i)}^{(1),0} \Big|_{r_q=R_1}$$

$$\sigma_{(ij)}^{(2),0} \Big|_{r_q=R_2} = \sigma_{(ij)}^{(1),0} \Big|_{r_q=R_2}, \quad u_{(i)}^{(2),0} \Big|_{r_q=R_2} = u_{(i)}^{(1),0} \Big|_{r_q=R_2}; \quad (ij)=rr, r\theta, rz, (i)=r, \theta, z \quad (2.18)$$

temas koşullarını elde ederiz. (2.17)-(2.18) problemlerinin çözümünde (2.16) sınır koşulları da göz önüne alınmak zorundadır. Bu şekilde sıfıncı yaklaşımın belirlenmesi için çözülmesi gereken problemin matematiksel formülasyonu elde edilmiş olur.

Birinci Yaklaşım

(2.14)'ü (2.5) ve (2.6)'da yerine yazıp ε 'nın eşit kuvvetlerinin katsayılarını eşitlersek q . yaklaşım için aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$\nabla_i [\sigma^{(k)in,q} (g_n^j + \nabla_n u^{(k)j,0})] + \nabla_i (\sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,q}) = - \sum_{m=1}^{q-1} \nabla_i (\sigma^{(k)in,q-m} \nabla_n u^{(k)j,m}) \quad (2.19)$$

$$2\varepsilon_{jm}^{(k),q} = \nabla_j u_m^{(k),q} + \nabla_m u_j^{(k),q} + \nabla_j u^{(k)n,0} \nabla_m u_n^{(k),q} + \nabla_j u^{(k)n,q} \nabla_m u_n^{(k),0} + \sum_{s=1}^{q-1} \nabla_j u^{(k)n,q-s} \nabla_m u_n^{(k),s} \quad (2.20)$$

Burada da sıfıncı yaklaşımda olduğu gibi, $\nabla_n u^{(k)j,0} \ll 1$ olduğunu varsayar ve $g_n^j + \nabla_n u^{(k)j,0}$ 'ları δ_n^j 'lerle yer değiştirirsek (2.19), (2.20) denklemlerini aşağıdaki gibi ele alırız.

$$\nabla_i [\sigma^{(k)ij,q} + \sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,q}] = - \sum_{m=1}^{q-1} \nabla_i (\sigma^{(k)in,q-m} \nabla_n u^{(k)j,m}) \quad (2.21)$$

$$2\varepsilon_{ij}^{(k),q} = \nabla_j u_i^{(k),q} + \nabla_i u_j^{(k),q} + \sum_{s=1}^{q-1} \nabla_j u^{(k)n,q-s} \nabla_i u_n^{(k),s} \quad (2.22)$$

Daha sonra (2.21), (2.22) denklemlerinden faydalanacağız ve bu durumda birinci yaklaşım için

$$\nabla_i [\sigma^{(k)ij,1} + \sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,1}] = 0 \quad (2.23)$$

$$2\varepsilon_{ij}^{(k),1} = \nabla_j u_i^{(k),1} + \nabla_i u_j^{(k),1} \quad (2.24)$$

$$\sigma_{(in)}^{(k),1} = (\lambda^{(k)} e^{(k),1}) \delta_i^n + 2(\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k),1}), \quad e^{(k),1} = \varepsilon_{(11)}^{(k),1} + \varepsilon_{(22)}^{(k),1} + \varepsilon_{(33)}^{(k),1} \quad (2.25)$$

denklemleri elde edilir. (2.23) ve (2.24) denklemlerinin fiziksel bileşenlerindeki ifadeleri aşağıdaki gibidir.

Denge denklemleri,

$$\begin{aligned}
& \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial \theta \partial r} + 2\sigma_{zr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z \partial \theta} \\
& + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z^2} + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} \\
& - \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} \\
& + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} \\
& + \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + \frac{2}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_\theta^{(k),1} - \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r} \\
& - \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(k),1} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}) \\
& + \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_\theta^{(k),1} - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} u_\theta^{(k),1} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} u_\theta^{(k),1} \\
& - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} u_\theta^{(k),1} - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} u_\theta^{(k),1} - \frac{3}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_\theta^{(k),1} \\
& + \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_r^{(k),1} - \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} u_r^{(k),1} - \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta r}^{(k),0} u_\theta^{(k),1} = 0 \\
& \frac{2}{r^3} \sigma_{rr}^{(k),0} u_\theta^{(k),1} - \frac{2}{r^2} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),1}}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta \partial r} - \frac{2}{r^3} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta} \\
& + \frac{2}{r} \sigma_{zr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),1}}{\partial z \partial r} - \frac{2}{r^2} \sigma_{zr}^{(k),0} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial z} - \frac{1}{r^3} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),1}}{\partial z \partial \theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r} \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),0}}{\partial r} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r} \\
& - \frac{1}{r^2} \frac{\sigma_{zr}^{(k),0}}{\partial z} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r} - \frac{1}{r^3} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} \\
& + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{3}{r^2} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r} - \frac{3}{r^3} \sigma_{rr}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{3}{r^3} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} \\
& + \frac{3}{r^2} \sigma_{rz}^{(k),0} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} + \frac{2}{r^3} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),1}}{\partial z} - - \frac{1}{r^3} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_r^{(k),1} \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} u_r^{(k),1} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} u_r^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} u_r^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} u_{\theta}^{(k),0} \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),0}}{\partial r} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),0}}{\partial \theta} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),0}}{\partial z} u_{\theta}^{(k),1} + \frac{3}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),1} - \frac{1}{r^3} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} \\
& + \frac{1}{r^3} \sigma_{r\theta}^{(k),0} u_r^{(k),1} + \frac{1}{r^3} \sigma_{rr}^{(k),0} u_{\theta}^{(k),1} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \sigma_{\theta r}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial \theta \partial r} + 2 \sigma_{zr}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2r} \sigma_{z\theta}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z \partial \theta} \\
& + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta z}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} \\
& + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} - + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),0}}{\partial r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),0}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),0}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \sigma_{r\theta}^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),0} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta} \\
& + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),1} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),1}}{\partial z} = 0
\end{aligned} \tag{2.26}$$

şeklindedir. Şekil değiştirme-yer değiştirme ilişkileri:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr}^{(k),1} &= \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} \\
2\varepsilon_{r\theta}^{(k),1} &= \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta^{(k),1} \\
2\varepsilon_{rz}^{(k),1} &= \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} \\
\varepsilon_{\theta\theta}^{(k),1} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r^{(k),1} \\
2\varepsilon_{\theta z}^{(k),1} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial z} \\
\varepsilon_{zz}^{(k),1} &= \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

şeklindedir. Yukarıda sözü edilen işlemler (2.10) ile verilen temas koşulları için uygulanır ve $\nabla_n u^{(k),j,0} \ll 1$ olduğu da dikkate alınırsa birinci yaklaşım için aşağıdaki temas koşullarını elde ederiz.

$$\begin{aligned}
& \left[\sigma_{(i)r} \right]_{1,1}^{2,1} + f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(i)r}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_r \left[\sigma_{(i)r} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_\theta \left[\sigma_{(i)\theta} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_z \left[\sigma_{(i)z} \right]_{1,0}^{2,0} = 0 \\
& \left[u_{(i)} \right]_{1,1}^{2,1} + f_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} = 0
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Böylece birinci yaklaşımın elde edilmesi için gerekli olan denklemler takımı ve temas koşulları verilmiş olmaktadır. (2.28)'de kullanılan kısaltmalar aşağıdaki gibidir.

$$f_1 = \delta(t_3) \cos \theta, \quad \varphi_1 = -R \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta$$

$$\gamma_r = \left(\frac{\delta(t_3)}{R} - \frac{d^2\delta(t_3)}{dt_3^2} R \right) \cos \theta, \quad \gamma_\theta = \frac{\delta(t_3)}{R} \sin \theta, \quad \gamma_z = -\frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta \quad (2.29)$$

2.3 Araştırma Yönteminin Gerektirdiği Sınır Değer Probleminin Çözümü

Bu kısımda, yukarıda formülasyonu verilen sıfıncı ve birinci yaklaşımlara ait sınır değer problemlerinin çözümleri ile ilgileneceğiz. Sadelik açısından $v^{(1)}$ matris malzemesinin, $v^{(2)}$ lif malzemesinin Poisson oranları olmak üzere $v^{(1)} = v^{(2)}$ olduğunu varsayacağız. Nitekim, Akbarov ve Guz (2000)'e göre Poisson oranlarının eşit alınması nümerik sonuçlara önemli bir etkide bulunmamaktadır. Dolayısıyla, $v^{(1)} = v^{(2)}$ koşulu sadece işlemleri basitleştirmek için varsayılmıştır. Bu durumda sıfıncı yaklaşım için (2.16)-(2.18) probleminin çözümünü aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\varepsilon_{zz}^{(1),0} = \varepsilon_{zz}^{(2),0} = \frac{p}{E^{(1)}}, \quad \sigma_{zz}^{(1),0} = p, \quad u_z^{(1),0} = u_z^{(2),0} = \frac{p}{E^{(1)}} z, \quad u_r^{(1),0} = -v^{(1)} \varepsilon_{zz}^{(1),0} r,$$

$$u_r^{(2),0} = -v^{(2)} \varepsilon_{zz}^{(2),0} r, \quad u_\theta^{(1),0} = u_\theta^{(2),0} = 0, \quad \sigma_{rr}^{(1),0} = \sigma_{rr}^{(2),0} = \sigma_{\theta\theta}^{(1),0} = \sigma_{\theta\theta}^{(2),0} = 0,$$

$$\sigma_{zz}^{(2),0} = p \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}, \quad \sigma_{\theta z}^{(1),0} = \sigma_{\theta z}^{(2),0} = \sigma_{rz}^{(1),0} = \sigma_{rz}^{(2),0} = \sigma_{r\theta}^{(1),0} = \sigma_{r\theta}^{(2),0} = 0 \quad (2.30)$$

Şimdi (2.23)-(2.28) denklemleriyle verilen birinci yaklaşımla ilgili problemin çözümünü ele alalım. Yukarıda ele alınan kabuller çerçevesinde ve (2.30) denklemlerinin dikkate alınması ile (2.23) denklemleri ilgili büyüklüklerin silindirik koordinatlardaki fiziksel bileşenleri cinsinden yazılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(k),1} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}) + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z^2} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z^2} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z^2} &= 0
\end{aligned} \tag{2.31}$$

elde edilir. Direkt sağlamayla bu denklemlerin (Guz, 1999) üç boyutlu lineerize edilmiş elastisite denklemleri ile çakıştığı görülür. (2.24) denklemleri ise

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr}^{(k),1} &= \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),1} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(k),1}}{r}, \quad \varepsilon_{zr}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} \right) \\
\varepsilon_{zz}^{(k),1} &= \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}^{(k),1}}{r} \right), \quad \varepsilon_{\theta z}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta} \right)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

şeklini alır. (2.1) denklemini ile verdiğimiz lifin orta çizgisinin denklemini

$$x_1 = A \exp \left(- \left(\frac{x_3}{L} \right)^2 \right) \cos \left(m \frac{x_3}{L} \right) = \varepsilon L \exp \left(- \left(\frac{x_3}{L} \right)^2 \right) \cos \left(m \frac{x_3}{L} \right) = \varepsilon \delta(x_3); \quad \varepsilon = \frac{A}{L} \tag{2.33}$$

şeklinde tanımlayalım. Burdaki ε , $L > A$ kabulü ile $\varepsilon = \frac{A}{L}$ olarak seçilmiştir. (2.28) ifadeleri dikkate alınır ve (2.29) kullanılırsa birinci yaklaşım için (2.28) temas koşulları

$$\begin{aligned}
\left(\sigma_{rr}^{(1),1} - \sigma_{rr}^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} &= 0, \quad \left(\sigma_{r\theta}^{(1),1} - \sigma_{r\theta}^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} = 0, \\
\left(\sigma_{rz}^{(1),1} - \sigma_{rz}^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} &= \left(\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right) \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta \\
\left(u_r^{(1),1} - u_r^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} &= 0, \quad \left(u_{\theta}^{(1),1} - u_{\theta}^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} = 0, \\
\left(u_z^{(1),1} - u_z^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} &= 0, \quad \sigma_{rr}^{(2),1} \Big|_{(R_1, \theta, t_3)} = 0 \\
\sigma_{r\theta}^{(2),1} \Big|_{(R_1, \theta, t_3)} &= 0, \quad \sigma_{rz}^{(2),1} \Big|_{(R_1, \theta, t_3)} = \sigma_{zz}^{(2),0} \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta
\end{aligned} \tag{2.34}$$

haline gelir. Bu denklemlerin çözümü için (2.31) denklemlerini de dikkate alarak aşağıdaki gösterilimi (Guz, 1999) kullanalım.

$$\begin{aligned}
u_r^{(k)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi^{(k)} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \chi^{(k)}, \quad u_\theta^{(k)} = -\frac{\partial}{\partial r} \psi^{(k)} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \chi^{(k)}, \\
u_z^{(k)} &= (\lambda^{(k)} + \mu^{(k)})^{-1} \left((\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) \Delta_1 + (\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)}, \\
\Delta_1 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

(2.35) denklemlerindeki $\psi^{(k)}$, $\chi^{(k)}$ fonksiyonları aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar.

$$\left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_1^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^{(k)} = 0, \quad \left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_2^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_3^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)} = 0 \tag{2.36}$$

burada $\xi_i^{(k)}$ ($k=1,2$; $i=1,2,3$) aşağıdaki şekilde tanımlanırlar.

$$\xi_1^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_2^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_3^{(k)} = \sqrt{\frac{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}}} \tag{2.37}$$

Birinci yaklaşımla ilgili sınır değer problemini çözmek için bu yaklaşımla ilgili yukarıda verilen denklemlere

$$\bar{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-isz} dz \tag{2.38}$$

ile verilen üstel Fourier dönüşümünü uygulayacağız ($z = \frac{x_3}{L}$, 'ye göre). Bu durumda, (2.31)

denge denklemleri

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\sigma}_{rr}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\sigma}_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{is}{L} \bar{\sigma}_{rz}^{(k),1} + \frac{1}{r} (\bar{\sigma}_{rr}^{(k),1} - \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(k),1}) - \frac{s^2}{L^2} \bar{\sigma}_{zz}^{(k),0} \bar{u}_r^{(k),1} &= 0, \\
\frac{\partial \bar{\sigma}_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{is}{L} \bar{\sigma}_{\theta z}^{(k),1} + \frac{2}{r} \bar{\sigma}_{r\theta}^{(k),1} - \frac{s^2}{L^2} \bar{\sigma}_{zz}^{(k),0} \bar{u}_\theta^{(k),1} &= 0, \\
\frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{is}{L} \bar{\sigma}_{zz}^{(k),1} + \frac{1}{r} \bar{\sigma}_{rz}^{(k),1} - \frac{s^2}{L^2} \bar{\sigma}_{zz}^{(k),0} \bar{u}_z^{(k),1} &= 0
\end{aligned} \tag{2.39}$$

(2.32) şekil değiştirmeleri

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_{rr}^{(k),1} &= \frac{\partial \bar{u}_r^{(k),1}}{\partial r}, & \bar{\epsilon}_{\theta\theta}^{(k),1} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}_r^{(k),1}}{r}, & \bar{\epsilon}_{zr}^{(k),1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{is}{L} \bar{u}_r^{(k),1} \right) \\ \bar{\epsilon}_{zz}^{(k),1} &= \frac{is}{L} \bar{u}_z^{(k),1}, & \bar{\epsilon}_{r\theta}^{(k),1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{u}_\theta^{(k),1}}{\partial r} - \frac{\bar{u}_\theta^{(k),1}}{r} \right), & \bar{\epsilon}_{\theta z}^{(k),1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_z^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{is}{L} \bar{u}_\theta^{(k),1} \right)\end{aligned}\quad (2.40)$$

(2.25) bünye denklemleri

$$\bar{\sigma}_{(in)}^{(k),1} = (\lambda^{(k)} \bar{e}^{(k),1}) \delta_i^n + 2(\mu^{(k)} \bar{\epsilon}_{(in)}^{(k),1}), \quad \bar{e}^{(k),1} = \bar{\epsilon}_{(11)}^{(k),1} + \bar{\epsilon}_{(22)}^{(k),1} + \bar{\epsilon}_{(33)}^{(k),1} \quad (2.41)$$

