

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FONKSİYONEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK
ÇÖZÜMÜ**

Matematikçi Feray YÜKSEL

**F.B.E. Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU

İSTANBUL, 2009

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FONKSİYONEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK
ÇÖZÜMÜ**

Matematikçi Feray YÜKSEL

**F.B.E. Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU

İSTANBUL, 2009

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KESİN DENKLEMİN ‘YAKLAŞIK’ OLANIYLA DEĞİŞTİRİLMESİ	2
3. KEYFİ İNTEGRAL DENKLEMİN YOZLAŞMIŞ ÇEKİRDEKLİ İNTEGRAL DENKLEMLE DEĞİŞTİRİLMESİ	5
4. İNDİRGEME YÖNTEMİYLE SONSUZ CEBİRSEL DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ	10
5. RİTZ YÖNTEMİ	13
6. STURM-LIOUVILLE DİFARANSİYEL DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜNE RİTZ YÖNTEMİNİN UYGULANMASI.....	21
7. RİTZ YÖNTEMİ İLE ÖZDEĞERLERİN BULUNMASI	27
8. BUBNOV-GALERKIN METODU	35
9. KOLLAKASIYA YÖNTEMİ	38
10. SONUÇLAR	41
KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ	44

SİMGE LİSTESİ

U	X Banach uzayında bir lineer operatör
I	Banach uzayında verilen birim operatör
V	$X \rightarrow X$ lineer operatör
A	Kendine eş operatör
H	Hilbert uzayı
$K(s, t)$	Yozlaşmış çekirdek
δ	Yeterince küçük keyfi sayı
x	Hilbert uzayının bir elemanı
$F(x)$	Sürekli fonksiyon
n	Pozitif değişken
H_n	Sınırlı boyutlu uzay
α_i	Bilinmeyen katsayılar
m_A	A kendine eş operatörünün indirgenmiş sınırı
$\{x_n\}$	Minimize eden dizi
M_A	A kendine eş operatörünün özdeğeri
$E(x)$	Fonksiyon
Q_n	$\ x\ = 1$ için kapalı H_n elemanlarından oluşan dizi
ε	Sıfırdan büyük keyfi sayı
μ	Belirsiz çarpan

ÖNSÖZ

Çalışmalarımın her aşamasında büyük desteğini gördüğüm, öneri ve yönlendirmeleriyle bana her konuda yardımcı olan değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Bayramoğlu'na teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bütün eğitim hayatım boyunca gösterdikleri sabır, hoşgörü, maddi ve manevi destekleri için değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu tez çalışmasında fonksiyonel denklemlerin yaklaşık çözüm yöntemleri incelenmiştir. Özellikle Ritz yöntemi, Bubnov-Galerkin yöntemi ve Kollakasiya yöntemi üzerinde durulmuş ve konunun daha iyi kavranabilmesi için birer denklem çözümü ile örneklendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Banach Uzayı, İntegral Denklem, Lineer Operatör, Spektrum, Sturm-Liouville Problemi, Ters Operatör

ABSTRACT

In this thesis approximate solutions of functional equations were studied. Especially, Ritz's Method, The Bubnov-Galerkin Method and Kollakasiya Method were taken into consideration and for better understanding of the issue, each of these was illustrated by a solution of a given equation.

Keywords: Banach Space, Integral Equation, Invertable Operator, Linear Operator, Spectrum, Sturm-Liouville Problem

1. GİRİŞ

Fonksiyonel analizin en önemli uygulamalarından biri de çeşitli denklemlerin yaklaşık çözümünün araştırılmasıdır. Bu denklem çeşitleri; diferansiyel denklemler, integral denklemler, cebirsel denklemler vb. dir.

Yaklaşık yöntemler konusu çok sayıda kitapta yer almış ve bu konuda yayınlanan makaleler ile günümüzde de güncelliğini korumaktadır. Bu konuda yazılmış kitap ve yayınlanmış makaleler kaynaklar bölümünde belirtilmiştir.

Bu tez çalışmasında, fonksiyonel denklemlerin yaklaşık çözüm yöntemleri üzerinde durulacaktır. Fonksiyonel denklemlerin çözümü birçok uygulama için vazgeçilmezdir. Eğer çözümü aranan fonksiyonel denklem çok karmaşık ise bu denkleme yakın bir denklem bulunarak yakın denklemin çözümü bulunur ve bulunan sonuç istenen denklemin yaklaşık sonucu olarak kabul edilir.

Konuyu daha kolay anlatabilmek için bazı ilave teoremlerden de bahsedilecektir. Ama bu ilave sınırlamalara bakmaksızın genel teoremlerden özel problemlere kadar birçok uygulama verilebilir.

2. KESİN DENKLEMİN ‘YAKLAŞIK’ OLANIYLA DEĞİŞTİRİLMESİ

İncelenen denklem çok karmaşık olduğunda bu denklemin yaklaşık çözümü aranır. Bunun için ‘Yaklaşık’ denklemi yazılır ve bu ‘Yaklaşık’ denklemin çözümü kesin denklemin ‘yaklaşık’ çözümü kabul edilir. Konuya başlarken önce uygulanacak bir genel teoremi ifade edelim.

Teorem 8.7.4 (Vulikh sayfa 235): U, X Banach uzayını bütün Y Banach uzayına dönüştüren ve tersi olan lineer operatör olsun. O zaman X ’ i Y ’ ye dönüştüren ve

$$\|V - U\| < \frac{1}{\|U^{-1}\|}$$

koşulunu sağlayan her bir V lineer operatörünün de tersi vardır. Bu takdirde, q sayısı için

$$\|V - U\| \cdot \|U^{-1}\| \leq q < 1$$

koşulu sağlanıyorsa

$$\|V^{-1}\| \leq \frac{1}{1-q} \|U^{-1}\|$$

dir.

$$(I - U)x = y \tag{2.1}$$

denklemini ele alınır ise; burada

$U : X$ Banach uzayında bir lineer operatör

$I : X$ Banach uzayında verilen birim operatördür.

Bilindiği üzere fonksiyonel denklemlerin yaklaşık çözüm yöntemleri birçok uygulamada kullanılmaktadır. Eğer verilen denklem çok karmaşık ise bu kesin bir yolla kolaylaştırılabilir. ‘Yaklaşık’ denklemin çözümü yukarıda ifade ettiğimiz gibi denklemin yaklaşık çözümü olarak kabul edilir. Bu yöntemi açıklamak için ikinci bir denklem göz önüne alınır ise:

$$(I - V)x = y \tag{2.2}$$

Burada

$V : X \rightarrow X$ lineer operatör ve (2.2) denklemini (2.1) e yaklaşık denklemdir.

$\delta > 0$ herhangi sabit olmak üzere

$$\|V - U\| \leq \delta,$$

olduğu varsayalım.

TEOREM 2.1. Eğer $I - U$ tersi olan bir operatör ve

$$\delta \|(I - U)^{-1}\| < 1,$$

ise $I - V$ nin de tersi vardır. Ayrıca, eğer

$$x = (I - U)^{-1}y \text{ ve}$$

$$\bar{x} = (I - V)^{-1}y \text{ ise}$$

$$\|\bar{x} - x\| \leq \delta \|(I - V)^{-1}\| \|x\| \quad (2.3)$$

olur.

İspat:

Teoremin birinci bölümü teorem 8.7.4(Vulikh sayfa 235)' ün tekrarı niteliğindedir. U yerine $I - U$ ve V yerine $I - V$ konulabilir. (2.3) eşitsizliğinin çözümü için;

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (I - V)^{-1}y = (I - V)^{-1}(I - U)x = (I - V)^{-1}[(I - V) + (V - U)]x \\ &= (I - V)^{-1}(I - V)x + (I - V)^{-1}(V - U)x \\ &= x + (I - V)^{-1}(V - U)x \end{aligned}$$

şeklinde olur.

Buradan;

$$\bar{x} - x = (I - V)^{-1}(V - U)x$$

$$\|\bar{x} - x\| \leq \|(I - V)^{-1}\| \|V - U\| \|x\| \leq \delta \|(I - V)^{-1}\| \|x\|$$

olur.

Teoremin ispatı V operatörü U ya yaklaşırken (2.2) denkleminin çözümünü de sağlamaktadır. Ama bu teorem bazı açılardan tatmin edici değildir, çünkü $\|x\|$ normu (2.1) denkleminin bilinmeyen çözümüdür.

TEOREM 2.2. Bir önceki teoremin işaretleriyle eğer $\delta \| (I - V)^{-1} \| \leq q < 1$ ise,

o zaman

$$\| \bar{x} - x \| \leq \frac{q}{1 - q} \| \bar{x} \| \quad (2.4)$$

dır.

İspat:

(2.3) eşitsizliğinden yararlanarak

$$\| \bar{x} - x \| \leq q \| x \| \leq q (\| x - \bar{x} \| + \| \bar{x} \|) = q \| \bar{x} - x \| + q \| \bar{x} \|$$

Buradan

$$(1 - q) \| \bar{x} - x \| \leq q \| \bar{x} \|$$

olur. Buda (2.4) eşitsizliğine karşılık gelir.