(2.34) temas koşulları

$$\begin{aligned}\left(\bar{\sigma}_{rr}^{(1),1} - \bar{\sigma}_{rr}^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} &= 0, \quad \left(\bar{\sigma}_{r\theta}^{(1),1} - \bar{\sigma}_{r\theta}^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} = 0, \\ \left(\bar{\sigma}_{rz}^{(1),1} - \bar{\sigma}_{rz}^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} &= \left(\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right) \frac{is}{L} \bar{\delta}(t_3) \cos \theta, \\ \left(\bar{u}_r^{(1),1} - \bar{u}_r^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} &= 0, \quad \left(\bar{u}_\theta^{(1),1} - \bar{u}_\theta^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} = 0, \\ \left(\bar{u}_z^{(1),1} - \bar{u}_z^{(2),1} \right) \Big|_{(R_2, \theta, t_3)} &= 0, \quad \bar{\sigma}_{rr}^{(2),1} \Big|_{(R_1, \theta, t_3)} = 0 \\ \bar{\sigma}_{r\theta}^{(2),1} \Big|_{(R_1, \theta, t_3)} &= 0, \quad \bar{\sigma}_{rz}^{(2),1} \Big|_{(R_1, \theta, t_3)} = \sigma_{zz}^{(2),0} \frac{is}{L} \bar{\delta}(t_3) \cos \theta, \\ \bar{\delta}(t_3) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(e^{-\frac{(s+m)^2}{4}} + e^{-\frac{(s-m)^2}{4}} \right)\end{aligned}\quad (2.42)$$

(2.35) ifadeleri

$$\begin{aligned}\bar{u}_r^{(k)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{\psi}^{(k)} - \frac{is}{L} \frac{\partial}{\partial r} \bar{\chi}^{(k)}, \quad \bar{u}_\theta^{(k)} = -\frac{\partial}{\partial r} \bar{\psi}^{(k)} - \frac{is}{rL} \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{\chi}^{(k)}, \\ \bar{u}_z^{(k)} &= (\lambda^{(k)} + \mu^{(k)})^{-1} \left((\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) \Delta_1 - \frac{s^2}{L^2} (\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}) \right) \bar{\chi}^{(k)}, \\ \Delta_1 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\end{aligned}\quad (2.43)$$

(2.35) gösterimleriyle (2.31) denklemlerini sağlayan (2.36) denklemleri

$$\left(\Delta_1^{(k)} - \frac{s^2}{L^2} (\xi_1^{(k)})^2 \right) \bar{\Psi}^{(k)} = 0, \quad \left(\Delta_1^{(k)} - \frac{s^2}{L^2} (\xi_2^{(k)})^2 \right) \left(\Delta_1^{(k)} - \frac{s^2}{L^2} (\xi_3^{(k)})^2 \right) \bar{\chi}^{(k)} = 0 \quad (2.44)$$

halini alır. (2.44) diferansiyel denklemleri (2.39) ifadeleri ve (2.42) temas koşulları dikkate alınarak çözülürse

$$\bar{\Psi}^{(1),1} = \bar{A}_1^{(1)}(s) K_1(\xi_1^{(1)} s \frac{r}{L}) \sin \theta, \quad (2.45)$$

$$\bar{\chi}^{(1),1} = i \left[\bar{A}_2^{(1)}(s) K_1(\xi_2^{(1)} s \frac{r}{L}) + \bar{A}_3^{(1)}(s) K_1(\xi_3^{(1)} s \frac{r}{L}) \right] \cos \theta$$

$$\bar{\Psi}^{(2),1} = \left[\bar{A}_{11}^{(2)}(s) I_1(\xi_1^{(2)} s \frac{r}{L}) + \bar{A}_{12}^{(2)}(s) K_1(\xi_1^{(2)} s \frac{r}{L}) \right] \sin \theta,$$

$$\bar{\chi}^{(2),1} = i \left[\bar{A}_{21}^{(2)}(s) I_1(\xi_2^{(2)} s \frac{r}{L}) + \bar{A}_{22}^{(2)}(s) K_1(\xi_2^{(2)} s \frac{r}{L}) + \bar{A}_{31}^{(2)}(s) I_1(\xi_3^{(2)} s \frac{r}{L}) + \bar{A}_{32}^{(2)}(s) K_1(\xi_3^{(2)} s \frac{r}{L}) \right] \cos \theta \quad (2.46)$$

elde edilir. Burada $I_n(x)$ Bessel fonksiyonu (Watson, G.N., 1944) ve $K_n(x)$ Macdonald fonksiyonudur. Bu fonksiyonların türevleri

$$I'_n = \frac{1}{2} (I_{n-1} + I_{n+1}), \quad I'_0 = I_1, \quad K'_n = -\frac{1}{2} (K_{n-1} + K_{n+1}), \quad K'_0 = -K_1 \quad (2.47)$$

şeklinde dir. (2.45), (2.46) fonksiyonları (2.43)'da (2.40)'da ve (2.41)'de kullanılarak (2.42) temas koşullarında elde edilen ifadeler yazılırsa

$$\bar{A}_1^{(k1)} = \frac{\bar{A}_1^{(k)}}{L}, \dots, \bar{A}_i^{(k1)} = \frac{\bar{A}_i^{(k)}}{L^2}, \quad k=1,2, i=2,3 \quad (2.48)$$

elde edilir. Burada δ_3^j Kronocer sembolüdür. Böylece 9x9'luk lineer denklemler sistemi elde edilmiş olur. Bu sistem çözülerek $\bar{A}_1^{(11)}(s)$, $\bar{A}_2^{(11)}(s)$, $\bar{A}_3^{(11)}(s)$, $\bar{A}_{11}^{(21)}(s)$, $\bar{A}_{12}^{(21)}(s)$, $\bar{A}_{13}^{(21)}(s)$, $\bar{A}_{23}^{(21)}(s)$, $\bar{A}_{23}^{(21)}(s)$, $\bar{A}_{23}^{(21)}(s)$, bilinmeyenleri belirlenmiş olur. Bunlar kullanılarak (2.41)'deki

$\bar{\sigma}_{rr}^{(1),1}, \dots, \bar{\sigma}_{zz}^{(2),1}$ değerleri hesaplanır. Elde edilen yerdeğiştirmelerin ve gerilmelerin açık hali sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \bar{u}_r^{(1)} = & A_1^{(1)} \left\{ \frac{1}{r} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(1)} s \right) \sin \theta \right\} + A_2^{(1)} \left\{ -\frac{s^2}{2L^2} \xi_2^{(1)} \left[K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(1)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(1)} s \right) \right] \cos \theta \right\} \\ & + A_3^{(1)} \left\{ -\frac{s^2}{2L^2} \xi_3^{(1)} \left[K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(1)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(1)} s \right) \right] \cos \theta \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_r^{(2)} = & A_{11}^{(2)} \left\{ \frac{1}{r} I_1 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) \cos \theta \right\} + A_{12}^{(2)} \left\{ \frac{1}{r} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) \cos \theta \right\} \\ & + A_{21}^{(2)} \left\{ \frac{s^2}{2L^2} \xi_2^{(2)} \left[I_0 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) + I_2 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) \right] \cos \theta \right\} \\ & + A_{22}^{(2)} \left\{ -\frac{s^2}{2L^2} \xi_2^{(2)} \left[K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) \right] \cos \theta \right\} \\ & + A_{31}^{(2)} \left\{ \frac{s^2}{2L^2} \xi_3^{(2)} \left[I_0 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) + I_2 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) \right] \cos \theta \right\} \\ & + A_{32}^{(2)} \left\{ -\frac{s^2}{2L^2} \xi_3^{(2)} \left[K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) \right] \cos \theta \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_\theta^{(1)} = & A_1^{(1)} \left\{ \frac{s}{2L} \xi_1^{(1)} \left[K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(1)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(1)} s \right) \right] \sin \theta \right\} + A_2^{(1)} \left\{ -\frac{s}{rL} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(1)} s \right) \sin \theta \right\} \\ & + A_3^{(1)} \left\{ -\frac{s}{rL} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(1)} s \right) \sin \theta \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_\theta^{(2)} = & A_{11}^{(2)} \left\{ -\frac{s}{2L} \xi_1^{(2)} \left[I_0 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) + I_2 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) \right] \sin \theta \right\} \\ & + A_{12}^{(2)} \left\{ \frac{s}{2L} \xi_1^{(2)} \left[K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) \right] \sin \theta \right\} \\ & + A_{21}^{(2)} \left\{ -\frac{s}{rL} I_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) \sin \theta \right\} + A_{22}^{(2)} \left\{ -\frac{s}{rL} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) \sin \theta \right\} \\ & + A_{31}^{(2)} \left\{ -\frac{s}{rL} I_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) \sin \theta \right\} + A_{32}^{(2)} \left\{ -\frac{s}{rL} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) \sin \theta \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_z^{(1)} &= i(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})^{-1} \left\{ \left(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} \right) \left(\frac{s^2}{L^2} (\xi_2^{(1)})^2 A_2^{(1)} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(1)} s \right) + \frac{s^2}{L^2} (\xi_3^{(1)})^2 A_3^{(1)} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(1)} s \right) \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{s^2}{L^2} (\mu^{(1)} + \sigma_{zz}^{(1,0)}) \left(A_2^{(1)} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(1)} s \right) + A_3^{(1)} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(1)} s \right) \right) \right\} \cos \theta \\
\bar{u}_z^{(2)} &= i(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)})^{-1} \left\{ \left(\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} \right) \left(\frac{s^2}{L^2} (\xi_2^{(2)})^2 \left(A_{21}^{(2)} I_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) + A_{22}^{(2)} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) \right) + \frac{s^2}{L^2} (\xi_3^{(2)})^2 \left(A_{31}^{(2)} I_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) + A_{32}^{(2)} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) \right) \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{s^2}{L^2} (\mu^{(2)} + \sigma_{zz}^{(2,0)}) \left(A_{21}^{(2)} I_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) + A_{22}^{(2)} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) + A_{31}^{(2)} I_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) + A_{32}^{(2)} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) \right) \right\} \cos \theta
\end{aligned}
\tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_r^{(1)} &= \left(A_1^{(1)} \left\{ -\frac{2\mu}{r^2} K_1 - \frac{2\mu}{rL} \xi_1^{(1)} \left(K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(1)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(1)} s \right) \right) \right\} + \right. \\
&\quad A_2^{(1)} \left\{ -\frac{\lambda s^2}{2rL^2} \xi_2^{(1)} \left(K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(1)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(1)} s \right) \right) + \frac{(\lambda + 2\mu)s^3 (\xi_2^{(1)})^2}{4L^2} \left(3K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(1)} s \right) + K_3 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(1)} s \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{s\lambda}{r^2 L} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(1)} s \right) - \frac{(\lambda + 2\mu)(\xi_2^{(1)})^2 - \mu - \sigma_{zz}^0}{\lambda + \mu} \frac{\lambda s^3}{L^3} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(1)} s \right) \right\} + \\
&\quad A_3^{(1)} \left\{ -\frac{\lambda s^2}{2rL^2} \xi_3^{(1)} \left(K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(1)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(1)} s \right) \right) + \frac{(\lambda + 2\mu)s^3 (\xi_3^{(1)})^2}{4L^2} \left(3K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(1)} s \right) + K_3 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(1)} s \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{s\lambda}{r^2 L} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(1)} s \right) - \frac{(\lambda + 2\mu)(\xi_3^{(1)})^2 - \mu - \sigma_{zz}^0}{\lambda + \mu} \frac{\lambda s^3}{L^3} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(1)} s \right) \right\} \right) \cos \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{rr}^{(2)} = & \left(A_{11}^{(2)} \left\{ -\frac{2\mu}{r^2} I_1 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) + \frac{\mu s}{rL} \xi_1^{(2)} \left(I_0 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) + I_2 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) \right) \right\} + \right. \\
& A_{12}^{(2)} \left\{ -\frac{2\mu}{r^2} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) - \frac{\mu s}{rL} \xi_1^{(2)} \left(K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) \right) \right\} + \\
& A_{21}^{(2)} \left\{ \frac{(\lambda + 2\mu) s^3 (\xi_2^{(2)})^2}{4L^3} \left(3I_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) + I_3 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) \right) + \frac{\lambda s^2 \xi_2^{(2)}}{2rL^2} \left(I_0 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) + I_2 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) \right) \right. \\
& \left. - \frac{\lambda s}{r^2 L} I_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) - \frac{(\lambda + 2\mu) (\xi_2^{(2)})^2 - \mu - \sigma_{zz}^0}{\lambda + \mu} \frac{s^3 \lambda}{L^3} I_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) \right\} + \\
& A_{22}^{(2)} \left\{ \frac{(\lambda + 2\mu) s^3 (\xi_2^{(2)})^2}{4L^3} \left(3K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) + K_3 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) \right) - \frac{\lambda s^2 \xi_2^{(2)}}{2rL^2} \left(K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) \right) \right. \\
& \left. - \frac{\lambda s}{r^2 L} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) - \frac{(\lambda + 2\mu) (\xi_2^{(2)})^2 - \mu - \sigma_{zz}^0}{\lambda + \mu} \frac{s^3 \lambda}{L^3} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) \right\} + \\
& A_{31}^{(2)} \left\{ \frac{(\lambda + 2\mu) s^3 (\xi_3^{(2)})^2}{4L^3} \left(3I_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) + I_3 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) \right) + \frac{\lambda s^2 \xi_3^{(2)}}{2rL^2} \left(I_0 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) + I_2 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) \right) \right. \\
& \left. - \frac{\lambda s}{r^2 L} I_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) - \frac{(\lambda + 2\mu) (\xi_3^{(2)})^2 - \mu - \sigma_{zz}^0}{\lambda + \mu} \frac{s^3 \lambda}{L^3} I_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) \right\} + \\
& A_{32}^{(2)} \left\{ \frac{(\lambda + 2\mu) s^3 (\xi_3^{(2)})^2}{4L^3} \left(3K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) + K_3 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) \right) - \frac{\lambda s^2 \xi_3^{(2)}}{2rL^2} \left(K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) \right) \right. \\
& \left. - \frac{\lambda s}{r^2 L} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) - \frac{(\lambda + 2\mu) (\xi_3^{(2)})^2 - \mu - \sigma_{zz}^0}{\lambda + \mu} \frac{s^3 \lambda}{L^3} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) \right\} \Bigg\} \cos \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{r\theta}^{(1)} = & \mu \left(A_1^{(1)} \left\{ -\frac{1}{r^2} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(1)} s \right) - \frac{s^2}{4L^2} (\xi_1^{(1)})^2 \left(3K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(1)} s \right) + K_3 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(1)} s \right) \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{s}{2rL} \xi_1^{(1)} \left(K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(1)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(1)} s \right) \right) \right\} + \right. \\
& A_2^{(1)} \left\{ \frac{s^2}{rL^2} \xi_2^{(1)} \left(K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(1)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(1)} s \right) \right) + \frac{2s}{r^2 L} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(1)} s \right) \right\} + \\
& \left. A_3^{(1)} \left\{ \frac{s^2}{rL^2} \xi_3^{(1)} \left(K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(1)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(1)} s \right) \right) + \frac{2s}{r^2 L} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(1)} s \right) \right\} \right\} \sin \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{r\theta}^{(2)} = & \mu \left(A_{11}^{(2)} \left\{ -\frac{1}{r^2} I_1 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) - \frac{s^2}{4L^2} (\xi_1^{(2)})^2 \left(3I_1 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) + I_3 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) \right) \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{s}{2rL} \xi_1^{(2)} \left(I_0 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) + I_2 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) \right) \right\} + \right. \\
& A_{12}^{(2)} \left\{ -\frac{1}{r^2} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) - \frac{s^2}{4L^2} (\xi_1^{(2)})^2 \left(3K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) + K_3 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) \right) \right. \\
& + \left. \left. \frac{s}{2rL} \xi_1^{(2)} \left(K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) \right) \right\} + \right. \\
& A_{21}^{(2)} \left\{ \frac{2s}{r^2 L} I_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) - \frac{s^2}{rL^2} \xi_2^{(2)} \left(I_0 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) + I_2 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) \right) \right\} + \\
& A_{22}^{(2)} \left\{ \frac{2s}{r^2 L} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) + \frac{s^2}{rL^2} \xi_2^{(2)} \left(K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) \right) \right\} + \\
& A_{31}^{(2)} \left\{ \frac{2s}{r^2 L} I_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) - \frac{s^2}{rL^2} \xi_3^{(2)} \left(I_0 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) + I_2 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) \right) \right\} + \\
& A_{32}^{(2)} \left\{ \frac{2s}{r^2 L} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) + \frac{s^2}{rL^2} \xi_3^{(2)} \left(K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) \right) \right\} \Bigg\} \sin \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{rz}^{(1)} = & i\mu \left\{ A_1^{(1)} \frac{s}{rL} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(1)} s \right) - A_2^{(1)} \frac{s^3 \xi_2^{(1)}}{2L^3} \frac{(\lambda + 2\mu)(\xi_2^{(1)})^2 + \lambda - \sigma_{zz}^{(0)}}{\lambda + \mu} \left(K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(1)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(1)} s \right) \right) \right. \\
& \left. - A_3^{(1)} \frac{s^3 \xi_3^{(1)}}{2L^3} \frac{(\lambda + 2\mu)(\xi_3^{(1)})^2 + \lambda - \sigma_{zz}^{(0)}}{\lambda + \mu} \left(K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(1)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(1)} s \right) \right) \right\} \cos \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{rz}^{(2)} = & i\mu \left\{ A_{11}^{(2)} \frac{s}{rL} I_1 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) + A_{12}^{(2)} \frac{s}{rL} K_1 \left(\frac{r}{L} \xi_1^{(2)} s \right) \right. \\
& + A_{21}^{(2)} \frac{s^3 \xi_2^{(2)}}{2L^3} \frac{(\lambda + 2\mu)(\xi_2^{(2)})^2 + \lambda - \sigma_{zz}^{(0)}}{\lambda + \mu} \left(I_0 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) + I_2 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) \right) \\
& - A_{22}^{(2)} \frac{s^3 \xi_2^{(2)}}{2L^3} \frac{(\lambda + 2\mu)(\xi_2^{(2)})^2 + \lambda - \sigma_{zz}^{(0)}}{\lambda + \mu} \left(K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_2^{(2)} s \right) \right) \\
& + A_{31}^{(2)} \frac{s^3 \xi_3^{(2)}}{2L^3} \frac{(\lambda + 2\mu)(\xi_3^{(2)})^2 + \lambda - \sigma_{zz}^{(0)}}{\lambda + \mu} \left(I_0 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) + I_2 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) \right) \\
& \left. - A_{32}^{(2)} \frac{s^3 \xi_3^{(2)}}{2L^3} \frac{(\lambda + 2\mu)(\xi_3^{(2)})^2 + \lambda - \sigma_{zz}^{(0)}}{\lambda + \mu} \left(K_0 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) + K_2 \left(\frac{r}{L} \xi_3^{(2)} s \right) \right) \right\} \cos \theta
\end{aligned}$$

(2.50)

Bu gerilmelerin gerçek değerlerini elde etmek için, örneğin $\sigma_{rr}^{(1),1}$ 'i elde etmek için

$$\sigma_{rr}^{(1),1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\sigma}_{rr}^{(1),1} e^{isz} ds \quad (2.51)$$

Ters Fourier Dönüşümü uygulanır. Böylece birinci yaklaşımla ilgili sınır değer problemi çözülmüş olmaktadır.

2.4 Sayısal Sonuçlar

Birinci yaklaşımla ilgili olan (2.48) lineer denklemler sistemi çözüldüğünde elde etmek istediğimiz gerilme büyüklüklerinin s Fourier parametresine bağlı Fourier Dönüşümlü değerleri bulunmuş olur. Gerçek değerlere ulaşmak için kullanılması gereken Ters Fourier Dönüşümündeki $\int_{-\infty}^{+\infty} (.)ds$ integral, büyüklüklerin tek veya çift olmalarından dolayı söz konusu

integral $\int_0^{+\infty} (.)ds$ haline gelmiş olur. Bu integral

$$\int_0^{+\infty} (.)ds \cong \int_0^{S_*} (.)ds \cong \sum_{i=0}^N \int_{S_i}^{S_{i+1}} (.)ds \quad (2.52)$$

yaklaşımıyla çözülmüştür. N ve S_* değerleri yakınsaklık kriteri ile belirlenmiş parametreler

olmak üzere $S_0 = 0$, $S_N = S_*$ olarak kullanılmıştır. Ayrıca $\int_{S_i}^{S_{i+1}} (.)ds$ integralinin sayısal hesabı

için 10 noktalı Gaus-Legendre nümerik integrasyon yöntemi kullanılmıştır.

Gerilme yayılımına ait incelemeler σ_{nr} , σ_{ne} kayma gerilmeleri ve σ_{nn} normal gerilmesine ait sayısal sonuçlar elde etmek ve bunları yorumlama kapsamında yapılmıştır. Bu gerilmeler, matris ve lif arakesit yüzeyi üzerinde **n** normal vektörü ve **t**, **e** teğet vektörleri doğrultusundaki gerilmelerdir.

Sayısal sonuçlar için $ak=R_2/L$ ve $bk=h/L$ parametrelerini tanımlayalım ve $v^{(1)}=v^{(2)}=0.3$, $\varepsilon=0.07$ ve aksi belirtilmedikçe $E^{(2)}/E^{(1)}=50$ değerlerinin kullanıldığını belirtelim. Geometrik nonlinearitenin gerilme yayılımına etkisini göstermek için $\alpha=p/E^{(1)}$ parametresini kullanalım.

Gerilmelerin $bk=h/L$ parametresine göre değişimini gösteren şekillerde ve tablolarda σ_{nn} , σ_{ne} için $\theta=0$; σ_{nt} için $\theta=\pi/2$ değeri kullanılmıştır. Şekil 2.2- 2.4 grafikleri $ak=0.25$ değerinde sırası ile $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$ ile bk parametresi arasındaki ilişkiye geometrik nonlineariteyi ifade eden α 'nın etkisi görülmektedir. $\alpha=\mp 5.10^{-5}$ durumunda verilen sonuçların geometrik lineer durumda elde edilenlerle çakıştığı görülmektedir. Bu grafiklerden, geometrik nonlinearitenin etkisi olarak $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$ gerilmelerinin mutlak değeri, çekmede (basınçta) $|\alpha|$ ile monoton olarak azalmaktadır (artmaktadır).

Gerilmelerin x_3/L parametresine göre değişimini gösteren şekillerde σ_{nn} , σ_{ne} , için $\theta=0$; σ_{nt} için $\theta=\pi/2$ değeri kullanılmıştır. Şekil 2.5- 2.7 grafikleri $ak=0.25$ değerinde sırası ile $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$ ile x_3/L parametresi arasındaki ilişkiye geometrik nonlineariteyi ifade eden α 'nın etkisi görülmektedir. $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$ gerilmelerinin mutlak değeri, çekmede (basınçta) $|\alpha|$ ile monoton olarak azalmaktadır (artmaktadır).

Gerilmelerin $ak=R_2/L$ parametresine göre değişimini gösteren şekillerde σ_{nn} , σ_{ne} , için $\theta=0$; σ_{nt} için $\theta=\pi/2$ değeri kullanılmıştır. Şekil 2.8- 2.10 grafiklerinde $bk=0.5$ değerinde sırası ile $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$ ile x_3/L parametresi arasındaki ilişkiye geometrik nonlineariteyi ifade eden α 'nın etkisi görülmektedir. $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$ gerilmelerinin mutlak değeri, çekmede (basınçta) $|\alpha|$ ile monoton olarak azalmaktadır (artmaktadır).

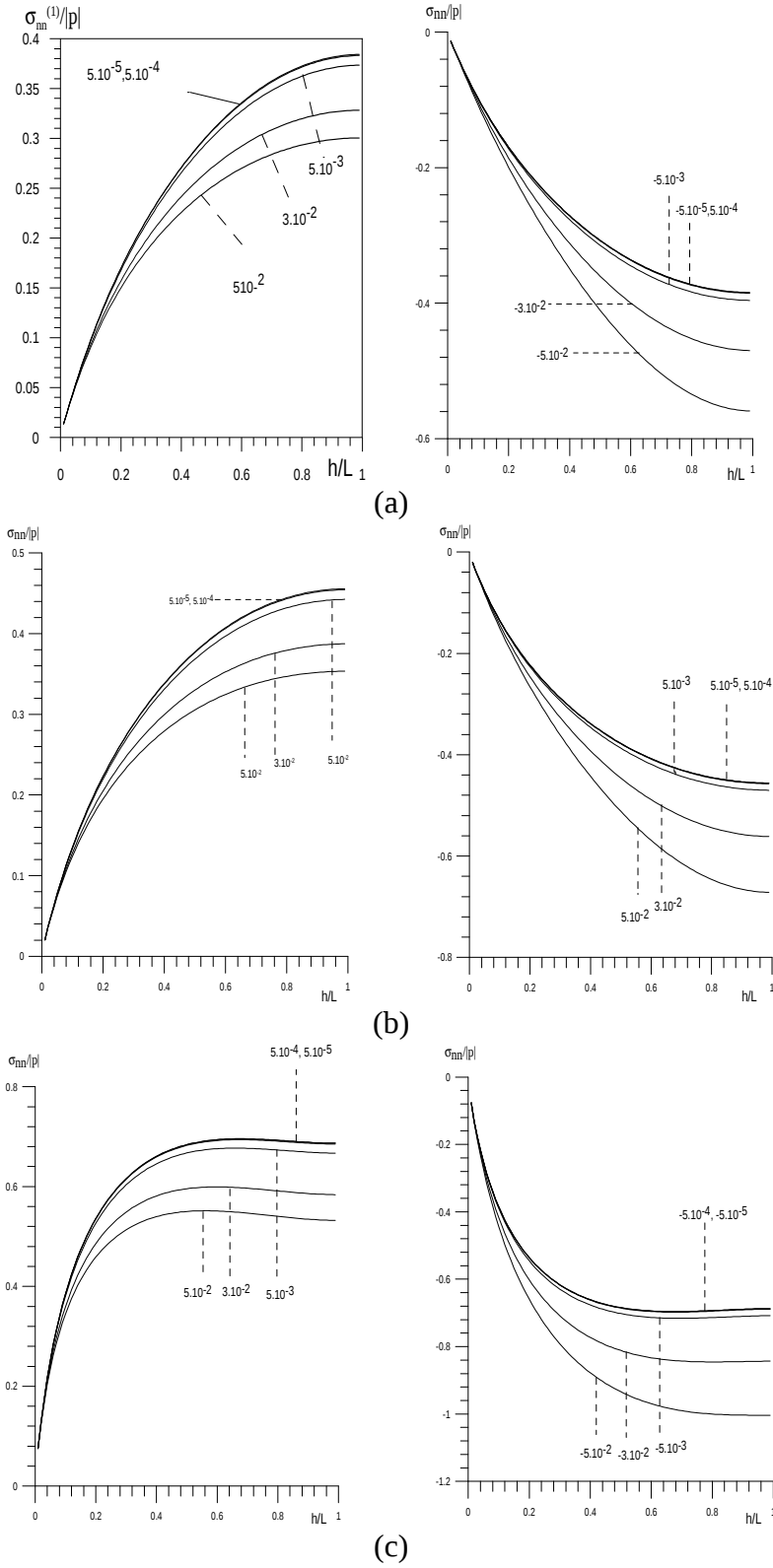
Gerilmelerin θ parametresine göre değişimini gösteren şekillerde σ_{nn} , σ_{ne} , için $x_3/L=0$; σ_{nt} için $x_3/L=0.7$ değeri kullanılmıştır. Şekil 2.11- 2.13 grafiklerinde $bk=0.5$ değerinde sırası ile $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$ ile θ parametresi arasındaki ilişkiye geometrik

nonlineeriteyi ifade eden α 'nın etkisi görülmektedir. $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$ gerilmelerinin mutlak değeri, çekmede (basınçta) $|\alpha|$ ile monoton olarak azalmaktadır (artmaktadır).

Gerilmelerin x_3/L parametresine göre değişimini gösteren şekillerde σ_{nn} , σ_{ne} , için $\theta = 0$; σ_{nt} için $\theta = \pi/2$ değeri kullanılmıştır. Şekil 2.14-2.16 grafiklerinde $ak = 0.1$, $bk = 0.1$, $E^{(2)}/E^{(1)} = 500$ değerlerinde sırası ile $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$ ile x_3/L parametresi arasındaki ilişkiye geometrik nonlineeriteyi ifade eden α 'nın etkisi görülmektedir. $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$ gerilmelerinin mutlak değeri, çekmede (basınçta) $|\alpha|$ ile monoton olarak azalmaktadır (artmaktadır).

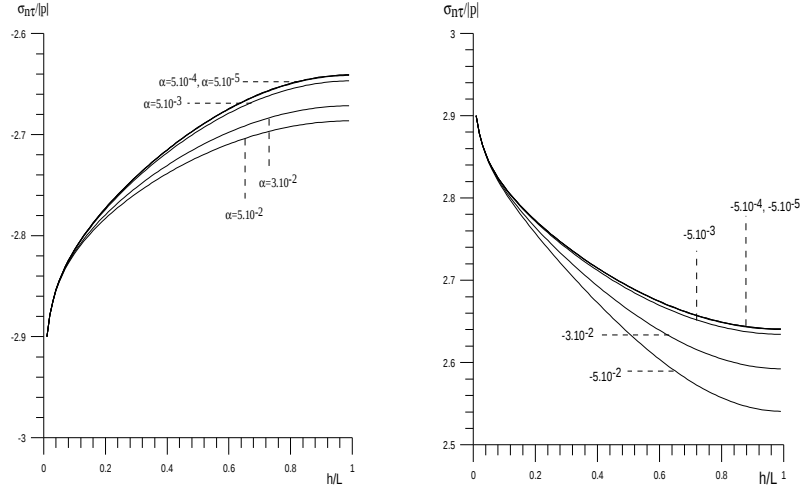
Gerilmelerin x_3/L parametresine göre değişimini gösteren şekillerde σ_{nn} , σ_{ne} , için $\theta = 0$; σ_{nt} için $\theta = \pi/2$ değeri kullanılmıştır. Şekil 2.17-2.19 grafiklerinde $ak = 0.1$, $bk = 0.1$, $E^{(2)}/E^{(1)} = 300$ değerlerinde sırası ile $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$ ile x_3/L parametresi arasındaki ilişkiye geometrik nonlineeriteyi ifade eden α 'nın etkisi görülmektedir. $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$ gerilmelerinin mutlak değeri, çekmede (basınçta) $|\alpha|$ ile monoton olarak azalmaktadır (artmaktadır).

Çizelge 2.1-2.3'lerde sırası ile $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{nt}/|p|$, $\sigma_{ne}/|p|$ değerleri çeşitli m , $E^{(1)}/E^{(2)}$, α parametrelerinde verilmiştir. Bu çizelgelerde gerilme değerlerinin sıfırcı ve birinci yaklaşım sonucunda elde edilen sayısal sonuçları görülmektedir. Bu tablolardan $E^{(2)}/E^{(1)}$ büyüdükçe değerlerin de mutlak olarak büyüdüğü gözlenmektedir. Ayrıca $|\alpha|$ büyüdükçe gerilmelerin değerlerinin çekme durumunda mutlak olarak azaldığı, basınç durumunda mutlak olarak arttığı izlenmektedir.