3. KEYFİ İNTEGRAL DENKLEMİN YOZLAŞMIŞ ÇEKİRDEKLİ İNTEGRAL DENKLEMLE DEĞİŞTİRİLMESİ

Sürekli çekirdek ve sürekli serbest fonksiyonlu Fredholm integral denklemi göz önüne alınır ise:

$$x(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt + f(s) \quad (3.1)$$

Eğer $K(s,t)$ çekirdeği;

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(s)\psi_i(t) \quad (3.2)$$

şeklinde ise o zaman (3.1) e yozlaşmış çekirdekli integral denklem denir.

Yozlaşmış çekirdekli denklemin çözümü belirli çekirdekli denklemin çözümünden daha kolaydır. Eğer $x(s)$ denklemi, (3.1) denkleminin çözümü ise (3.2) yi (3.1) denkleminde yerine koyulursa

$$x(s) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(s) \int_a^b \psi_i(t)x(t)dt + f(s)$$

veya

$$\alpha_i = \int_a^b \psi_i(t)x(t)dt \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{iken}$$

$$x(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(s) + f(s) \quad (3.3)$$

olur.

(3.3) formülü ile aranılan $x(t)$ fonksiyonunun yapısı belirlenmiş ve problem α_i bilinmeyen katsayılarını bulma şekline dönüşmüştür. Katsayılar lineer cebir denklemleri ile bulunabilir. Bu sistem genel hali ile çıkarılamaz ama α_i katsayıları determinant metoduyla açıklanabilir. Çünkü yozlaşmış çekirdek denkleminin çözümü cebir problemi haline gelmektedir. Farz edelim ki, (3.1) denkleminin çekirdeği sürekli ve keyfi olsun ve $K_I(s,t)$ yozlaşmış çekirdek olsun. $K(s,t)$ ve $K_I(s,t)$ çekirdeklerini integral operatörlerde kesinleştirilir ve K ve K_I ile göstererek (3.1) denkleminde yazılır ise:

$$x - Kx = f \quad x - K_I x = f$$

X uzayı yerine C uzayı alınsın.

Eğer,

$$\max_{a \leq s, t \leq b} |K(s, t) - K_1(s, t)| \leq \delta_1 \text{ ise}$$

$$\delta = \delta_1(b - a) \text{ iken}$$

$$\|K_1 - K\| \leq \delta \quad (3.4)$$

dır.

Eğer δ_1 yeterince küçük ise $I - K$ operatörü ters çevrilebilir olma özelliğinden ve TEOREM 2.1 ve TEOREM 2.2 den yararlanılabilir.

Örnek olarak aşağıdaki denklem alınır ise;

$$\chi(s) = \int_0^{1/2} \sin(st)x(t)dt + 1 + \frac{1}{s}(\cos \frac{s}{2} - 1) \quad (3.5)$$

Bütün $0 \leq s, t \leq \frac{1}{2}$ için

$$0 \leq \sin(st) \leq \sin \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

olduğundan

K operatörünün normu

$$\|K\| < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

olur.

Teorem 8.7.3(Vulikh sayfa 234) ten eğer U , normu $\|U\| < 1$ olan, X Banach Uzayında bir lineer operatör ve I , X uzayında özdeş operatör ise $I - U$ operatörünün tersi vardır. Bu teoremden yararlanarak $I - K$ operatörünün tersi vardır. Buradan

$$\|(I - K)^{-1}\| < \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{8}{7}$$

$\sin(st)$ yi Taylor serisine açılırsa;

$$\sin(st) = st - \frac{1}{6}s^3t^3 + \frac{1}{120}s^5t^5 - \dots \quad (3.6)$$

$\sin(st)$ çekirdeğinin ilk terimi yaklaşım teorisine göre st sayılsın.

$K_1(s, t) = st$ çekirdeği dejenere olur.

(3.6) serisi monoton artan olduğundan

$$|\sin(st) - st| \leq \frac{1}{6}s^3t^3 \leq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{392}$$

ve (3.4) den

$$\|K_1 - K\| \leq \frac{1}{784}$$

olur.

$$\delta = \frac{1}{784} \text{ alırsak } \delta\|(I - K)^{-1}\| < \frac{1}{784} \cdot \frac{8}{7} < 1 \text{ olur ve TEOREM 2.1 den}$$

$$K_1(s, t) = st$$

$$x(s) = \int_0^{1/2} stx(t)dt + f(s) \quad (3.7)$$

şeklini alır.

(3.7) denklemi çözülürse

$$x(s) = s \int_0^{1/2} tx(t)dt + f(s)$$

$$\alpha = \int_0^{1/2} tx(t)dt \text{ şeklinde yazılırsa}$$

$$x(s) = \alpha s + f(s) \quad (3.8)$$

olur.

α yı belirlemek için bu ifade (3.7) denkleminde yerine koyulursa

$$\alpha s + f(s) = s \int_0^{1/2} t[\alpha t + f(t)]dt + f(s)$$

gerekli değişiklikleri yaptıktan sonra

$$\alpha = \frac{24}{23} \int_0^{1/2} tf(t)dt \quad (3.9)$$

α için (3.8) formülü (3.7) denkleminin çözümünü vermektedir ve $(I - K)^{-1}$ operatörünü belirlemektedir. Normu hesaplanırsa;

$$0 \leq t \leq \frac{1}{2} \text{ için } |tf(t)| \leq \frac{1}{2} \|f\|$$

olduğundan (3.9) denkleminde

$$|\alpha| \leq \frac{24}{23} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \|f\| = \frac{6}{23} \|f\|$$

dır.

Eğer $x = (I - K_1)^{-1} \cdot f$ ise

$$|x(s)| \leq |\alpha|s + \|f\| \leq \frac{1}{2} \alpha + \|f\| \leq \frac{26}{23} \|f\|$$

$$\|x\| < \frac{26}{23} \|f\|$$

olur.

Bu da $\|(I - K_1)^{-1}\| \leq \frac{26}{23}$ demektir.

Buradan TEOREM 2.2 yi kullanarak hata deęerlendirilebilir.

Bağımsız değişken kolaylıkla hesaplanabilir.

$\alpha = 0,126$ ile $0,001$ aralığında

$$f(t) = 1 + \frac{1}{t} \left(\cos \frac{t}{2} - 1 \right)$$

(3.7) denkleminin çözümü

$$\bar{x}(s) = 0,126s + 1 + \frac{1}{s} \left(\cos \frac{s}{2} - 1 \right)$$

$\cos\left(\frac{1}{2}s\right)$ in Maclaurin serisine açılırsa

$$\bar{x}(s) = 1 + 0,001s + \frac{s^3}{16 \cdot 24} - \dots$$

Eğer sadece iki terimi alınırsa yaklaşık çözüm

$$\bar{x}(s) \approx 1 + 0,001s$$

şeklinde olur.

Ayrıca, atılan terimler hesaplandığında $\frac{1}{8 \cdot 16 \cdot 24}$ ü aşmamaktadır ve $\frac{1}{3000}$ den küçüktür. $\bar{x}(s)$ ifadesindeki α dan kaynaklanan hata 0,001 den küçüktür. İkinci kısımdaki $0,001s \leq 0,0005$ olduğundan $\bar{x}(s) \approx 1$ alınabilir ve $\bar{x}(s)$ ifadesindeki hata 0,0015 den küçüktür.

Buradan $\|\bar{x}\| < 1,0015$ olur.

Şimdi $\bar{x}(s)$ yaklaşık çözümündeki sapma (2.4) eşitsizliği ile değerlendirilirse;

$$q = \frac{1}{784} \cdot \frac{24}{23} < 0,0015$$

$$\frac{q}{1-q} < \frac{1}{600} \text{ ve } \|\bar{x} - x\| < 0,002$$

yani bütün s için

$$|\bar{x}(s) - x(s)| < 0,002$$

dır.

(3.5) eşitliğinden $\bar{x}(s) \approx 1$, st çekirdeği 0,0035 ten küçük olduğundan

$$0,0965 < x(s) < 1,0035$$

olur.

Sonuç olarak (3.5) eşitliğinin sonucu olarak $x(s) \equiv 1$ denilebilir.

4. İNDİRGEME YÖNTEMİYLE SONSUZ CEBİRSEL DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Sonsuz tane ξ_i bilinmeyenli

$$\xi_i - \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (4.1)$$

sonsuz sistemi göz önüne alınsın.

İndirgeme yöntemi kesilmiş sonlu

$$\xi_i - \sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_k = \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (4.2)$$

sistemlerinin çözümünden ibarettir.

Eğer yeterli büyüklükteki n için (4.2) sisteminin verilen η_i serbest terimi için tek bir çözümü varsa ve $n \rightarrow \infty$ iken (4.2) nin çözümü verilmiş herhangi bir uzaklık anlamında (bu uzaklık sayı dizilerinin oluşturduğu uzayda verilir) (4.1) in çözümüne yaklaşıyor ise o zaman denilebilir ki (4.1) sistemi için indirgeme yöntemi yakınsaktır.

Bu bölümde indirgeme metodunun yakınsaklığına dair bir teoremin ispatı verilecektir.

η_i serbest terimli dizisinin $y = \{\eta_i\} \in \ell^2$ olduğunu farz edelim. Ayrıca (a_{ik}) matrisinin

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}^2 < +\infty$$

koşulunu sağladığını kabul edelim.