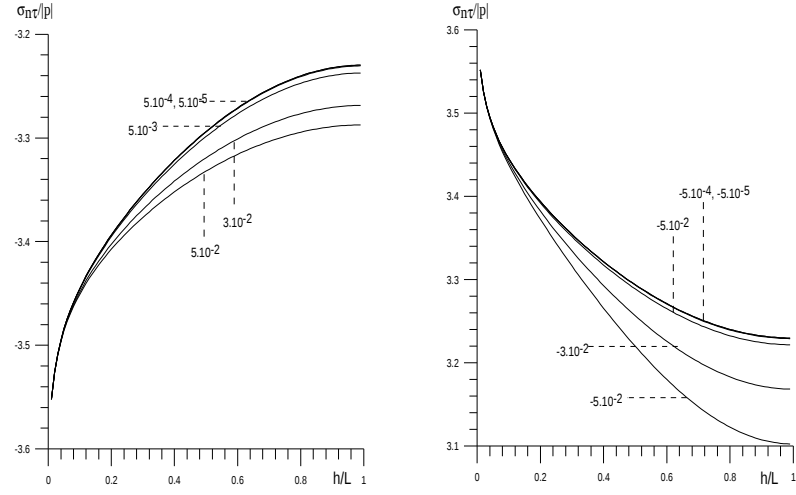


Şekil 2.2 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nn}/|p|$ ile $\frac{h}{L}$ arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c)

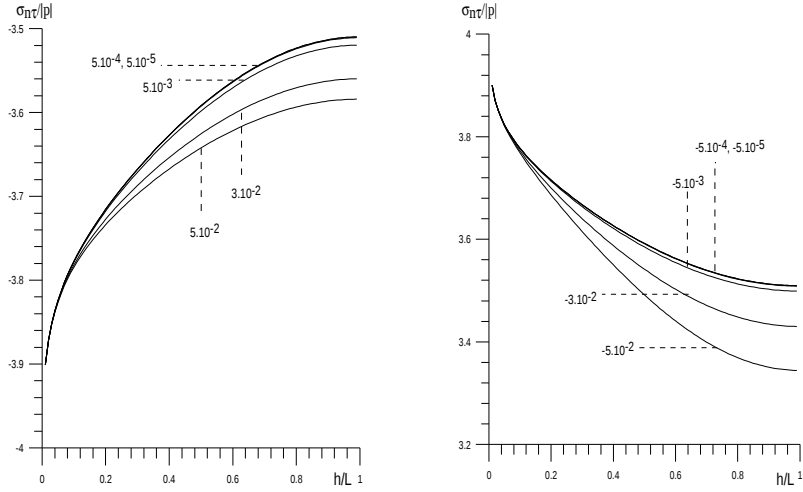
$m=3(E^{(2)}/E^{(1)} = 50, x_3/L = 0, \varepsilon = 0.07, \theta=0)$



(a)



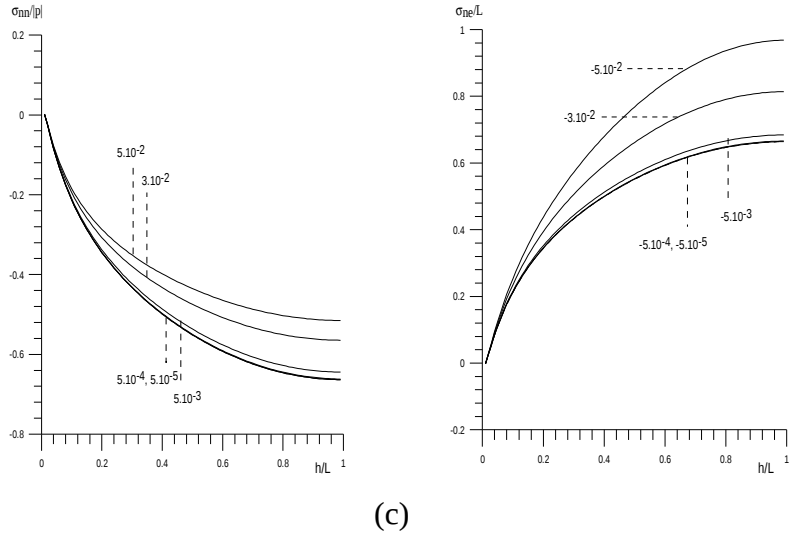
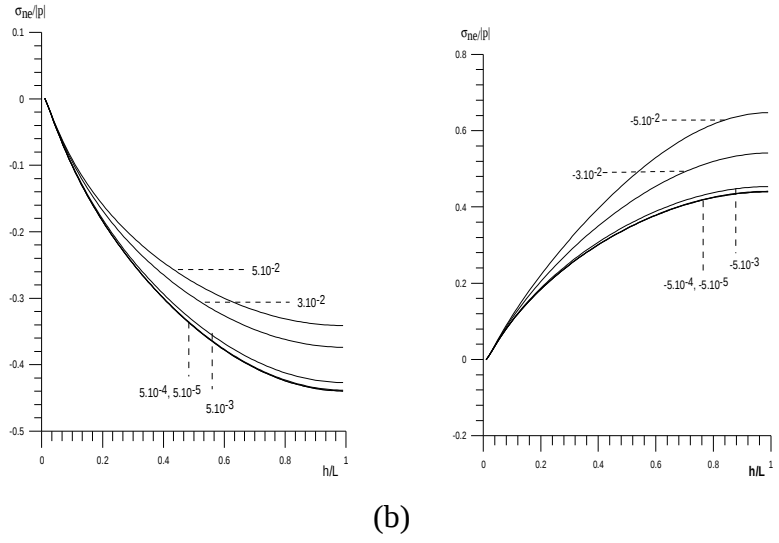
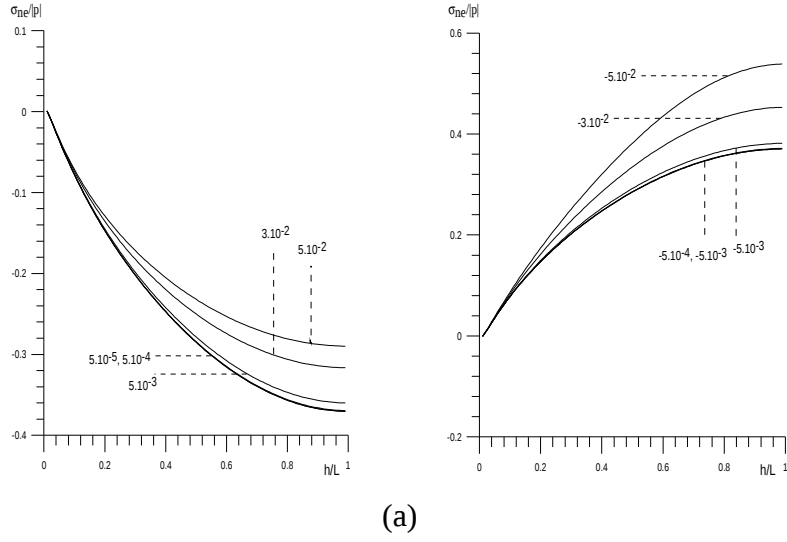
(b)



(c)

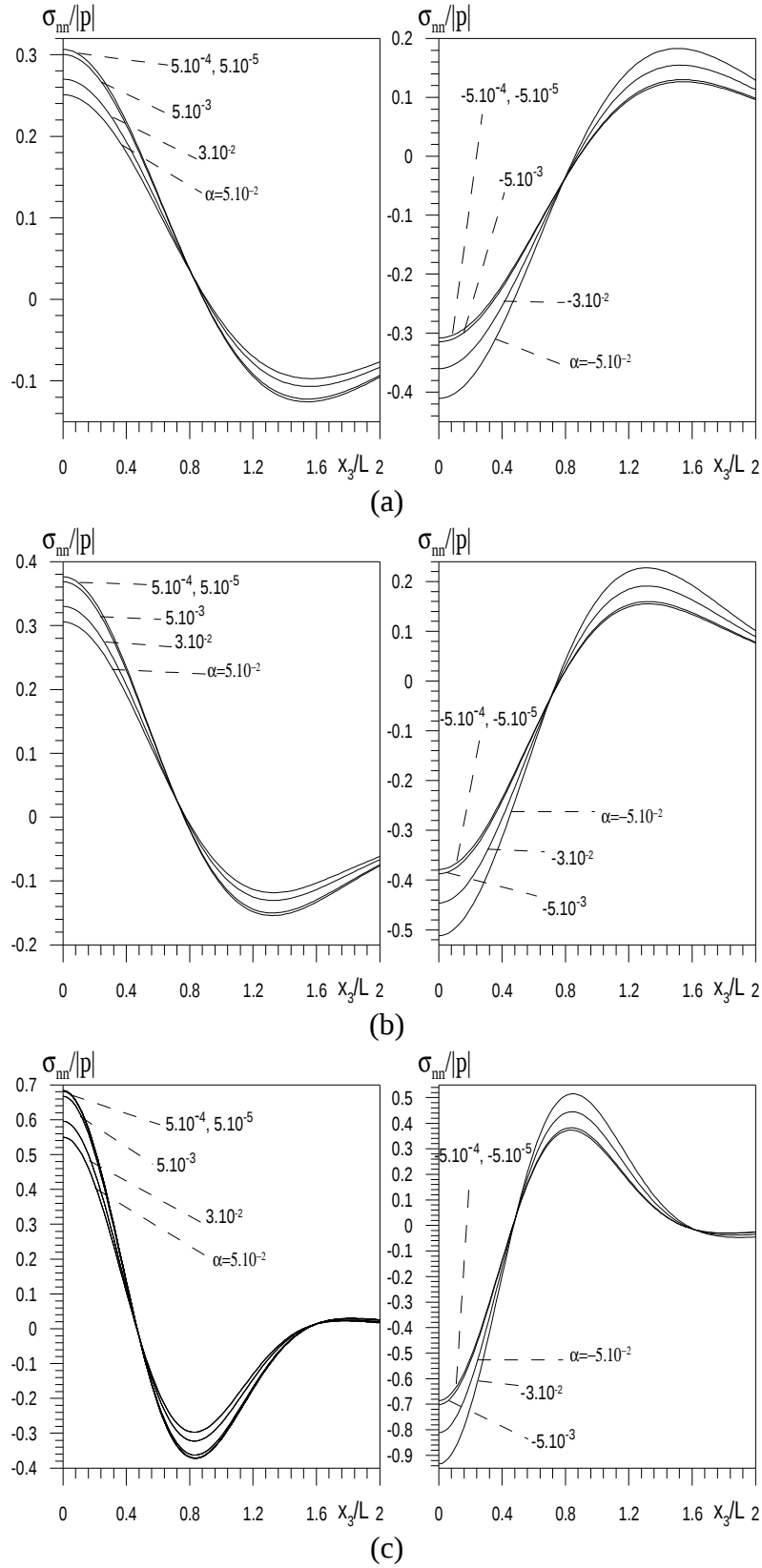
Şekil 2.3 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ne}/|p|$ ile $\frac{h}{L}$ arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c)

$m=3(E^{(2)}/E^{(1)} = 50, x_3/L = 0, \varepsilon = 0.07, \theta=0)$



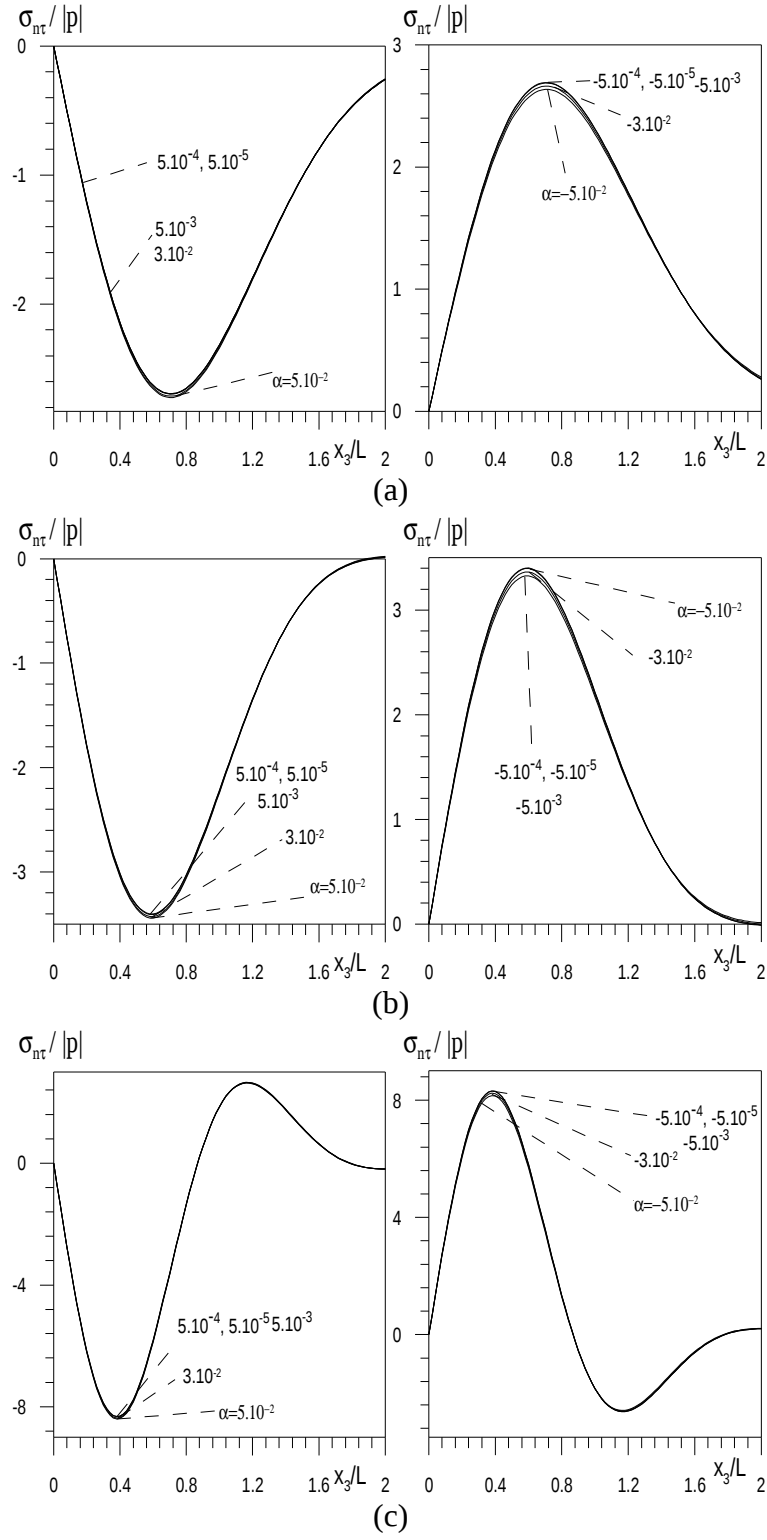
Şekil 2.4 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nt}/|p|$ ile $\frac{h}{L}$ arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c)

$$m=3(E^{(2)}/E^{(1)}=50, x_3/L=0, \varepsilon=0.07, \theta=\frac{\pi}{2})$$



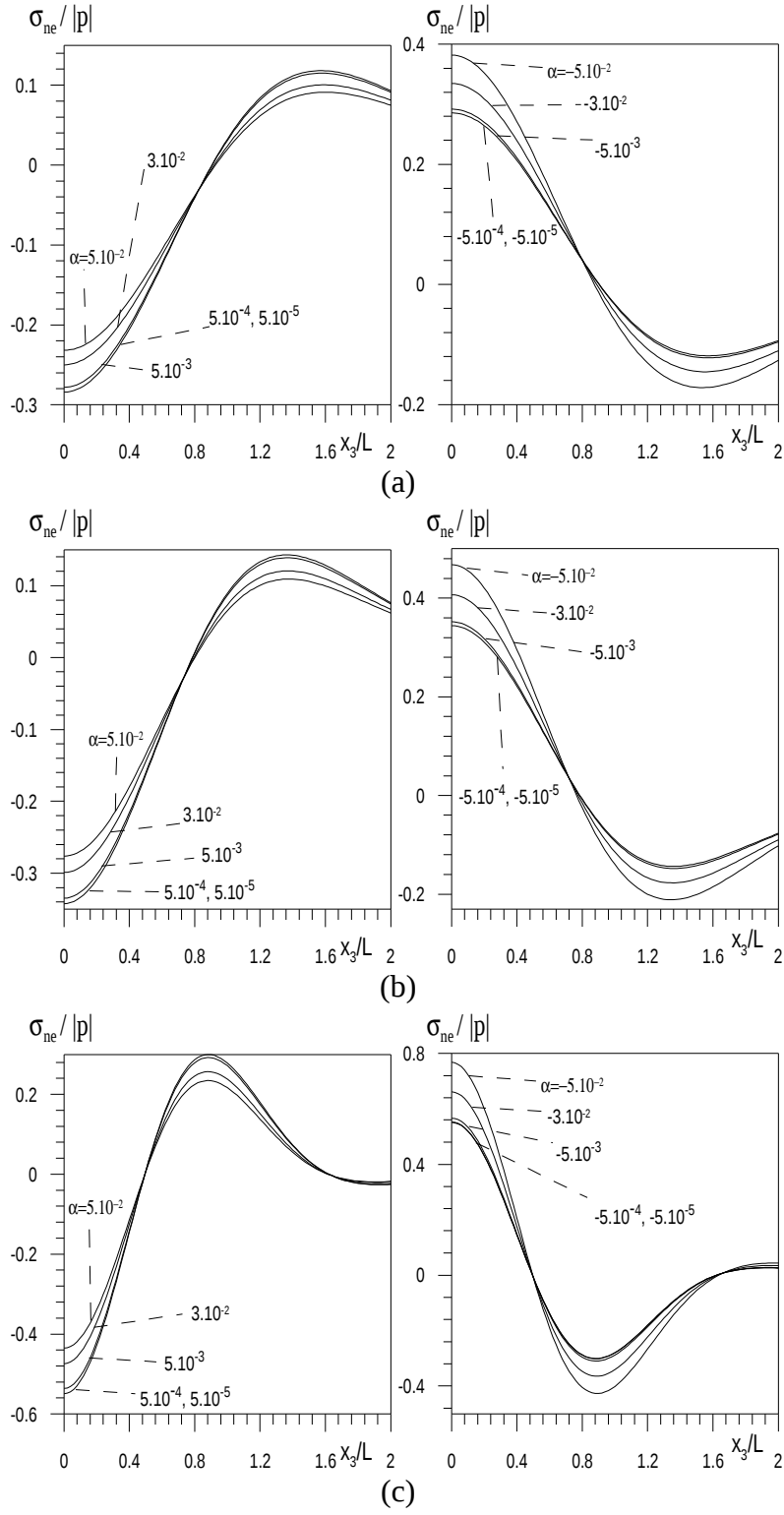
Şekil 2.5 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nn}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$

$$(E^{(2)}/E^{(1)} = 50, \frac{h}{L} = 0.5, \frac{R_2}{L} = 0.25, \varepsilon = 0.07, \theta = 0)$$