Biliyoruz ki; (a_{ik}) matrisi ℓ^2 de sürekli matris operatörü olan A ile belirlenebilir. Bulunan sonuç $x = \{\xi_i\}$ olarak sınırlanabilir.

$x \in \ell^2$ ve (4.1) sistemi

$$(I - A)x = y \quad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir.

Ek olarak (a_{ik}) matrisinin simetrik olduğunu kabul edilsin. A operatörü kendine eşittir. Ama aşağıdaki teorem bu kabul varsaymadan da ispatlanabilir.

TEOREM 4.1 Eğer (4.1) sistemi yukarıda sözü edilen koşullar dâhilinde ℓ^2 uzayında her $y = \{\eta_i\} \in \ell^2$ için bir tek çözüme sahip ise o zaman (4.1) sistemi için indirgeme metodu bu uzayda yakınsaktır.

İspat:

Sanılardan (4.1) sistemi veya (4.3) denklemi her $y \in \ell^2$ için tek bir çözümü olduğundan $\lambda = 1$ A operatörünün özdeğeri olamaz. Başta kabul edilecek olan Teorem 11.3.1 (Vulikh sayfa 318)' e göre: H uzayında verilen her sürekli kendine eş A operatörünün en azından bir özdeğeri vardır. Bu teoreme göre düzenlidir.

$(I - A)^{-1}$ ters operatörü ℓ^2 de ve lineerdir. ℓ^2 uzayında operatörleri $A_n (n = 1, 2, \dots)$ şeklinde gösterilsin.

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k \quad i=1, 2, \dots \text{ için}$$

$$\xi_i = 0 \quad i > n \text{ için}$$

$A_n \rightarrow A$ şeklinde ispatlanır.

$\delta > 0$ ve yeterince büyük n için $\|A_n - A\| < \delta$ eşitsizliği gerçekleşir. Bu nedenle

$\delta \|(I - A)^{-1}\| \leq q < 1$ ise (4.3) denklemi için teorem 2.1 kullanılabilir. Buradan;

$$\|(I - A_n)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - q} \|(I - A)^{-1}\| \quad (4.4)$$

olur.

(2.3) eşitsizliğinden $y \in \ell^2$ için $x = (I - A)^{-1}y$ ve $x_n^* = (I - A_n)^{-1}y$ olduğu farz edilirse yeterince büyük n ve $x_n^* \rightarrow x$ giderken

$$\|x_n^* - x\| \leq \delta \|(I - A_n)^{-1}\| \|x\| \leq \frac{\delta}{1 - q} \|(I - A)^{-1}\| \|x\|$$

olur.

Verilen $y = \{\eta_i\}$ den $y_n' = \{\eta_i^{(n)}\}$ yazılırsa

$i=1,2,\dots,n$ için $\eta_i^{(n)} = \eta_i$

$i>n$ için $\eta_i^{(n)} = 0$ olur.

Daha sonra $x'_n = (I - A_n)^{-1} y'_n$ olduğu farz edilsin. (4.4) eşitsizliğinden

$$\|x'_n - x_n^*\| \leq \|(I - A_n)^{-1}\| \|y'_n - y\| \leq \frac{1}{1-q} \|(I - A)^{-1}\| \|y'_n - y\|$$

olur.

Ama $y'_n \rightarrow y$ giderken $x'_n \rightarrow x_n^* \rightarrow 0$ ve $x'_n \rightarrow x$ e gider.

x'_n in tanımı izlendiğinde denklemler sisteminin çözümü elde edilebilir.

$$\xi_i - \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i \quad i=1,2,\dots,n \text{ için}$$

$$\xi_i = 0 \quad i=n+1, n+2, \dots \text{ için}$$

Bu sistem (4.2) sistemine ilave olarak $i>n$ için $\xi_i = 0$ eşitliğini de içermektedir.

Eğer ucu açık (4.2) sistemindeki $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ çözümlerine sıfır elemanları $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$ şeklinde eklenirse (4.1) sisteminin çözümünün normu ile ilgili yakınsak dizi elde edilir.

Böylece indirgenmiş yöntem ile yakınsaklık ispatlanmış olur.

5. RİTZ YÖNTEMİ

Bu bölümde H Hilbert uzayındaki denklemlerden bahsedilecektir. İncelenen denklemler

$$Ax = y \quad (5.1)$$

şeklinde olacaktır.

İlk olarak verilen tanımlanmış sanılardan başlangıç sonuçları çıkarılsın.

Kendine eş A operatörünün pozitif tanımlı olduğu varsayılmaktadır.

$$(Ax, x) \geq m_A \|x\|^2 \quad (5.2)$$

$m_A > 0$ olduğundan $(Ax, x) = 0$ eşitliğinden $x = 0$ çıkar(Vulikh sayfa 287).

Cauchy-Buniakovskii eşitsizliğine göre (5.2) den

$$m_A \|x\|^2 \leq \|Ax\| \|x\|$$

olur.

Buradan bütün $x \in H$ için

$$\|Ax\| \geq m_A \|x\|$$

olur.

Yardımcı teorem 10.5.2 (Vulikh sayfa 294) e göre kendine eş A operatörünün düzenli λ sayısı için gerek ve yeter koşul $k > 0$ ve $x \in H$ için

$$\|(A - \lambda I)x\| \geq k \|x\|$$

dir. Bu yardımcı teoreme dayanarak pozitif belirli A operatöründe $\lambda = 0$ sayısı A nın düzenli

sayısıdır. Böylece A operatörü tersi alınabilir ve $\|A^{-1}\| < \frac{1}{m_A}$ dir.

Buradan her $y \in H$ için (5.1) denkleminin tek bir çözümü vardır. y elemanı sabit tutulsun ve H de

$$F(x) = (Ax, x) - 2(x, y) \quad (5.3)$$

fonksiyoneli tanımlansın.

TEOREM 5.1 A pozitif tanımlı kendine eş operatör olsun. Verilen $y \in H$ için $x_0 \in H$ elemanının (5.1) denkleminin çözümü olması için gerek ve yeter koşul $F(x)$ fonksiyonunun en küçük değerini $x = x_0$ noktasında almasıdır.

İspat:

$x_0, z \in H$ ve α reel sayı olsun.

$$\begin{aligned} F(x_0 + \alpha z) &= (A(x_0 + \alpha z); x_0 + \alpha z) - 2(x_0 + \alpha z, y) \\ &= (Ax_0, x_0) + \alpha(Az, x_0) + \alpha(Ax_0, z) + \alpha^2(Az, z) - 2(x_0, y) - 2\alpha(y, z) \end{aligned}$$

Buradan $(Az, x_0) = (Ax_0, z)$

$$F(x_0 + \alpha z) = F(x_0) + 2\alpha(Ax_0 - y, z) + \alpha^2(Az, z) \quad (5.4)$$

olur.

Eğer x_0 (5.1) denkleminin çözümü ise $\alpha = 1$ için (5.4) denklemi

$$F(x_0 + z) = F(x_0) + (Az, z) \geq F(x_0) \quad (5.5)$$

olur.

Bütün $x \in H$ için $x = x_0 + z$ şeklinde yazılırsa

$$F(x) \geq F(x_0)$$

olur.

Diğer taraftan, eğer $F(x)$, $x = x_0$ için en küçük değerini alıyorsa α, z için

$$F(x_0 + \alpha z) \geq F(x_0)$$

olur.

Her z için $F(x_0 + \alpha z)$ fonksiyonu $\alpha = 0$ için minimum olur. Buradan fonksiyonun türevi $\alpha = 0$ için sıfır olur. Ama (5.4) den

$$\frac{d}{d\alpha} F(x_0 + \alpha z)_{\alpha=0} = 2(Ax_0 - y, z)$$

ifadesi elde edilir.

Bu yüzden $Ax_0 - y \perp z$ olur.

Sonuç olarak keyfi z ye göre $Ax_0 - y = 0$, x_0 (5.1) denkleminin çözümüdür. (5.3) fonksiyonunun minimum tek elemanının (5.1) denkleminin çözümü olduğu ispatlanmış olur. Eğer $F(x_n) \rightarrow \min F(x)$ ise, x_n elemanlar dizisine minimize eden dizi denilir.

TEOREM 5.2 Eğer A pozitif tanımlı kendine eş operatör ise, o zaman her minimize eden $\{x_n\}$ dizisi (5.1) denkleminin çözümüne yakınsar.

İspat:

x_0 , (5.1) denkleminin çözümü olsun.

(5.5) de $z = x_n - x_0$ olsun.

$$F(x_n) = F(x_0) + (A(x_n - x_0), x_n - x_0)$$

Ama $F(x_0) = \min F(x)$ ve $\{x_n\}$ dizisi minimum olduğundan $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$

$$(A(x_n - x_0), x_n - x_0) \rightarrow 0$$

olur.