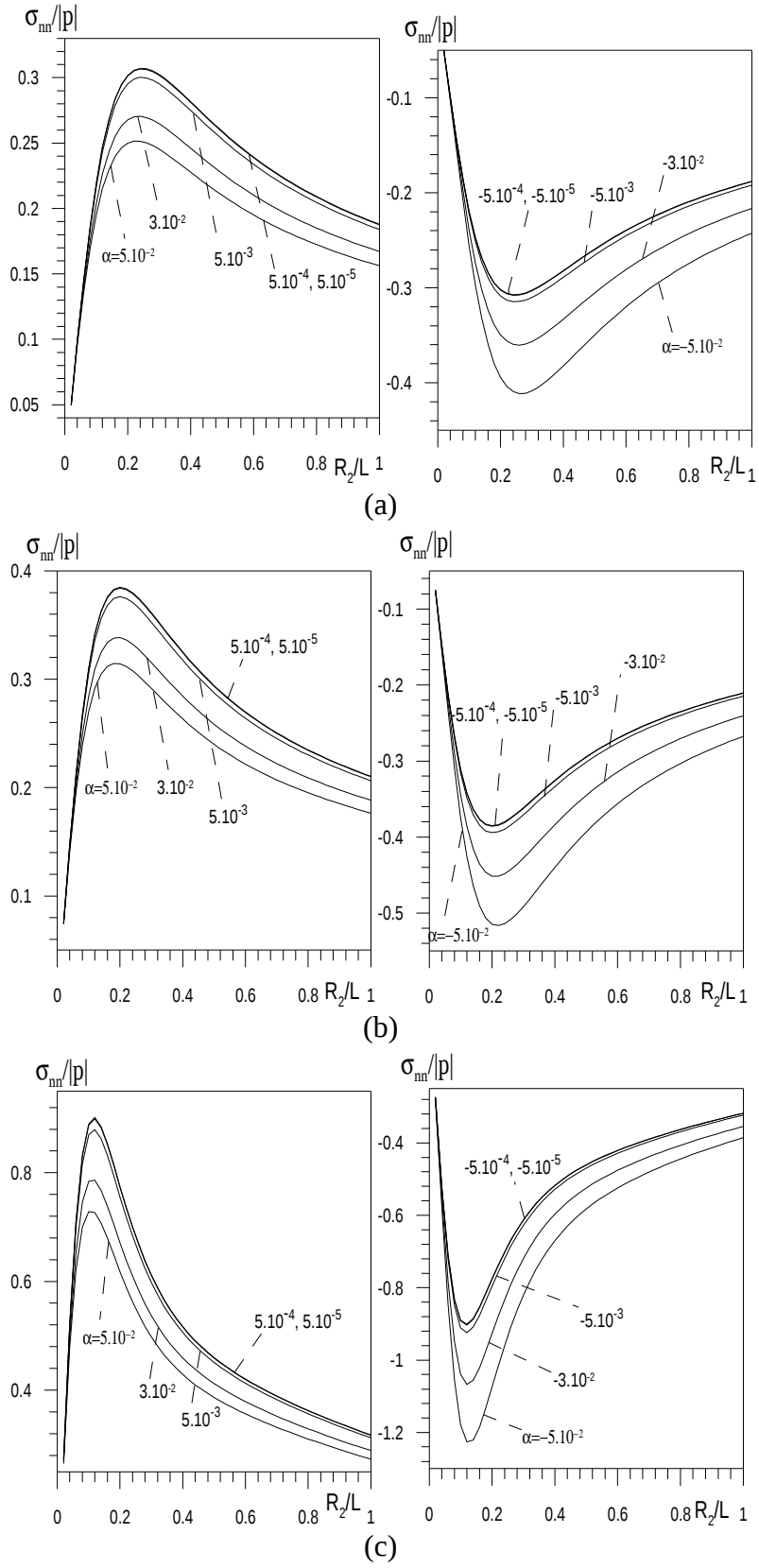


Şekil 2.6 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nt}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$

$$(E^{(2)}/E^{(1)} = 50, \frac{h}{L} = 0.5, \frac{R_2}{L} = 0.25, \varepsilon = 0.07, \theta = \frac{\pi}{2})$$

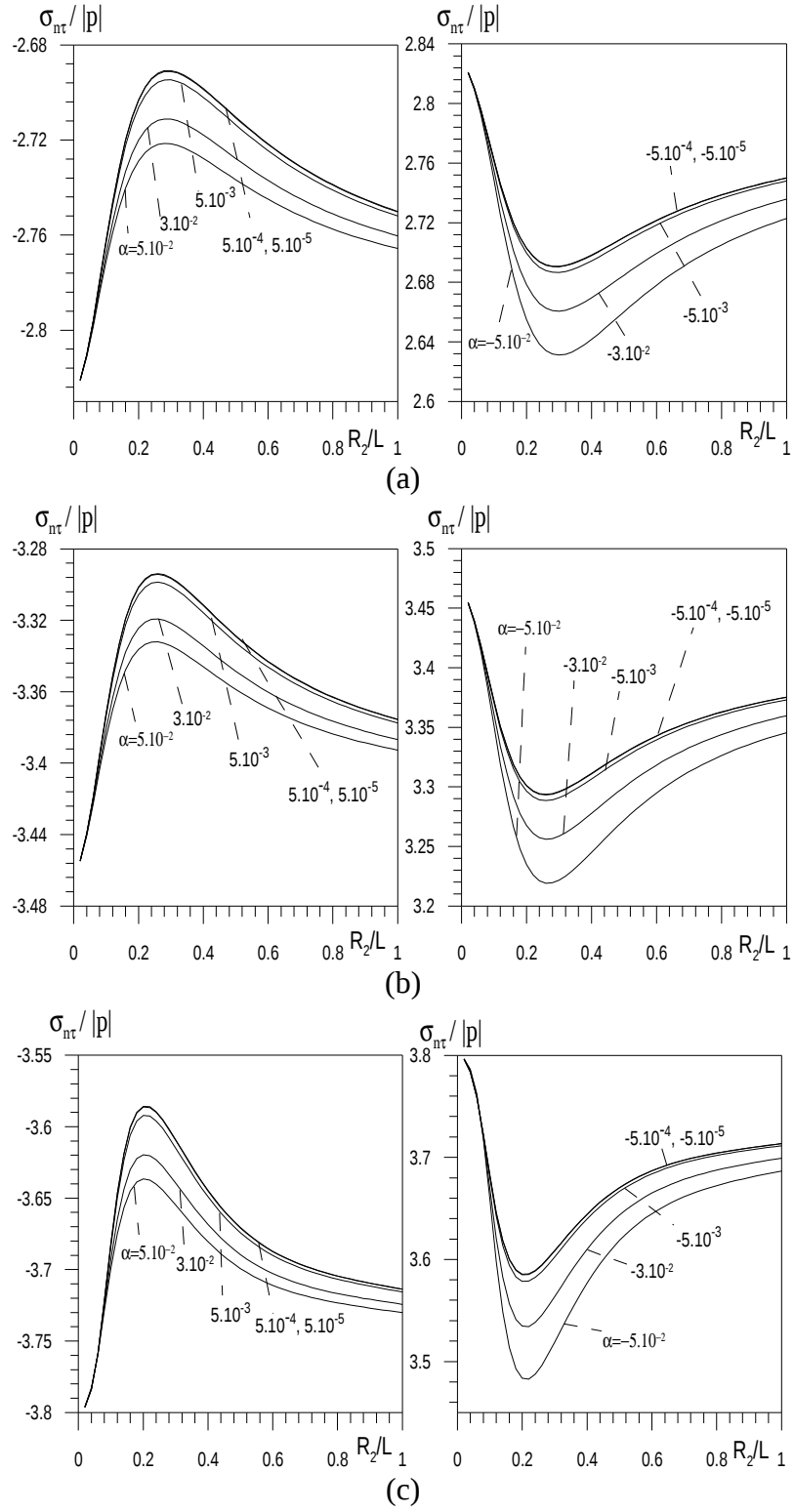


Şekil 2.7 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ne}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$
 $(E^{(2)}/E^{(1)} = 50, \frac{h}{L} = 0.5, \frac{R_2}{L} = 0.25, \varepsilon = 0.07, \theta = 0)$



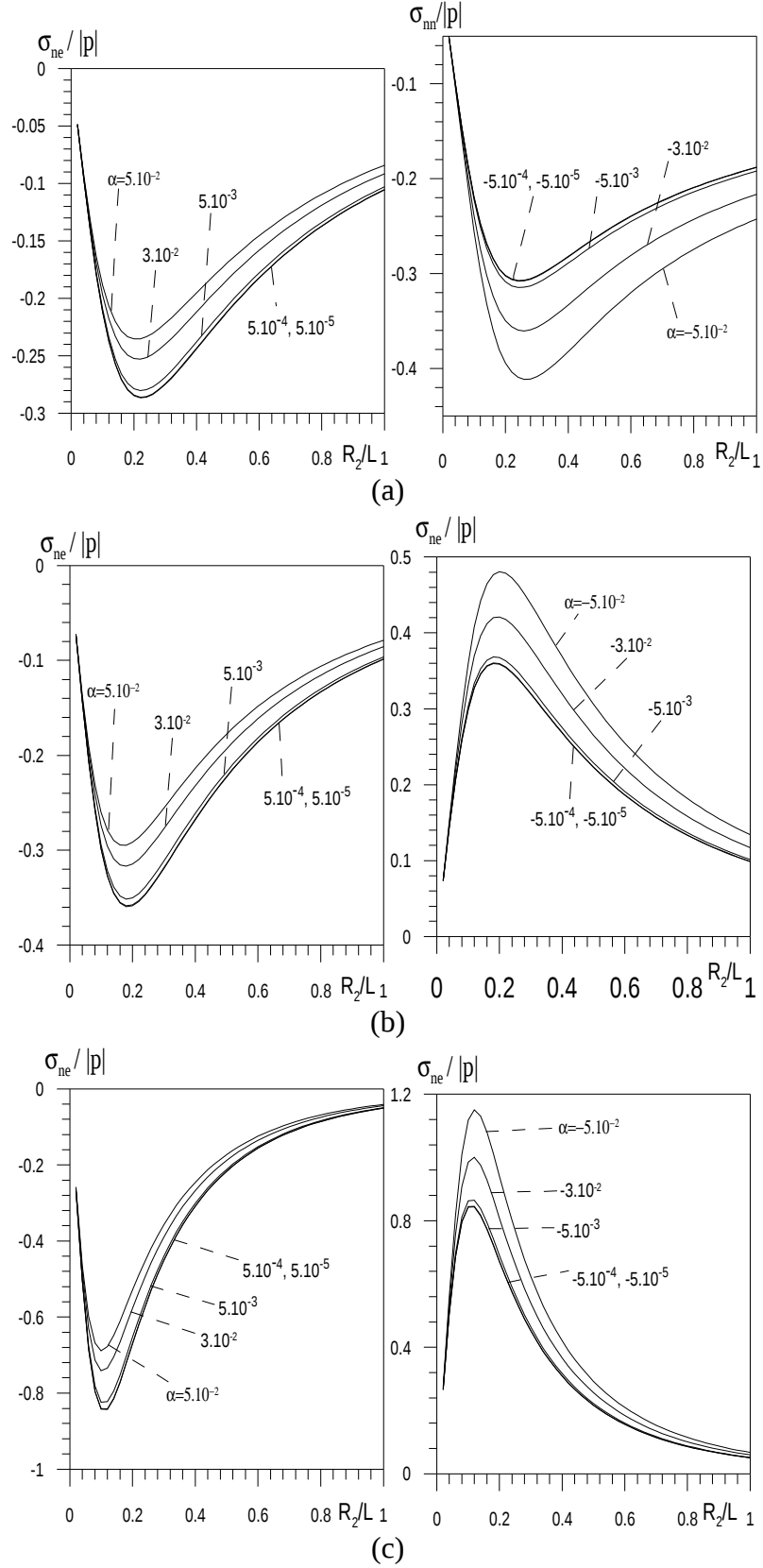
Şekil 2.8 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nn}/|p|$ ile $\frac{R_2}{L}$ arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$

$$(E^{(2)}/E^{(1)} = 50, x_3/L = 0, \frac{h}{L} = 0.5, \varepsilon = 0.07, \theta = 0)$$



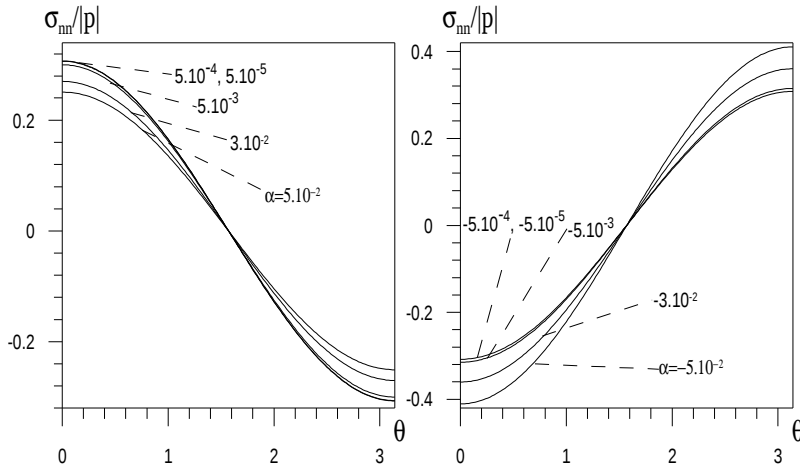
Şekil 2.9 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nr}/|p|$ ile $\frac{R_2}{L}$ arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$

$$(E^{(2)}/E^{(1)} = 50, x_3/L = 0.7, \frac{h}{L} = 0.5, \varepsilon = 0.07, \theta = \pi/2)$$

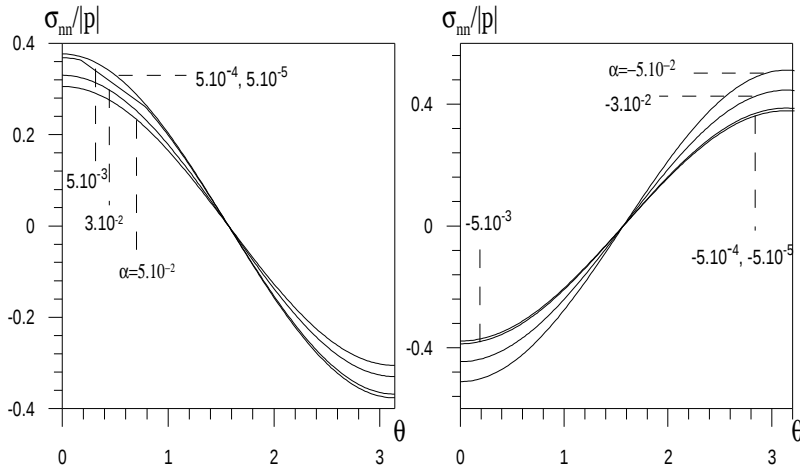


Şekil 2.10 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ne}/|p|$ ile $\frac{R_2}{L}$ arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$

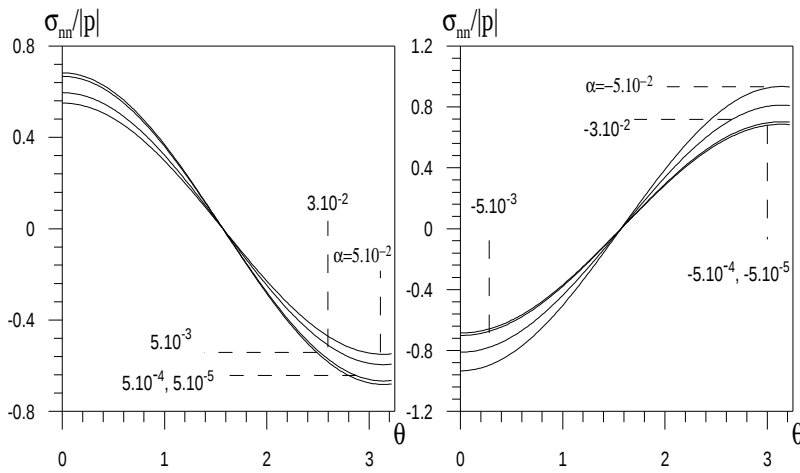
$$(E^{(2)}/E^{(1)} = 50, x_3/L = 0.0, \frac{h}{L} = 0.5, \varepsilon = 0.07, \theta = 0)$$



(a)