(5.2) eşitsizliğinden $x_n \rightarrow x_0$ a giderken

$$\|x_n - x_0\|^2 \leq \frac{1}{m_A} (A(x_n - x_0), x_n - x_0)$$

$F(x)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümü için; Alman matematikçi W. Ritz (1878–1909)'un yöntemi kullanılabilir. H keyfi sisteminde $\{\varphi_i\}_i^\infty = 1$ bağımsız elemanları seçilsin ve bu mantık eğer $x \in H$ ve $x \perp \varphi_i$ her i için $x = 0$ şeklinde tanımlansın. (H uzayı çok boyutlu ve ayrılabilir olsun.). Öte yandan, n pozitif değişkenini belirlensin ve $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ elemanlarından oluşan sınırlı boyutlu bir H_n alt uzayı olsun. H_n alt uzayındaki bir x elemanı $F(x)$ fonksiyonunun en küçük değeri verdiği bulunursa;

H_n 'deki bütün $x \in H_n$ elemanlarının formu $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$ şeklindedir. x_n 'in determinanti bilinmeyen α_i katsayısı ve cebirsel problemin çözümü olan n 'yi verir. x_n elemanı (5.1) denkleminin yaklaşık çözümü elde edilmiş olur. Bu plan ile çeşitli hesaplamalar (tahminler) gerçekleştirilebilir. Farz edelim ki; A pozitif tanımlı ve kendine eş operatör olsun.

YARDIMCI TEOREM 5.1 $F(x)$ fonksiyonu H_n alt uzayında en küçük değere sahiptir.

İspat:

Ortakdaki değerlendirmeler ışığında $F(x)$ in tanımı;

$$F(x) \geq m_A \|x\|^2 - 2\|x\| \|y\| = \|x\| (m_A \|x\| - 2\|y\|)$$

şeklinde olur.

Bu nedenle, $\|x\| > \frac{2\|y\|}{m_A}$ ($F(x) > 0$ iken)'dir.

Öte yandan $F(\theta) = 0$ 'dır. Sonuç olarak F fonksiyonunun en küçük değeri H_n 'dedir. Eğer bu varsa, $s^* \subset H_n$ kapalı alanının elemanı olur ve bu koşullar ile $x \in H_n$ için $\|x\| \leq \frac{2\|y\|}{m_A}$ olur.

Teorem 5.3.2(Vulikh sayfa 143)' ye göre: sınırlı boyutlu normlu bir uzayda her sınırlanan alt küme kopmaktır. Bu teoremden yararlanarak bu alan kopmaktır. Aynı zamanda A sürekli operatöründe ve F sürekli fonksiyonunun skaler sonuçlarında yer alır. $F(x)$ 'in en küçük değeri s^* dır ve H_n dedir. Böylece yardımcı teoremin ispatı tamamlanmış olur.

$x \in H_n$ için $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$ şeklindedir. H_n deki $F(x)$ fonksiyonunun formu

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i (A \varphi_i), \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right) - 2 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i, y \right) \\ &= \sum_{i,k=1}^n \alpha_i \alpha_k (A \varphi_i, \varphi_k) - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i (\varphi_i, y) \end{aligned}$$

Yani $\phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ fonksiyonu n tane $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ değişkeni şeklindedir. F fonksiyonunun

en küçük değeri olan x elemanın α_i katsayıları n koşulunu sağlar.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Türev ve bölme işlemi yapılırsa

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k (A \varphi_i, \varphi_k) - (y, \varphi_i) = 0$$

veya

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k (\varphi_i, A \varphi_k) = (y, \varphi_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.6)$$

elde edilir.

Bu yolla (5.6) sistemiyle n lineer cebirsel denklemlerin determinant katsayılarını elde edilmiş olur. (5.6) sisteminin δ determinantının sıfırdan farklı olduğu gerçekleştirilmiş olur. Bunu denk homojen sistem olarak

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k (\varphi_i, A \varphi_k) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.7)$$

şeklinde sadece sıfır çözümlü olarak göstermek uygundur.

(5.7) sisteminin denklemlerini tek tek yazılırsa

$$(\varphi_i, A(\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k)) = 0$$

Buradan görülüyor ki, α_k değeri (5.7) sisteminin çözümünü göstermektedir. Bu durumda her

$i = 1, 2, \dots, n$ için

$$A(\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k) \perp \varphi_i$$

olur. Ama $A(\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k)$ tüm H_n ye ortogonaldır (diktir). Özet olarak

$$A \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \perp \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$$

dir.

Paragrafın başından bu yana açıklananlara uygun olarak $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k = 0$ ve φ_k lineer bağımsızının sonucunda bütün $\alpha_k = 0$ dır. $\delta \neq 0$ olduğu ispatlanmıştır. Buda (5.6) sisteminin $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \dots, \alpha_n^{(0)}$ şeklinde tek çözümü olduğunu ispatlar.

Çözüm tektir çünkü $x_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(0)} \varphi_i$, F fonksiyonunun H_n deki en küçük değeri şeklinde tanımlıdır. Bütün mümkün pozitif n değişkenlerini alınırsa x_n dizisinin yaklaşık çözümleri bulunmuş olur. Yakınsama yöntemi ispatlanırsa:

TEOREM 5.3 Eğer A operatörü hakkındaki varsayımlar sağlanıyorsa o zaman Ritz yöntemiyle elde edilen x_n elemanları (5.1) denkleminin çözümü olan x_0 a yakınsar.

İspat:

TEOREM 5.2 ye göre $\{x_n\}$ minimize eden dizidir. $\{\varphi_i\}$ sistemini ortagonalize ederek ortonormal $\{h_i\}$ bazı elde edilebilir. $\{h_i\}$ sisteminin tamlığından $\{\varphi_i\}$ sisteminin tamlığından çıkar. x_0 çözümü $x_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i h_i$ şeklinde yazılsın ve $z_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i$ olarak kabul edilirse;

$$z_n \in H_n \text{ ve } z_n \rightarrow x_0 \text{ iken}$$

$$F(z_n) \rightarrow F(x_0)$$

olur.

$$F(x_n) = \min_{x \in H_n} F(x) \quad F(x_0) = \min_{x \in H} F(x)$$

$$\text{Buradan } F(x_0) \leq F(x_n) \leq F(z_n)$$

$$F(x_n) \rightarrow F(x_0)$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

x_n ile x_0 değiştirilince oluşacak yanlışlık hesaplanırsa;

$$x_n - x_0 = A^{-1}Ax_n - A^{-1}y = A^{-1}(Ax_n - y)$$

$$\|x_n - x_0\| \leq \|A^{-1}\| \|Ax_n - y\| \leq \frac{1}{m_A} \|Ax_n - y\| \quad (5.8)$$

olur.

İlk örnekteki sonsuz sistemdeki lineer cebirsel denklem dikkate alınır

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (5.9)$$

ve Ritz yöntemi indirgeme yöntemine çevrilmiş olur.

$\{\xi_k\} \in \ell^2$ kabul edilsin ve operatör determinanı alınır (a_{ik}) lineer matrisi oluşur ve ℓ^2, ℓ^2 ye eşlenir. Matris simetrik olduğunda A operatörü kendine eş olur ve pozitif olur. Eğer $\{\xi_k\} \in \ell^2$ dizisi için $d > 0$ sınırlı ve sürekli ise

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_i \xi_k \geq d \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2$$

(5.3) deki $F(x)$ fonksiyonu için $x = \{\xi_i\}$, $y = \{\eta_i\}$ için

$$F(x) = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_i \xi_k - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i$$

$\{\varphi_i\}$ gibi $\{e_i\}$ düzenli birim vektörler sistemi ele alınsın. Ondan sonra $x \in H_n$ in formu

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \text{ ve düzenli } \xi_i, \alpha_i \text{ nin yerini alır.}$$

$$(e_i, Ae_k) = a_{ik} \quad (y, e_i) = \eta_i$$

(5.6) sistemi kesik sisteme rast gelir.

(5.9) dan

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_k = \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

elde edilir.

Buda n den büyük satır ve sütunların reddi anlamına gelir.

6. STURM-LIOUVILLE DİFARANSİYEL DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜNE RİTZ YÖNTEMİNİN UYGULANMASI

Ritz yönteminin önemli uygulamalarını vermek için önceki bölümün sonuçları genel bir fikir verir. (5.1) denklemindeki A operatörünün simetrik olduğunu ve sınırsız olduğu kabul edilsin. D lineer kümesinin H uzayının her yerinde yoğun olduğu varsayalım. Önceki bölümde olduğu gibi A nin pozitif tanımlı olduğu kabul edilsin. Yani, $d > 0$ olmak üzere bütün $x \in D$ için

$$(Ax, x) \geq d\|x\|^2$$

olur.

Bu yüzden eğer $Ax = 0$ ise, o zaman $x = 0$ dır ve buna göre A^{-1} operatörü vardır. (5.1) denkleminin A nin değer kümesine ait her y için bir tek çözümü vardır.

(5.3) fonksiyonunda $F(x)$ her $x \in D$ elemanında tanımlandığını varsayalım.

A operatörü hakkındaki yeni varsayımlar için de TEOREM 5.1 ve TEOREM 5.2 teoremleri geçerlidir ama $\min F(x)$, D de saptanmalıdır. İspatta D deki x_0, z, x elemanlarını alarak m_A yerine d kullanılacaktır.