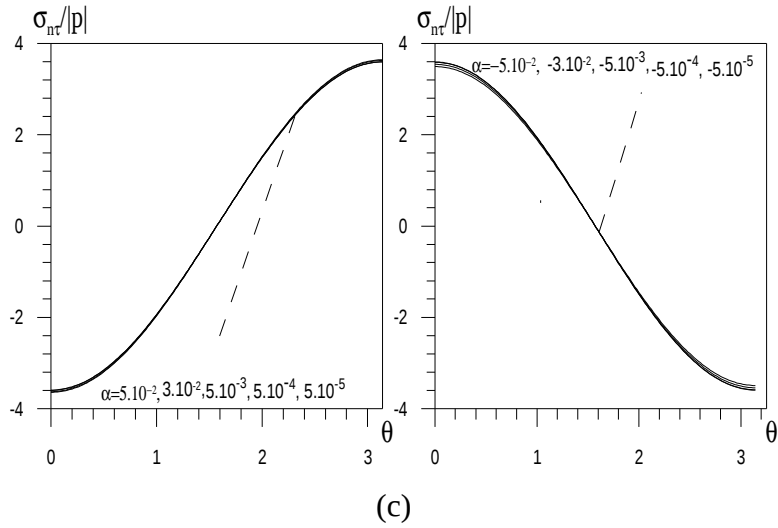
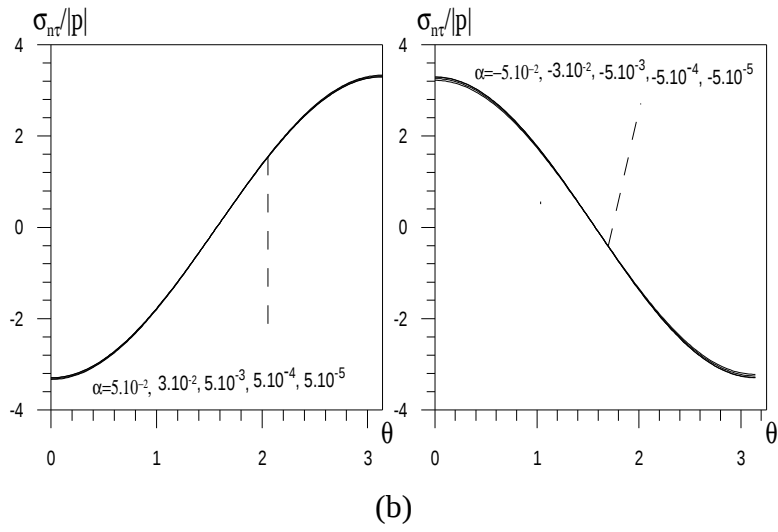
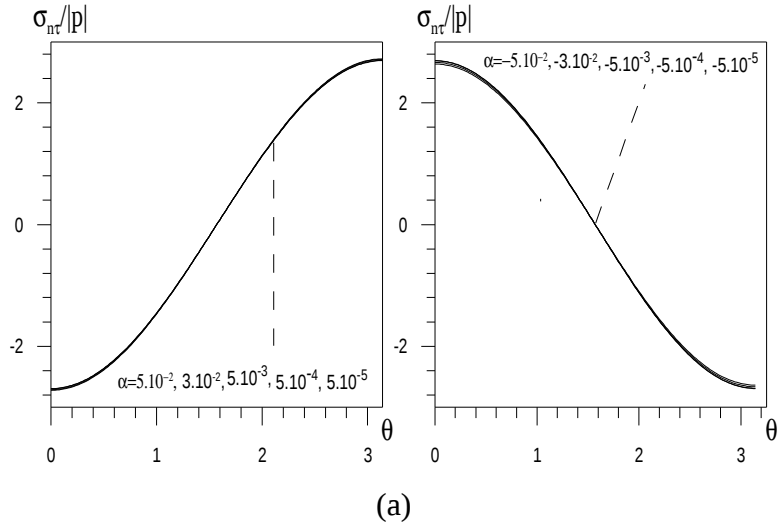
(b)



(c)

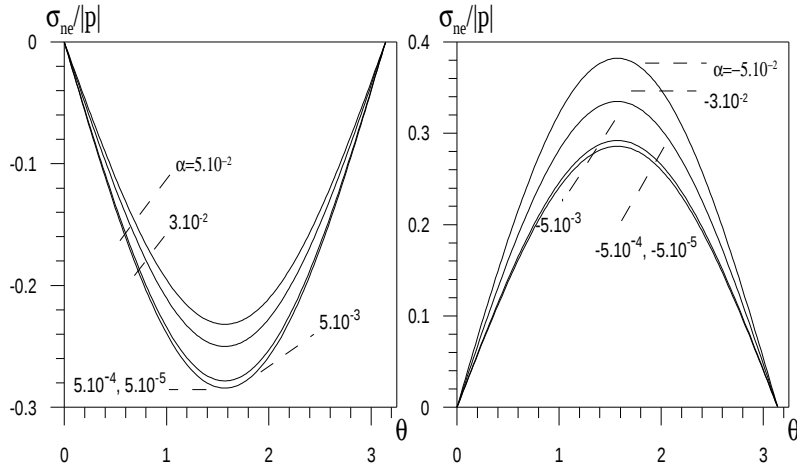
Şekil 2.11 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nn}/|p|$ ile θ arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$

$$(E^{(2)}/E^{(1)} = 50, x_3/L = 0, \frac{h}{L} = 0.5, \varepsilon = 0.07)$$

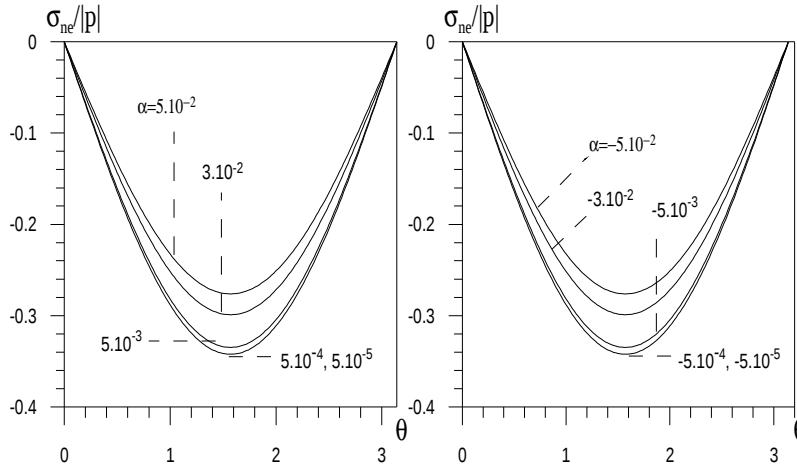


Şekil 2.12 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nt}/|p|$ ile θ arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$

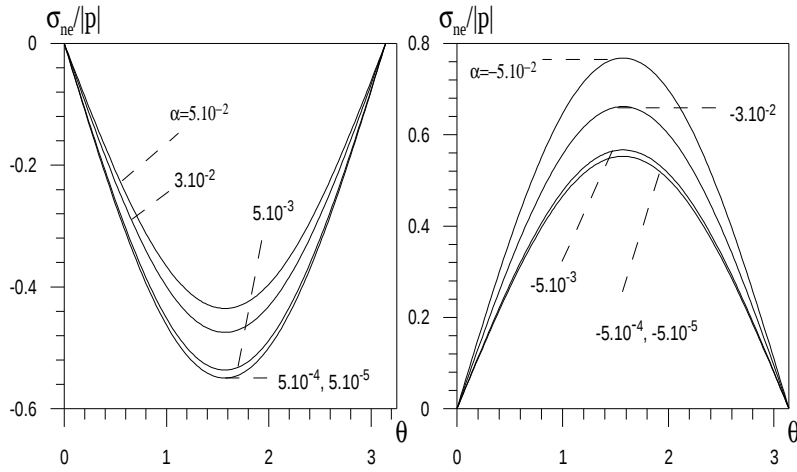
$$(E^{(2)}/E^{(1)} = 50, x_3/L = 0.7, \frac{h}{L} = 0.5, \varepsilon = 0.07)$$



(a)



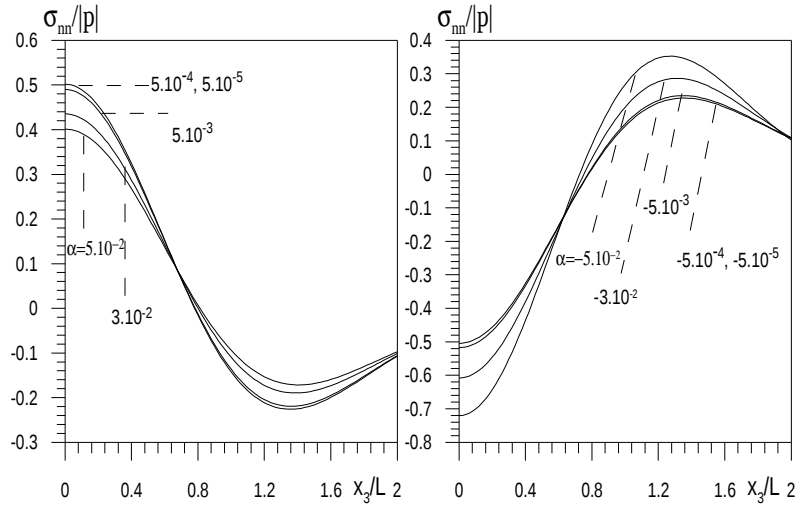
(b)



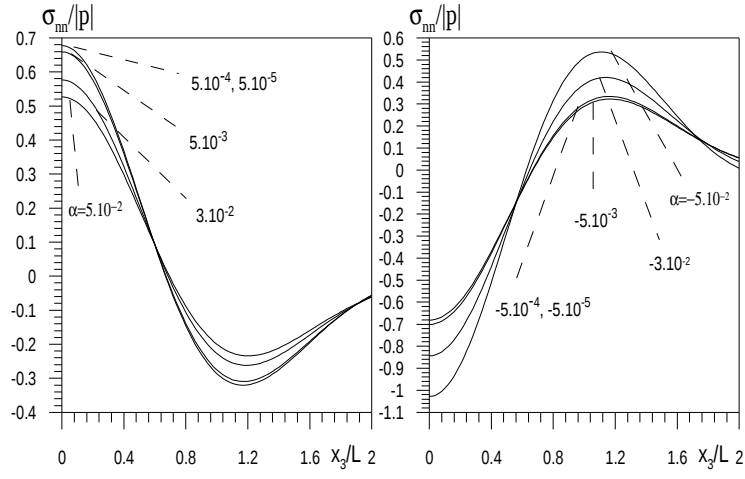
(c)

Şekil 2.13 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ne}/|p|$ ile θ arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$

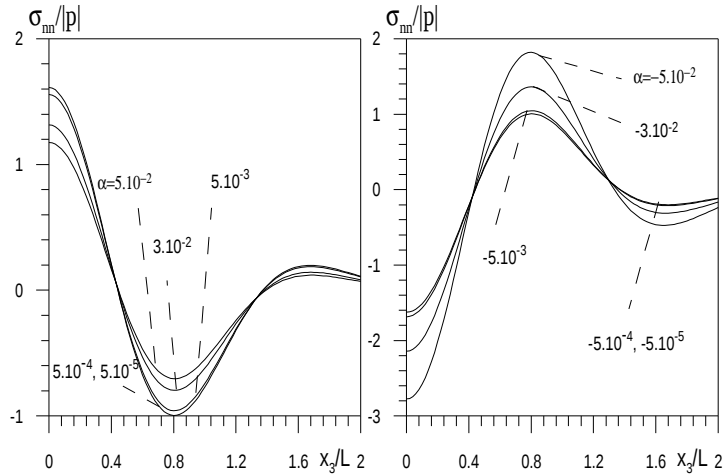
$$(E^{(2)}/E^{(1)} = 50, x_3/L = 0, \frac{h}{L} = 0.5, \varepsilon = 0.07)$$



(a)



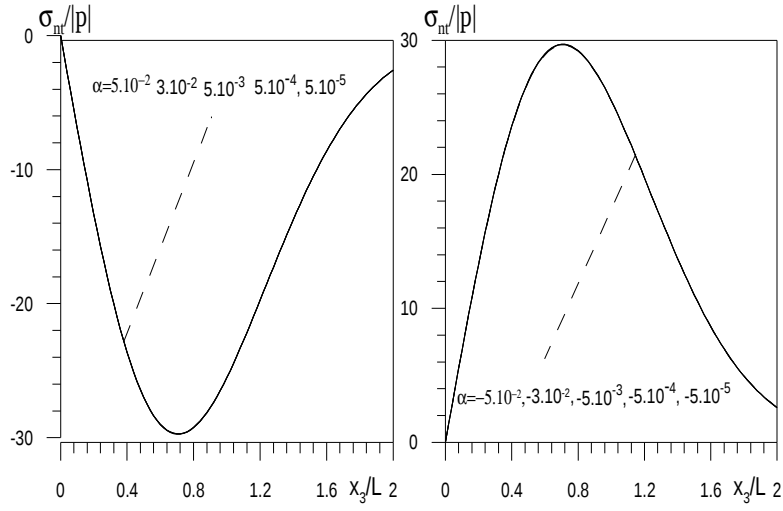
(b)



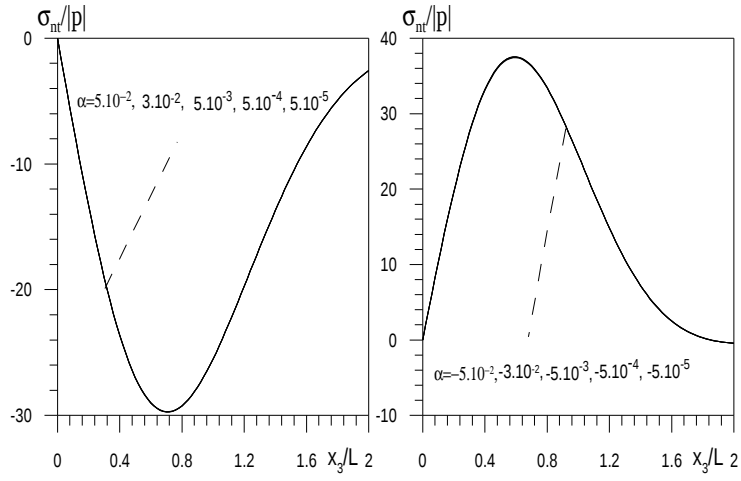
(c)

Şekil 2.14 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nn}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c)

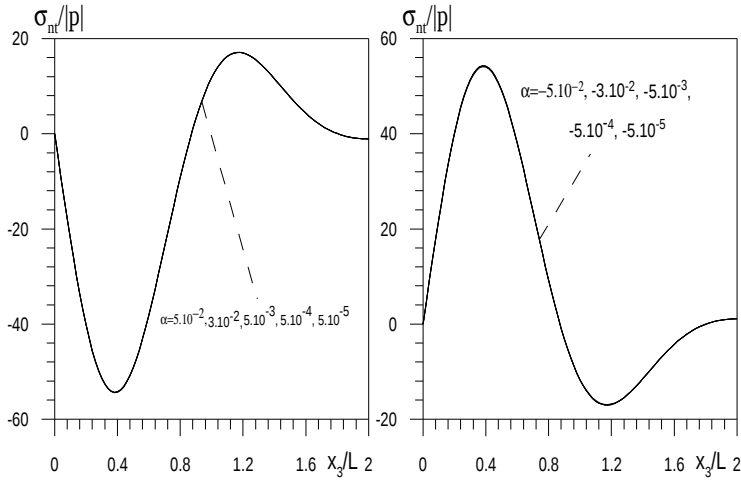
$$m=3 \left(E^{(2)}/E^{(1)} = 500, \theta = 0, \frac{h}{L} = 0.1, \varepsilon = 0.07 \right)$$



(a)



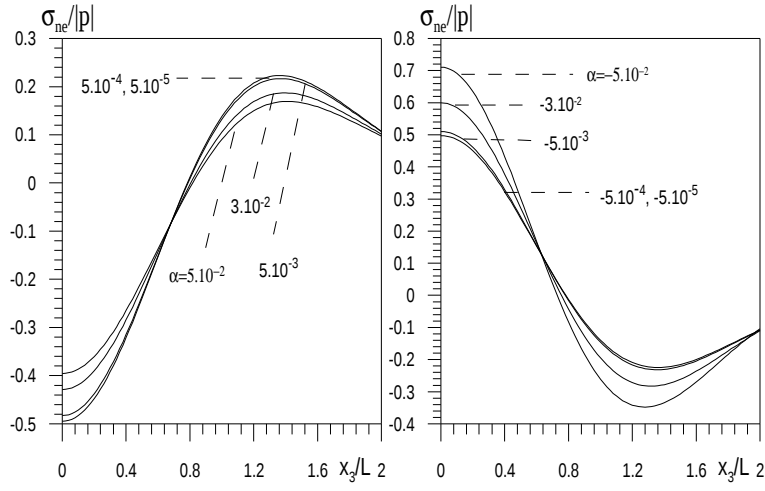
(b)