Ritz yöntemi uygulanırsa; $\varphi_i \in D$ lineer bağımsız elemanlarından oluşan $\{\varphi_i\}$ sisteminin tamamı D dedir. Her $x \in D$ ve $\varepsilon > 0$ için n ve $\bar{x} \in H_n$ vardır.

$$(A(\bar{x} - x), \bar{x} - x) < \varepsilon$$

Buradan son eşitsizlik

$$\|\bar{x} - x\|^2 < \frac{\varepsilon}{d}$$

olur.

ε keyfi ve her $x \in D$ için D sistemi $\{\varphi_i\}$ sisteminde türetilmiş uzaya aittir ve D her yerde yoğundur. Bu uzay A ile çakışır. Bu yüzden $\{\varphi_i\}$ sistemi önceki anlamda da tamdır.

Yardımcı teorem 5.1 geçerliliğini korur. İspatında A operatörü sürekli olarak kullanılmıştı ve şimdi A operatörünün D de sürekli olması gerekmemektedir. Ama sonlu boyutlu H_n uzayında bu operatör hala sürekli dir. TEOREM 8.2.3 (Vulikh sayfa 216) e göre: Sınırlı boyutlu normlu bir uzayda her homojen operatör lineerdir. Bu teoremden ve sistem (5.6) dan yararlanarak H_n uzayının her yerinde F fonksiyonunun minimum değerinin bulunması problemi çözülecektir.

TEOREM 5.3 teki yakınsama yöntemiyle doğru elde edilir fakat ispattaki x_n dizisinin minimumluğu önemsizleşir. Yeni ispatta;

$$H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \dots \subset D$$

$$\min_{x \in H_1} F(x) \geq \min_{x \in H_2} F(x) \geq \min_{x \in H_3} F(x) \geq \dots \geq \min_{x \in D} F(x)$$

Örneğin;

$$F(x_1) \geq F(x_2) \geq \dots \geq F(x_n) \geq \dots \geq F(x_0)$$

Buradaki x_0 , (5.1) denkleminin çözümüdür. Keyfi $\varepsilon > 0$ ve N ve $\bar{x} \in H_N$ olsun.

$$(A(\bar{x} - x_0), \bar{x} - x_0) < \varepsilon$$

(5.5) den $z = \bar{x} - x_0$ olsun.

$$F(\bar{x}) < F(x_0) + \varepsilon$$

Buradan $F(x_N) < F(x_0) + \varepsilon$

olur.

Sonuç olarak her $n \geq N$ için

$$F(x_n) \rightarrow F(x_0) \text{ a giderken}$$

$$F(x_0) \leq F(x_n) < F(x_0) + \varepsilon$$

olur.

(5.8) formülündeki tahmini hataya dikkat etmek gerekir.

Sturm-Liouville diferansiyel denklemini göz önüne alınırsa;

$$-\frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{dx}{dt} \right) - q(t)x(t) = f(t) \quad (6.1)$$

$$x(a) = x(b) = 0 \quad (6.2)$$

sınır koşulları ile $p(t)$, $p'(t)$ ve $q(t)$ nin $[a, b]$ aralığında sürekli olduğu farz edilsin.

(6.2) deki sınır koşulları ile farz edilsin ki

$$p(t) > 0 \text{ ve } q(t) \leq 0$$

U operatörü pozitif ve belirli iken (5.5) ifadesinden;

her $x \in D$ için

$$(Ux, x) \geq \int_a^b p x'^2 dt$$

$$r = \min p(t) \text{ ve } r > 0 \text{ için}$$

$$(Ux, x) \geq r \int_a^b x'^2 dt$$

Buradan

$$\int_a^b x'^2 dt \leq \frac{1}{r} (Ux, x)$$

olur.

$$x(a) = 0 \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 &= |x(t) - x(a)|^2 = \left| \int_a^t x' dt \right|^2 \leq \left(\int_a^t |x'| dt \right)^2 \leq \\ &\leq (b-a) \int_a^t x'^2 dt \leq \frac{b-a}{r} (Ux, x) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Buradan

$$\|x\|^2 = \int_a^b x^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{r} (Ux, x)$$

veya

$$(Ux, x) \geq \frac{r}{(b-a)^2} \|x\|^2$$

olur.

D , $[a, b]$ doğru parçasında kurulmuş L^2 uzayının her yerinde yoğundur. Bu yolla türetilmiş Ritz yöntemi (6.1) denklemi için uygulanabilir ve yakınsama gerçekleşir. Bu durumda (5.3)

denklemini

$$F(x) = \int_a^b (px'^2 - qx^2 - 2xf) dt$$

olur.

D' den alınan $\varphi_i(x)$ fonksiyonlar sisteminin eksiksizliğini güçlendirmek için;

$x \in D$ ve $\varepsilon > 0$ da $\varphi_i(t)$ sınırlı lineer kombinasyon fonksiyonlarını bulmak yeterlidir.

$[a, b]$ aralığında

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t)$$

$$\left| x(t) - \bar{x}(t) \right| < \varepsilon \qquad \left| x'(t) - \bar{x}'(t) \right| < \varepsilon$$

Vulikh sayfa 308 deki

$$(Ux, x) = - \int_a^b (px')' x dt - \int_a^b qx^2 dt = \int_a^b px'^2 dt - \int_a^b qx^2 dt$$

formülünden

$$(U(\bar{x} - x), \bar{x} - x) = \int_a^b \left[p(\bar{x}' - x')^2 - q(\bar{x} - x)^2 \right] dt <$$

$$< \varepsilon^2 (b - a) [\max p(t) + \max |q(t)|]$$

denklemin sağ tarafı ε küçük bir sayı olduğundan en küçük değeri alır.

İspatı verilmedi ama $\varphi_k(t)$ fonksiyon sisteminin gerekli olan iki örneğine işaret edilirse;

$$(1) \quad \varphi_k(t) = (b - t)(t - a)^k$$

$$(2) \quad \varphi_k(t) = \sin \frac{k\pi(t - a)}{b - a} \qquad (k = 1, 2, \dots) \qquad (6.4)$$

Sturm-Liouville denklemini için TEOREM 5.3 ün sonucundaki Ritz yönteminin yakınsaklığının güçlendiği söylenebilir. Şöyle ki, minimum $\{x_n(t)\}$ dizisi (6.1) denkleminin çözümü olan $x_0(t)$ ye düzgün yakınsaklığı gösterilebilir. (6.3) den

$$|x_n(t) - x_0(t)|^2 \leq \frac{b-a}{r} (U(x_n - x_0), x_n - x_0)$$

olur ve son ifade sıfıra gider TEOREM 5.2 nin ispatından görülebilir.

Denklemin bir örneği alınırsa

$$-x'' + x = -t$$

$[0,1]$ aralığında ve sınır koşulları $x(0) = x(1) = 0$ olsun. Böylece kolaylıkla kesin sonuç bulunabilir.

$$x_0(t) = \frac{e}{e^2 - 1} (e^t - e^{-t}) - t$$

Diğer yandan Ritz yöntemi (6.4) sistemindeki fonksiyon kullanılarak uygulanırsa

$$\varphi_1(t) = t(1-t) \quad (a=0, b=1)$$

olur. Başka bir deyişle;

$$x = \alpha t(1-t)$$

formunun kesin sonucu olan x_1 in ilk yaklaşımı araştırılırsa

$$F(x) = \int_a^b (\bar{x}^2 + x^2 + 2tx) dt$$

şeklinde olur.

$x = \alpha t(1-t)$ yerine koyulursa $F(x)$ fonksiyonu

$$\phi(\alpha) = \frac{11}{30} \alpha^2 + \frac{1}{6} \alpha$$

olur.

$$\phi'(\alpha) = 0 \text{ ise } \alpha = -\frac{5}{22}$$

$$x_1(t) = -\frac{5}{22} t(1-t)$$

$x_0(t)$ ve ilk yaklaşımdaki $x_1(t)$ değeri karşılaştırılırsa aralığın ortasında

$$x_0\left(\frac{1}{2}\right) = -0,056$$

$$x_1\left(\frac{1}{2}\right) = -0,057$$

olur.

7. RİTZ YÖNTEMİ İLE ÖZDEĞERLERİN BULUNMASI

Bu bölümde Ritz yönteminin bir başka uygulaması anlatılacaktır. Şöyle ki, kendine eş operatörlerde özdeğer determinantıdır. Ek olarak, azami özdeğeri bulunacaktır.

A tamamıyla sürekli kendine eş operatördür. H Hilbert uzayında ve üst sınırı $M_A \neq 0$ olsun. Teorem 10.5.4 (Vulikh sayfa 296) e göre: A kendine eş operatörünün tam spektrumu M_A ve m_A sınır değerleri ile sınırlanır. Teorem 10.5.5 (Vulikh sayfa 296) e göre: M_A ve m_A sınır değerleri her kendine eş A operatörünün spektrumuna aittir. Yardımcı teorem 11.3.1 (Vulikh sayfa 318) e göre: H uzayında her sürekli kendine eş A operatörünün az bir özdeğeri vardır. Ayrıca eğer $A \neq 0$ ise o zaman A operatörünün özdeğeri sıfırdan farklıdır. Bu üç teoremden yararlanarak M_A , A operatörünün özdeğeridir ve en büyük özdeğerdir.

$E(x) = (Ax, x)$ fonksiyonunda

$$E(x) \leq M_A$$

dır.

$$M_A = \max_{\|x\|=1} E(x)$$

M_A nın bulunması, birim olan yüzeyinde fonksiyonel E nin en büyük değerinin bulunmasına indirger. 5. bölümde lineer bağımsız elemanların tam sistemle kullanımı yapılabilirdi. $h_1, h_2, \dots, h_n$ elemanlarıyla oluşturulan uzay ile H_n ifade edilirse;

$$x \in H_n \quad x = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i$$

olur.

Buradan $E(x)$ fonksiyoneli:

$$\begin{aligned} E(x) &= \left(A \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i h_i \right), \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i \right) \\ &= \sum_{i,k=1}^n \alpha_i \alpha_k (A h_i, h_k) = \phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

olur.

$\|x\|=1$ için kapalı H_n elemanlarının oluşturduğu Q_n dizisi H_n alt uzayının birim alan yüzeyinin kesişme noktasıdır. Diğer taraftan Q_n sınırlı ve kopmaktır. Sınırlı boyutlu H_n alt uzayını içine alır. Sürekli fonksiyon $E(x)$, Q_n dizisinin en büyük değerine ulaşır.

$\mu_n = \max_{x \in Q_n} E(x)$ ve x_n , μ_n de gerçekleşmiş herhangi bir Q_n elemanıdır.

$$E(x_n) = \mu_n$$

Eğer $x \in H_n$ sıfırdan farklı ise $\frac{x}{\|x\|} \in Q_n$ ve

$$E\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|^2} (Ax, x) \leq \mu_n$$

olur.

$$E(x) \leq \mu_n \|x\|^2$$

veya

$$E(x) - \mu_n(x, x) \leq 0 \tag{7.1}$$

Bu ilişki $x = 0$ için de gerçekleşir ancak sağ taraf sıfıra eşit olur.

Şimdi $z \in H_n$ ve $x = x_n + yz$ olsun. y herhangi bir gerçek sayı olsun. (7.1) denklemi için

$$(A(x_n + yz), x_n + yz) - \mu_n(x_n + yz, x_n + yz) \leq 0$$

Sol tarafı açılırsa;

$$(Ax_n, x_n) + 2y(Ax_n, z) + y^2(Az, z) - \mu_n(x_n, x_n) - 2y\mu_n(x_n, z) - y^2\mu_n(z, z) \leq 0$$

olur.

$$(Ax_n, x_n) = E(x_n) = \mu_n \text{ ve } (x_n, x_n) = 1 \text{ olduğunda}$$

$$2y[(Ax_n, z) - \mu_n(x_n, z)] + y^2[(Az, z) - \mu_n(z, z)] \leq 0$$

olur.

Sol kısmı $f(y)$ fonksiyonu olarak göz önüne alınırsa $y = 0$ için sıfır olur ve $y = 0$ için maksimum değerini alır. Buda

$$z \in H_n \text{ için}$$

$$f'(0) = 0 \text{ ve } (Ax_n, z) - \mu_n(x_n, z) = 0 \quad (7.2)$$

eşitsizliğini verir.

$z = h_1, h_2, \dots, h_n$ şeklinde (7.2) de yazılırsa

$$(Ax_n, h_i) - \mu_n(x_n, h_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7.3)$$

olur.

$x_n \in H_n$ için $x_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k$ değeri (7.3) te yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k (Ah_k, h_i) - \mu_n \alpha_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7.4)$$

α_k bilinmeyeni ile denklem sistemi göz önüne alınırsa:

$$\begin{aligned} & [(Ah_1, h_1) - \mu]\alpha_1 + (Ah_2, h_1)\alpha_2 + \dots + (Ah_n, h_1)\alpha_n = 0 \\ & (Ah_1, h_2)\alpha_1 + [(Ah_2, h_2) - \mu]\alpha_2 + \dots + (Ah_n, h_2)\alpha_n = 0 \\ & \dots\dots\dots \\ & (Ah_1, h_n)\alpha_1 + (Ah_2, h_n)\alpha_2 + \dots + [(Ah_n, h_n) - \mu]\alpha_n = 0 \end{aligned} \tag{7.5}$$

μ parametreleri ile (7.4) eşitsizliğindeki x_n için ifadedeki katsayılar $\mu = \mu_n$ için bu sistemin

çözümünü temsil eder. $\|x_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = 1$ olduğundan (7.5) sistemi $\mu = \mu_n$ için sıfırdan farklı

bir çözüme sahiptir. Ama determinantının sıfıra eşit olması gerekir. Başka bir deyişle μ_n denklemin köküdür.

$$\begin{vmatrix} (Ah_1, h_1) - \mu & (Ah_2, h_1) & \dots & (Ah_n, h_1) \\ (Ah_1, h_2) & (Ah_2, h_2) - \mu & \dots & (Ah_n, h_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (Ah_1, h_n) & (Ah_2, h_n) & \dots & (Ah_n, h_n) - \mu \end{vmatrix} = 0 \quad (7.6)$$

(7.6) denkleminin sol kısmındaki determinantın matrisi simetriktir ve (7.6) denkleminin bütün kökleri gerçektir. μ_n im bu köklerin en büyüğü olduğu ispatlanırsa:

μ^* denklemin herhangi bir kökü olsun.

Bu kök ile (7.5) sisteminin denklemlerinde μ nin yerine yazılarak herhangi bir sıfırdan farklı

$\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*$ şeklinde çözüm aranırsa:

Bu çözüm her zaman $\sum_{k=1}^n \alpha_k^{*2} = 1$ için seçilmelidir ve x^* elemanı

$$x^* = \sum_{k=1}^n \alpha_k^* h_k \in Q_n$$

şeklinde olur.

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k^* (Ah_k, h_i) - \mu^* \alpha_i^* = 0 \quad i = (1, 2, \dots, n)$$

(7.5) sisteminin determinanı alınır

$$(Ax^*, h_i) - \mu^* \alpha_i^* = 0$$

olur. Hepsini toplanır

$$(Ax^*, \sum_{i=1}^n \alpha_i^* h_i) - \mu^* \sum_{i=1}^n \alpha_i^{*2} = 0$$

veya

$$(Ax^*, x^*) = \mu^* \text{ yani } E(x^*) = \mu^*$$

olur.

Görülüyor ki, (7.6) denkleminin bütün kökleri Q_n de $\max E(x)$ in (7.6) denkleminin en büyük köküdür. μ_n i ardışık tahminler ile aranan M_A da düşünülürse $n \rightarrow \infty$ için $\mu_n \rightarrow M_A$ olduğu ispatlanmalıdır. x_0 , normu $\|x_0\|=1$ olan ve M_A özdeğerine denk özeleman olsun. x_0 'ı Fourier Serisine genişletilirse $x_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i h_i$ ve $y_n = \sum_{i=1}^n \beta_i h_i$ olduğu varsayılırsa;

$y_n \rightarrow x_0$ giderken $\|y_n\| \rightarrow 1$ gider ve en büyük n için $y_n \neq 0$ olur.

$z_n \in Q_n$ için $z_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$ olur.

$z_n \rightarrow x_0$ giderken $E(z_n) \rightarrow E(x_0) = M_A$

$\varepsilon > 0$ kabul edilirse $E(z_n) > M_A - \varepsilon$, $n \geq N$ olacak şekilde N bulunabilir.

Ama $E(z_n) \leq \mu_n = \max_{x \in Q_n} E(x)$ ve $\mu_n > M_A - \varepsilon$ olur.

Diğer taraftan her n için $\mu_n \leq M_A = \max_{\|x\|=1} E(x)$ olur ve sonuç olarak $\mu_n \rightarrow M_A$ dır.

Bu nedenle, en büyük özdeğerin bulunması probleminde Ritz yönteminde yakınsamanın kullanılacağı kabul edilmişti.

GÖZLEMLER:

1) (7.5) denklemleri kısa yolla da elde edilebilir ama yöntemin güçlü bir temeli olmaz.

$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i \in Q_n$ için $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$ şartı uygun ise μ_n in değeri koşullu maksimum $\phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ fonksiyonunun determinantından daha büyüktür.

Eğer bu problemi Lagrange belirsiz çarpanlar yöntemiyle çözülsürse yardımcı denklem şu şekilde kurabilir:

$$\begin{aligned} \psi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= \phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) - \mu \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \\ &= \sum_{i,k=1}^n \alpha_i \alpha_k (Ah_i, h_k) - \mu \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \end{aligned}$$

Burada μ belirsiz çarpandır. $\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i}$ hesaplanırsa eşitlik sıfır olur.

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k (Ah_i, h_k) - \mu \alpha_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

olur. Buda (35) denklemine denk gelir.

2) Eğer $\{h_i\}$ esassından başlanmazsa keyfi sistemin lineer bağımsız elemanları $\{\varphi_i\}$ ile başlanırsa Lagrange yönteminin çarpanları uygulanabilir ama bu şekilde bağlantının şartları çok daha karışık olur.

$$\sum_{i,k=1}^n \alpha_i \alpha_k (\varphi_i, \varphi_k) = 1$$

(7.5) sisteminin yerine daha karmaşık bir denklemler sistemi elde edilir ve determinantın en büyük katsayısı μ_n e eşit olur.