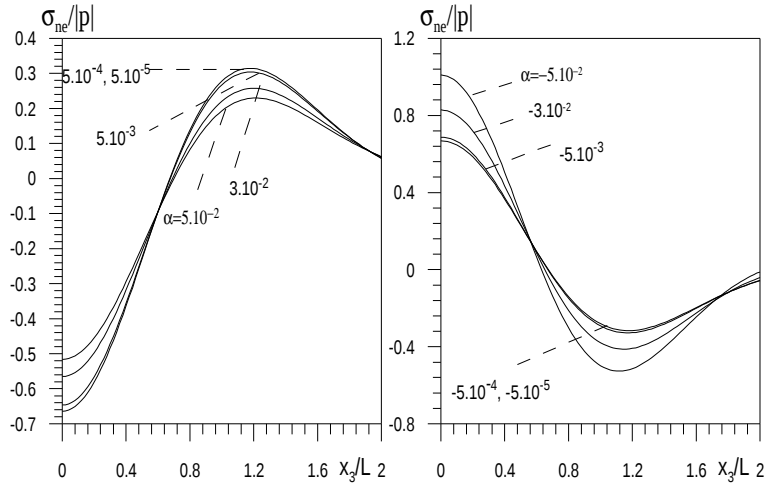
(c)

Şekil 2.15 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nr}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c)

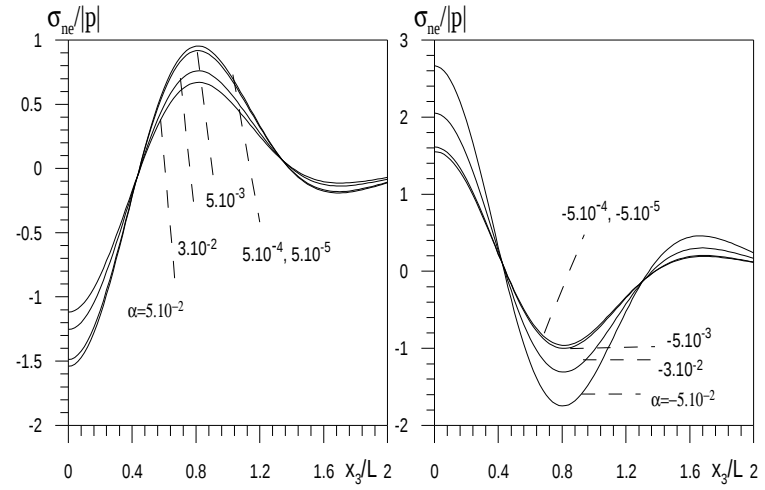
$$m=3 \left(E^{(2)}/E^{(1)} = 500, \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{h}{L} = 0.1, \varepsilon = 0.07 \right)$$



(a)



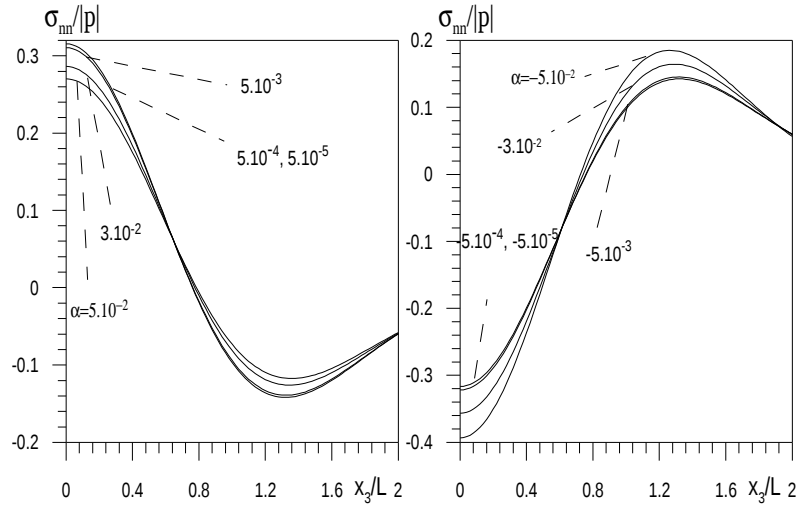
(b)



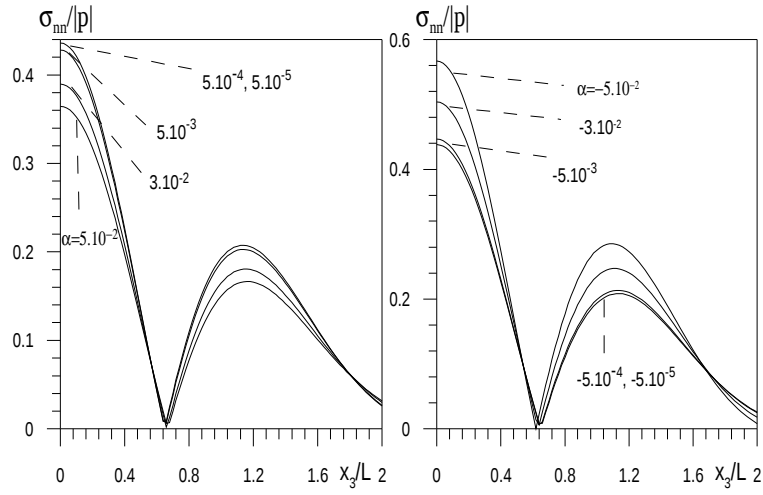
(c)

Şekil 2.16 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ne}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c)

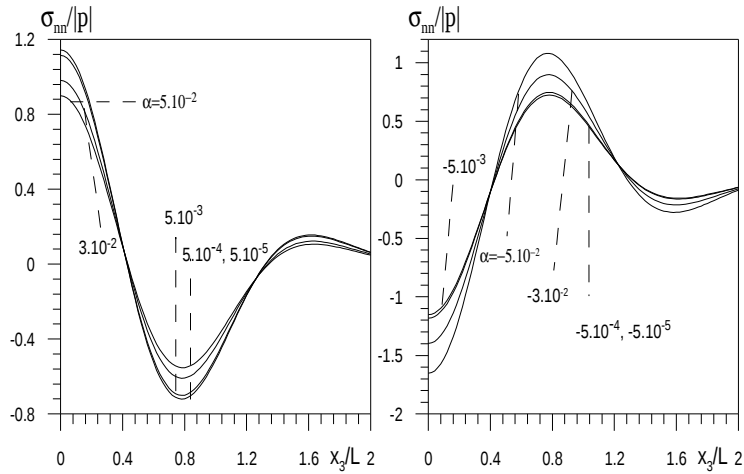
$$m=3 \left(E^{(2)}/E^{(1)} = 500, \theta = 0, \frac{h}{L} = 0.1, \varepsilon = 0.07 \right)$$



(a)



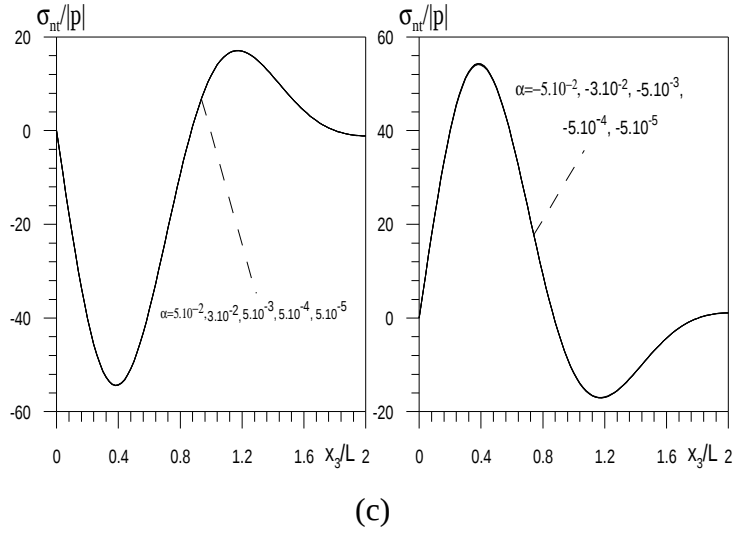
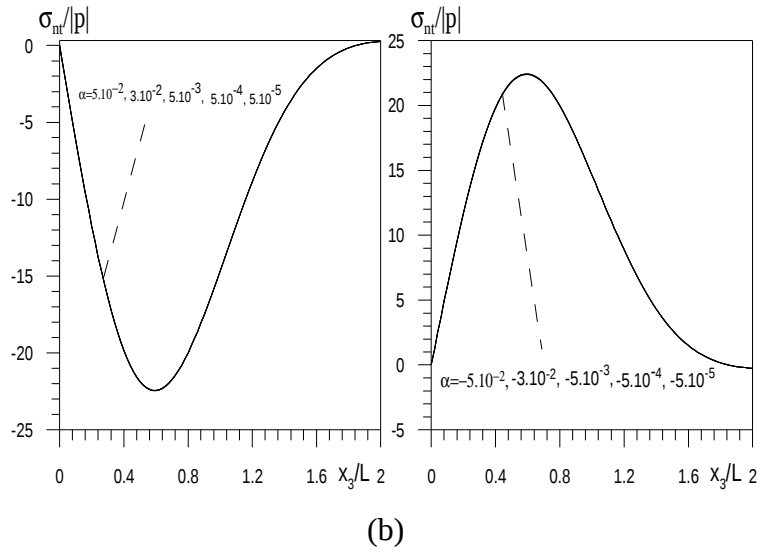
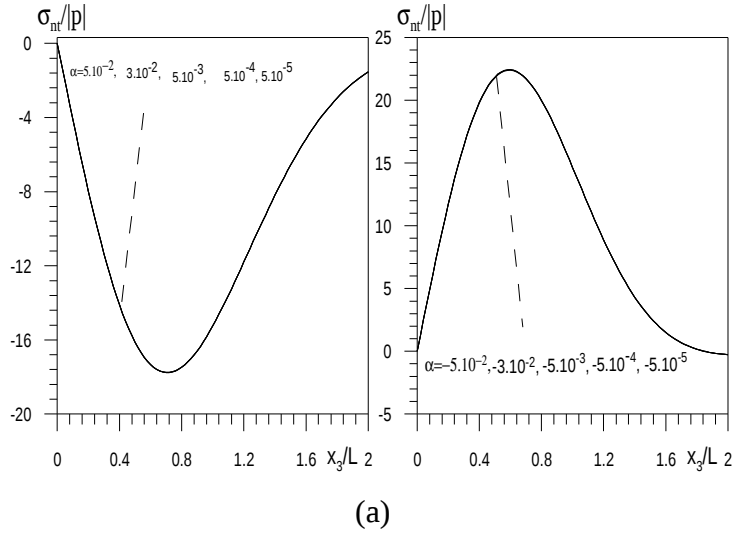
(b)



(c)

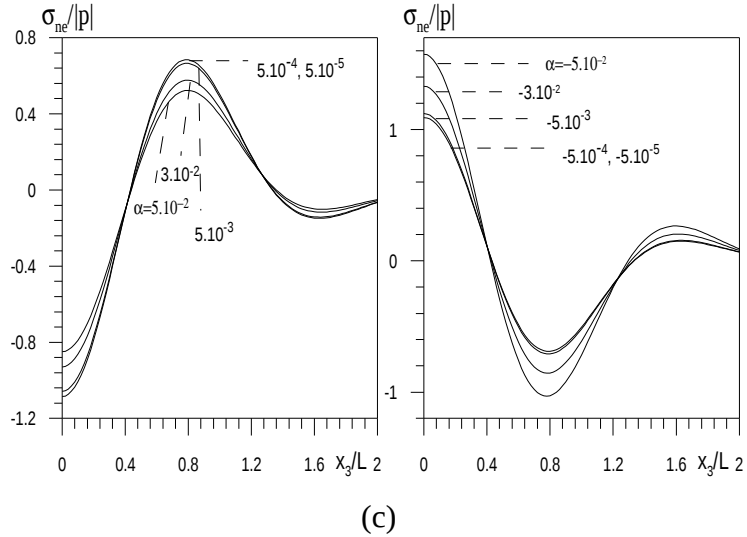
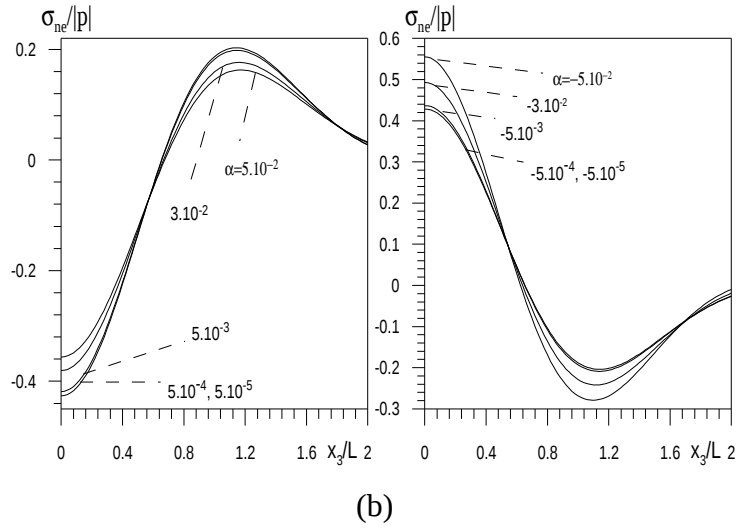
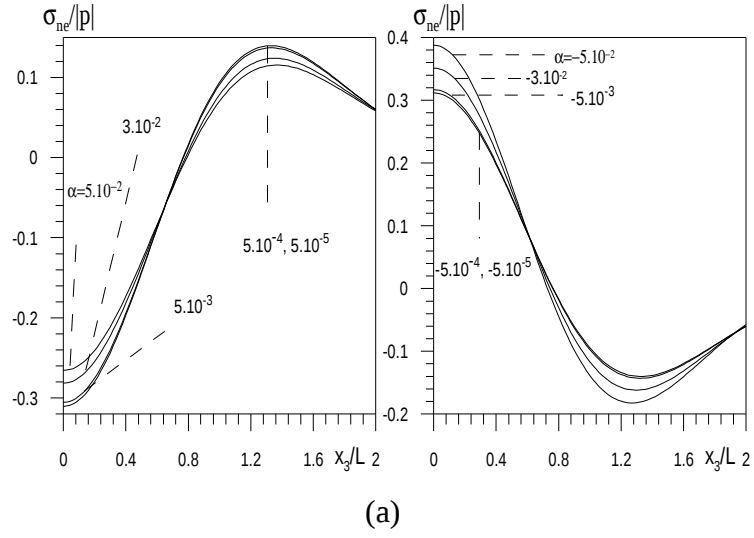
Şekil 2.17 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nn}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c)

$$m=3 \left(E^{(2)}/E^{(1)} = 300, \theta = 0, \frac{h}{L} = 0.1, \varepsilon = 0.07 \right)$$



Şekil 2.18 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{nt}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c)

$$m=3 \left(E^{(2)}/E^{(1)} = 300, \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{h}{L} = 0.1, \varepsilon = 0.07 \right)$$



Şekil 2.19 Çeşitli α 'lar için $\sigma_{ne}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c)

$$m=3 \left(E^{(2)}/E^{(1)} = 300, \theta = 0, \frac{h}{L} = 0.1, \varepsilon = 0.07 \right)$$

Çizelge 2.1 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α 'lar için $\sigma_{nn}/|p|$ 'nın birinci yaklaşım değeri

$$(x_3/L = 0, \frac{h}{L} = 0.5, \varepsilon = 0.07)$$

m	$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$	α							
		çekme				basınç			
		5.10^{-5}	5.10^{-3}	3.10^{-2}	5.10^{-2}	-5.10^{-5}	-5.10^{-3}	-3.10^{-2}	-5.10^{-2}
0	10	0.0747	0.0742	0.0716	0.0698	-0.07475	-0.07530	-0.0783	-0.0810
	20	0.1449	0.1431	0.1350	0.1293	-0.14499	-0.14684	-0.1572	-0.1673
	50	0.3071	0.3002	0.2701	0.2508	-0.30733	-0.31474	-0.3602	-0.4106
	100	0.4981	0.4812	0.4124	0.3717	-0.49853	-0.51701	-0.6418	-0.8092
1	10	0.1016	0.1008	0.0969	0.0941	-0.10166	-0.10251	-0.1071	-0.1114
	20	0.1894	0.1868	0.1752	0.1672	-0.18945	-0.19210	-0.2072	-0.2219
	50	0.3773	0.3684	0.3299	0.3054	-0.37757	-0.38711	-0.4459	-0.5116
	100	0.5819	0.5618	0.4806	0.4326	-0.58235	-0.60420	-0.7519	-0.9498
3	10	0.2661	0.2633	0.2503	0.2411	-0.26621	-0.26911	-0.2852	-0.3002
	20	0.4287	0.4218	0.3912	0.3704	-0.42885	-0.43597	-0.4771	-0.5179
	50	0.6839	0.6672	0.5956	0.5501	-0.68427	-0.70203	-0.8116	-0.9340
	100	0.8805	0.8526	0.7382	0.6693	-0.88110	-0.91124	-1.1104	-1.3656