3) Burada sunulan yöntem determinantın diğer özdeğerlerinin uygulamasıdır. Mesela, eğer A her yerde sürekli, pozitif, kendine eş operatör, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots$ ve $\{h_n\}$ asıl sistemin öz elemanlarının oluşturduğu özdeğerler serisi ise h_1 ortagonaline sahip birim alan yüzeyindeki elemanlardan oluşan $E(x)$ fonksiyonu ile λ_2 için $E(x)$ fonksiyonunun maksimumu bulunabilir.

ÖRNEK: K integral operatörü olsun.

$$y(t) = \int_0^1 K(t, s)x(s)ds$$

simetrik çekirdekli

$$K(t, s) = \begin{cases} t(1-s) & t \leq s \\ s(1-t) & t \geq s \end{cases}$$

K operatörü her yerde sürekli ve kendine eştir.

$K(t, s) > 0$, $0 < t$ ve $s < 1$ ve $x(t) > 0$ için

$$(Kx, x) = \int_0^1 \int_0^1 K(t, s)x(s)x(t)dsdt > 0$$

$M_k > 0$ ve K operatörünün özdeğeridir. M_k nın yaklaşık değerini elde etmek için iki fonksiyon sistemini ele alınır ise:

$$\varphi_1(t) = 1 \text{ ve } \varphi_2(t) = t$$

Gözlem 2 ye göre bu sistemi kullanarak problem çözülebilir ama sistem ortagonal olduğunda durumun sunumu sınırlandırılmalıdır. Öyleyse fonksiyonlar sistemini 1 ve t de ortagonize edilsin. Buradan $h_1(t) = 1$, $h_2(t) = 2\sqrt{3}(t-1/2)$ elde edilir. Şimdi Q_2 serisinde $E(x) = \max(Kx, x)$ bulunsun. $x = \alpha_1 h_1(t) + \alpha_2 h_2(t)$ ve $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$ iken;

Her $x \in Q_2$, t de lineer fonksiyondur. $x(t) = \beta + \gamma t$, $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 \sqrt{3}$, $\gamma = 2\alpha_2 \sqrt{3}$ tür.

Bu nedenle $E(x) = (Kx, x)$, Q_2 deki formu,

$$\begin{aligned} E(x) &= \tilde{\phi}(\beta, \gamma) = \int_0^1 \int_0^1 K(t, s) (\beta + \gamma s) (\beta + \gamma t) ds dt = \\ &= \int_0^1 (\beta + \gamma t) \left[(1-t) \int_0^1 s (\beta + \gamma s) ds + t \int_t^1 (1-s)(\beta + \gamma s) ds \right] dt \end{aligned}$$

Basit hesaplamalar sonucunda,

$$\tilde{\phi}(\beta, \gamma) = \frac{1}{12} \beta^2 + \frac{1}{12} \beta \gamma + \frac{1}{45} \gamma^2 \text{ olur.}$$

β ve γ yerine α_1 ve α_2 değerleri yazılırsa,

$$\phi(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{12} \alpha_1^2 + \frac{1}{60} \alpha_2^2$$

Gözlem 1'e göre $\phi(\alpha_1, \alpha_2)$ 'nin maksimum değeri ile problem çözülür.

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{12} \alpha_1^2 + \frac{1}{60} \alpha_2^2 - \mu(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$$

Buradan

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{6} \alpha_1 - 2\mu \alpha_1, \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{30} \alpha_2 - 2\mu \alpha_2$$

$$\left(\frac{1}{12} - \mu \right) \alpha_1 = 0, \left(\frac{1}{60} - \mu \right) \alpha_2 = 0 \text{ olur.}$$

Bu verilen örneğin (7.5) sistemidir. Determinantı alınarak sıfıra eşitlenirse:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{12} - \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{60} - \mu \end{vmatrix} = 0$$

olur.

Buradan iki kök elde edilir. $\mu = \frac{1}{12}$ ve $\mu = \frac{1}{60}$.

Bunların en büyüğü $\mu = \frac{1}{12}$

M_K 'nın yaklaşık çözümü olur.

$$\left| \frac{(Kh_1, h_1) - \mu}{(Kh_1, h_2)} - \frac{(Kh_2, h_1)}{(Kh_2, h_2) - \mu} \right| = 0 \quad \text{yazılırsa (7.6) denkleminde,}$$

$$(Kh_1, h_1) = \frac{1}{12}, (Kh_2, h_1) = (Kh_1, h_2) = 0, (Kh_2, h_2) = \frac{1}{60}$$

bulunur.

Fakat bu yol daha uzun bir hesaplama gerektirir.

(β, γ) fonksiyonunu kullanarak aynı μ değerlerine ulaşılabilirdi. Bu şekilde olsaydı;

$$\beta^2 + \beta\gamma + \frac{1}{3}\gamma^2 = 1 \quad \text{den}$$

$$\|x\|^2 = \int_0^1 (\beta + \gamma t)^2 dt = 1$$

denkleminin çözümü aranacaktı.

Bulunan K 'nın yaklaşık en büyük özdeğeri ile kesin değeri karşılaştırılsın. K 'nın

$x(0) = x(1) = 0$ sınır koşulları ile $Ux = -x''$ Sturm-Liouville operatörünün Green's operatörü olduğu kolaylıkla görülebilir. (11.7)

Gerçekten Green fonksiyonu $x'' = 0$ denkleminin $u(0) = v(1) = 0$ koşullarını sağlayan $u(t) = t$ ve $v(t) = 1 - t$ çözümleri ile kurulabilir.

$[0, \pi]$ aralığında verilmiş $Ux = -x''$ operatörünün özdeğerleri kolayca bulunabilir.

Özdeğerlerin en küçüğünün π^2 olduğu da kolayca görülebilir. Green operatörünün özdeğerlerinden U operatörünün özdeğerleri elde edilebilir. K 'nın en büyük özdeğeri

$$\frac{1}{\pi^2} \approx 0.101 \approx \frac{1}{10} \quad \text{olur.}$$

İki fonksiyon sistemini kullanarak yaklaşık olarak $\frac{1}{12}$ değeri elde edilmişti.

8. BUBNOV-GALERKIN METODU

1913-1915 yıllarında (5.1) denkleminin Ritz yöntemiyle çözümü I.G.Bubnov ve B.G.Galerkin tarafından geliştirilmiştir.

Kendine eş veya simetrik A operatörünün (5.1) denklemi ile Ritz yöntemi yardımıyla çözümü için n . dereceden x_n yaklaşık değerinin araştırılması ile (5.6) denklem sistemi elde edilir. (5.6) sistemi;

$$(A (\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k) - y, \varphi_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$\text{yani } x_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \quad n \text{ koşul için araştırırsak}$$

$$Ax - y \perp \varphi_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \text{ için olur.}$$

Diğer başlangıç düşüncelerinden Ritz yöntemindeki koşullar Bubnov-Galerkin metodu için önemlidir. Ayrıca madem ki ortogonalite için işaret edilen koşullar A keyfi operatörü için anlamlı, A 'nın kendine eş veya simetrik olan koşullarını Bubnov-Galerkin metodunda ihmal edilebilir. Bubnov-Galerkin metodunun içeriği aşağıda anlatılmaktadır.

H Hilbert uzayının her yerinde yoğun D lineer kümesinde tanımlı olmak üzere A keyfi operatör olmak üzere (5.1) denklemi verilmiş olsun. D ye ait lineer bağımsız olan ve tam sistem oluşturan $\{\varphi_i\}$ elemanları seçilsin.

Eğer verilmiş y elemanı için $Ax - y \perp \{\varphi_i\}$ lerin hepsine dik ise o zaman $Ax - y = 0$, yani x , (5.1) in çözümü olur. Bunun yerine $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ elemanlarından meydana gelen H_n alt uzayı ortaya koyulsun ve

$$Ax - y \perp \varphi_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \text{ için}$$

olmak üzere $x \in H_n$ elemanı aranırsa:

Bu (5.6) sisteminin çözümünü verir. Daha geniş sınıf operatörler ile denklemler için Ritz yöntemiyle yukarıda yapılan yakınsama işlemleri Bubnov-Galerkin yöntemi içinde kanıtlanabilir. Bubnov-Galerkin metodunun diferansiyel denklemin çözümünde Sturm-Liouville denklemlerinden daha bir forma sahip olduğu söylenmişti. Ama bu tezde Bubnov-Galerkin yönteminin araştırması olmayacaktır ve sadece somut bir sınır değer problemine uygulanacaktır. Araştırma hakkındaki detaylar S.G. Mikhlin ve Rectorys'ın kitaplarında

verilmiştir.

UYGULAMA: Bubnov-Galerkin yöntemi ile

$$y'' - 2xy' + 2y = x, \quad 0 < x < 1 \quad (8.1)$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 0 \quad (8.2)$$

sınır değer (Sturm-Liouville) probleminin yaklaşık çözümünü bulunuz.

Hilbert uzayı H olarak $L_2(0,1)$ uzayını alalım. A operatörü aşağıdaki şekilde tanımlansın:

A nın tanım kümesi $[0,1]$, 2. türevi sürekli ve (8.2) koşullarını sağlayan fonksiyonlardan ibaret olsun ve $y \in D(A)$ iken

$$Ay = y'' - 2xy' + 2y$$

olsun.

A nın $L_2[0,1]$ i $L_2^2[0,1]$ e dönüştüren bir lineer operatör olduğu açıkça görülmektedir. A operatörünün yardımıyla (8.1), (8.2) sınır değer problemi

$$Ay = x \quad (8.3)$$

şeklinde bir operatör denklemi olarak yazılır. Böylece (8.1), (8.2) sınır değer probleminin yaklaşık çözümünün bulunması (8.3) operatör denkleminin yaklaşık çözümünün bulunmasına indirgenir. Buna göre (8.3) çözümü ile uğraşılacaktır.

$\{\varphi_i\}$ sistemi yerine

$$\varphi_1 = 1 - x, \quad \varphi_2 = x(1 - x), \quad \varphi_3 = x^2(1 - x), \quad \varphi_4 = x^3(1 - x)$$

fonksiyonları alınsın ve (8.3) ün yaklaşık çözümü

$$y = (1 - x) + c_1 x(1 - x) + c_2 x^2(1 - x) + c_3 x^3(1 - x) \in H$$

şeklinde olmalıdır. Yöntem gereği c_1 , c_2 ve c_3 sabitleri

$$(Ay - x) \perp \varphi_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (8.4)$$

koşullarında tanımlanmalıdır. (8.4) koşulları $L_2[0,1]$ de iç çarpımın tanımına göre

$$\int_0^1 (Ay - x) \cdot (x - x^2) dx = 0$$

$$\int_0^1 (Ay - x) \cdot (x^2 - x^3) dx = 0 \quad (8.5)$$

$$\int_0^1 (Ay - x) \cdot (x^3 - x^4) dx = 0$$

şeklinde yazılır.

Buradan;

$$Ay - x = (2 - x) + c_1(-2 + 2x^2) + c_2(2 - 6x - 2x^2 + 4x^3) + c_3(6x - 12x^2 - 4x^3 + 6x^4)$$

olur.

$Ay - x$ değerini (8.5) integrallerinde yerine koyulursa

$$98c_1 - 112c_2 + 38c_3 = 105$$

$$42c_1 + 100c_2 + 37c_3 = 49$$

$$22c_1 + 32c_2 + 31c_3 = -112$$

denklemleri elde edilir.

Buradan $c_1 = 6,291782597$; $c_2 = 1,353136792$; $c_3 = -9,474825628$ olarak bulunur.

Böylece

$$y = (1 - x)(1 + 6,291782597x + 1,353136792x^2 - 9,474825628x^3)$$

şeklinde problem çözülmüş olur.

9. KOLLAKASIYA YÖNTEMİ

Bu yöntem aşağıdaki şekilde tanımlanır. (6.1), (6.2) Sturm-Linville problemi göz önüne alınsın. Genelde (6.2) koşulları

$$\ell_1(y) = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A$$

$$\ell_2(y) = \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B$$

şeklinde verilebilir.

Burada $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, A, B$ keyfi sabit (reel) sayılardır.

(6.1), (6.2) probleminin çözümü

$$y(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \quad (9.1)$$

şeklinde aranmalıdır.

Burada $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ fonksiyonları (6.2) koşullarını sağlayan lineer bağımsız fonksiyonlardır.

$$L(y) - f(x) = L(\varphi_0) - f(x) + \sum_{i=1}^n c_i L(\varphi_i) \quad (9.2)$$

ifadesi oluşturulsun.

Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabitlerdir.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ $[a, b]$ aralığına ait herhangi noktalar olsun. (9.2) deki $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitlerini

$$L(\varphi_0)|_{x=x_k} - f(x_k) + \sum_{i=1}^n c_i L(\varphi_i)|_{x=x_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

olacak şekilde seçilmelidir. Böylece $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$ bilinmeyenlerine göre lineer cebirsel denklem sistemi elde etmiş olur. Bu yöntem Kollakasiya yöntemi adı ile bilinmektedir.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ noktalarına Kollakasiya noktaları denir. Bu yöntem non lineer diferansiyel denklemlerin çözümüne de uygulanabilir. Belirtelim ki bu yöntemle çözüm Bublov-Galerkin yöntemine göre daha kolay işlemlerle yerine getirilir. Bir örnek gösterilir ise;

UYGULAMA: Kollakasiya yöntemi ile

$$y'' + x^2 y' - xy = e^x, \quad -1 < x < 1$$

$$y(-1) = 0, y(1) = 0$$

sınır değer probleminin yaklaşık çözümünü bulunuz.

$$\varphi_0(x) = 0, \varphi_1(x) = 1 - x^2, \varphi_2(x) = x(1 - x^2)$$

alalım.

Kollakasiya noktaları olarak

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}$$

alalım.

Ele aldığımız örnekte

$$L(y) = y'' + x^2 y' - xy$$

$$f(x) = e^x$$

$$L(\varphi_0) = 0, L(\varphi_0)|_{x=0, \frac{1}{2}} = 0$$

$$y = \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$$

Buradan $y = c_1(1 - x^2) + c_2 x(1 - x^2)$ olur.

$$L(y) = c_1(-2 - x - 3x^3) + c_2(-6x + 2x^2 - 4x^4) - e^x$$

$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}$ kollakasiya noktaları $L(y)$ de yerine yazılırsa

$$-2c_1 - 1 = 0$$

$$23c_1 + 22c_2 + 8\sqrt{e} = 0$$

denklemlerini elde edilir.

Buradan $c_1 = -0,5$; $c_2 = -0,077$ değerleri elde edilir.

Böylece

$$y \approx -0,5(1 - x^2) - 0,077x(1 - x^2)$$

şeklinde problem çözülmüş olur.

10. SONUÇLAR

Bu tezde fonksiyonel denklemlerin çeşitli çözüm yolları ve bu yöntemlerin daha kolay anlaşılabilmesi için gerekli teoremlerin ispatlarına yer verilmiştir. İncelenen çözüm yolları ile:

1) $y'' - 2xy' + 2y = x$, Sturm-Lioville denkleminin $0 < x < 1$ aralığında $y(0) = 1$, $y(1) = 0$ sınır koşullarındaki çözümü incelenmiş ve Bubnov-Galerkin yöntemiyle çözüme ulaşılmıştır.

2) $y'' + x^2 y' - xy = e^x$, denkleminin $-1 < x < 1$ aralığında $y(-1) = 0$, $y(1) = 0$ sınır değerlerindeki çözümü için de Kollakasiya yönteminden yararlanılmıştır.

KAYNAKLAR

B. Z. Vulikh, (1963), "Introduction To Functional Analysis For Scientists And Technologists", Oxford London New York Paris, Pergamon Pres

B. П. Demidevich, I. A. Maron, E. Z. Suvaluva, (1967), "Analizin Sayısal Yöntemleri", Moskova, Nauka(*)

John D. Pryce, (1993), "Numerical Solution Of Sturm-Liouville Problems", Oxford New York Tokyo, Clarendon Pres

K. Rektorys, (1980), "Variational Methods in Mathematics Science and Engineering", New York

N. B. Kopaceva, I. A. Maron, (1972), "Hesaplama Matematiği, Örnek ve Problemlerle", Moskova, Nauka(*)

S. G. Mikhlin, (1964), "Variational Methods of Mathematical Physics", Oxford, New York

S. I. Gasimova, (1988), "Süreksiz Katsayılı Diferansiyel Denklemler İçin Kollokasiya Yöntemi Üzerine", Izv. AN Azerb. SSR, Ser.Fiziko.Tekh.i Mat. Noun, N:Y(*)

S. Pruess, C. T. Fulton, Yuantao Xie, (1992), "An Asymptotic Numerical Method For A Class Of Singular Sturm-Liouville Problems", Colorado School Of Mines, submitted SINUM

S. Pruess, (1975), "Higher-Order Approximations to Sturm-Liouville Eigenvalues", Numer Math, 24:241-247

W. Kirsch, B. Simon, (1985), "Universal Lower Bounds On Eigenvalue Splittings For One-Dimensional Schrodinger Operators, Comm Math Physics, 97:453-460

* Rusça Kaynak

İNTERNET KAYNAKLARI

- [1] <http://www.ewp.rpi.edu/hartford/~ernesto/F2004/IFEM/Notes/w06.pdf>
- [2] <http://www.aerostudents.com/files/differentialEquations/sturmLiouvilleProblems.pdf>
- [3] <http://www.math.iitb.ac.in/~siva/ode7.pdf>
- [4] <http://www.mth.kcl.ac.uk/~jerdos/OpTh/w7.pdf>

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	20.06.1983	
Doğum yeri	Bandırma	
Lise	1997–2001	Bandırma Şehit Mehmet Gönenc Lisesi(Y.D.A)
Lisans	2001–2006	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2006–2009	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı Matematik Mühendisliği Programı
Çalıştığı kurumlar		
	2008–2009	Türkiye Halkbankası A.Ş Yazılım Geliştirme Daire Başkanlığı