Çizelge 2.2 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α ’lar için $\sigma_{nr}/|p|$ ’nın birinci yaklaşım değeri

$$(x_3/L = 0, \frac{h}{L} = 0.5, \varepsilon = 0.07)$$

m	$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$	α							
		çekme				basınç			
		5.10^{-5}	5.10^{-3}	3.10^{-2}	5.10^{-2}	-5.10^{-5}	-5.10^{-3}	-3.10^{-2}	-5.10^{-2}
0	10	-0.406	-0.4067	-0.4082	-0.4092	0.40643	0.40611	0.40433	0.4026
	20	-0.967	-0.9682	-0.9728	-0.9759	0.96719	0.96613	0.96004	0.9540
	50	-2.692	-2.6965	-2.7124	-2.7223	2.69275	2.68878	2.66404	2.6360
	100	-5.617	-5.6255	-5.6589	-5.6783	5.61707	5.60795	5.54543	5.4595
1	10	-0.494	-0.4951	-0.4971	-0.4986	0.49466	0.49420	0.49165	0.4892
	20	-1.179	-1.1811	-1.1875	-1.1918	1.17974	1.17827	1.16981	1.1614
	50	-3.293	-3.2987	-3.3192	-3.3320	3.29379	3.28863	3.25643	3.2197
	100	-6.882	-6.8923	-6.9331	-6.9568	6.88189	6.87074	6.79429	6.6895
3	10	-0.535	-0.5357	-0.5386	-0.5407	0.53514	0.53450	0.53095	0.5276
	20	-1.278	-1.2803	-1.2894	-1.2955	1.27823	1.27610	1.26373	1.2513
	50	-3.591	-3.5984	-3.6254	-3.6422	3.59184	3.58497	3.54168	3.4915
	100	-7.540	-7.5525	-7.6001	-7.6279	7.54041	7.52745	7.43906	7.3196

Çizelge 2.3 Çeşitli $E^{(2)}/E^{(1)}$, m ve α 'lar için $\sigma_{ne}/|p|$ 'nın birinci yaklaşım değeri

$$(x_3/L = 0, \frac{h}{L} = 0.5, \varepsilon = 0.07)$$

m	$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$	α							
		çekme				basınç			
		5.10^{-5}	5.10^{-3}	3.10^{-2}	5.10^{-2}	-5.10^{-5}	-5.10^{-3}	-3.10^{-2}	-5.10^{-2}
0	10	-0.058	-0.0584	-0.0562	-0.0546	0.05887	0.05934	0.06189	0.0641
	20	-0.126	-0.1250	-0.1176	-0.1125	0.12664	0.12831	0.13773	0.1467
	50	-0.284	-0.2783	-0.2500	-0.2319	-0.30733	-0.31474	-0.3602	-0.4106
	100	-0.472	-0.4561	-0.3902	-0.3513	0.47271	0.49040	0.60990	0.7700
1	10	-0.077	-0.0763	-0.0731	-0.0707	0.07706	0.07777	0.08164	0.0851
	20	-0.160	-0.1585	-0.1482	-0.1412	0.16087	0.16322	0.17658	0.1895
	50	-0.343	-0.3347	-0.2990	-0.2762	0.34330	0.35215	0.40670	0.4675
	100	-0.543	-0.5240	-0.4470	-0.4014	0.54347	0.56418	0.70429	0.8921
3	10	-0.168	-0.1665	-0.1567	-0.1498	0.16867	0.17084	0.18291	0.1941
	20	-0.314	-0.3085	-0.2836	-0.2666	0.31422	0.32000	0.35337	0.3864
	50	-0.551	-0.5365	-0.4745	-0.4352	0.55132	0.56670	0.66169	0.7679
	100	-0.737	-0.7125	-0.6105	-0.5492	0.73797	0.76492	0.94356	1.1738

Çizelge 2.4 $E=500$, $m=0$ ve $\alpha=0.00005$ ve $\alpha=-0.00005$ $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{n\tau}/|p|$ ve $\sigma_{ne}/|p|$, $\min$
birinci yaklaşım değeri

α	h/L	σ_{nn}	$\sigma_{n\tau}$	σ_{ne}
0.00005	0	0.50294	0	-0.4958
	0.02	0.50244	-1.3839	-0.4954
	0.04	0.50096	-2.7644	-0.4939
	0.06	0.49849	-4.1383	-0.4915
	0.08	0.49504	-5.5024	-0.4881
	0.1	0.49062	-6.8533	-0.4838
-0.00005	0	-0.5032	0	0.4961
	0.02	-0.5027	1.38385	0.49562
	0.04	-0.5012	2.76438	0.49417
	0.06	-0.4988	4.1383	0.49175
	0.08	-0.4953	5.50233	0.48838
	0.1	-0.4909	6.85322	0.48407

3 SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

Tezde ele alınan sınır-değer probleminin matematiksel formülasyonu, parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin kesin geometrik nonlinear denklemleri kullanılarak yapılmıştır. Formülasyonu yapılmış sınır-değer problemlerinin çözümü için Akbarov ve Guz (1985b, 2000)'de verilmiş sınır formu pertürbasyon yöntemi kullanılmıştır. Buna göre aranan büyüklükler, yerel eğrilik derecesini ifade eden küçük parametreye göre seri halinde yazılarak, sıfırıncı ve birinci yaklaşıma ait kısmi türevli diferansiyel denklemler takımı elde edilmiştir. Elde edilen denklemlere sırasıyla Fourier dönüşümü ve ters Fourier dönüşümleri uygulanarak istenen değerler hesaplanmıştır. Fourier ve ters Fourier dönüşümlerinde 10 noktalı Gauss-Legendre nümerik integrasyon yöntemi kullanılmıştır.

Yerel eğrilikli içi boş tek lif içeren sonsuz ortamlarda gerilme yayılımına geometrik nonlinearitenin etkisinin incelenmesi için parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin kesin geometrik nonlinear denklemleri kullanılarak bir yaklaşık analitik yöntem geliştirilmiştir. Geometrik nonlinearitenin gerilme yayılımına etkisini gösteren sayısal sonuçlar elde edilmiş ve yorumlanmıştır.

h/L boşluk ile lif arasındaki kalınlık limit olarak sıfıra götürüldüğünde sonsuz elastik ortamda yerel eğrilikli tek lif içeren kompozit malzemede elde edilen gerilme değerleriyle aynı sonuçlar bulunmuştur.

Geometrik nonlinearitenin etkisi olarak σ_{nn} , σ_{nt} ve σ_{ne} gerilmeleri çekmede artmakta basınçta azalmaktadır. Gerilmelerden en fazla artış σ_{nt} kayma gerilmesinde elde edilmiştir. Bu literatürdeki sonuçlar ile çakışmaktadır.

Ayrıca lif ile matris ara yüzeyinde θ ve x_3 parametreleri değiştirilerek, σ_{nn} asal gerilme, σ_{nt} ve σ_{ne} kayma gerilmeleri değerleri elde edilmiş ve tezde sunulmuştur.

Literatürden nanotüplerin mekanik özelliklerine bakıldığında elastisite sabitleri açısından nanotüpün elastisite sabitinin matris malzemesi elastisite sabitine oranının büyük olduğu

görülmektedir. Tezde bu oran 300 ve 500 alınarak asal gerilme ve kayma gerilmeleri incelenmiştir ve bunun sonucunda bu gerilme değerlerinin aynı problemin kompozit malzeme için elde edilen değerlerinden oldukça büyük olduğu tespit edilmiştir. Belirtilmelidirki, verilen yük değerleri stabilite kaybı probleminden elde edilen kritik yük değerlerinden küçüktür. Böylece sonsuz elastik ortamda mikro ölçekli yerel eğrilikli içi boş lif olma problemi nano ölçekli problem olarak da çözülebileceği gösterilmiştir.

Elde edilen sonuçlar sınır formu pertürbasyon yöntemindeki sıfırıncı ve birinci yaklaşımlar çerçevesindedir. Daha yüksek yaklaşımlar parametrelerin gerilme dağılımındaki etkilerini nitelik olarak değiştirmez ancak nicelik olarak daha hassas sonuçlar verir.

Yukarıdaki sonuçlar elde edilirken kullanılan tüm algoritmalar ve programlar tarafımızdan kodlanmıştır. Asıl değerlere ulaşmak için kullanılan ters fourier dönüşümündeki integral hesabında integral sınırları yakınsanklık kriteri kullanılarak belirlenmiştir.

KAYNAKLAR

- Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (1985a), "Stress State of a Fiber Composite with Curved Structures with a Low Fiber Concentration", *Soviet Appl. Mech.*, 21(6), 560-565.
- Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (1985b), "Method of Solving Problems in the Mechanics of Fiber Composites with Curved Structures", *Soviet Appl. Mech.*, 20(9), 777-790.
- Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (2000), *Mechanics of Curved Composites*, Kluwer Academic Publishers, 464pp.
- Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (2002), "Mechanics of Curved Composites (Piecewise Homogeneous Body Modely)", *Int. Appl. Mech.* 38, No: 12, 1415-1439.
- Akbarov, S.D. ve Guz, A.N. (2004), "Mechanics of Curved Composites and Some Related Problems for Structural Members", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 11:445-515.
- Akbarov, S.D. ve Kosker, R. (2001), "Fiber Bucleing in a Viscoelastic Matrix", *Mechanics of Composite Materials*, Vol 37, No:4, 299-306.
- Akbarov, S.D. ve Kosker, R. (2003a), "On a Stress Analysis in the Infinite Elastic Body with Two Neighbouring Curved Fibers", *Composites Part B*: 34 (2003) 143-150.
- Akbarov, S.D. ve Kosker, R. (2003b), "Influence of the Interaction Two Neighbouring Curved Fibers", *Composites Part B*: Vol 34 No:2 143-150.
- Akbarov, S.D. ve Kosker, R. (2003c), "Stress Distribution Caused by Anti-Phase Periodical Curving of Two Neighbouring Fibers in a Composite Materials", *European Journal of Mechanics A/Solids*, No:22 (2003), 243-256.
- Akbarov, S.D. ve Kosker, R. (2004), "Internal Stability Loss of Two Neighboring Fibers in a Viscoelastic Matrix", *Internal Journal of Engineering Science*, No: 42 (2004), 1847-1873.
- Akbarov S.D., Kosker R. ve Uçan Y. (2004) "Stress Distribution in an Elastic Body with a Periodical Curved Row of Fibers" *Mechanics of Composite Materials* No:40(3) 191-202.
- Akbarov, S.D. ve Yahnioğlu N. (2001), "A Method of Investigation of the General Theory of Stability Problems On Structural Elements Fabricated From The Viscoelastic Materials", *Composites Part B*: 32, 475-482.
- Akbarov, S.D., Cilli, A. ve Guz, A.N. (1999), "The Theoretical Strength Limit in compression of Viscoelastic Layered Composite Materials", *Composites Part B: Engineering*, 30, 465-472.
- Akbarov, S.D., Guz A.N. ve Cherekov, M.A. (1982), "Stability of Two Fibers in the Elastic Matrix at Finite Precritical Deformations", *Mech Compos Mater.*, 2, 42-51a.
- Akbarov, S.D., Kosker, R. ve Simsek, K. (2005), "Stress Distribution in an Elastic Body with a Locally Curved Fiber in a Geometrical Nonlinear Statement", *Mechanics of Composite Materials*, Vol 41, No:4, 291-302
- Akbarov, S.D., Sisman, T. ve Yahnioğlu N. (1997), "On the Fracture of The Unidirectional Composites in Compression", *Int. J. Engng. Sci*, 35(12/13), 1115-1136.
- Akbarov, S.D., Yahnioğlu N. ve Kutug, Z. (2001), "On the Three Dimensional Stability Loss
- Biezeno, C.B. ve Hencky, H. (1930), "On the General Theory of Elastic Stability", *K Akad Wet Amsterdam Proc.* 32, 444-56.

- Biot, M.A. (1965), *Mechanics of Incremental Deformations*, Wiley, New York, 504 pp.
- Budianski, B. ve Fleck, N.A. (1994), "Compressive Kinking of Fibre Composites: A Topical Review", *Appl. Mech. Rev.*, part2, 47(6), 246-270.
- Chamis, C.C. (1974), "Micromechanical Theories of strength", *Composite Materials*, New York and London, Vol 5 Fracture and Fatigue, 106-165.
- Cherepanov, G.P. (1983), *Fracture Mechanics of Composite Materials*, Moscow, Nauka 289.
- Christensen, R.M. (1979), *Mechanics of Composite Materials*, Wiley, New York.
- Chung, I ve Weitsman, Y.J. (1994), "Model for Micro-Buckling/Micro-Kinking Compressive Response of Fiber- Reinforced Composites", *Applied Mechanics Review* part 2, 47(6), S256-S 261.
- Evans, A. G. ve Adler, W. F. (1978), "Kinking as a Mode of structural Degradation in Carbon Fiber Composites", *Acta. Metallurgica*, 26, 725-738.
- Fleck N.A., Deng L. ve Budiansky B. (1995), " Prediction of Kink with in compressed Fiber Composites", *Journal of Applied Mechanics*, 62, 329-337.
- Gerard, F. ve Gilbert, A.A. (1958), " A Critical Strain Approach to Creep Buckling of Plates And Shells", *J. Aeroanaut Sci*, 25(7), 429-38.
- Green, A.E., Rivlin, R.S. ve Shield, R.T. (1952), " General Theory of Small Elastic Deformations Superposed on Finite Elastic Deformations", *Proc Roy Ser A*, 21(1104), 128-54.
- Greszczuk, L.B. (1973), *Failure Mechanics of Composite subjected to Compressive Loading*, Air Force Materials Laboratory Report AFML-TR-72-107, August.
- Irwin, G.R. (1957), "Analysis of stresses and Strains Near and a Crack Traversing a Plate", *J. Appl. Mech.*, 24(3), 361-364.
- Irwin, G.R. (1958), "Fracture", *Handbuch der Physik*, 6, 551-590.
- Knott, I.F (1979), *Fundamentals of Fracture Mechanics*, Lodon, Buttersworths, 320p.
- Kosker, R. and Akbarov, S.D. (2003), "Influence of the Interaction Between Two Neighboring Periodically Curved Fibers on the Stress Distribution in a Composite Material", *Mech. Compos. Mater.*, 39, No.2, 165-176.
- Kosker, R. and Uçan, Y. (2004), "On the Normal Stresses in the Elastikc Body with Periodical Curved Row Fibres", *Sigma* No: 2004/4, 294-304.
- Rosen, B.W.(1965), *Fiber Composite Materials*, Amer, Soc. For Metals, Metals Park, Ohio, P:37.
- Sadovsky, M.A., Pu, S.L. ve Hussian, M.A. (1967) "Buckling of Microfibres", *Trans ASME, Ser E* 34(4), 295-302.
- Schuerch, H. (1966), "Prediction of Compressive Strength in Uniaxial Boron Fibermetal Matrix Composite Materials", *J. AIAA* 4(1), 102-106.
- Simeononova, K. (1966), *Study of Microbuckling of Fiber Reinforced Composite Materials*, *Mech Compos. Mater.*,
- Watson, G.N., 1944. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Endland 753pp.

Akbarov, S.D. , Kosker, R. , Simsek, K. (2005), “Stress Distribution In An Infinite Elastic Body With A Locally Curved Fiber In A Geometrically Nonlinear Statement ” , Mechanics of Composite Materials, Vol. 41, No. 4

Akbarov, S.D. , Kocatürk, T. , (1997) “Fibre Stability In Anisotropic Matrix At Small Strains ” , Mechanics of Composite Materials. Vol. 33. No. 5

Reşat KÖŞKER, (2002) Tek Yönlü Lifli Elastik Ve Viskoelastik Kompozitlerin İç Stabilitesi Ve Gerilme Durumuna Ait Bazı Problemler, Doktora Tezi

Kadriye ŞİMŞEK, (2006) Yerel Eğrilikli Tek Lif Ve Sarılı Tek Lif İçeren Sonsuz Ortamların Gerilme Durumuna Ait Nonlinear Sınır Değer Problemleri, Doktora Tezi

Nanocomposite Science and Technology, P. M. Ajayan, L. S. Schadler, P. V. Braun, 2003 WILEY-VCH Verlag GmbH Co. KGaA, Weinheim

Nanotubes and Nanofibers, Yury Gogotsi, 2006, Boca Raton, FL , CRC Taylor & Francis

Foundation of Nanomechanics From Solid-State Theory to Device Applications, Andrew N. Cleland, 2003, Springer-Verlag Berlin Heidelberg

İNTERNET KAYNAĞI

<http://tr.wikipedia.org/wiki/Nanoteknoloji>

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	06.10.1984	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1998-2001	Fatih Kız Lisesi
Lisans	2002-2003	Yıldız Teknik Üniversitesi İngilizce Hazırlık
	2003-2007	Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği
Yüksek Lisans	2007-Devam Ediyor	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı